**《复变函数》考试试题（九）参考答案**

**一、判断题（20分）**

1、× 2、× 3、√ 4、√ 5、√ 6、√ 7、√ 8、√ 9、× 10、√

**二、填空题（20分）**

1、 2、 3、 4、1 5、1

6、 7、整函数 8、 9、8 10、

**三、计算题（30）**

1、解：

2、解：





因此 

故

.

3、解：



4、解：

由于，从而.

因此在内

有 

5、解：设, 则.



6、解：设则在内有两个一级极点，



因此，根据留数定理有



**四、证明题（20分）**

1**、**证明：设

则在上， 即有.

根据儒歇定理，与在单位圆内有相同个数的零点，而的零点个数为6，故在单位圆内的根的个数为6.

2**、**证明：设，则, 由于在内解析，因此有 , .

于是故，即在内恒为常数.

3**、**证明：由于是的阶零点，从而可设

，

其中在的某邻域内解析且，

于是 

由可知存在的某邻域，在内恒有，因此在内解析，故为的阶极点.

**五、计算题（10分）**

解：1**、**设则将区域保形变换为区域.

2**、**设,则将区域保形变换为区域

3、设则将保形变换为上半平面,因此,所求的单叶函数为



**《复变函数》考试试题（十）参考答案**

一、判断题（40分）：

1.√ 2. √ 3.√ 4. × 5. √ 6. × 7. √ 8. √ 9. √ 10. √

二、填空题（20分）：

1.  2.  3.  4.  5. 

三、计算题（40分）

1. 解：在上解析，由积分公式，有



2. 解：设，有

3. 解：



4. 解：，







故，

5. 解：令， 则，在内均解析，且当时



由定理知根的个数与根的个数相同.

故在内仅有一个根.

**《复变函数》考试试题（十一）参考答案**

一、1．×　　2．√　　３．×　　４．√　　５．√

二、1． 1 2．　　３．　　４．

５．

６．　　 ７．　　　　　　８．15

9.  10. 

三、1．解： 





.

又 

.

故.

2.解: (1) 奇点为对任意整数,

为二阶极点, 为本性奇点.

(2) 奇点为

为本性奇点,对任意整数,为一级极点,为本性奇点.

3. (1)解: 共有六个有限奇点, 且均在内,

由留数定理,有



将在的去心邻域内作展开





所以

.

(2)解: 令,则





再令则,故



由留数定理,有



4.解：儒歇定理：设为一条围线，若函数与均在内部及上解析且

，，则与在内部的零点个数相同.

令, 则在内解析且

当时 ,

由儒歇定理的根个数与根个数相同

故在内有4个根.

四、1.证明: 



由在上半平面内解析,从而有



因此有

故在下半平面内解析.

2.证明: (1) 则





故,即在上为的上升函数.

(2)如果存在及使得

则有 

于是在内恒为常数,从而在内恒为常数.

**《复变函数》考试试题（十二）参考答案**

一、判断题.

1. × 2. × 3. × 4. √ 5. ×

二、填空题.

1.  2.  3.  4. 

5.  6.  7.  8. 

9.本性 10. 

三、计算题.

1.解： 

由 得 从而有



2.解：（1）的各解析分支为，.

为的可去奇点，为的一阶极点。

  

（2）

3.计算下列积分

解：（1）





（2）设

令， 

则





4.儒歇定理：设是一条围线，及满足条件：

（1）它们在的内部均解析，且连续到；

（2）在上，

则与在的内部有同样多零点，

即 有 

由儒歇定理知在没有根。

四、证明题

1证明：.设 有 





易知，在任意点都不满足条件，故在复平面上处处不解析。

2.证明：于高阶导数公式得 

即

故 从而

**《复变函数》考试试题（十三）参考答案**

一、填空题．（每题２分）

1.  2. 及 3.  4. 

5.  6.  7.椭圆

8.  9.  10. 

二、计算题．

１．计算下列各题．（９分）

解: (1) 

(2) 



(3) 



2. 解:  

故共有三个根: , , 

3. 解: 

是调和函数.











4. 解 (1) 

(2) 



5. 解: 时



时



6. 解: (1) 

(2) 

7.解: 设 和为上半平面内的两个一级极点,且





8. (1)  (2) 

9. 解: 设,则 

当且仅当时,满足条件,故仅在可导,在平面内处处不解析.

三、

1. 证明: 设,因为为常数,不妨设 (为常数)

则 

由于在内解析,从而有, 

将此代入上述两式可得

于是 因此在内为常数.

2. 解: 设,  （，为实常数）

则



故的轨迹是直线

**《复变函数》考试试题（十四）参考答案**

一、

1、  2、且

3、0 4、有限值 5、4 6、

7、椭圆 8、 9、 10、

二、计算题。

1、解（1）



（2）

（3）

=

2、解： 

故：方程共有三个根，分别为：

3、解：



故是调和函数。



4. 解: (1) 



(2) 

5. 解: 

= 

6. 解: (1) 

(2) 





7. 解: 设 则, 



令则在内只有一级权点, ,依离数定理有



8. 解: (1)  即 . 故

(2) 



9.解 设, 则

因解析,由条件有,解得.

三 1. 证明 设,由 有,

又也在也解析,有,

由与得

故在内为常数.

2. 证明,设有



即点在直线上为实常数.