

# Inleiding in de lineaire algebra

(SV 0.9)

W.Oele  
P.J. den Brok

16 maart 2014

# Inleiding

De cursus lineaire algebra bestaat uit een aantal colleges in de matrix- en de vectorrekening. De colleges over – en de oefenopdrachten uit – de matrixrekening zijn bedoeld als voorbereiding voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen die bijvoorbeeld optreden bij optimalisatieproblemen. De vectorrekening is vooral bedoeld als voorbereiding op het vak ‘computer graphics’.



Een optimalisatieprobleem met vectoren.

Aan de student wordt uitdrukkelijk het advies gegeven tijdens het bestuderen van de stof wekelijks de opgaven te maken van de behandelde stof. De ervaring leert, dat de volgende hoofdstukken alleen begrepen worden als de vorige hoofdstukken geoefend zijn. Studenten die te laat beginnen met oefenen bouwen al snel een moeilijk te overbruggen achterstand op.

W. Oele en P.J. den Brok (Rotterdam, februari 2014)

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Matrix- en vectorrekening</b>	<b>5</b>
1.1	Elementaire bewerkingen . . . . .	6
1.1.1	Optellen en aftrekken . . . . .	6
1.1.2	Het product van een scalair en een matrix . . . . .	7
1.1.3	Nulmatrices, nulvectoren, negatieve matrices en rekenregels . . .	7
1.1.4	Het inproduct van twee vectoren . . . . .	8
1.1.5	Het vectorproduct . . . . .	8
1.1.6	Het matrixproduct . . . . .	9
1.1.7	Het transponeren van een matrix . . . . .	11
1.1.8	De symmetrische matrix . . . . .	12
1.1.9	De identiteitsmatrix . . . . .	12
1.2	Opgaven . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Stelsels van lineaire vergelijkingen</b>	<b>16</b>
2.1	Het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen . . . . .	20
2.2	Lineaire stelsels van het type $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ . . . . .	21
2.2.1	De coëfficiëntenmatrix . . . . .	22
2.2.2	De toegevoegde matrix . . . . .	22
2.2.3	Een matrix in echelonvorm . . . . .	23
2.2.4	De rijcanonieke matrix . . . . .	23
2.3	De veegmethodes . . . . .	24
2.3.1	De veegmethode van Gauss . . . . .	25
2.3.2	Het oplossen van een lineair stelsel uit de echelonvorm . . . . .	27
2.3.3	De veegmethode van Gauss/Jordan . . . . .	28

2.3.4	Overzicht van de veegmethodes . . . . .	30
2.4	De oplosbaarheid . . . . .	30
2.4.1	Het lineair onafhankelijke stelsel . . . . .	31
2.4.2	Het lineair tegenstrijdige stelsel . . . . .	31
2.4.3	Het lineair afhankelijk stelsel . . . . .	33
2.4.4	Overzicht oplosbaarheid . . . . .	34
2.5	De inverse matrix . . . . .	34
2.6	Lineaire stelsels oplossen met de inverse matrix . . . . .	37
2.7	De determinant: eigenschappen en gebruik . . . . .	40
2.7.1	De determinant van een $2 \times 2$ matrix . . . . .	40
2.7.2	De determinant van strijdige 2D-vergelijkingen . . . . .	40
2.7.3	De determinant van afhankelijk 2D-vergelijkingen . . . . .	41
2.7.4	De determinant van oplosbare 2D-vergelijkingen . . . . .	41
2.7.5	De determinant van een $3 \times 3$ matrix . . . . .	41
2.7.6	De determinant ‘recursief’ berekenen . . . . .	45
2.7.7	De regel van Cramer . . . . .	46
2.8	Bijzondere lineaire stelsels . . . . .	47
2.8.1	Lineaire stelsels van het type $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . . . . .	47
2.8.2	Lineaire stelsels van het type $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . . . . .	48
2.9	Opgaven . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Vectormeetkunde</b>	<b>50</b>
3.1	De vectorruimte . . . . .	50
3.2	De affiene ruimte . . . . .	53
3.2.1	De affiene 2D-ruimte . . . . .	53
3.2.2	Lijnen in de affiene 2D-ruimte . . . . .	54
3.2.3	De affiene 3D-ruimte . . . . .	55
3.2.4	Een lijn in de affiene 3D-ruimte . . . . .	56
3.2.5	Een vlak in de affiene 3D ruimte . . . . .	56
3.3	De Euclidische ruimte . . . . .	57
3.3.1	Het inproduct $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ in de Euclidische ruimte . . . . .	59
3.3.2	Het uitproduct $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ in de Euclidische 3D-ruimte . . . . .	62

3.3.3	De normaalvergelijking van een vlak . . . . .	66
3.3.4	De normaalvergelijking van een lijn . . . . .	68
3.3.5	Het tripleproduct $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ in de Euclidische 3D-ruimte . . . . .	69
3.4	Opgaven . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Transformaties</b>	<b>74</b>
4.1	Affiene transformaties . . . . .	74
4.1.1	Translatie van een punt . . . . .	75
4.1.2	Rotatie om de oorsprong . . . . .	75
4.1.3	Schaalverandering . . . . .	78
4.1.4	Shearing . . . . .	80
4.1.5	Het toepassen van affiene transformaties . . . . .	80
4.2	Homogene coördinaten . . . . .	83
4.2.1	Transformaties van homogene coördinaten . . . . .	85
4.2.2	Samengestelde homogene transformaties . . . . .	86
4.2.3	Homogene 2D en 3D transformaties . . . . .	88
4.3	Opgaven . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Hoeken, cirkels en goniometrie</b>	<b>92</b>
<b>B</b>	<b>Enkele veel voorkomende waarden in de goniometrie</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Afleiding van de regel van Cramer voor twee onbekenden</b>	<b>96</b>
<b>D</b>	<b>Het Euclidische in- en uitproduct</b>	<b>97</b>
<b>E</b>	<b>Algemene richtlijnen voor het practicum</b>	<b>100</b>

# Hoofdstuk 1

## Matrix- en vectorrekening

Een matrix is een schema van elementen in rijen en kolommen. De rijen leest men horizontaal, de kolommen verticaal. Het aantal rijen en kolommen van een matrix wordt de afmeting van een matrix genoemd. In volgende voorbeeld zien we een matrix met de afmeting  $3 * 4$  bestaande uit 3 rijen en 4 kolommen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & -4 & \frac{2}{3} & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Een rijvector met  $n$  elementen is vergelijkbaar met een  $1 * n$  matrix. Een kolomvector met  $m$  elementen is vergelijkbaar met een  $m * 1$  matrix. Een  $n * m$  matrix is te beschouwen als één kolom van  $n$  rijvectoren met  $m$  elementen of één rij van  $m$  kolomvectoren met  $n$  elementen. De elementen van een matrix of vector zijn meestal scalair van aard. Scalairen zijn gewone constanten, variabelen of functies met een reële waarde, aangegeven met normale letters en cijfers. Anders dan scalairen worden matrices met vetgedrukte hoofdletters en vectoren met vetgedrukte kleine letters genoteerd:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & -4 & \frac{2}{3} & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wanneer we een specifiek element in de  $2^e$  rij en  $3^e$  kolom van de matrix  $\mathbf{A}$  bedoelen, dan geven we dat aan als  $a_{2,3}$ . De matrix  $\mathbf{A}$  uit het vorige voorbeeld heeft bijvoorbeeld de elementen  $a_{2,3} = \frac{2}{3}$  en  $a_{2,2} = -4$ . Als  $1 \leq r \leq n$  en  $1 \leq k \leq m$  dan is het element  $a_{r,k}$  zonder meer te adresseren in een  $n * m$  matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Een vierkante matrix is een matrix, waarvan het aantal rijen gelijk is aan het aantal kolommen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ 12 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

De hoofddiagonaal van een matrix is een denkbeeldige lijn die begint bij element<sub>1,1</sub> en schuin naar beneden loopt. In de volgende matrices loopt de hoofddiagonaal langs de elementen met de waarde 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 12 & 1 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alleen een vierkante matrix wordt door de hoofddiagonaal in een gelijkvormige linker benedenhelft en een rechter bovenhelft gesplitst. In de volgende vierkante matrix wordt de hoofddiagonaal gevormd door de elementen 3, 5, -4 en 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & 5 \\ 9 & 5 & x & 86 \\ 2 & 1 & -4 & 8 \\ 9 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Elementaire bewerkingen

### 1.1.1 Optellen en aftrekken

Twee matrices kunnen bij elkaar worden opgeteld en van elkaar worden afgetrokken als zij dezelfde afmetingen hebben.

Dit betekent dat het *aantal* rijen van de ene matrix gelijk moet zijn aan het *aantal* rijen van de andere. Voor de kolommen geldt hetzelfde. Een  $n * m$  matrix mag dus alleen worden opgeteld bij een andere  $n * m$  matrix.

#### Voorbeeld 1.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & -4 & \frac{2}{3} & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 5 \\ \sqrt{2} & -6 & \frac{2}{3} & 12 \\ \frac{1}{6} & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 9 \\ 2\sqrt{2} & -10 & \frac{4}{3} & 16 \\ \frac{37}{6} & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 Het product van een scalair en een matrix

Het product van een scalair en een matrix is de vermenigvuldiging van alle elementen in een matrix met een getal, de scalair, waarbij het resultaat ook de matrixvorm heeft:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 5\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & -5 & 50 \end{pmatrix}$$

### 1.1.3 Nulmatrices, nulvectoren, negatieve matrices en rekenregels

Een aparte groep zijn de nulmatrices  $\mathbf{O}$ , matrices waarvan alle elementen gelijk zijn aan 0. Nulmatrices  $\mathbf{O}$  spelen bij het optellen en aftrekken van matrices een vergelijkbare rol als het getal 0 bij van gewone getallen. Een  $n * m$  nulmatrix ontstaat door het product van de scalaire nul en een  $n * m$  matrix. Merk op dat in  $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$  de scalaire 0 en de nulmatrix  $\mathbf{O}$  verschillend genoteerd worden.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Een bijzondere groep nulmatrices zijn de nulvectoren, vectoren waarvan alle elementen 0 zijn. Een nulvector wordt symbolisch genoteerd als  $\mathbf{o}$ :

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{o} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Een negatieve matrix  $-\mathbf{A}$  ontstaat als het product  $-1\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ . Een voorbeeld van een negatieve matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Het aftrekken van matrix komt overeen met het optellen met een negatieve matrix:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1\mathbf{B}) = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

De rekenregels voor het optellen van matrices en producten van scalairen met matrices zijn:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ | 5) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ |
| 2) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$  | 6) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$       |
| 3) $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$  | 7) $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$                     |
| 4) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$                               | 8) $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$                                   |



### 1.1.4 Het inproduct van twee vectoren

Het inproduct tussen twee vectoren  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  wordt genoteerd als  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ . Deze notatie mag niet verward worden met het product van twee scalairen  $\alpha \cdot \beta$ .

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Het resultaat van het inproduct is een scalaire waarde, de som van de paarsgewijs vermenigvuldigde overeenkomstige elementen uit beide vectoren. Het inproduct is dus alleen mogelijk als het aantal elementen van beide vectoren gelijk is. Het is wel commutatief, de volgorde in het inproduct mag omgekeerd worden:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$$

Een inproduct van een vector met zichzelf is zonder meer mogelijk:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

#### Voorbeeld 1.2

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 7$$
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \quad \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 13$$

### 1.1.5 Het vectorproduct

Het vectorproduct  $\mathbf{ab}$  heeft een andere notatie dan het inproduct  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ . Hoewel het vectorproduct gebruik maakt van het inproduct is het niet-commutatief, de regel  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$  geldt dus *niet*. Ook is het vectorproduct alleen mogelijk met een  $n$  rijvector en een  $n$  kolomvector of met een  $n$  kolomvector en een  $n$  rijvector.

In het geval van een vectorproduct van een  $n$  rijvector  $\mathbf{a}$  met een  $n$  kolomvector  $\mathbf{b}$  is het resultaat van  $\mathbf{ab}$  een scalair, het inproduct tussen beide vectoren:

$$\mathbf{ab} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

Daarentegen geeft het vectorproduct van een kolomvector  $\mathbf{b}$  met  $n$  elementen (één kolom met  $n$  rijvectoren van één element) en een rijvector  $\mathbf{a}$  met  $n$  elementen (één rij met  $n$

kolomvectoren van één element), een vierkante  $n * n$  matrix. In de resulterende matrix zijn de scalaire elementen de inproducten van overeenkomstige rij- en kolomvectoren met elk één element:

$$\mathbf{ba} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 \cdot a_1 & b_1 \cdot a_2 & \dots & b_1 \cdot a_n \\ b_2 \cdot a_1 & b_2 \cdot a_2 & \dots & b_2 \cdot a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n \cdot a_1 & b_n \cdot a_2 & \dots & b_n \cdot a_n \end{pmatrix}$$

In tegenstelling tot het inproduct is het vectorproduct van twee rijvectoren – of van twee kolomvectoren – niet mogelijk, ook al hebben ze een gelijk aantal elementen. Het vectorproduct komt daarmee overeen met het matrixproduct dat een soortgelijke beperking heeft.

### 1.1.6 Het matrixproduct

Het matrixproduct van vierkante en niet-vierkante matrices kunnen we verklaren aan de hand van de vectorproducten van de rij- en kolomvectoren die matrices vormen.

De  $n * m$  matrix  $\mathbf{A}$  en de  $m * p$  matrix  $\mathbf{B}$ , geven bij  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$  de  $n * p$  matrix  $\mathbf{C}$ . Om deze vermenigvuldiging toe te lichten worden de matrices in een schema geplaatst zodanig dat de horizontale lijnen door de rijen uit de  $\mathbf{A}$  matrix snijden met de verticale lijnen door de kolommen van de  $\mathbf{B}$ -matrix. Op de snijpunten bevinden zich de elementen van de  $\mathbf{C}$ -matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,p} \end{pmatrix}$$

Elk snijpunt – element  $c_{r,k}$  – is het vectorproduct tussen rijvector  $r$  in de  $\mathbf{A}$ -matrix en kolomvector  $k$  in de  $\mathbf{B}$ -matrix. In dit geval mogen we het inproduct gebruiken om het resulterende element  $c_{r,k}$  te berekenen:

$$c_{r,k} = (a_{r,1} \ a_{r,2} \ \dots \ a_{r,m}) \bullet \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \dots \\ b_{m,k} \end{pmatrix} = a_{r,1} \cdot b_{1,k} + a_{r,2} \cdot b_{2,k} + \dots + a_{r,m} \cdot b_{m,k}$$

Het voordeel van het plaatsen van de twee matrices in zo'n schema met snijpunten, is dat men snel kan zien welke afmeting de productmatrix **C** heeft. Bovendien kan men per snijpunt het vectorproduct systematisch berekenen met behulp van denkbeeldige horizontale en verticale hulplijnen.

**Voorbeeld 1.3** De matrices **A** en **B** in het schema voor het matrixproduct:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \end{matrix}$$

Dit levert de volgende berekeningen op:

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 50 \\ c_{2,1} &= 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 = 114 \\ c_{3,1} &= 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 5 + 12 \cdot 7 = 178 \\ c_{1,2} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 60 \\ c_{2,2} &= 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 8 = 140 \\ c_{3,2} &= 9 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 11 \cdot 6 + 12 \cdot 8 = 220 \end{aligned}$$

Samenvattend:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 114 & 140 \\ 178 & 220 \end{pmatrix}$$

Nog een voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3+2x & -2+2a \\ 31 & 10 & 9+4x & -6+4a \\ 5x+4y & 2x+y & 3x+xy & -2x+ya \end{pmatrix}$$

Reken bovenstaand voorbeeld na.

Probeer nu te berekenen...

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & x & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ x & y \end{pmatrix}$$

...en stel vast dat dit onmogelijk is.

Het vectorproduct dus is een bijzonder geval van het matrixproduct. Mits zij voldoet aan de afmetingsvoorwaarde van het matrixproduct, is product van een vector en een matrix mogelijk. Het product van een  $1 * n$  rijvector met een  $n * m$  matrix geeft als resultaat een  $1 * m$  rijvector. Het product van  $n * m$  matrix met een  $m * 1$  kolomvector geeft als resultaat een  $n * 1$  kolomvector. Resumerend gelden voor alle vector- en matrixproducten de volgende regels:

**Regel** Een  $a * b$  matrix kan alleen vermenigvuldigd worden met een  $b * c$  matrix. In dat geval ontstaat een  $a * c$  matrix. Twee matrices kunnen dus alleen met elkaar vermenigvuldigd worden wanneer het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede matrix;

**Regel** De commutatieve eigenschap van het vermenigvuldigen van gewone getallen ( $ab = ba$ ) geldt *niet* voor matrices en vectoren, de regels  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$  en  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  en  $\mathbf{aB} = \mathbf{Ba}$  zijn ongeldig;

De rekenregels voor het vermenigvuldigen van matrices (en vectoren) zijn:

- 1)  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- 2)  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- 3)  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$
- 4)  $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

### 1.1.7 Het transponeren van een matrix

De getransponeerde matrix  $\mathbf{A}^T$  ontstaat uit matrix  $\mathbf{A}$  door met behoud van volgorde, alle rijvectoren in kolomvectoren – of alle kolomvectoren in rijvectoren – te veranderen. Deze verwisseling spiegelt de posities van de elementen ten opzichte van de hoofddiagonaal.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Het transponeren van een  $a * b$  matrix resulteert in een  $b * a$  matrix. M.a.w. de afmeting van een matrix worden bij het transponeren verwisseld.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Wanneer men een rijvector transposeert, verkrijgt men een kolomvector en vice versa:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}^{TT} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bij het transponeren verwisselen de elementen alleen van positie ( $e_{r,k} \rightarrow e_{k,r}$ ). Elk element  $e_{r=k,k=r}$  op de hoofddiagonaal blijft op dezelfde plaats.

Voor het transponeren gelden de volgende rekenregels:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T & 3) \quad (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T \\ 2) \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} & 4) \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ 5) \quad \alpha^T = \alpha \end{array}$$

### 1.1.8 De symmetrische matrix

Een symmetrische matrix is een vierkante matrix waarvoor  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  geldt, zoals:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

### 1.1.9 De identiteitsmatrix

Een matrix die we nog vaak zullen tegenkomen is de zogenaamde identiteitsmatrix. Een identiteitsmatrix is een vierkante matrix, waarvan alle elementen gelijk zijn aan 0, behalve de elementen op de hoofddiagonaal. De hoofddiagonaal is gevuld met 1-en.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De identiteitsmatrix is zo belangrijk dat men de letter  $\mathbf{I}$  ervoor heeft gereserveerd. Merk op dat de identiteitsmatrix symmetrisch is en dat  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$  geldt.

We merken nu op dat wanneer we een identiteitsmatrix vermenigvuldigen met een rijvector, het resultaat dezelfde vector is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Het vermenigvuldigen van een identiteitsmatrix met een rijvector heeft dus geen effect.  
 Voor vermenigvuldiging van de identiteitsmatrix met een kolomvector geldt hetzelfde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Voor het product van een  $n * n$  identiteitsmatrix  $\mathbf{I}$  met een  $1 * n$  (rij)vector  $\mathbf{r}$  geldt:

$$\mathbf{rI} = \mathbf{r} \quad \mathbf{Ir}^T = \mathbf{r}^T$$

Voor het product van een  $n * n$  identiteitsmatrix  $\mathbf{I}$  met een  $n * 1$  (kolom)vector  $\mathbf{k}$  geldt:

$$\mathbf{Ik} = \mathbf{k} \quad \mathbf{k}^T \mathbf{I} = \mathbf{k}^T$$

Voor het product van een  $n * n$  identiteitsmatrix  $\mathbf{I}$  met een  $n * n$  matrix  $\mathbf{M}$  geldt:

$$\mathbf{MI} = \mathbf{IM} = \mathbf{M} \quad \mathbf{M}^T \mathbf{I} = \mathbf{IM}^T = \mathbf{M}^T$$

## 1.2 Opgaven

1. Gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

- (a) Noteer de elementen die in de matrices A en B de hoofddiagonaal vormen.
- (b) Bereken  $\mathbf{AB}$  en  $\mathbf{BA}$  en  $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$  en  $\mathbf{AB}^T$ .
- (c) Bereken  $(\mathbf{AB})^T$  en  $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ .
- (d) Bereken  $(3\mathbf{A})$  en  $(\mathbf{A}3)$  en  $(\frac{1}{3}\mathbf{AB}3)$ .
- (e) Wat concludeert u uit de vorige resultaten?

2. Gegeven:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

- (a) Bereken  $\mathbf{KL}$ .
- (b) Bereken  $\mathbf{LK}$ .
- (c) Bereken  $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ .
- (d) Bereken  $\mathbf{LL}^T$ .

3. Gegeven:

$$\mathbf{a} = \left( 0 \quad 3 \quad \frac{1}{2} \quad 3 \right) \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

- (a) Bereken  $\mathbf{Ic}$  en  $\mathbf{c}^T\mathbf{I}$  en  $\mathbf{Ic}^T$  en  $\mathbf{cI}$ .
- (b) Bereken  $\mathbf{ac}$  en  $(\mathbf{ac})^T$  en  $\mathbf{a}^T\mathbf{c}^T$  en  $\mathbf{a}^T\mathbf{c}$  en  $\mathbf{ac}^T$ .

- (c) Bereken  $\mathbf{ca}$  en  $(\mathbf{ca})^T$  en  $\mathbf{c}^T \mathbf{a}^T$  en  $\mathbf{ca}^T$  en  $\mathbf{c}^T \mathbf{a}$ .
- (d) Bereken  $\mathbf{cc}^T$  en  $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$  en  $\mathbf{cc}$  en  $\mathbf{c}^T \mathbf{c}^T$ .
- (e) Wat concludeert u uit deze resultaten?

4. Gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

- (a) Bereken  $\mathbf{Ae}$  en  $\mathbf{e}^T \mathbf{A}$ .
- (b) Wat concludeert u uit deze resultaten?

5. Gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

- (a) Bereken  $((\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C})^T$ .
- (b) Bereken  $(2\mathbf{C}(\mathbf{AB}^T))^T$ .



## Hoofdstuk 2

# Stelsels van lineaire vergelijkingen

Een lineaire vergelijking bestaat uit termen met constanten en producten van constanten en onbekenden. Het '=' teken scheidt de termen van de lineaire vergelijking in twee kanten. Een lineaire vergelijking is voor de onbekenden opgelost als deze kanten gelijkwaardig zijn. Een eenvoudig voorbeeld met de coëfficiënten 2 en 3, de onbekenden  $x$  en  $y$  en de constante term 12 is:

$$2x + 3y = 12$$

Hoewel in vergelijkingen vaak de onbekenden  $x$  en  $y$  worden gebruikt, kunnen ook onbekenden met andere namen optreden:

$$2a + 3b = 12 \qquad 2p + 3q = 12$$

Bij lineaire vergelijkingen met veel onbekenden, zoals in dit hoofdstuk, worden meestal *geïndexeerde* namen gebruikt:

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -102$$

De twee kanten van een lineaire vergelijking zijn te beschouwen als twee schalen van een weegschaal, die in een bepaalde stand staat (niet perse in evenwicht). Zoals de stand van een weegschaal niet verandert bij het plaatsen of verwijderen van gelijke gewichten op beide schalen, zo blijft een vergelijking hetzelfde als ze *herschreven* wordt door beide kanten:

- met dezelfde term (bijv. 4) te verhogen :

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + 4 = 16$$

- met dezelfde term (bijv. -12) te verlagen:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$$

- met dezelfde factor (bijv. 5) te vermenigvuldigen:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 10x_1 + 15x_2 = 60$$

- door dezelfde factor ongelijk aan 0, (bijv. 3) te delen:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad \frac{2}{3}x_1 + x_2 = 4$$

Naar analogie van de weegschaal blijft een vergelijking ook hetzelfde als de termen aan dezelfde kant in een andere volgorde herschreven worden:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 3x_2 + 2x_1 = 12$$

Hoewel de herschreven vergelijkingen hetzelfde zijn als de originele vergelijking, wordt alleen bij bepaalde gewichtswaarden van de onbekenden  $x_1$  en  $x_2$  een vergelijking in evenwicht gebracht. Deze waarden worden de oplossingen genoemd van de vergelijking.

Omdat een lineaire vergelijking op diverse manieren kan worden herschreven, wordt bij voorkeur een notatie gekozen waarin de termen met de onbekenden gescheiden zijn van de termen zonder onbekenden. Bovendien wordt bij het gebruik van geïndexeerde variabelen rekening gehouden met de volgorde van de indices:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

Gegeven de lineaire vergelijking:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

We gaan nu de oplossingen zoeken voor deze vergelijking, de waarden voor  $x_1$  en  $x_2$  die de weegschaal in een horizontaal evenwicht brengen. Wanneer we na wat proberen voor  $x_1$  de waarde 3 en voor  $x_2$  de waarde 2 invullen, dan is een situatie ontstaan waarin de vergelijking in evenwicht is:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

Het tweetal  $x_1 = 3$  en  $x_2 = 2$  vormen samen een oplossing van de vergelijking  $2x_1 + 3x_2 = 12$ . Daarentegen is het tweetal  $x_1 = 1$  en  $x_2 = 2$  geen oplossing. Controleren of een

oplossing voldoet, is eenvoudig het vervangen van de onbekenden door de waarden van de oplossing en het verschil in waarden tussen beide kanten bepalen.

Een tweetal waarden kan op een systematische manier als oplossing gevonden worden door een willekeurige waarde voor één van de onbekenden te kiezen, bijvoorbeeld  $x_1 = 3$ . Door de vergelijking met de gekozen waarde in een vereenvoudigde vorm te herschrijven, is de waarde voor de andere onbekende  $x_2$  gemakkelijk te bepalen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3 \cdot x_2 &= 12 & \leftrightarrow & 6 + 3 \cdot x_2 = 12 \\ & & \leftrightarrow & 3 \cdot x_2 = 6 \\ & & \leftrightarrow & x_2 = 2 \end{aligned}$$

Deze oplossing, het tweetal  $x_1 = 3$  en  $x_2 = 2$ , is volledig door de keuze van  $x_1$  bepaald, een andere keuze geeft een ander tweetal. Uit de keuze van  $x_1 = 0$  volgt  $x_2$  met nog minder stappen:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 3 \cdot x_2 = 12 \quad \leftrightarrow \quad x_2 = \frac{12}{3}$$

De oplossing is het tweetal  $x_1 = 0$  en  $x_2 = 4$ . We kunnen ook voor de andere onbekende een waarde kiezen, bijvoorbeeld  $x_2 = 0$ :

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot 0 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 2 \cdot x_1 = 12 \quad \leftrightarrow \quad x_1 = 6$$

De oplossing is nu het tweetal  $x_1 = 6$  en  $x_2 = 0$ .

Er zijn blijkbaar meer oplossingen mogelijk voor deze vergelijking, in principe oneindig veel tweetallen. Kenmerkend voor deze oneindige verzameling tweetallen is de meetkundige relatie die ze met elkaar hebben. Ze liggen op één lijn in het  $xy$ -vlak. Dat kan men zien als de oplossingen worden uitgezet in een assenstelsel.

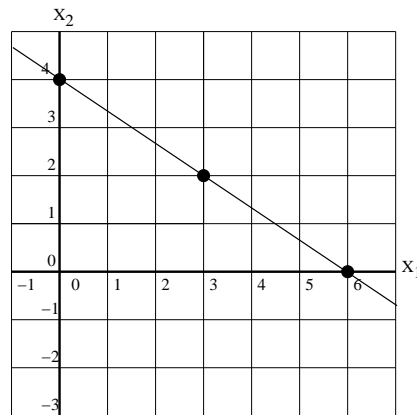
De vergelijking  $2x_1 + 3x_2 = 12$  heeft twee variabelen:  $x_1$  en  $x_2$ . Dit betekent dat we twee assen nodig hebben, waarin we de oplossingen als tweetallen aangeven, de  $x_1$ -as en de  $x_2$ -as. We kiezen er nu voor de  $x_1$ -as horizontaal te tekenen en de  $x_2$ -as verticaal. (Dit kan overigens ook andersom. In dat geval verandert de tekening, maar blijft deze wel de oplossingen van vergelijking weergeven.)

Vervolgens gaan we de snijpunten van de vergelijking met de  $x_1$ - en  $x_2$ -as berekenen:

Voor alle coördinaten op de  $x_1$ -as geldt dat de waarde van  $x_2$  gelijk is aan 0. Wanneer we in de vergelijking  $2x_1 + 3x_2 = 12$  de  $x_2$  variabele gelijk stellen aan 0 verkrijgen we:

$$2x_1 + (3 \cdot 0) = 12 \quad \rightarrow \quad 2x_1 = 12 \quad \rightarrow \quad x_1 = 6$$

Het snijpunt met de  $x_1$ -as ligt dus op het punt  $(6, 0)$ . Het snijpunt met de  $x_2$ -as ligt op het punt  $(0, 4)$ . Met deze gegevens kunnen we een grafiek tekenen, zoals weergegeven in figuur 2.1.



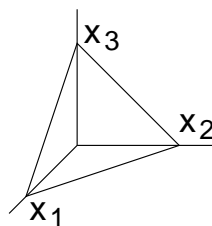
Figuur 2.1: De lineaire vergelijking  $2x_1 + 3x_2 = 12$ , grafisch weergegeven als lijn.

Het punt met de  $x_1 = 3$  en  $x_2 = 2$  ligt dus ook op deze lijn. Alle punten op de lijn in de figuur 2.1 zijn oplossingen van de vergelijking  $2x_1 + 3x_2 = 12$ .

Beschouw nu het volgende voorbeeld van een lineaire vergelijking:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \quad (2.1)$$

Ook deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen (verzin er zelf enkele). we hebben nu echter wel te maken met een vergelijking, waarin zich 3 variabelen bevinden. Als we alle oplossingen van deze vergelijking willen tekenen, dienen we een assenstelsel met 3 assen te gebruiken. De tekening wordt 3-dimensionaal en alle oplossingen van vergelijking (2.1) liggen op het *vlak* dat wordt weergegeven door de vergelijking  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$ . Dit is te zien in figuur 2.2.



Figuur 2.2: Lineaire vergelijkingen met 3 variabelen vormen een vlak.

Beschouw nu de volgende lineaire vergelijking:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 24 \quad (2.2)$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen. Het weergeven van deze oplossingen in een tekening is echter onmogelijk. We hebben in vergelijking (2.2) te maken met 4

variabelen, hetgeen betekent dat we een 4-dimensionale tekening zouden moeten maken. Aangezien dat niet kan, kunnen bewerkingen en berekeningen op dit soort vergelijkingen alleen worden uitgevoerd met algebra.

## 2.1 Het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen vormen een *stelsel* als de oplossingen voor de onbekenden in alle vergelijkingen van dat stelsel moeten gelden. Stelsels lineaire vergelijkingen bestaan uit minstens twee lineaire vergelijkingen, bijvoorbeeld de twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 16 \end{aligned}$$

De eerste vergelijking is een rechte lijn. De  $x_1$ -as wordt gesneden in het punt  $(6, 0)$  en de  $x_2$ -as wordt gesneden in het punt  $(0, 4)$ . Voor de tweede vergelijking geldt dat deze de  $x_1$ -as snijdt in het punt  $(4, 0)$  en dat de  $x_2$ -as wordt gesneden in het punt  $(0, 8)$ .

Een oplossing van dit stelsel lineaire vergelijkingen vinden we door waarden voor  $x_1$  en  $x_2$  te zoeken, zodanig dat *beide* vergelijkingen kloppen wanneer we deze waarden invullen. Simpelweg de oneindig lange rijtjes oplossingen van beide vergelijkingen doorzoeken in de hoop dat we een oplossing tegenkomen die in beide rijtjes voorkomt, is niet erg efficiënt. De oplossing wordt sneller gevonden wanneer we beide vergelijkingen gaan manipuleren. We doen dit als volgt:

Vermenigvuldig eerste vergelijking met 2:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 + 3x_2 = 12 & \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right| & \rightarrow & 4x_1 + 6x_2 = 24 \\ 4x_1 + 2x_2 = 16 & & \rightarrow & 4x_1 + 2x_2 = 16 \end{array}$$

Trek de tweede vergelijking van de nieuwe vergelijking af:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 6x_2 & = & 24 \\ 4x_1 + 2x_2 & = & 16 \quad - \\ \hline 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

Uit de vergelijking  $4x_2 = 8$  is eenvoudig af te leiden dat  $x_2 = 2$ .

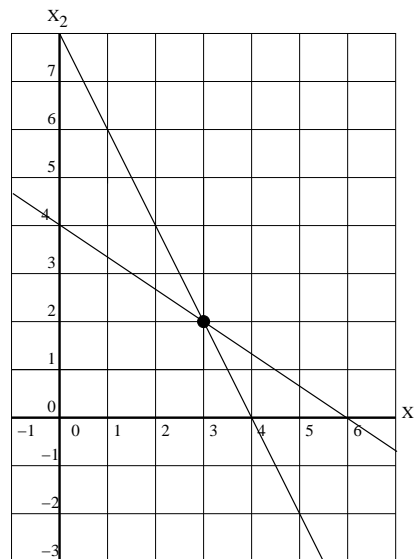
Nu we weten dat de waarde van  $x_2$  gelijk is aan 2, kunnen we ook de waarde van  $x_1$  gaan berekenen. We doen dit door de waarde van  $x_2$  in te vullen in de één van beide vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow 2x_1 + 6 = 12 \rightarrow 2x_1 = 6 \rightarrow x_1 = 3$$

De oplossing van dit lineaire stelsel is dus:  $(3, 2)$ . Deze oplossing brengt beide vergelijkingen in evenwicht:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 124 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$$

Wanneer we het lineaire stelsel gaan tekenen, zien we in figuur 2.3 dat beide lijnen elkaar snijden in het punt  $(3, 2)$ .



Figuur 2.3: Het snijpunt als oplossing.

## 2.2 Lineaire stelsels van het type $Ax = c$

Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 6x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases} \quad (2.3)$$

Het oplossen van dit stelsel is geen eenvoudige opgave. Gelukkig zijn er methodes ontwikkeld, waarmee op gestructureerde wijze stelsels lineaire vergelijkingen kunnen worden opgelost. Deze, zogenaamde, *veegmethodes* maken gebruik van matrices en zijn bedacht door de wiskundigen Gauss en Jordan.

Alvorens we de veegmethodes gaan bekijken, wordt eerst ingegaan op het omzetten van een lineair stelsel in een matrix. Ook worden nog enkele bijzondere matrices geïntroduceerd die we bij het bestuderen van de veegmethodes zullen tegenkomen.

### 2.2.1 De coëfficiëntenmatrix

Alvorens een veegmethode kan worden gebruikt voor het oplossen van een lineair stelsel, moet dit stelsel worden afgebeeld in een matrix die het stelsel representeert: Lees iedere vergelijking in de voorkeursnotatie van links naar rechts en maak van elke coëfficiënt een element. Wanneer we dat doen ontstaat voor het lineaire stelsel uit (2.3):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

De ontstane matrix noemen we een *coëfficiëntenmatrix*. Het moge duidelijk zijn dat wanneer we het stelsel lineaire vergelijkingen in een andere volgorde hadden opgeschreven, de daaruit ontstane coëfficiëntenmatrix er anders zou hebben uitgezien:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Voor de verschillende veegmethodes maakt het echter niet uit in welke volgorde de vergelijkingen *onder* elkaar staan. Wel is het van belang om de volgorde, waarin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in de vergelijkingen voorkomen, gelijk te houden.

### 2.2.2 De toegevoegde matrix

Aan de coëfficiëntenmatrix kunnen de constante termen aan de rechterkant van de vergelijkingen uit (2.3) (de getallen 8, 4, 6 en 10) worden toegevoegd als extra kolom. Hierdoor ontstaat:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Teneinde de coëfficiënten te scheiden van de constante termen, plaatsen we een verticale streep in de matrix. Deze matrix wordt de *toegevoegde matrix* genoemd.

### 2.2.3 Een matrix in echelonvorm

Zonder in te gaan op de betekenis of het gebruik van een matrix in echelonvorm, definiëren we nu eerst wat er onder een echelonmatrix wordt verstaan:

Een matrix is in echelonvorm wanneer:

- we te maken hebben met een toegevoegde matrix.
- alle elementen *onder* de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 0.

De volgende voorbeelden zijn matrices in echelonvorm:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

Merk op dat ook boven de hoofddiagonaal nullen *kunnen* voorkomen.

### 2.2.4 De rijcanonieke matrix

Naast de echelonmatrix bestaat ook de zogenaamde *rijcanonieke* matrix. Een matrix wordt rijcanoniek genoemd wanneer:

- we te maken hebben met een toegevoegde matrix.
- alle elementen *recht boven* de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 0.
- alle elementen *recht onder* de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 0.
- alle elementen die de hoofddiagonaal vormen, gelijk zijn aan 1.

De volgende matrices zijn voorbeelden van rijcanonieke matrices:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$



## 2.3 De veegmethodes

Gegeven het stelsel vergelijkingen (2.3) dat is omgezet naar de matrix representatie:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Nu het lineaire stelsel is omgezet in een matrix, kan begonnen worden met het toepassen van een veegmethode. Er bestaan diverse veegmethodes, maar in deze cursus beperken we ons tot:

- de methode van Gauss.
- de methode van Gauss/Jordan.

De veegmethode van Gauss is erop gericht een toegevoegde matrix in echelonvorm te brengen. D.w.z. middels de veegmethode van Gauss worden bewerkingen op de toegevoegde matrix uitgevoerd, zodanig dat daaruit een echelonmatrix ontstaat. Schematisch weergegeven:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{\text{Gauss}} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{array} \right)$$

De veegmethode van Gauss/Jordan kan beschouwd worden als een uitbreiding van de methode van Gauss en is erop gericht een toegevoegde matrix in rijcanonieke vorm te brengen. Schematisch weergegeven:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{\text{Gauss/Jordan}} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? \end{array} \right)$$

### 2.3.1 De veegmethode van Gauss

Zoals eerder beschreven, heeft de veegmethode van Gauss tot doel een toegevoegde matrix via een aantal bewerkingen om te zetten in een echelonmatrix. Deze omzetting voeren we niet in één keer uit, maar in een aantal losse stappen. Het aantal stappen dat nodig is, hangt af van de dimensies van de matrix. Hoe meer elementen zich in de matrix bevinden, hoe groter het aantal stappen dat nodig is om de matrix in echelonvorm te brengen.

De eerste stap in de veegmethode van Gauss, vormt het aanwijzen van een *veegelement*. We noteren dit door in de matrix een kader om dat element te plaatsen, zodat duidelijk is met welk element geveegd gaat worden. Bij de eerste serie veegoperaties, wordt altijd  $element_{11}$  als veegelement aangewezen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

De bedoeling is nu om  $element_{21}$  middels een (nog uit te leggen) bewerking gelijk te maken aan 0. Dat gaat als volgt:

We vermenigvuldigen het veegelement met een getal dat we zelf kiezen. De uitkomst van deze vermenigvuldiging dient zodanig te zijn dat wanneer we deze uitkomst optellen bij  $element_{21}$ , hier de waarde 0 uitkomt. Wiskundig uitgedrukt:

$$(element_{11} \cdot \text{zelfgekozen getal}) + element_{21} = 0$$

Deze vergelijking is gemakkelijk op te lossen:

$$(element_{11} \cdot \text{zelfgekozen getal}) = -element_{21}$$

Dus:

$$\text{zelfgekozen getal} = -\frac{element_{21}}{element_{11}}$$

Voor deze matrix wordt dit:

$$\text{zelfgekozen getal} = -\frac{2}{1} = -2$$

Het zelf te kiezen getal dient de waarde -2 te krijgen, immers:

$$(1 \cdot -2) + 2 = 0$$

Nu gaan we daadwerkelijk vegen. We nemen  $element_{11}$ , vermenigvuldigen dit met -2 en tellen het op bij  $element_{21}$ . Met *alle* overige elementen uit de eerste rij doen we hetzelfde: Vermenigvuldigen met -2 en optellen bij de overeenkomstige elementen uit de tweede rij.

We verkrijgen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Reken dit zelf na.

Nu gaan we de procedure herhalen. D.w.z. we nemen wederom  $\text{element}_{11}$  als veegelement, maar nu gebruiken we het om van  $\text{element}_{31}$  een 0 maken:

$$(1 \cdot \text{zelf te kiezen getal}) + 4 = 0$$

Het zelf te kiezen getal dient de waarde -4 te krijgen. Wanneer we alle elementen uit de eerste rij vermenigvuldigen met -4 en optellen bij de overeenkomstige elementen uit de derde rij, ontstaat:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & -6 & -6 & -13 & -26 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

We gaan verder: Wederom gebruiken we  $\text{element}_{11}$  als veegelement, maar deze keer vegen we rij 4 schoon. Controleer zelf dat we het veegelement moeten vermenigvuldigen met het getal 1 en dat het vegen naar rij 4 oplevert:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & -6 & -6 & -13 & -26 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & -6 & -6 & -13 & -26 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

Nu zijn alle elementen in de kolom onder het veegelement gereduceerd tot 0. We herhalen nu de totale procedure, echter: het veegelement wordt nu  $\text{element}_{22}$  en we vegen van rij 2 naar rij 3:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 & -2 & -12 \\ 0 & -6 & -6 & -13 & -26 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 24 & -1 & 46 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

We vervolgen door te vegen van rij 2 naar rij 4:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 24 & -1 & 46 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 24 & -1 & 46 \\ 0 & 0 & -17 & -4 & -42 \end{array} \right)$$

Weer zijn alle elementen onder het veegelement gereduceerd tot 0 en kunnen we het volgende element op de hoofddiagonaal aanwijzen als veegelement. We houden deze procedure net zo lang vol, totdat de echelonvorm is bereikt.

In ons voorbeeld wijzen we nu element<sub>32</sub> aan als veegelement en vegen we van rij 3 naar rij 4:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & -1 & 46 \\ 0 & 0 & -17 & -4 & -42 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & -1 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{113}{24} & -\frac{113}{12} \end{array} \right)$$

Hiermee hebben we de echelonvorm bereikt: alle elementen onder de hoofddiagonaal zijn gereduceerd tot 0.

### 2.3.2 Het oplossen van een lineair stelsel uit de echelonvorm

Na het toepassen van de veegmethode van Gauss hebben we een matrix verkregen die in de echelonvorm staat. Kijk nu eens naar de laatste rij uit deze matrix. Daar staat:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{113}{24} \mid -\frac{113}{12}$$

Dit betekent:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{113}{24}x_4 = -\frac{113}{12}$$

Oftewel:

$$-\frac{113}{24}x_4 = -\frac{113}{12} \quad \rightarrow \quad -113x_4 = -226 \quad \rightarrow \quad x_4 = 2$$

We hebben nu de waarde van  $x_4$  gevonden. Kennelijk is  $x_4$  gelijk aan 2. Met deze wetenschap kunnen we verder rekenen en wel door te kijken naar rij 3 uit de matrix. Daar staat:

$$0x_1 + 0x_2 + 24x_3 - x_4 = 46 \quad \rightarrow \quad 24x_3 - x_4 = 46$$

Aangezien we weten dat de waarde van  $x_4$  gelijk is aan 2 kunnen we deze waarde gaan invullen in de vergelijking:

$$\left. \begin{array}{rcl} 24x_3 - x_4 & = & 46 \\ x_4 & = & 2 \end{array} \right\} 24x_3 - 2 = 46 \quad \rightarrow \quad 24x_3 = 48 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2$$

Nu hebben we al twee van de vier variabelen uit het lineair stelsel uitgerekend. We vervolgen door de waarden van  $x_4$  en  $x_3$  in te vullen in de tweede rij uit de matrix:

$$\left. \begin{array}{rcl} -x_2 - 5x_3 - 2x_4 & = & -12 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & 2 \end{array} \right\} -x_2 - 10 - 4 = -12 \quad \rightarrow \quad x_2 = -2$$

Tenslotte vullen we de waarden van de variabelen  $x_4$ ,  $x_3$  en  $x_2$  in de eerste rij van de matrix:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 8 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & 2 \end{array} \right\} x_1 + 10 = 8 \quad \rightarrow \quad x_1 = -2$$

Hiermee hebben we het stelsel lineaire vergelijkingen opgelost. De oplossing luidt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & 2 \end{array}$$

Men kan dit controleren door de gevonden waarden in te vullen in één van de oorspronkelijke vergelijkingen.

### 2.3.3 De veegmethode van Gauss/Jordan

We hebben gezien dat de veegmethode van Gauss een elegante methode vormt voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Na toepassing van de veegmethode is een matrix in echelonvorm ontstaan, waaruit de oplossing van het stelsel kan worden berekend.

Er bestaat echter een uitbreiding van de veegmethode van Gauss die ervoor zorgt dat het terugrekenen van het lineaire stelsel niet meer nodig is. Deze uitbreiding is ontwikkeld door de wiskundige Jordan. De door hem ontwikkelde uitbreiding wordt tegenwoordig de veegmethode van Gauss/Jordan genoemd.

De methode komt erop neer dat na het bereiken van de echelonvorm, doorgedaan wordt met vegen. Er wordt nu niet met  $\text{element}_{11}$  begonnen, maar met het laatste element van

de hoofddiagonaal. De methode is erop gericht alle elementen *boven* de hoofddiagonaal weg te vegen. Beschouw, ter illustratie, het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

We zetten het stelsel om naar een matrixnotatie:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 11 \end{array} \right)$$

Volgens de veegmethode van Gauss, vegen we alle elementen onder de hoofddiagonaal weg en verkrijgen we de echelonvorm:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 11 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Ga dit na.

Nu gaan we verder met de veegmethode van Gauss/Jordan. Het veegelement wordt het laatste element van de hoofddiagonaal:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array} \right)$$

Nu gaan we alle elementen *boven* het veegelement tot 0 reduceren. We vermenigvuldigen alle elementen uit rij 3 met 1 en tellen deze op bij de overeenkomstige elementen uit rij 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array} \right)$$

We vervolgen met rij 1: We vermenigvuldigen alle elementen uit rij 3 met  $-\frac{3}{5}$  en tellen deze op bij de overeenkomstige elementen uit rij 1:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array} \right)$$

Tenslotte maken we van element<sub>22</sub> het veegelement, opdat we element<sub>12</sub> tot 0 kunnen reduceren:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Als laatste stap gaan we, indien nodig, ieder element op de hoofddiagonaal vermenigvuldigen met een zelfgekozen getal, opdat alle elementen op de hoofddiagonaal de waarde 1 krijgen. In ons voorbeeld betekent dit dat we de elementen uit rij 2 vermenigvuldigen met -1 en dat we de elementen uit rij 3 vermenigvuldigen met  $\frac{1}{5}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Hiermee eindigt de veegmethode van Gauss/Jordan. We hebben de matrix in de rijcanonieke vorm gebracht. De oplossing van het lineaire stelsel is zonder verder rekenwerk af te lezen uit de matrix:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 7 \\ x_2 & = & -3 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

Merk op dat het coëfficiëntengedeelte van de verkregen matrix een identiteitsmatrix vormt.

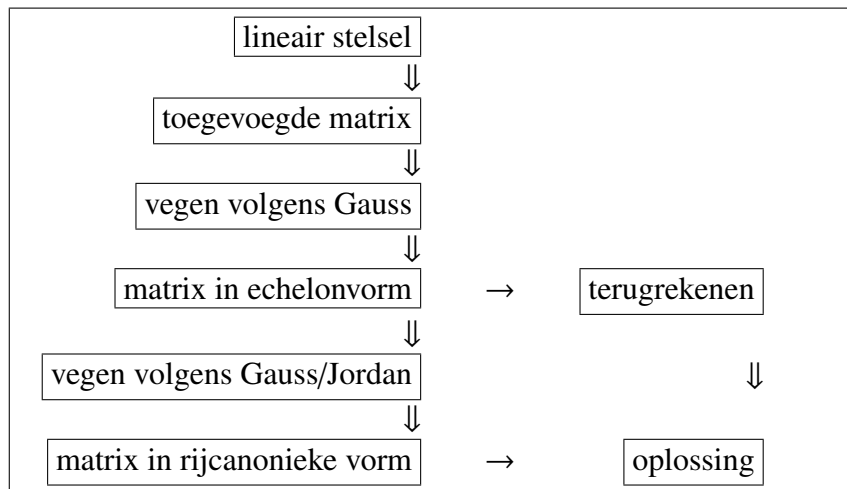
### 2.3.4 Overzicht van de veegmethodes

Een schematische samenvatting van de veegmethodes van Gauss en Gauss/Jordan is weergegeven in figuur 2.4.

## 2.4 De oplosbaarheid

Bij de introductie van de veegmethodes van Gauss/Jordan zijn lineaire stelsels gebruikt die precies één oplossing hebben. Lineaire stelsels hebben echter niet altijd een oplossing. In dit hoofdstuk worden verschillende soorten stelsels geïntroduceerd en zal bekeken worden wat hun eigenschappen zijn. Ook bekijken we wat voor gevolgen deze eigenschappen hebben voor de veegmethodes van Gauss/Jordan.

In totaal onderscheiden we drie verschillende soorten lineaire stelsels:



Figuur 2.4: De veegmethodes van Gauss en Gauss/Jordan.

- **Lineair onafhankelijke stelsels:**  
Een lineair onafhankelijk stelsel is een stelsel dat precies één oplossing heeft. Deze oplossing is te berekenen door het stelsel om te zetten in een toegevoegde matrix en daarop de veegmethodes van Gauss/Jordan toe te passen.
- **Lineair strijdige stelsels:**  
Lineair strijdige stelsels hebben geen oplossing. Wanneer we middels Gauss/Jordan een poging doen zo'n stelsel op te lossen, stuiten we op problemen.
- **Lineair afhankelijke stelsels:**  
Een lineair afhankelijk stelsel heeft oneindig veel oplossingen hetgeen tijdens het vegen zal blijken.

### 2.4.1 Het lineair onafhankelijke stelsel

Lineair onafhankelijke stelsels zijn besproken in de eerdere hoofdstukken en behoeven geen verdere introductie. Men dient slechts te onthouden dat een lineair onafhankelijk stelsel precies één oplossing heeft en dat deze gevonden kan worden door de veegmethodes van Gauss/Jordan correct toe te passen.

### 2.4.2 Het lineair tegenstrijdige stelsel

Een lineair tegenstrijdig stelsel is een stelsel dat geen oplossing heeft. Een voorbeeld van zo'n stelsel is stelsel 2.4



$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases} \quad (2.4)$$

Laten we stelsel 2.4 eens proberen op te lossen middels Gauss/Jordan:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases} &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array} \right) & \end{aligned} \quad (2.5)$$

in de laatste regel van matrix 2.5 is iets vreemds te zien. In feite staat daar:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -10$$

Het moge duidelijk zijn dat dit niet kan: 0 kan niet gelijk zijn aan  $-10$ . We zijn nu op een tegenstrijdigheid gestuit. Hieruit kunnen we twee dingen afleiden:

- Verder vegen met Gauss/Jordan heeft geen zin.
- Stelsel 2.4 heeft geen oplossing. D.w.z. we kunnen geen waarden voor  $x_1, x_2$  en  $x_3$  vinden, zodanig dat alle vergelijkingen kloppen wanneer we deze waarden zouden invullen.

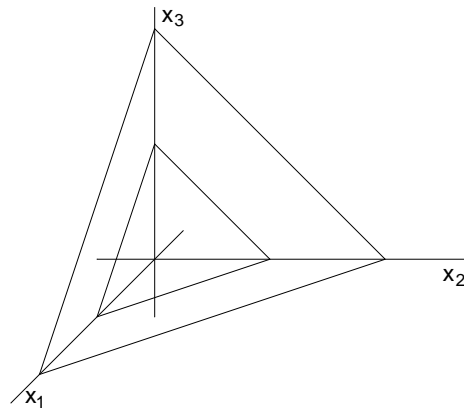
Hoewel het mogelijk is de strijdigheid van een lineair stelsel aan te tonen m.b.v. de veegmethodes van Gauss/Jordan, is in voorbeeld 2.4 eenvoudig in te zien dat we met een tegenstrijdig stelsel te maken hebben. We kunnen "zien" dat we met een tegenstrijdig stelsel te maken hebben wanneer we de eerste en derde vergelijking uit stelsel 2.4 eens wat beter bekijken:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Wanneer we de onderste vergelijking links en rechts van het  $=$  teken door 2 delen (ja, dat is toegestaan), is te zien dat beide vergelijkingen veel op elkaar lijken:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 6 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Nu is duidelijk waarom stelsel 2.4 tegenstrijdig is: als we de eerste en derde vergelijking uit stelsel 2.4 grafisch weergeven, zien we twee vlakken die evenwijdig zijn aan elkaar. Dit is weergegeven in figuur 2.5.



Figuur 2.5: Twee evenwijdige vlakken vormen een lineair tegenstrijdig stelsel.

Daar twee evenwijdige vlakken elkaar nooit zullen snijden, kan een oplossing voor een dergelijk stelsel niet gevonden worden.

### 2.4.3 Het lineair afhankelijke stelsel

Een lineair afhankelijk stelsel is eens stelsel vergelijkingen dat oneindig veel oplossingen heeft. Een voorbeeld van een dergelijk stelsel is stelsel 2.6:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 20 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ook nu gaan we proberen stelsel 2.6 op te lossen middels de veegmethode van Gauss/Jordan:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 20 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \\ 2 & 4 & 6 & 20 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

In de onderste regel is te lezen:  $0 = 0$ . Daar schieten we niet zoveel mee op. Het lijkt erop dat de onderste regel net zo goed had kunnen worden weggelaten. Wat in stelsel 2.6 aan de hand is, wordt duidelijk wanneer we de bovenste vergelijking en de onderste eens wat beter bekijken:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 20 \end{array}$$

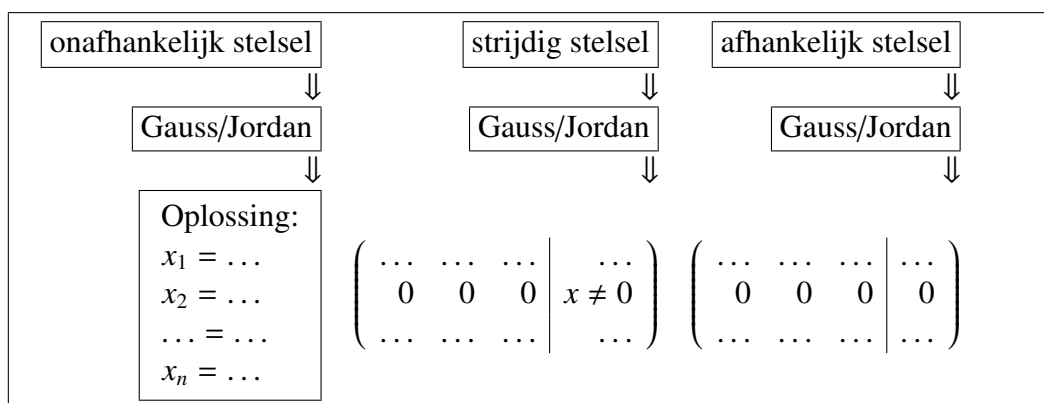
Wanneer we de bovenste vergelijking met 2 vermenigvuldigen, ontstaat:

$$\begin{array}{rrcr|c|rrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 & 2 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 20 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 20 & 1 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 20 \end{array}$$

Nu is duidelijk te zien dat in stelsel 2.6 twee maal dezelfde vergelijking staat, zij het dat ze net iets anders zijn opgeschreven, waardoor niet meteen opvalt dat ze hetzelfde zijn. Wanneer we stelsel 2.6 weergeven in een grafiek, moeten we twee vlakken tekenen die precies op elkaar liggen. Beide vlakken ‘snijden’ elkaar op oneindig veel punten. Daarom heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen.

## 2.4.4 Overzicht oplosbaarheid

Een schematische samenvatting van de oplosbaarheid is weergegeven in figuur 2.6.



Figuur 2.6: Soorten stelsels en hun gevolgen voor de veegmethodes van Gauss/Jordan.

## 2.5 De inverse matrix

In eerder werd uitgelegd dat lineaire stelsels kunnen worden opgelost m.b.v. de veegmethodes van Gauss/Jordan. Ook is uitgelegd dat de veegmethodes van Gauss/Jordan alleen

slagen wanneer men ze toepast op een lineair onafhankelijk stelsel. Nu wordt een tweede methode beschreven voor het oplossen van lineaire stelsels. Deze methode maakt gebruik van de zogenaamde *inverse* matrix. Eerst zullen enkele eigenschappen van de inverse matrix worden beschreven. Daarna wordt uitgelegd hoe men een inverse matrix berekent. Tenslotte wordt uitgelegd hoe men m.b.v. de inverse matrix een lineair stelsel kan oplossen.

Eigenschappen van de inverse matrix:

- Voor een  $n * n$  matrix  $\mathbf{A}$  en zijn inverse  $n * n$  matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  geldt:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Niet alle vierkante matrices hebben een inverse. Een bekend voorbeeld is de vierkante nulmatrix  $\mathbf{O}$ . Voor alle  $n * n$  matrices  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{O}$  geldt:

$$\mathbf{O}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{O} = \mathbf{O} \neq \mathbf{I}$$

- De vierkante identiteitsmatrix  $\mathbf{I}$  is de inverse van zichzelf:

$$\mathbf{I}\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

- Voor het product van twee vierkante matrices  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  geldt, mits  $\mathbf{A}^{-1}$  en  $\mathbf{B}^{-1}$  bestaan:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$$

Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \quad (2.7)$$

We zetten stelsel 2.7 om in een coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vervolgens creëren we een identiteitsmatrix met dezelfde dimensies als de coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu voegen we de coëfficiëntenmatrix en de identiteitsmatrix samen:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.8)$$

We kunnen nu beginnen met het berekenen van de inverse matrix. Dit geschiedt door op matrix 2.8 de veegmethodes van Gauss/Jordan toe te passen. Voorwaarde voor het kunnen berekenen van de inverse matrix is dat de veegmethodes van Gauss/Jordan slagen. Voor matrix 2.8 betekent dit dat we na toepassing van de veegmethodes van Gauss/Jordan een matrix verkrijgen die de volgende vorm heeft:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

We voeren nu de veegmethode van Gauss/Jordan uit:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -7 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Met het eindigen van de veegmethode van Gauss/Jordan zien we dat aan de linkerkant van de verticale streep een identiteitsmatrix is ontstaan. We splitsen de matrix in het linker gedeelte (de identiteitsmatrix die verder niet interessant is) en het rechter gedeelte:

$$\left( \begin{array}{ccc} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

De nu ontstane matrix noemt men de inverse matrix. Wanneer we de originele coëfficiëntenmatrix hadden toegekend aan de variabele  $A$ , dan kunnen we voor de inverse matrix  $A^{-1}$  noteren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

We kunnen controleren of we in het berekenen van de inverse matrix geen fouten gemaakt hebben. Zoals eerder beschreven geldt voor een matrix en zijn inverse de regel:  $AA^{-1} = I$ . In ons voorbeeld zou dus moeten gelden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Controle eerste kolom:

$$\begin{aligned} 2 \cdot -\frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ 3 \cdot -\frac{7}{2} + 4 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\ 2 \cdot -\frac{7}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Controle tweede kolom:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot -\frac{3}{2} + 1 \cdot -\frac{1}{2} &= 0 \\ 3 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot -\frac{3}{2} + 1 \cdot -\frac{1}{2} &= 1 \\ 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot -\frac{3}{2} + 4 \cdot -\frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Controle derde kolom:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot -\frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} &= 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot -\frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} &= 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot -\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Controleer nu zelf dat ook geldt:  $A^{-1}A = I$ , oftewel:

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenslotte nog enkele opmerkingen:

- Een inverse matrix kan alleen worden berekend wanneer de originele matrix een coëfficiënten matrix representeert van een lineair onafhankelijk stelsel.
- Indien we de inverse matrix willen berekenen van een coëfficiëntenmatrix die gebaseerd is op een strijdig of afhankelijk stelsel, zal op zeker moment de veegmethode van Gauss/Jordan falen.

## 2.6 Lineaire stelsels oplossen met de inverse matrix

We keren terug naar het lineaire stelsel aan het begin van dit hoofdstuk:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Eerder is beschreven dat we dit stelsel kunnen representeren met een matrix door het stelsel om te zetten in een toegevoegde matrix. Er bestaat echter ook een andere manier, waarop we stelsel 2.7 met vectoren en een matrix kunnen weergeven. Deze manier staat bekend als de *matrix-vector* representatie en zit als volgt in elkaar:

We maken van stelsel 2.7 een coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vervolgens vermenigvuldigen we de coëfficiëntenmatrix met een kolomvector, waarin we de variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  plaatsen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Deze vermenigvuldiging moeten de oplossingen van de onbekenden van het lineaire stelsel opleveren. Deze oplossingen plaatsen we eveneens in een kolomvector:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Reken zelf na dat deze vergelijking een correcte manier vormt voor het weergeven van een lineair stelsel.

Welnu:

- De coëfficiëntenmatrix noemen we **A**.
- De kolomvector met geïndexeerde variabelen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  noemen we **x**.
- De kolomvector met de constante termen noemen we **c**.

Vergelijking 2.9 kan dus als volgt worden weergegeven:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad (2.10)$$

Het oplossen van lineair stelsel 2.7 geschiedt door vergelijking 2.10 aan beide kanten met de inverse matrix te vermenigvuldigen:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

Op basis van de regel  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  verkrijgen we:

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

We herinneren ons dat het vermenigvuldigen van een rij- of kolomvector met een identiteitsmatrix geen effect had. Daarom verkrijgen we:

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

We kunnen de oplossing van lineair stelsel 2.7 dus berekenen door de vector met de constante termen te vermenigvuldigen met de inverse van de coëfficiëntenmatrix.

Daar we de inverse matrix reeds eerder in dit hoofdstuk hadden berekend, zou dus moeten gelden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Berekening  $x_1$ :

$$-\frac{7}{2} \cdot 4 + \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 8 = -7$$

Berekening  $x_2$ :

$$\frac{5}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 5$$

Berekening  $x_3$ :

$$\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 3$$

Voer nu zelf de volgende controle uit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$



## 2.7 De determinant: eigenschappen en gebruik

Van een lineair stelsel kan men de zogenaamde *determinant* berekenen. De determinant wordt berekend door op de coëfficiëntenmatrix  $\mathbf{A}$  van een lineair stelsel een specifieke procedure uit te voeren. Deze procedure levert één specifiek getal op. Dit getal, de determinant, vertelt ons of we te maken hebben met een lineair onafhankelijk stelsel of niet. Het getal vertelt ons dus of het gegeven stelsel lineaire vergelijkingen precies één oplossing heeft of niet. De determinant heeft de volgende eigenschappen:

- De determinant  $\det(\mathbf{A})$  van een  $n \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  is een scalair;
- Als  $\det(\mathbf{A}) = 0$  dan heeft de matrix  $\mathbf{A}$  geen inverse matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ ;
- Als de determinant wordt berekend uit de coëfficiëntenmatrix  $\mathbf{A}$  van een lineair stelsel en  $\det(\mathbf{A}) = 0$  dan is het lineaire stelsel afhankelijk of strijdig. Als  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  dan is het lineaire stelsel onafhankelijk en niet strijdig;
- Voor het berekenen van een determinant bestaan verschillende methodes.

### 2.7.1 De determinant van een $2 \times 2$ matrix

In zijn algemeenheid wordt de determinant van een  $2 \times 2$  matrix als volgt berekend:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Voorbeeld met getallen:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2 \cdot 7) = 29$$

### 2.7.2 De determinant van strijdige 2D-vergelijkingen

De lijnen  $ax + by = c_1$  en  $ax + by = c_2$  lopen evenwijdig als  $c_1 \neq c_2$ . Zij hebben geen gemeenschappelijke punten dus ook geen gemeenschappelijke oplossingen. De determinant van de coëfficiënten is:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0$$

### 2.7.3 De determinant van afhankelijke 2D-vergelijkingen

De lijnen  $ax + by = c$  en  $\alpha(ax + by) = \alpha c$  zijn afhankelijk van elkaar en hebben alle punten gemeenschappelijk en oneindig veel oplossingen. De determinant van de coëfficiënten is;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} = a\alpha b - b\alpha a = 0$$

### 2.7.4 De determinant van oplosbare 2D-vergelijkingen

Als de determinant van de coëfficiënten ongelijk 0 is, dan snijden de lijnen  $ax + by = c$  en  $dx + ey = f$  elkaar:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$

**Opmerking:** De waarden  $-\infty < c < +\infty$  en  $-\infty < f < +\infty$  zijn geen criteria voor het bestaan van een snijpunt.

### 2.7.5 De determinant van een 3 \* 3 matrix

De procedure om van een 3\*3 matrix de determinant te berekenen, is op het eerste gezicht niet erg duidelijk. Een handige manier om het berekenen van de determinant gemakkelijker te onthouden is de som van de producten van diagonaalelementen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})$$

$$+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} = -a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1})$$

$$+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1})$$

Als we dit stap voor stap uitleggen:

1. De twee eerste kolomvectoren uit de coëfficiëntenmatrix worden rechts naast deze matrix erbij geplaatst:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Vermenigvuldig nu alle elementen op de hoofddiagonaal (deze zijn voor de duidelijkheid omkaderd):

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \rightarrow (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})$$

3. Schuif (in gedachten) de volledige hoofddiagonaal één plaats op naar rechts en vermenigvuldig wederom de elementen op die denkbeeldige diagonaal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} \end{matrix} \rightarrow (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})$$

4. Schuif de denkbeeldige diagonaal nogmaals één plaats op naar rechts en vermenigvuldig nogmaals alle elementen op die diagonaal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} \end{matrix} \rightarrow (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

5. Tel de uitkomsten van alle vermenigvuldigingen bij elkaar op:

$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

6. Hiermee hebben we ‘de positieve diagonalen’ gehad. De ‘negatieve diagonalen’ berekenen we door weer een diagonaal in gedachten te nemen. Deze diagonaal begint rechts bovenaan en loopt schuin naar links. Vermenigvuldig alle elementen op deze denkbeeldige diagonaal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \rightarrow (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

7. Schuif de diagonaal één plaats naar links en vermenigvuldig alle elementen op de diagonaal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \rightarrow (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

8. En nogmaals opschuiven en vermenigvuldigen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \rightarrow (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

9. Tel alle uitkomsten van de vermenigvuldigingen bij elkaar op:

$$(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

10. Nu hebben we de producten van de elementen in de ‘negatieve diagonalen’ uitgerekend. Ons rest nog slechts de positieve en de negatieve diagonaalproducten van elkaar af te trekken:

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\begin{pmatrix} (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})+ \\ (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})+ \\ (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) \end{pmatrix}}_{\text{positieve diagonalen}} - \underbrace{\begin{pmatrix} (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})+ \\ (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})+ \\ (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) \end{pmatrix}}_{\text{negatieve diagonalen}}$$

Het resultaat van het optellen van alle vermenigvuldigingen van diagonaalelementen in dezelfde richting en het aftrekken van alle vermenigvuldigingen van diagonaalelementen in de andere richting, blijft hetzelfde als alle elementen getransponeerd worden. Daarom geldt  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ . Voorbeeld:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A}^T)$$

Dit geldt ook voor de determinant een  $n \times n$  matrix en de getransponeerde daarvan, bijvoorbeeld de  $3 \times 3$  determinant:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})+ \\ (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})+ \\ (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})+ \\ (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})+ \\ (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})+ \\ (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13})+ \\ (a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})+ \\ (a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23})+ \\ (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}^T) \end{aligned}$$

**Voorbeeld 2.1** Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \quad (2.11)$$

Teneinde de determinant van stelsel 2.11 te kunnen berekenen, bepalen we van stelsel 2.11 de coëfficiëntenmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

De determinant wordt als volgt berekend:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 5) - (3 \cdot 4) = -2$$

De determinant is niet gelijk aan 0, derhalve hebben we te maken met een lineair onafhankelijk stelsel. Stelsel 2.11 heeft dus precies één oplossing.

**Voorbeeld 2.2** Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \quad (2.12)$$

Wederom bepalen we ter berekening van de determinant eerst de coëfficiëntenmatrix van stelsel 2.12:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix wordt met het product van de diagonaal elementen, als volgt berekend:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = ((3 \cdot 4 \cdot 4) + (2 \cdot 1 \cdot 2) + (4 \cdot 2 \cdot 2)) - \\ &\quad ((4 \cdot 4 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 4) + (3 \cdot 1 \cdot 2)) \\ &\rightarrow \det(\mathbf{A}) = (48 + 4 + 16) - (32 + 16 + 6) = 14 \end{aligned}$$

De determinant is weer niet gelijk aan 0, daarom heeft ook dit stelsel precies één oplossing.

## 2.7.6 De determinant ‘recursief’ berekenen

De methode waarbij een determinant wordt berekend als de som van producten van diagonaalelementen is ook een recursieve wijze voor te stellen. Zonder daarvoor de elementen  $a_{r,k} = a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}$  (de eerste rijvector) af uit de determinant:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) \\ -a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) \\ +a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}) = +a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

### Opmerkingen:

1. Als van het keuze-element  $+a_{r,k}$  de som  $r + k$  even is, neem dan  $+a_{r,k}$ , anders  $-a_{r,k}$ , zoals  $+a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3}$ ;
2. De ‘recursieve rekenmethode’ werkt voor alle  $n * n$  determinanten met  $1 < n$ . De  $1 * 1$  determinant van 1 element is gelijk aan dit element;
3. De eigen kolommen en rijen van de  $n$  keuze-elementen doen niet mee om de  $n$  kleine determinanten te bepalen;
4. Elke kolom of rij mag gebruikt worden om de  $n$  keuze-elementen te leveren. De keuze-elementen komen wel uit dezelfde kolom of rij;
5. De rekentijd  $T(n)$  om een  $n * n$  determinant met  $n$  kleinere  $(n - 1) * (n - 1)$  determinanten – of met de eerder behandelde diagonaalmethode – te bepalen, neemt toe met  $n!$ :  $T(1) = 1 \wedge T(n) = n \cdot T(n - 1) \rightarrow T(n) = O(n!)$

### Voorbeeld 2.3

$$\text{De 'telefoonmatrix':} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Bereken de determinant met een rij:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Of met een kolom:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 + 24 - 21 = 0$$

## 2.7.7 De regel van Cramer

Een stelsel lineaire vergelijkingen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$  kan worden opgelost met behulp van determinanten, zonder dat een inverse matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  of een veegprocedure noodzakelijk is. De oplossing voor  $x_i$  wordt berekend met de regel van Cramer:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})} \quad \wedge \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

De determinant  $\det(\mathbf{A}_i)$  ontstaat door de  $i$ -de kolom van  $\det(\mathbf{A})$  te vervangen door de kolom in  $\mathbf{c}$ . Het stelsel is echter alleen oplosbaar als  $\mathbf{A}$  een inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  heeft, dus als  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Voorbeeld:

$$\begin{aligned} ax_1 + cx_2 &= e \\ bx_1 + dx_2 &= f \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Van de coëfficiëntenmatrix  $\mathbf{A}$  wordt de determinant bepaald:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Voor het vinden van de oplossingen  $x_1$  en  $x_2$  moeten we eerst  $\det(\mathbf{A}_1)$  en  $\det(\mathbf{A}_2)$  berekenen:

$$\det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix} = ed - cf \quad \det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = af - eb$$

Als  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  dan zijn de oplossingen van de onbekenden  $x_1$  en  $x_2$ :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{ed - cf}{ad - cb} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{af - eb}{ad - cb}$$

Hoewel de regel van Cramer het vinden van een oplossing heeft teruggebracht tot een eenvoudig rekenschema, is het berekenen van determinanten van een  $n * n$  matrix inefficiënter naarmate  $n$  groter is ( $O(n!)$ ). Een veegmethode geeft bij grote  $n$  sneller de oplossing ( $O(n^{2,3727})$ ). De regel van Cramer wordt daarom vooral gebruikt bij kleine stelsels met 2 à 3 onbekenden met functies van andere variabelen als coëfficiënten, zoals het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} x \cos \phi - y \sin \phi &= a \\ x \sin \phi + y \cos \phi &= b \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} +\cos \phi & -\sin \phi \\ +\sin \phi & +\cos \phi \end{vmatrix}$$

De coëfficiëntendeterminant  $\det(\mathbf{A}) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  is voor elke waarde van de variabele  $\phi$  ongelijk aan 0. Dit betekent dat voor elke hoek  $\phi$  een oplossing is te vinden voor  $x$  en  $y$ . Deze oplossingen volgen direct uit de regel van Cramer:  $x = a \cos \phi + b \sin \phi$  en  $y = -a \sin \phi + b \cos \phi$ .

## 2.8 Bijzondere lineaire stelsels

Zoals in paragraaf 2.4 is opgemerkt, geven niet alle stelsels lineaire vergelijkingen normale oplossingen. De tegenstrijdige stelsels geven geen oplossingen, afhankelijke stelsels geven oneindig veel oplossingen.

### 2.8.1 Lineaire stelsels van het type $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$

Een stelsel lineaire vergelijkingen van het type  $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$  waarbij  $\mathbf{o}$  de nulvector is, wordt homogeen stelsel genoemd.

Elk homogeen stelsel waarvoor  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , heeft uitsluitend de triviale oplossing  $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ .

#### Voorbeeld 2.4

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

*Dit stelsel is oplosbaar en heeft de nulvector  $\mathbf{o}$  als triviale oplossing, zie de Gauss/Jordan geveegde toegevoegde matrix:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als  $\det(\mathbf{A}) = 0$  dan kan het homogene stelsel alleen een afhankelijk stelsel zijn (strijdigheid is onmogelijk). Een afhankelijk stelsel is oplosbaar en heeft naast de triviale  $\mathbf{o}$  oplossing ook oneindig veel niet-triviale oplossingen (snijlijnen of vlakken in 3D).

#### Voorbeeld 2.5

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

*De Gauss/Jordan geveegde toegevoegde matrix is:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Het overeenkomstige afhankelijke stelsel is:*

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

*De resulterende vergelijkingen zijn twee vlakken in de oorsprong die een snijlijn hebben.*



De niet-triviale oplossing van een 3D-homogeen stelsel is een vlak of een snijlijn van vlakken.

## 2.8.2 Lineaire stelsels van het type $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$

Een stelsel lineaire vergelijkingen van het type  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$  waarbij  $\mathbf{x}$  de vector is die een veelvoud van zijn eigen waarden  $\lambda \mathbf{x}$  als oplossing heeft, wordt op de volgende wijze opgelost:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Ix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Ax} - \lambda \mathbf{Ix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Het homogene stelsel  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  heeft altijd de triviale oplossing  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  en als  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  extra niet-triviale oplossingen.

**Voorbeeld 2.6** Gegeven het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Bepaal de waarden  $\lambda$  waarbij  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

De vergelijking  $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$  wordt de karakteristieke vergelijking van matrix  $\mathbf{A}$  genoemd. De oplossingen zijn de eigenwaarden van de vergelijking  $\lambda' = -1$  en  $\lambda'' = 2$ .

Per eigenwaarde worden nu de niet-triviale oplossingen van de vectoren berekend met de formule  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . De oplossingen in vectorvorm worden de eigenvectoren genoemd:

$$\begin{cases} (4 + 1)x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - (-3 + 1)x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ voor } \lambda' = -1$$

$$\begin{cases} (4 - 2)x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - (-3 - 2)x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ voor } \lambda'' = 2$$

De eigenvectoren van  $\mathbf{A}$  zijn  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , zij voldoen aan de vergelijkingen  $\mathbf{Ax}' = \lambda' \mathbf{x}'$  en  $\mathbf{Ax}'' = \lambda'' \mathbf{x}''$ .

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 2.9 Opgaven

1. Bepaal met Gauss-Jordan de oplossing van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Bepaal met Gauss-Jordan de oplossing van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Bepaal met Gauss-Jordan de oplossing van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Bepaal met Gauss-Jordan de oplossing van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^3 & +2 \\ -1 & +e^{-3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bereken de determinant  $\det(\mathbf{A})$  en vindt de oplossing voor  $\mathbf{x}$  in stelsel  $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ .

6. Gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Bereken: de eigenwaarden  $\lambda'$  en  $\lambda''$ .

## Hoofdstuk 3

# Vectormeetkunde

Omdat in dit hoofdstuk meer de nadruk ligt op de meetkundige aspecten van vectoren dan op de stelsels lineaire vergelijkingen, worden de namen van de elementen  $v_1$ ,  $v_2$  en  $v_3$  van een vector  $\mathbf{v}$  geïndexeerd met de namen van de basisvectoren van de vectorruimte, zoals  $v_x$ ,  $v_y$  en  $v_z$ . Bij voorkeur wordt een vector als een kolomvector geschreven, de samenstellende componenten zijn dan gemakkelijk te herkennen. Incidenteel worden rijvectoren gebruikt.

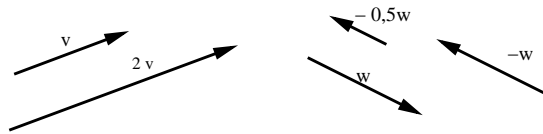
Scalaire constanten en variabelen worden aangegeven met dun gedrukte cijfers, Latijnse of Griekse letters. Vectoren worden met vetgedrukte kleine letters aangegeven, matrices met vetgedrukte hoofdletters.

### 3.1 De vectorruimte

De vectorruimte bevat twee soorten elementen: vectoren en scalaren. Een scalair is een reële constante of variabele waarde. Een vector  $\mathbf{v}$  is voor te stellen als een pijl met een oriëntatie en een lengte  $|\mathbf{v}|$ . De oriëntatie van een vector is vergelijkbaar met een stand van een kompasnaald of een klokwijzer, niet te verwarren met het begrip ‘richting’. Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richting, de oriëntatie is dan niet relevant.

Het product van een reële scalair  $\alpha$  en een vector  $\mathbf{v}$  resulteert altijd in een vector  $\alpha\mathbf{v}$ . Zelfs het product  $0\mathbf{v}$  resulteert in de nulvector  $\mathbf{o}$ , de vector zonder lengte  $|\mathbf{o}| = 0$ , oriëntatie of richting. Elke vector  $\alpha\mathbf{v}$  met  $\alpha \neq 0$  heeft dezelfde richting als  $\mathbf{v}$ . Als  $1 < |\alpha|$  is de lengte van de vector  $|\alpha\mathbf{v}|$  groter dan de vector  $|\mathbf{v}|$ . Als  $0 < |\alpha| < 1$  is de lengte kleiner dan de lengte van de originele vector. Bij  $0 < \alpha$  heeft de resulterende vector dezelfde oriëntatie als de originele vector. Bij  $\alpha < 0$  krijgt de resulterende vector een omgekeerde oriëntatie.

Voor de vector  $\mathbf{v}$  en de scalaren  $\alpha$  en  $\beta$  geldt:



Figuur 3.1: Het product in de vectorruimte.

$$\begin{aligned}\alpha \mathbf{v} &= \mathbf{v} \alpha \\ \alpha(\beta \mathbf{v}) &= (\alpha\beta) \mathbf{v} = \alpha\beta \mathbf{v} \\ (\alpha + \beta) \mathbf{v} &= \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} \\ 0 \mathbf{v} &= \mathbf{o}\end{aligned}$$

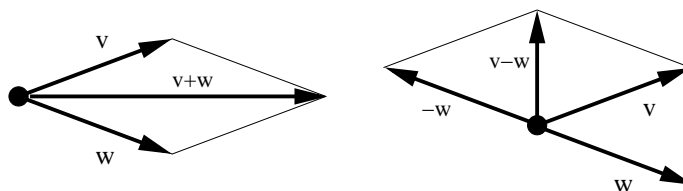
Voor de som van vectoren geldt:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} &= \mathbf{w} + \mathbf{v} \\ \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{r}) &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{r} = \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{r} \\ \mathbf{o} + \mathbf{v} &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

Een negatieve vector heeft dezelfde richting maar een omgekeerde oriëntatie als de positieve vector. Een negatieve vector kan gewoon opgeteld worden:

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

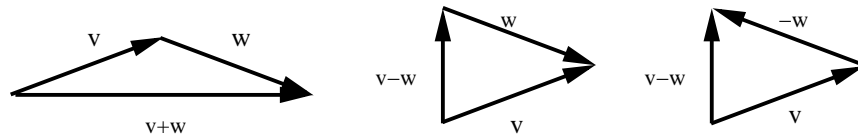
De som van twee vectoren kan meetkundig geconstrueerd worden met behulp van een parallellogram (zie figuur 3.2).



Figuur 3.2: Optellen van vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ .

Het is ook mogelijk een som van vectoren te maken door ze met behoud van oriëntatie en lengte achter elkaar te plaatsen (zie figuur 3.3).

In de vectorruimte zijn vectoren te construeren als een samenstelling van één of meer vectorsommen. Het minimum aantal vectoren dat voldoende is om een willekeurige vector met een gewenste richting en lengte te construeren, wordt de dimensie van de vectorruimte genoemd. Dit stelsel minimum aantal vectoren, de basisvectoren, mogen wel in



Figuur 3.3: Rechtstreeks optellen van  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ .

lengte verschillen maar geen nulvector zijn. Zij moeten bovendien lineair onafhankelijk van elkaar zijn.

Basisvectoren zijn lineair onafhankelijk van elkaar als elke basisvector scalair met nul vermenigvuldigd moet worden om de nulvector te verkrijgen. In de tweedimensionale (2D) vectorruimte geldt voor lineair onafhankelijke basisvectoren:

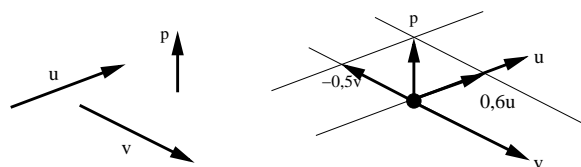
$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Indien dat niet zo is, dan is zijn  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  afhankelijk van elkaar en hebben in de 2D-vectorruimte dezelfde richting:

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{0} \wedge \alpha \neq 0 \rightarrow \mathbf{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{v}$$

Als twee lineaire onafhankelijke vectoren  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  de basis van een 2D-vectorruimte vormen, dan kan elke vector  $\mathbf{p}$  in deze 2D-vectorruimte geconstrueerd worden uit de basisvectoren  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$



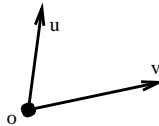
Figuur 3.4: De constructie van  $\mathbf{p} = 0,6\mathbf{u} - 0,5\mathbf{v}$ .

Lineaire onafhankelijkheid in de 3D-vectorruimte betekent dat de 3 basisvectoren niet in één gemeenschappelijk vlak mogen liggen. Voor grotere  $n$ -dimensionale vectorruimtes zijn dit soort verboden moeilijk meetkundig voor te stellen, maar ook daar geldt voor de  $n$  lineair onafhankelijke basisvectoren de volgende relatie:

$$\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0} \rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

## 3.2 De affiene ruimte

De affiene ruimte is een uitbreiding van de vectorruimte met het begrip positie of punt. Men kan de affiene ruimte voorstellen als de vectorruimte met een vast referentiepunt, de oorsprong  $\mathbf{o}$ . Deze oorsprong heeft de nulvector als waarde.



Figuur 3.5: Een affien 2D-stelsel met de basisvectoren  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$ .

### 3.2.1 De affiene 2D-ruimte

Een vector  $\mathbf{p}$  in de affiene 2D-ruimte wordt uitgedrukt in de twee onafhankelijke basisvectoren met de volgende vectorvergelijking:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + p_u \mathbf{u} + p_v \mathbf{v}$$

Hierbij vormen de scalairen  $p_u$  en  $p_v$  de kentallen van de vector  $\mathbf{p}$ . Omdat een vector verschoven mag worden met behoud van lengte en oriëntatie, mag zijn aangrijpingspunt in de oorsprong  $\mathbf{o}$  geplaatst worden. Hierdoor zijn twee gelijkwaardige beschrijvingen van een vector mogelijk:

**Meetkundig:** De vector als ‘pijl’ met een oriëntatie en een lengte, is geschikt om constructies grafisch weer te geven om meer inzicht te verkrijgen;

**Rekenkundig:** De kentallen, de coördinaten van het eindpunt van de vector vanuit de oorsprong, zijn handig om producten van vectoren met scalairen en optellingen van vectoren te berekenen.

Een punt  $p$  met de coördinaten  $(p_u, p_v)$  wordt in deze reader meestal als kolomvector en soms als rijvector genoteerd:

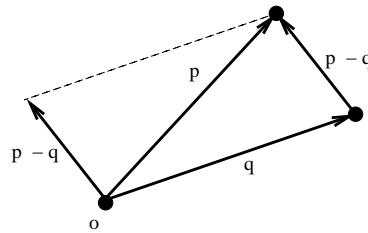
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = (p_u \ p_v)$$

Het product van de scalair  $\alpha$  met de vector  $\mathbf{p}$  met de kentallen:

$$\alpha \mathbf{p} = \alpha \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_u \\ \alpha p_v \end{pmatrix}$$

De som van de vector **p** en vector **q** met kentallen:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_u \\ q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u + q_u \\ p_v + q_v \end{pmatrix}$$



Figuur 3.6: Het vectorverschil.

Als in figuur 3.6 de vectoren **p** en **q** de kentallen  $\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} q_u \\ q_v \end{pmatrix}$  hebben, dan heeft het verschil **p - q** de kentallen  $\begin{pmatrix} p_u - q_u \\ p_v - q_v \end{pmatrix}$ .

### Voorbeeld 3.1

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

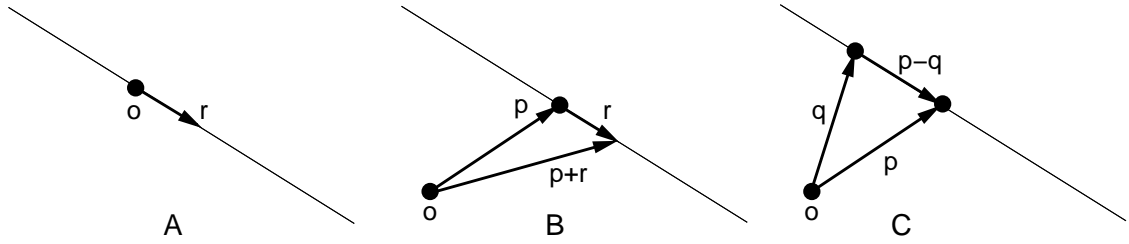
## 3.2.2 Lijnen in de affiene 2D-ruimte

In de affiene 2D-ruimte kunnen punten met vaste vectoren en lijnen met variabele vectoren worden aangegeven. Een lijn door de oorsprong wordt volledig bepaald door zijn richting. Deze richting wordt bepaald door een richtingsvector **r**.

De lijn door de oorsprong **o** (figuur 3.7A) heeft de vectorvergelijking:

$$\mathbf{lijn} = \alpha \mathbf{r} = \alpha \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_u \\ \alpha r_v \end{pmatrix}$$

Door de variabele vector **lijn** met een reële waarde van de parameter in het waardebereik  $-\infty < \alpha < \infty$  vast te leggen, kan elk punt op de lijn aangegeven worden. In de grafische programmatuur noteert men bij voorkeur de variabele vector **lijn** als functie van het



Figuur 3.7: Lijnen als variabele vectoren.

type vector met de formele reële parameter  $\alpha$ . De definitie van deze vectorfunctie is dan  $\text{lijn}[\alpha] = \alpha \mathbf{r}$ . Het aanroepen van deze vectorfunctie met actuele waarden voor  $\alpha$  zijn dan punten op de lijn, zoals  $\text{lijn}[0]$  en  $\text{lijn}[-5, 66]$ .

Een lijn die niet door de oorsprong gaat (figuur 3.7B), maar wel door  $\mathbf{p}$  in de richting van  $\mathbf{r}$  heeft de vectorvergelijking:

$$\text{lijn} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{r} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u + \alpha r_u \\ p_v + \alpha r_v \end{pmatrix}$$

Als twee punten  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  op een lijn bekend zijn (zie figuur 3.7C), dan heeft de richtingsvector  $\mathbf{r}$  dezelfde richting als de verschilvectoren  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  en  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ . Als we de richtingsvector vervangen door een van de verschilvectoren  $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ , dan is de vectorvergelijking van de lijn door  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$ :

$$\text{lijn} = \mathbf{p} + \alpha(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} p_u - q_u \\ p_v - q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u + \alpha(p_u - q_u) \\ p_v + \alpha(p_v - q_v) \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 De affiene 3D-ruimte

Een vector  $\mathbf{p}$  in de affiene 3D-ruimte wordt uitgedrukt in de drie onafhankelijke basisvectoren met de volgende vectorvergelijking:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + p_u \mathbf{u} + p_v \mathbf{v} + p_w \mathbf{w}$$

Hierbij vormen de scalair  $p_u$ ,  $p_v$  en  $p_w$  de coördinaten of vertex  $(p_u, p_v, p_w)$  van het punt  $p$ . De vector  $\mathbf{p}$  van het punt  $p$  met de scalair  $(p_u, p_v, p_w)$  wordt als kolomvector of als rijvector genoteerd:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = (p_u \ p_v \ p_w)$$



### 3.2.4 Een lijn in de affiene 3D-ruimte

In de affiene 3D-ruimte worden lijnen op dezelfde manier geconstrueerd als lijnen in de 2D-ruimte. Alleen wordt er gebruik gemaakt van 3D-vectoren in plaats van 2D-vectoren:

$$\text{lijn} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{r}$$

Als twee verschillende punten  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  op de lijn bekend zijn, dan kan de richtingsvector  $\mathbf{r}$  vervangen worden door één van de verschilvectoren  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  en  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ . De parametrische vectorvergelijking van de lijn is:

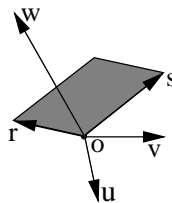
$$\text{lijn} = \mathbf{p} + \alpha(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} p_u - q_u \\ p_v - q_v \\ p_w - q_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u + \alpha(p_u - q_u) \\ p_v + \alpha(p_v - q_v) \\ p_w + \alpha(p_w - q_w) \end{pmatrix}$$

### 3.2.5 Een vlak in de affiene 3D ruimte

In de 2D-ruimte is maar één vlak, het vlak waarin alle vectoren liggen. In de 3D-ruimte zijn oneindig veel vlakken. Al deze vlakken hebben de eigenschap dat ze evenwijdig zijn met een vlak door de oorsprong. De parametrische voorstelling van zo'n vlak  $\mathbf{v}$  door de oorsprong  $\mathbf{o}$  wordt bepaald door twee onafhankelijke vectoren  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  is:

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s} = \lambda \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} s_u \\ s_v \\ s_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda r_u + \gamma s_u \\ \lambda r_v + \gamma s_v \\ \lambda r_w + \gamma s_w \end{pmatrix}$$

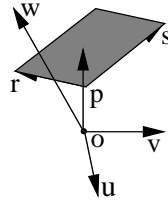
Beide vectoren  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  liggen in het vlak, zij worden daarom opspannende vectoren van het vlak genoemd (zie figuur 3.8). De scalair  $\lambda$  en  $\gamma$  mogen elke reële waarde aannemen, elk punt op het vlak is bepaald door een waarde van  $\lambda$  en van  $\gamma$ .



Figuur 3.8: Een vlak door de oorsprong.

Als we dit vlak evenwijdig verplaatsen met de vector  $\mathbf{p}$ , dan is de vergelijking van een vlak  $\mathbf{v}$  dat een punt  $\mathbf{p}$  omvat (zie figuur 3.9):

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} s_u \\ s_v \\ s_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u + \lambda r_u + \gamma s_u \\ p_v + \lambda r_v + \gamma s_v \\ p_w + \lambda r_w + \gamma s_w \end{pmatrix}$$



Figuur 3.9: Een evenwijdig verplaatst vlak.

### 3.3 De Euclidische ruimte

Als alle basisvectoren een loodrechte hoek ten opzichte van elkaar maken, dan wordt zo'n stelsel een orthogonaal coördinatenstelsel genoemd. Als de basisvectoren ook nog even lang zijn en de eenheidsafstand hebben, dan wordt het een orthonormaal coördinatenstelsel of Euclidische ruimte genoemd. De namen en kentallen van de orthonormale 2D-basisvectoren zijn:

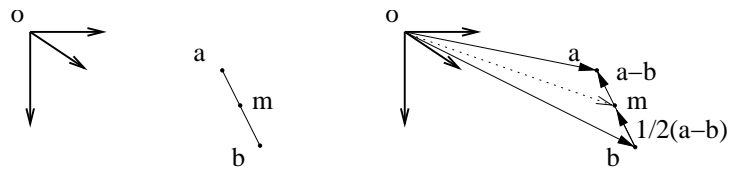
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De namen en kentallen van de orthonormale 3D-basisvectoren zijn:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hoewel in het affiene stelsel al sprake is van rudimentaire coördinaten, zijn afstanden en de hoeken nog niet echt kwantificeerbaar omdat de basisvectoren ongelijke lengtes kunnen hebben en scheef op elkaar kunnen staan. In de Euclidische ruimte met orthonormale basisvectoren zijn kwantificeerbare afstanden en hoeken wel mogelijk. De afstand tussen twee punten is gedefinieerd als de lengte van het lijnstuk tussen de twee punten uitgedrukt in de eenheidslengte. Hoeken tussen lijnen worden uitgedrukt in graden of radialen.

Enkele toepassingen in de Euclidische ruimten:



Figuur 3.10: Het midden van een lijnstuk.

- Het midden van een lijnstuk tussen de punten **a** en **b**:

De verschilvector **a** – **b** heeft dezelfde lengte en richting als het lijnstuk.

De halve lengte is  $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ , het punt **m** in het midden van het lijnstuk is:

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Voorbeeld:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Het zwaartepunt **m** van de driehoek met de hoekpunten **a**, **b** en **c** (zonder bewijs):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Voorbeeld:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Voor  $n$  punten kan deze formule worden uitgebreid tot:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n)$$

Zwaartepunten zijn belangrijk bij bewegende objecten. Het zwaartepunt volgt exact de baan waarmee een object zich verplaatst door de Euclidische ruimte. Het is ook het middelpunt van een roterend object.

### 3.3.1 Het inproduct $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ in de Euclidische ruimte

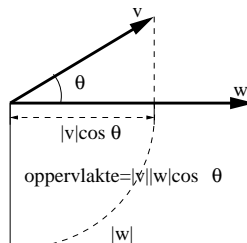
Om gemakkelijk met afstanden en hoeken te kunnen werken, is het eerder besproken (paragraaf 1.1.4) inproduct van vectoren goed bruikbaar. Het inproduct van twee vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  wordt genoteerd als  $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ . Het resultaat van het inproduct is een scalaire waarde. Voor de vectoren  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , de nulvector  $\mathbf{o}$  en de scalar  $\alpha$  gelden de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= \mathbf{w} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} \\ \mathbf{o} \bullet \mathbf{v} &= 0 \\ \alpha(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}) &= \alpha\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet \alpha\mathbf{w} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\alpha\end{aligned}$$

Hoewel het inproduct al gedefinieerd is in de affiene ruimte, krijgt het een extra meetkundige betekenis in de Euclidische ruimte. Het geeft de relatie tussen de hoek  $\theta$  en de lengte  $|\mathbf{v}|$  en  $|\mathbf{w}|$  van twee vectoren aan:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta$$

Het inproduct komt meetkundig overeen met het oppervlakte van de rechthoek in figuur 3.11.



Figuur 3.11: Het inproduct als oppervlakte van de rechthoek.

Het inproduct heeft een bijzondere betekenis als  $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$ . In dat geval staan de vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  loodrecht op elkaar omdat  $\cos 90^\circ = 0$ .

Als de kentallen t.o.v. de basisvectoren bekend zijn, dan kan het inproduct ook in kentallen worden berekend van 2D-vectoren:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y$$

en van 3D-vectoren:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

en van  $n$ -dimensionale vectoren:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

Het inproduct heeft enkele belangrijke toepassingen:

- De mogelijkheid om de lengte van een vector te bepalen:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{v}| |\mathbf{v}| \cos 0^\circ = |\mathbf{v}|^2$$

Daaruit volgt de lengte zoals die in de Euclidische ruimte met de stelling van Pythagoras gedefinieerd is:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

- De vector  $\mathbf{n}$  die loodrecht op de vector  $\mathbf{r}$  staat, noemen we de normaalvector van  $\mathbf{r}$ . In de 2D-ruimte is met het inproduct  $\mathbf{n} \bullet \mathbf{r} = 0$  gemakkelijk zo'n normaalvector te vinden:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = ab - ba = 0$$

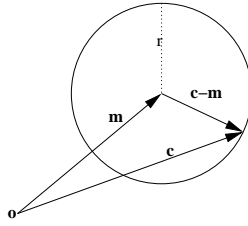
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Omdat in de 3D-ruimte een vector  $\mathbf{n}$  oneindig veel loodrechte vectoren in verschillende richtingen heeft, geeft de vergelijking  $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = 0$  geen vector, maar een vlak  $\mathbf{v}$  dat loodrecht op  $\mathbf{n}$  staat en door de oorsprong  $\mathbf{o}$  gaat. In dit geval is  $\mathbf{n}$  de normaalvector van dat vlak  $\mathbf{v}$ .
- Om in de 2D-ruimte de **loodlijn** te vinden die loodrecht op een **lijn**  $= \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r}$  in punt  $\mathbf{p}$  staat, bepalen we eerst de richtingsvector  $\mathbf{r}$  van de **lijn**. Met  $\mathbf{n} \bullet \mathbf{r} = 0$  vinden we  $\mathbf{n}$ . Hieruit volgt de vectorvergelijking voor de loodlijn door de oorsprong: **loodlijn**  $= \mu \mathbf{n}$ . De loodlijn door punt  $\mathbf{p}$  wordt: **loodlijn**  $= \mathbf{p} + \mu \mathbf{n}$ .
- Uit de algemene vergelijking van een 2D-cirkel  $\mathbf{c} = (x, y)$  met het middelpunt  $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$  en een straal  $r$  volgt:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{m}) \bullet (\mathbf{c} - \mathbf{m}) = |\mathbf{c} - \mathbf{m}|^2 = r^2 \rightarrow |\mathbf{c} - \mathbf{m}| = r$$

De vectorvoorstelling van een 2D-cirkel  $\mathbf{c}$  met middelpunt  $\mathbf{m}$  en straal  $r$  is dus:

$$|\mathbf{c} - \mathbf{m}| = r$$



Figuur 3.12: De cirkel  $c$  met middelpunt  $m$  en straal  $r$ .

- Een eenheidsvector is een vector  $\mathbf{v}_e$  met de lengte  $|\mathbf{v}_e| = 1$ . Uit elke niet-nulvector  $\mathbf{v}$  kan een eenheidsvector  $\mathbf{v}_e$  in dezelfde oriëntatie geconstrueerd worden door deze scalair te delen door zijn lengte:

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}}$$

Van de vector  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  is de lengte  $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . Daaruit volgt:

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

- De hoek  $\theta$  tussen een vector  $\mathbf{v}$  en een andere vector  $\mathbf{w}$  kan uitgedrukt worden in de lengte en het inproduct van beide vectoren:

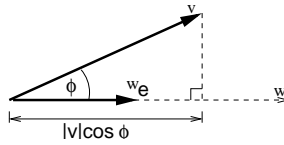
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} \quad \leftrightarrow \quad \theta = \arccos \left( \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} \right)$$

In de 3D-ruimte is de hoek tussen  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  in het vlak waarin beide vectoren liggen.

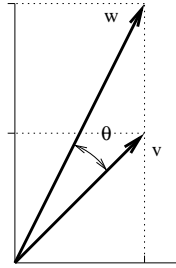
- Het inproduct wordt ook gebruikt om vectoren op elkaar te projecteren. In figuur 3.13 is de lengte van de projectie van vector  $\mathbf{v}$  op vector  $\mathbf{w}$  gelijk aan:

$$\text{projectielengte} = \|\mathbf{v}\| \cos \phi = \|\mathbf{v}\| |\mathbf{w}_e| \cos \phi = \frac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|}$$

Omdat  $\cos \phi$  negatief kan zijn en de lengte van een lijnstuk altijd groter of gelijk aan nul is, is de absolute waarde van  $|\mathbf{v}| \cos \phi$  genomen.



Figuur 3.13: De projectie van  $\mathbf{v}$  op  $\mathbf{w}$ .



Figuur 3.14: De hoek  $\theta$  tussen  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ .

**Voorbeeld 3.2** De hoek  $\theta$  tussen de vectoren  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  in figuur 3.14:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = 0,9486833$$

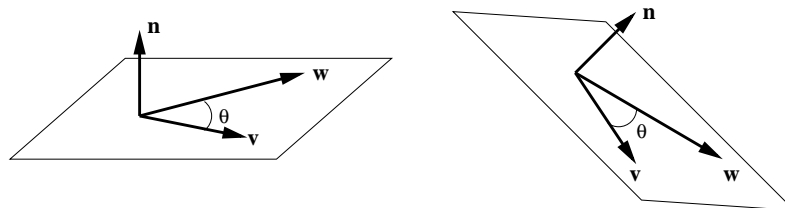
$$\begin{aligned} \theta &= \pm \arccos(\cos \theta) \\ &= \pm \arccos(0,9486833) \\ &= \pm 0,3218 \text{ in radialen} \\ &= \pm 18^\circ 26' \text{ in graden} \end{aligned}$$

Omdat  $\cos \theta = \cos -\theta$  is de polariteit van de oriëntatie  $\pm$  niet belangrijk voor het inproduct. Daarom wordt de positieve hoek gekozen:  $\theta = 18^\circ 26'$ .

**Opmerking:** Omdat het inproduct van twee vectoren een scalair resultaat geeft, wordt het soms het scalairproduct genoemd. Deze naam wordt in deze reader niet gebruikt omdat het vaak verwarring schept met het product van een scalair en een vector.

### 3.3.2 Het uitproduct $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ in de Euclidische 3D-ruimte

De Euclidische 3D-ruimte kent het uitproduct  $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  van twee onafhankelijke vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ , resulterend in een normaalvector  $\mathbf{n}$  loodrecht op het vlak van  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ , zie figuur 3.15.



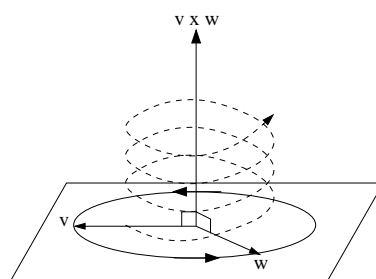
Figuur 3.15: Het uitproduct.

In andere dimensies is het uitproduct ongedefinieerd. Voor het niet-commutatieve uitproduct gelden de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{v} &= \mathbf{o} \\ \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \alpha \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\alpha\end{aligned}$$

Het resultaat van een uitproduct van twee afhankelijke vectoren zoals  $\mathbf{v} \times \alpha \mathbf{v}$  is altijd de 3D-nulvector  $\mathbf{o}$ , de vector zonder oriëntatie en lengte.

Als een kurkentrekker rechtsom een kurk wordt ingedraaid, dan gaat de beweging de kurk in (zie figuur 3.16). De oriëntatie van de resulterende vector  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  is het gevolg van de draaiing van de eerste vector  $\mathbf{v}$  naar tweede vector  $\mathbf{w}$ . Als dit rechtsom is, dan volgt de oriëntatie van de loodrechte vector op het vlak de oriëntatie volgens de kurkentrekkerregel.



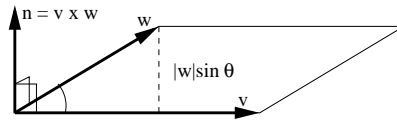
Figuur 3.16: De kurkentrekkerregel.

De lengte  $|\mathbf{n}|$  van de normaalvector  $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  kan men meetkundig voorstellen als het oppervlakte van het parallellogram dat gemaakt wordt door  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  (zie figuur 3.17).

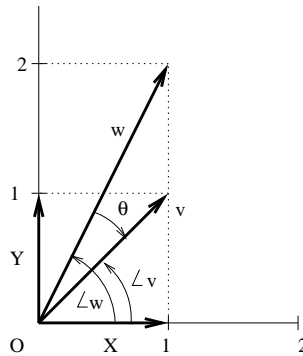
Met  $\mathbf{n}_e = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$  is de eenheidsnormaal bepaald, een vector die loodrecht op het vlak staat met de lengte van 1.

Als men het hoekverschil tussen twee vectoren relatief ten opzichte van een basis-eenheidsvector wil uitrekenen, dan is de polariteit van de oriëntatie voor het hoekverschil wel relevant. Bijvoorbeeld in figuur 3.18 is  $\angle \mathbf{v} - \angle \mathbf{w} = -18^\circ 26' = 341^\circ 34'$  en  $\angle \mathbf{w} - \angle \mathbf{v} = +18^\circ 26'$ .





Figuur 3.17: Meetkundige voorstelling van  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \theta$ .



Figuur 3.18: Het hoekverschil  $\theta = \angle \mathbf{v} - \angle \mathbf{w}$

In een orthonormaalstelsel is het hoekverschil  $0^\circ \leq \theta = \angle \mathbf{v} - \angle \mathbf{w} < 360^\circ$  ten opzichte van de basisoriëntatie  $\mathbf{X}$  met behulp van  $\cos \theta = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$  en  $\sin \theta = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$  te bepalen:

$$\theta = \begin{cases} + \arccos(\cos \theta) & \text{als } \sin \theta \geq 0 \\ - \arccos(\cos \theta) & \text{als } \sin \theta < 0 \end{cases}$$

Als de kentallen bekend zijn, dan wordt het uitproduct van twee vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  uitgedrukt in de basisvectoren van de Euclidische 3D-ruimte:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

met behulp van de determinant:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & v_x & w_x \\ \mathbf{y} & v_y & w_y \\ \mathbf{z} & v_z & w_z \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_z & w_z \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} +v_y w_z - v_z w_y \\ -v_x w_z + v_z w_x \\ +v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

Voorbeelden:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & 0 \\ \mathbf{y} & 0 & 1 \\ \mathbf{z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x} & 0 & 1 \\ \mathbf{y} & 1 & 0 \\ \mathbf{z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & 1 \\ \mathbf{y} & 1 & 2 \\ \mathbf{z} & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enkele toepassingen van het uitproduct:

- Het bepalen van de eenheidsnormaalvector op de driehoek op met hoekpunten:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit is het uitproduct van de verschilvectoren  $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  en  $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ , gedeeld door de lengte van de normaal  $|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|$ :

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & 2-1 & 2-1 \\ \mathbf{y} & 2-1 & 3-1 \\ \mathbf{z} & 1-1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & 1 \\ \mathbf{y} & 1 & 2 \\ \mathbf{z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het resultaat is in dit geval de basisvector  $\mathbf{z}$  die ook een eenheidsvector is omdat  $|\mathbf{z}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$ .

- Het bepalen van een vlak door de oorsprong met een normaalvector.

Een vlak door de oorsprong is een verzameling punten die voldoet aan de vector-vergelijking  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}$ , waarbij  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  de opspannende vectoren worden genoemd. De scalaren  $\lambda$  en  $\gamma$  mogen elke reële waarde aannemen, elk punt op het vlak is bepaald door een waarde van  $\lambda$  en  $\gamma$ .

De normaalvector van een vlak is een vector die loodrecht op dit vlak staat. Om de normaalvector  $\mathbf{n}$  te bepalen nemen we het uitproduct van de opspannende vectoren  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$$

Als  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  dan is de hoek tussen de normaalvector en het vlak loodrecht. De vector  $\mathbf{n}$  staat dus ook loodrecht op de opspannende vectoren  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$ , daarom zijn de volgende inproducten dus 0:

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{r} = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{n} \bullet \mathbf{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \bullet (\lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}) = 0$$

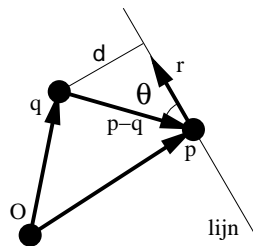
Uit de vergelijking van het vlak  $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}$  volgt  $\lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s} = \mathbf{v} - \mathbf{p}$ . Als dit gecombineerd wordt met het vorige resultaat, dan volgt de normaalvergelijking van een vlak:

$$\mathbf{n} \bullet (\lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}) = \mathbf{n} \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{p}) = 0$$

- De oppervlakte van een driehoek tussen de hoekpunten  $a = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $b = (b_x, b_y, b_z)$  en  $c = (c_x, c_y, c_z)$  kan worden uitgedrukt als het halve oppervlakte van het parallellogram  $|\mathbf{b} - \mathbf{a}||\mathbf{c} - \mathbf{a}| \sin \theta$  van het uitproduct  $|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|$ :

$$\begin{aligned} opp(\Delta) &= \frac{1}{2} |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\begin{aligned} &+(b_x c_y - b_x a_y - c_x b_y + c_x a_y - a_x c_y + a_x b_y)^2 \\ &+(a_x c_z + b_x a_z + c_x b_z - c_x a_z - b_x c_z - a_x b_z)^2 \\ &+(b_y c_z - b_y a_z - a_y c_z - b_z c_y + b_z a_y + a_z c_y)^2 \end{aligned}}$$

- De kortste afstand  $d$  van een punt  $\mathbf{q}$  tot de lijn  $= \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r}$ , zie figuur 3.19:



Figuur 3.19: Kortste afstand  $d$  van punt  $\mathbf{q}$  tot lijn

$$d = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \sin \theta = |\mathbf{r}_e \times (\mathbf{p} - \mathbf{q})| = \frac{|\mathbf{r} \times (\mathbf{p} - \mathbf{q})|}{|\mathbf{r}|}$$

- De kortste afstand  $d$  tussen twee kruisende lijnen  $\text{lijn1} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r}$  en  $\text{lijn2} = \mathbf{q} + \gamma \mathbf{s}$  is de projectie van  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  op de eenheidsnormaal van het vlak door  $\mathbf{o}$  dat door beide lijnen bepaald wordt:

$$d = \frac{|(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})|}{|\mathbf{r} \times \mathbf{s}|}$$

Het lijnstuk met de kortste afstand tussen twee lijnen staat loodrecht op beide lijnen, de normaal  $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$  van het gecombineerde vlak heeft dezelfde richting.

### 3.3.3 De normaalvergelijking van een vlak

Een willekeurig vlak  $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}$  kan met behulp van een normaalvergelijking beschreven worden.

Om deze normaalvergelijking te bepalen wordt eerst het uitproduct van de twee opspannende vectoren  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$  de normaalvector bepaald:  $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ . Het evenwijdige vlak door de oorsprong heeft nu de vergelijking  $(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v} = 0$ . Verplaats dit evenwijdige vlak met vector  $\mathbf{p}$ . Het verplaatste vlak  $\mathbf{v}$  heeft de vergelijking  $(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{p}) = 0$ .

Een alternatieve zienswijze is dat elke verschilvector  $\mathbf{v} - \mathbf{p}$  die in het vlak  $\mathbf{v}$  ligt, een hoek van  $90^\circ$  maakt met de normaalvector van dat vlak, dus  $(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{p}) = 0$ .

**Voorbeeld 3.3** Een vlak  $\mathbf{v}$  is opgespannen door de vectoren  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  en gedragen door vector  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Bepaal de normaalvergelijking van het vlak  $\mathbf{v}$ .

Eerst bepalen we de normaalvergelijking van het vlak evenwijdig aan  $\mathbf{v}$  dat door de oorsprong  $\mathbf{o}$  gaat:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & -1 \\ \mathbf{y} & 2 & 0 \\ \mathbf{z} & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 8x - 7y + 2z = 0.$$

Het is gebruikelijk om in normaalvergelijkingen voor de variabele vector  $\mathbf{v}$ , de symbolische kentallen  $x, y$  en  $z$  te gebruiken in plaats van  $v_x, v_y$  en  $v_z$ . De normaalvergelijking van het vlak  $\mathbf{v}$  door punt  $\mathbf{p}$  wordt nu:

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 8x - 24 - 7y + 14 + 2z - 2 = 0 \rightarrow 8x - 7y + 2z = 12$$

Enkele eigenschappen van de normaalvergelijking van een vlak:

- De normaalvergelijking  $ax + by + cz = 0$  van een vlak door  $\mathbf{o}$  is gemakkelijk te af te leiden uit de kentallen van de normaal op dit vlak en omgekeerd:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

Voorbeeld:

$$16x - 14y + 4z = 0 \rightarrow 8x - 7y + 2z = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Elk vlak door de oorsprong is één-éénduidig bepaald door de richting loodrecht op dat vlak. Een normaalvector  $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$  in deze richting bepaalt dus het vlak door de oorsprong, de lengte en oriëntatie daarvan zijn irrelevant.

- De kortste afstand  $d$  van een vlak  $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}$  tot de oorsprong is de lengte van de vector van een punt  $p$  op dit vlak geprojecteerd op de eenheidsnormaal van dit vlak:

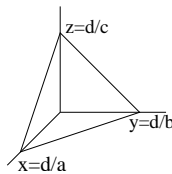
$$d = \frac{|(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \bullet (\mathbf{p})|}{|\mathbf{r} \times \mathbf{s}|}$$

- De kortste afstand  $d$  tussen een punt  $\mathbf{q}$  en een vlak  $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{r} + \gamma \mathbf{s}$  is de projectie van  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  op de eenheidsnormaal van dat vlak:

$$d = \frac{|(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})|}{|\mathbf{r} \times \mathbf{s}|}$$

Het lijnstuk met de kortste afstand tussen een punt en een vlak staat loodrecht op het vlak, de normaal  $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$  van het vlak heeft dezelfde richting.

- Het tekenen van een vlak met een normaalvergelijking  $ax + by + cz = d$  is eenvoudig: Het snijpunt met de  $x$ -as wordt gevonden door  $y = z = 0$  te stellen en de vergelijking op te lossen voor  $x$  met als oplossing  $x = d/a$ . Dit werkt op dezelfde manier voor de snijpunten van het vlak met de  $y$ -as ( $y = d/b$ ) en  $z$ -as ( $z = d/c$ ), zie figuur 3.20:



Figuur 3.20: Snijpunten met de assen van vlak  $ax + by + cz = d$

- Met een snijpunt op een as als vector en twee verschilvectoren tussen de snijpunten onderling, kan men uit de normaalvergelijking  $ax + by + cz = d$  een vectorvergelijking vinden voor dat vlak:

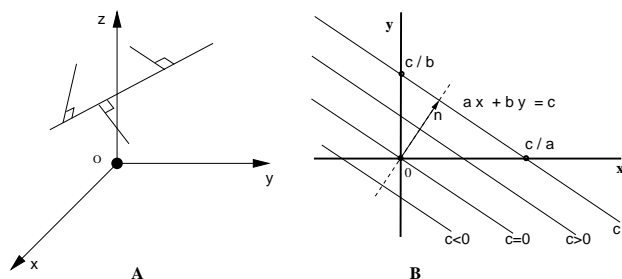
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d/a \\ -d/b \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ -d/c \end{pmatrix}$$

### 3.3.4 De normaalvergelijking van een lijn

In de 3D-ruimte heeft een lijn oneindig veel snijdende loodlijnen in verschillende richtingen, daarom is een normaalvergelijking onmogelijk, zie figuur 3.21A. In de 3D-ruimte kan een lijn wel als een snijlijn tussen twee vlakken worden gegeven. Een 3D-lijn is een lineair stelsel van twee vlakvergelijkingen. Een 3D-lijn in vectornotatie **lijn** =  $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{r}$  is wel mogelijk.

In de Euclidische 2D-ruimte is een normaalvergelijking van een lijn wel mogelijk, alle loodlijnen op de lijn hebben dezelfde richting als de normaalvector van die lijn:

Net zoals bij evenwijdige 3D-vlakken staat de normaalvector van een 2D-lijn loodrecht op alle evenwijdige lijnen daaraan (zie figuur 3.21B).



Figuur 3.21: Een 3D-lijn en 2D-lijnen

Voor **lijn** =  $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{r}$  met  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  geldt  $\mathbf{n} \bullet \mathbf{r} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = 0$ .

Daaruit volgt de normaalvergelijking voor de lijnen door  $\mathbf{o}$ :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow ax + by = 0$$

De verschilvectoren **lijn** –  $\mathbf{p}$  staan loodrecht op de normaal:

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{lijn} - \mathbf{p}) \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix} = 0$$

Dit is de gezochte normaalvergelijking.

#### Voorbeeld 3.4

$$\mathbf{lijn} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -3x + 4y = -2$$

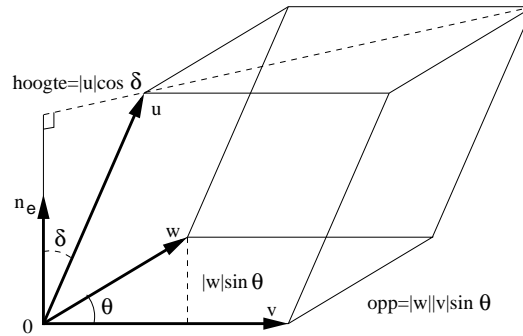
### 3.3.5 Het tripleproduct $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ in de Euclidische 3D-ruimte

De inhoud van het parallellepipedum van figuur 3.22 is het product van de hoogte  $|u| \cos \delta = \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}_e$  en de oppervlakte van het parallellogram  $|\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$ .

Uit  $\mathbf{n}_e = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$  en de eigenschap van het inproduct dat  $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}_e)\alpha = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}_e \alpha)$  volgt:

$$\text{Inhoud} = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}_e) |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \left( \mathbf{u} \bullet \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right) |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

Dit scalaire resultaat  $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  wordt het tripleproduct genoemd. Uitgedrukt in de kentallen van de vectoren  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$  (of de 3D-coördinaten van de hoekpunten) is het tripleproduct de determinant:



Figuur 3.22: De inhoud van het parallellepipedum als product van de oppervlakte van het basisvlak en de hoogte.

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Enkele toepassingen van het tripleproduct:

- De punten  $a$ ,  $b$  en  $c$  liggen op één lijn als het tripleproduct van de drie vectoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{c}$  (alle ongelijk aan de nulvector) nul is.

In dat geval is de inhoud van het parallellepipedum met de hoekpunten  $(0, 0, 0)$ ,  $(a_x, a_y, a_z)$ ,  $(b_x, b_y, b_z)$  en  $(c_x, c_y, c_z)$  gelijk aan 0.

Dus de punten  $a$ ,  $b$  en  $c$  liggen op één lijn als:

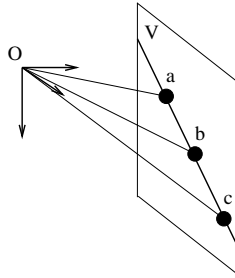
$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

- Als drie punten in de 2D-ruimte op één lijn liggen dan geldt:

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deze determinant ‘ontstaat’ door het 2D-vlak met de punten  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{c}$  op het 3D-vlak  $z = 1$  af te beelden.

**Opmerking:** Als drie punten op één lijn liggen dan worden zij collineair genoemd (zie figuur 3.23).



Figuur 3.23: Collineaire punten.

### 3.4 Opgaven

1. (a) Bepaal het inproduct van de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ;  
 (b) Bepaal het inproduct van de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
2. (a) Bepaal de lengte van de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ;  
 (b) Bepaal de lengte van de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
3. (a) Bepaal de hoek tussen de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ;  
 (b) Bepaal de hoek tussen de vectoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
4. Gegeven de punten **p** en **q**:

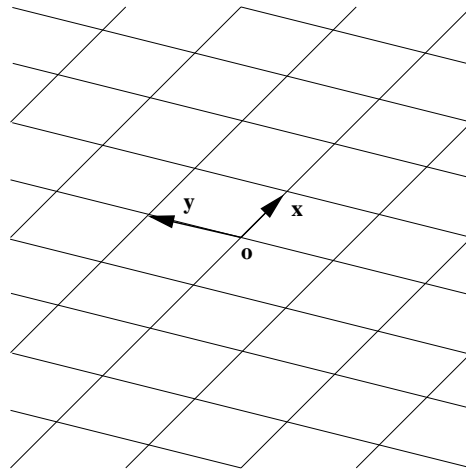
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bepaal de parametrische vergelijking van de **lijn** $[\lambda]$ .

- (a) door het punt **o** en punt **p**.
- (b) door het punt **p** in dezelfde richting als vector **q**.
- (c) door de punten **p** en **q**.



- (d) Bepaal de vectorvergelijking van de vector  $\mathbf{m}$  die loodrecht op de eerste lijn staat.
- (e) Bepaal de vectorvergelijking van de vector  $\mathbf{n}$  die loodrecht op de tweede lijn staat.
5. Bepaal de normaalvergelijking van het vlak opgespannen door de vectoren  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  en gedragen door vector  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
6. (a) Welke ruimte wordt aangegeven in figuur 3.24?



Figuur 3.24:

- (b) Gegeven een variabele vector  $\mathbf{v}$ , en een constante vector  $\mathbf{p}$  en een scalair  $0 < \rho$ . Welk figuur  $\mathbf{v}$  ontstaat in de Euclidische 2D-ruimte als oplossingen van de vergelijking  $(\mathbf{p} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v}) = \rho^2$ ?
- (c)
- De affiene 1D-ruimte kan men voorstellen als een oneindige lijn van een-dimensionale punten  $\mathbf{v} = (x)$  en een nulpunt (oorsprong)  $\mathbf{o} = (0)$ .
  - De affiene 2D-ruimte kan men voorstellen als een oneindig vlak van twee-dimensionale punten  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  en een oorsprong  $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - De affiene 3D-ruimte kan men voorstellen als een ‘oneindig iets’ (een oneindige kubus?) van driedimensionale punten  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  en een oorsprong  $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Wat zou de parametrische vectorvoorstelling van zo'n 'oneindig iets' zijn in de 4D-ruimte?

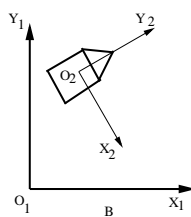
# Hoofdstuk 4

## Transformaties

De grafische computertechnieken zijn niet echt te begrijpen zonder inzicht in de transformaties van coördinaatstelsels. Hiervoor is wel enige kennis van de goniometrie nodig (zie bijlage).

### 4.1 Affiene transformaties

In figuur 4.1 vormen de vectoren  $\mathbf{x}_1$  en  $\mathbf{y}_1$  met de oorsprong  $\mathbf{o}_1$  het wereldcoördinaatstelsel. De vectoren  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{y}_2$  en  $\mathbf{o}_2$  hebben een afwijkende positie en hoek van het wereldcoördinaatstelsel, zij vormen een lokaal coördinaatstelsel met de oorsprong  $\mathbf{o}_2$ . Vanuit het wereldcoördinaatstelsel is  $\mathbf{o}_2$  het referentiepunt van het lokale stelsel.



Figuur 4.1: Lokale- en wereldcoördinaten

Het referentiepunt is meestal is het zwaartepunt van het bewegend object.

Met transformaties is het mogelijk affiene coördinaatstelsels op elkaar af te beelden. Zo'n coördinaatstransformatie  $T$  moet dan wel aan de volgende eisen voldoen:

- I referentiepunten moeten op elkaar afgebeeld worden:  $T(o_a) = o_b$ ,
- II transformaties moeten lineair zijn:  

$$T(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
- III punten moeten punten blijven,
- IV lijnen moeten lijnen blijven,
- V parallelle lijnen moeten parallel blijven,
- VI verhoudingen moeten ongewijzigd blijven.

Deze eisen verbieden niet dat posities, hoeken en afmetingen veranderen. Behalve aan de eis dat referentiepunten op elkaar afgebeeld moeten zijn, voldoen de volgende affiene transformaties wel aan alle andere eisen.

- 1 de translatie of verplaatsing,
- 2 de rotatie of draaiing,
- 3 de schaalverandering of vergroten of verkleinen,
- 4 de shearing of proportioneel verschuiven.

Als een referentiepunt bij een coördinaattransformatie betrokken is, dan kan dat tot extra transformaties leiden. Stel bijvoorbeeld dat het object in figuur 4.1 gedraaid moet worden rond het lokale referentiepunt  $\mathbf{o}_2$  binnen het kader van het wereldcoördinatenstelsel met de oorsprong  $\mathbf{o}_1$ . Dan is het noodzakelijk om eerst het object met behoud van richting en lengte te verplaatsen naar  $\mathbf{o}_1$  en vervolgens te draaien en tenslotte met de nieuwe richting en ongewijzigde afmeting terug te schuiven naar de positie  $\mathbf{o}_2$ .

### 4.1.1 Translatie van een punt

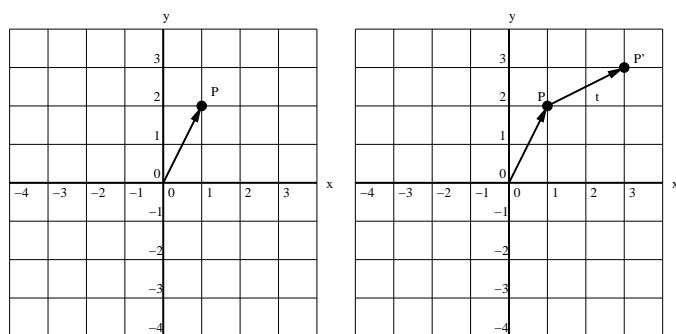
Translatie is het verschuiven van een coördinatenstelsel over een vaste afstand in een gegeven richting en oriëntatie. Met vectoren zijn translaties gemakkelijk voor te stellen.

Bij een translatie, een lineaire verplaatsing van een afbeelding, wordt elk punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  naar een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  geplaatst door een transformatie (met  $t_x$  als verplaatsing in de  $x$  richting en  $t_y$  als verplaatsing in de  $y$ -richting)  $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$ . De translatie kan geschreven worden als  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{t}$ .

**Voorbeeld 4.1** In figuur 4.2 is de translatie van punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  met verplaatsing  $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  aangegeven.

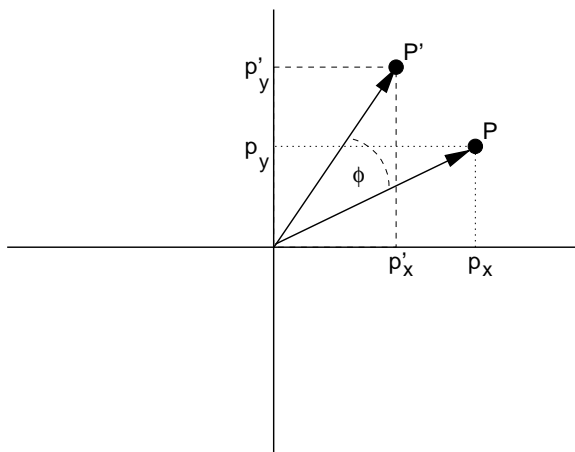
### 4.1.2 Rotatie om de oorsprong

De standaard rotatie is gedefinieerd als een verdraaiing rond de oorsprong. Een punt  $p$  met de coördinaten  $(p_x, p_y)$  wordt over een hoek  $\phi$  geroteerd rond de oorsprong naar punt



Figuur 4.2: Translatie

$p'$  met de coördinaten  $(p'_x, p'_y)$ , zie figuur 4.3.



Figuur 4.3: Rotatie rond de oorsprong.

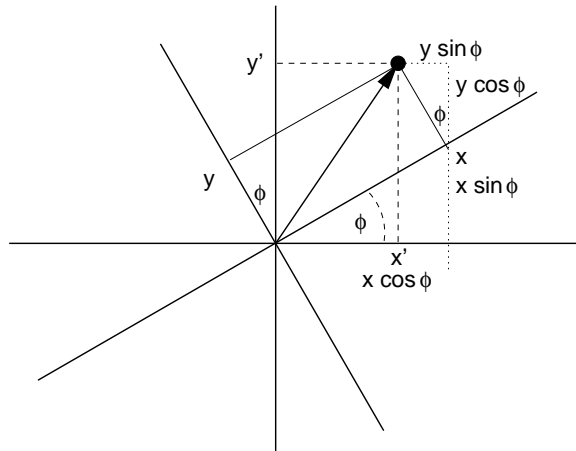
Figuur 4.3 kunnen we ook als twee assenstelsels tekenen met een gemeenschappelijke oorsprong en waarbij het punt  $p$  en  $p'$  elkaar overdekken, zie 4.4.

De rotatie geeft het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi - y \sin \phi \\ y' &= x \sin \phi + y \cos \phi \end{aligned}$$

In vectornotatie van een rotatie wordt de afbeelding van een punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  op een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  gegeven door een transformatie (met  $\theta$  als de hoek waarover gedraaid wordt):

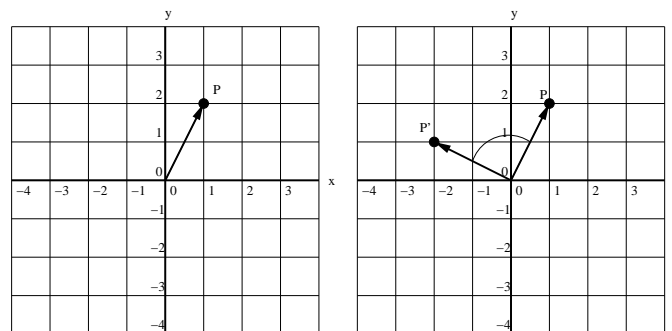
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Figuur 4.4: Rotatie van het assenstelsel.

De rotatie wordt beschreven als  $\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}$  of als functie van de hoek  $\phi$  als  $\mathbf{p}' = \mathbf{R}[\phi]\mathbf{p}$ .

**Voorbeeld 4.2** In figuur 4.5 is de rotatie van punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  over een hoek  $\theta = \pi/2$  met als affiene transformatie  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  aangegeven.



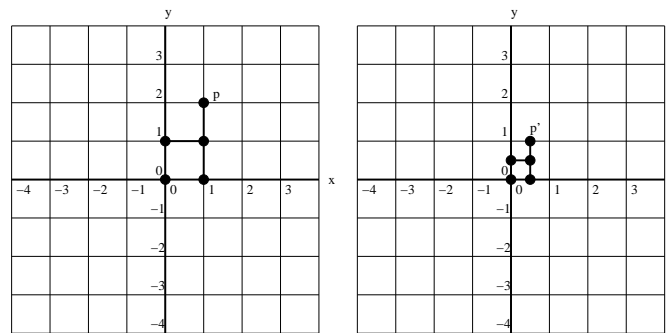
Figuur 4.5: Rotatie van  $90^\circ$ .

Afmetingen van lijnstukken en hoeken tussen lijnen blijven hetzelfde bij rotaties en translaties. Omdat de vorm van een figuur (de onderlinge hoeken en afmetingen) ongewijzigd blijft, worden translaties en rotaties rigide transformaties genoemd.

### 4.1.3 Schaalverandering

Een schaalverandering is de vergroting of verkleining van de afbeelding. De afbeelding van een punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  op een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  wordt gegeven door een transformatie (met schaalfactor  $s_x$  in de  $x$ -richting en schaalfactor  $s_y$  in de  $y$ -richting)  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$  en kan geschreven worden als  $\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$ .

**Voorbeeld 4.3** In figuur 4.6 is de schaalverandering op een groep punten aangegeven. Punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  van deze groep wordt met de schaalfactor  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$  getransformeerd.

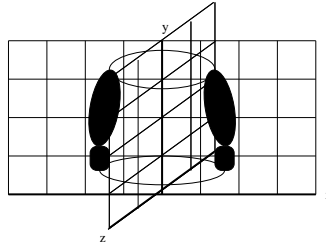


Figuur 4.6: Schaalverandering

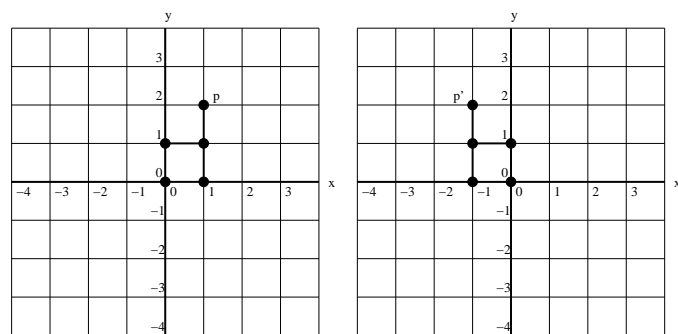
Indien de schaalfactoren negatief zijn, dan is er sprake van een spiegeling rond één of meer coördinaatassen. Een spiegeling rond de  $y$ -as vindt plaats als  $s_x = -1$  en een spiegeling rond de  $x$ -as vindt plaats als  $s_y = -1$ . Een spiegeling is geen rotatie. De afdruk van de linkerschoen kan nooit door rotatie overgaan in een afdruk van de rechterschoen. Een spiegeling kan men wel voorstellen als een rotatie met  $\theta = \pi$  door een andere dimensie, in dit geval het vlak dat de loodrecht staat op het afbeeldingsvlak. De snijlijn tussen de twee vlakken is de spiegellijn (zie figuur 4.7).

**Voorbeeld 4.4** In figuur 4.8 is een spiegeling rond de  $y$ -as op een groep punten aangegeven. Punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  van deze groep wordt met de schaalfactor  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  getransformeerd.

**Voorbeeld 4.5** In figuur 4.9 is een spiegeling rond de  $x$ -as op een groep punten aangegeven. Punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  van deze groep wordt met de schaalfactor  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  getransformeerd.

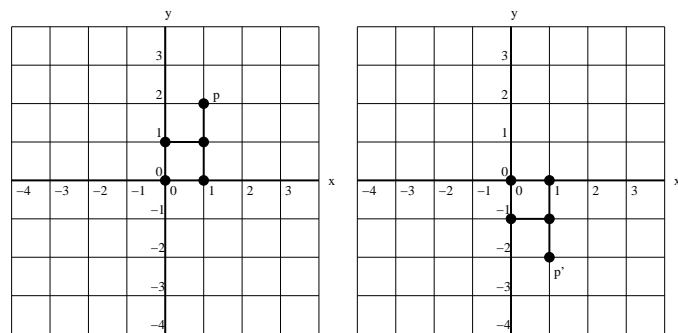


Figuur 4.7: 2D-spiegeling als een 3D-rotatie



Figuur 4.8: Spiegeling rond de y-as

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ getransformeerd.}$$

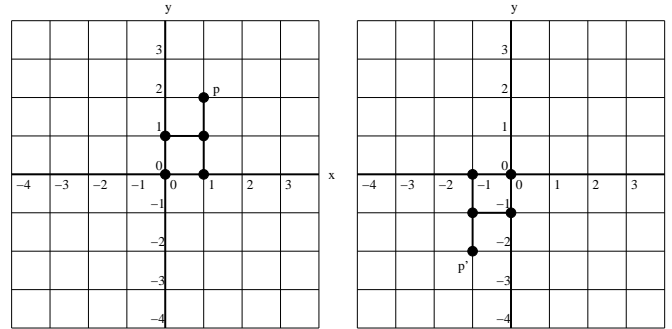


Figuur 4.9: Spiegeling rond de x-as

Een spiegeling door de oorsprong is mogelijk met de schaalfactor  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Spiegeling door de oorsprong bestaat uit een spiegeling rond de x-as en een spiegeling rond de y-as. Een spiegeling rond de oorsprong kan wel worden voorgesteld door een rotatie met  $\theta = \pi$ .



**Voorbeeld 4.6** In figuur 4.9 is een spiegeling rond de oorsprong op een groep punten aangegeven. Punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  van deze groep wordt met de schaalfactor  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  naar punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  getransformeerd.



Figuur 4.10: Spiegeling rond de oorsprong

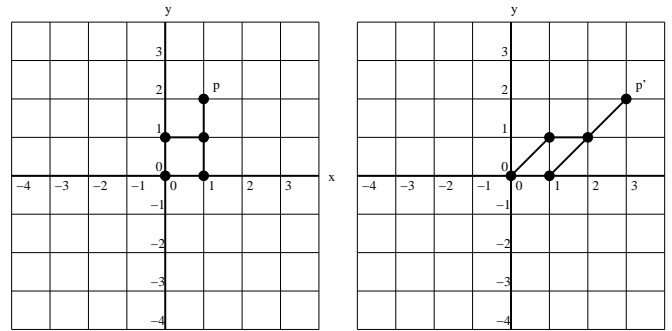
#### 4.1.4 Shearing

Bij shearing of proportioneel verschuiven langs een coördinaatas, bijvoorbeeld de  $x$ -as, wordt de afbeelding van een punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  op een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  gegeven door een transformatie (met  $a$  als de verschuivingsfactor langs de  $x$ -as)  $\mathbf{H}_x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Shearing langs de  $x$ -as kan geschreven worden als  $\mathbf{p}' = \mathbf{H}_x \mathbf{p}$ . Voor shearing langs de  $y$ -as wordt de afbeelding van een punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  op een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  gegeven door een transformatie (met  $b$  als de verschuivingsfactor langs de  $y$ -as)  $\mathbf{H}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ . Shearing langs de  $y$ -as kan geschreven worden als  $\mathbf{p}' = \mathbf{H}_y \mathbf{p}$ .

**Voorbeeld 4.7** In figuur 4.11 is de shearing langs de  $x$ -as op een groep punten aangegeven. Punt  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  van deze groep wordt met de shearing  $\mathbf{H}_x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  naar het punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  getransformeerd.

#### 4.1.5 Het toepassen van affine transformaties

Tot nu toe zijn transformaties van een punt  $\mathbf{p}$  naar punt  $\mathbf{p}'$  gedemonstreerd, figuren bestaan echter uit meer punten. Dit lossen we op door de kolomvectoren van de punten uit een



Figuur 4.11: Shearing

figuur combineren tot een ‘picturematrix’  $\mathbf{P}$ . De getransformeerde figuur  $\mathbf{P}'$  in matrixvorm (een rij van kolomvectoren) ontstaat als matrixproduct met een transformatie matrix. De resulterende matrix is een rij van kolomvectoren van de getransformeerde punten.

**Voorbeeld 4.8** De punten van figuur 4.11 worden met shearingmatrix  $\mathbf{H}_x$  getransformeerd. De punten van de originele figuur zijn:

$$\mathbf{P} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De transformatie:

$$\mathbf{H}_x \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}'$$

De matrix  $\mathbf{P}'$  bevat de getransformeerde punten:

$$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

**Voorbeeld 4.9** Het translteren van een totale figuur  $\mathbf{P}$  als matrixsom  $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$ , waarbij  $\mathbf{T}$  bestaat uit een rij van gelijke translatievectoren  $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ook met geparametriseerde vector- en matrixfuncties zijn complete figuren te transformeren:

**Voorbeeld 4.10** De punten van de originele figuur, een lijn  $\mathbf{p}[t]$  in geparametriseerde vectorvorm:

$$\mathbf{p}[t] = \begin{pmatrix} \alpha t + \gamma \\ \beta t + \delta \end{pmatrix}$$

wordt met behoud van afstand tot oorsprong met hoek  $\theta$  geroteerd rond de oorsprong:

$$\mathbf{R}[\theta]\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t + \gamma \\ \beta t + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha t + \gamma) \cos \theta + (\beta t + \delta) \sin \theta \\ (\alpha t + \gamma) \sin \theta - (\beta t + \delta) \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{p}'[\theta, t]$$

Hoewel in dit voorbeeld alleen  $t$  en  $\theta$  als parameters gebruikt zijn, mogen ook andere parameters gekozen worden zoals  $\alpha, \beta, \gamma$  en  $\delta$ .

De eigenschap dat punten en lijnen na affine transformaties punten en lijnen blijven, is er verantwoordelijk voor dat twee opeenvolgende affine transformaties vervangen kunnen worden door één affine transformatie, die dezelfde afbeelding geeft. Omgekeerd kan één affine transformatie opgesplitst worden in meerdere affine transformaties, die na elkaar uitgevoerd dezelfde afbeelding geven. Bijvoorbeeld de samengestelde transformatie  $\mathbf{M}$  bestaande uit het product van de transformaties  $\mathbf{HSR}$  toegepast op de ‘picturematrix’  $\mathbf{P}$  geeft als resultaat  $\mathbf{P}'$ :

$$\mathbf{MP} = (\mathbf{HSR})\mathbf{P} = \mathbf{P}'$$

De inverse transformatie transformeert  $\mathbf{P}'$  terug naar  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}' = \mathbf{P}$ . De inverse transformatiematrix  $\mathbf{M}^{-1}$  is gemakkelijk uit het product van de samenstellende transformatiematrices af te leiden met:

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{HSR})^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}^{-1}$$

Een affine transformatie heeft altijd een basisvorm  $\mathbf{p}' = \mathbf{Mp} + \mathbf{t}$  of  $\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}' + \mathbf{t}'$ , waarbij  $\mathbf{M}$  een samenstelling van één of meer elementaire transformaties (inclusief de inversen daarvan) is en zowel  $\mathbf{t}$  als  $\mathbf{t}'$  samenstellingen zijn van nul of meer elementaire translaties:

- De identiteitstransformatie heeft de basisvorm:  $\mathbf{p}' = \mathbf{Ip} + \mathbf{o}$ ;
- De elementaire translatie heeft de basisvorm:  $\mathbf{p}' = \mathbf{Ip} + \mathbf{t}$ ;
- De elementaire rotatie (en shearing en spiegeling):  $\mathbf{p}' = \mathbf{Rp} + \mathbf{o}$ ;
- De affine transformatie als een zuiver product van matrices:  $\mathbf{p}' = \mathbf{Mp} + \mathbf{o}$ ;

Samenstellingen van elementaire affine transformaties zoals de rotatie van een punt  $\mathbf{p}$  om een referentiepunt  $\mathbf{d}$ . Deze samengestelde affine transformatie zal als eerste een translatie naar de oorsprong uitvoeren, vervolgens een rotatie om de oorsprong en tenslotte een translatie terug naar de oorspronkelijke positie. In deze samengestelde affine transformatie is de basisvorm  $\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{t}$  duidelijk te herkennen:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} = \underbrace{\mathbf{R}\mathbf{p}}_{\mathbf{M}\mathbf{p}} \underbrace{-\mathbf{R}\mathbf{d} + \mathbf{d}}_{+\mathbf{t}}$$

De basisvorm  $\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}' + \mathbf{t}'$  is ook in de inverse transformatie aanwezig:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{p}' - \mathbf{d}) + \mathbf{d} = \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}'}_{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}'} \underbrace{-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d} + \mathbf{d}}_{+\mathbf{t}'}$$

### Opmerkingen:

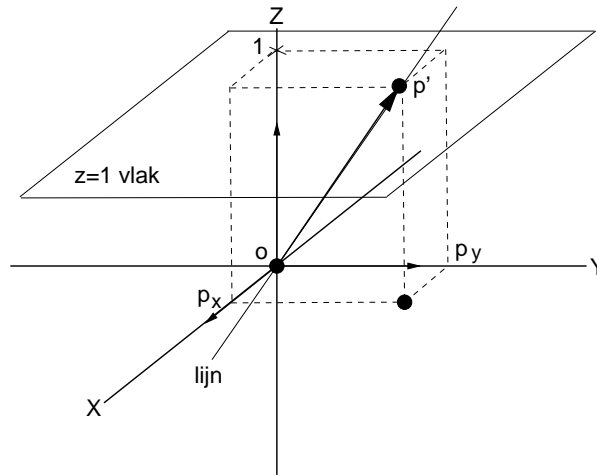
- De basisvorm  $\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{t}$  is inefficiënt door de translatieterm  $\mathbf{t}$ . Als deze term ontbreekt dan kunnen alle transformaties en hun inversen als matrixproducten gemakkelijker samengesteld en (her)gebruikt worden;
- Affiene transformaties en coördinaten worden gebruikt bij 2D- en 3D-tekenen van lijnen, hoeken en figuren met behoud van de exacte afmetingen zoals bij CAD-software;
- Het weergeven realistische afbeeldingen met perspectieven, projecties en schaduw- en lichteffecten is met affine transformaties en coördinaten minder goed mogelijk. Daarvoor is de projectieve 3D-ruimte noodzakelijk en het gebruik van homogene coördinaten.

## 4.2 Homogene coördinaten

Om een 2D-afbeelding vanuit een perspectief te zien, is het handig deze afbeelding te vast te leggen op het vlak  $z = 1$  in de 3D-ruimte. Voor het waarnemingspunt wordt de oorsprong  $\mathbf{o}$  van de 3D-ruimte gekozen, zoals in figuur 4.12 met een afbeelding van één punt op het  $z = 1$  vlak.

De 3D-lijn door de oorsprong  $\mathbf{o}$  en het punt  $\mathbf{p}'$ , de projectielijn, heeft de richting van de 3D-vector  $\mathbf{p}'$ . In principe maakt een willekeurige lengte groter dan nul van de 3D-vector  $\mathbf{p}$  niets uit voor de richting van deze projectielijn.

Het vertalen van de beeldpunten in de 2D-ruimte naar de 3D-ruimte, geschiedt door het 2D-punt  $\mathbf{p}$  af te beelden op het  $z = 1$  vlak als  $\mathbf{p}'$  in de 3D-ruimte zoals in figuur 4.12 is aangegeven.



Figuur 4.12: De plaatsing van een punt op het  $z = 1$  vlak

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De kentallen van het punt  $\mathbf{p}'$  worden de homogene coördinaat van dat punt op het vlak  $z = 1$  genoemd. Een homogene coördinaat is in de 3D-ruimte te beschouwen als de plaats- en een richtingsvector van  $\mathbf{p}'$  vanuit de oorsprong  $\mathbf{o}$ .

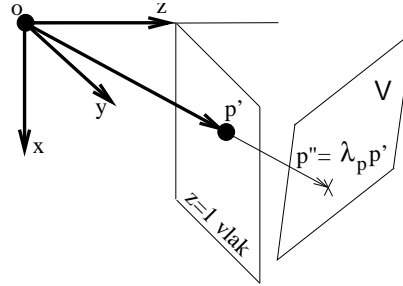
In de 3D-ruimte zijn ook andere punten. De relatie tussen deze punten en de punten op het  $z = 1$  vlak is een projectieve relatie. Voor een projectieve relatie is een projectielijn nodig die de punten  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{p}'$  met elkaar verbindt. Als  $z \neq 0$  dan geldt voor punt  $\mathbf{p}$  en het punt  $\mathbf{p}'$  op het  $z = 1$  vlak de projectieve relatie:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p_x/p_z \\ p_y/p_z \\ 1 \end{pmatrix} \wedge z \neq 0$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In principe hebben alle punten op de projectielijn een projectieve relatie met hetzelfde snijpunt  $\mathbf{p}'$  op het  $z = 1$  vlak.

Projectievectoren in de 3D-oorsprong zijn te vergelijken met de lichtstralen uit een projector die een beeld (het  $z = 1$  vlak) op het projectievlak  $\mathbf{v}$  projecteren (zie figuur 4.13).



Figuur 4.13: Projecteren van de punten op het  $z = 1$  vlak op een projectievlak  $\mathbf{v}$

Het snijpunt van  $\mathbf{p}'' = \lambda_p \mathbf{p}'$  op het projectievlak  $\mathbf{n} \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{d}) = 0$  met de projectielijn tussen  $\mathbf{o}$  en  $\mathbf{p}'$  wordt gevonden door de vergelijking  $\mathbf{n} \bullet (\lambda \mathbf{p}' - \mathbf{d}) = 0$  op te lossen voor de onbekende  $\lambda = \lambda_p$ .

## 4.2.1 Transformaties van homogene coördinaten

Alle affine 2D-transformaties zoals de translatie, rotatie, schaalverandering en shearing zijn met projectievectoren voor te stellen als rotaties van de projectievectoren vanuit het 3D-zichtpunt. Als de projectievectoren genormaliseerd zijn tot eenheidsvectoren, dan zijn de gerooteerde projectievectoren ook eenheidsvectoren.

Een tweedimensionaal punt  $(x, y)$  wordt in homogene coördinaten weergegeven door een

driedimensionaal punt  $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha \end{pmatrix}$  waarbij  $\alpha$  niet gelijk aan nul mag zijn. Omdat een translatie

een rotatie van 3D projectievectoren is vanuit het 3D-zichtpunt  $\mathbf{o}$ , is een 2D translatie op het projectievlak nu matrixproduct i.p.v. een optelling.

Als  $\alpha = 1$  genomen wordt, kan een translatie  $\mathbf{T}[t_x, t_y]$  van  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  op een punt  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$  weergegeven worden door:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}[t_x, t_y] \mathbf{p} \quad \text{ofwel} \quad \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Op dezelfde wijze kunnen rotatie, schaalverandering en shearing weergegeven worden:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}[\theta]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{R}[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}[s_x, s_y]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{S}[s_x, s_y] = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}_x[a]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{H}_x[a] = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}_y[b]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{H}_y[b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.2.2 Samengestelde homogene transformaties

Door het invoeren van homogene transformaties kan een samenstelling van verschillende affine transformaties worden teruggebracht tot één productmatrix, wat erg veel reken-tijd bespaart. Het transformeren van een punt  $\mathbf{p}$  naar een punt  $\mathbf{p}'$  met een samengestelde homogene transformatie  $\mathbf{M}$  heeft altijd de eenvoudige basisvorm:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p}$$

Als een homogene transformatie  $\mathbf{M}$  uitgevoerd kan worden, dan wordt met een inverse homogene transformatie  $\mathbf{M}^{-1}$  de verandering ongedaan gemaakt.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}' = \mathbf{p}$$

De inverse matrix van een matrixproduct  $\mathbf{M} = \mathbf{RST}$  is het product van de inverse matrices in omgekeerde volgorde  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^{-1}$ .

Als gebruik wordt gemaakt van de transformatieparameters is het tamelijk eenvoudig om de inverse matrices van de elementaire transformaties, translatie, rotatie, schaalverandering<sup>1</sup> en shearing te vinden.

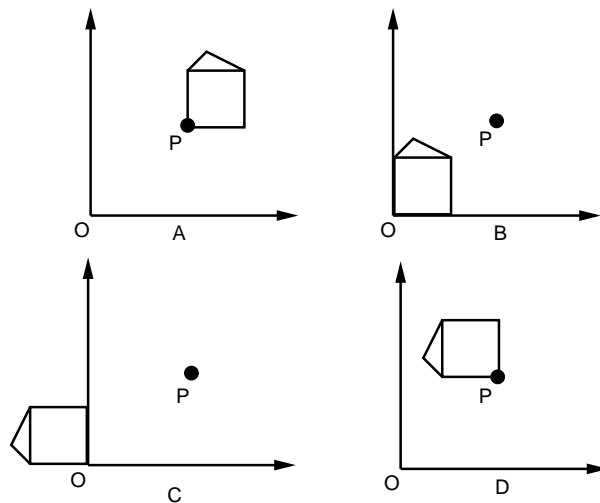
---

<sup>1</sup>In het geval van schaalverandering met de beperking dat de schaalfactor niet gelijk aan nul mag zijn.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{-1}[t_x, t_y] &= \mathbf{T}[-t_x, -t_y] \\
\mathbf{R}^{-1}[\theta] &= \mathbf{R}[-\theta] \\
\mathbf{S}^{-1}[s_x, s_y] &= \mathbf{S}[\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}] \\
\mathbf{H}_x^{-1}[a] &= \mathbf{H}_x[-a] \\
\mathbf{H}_y^{-1}[b] &= \mathbf{H}_y[-b]
\end{aligned}$$

**Voorbeeld 4.11** Als voorbeeld van het uitvoeren van een complexe transformatie, opgebouwd uit een aantal transformaties, wordt hier de rotatie over hoek  $\theta$  rond een punt  $p$  buiten de oorsprong  $o$  genomen. Om deze rotatie uit te voeren kunnen bijvoorbeeld de volgende transformaties gebruikt worden:

- transleer het rotatiepunt  $p$  naar de oorsprong (zie figuur 4.14A en 4.14B),
- roteer over hoek  $\theta$  rond de oorsprong  $o$  (zie figuur 4.14C),
- transleer van de oorsprong naar het rotatiepunt  $p$  (zie figuur 4.14D).



Figuur 4.14: Rotatie rond een punt  $p$  buiten de oorsprong  $o$ .

Als  $p$  de coördinaten  $(x_1, y_1)$  heeft, dan levert de bovengenoemde samenstelling de transformatiematrix  $\mathbf{M}$  op die een punt  $\mathbf{p}$  in een punt  $\mathbf{p}'$  over doet gaan:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{p}$$

ofwel

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p}$$



waarbij

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T}$$

De totale transformatie waarmee een figuur rond een punt  $(p_x, p_y)$  een hoek  $\theta$  geroteerd kan worden, is de matrix  $\mathbf{M}[x, y, \theta]$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}[x, y, \theta] &= \mathbf{T}[x, y]\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}[-x, -y] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x(1 - \cos \theta) + y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & y(1 - \cos \theta) - x \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 4.2.3 Homogene 2D en 3D transformaties

Het afbeelden van realistische 3D-voorwerpen op een 2D-projectievlak is ingewikkelder dan de projectie van de 2D-voorwerpen op een projectievlak.



Figuur 4.15: Projectie van een 3D-ruimte

Door de extra dimensie is het projecteren van 3D-voorwerpen veel rekenintensiever dan het projecteren van 2D-voorwerpen, er worden zware eisen aan de rekensnelheid van de soft- en hardware gesteld. Bovendien zijn extra bewerkingen nodig, zoals het wegsnijden van de niet-zichtbare delen van ondoorzichtige voorwerpen, het bepalen van oppervlakte structuren, kleur-, transparantie-, reflectie- en schaduw effecten.

Bij het werken in een driedimensionale ruimte kan de  $z$ -as twee verschillende oriëntaties ten opzichte van het  $xy$ -assenstelsel hebben. Meestal wordt gekozen voor de richting die een kurkentrekker maakt als de  $x$ -as rechtsom naar de  $y$ -as wordt gedraaid (zie paragraaf 3.3.2).

De 3D-transformaties zijn bijna hetzelfde als de 2D-transformaties: de translatie, de rotaties rond de  $x$ , de  $y$  en de  $z$ -as, het schaalveranderen (inclusief het spiegelen) en de shearing.

Net zoals een punt op het 2D-vlak een homogene coördinaat krijgt als het geprojecteerd wordt in de 3D ruimte, krijgt een punt in de 3D-ruimte een homogene coördinaat als het geprojecteerd wordt in de 4D-ruimte (dit is niet in een plaatje weer te geven).

In de 3D-ruimte heeft een punt  $\mathbf{p}$  de homogene coördinaat:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot p_x \\ w \cdot p_y \\ w \cdot p_z \\ w \end{pmatrix}$$

Affiene transformaties in 3D kunnen, analoog aan affine transformaties in 2D, met vierdimensionale homogene transformaties uitgevoerd worden. Uitgaande van een punt

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dat door een affine transformatie overgaat in een punt } \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kunnen}$$

er transformatiematrices opgesteld worden voor translatie, rotatie, schaalverandering en shearing (voor de  $x$ -as in  $y$ - en  $z$ -richting en voor de  $x$ - en  $y$ -as in de  $z$ -richting):

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}[t_x, t_y, t_z]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{T}[t_x, t_y, t_z] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_z[\theta]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{R}_z[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_x[\psi]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{R}_x[\psi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_y[\phi]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{R}_y[\phi] = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}[s_x, s_y, s_z]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{S}[s_x, s_y, s_z] = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}_x[a, b]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{H}_x[a, b] = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}_y[b, d]\mathbf{p} \quad \text{met} \quad \mathbf{H}_y[b, d] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Merk op dat er verschillende mogelijkheden voor shearing en zijn. Er kan shearing langs één as uitgevoerd worden (voor één of voor beide andere assen) en er kan shearing uitgevoerd worden langs twee assen (voor de derde as).

## 4.3 Opgaven

1. Geef een voorbeeld waarbij het duidelijk is dat een andere volgorde van dezelfde homogene transformaties een ander resultaat oplevert.
2. Vergroot een driehoek  $\mathbf{D}$  met de hoekpunten  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  met 3 voor de x-richting en met 2 in de y-richting vanuit punt  $\mathbf{c}$ . Gebruik homogene transformaties om de resulterende driehoek  $\mathbf{D}'$  te bepalen.
3. Bepaal de samengestelde homogene 3D-rotaties  $R_{zyx}[\theta, \phi, \psi] = R_z[\theta]R_y[\phi]R_x[\psi]$  rond de assen  $x$ ,  $y$  en  $z$  in de oorsprong  $\mathbf{o}$ .
4. Indien twee punten in de 3D-ruimte hetzelfde 2D-projectiepunt hebben, hoe kan men dan bepalen welk 3D-punt het andere 'overdekt'?
5. (a) Hoe zou een spiegeling in de 2D-ruimte rond een willekeurige lijn gemaakt kunnen worden? Zou dit kunnen door alleen gebruik te maken van rotaties en translaties in de 2D-ruimte?  
(b) Hoe zou een spiegeling in de 3D-ruimte rond een vlak met alleen rotaties en translaties gemaakt kunnen worden?
6. Een baan in de homogene 3D-ruimte wordt gegeven met de vectorfunctie:

$$\mathbf{baan}[\alpha, \beta, t] = \begin{pmatrix} \alpha \cos t \\ \alpha \sin t \\ \beta \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Als  $\alpha = 1$  beschrijf de banen als functie van  $t$  die ontstaan dan bij  $\beta = 1$ , bij  $\beta = -1$  en bij  $\beta = 0$ .
- (b) Als  $\beta = 1$  beschrijf de banen als functie van  $t$  die ontstaan dan bij  $\alpha = -1$  en bij  $\alpha = 0$ .

## Bijlage A

### Hoeken, cirkels en goniometrie

De omtrek van een cirkel, de lengte van een cirkelboog, de oppervlakte van cirkel en de oppervlakte van een sector ('taartpunt'):

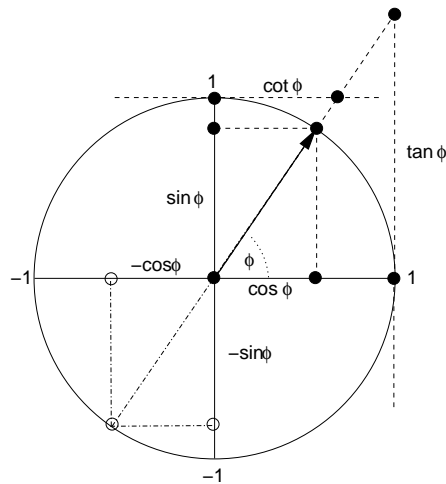
- De omtrek van een cirkel met een straal  $r$  is  $2\pi r$ , waarbij  $\pi \approx 3,14159265358979323846$ ;
- De lengte van de cirkelboog  $b$  van een sector met een hoek  $\phi$  graden is  $b = \frac{\pi r}{180} \phi$ . Deze formule is afgeleid uit de verhouding  $\frac{b}{2\pi r} = \frac{\phi}{360}$ ;
- Uit de verhouding  $\frac{rad}{2\pi} = \frac{grad}{360}$  volgen de omzettingsformules van graden naar radialen en omgekeerd:

$$radialen = \frac{\pi \cdot graden}{180} \quad \text{en} \quad graden = \frac{180 \cdot radialen}{\pi}$$

- De oppervlakte van een cirkel met een straal  $r$  is  $\pi r^2$ ;
- De oppervlakte van een cirkelsector  $o$  met een hoek  $\phi$  in graden is  $o = \frac{\pi r^2}{360} \phi$ . Deze formule is afgeleid uit de verhouding  $\frac{o}{\pi r^2} = \frac{\phi}{360}$ .

De definities van de 'sinus', 'cosinus', 'tangens' en de 'cotangens' m.b.v. de eenheidscirkel met een straal van de lengte 1 (zie figuur A.1). Enkele belangrijke eigenschappen van deze goniometrische functies en het periodieke gedrag van de sinus, cosinus, tangens en cotangens aan de hand van de gedefinieerde lijnstukken in de eenheidscirkel:

1.  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ;
2.  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ;
3.  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$ ;



Figuur A.1: De eenheidscirkel met  $\sin \phi$ ,  $\cos \phi$ ,  $\tan \phi$  en  $\cot \phi$  als lijnstukken.

4.  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ ;
5.  $-\infty < \tan x < \infty$ ;
6.  $-\infty < \cot x < \infty$ ;
7.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;
8.  $\sin -x = -\sin x$ ;
9.  $\sin x = \sin(\pi - x)$ ;
10.  $\cos -x = \cos x$ .

De verschuivingen van de hoek  $x$  met  $k$ -veelvouden van  $2\pi$  radialen voor de sinus en cosinus en met  $k$ -veelvouden van  $\pi$  radialen voor de tangens:

1.  $\sin x = \sin(x \pm k2\pi)$  waarbij  $k = 1, 2, 3, \dots$  is;
2.  $\cos x = \cos(x \pm k2\pi)$  waarbij  $k = 1, 2, 3, \dots$  is;
3.  $\tan x = \tan(x \pm k\pi)$  waarbij  $k = 1, 2, 3, \dots$  is;
4.  $\cot x = \cot(x \pm k\pi)$  waarbij  $k = 1, 2, 3, \dots$  is;
5.  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ;
6.  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ .

De formules voor de sinus en de cosinus van de som-, het verschil-, de dubbele- en halve-hoeken  $a$  en  $b$  afgeleid in de eenheidscirkel met een meetkundige constructie.

1.  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$
2.  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$
3.  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b;$
4.  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$
5.  $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b};$
6.  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b};$
7.  $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right);$
8.  $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right);$
9.  $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right);$
10.  $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right);$
11.  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a;$
12.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1;$
13.  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a};$
14.  $\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos a)};$
15.  $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos a)};$
16.  $\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}.$

Formules 3 t/m 16 zijn afgeleid uit formules 1 en 2 met behulp van de eigenschappen  $\sin -a = -\sin a$  en  $\cos -a = \cos a$  en de stelling van Pythagoras  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  in de eenheidscirkel.

## Bijlage B

### Enkele veel voorkomende waarden in de goniometrie

Van enkele hoeken kunnen voor sommige goniometrische functies de waarden direct bepaald worden:

rad	sin(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)	graden
0	0	1	0	$\pm\infty$	0°
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	30°
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	45°
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	60°
$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$	0	90°
$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	120°
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	135°
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	150°
$\pi$	0	-1	0	$\pm\infty$	180°
$1\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	210°
$1\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	225°
$1\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	240°
$1\frac{1}{2}\pi$	-1	0	$\pm\infty$	0	270°
$1\frac{3}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	300°
$1\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	315°
$1\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	330°
$2\pi$	0	1	0	$\pm\infty$	360°



## Bijlage C

### Afleiding van de regel van Cramer voor twee onbekenden

Hoewel het geen volledig bewijs is, kan met de methode van Gauss de regel van Cramer afgeleid worden voor een stelsel lineaire vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + cx_2 & = & e \\ bx_1 + dx_2 & = & f \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} -b \\ +a \end{array} \right| \quad \begin{array}{rcl} -abx_1 - cbx_2 & = & -eb \\ +abx_1 + adx_2 & = & +af \end{array} \rightarrow$$
$$(ad - cb)x_2 = af - eb \rightarrow x_2 = \frac{af - eb}{ad - cb} \rightarrow x_1 = \frac{ed - cf}{ad - cb}$$

Dit resultaat kan met determinanten geschreven en *onthouden* worden:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad \det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix} = ed - cf \quad \det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = af - eb$$

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})} \rightarrow x_1 = \frac{ed - cf}{ad - cb} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{af - eb}{ad - cb}$$

Op dezelfde wijze kan de regel van Cramer afgeleid worden voor stelsels lineaire vergelijkingen met drie of meer onbekenden.

## Bijlage D

# Het Euclidische in- en uitproduct

Het Euclidische *inproduct* is gedefinieerd als een scalair:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta$$

De relatie tussen het inproduct  $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$  en  $|\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta$  wordt duidelijk met de verschilvector  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} - 2\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta \\ \rightarrow \quad \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta \end{aligned}$$

Deze relatie is de bekende cosinusregel  $u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \theta$  uit de planimetrie voor een driehoek met de zijden  $u$ ,  $v$  en  $w$ , waar de lengtes van  $v$  en  $w$  en hun onderlinge hoek  $\theta$  gegeven zijn. Het inproduct is in elke Euclidische ruimte gedefinieerd.

In de Euclidische 3D-ruimte zijn de basisvectoren:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het inproduct betekent voor de basisvectoren in de Euclidische 3D-ruimte ( $\cos 0^\circ = 1$ ):

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{z} \bullet \mathbf{z} = 1$$

Voor basisvectoren die loodrecht op elkaar staan ( $\cos 90^\circ = 0$ ):

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z} \bullet \mathbf{y} = 0$$

Het *uitproduct* is alleen gedefinieerd in de 3D-Euclische ruimte als een vector  $\mathbf{n}$  loodrecht op de onafhankelijke vectoren  $\mathbf{v}$  en  $\mathbf{w}$ , met de oriëntatie volgens de kurkentrekkerregel:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{n} \quad \text{waarvoor geldt: } |\mathbf{n}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \theta$$

Het uitproduct van twee afhankelijke vectoren ( $\sin 0^\circ = 0$ ) resulteert in de nulvector  $\mathbf{o}$ . Dit geldt dus ook voor het uitproduct van een basisvector met zichzelf:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{z} = \mathbf{o}$$

Voor basisvectoren die loodrecht op elkaar staan ( $\sin 90^\circ = 1$ ) geeft het Euclidische uitproduct volgens de kurkentrekkerregel de volgende resultaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{z} & \wedge & & \mathbf{y} \times \mathbf{x} &= -\mathbf{z} \\ \mathbf{z} \times \mathbf{x} &= \mathbf{y} & \wedge & & \mathbf{x} \times \mathbf{z} &= -\mathbf{y} \\ \mathbf{y} \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} & \wedge & & \mathbf{z} \times \mathbf{y} &= -\mathbf{x} \end{aligned}$$

Gegeven twee vectoren:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \mathbf{x} + v_y \mathbf{y} + v_z \mathbf{z} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = w_x \mathbf{x} + w_y \mathbf{y} + w_z \mathbf{z}$$

Het *algebraïsch product*  $\mathbf{vw}$  van deze twee veeltermen met vectorcomponenten is:

						$v_x \mathbf{x}$	$+v_y \mathbf{y}$	$+v_z \mathbf{z}$	
						$w_x \mathbf{x}$	$+w_y \mathbf{y}$	$+w_z \mathbf{z}$	$\times$
				$+v_x w_z \mathbf{zx}$		$+v_y w_z \mathbf{yz}$		$+v_z w_z \mathbf{zz}$	
	$+v_x w_y \mathbf{xy}$		$+v_y w_y \mathbf{yy}$				$+v_z w_y \mathbf{zy}$		
$v_x w_x \mathbf{xx}$		$+v_y w_x \mathbf{yx}$			$+v_z w_x \mathbf{zx}$				$+$
$v_x w_x \mathbf{xx}$	$+v_x w_y \mathbf{xy}$	$+v_y w_x \mathbf{yx}$	$+v_y w_y \mathbf{yy}$	$+v_x w_z \mathbf{zx}$	$+v_z w_x \mathbf{zx}$	$+v_y w_z \mathbf{yz}$	$+v_z w_y \mathbf{zy}$	$+v_z w_z \mathbf{zz}$	

Als de algebraïsche vermenigvuldiging van de basisvectoren wordt beschouwd als een Euclidisch inproduct dan komt het overeen met het inproduct uit de vectorrekening (zie paragraaf 1.1.4), de som van het product van de overeenkomstige kentallen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= v_x w_x 1 + v_x w_y 0 + v_y w_x 0 + v_y w_y 1 + v_x w_z 0 + v_z w_x 0 + v_y w_z 0 + v_z w_y 0 + v_z w_z 1 \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \end{aligned}$$

Indien de algebraïsche vermenigvuldiging van de basisvectoren wordt beschouwd als een Euclidisch uitproduct:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= v_x w_x \mathbf{o} + v_x w_y \mathbf{z} + v_y w_x (-\mathbf{z}) + v_y w_y \mathbf{o} + v_x w_z (-\mathbf{y}) + v_z w_x \mathbf{y} + v_y w_z \mathbf{x} + v_z w_y (-\mathbf{x}) + v_z w_z \mathbf{o} \\ &= (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{z} - (v_x w_z - v_z w_x) \mathbf{y} + (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{x} + (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z) \mathbf{o} \\ &= (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{x} - (v_x w_z - v_z w_x) \mathbf{y} + (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{z} \end{aligned}$$

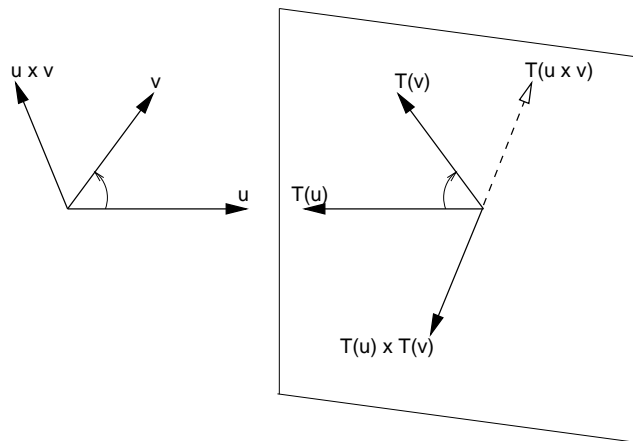
Dit resultaat kan als determinant van de kentallen geschreven worden:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & v_x & w_x \\ \mathbf{y} & v_y & w_y \\ \mathbf{z} & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

**Opmerkingen:** Zowel het Euclidische in- en uitproduct zijn te verklaren vanuit de orthonormale basisvectoren. Het inproduct resulteert in een scalair, een waarde zonder oriëntatie. Daarentegen resulteert het uitproduct in een vector, een waarde met een oriëntatie loodrecht op beide vectorcomponenten met een rechtsdraaiende rotatiesymmetrie. Hoewel het uitproduct een vector is, vertoont het wel een afwijkend gedrag bij een affiene transformatie waarbij de vectoren  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  beide van oriëntatie veranderen:

$$T(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u}) \times T(\mathbf{v})$$

Bij het spiegelen in een vlak verandert een linksdraaiende rotatie in een rechtsdraaiende rotatie en vice versa (zie figuur D.1), het uitproduct klapt dan om. Om deze reden wordt het uitproduct een pseudovector genoemd.



Figuur D.1: Het uitproduct klapt om bij 3D-spiegeling.

## Bijlage E

### Algemene richtlijnen voor het practicum

Iedere week krijgt de student 2 uur hoorcollege en 2 uur practicum. Tijdens de practicumlessen werkt de student aan de opdrachten zoals deze zijn verstrekt door de docent. De student dient deze opgaven persoonlijk te maken volgens de instructies zoals die in de opdrachten worden gegeven. In de verplichte practicumlessen levert de student de voorgeschreven opdrachten in bij de begeleidende docent. Het inleveren van opdrachten is gebonden aan een aantal regels:

- Deadline  
Practica dienen te worden ingeleverd *voor* de door de docent gestelde deadline. Opgaven die na de deadline worden ingeleverd, worden niet nagekeken en als onvoldoende beschouwd.
- Papier  
Alle practicumopdrachten worden op papier ingeleverd en dus *niet* via e-mail.
- gegevens  
Iedere practicumopdracht is voorzien van:
  - Studentnummer
  - Naam
  - Klas
  - Datum
  - Weeknummer
- Leesbaarheid en overzichtelijkheid  
De vraag of een student leesbaar en overzichtelijk werk inlevert, wordt beantwoord door de docent.

# Index

- affiene ruimte, 53
- afmeting, 5
- afstand, 57
- assenstelsel, 18
  
- basisvector, 51, 52
  
- coëfficiënt, 16
- coördinaattransformatie, 74
- coördinaten, 53, 55
- collineair, 70
- commutatief, 8
  
- dimensie, 51, 78
  
- eenheidsvector, 61
- eigenvectoren, 48
- eigenwaarden, 48
- elementen, 5
- Euclidische ruimte, 57
  
- factor, 17
- functie, 54
  
- hoek, 57
- homogeen stelsel, 47
- homogene coördinaat, 89
- homogene coördinaten, 83
- hoofddiagonaal, 6
  
- identiteitsmatrix, 12
- inproduct, 8, 59
  
- karakteristieke vergelijking, 48
- kentallen, 53
- kolommen, 5
- kolomvector, 53, 55
- kortste afstand, 66–68
  
- kurkentrekkerregel, 63, 88
  
- lengte, 50
- lengte van een lijnstuk, 61
- lengte van een vector, 60
- lineair onafhankelijk, 52
- lineaire vergelijking, 16
- lokaal coördinatenstelsel, 74
  
- matrix, 5
- matrixproduct, 9
- methode van Gauss, 24
- methode van Gauss/Jordan, 24
  
- niet-commutatief, 8
- normaalvector, 60, 62, 65
- normaalvergelijking, 65, 67
- nulmatrix, 7
- nulvector, 7, 50, 52, 63
  
- oorsprong, 53, 74
- oplossing, 17
- opspannende vectoren, 56
- oriëntatie, 50, 63, 88
- orthogonaal coördinatenstelsel, 57
- orthonormaal coördinatenstelsel, 57
  
- parameter, 54
- parametrische voorstelling, 56
- picturematrix, 81
- polariteit, 62
- positie, 53
- projecteren, 85
- projectie, 61
- projectielijn, 83
- projectieve 3D-ruimte, 83
- projectievlak, 85

pseudovector, 99  
punt, 53  
  
referentiepunt, 53, 74  
regel van Cramer, 46  
richting, 50  
rigide transformaties, 77  
rijcanoniek, 23  
rijen, 5  
rijvector, 53, 55  
rotatie, 75, 76  
  
scalair, 5, 7, 50  
scalairproduct, 62  
schaalverandering, 75, 78  
shearing, 75, 80, 90  
spiegeling, 78  
spiegellijn, 78  
stelsel, 20, 51  
  
translatie, 75  
tripleproduct, 69  
triviale oplossing, 47  
  
uitproduct, 62, 64  
  
variabele vector, 54  
vector, 50  
vectorfunctie, 55  
vectorproduct, 8  
vectorruimte, 50  
vertex, 55  
vierkante matrix, 6  
  
wereldcoördinatenstelsel, 74  
  
zwaartepunt, 58