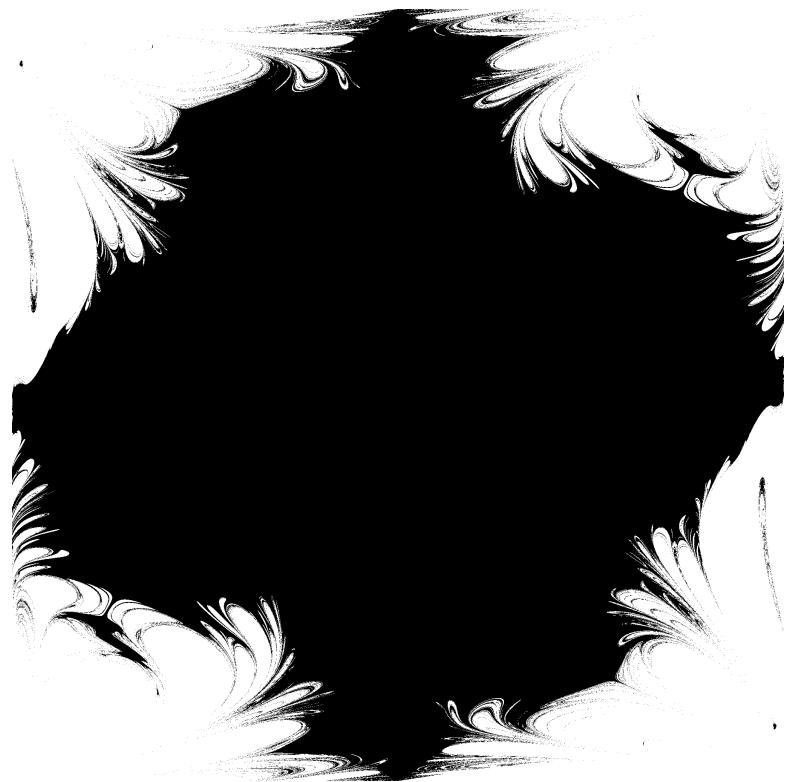


# Fraktaler ur kaos

Fraktaldimension som indikator för divergens i  
dubbelpendlar



Författare:  
Adam Johansson  
Olle Ahlin  
Anton Mattsson  
Victor Millberg

Handledare:  
Lars Gråsjö

# ABSTRACT

Title: *Fractals from Chaos – Fractal Dimension as an Indicator for Divergence in Double Pendulums*

Date: April 12, 2021

Authors: Adam Johansson, Olle Ahlin, Anton Mattsson, Victor Millberg

Tutor: Lars Gråsjö

Keywords: Chaos Theory, Double Pendulum, Fractal Dimension, Maximal Lyapunov Exponent

In this report, the fractal dimensions of the central borders between the initial conditions of a simulated double pendulum that lead up to any of the weights flipping, and those that do not, were computed and compared to the distribution of maximal Lyapunov exponents (MLE) of the system. Different values for dimension and MLE were obtained through varying the proportions of masses and rod lengths in the double pendulum. Measurements such as maxima, averages, and medians of the maximal Lyapunov exponents obtained in each variation, were plotted against box and compass dimensions of the fractal center border with each data point corresponding to a unique combination of mass and length proportions. A strong correlation between dimension and MLE measures was found over a multitude of measurements for MLE, suggesting that systems with a higher rate of divergence on average produce higher box and divider dimension.

# INNEHÅLLSFÖRTECKNING

<b>1 FÖRKORTNINGAR OCH BEGREPP</b>	<b>1</b>
1.1 Bokstavsbeteckningar och förkortningar	1
1.2 Beteckningar för dubbelpendeln	2
1.2.1 Diagram över dubbelpendelsystemet	2
1.2.2 Systemkonstanter	3
1.2.3 Variabla storheter	3
1.3 Särskilt införda begrepp	3
1.4 Konventioner, notation och begrepp från teorin	4
1.4.1 Konventioner och notation	4
1.4.2 Begrepp	4
<b>2 INLEDNING</b>	<b>6</b>
2.1 Bakgrund	6
2.1.1 Lyapunov-exponenter som mått på kaos	6
2.1.2 Relevansen av att studera kaotiska system	6
2.1.3 Dubbelpendeln	6
2.1.4 Fraktaler och deras relation till kaos	7
2.1.5 Fraktaldimension	8
2.2 Syfte och frågeställningar	9
2.2.1 Syfte	9
2.2.2 Frågeställningar	9
2.3 Teori	10
2.3.1 Definition av kaos	10
2.3.2 Lyapunov-exponenter	11
2.3.3 Fraktaldimensioner och dimensionsmått	12
2.3.4 Dubbelpendelns rörelseekvationer	14
2.3.5 Egenskaper hos rörelseekvationerna	15
2.3.6 Parametrisering av längder och massor	15
2.4 Avgränsningar	16
2.4.1 Val av kaotiskt system	16
2.4.2 Fysikaliska inskränkningar	16
2.4.3 Betraktade begynnelsevärden	16
2.4.4 Dimensionsmått	16
2.4.5 Lyapunov-spektra och Lyapunov-exponenter	17
<b>3 METOD</b>	<b>18</b>
3.1 Praktisk implementering	18
3.1.1 Programmering	18
3.1.2 Parametervärden	18
3.1.3 Numerisk lösning av differentialekvationerna	18
3.2 Generering av fractaler	19
3.2.1 Överslagsmängder	19
3.3 Analys av fraktaldimension	19
3.4 Numerisk bestämning av Lyapunov-exponenter	20
3.5 Samband mellan MLE och dimensionsmått	20

<b>4 RESULTAT</b>	<b>22</b>
4.1 Utförligt exempelfall för överslagsmängd	22
4.1.1 Bild av överslagsmängd	23
4.1.2 Maximal Lyapunov-exponent	24
4.1.3 Framtagning av fraktaldimension	25
4.2 3D-grafer	26
4.3 Jämförelse mellan dimensionsmått	27
4.4 Spridningsdiagram mellan MLE och dimensionsmått	28
4.4.1 Maximalt uppnådd MLE	28
4.4.2 Övre kvartil av samtliga värden för MLE	28
4.4.3 Övre kvartil av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$	29
4.4.4 Medelvärde av MLE	29
4.4.5 Medelvärde av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$	30
4.4.6 Medianen av MLE	30
4.4.7 Medianen av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$	31
4.5 Felberäkningar	31
4.5.1 Dimensionsmått	31
4.5.2 Maximal Lyapunov-exponent	32
4.6 Rådata	32
<b>5 DISKUSSION</b>	<b>33</b>
5.1 Tolkning av resultat	33
5.1.1 Fraktaler ur överslagsmängder	33
5.1.2 Inverkan på fraktaler genom variation av systemparametrar	33
5.1.3 Kategorisering av dubbelpendeln på systemnivå genom Lyapunov-exponent	33
5.1.4 Koppling mellan Lyapunov-exponent och dimension av fraktaler	34
5.2 Metodanalys	36
5.2.1 Felkällor	36
5.2.2 Metodens giltighet	38
5.2.3 Metodförbättringar	39
5.3 Resultaten i relation till tidigare forskning och teori	39
5.3.1 Fraktaler ur överslagsmängder	39
5.3.2 Inverkan på fraktaler genom val av begynnelsevillkor	39
5.3.3 Koppling mellan Lyapunov-exponent och dimension av fraktaler	39
5.4 Framtid	40
5.4.1 Förändringar och förfiningar	40
5.4.2 Breddning av arbetet	40
5.4.3 Användningsområden	41
<b>REFERENSLISTA</b>	<b>42</b>
<b>BILAGOR</b>	<b>43</b>
<b>A Härledning av rörelseekvationer</b>	<b>44</b>
<b>B Bevis till sats 2.2</b>	<b>50</b>
<b>C Pseudokod för algoritmer</b>	<b>53</b>

C.1	Simulering och framtagning av mängder . . . . .	53
C.1.1	Runge-Kuttametoden av fjärde ordningen . . . . .	53
C.1.2	Algoritm för framtagning av mängder . . . . .	54
C.2	Maximal Lyapunov-exponent . . . . .	55
C.3	Låddimension . . . . .	56
C.4	Passardimension . . . . .	57
<b>D</b>	<b>Regressionslinjer för dimension . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>E</b>	<b>Histogram för MLE . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>F</b>	<b>Kollage över MLE-grafer och överslagsmängder . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>G</b>	<b>Tabell över Lyapunov-exponenter och dimensionsmått . . . . .</b>	<b>64</b>

# 1. FÖRKORTNINGAR OCH BEGREPP

## 1.1 Bokstavsbezeichnungen und Abkürzungen

### Förkortningar

MLE	Maximal Lyapunov-exponent
RK4	Runge-Kuttametoden av fjärde ordningen

### Grekiska bokstäver

$\alpha$	Innervinkel	rad
$\beta$	Yttervinkel	rad
$\delta_0$	Initialt fasrumsavstånd $\delta_0 \equiv \delta(0)$	rad
$\delta(t)$	Fasrumsavstånd $\delta =  \phi_1(t) - \phi_2(t) $	rad
$\lambda_1$	Maximal Lyapunov-exponent	$s^{-1}$
$\hat{\lambda}_1$	Största uppnådda MLE	$s^{-1}$
$\overline{\lambda'_1}$	Aritmetiskt genomsnitt av MLE efter exklusion	$s^{-1}$
$\lambda_i$	Lyapunov-spektrum, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$	$s^{-1}$
$\mu$	Parametrisering av massor, $\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$	
$\sigma$	Parametrisering av stavlängder, $\sigma = \frac{l_1}{l_2}$	
$\phi$	Normerad fasrumsvektor, $\phi = [\alpha \quad \beta \quad \dot{\alpha} \cdot t_{\text{norm}} \quad \dot{\beta} \cdot t_{\text{norm}}]^T$	rad
$\Phi_T(s, m)$	Överslagsmängd med $t_{\text{stopp}} = T$ [s], $\sigma = s$ och $\mu = m$	

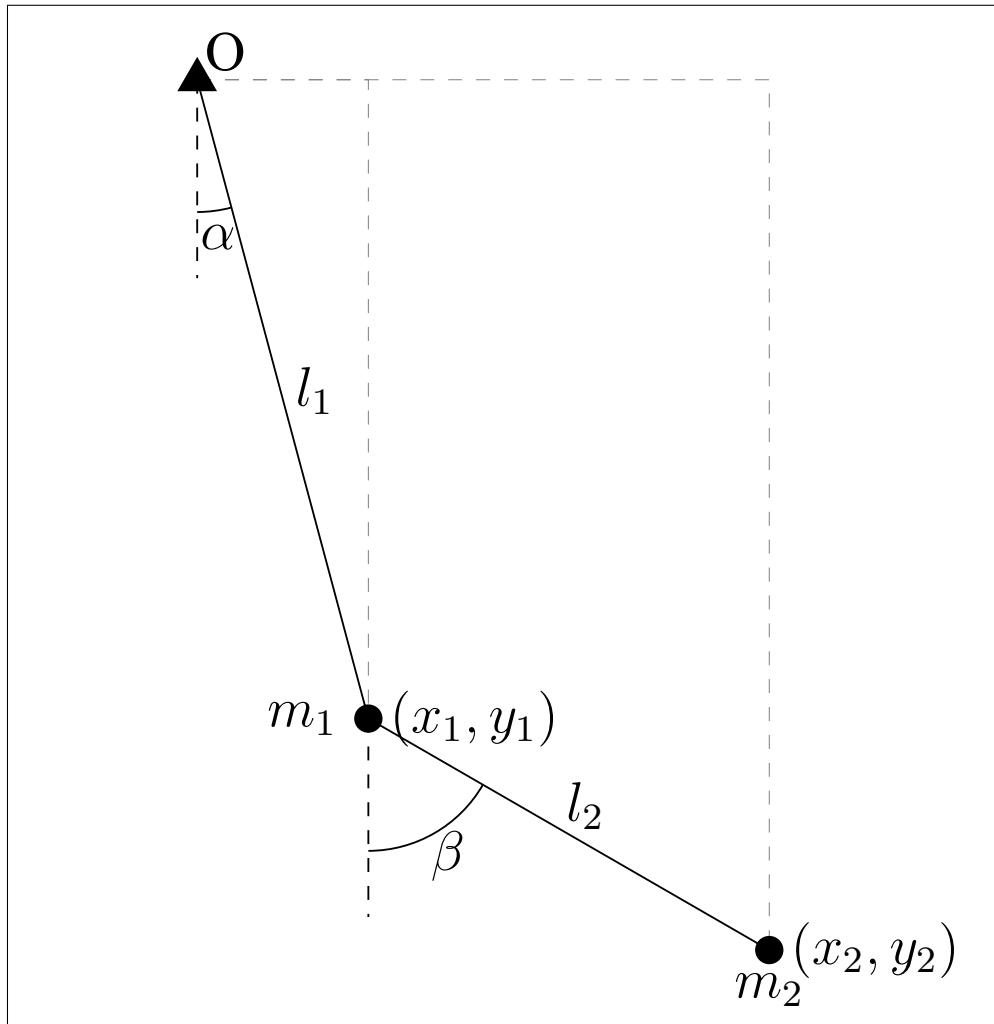
### Latinska bokstäver och beteckningar

$D$	Övre tröskelvärde för fasrumsavstånd $\delta$	rad
$\dim_B(A)$	Låddimension för mängden $A$	
$\dim_C(A)$	Passardimension för mängden $A$	
$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Funktionen som ger $\ddot{\mathbf{q}}$ där $l_2 = 1$ m	$\text{rad } s^{-2}$
$F_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Funktionen som ger $\ddot{\mathbf{q}}$ där $l_2 = L$	$\text{rad } s^{-2}$
$h$	Tidssteg	s
$L$	Lagrangefunktion $L = V - T$	J
$l_1$	Längd av inre stav	m
$l_2$	Längd av yttre stav	m
$M(\lambda_1)$	Median av MLE från samtliga värden	$s^{-1}$
$M'(\lambda_1)$	Median av MLE efter exklusion	$s^{-1}$
$m_1$	Massa av inre punktmassa	kg
$m_2$	Massa av yttre punktassa	kg
$M_A(r)$	Passarantal för mängd $A$ med passarlängd $r$	
$N$	Antal mätintervall för Lyapunov-exponent	
$N_A(s)$	Lådantal för mängd $A$ och lådstorlek $s$	
$O$	Fixerad central vridningspunkt för systemet	
$\mathbf{q}$	Generaliserade koordinater $\mathbf{q} = [\alpha \quad \beta]^T$	rad
$r$	Passarlängd i passardimension	rad
$s$	Rutbredd i låddimension	rad

$T$	Kinetisk energi $T = E_k$	J
$t_{\text{norm}}$	Normeringstid $t_{\text{norm}} = 1 \text{ s}$ för fasrumsvektor	s
$t_{\text{stopp}}$	Längd av mätning för överslagsmängder	s
$U(\lambda_1)$	Övre kvartil av MLE från samtliga värden	$\text{s}^{-1}$
$U'(\lambda_1)$	Övre kvartil av MLE efter exklusion	$\text{s}^{-1}$
$V$	Potentiell energi $V = E_p$	J
$v_1$	Hastighet av $m_1$	$\text{m s}^{-1}$
$v_2$	Hastighet av $m_2$	$\text{m s}^{-1}$
$x_1$	X-koordinat för $m_1$	m
$x_2$	X-koordinat för $m_2$	m
$y_1$	Y-koordinat för $m_1$	m
$y_2$	Y-koordinat för $m_2$	m

## 1.2 Beteckningar för dubbelpendeln

### 1.2.1 Diagram över dubbelpendelsystemet



Figur 1.1: Översikt över beteckningar.

## 1.2.2 Systemkonstanter

I denna rapport kommer följande beteckningar användas för dubbelpendelns systemkonstanter, som illustreras i figur 1.1:

- Låt  $O$  markera den förankrade vridningspunkten till dubbelpendeln.
- Låt  $l_1$  vara längden av den inre staven, d.v.s. avståndet från  $O$  till punkten  $m_1$ .
- Låt  $l_2$  vara längden av den yttre staven, d.v.s. avståndet från  $m_1$  till  $m_2$ .
- Låt  $m_1$  vara massan för den inre rörliga punktmassan.
- Låt  $m_2$  vara massan för den yttre rörliga punkmassan.
- Definiera som parametrisering av längd  $\sigma = \frac{l_1}{l_2}$ .
- Definiera som parametrisering av massa  $\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$ .

## 1.2.3 Variabla storheter

I denna rapport kommer nedan följande begrepp användas för att beskriva ett givet ögonblickstillstånd hos dubbelpendeln. Se figur 1.1.

- Låt  $\alpha$  vara vinkeln mellan den inre staven och lodlinjen nedåt genom upphängningspunkten  $O$ , där utslag moturs ses som positiv riktning.
- Låt  $\beta$  vara vinkeln mellan den yttre staven och lodlinjen nedåt genom punkten  $m_1$ , där utslag moturs ses som positiv riktning.
- Låt  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  och  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$  beskriva generaliserade koordinater, respektive generalisade hastigheter för dubbelpendelsystemet.
- Låt  $\boldsymbol{\phi} = [\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \cdot t_{\text{norm}} \ \dot{\beta} \cdot t_{\text{norm}}]^T$ , där  $t_{\text{norm}} = 1 \text{ s}$  är en normeringskonstant, och låt vidare rummet av sådana vektorer kallas dubbelpendelns *fasrum*. Fasrummet beskriver entydigt alla möjliga ögonblickstillstånd till dubbelpendelsystemet vilka entydigt och deterministiskt bestämmer framtiden för det tillstånd den beskriver, så som bestämt av differentialekvationerna.

## 1.3 Särskilt införda begrepp

Nedan begrepp och förkortningar kommer att användas inom denna rapport:

- Ett *överslag* sägs ske vid tidpunkt  $t$  om  $\alpha(t) = \pi + 2\pi k$  eller  $\beta(t) = \pi + 2\pi k$ .
- En *överslagsmängd* är en mängd av  $\mathbf{q}_0 \in [-\pi, \pi]^2$  sådana att en dubbelpendel med givna  $\sigma$  och  $\mu$  för  $l_1 = \sigma \cdot (1 \text{ m})$  och  $l_2 = 1 \text{ m}$  och begynnelsevillkor  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  och  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$  inte gör överslag inom en given tid  $t_{\text{stop}}$ .

- Låt  $\Phi_T(s, m)$  beteckna överslagsmängden som ges av  $\sigma = s, \mu = m$  och där  $t_{\text{stopp}} = T$  [s].
- Begreppet *energigränsen* innebär mängden av begynnelsevärden som har lika stor energi som den minsta nödvändiga energi för att göra någon form av överslag. Denna energi kommer att kallas *tröskelenergi* och ges av den minsta av de potentiella energierna för  $\alpha = 0, \beta = \pi$  eller  $\alpha = \pi, \beta = 0$ , där vilken som är minst beror av  $\sigma$  och  $\mu$ . Begynnelsevärden med lägre mekanisk energi än tröskelenergin sägs vara *innanför* energigränsen och begynnelsevärden med mer mekanisk energi sägs vara *utanför* energigränsen.
- Till en sammanhängande mängd  $A \subset \mathbb{R}^2$  definieras *kustlinjen* av kanten  $\delta A$  till  $A$ . Formellt ges denna av:

$$\delta A = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \epsilon > 0 \exists i, u \in B(p, \epsilon) : i \in A \wedge u \notin A\}$$

Här betecknar  $B(p, \epsilon)$  bollen med radie  $\epsilon$  kring punkten  $p$ . Mängden  $\delta A$  kan förklaras i ord som mängden av punkter som ligger godtyckligt nära både punkter i  $A$  och punkter utanför  $A$ .

- För överslagsmängder  $F$  kommer *innerkustlinjen* syfta på kustlinjen till den *centrala komponenten*  $M \subset F \subset [-\pi, \pi]^2$  definierad som den sammanhängande komponent  $M$  som innehåller  $\vec{0}$ , det rakt nedåt hängande begynnelsevillkoret. Anmärk att alla punkter innanför energigränsen tillhör  $M$ , då inga av dessa någonsin kan göra överslag med anledning av energiprincipen.

## 1.4 Konventioner, notation och begrepp från teorin

### 1.4.1 Konventioner och notation

- Derivering med avseende på tid kommer betecknas med Newtons notation för derivata, med punkt. Detta innebär att

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}y.$$

- Låt  $|x - y|$  för  $x, y \in \mathbb{R}^n$  beteckna det euklidiska avståndet mellan  $x$  och  $y$ , det vill säga

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

### 1.4.2 Begrepp

- *Generaliserade koordinater* kallas en uppsättning

$$\mathbf{q} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T,$$

där  $x_1, x_2, \dots, x_n$  är rumsmått, vanligen koordinater, sträckor längs en särskild kurva, vinklar, eller en blandning av dessa, som tillsammans unikt kategorisera positionen av alla delar i ett fysikaliskt system.

- Tidsderivatan till generaliserade koordinater kallas *generaliserade hastigheter*.
- Rummet som utgörs av generaliserade koordinater och generaliserade hastigheter, där en punkt entydigt svarar mot ett ögonblickstillstånd till systemet, kallas ett *fasrum*.

# 2. INLEDNING

## 2.1 Bakgrund

Studiet av kaotiska system, kaosteori, är ett område av matematiken och dynamiken som varit under utveckling under 1900-talets senare halva, sedan Edward Lorenz 1963 upptäckte den numera allmänt kända "fjärilseffekten". Se Lorenz [1] för den ursprungliga artikeln. Fjärilseffekten innebär att godtyckligt små skillnader i begynnelseställståndet för vissa system ändå ger, efter tillräckligt lång tid har gått, upphov till helt skilda beteenden för systemet. Kaotiska system är således definitionsmässigt svåra att förutsäga, då mätnogrannhet i fysiska applicerade sammanhang är begränsad. Trots det kan modeller och teori inom kaosteorin användas för att bestämma en rad kvalitativa och kvantitativa egenskaper och tendenser i systemets beteenden, även på längre skala [2].

### 2.1.1 Lyapunov-exponenter som mått på kaos

För att kvantifiera den exponentiella divergensen i kaotiska system finns storheten kallad maximal Lyapunov-exponent (förkortad MLE). Den beskriver den genomsnittliga exponentiella tillväxthastigheten (i bas  $e$ ) för separationen av två närliggande banor i ett system. MLE betecknas med  $\lambda_1$  och kaotiska system har  $\lambda_1 > 0$ .

### 2.1.2 Relevansen av att studera kaotiska system

Att bygga upp en förståelse för kaotiska fysikaliska system är väsentligt då de flesta komplexa system som återfinns i den verkliga världen i någon utsträckning är kaotiska, dock med olika tidsskalor för vilka de är stabila, konkretiserat genom att de har vitt skilda Lyapunov-tider [2].

Till dessa kan räknas bland annat väder, turbulent flöde i vätskor och gaser, solsystemet då det betraktas över längre tidsskalor, och systemet som utgör kärnan för detta arbete, dubbelpendeln.

### 2.1.3 Dubbelpendeln

Dubbelpendeln är ett ikoniskt exempel på ett system bestående av få och enkla delar som trots det uppvisar kaotiskt beteende. Dubbelpendeln kan beskrivas som att en pendel hänger i massan av en annan pendel, det vill säga ett system bestående av två massor, den ena, här kallad  $m_1$ , fäst med en fast stav till en central vridningspunkt och den andra,  $m_2$ , är kopplad med stav till den första på sådant sätt att den kan svänga fritt kring den. Se figur 1.1. Dessa får i principfallet svänga i ett gravitationsfält.

Dubbelpendelns beteende är välstuderat, men som med alla kaotiska system är beteendet mångfacetterat. Denna undersökning syftar framförallt att betrakta dubbelpendelns tendens att för vissa begynnelsevärden "slå över". Se begreppslistan för den exakta definitionen av detta.

## 2.1.4 Fraktaler och deras relation till kaos

Ett annat förhållandevis nytt område i matematiken, och ett som visat sig ha en tydlig relation med kaosteorin, är fraktalgeometrin. Fraktaler har visats vara en nödvändig utveckling från analysens och differentialkalkylens centrala antagande om lenhet vid tillräckligt liten skala. Benoit Mandelbrot, en pionjär inom området, förespråkar i sin "The Fractal Geometry of Nature" [3] fraktalen som modell för en rad strukturer och menar att euklidisk geometri inte på tillfredsställande sätt kan modellera detaljrikedomen på alla skalar i dessa. Fraktalbegreppet innebär istället en modell som *utgår* från antagandet att objekten i fråga har detaljer på alla skalar.

Sedan Mandelbrots ursprungliga undersökningar har fraktalgeometrin expanderat som forskningsområde och använts för att beskriva allt från kustlinjer till Brownsk rörelse [4], till biologiska system såsom förgreningar i träd [4] eller cancerturnörer [5], till turbulens och finans [4]. Även Lorenz undersökningar kring kaos gav upphov till en fraktal, även om varken teorin kring fraktaler eller begreppet existerade då [2].

En annan karaktäriserande egenskap för fraktaler är att de ofta uppvisar någon form av självlikhet över olika skalar, antingen direkt eller statistisk, vilket delvis förklrar varför fraktaler beskriver förgreningar i naturen, men det har även visats relevant för exempelvis turbulens.

Till sist uppkommer fraktaler i den rena matematiken med ikoniska exempel såsom mandelbrotmängden.

Sammanfattningsvis utgör fraktaler en användbar modell för diverse komplexa system, och därav har de även blivit en ofta förekommande konstruktion i kaosteorin. Några av de kopplingar som finns mellan fraktaler och kaos beskrivs nedan:

### Komplexitet som uppkommer från enkla steg

Flertalet fraktaler ges av upprepning av enkla förfaranden eller sammansättning av enkla steg, men fraktalen blir trots det mycket komplex efter många iterationer. Detta gäller exempelvis för mandelbrotmängden, Sierpinskis triangel eller cantormängden [4]. Detta liknar kaotiska system vars kaos uppkommer av ibland mycket enkla differential- eller differensekvationer. Här kan Lorenz-systemet [1] nämnas, eller den logistiska modellen [2, 6].

### Detaljer på godtyckligt liten skala

Så som har nämnts har fraktaler fundamentalt detaljer på godtyckligt små skalar. Detta innebär att godtyckligt små steg från en given punkt i en fraktal kan leda till såväl punkter i fraktalen som punkter utanför. Därav kan ingen storlek av steg försummas.

Detta är en direkt parallell till hur godtyckligt små förändringar i begynnelsevillkoret för kaotiska system ändå fundamentalt förändrar det storskaliga beteendet efter att tillräckligt lång tid har gått.

Kort sagt sträcker sig komplexiteten i fråga om indatans relation till resultatet till godtyckligt små skalar, och det är gemensamt för både fraktaler och kaotiska system.

## Fraktala attraktorer

I vissa system, såsom exempelvis Lorenz-systemet, kan det observeras att en stor mängd begynnelsevillkor långsiktigt ( $t \rightarrow \infty$ ) konvergerar mot en särskild mängd av punkter i fasrummet, alltså en mängd tillstånd. En sådan mängd kallas en attraktor.

Lorenz påvisade att en attraktor existerade för Lorenz-systemet och uppmärksammade några underliga egenskaper som hans attraktor uppvisade [1]. Det visade sig så småningom att attraktorn var en fraktal. Många andra kaotiska system ger också fraktala attraktorer [2]. Sådana fraktala attraktorer utgör alltså en direkt koppling mellan fraktalgeometrin och kaosteorin.

För dessa existerar Kaplan-Yorkes förmidan och definitionen för Kaplan-Yorkedimensionen, där ett dimensionsmått  $D_{KY}$  ges av

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (2.1)$$

där  $j$  är det högsta indexet som gör täljaren  $\geq 0$ . Detta är en förmidan om att kunna beskriva fraktaldimensionen (föklarat längre ned) av en attraktor utifrån systemets Lyapunov-spektrum [7].

## Fraktaler från begynnelsevillkor som ger givna beteenden

Detta arbete ämnar undersöka en ytterligare koppling mellan kaotiska system och fraktaler: huruvida mängder av begynnelsevärdet som ger överslag (alltså överslagsmängder) kan vara fraktaler och om dessa kan relateras till systemets kaos.

Del av de konkreta frågeställningarna i detta har undersökts av Heyl [8], som visade att en överslagsmängd var en fraktal. Emellertid gjordes undersökningarna utifrån ett specialfall av parametervärden ( $\sigma = 1$ ,  $\mu = 2$ ), med andra analysmetoder än vad som utgör detta arbete och utan att jämföra med den maximala Lyapunov-exponenten. Således finns intresse i att bredda dessa undersökningar, för vidare parametervärden, samt i att tolka betydelsen av de fraktaler som erhålls.

### 2.1.5 Fraktaldimension

I syftet att beskriva fraktaler kan ett antal olika begrepp användas, många av kvalitativt slag. Men en framstående grupp av mått som används såväl kvalitativt som kvantitativt är olika former av fraktaldimension, vilka väsentligen beskriver relationen mellan faktorer som fraktalerna kan skalias med och den resulterande effekten på relevanta mått över fraktalen. Det existerar många dimensionsmått som vardera betraktar olika mått, men samtliga utgår från idén om att jämföra måtten på olika skalor. Två olika dimensionsmått kan skilja sig väsentligt för vissa fraktaler, men i många fall, särskilt teoretiskt, sammanfaller de och ger samma värde för dimensionen [4]. I detta arbete framtogs två fraktaldimensionsmått, kallade låddimension och passardimension, numeriskt.

Den generella informella tolkningen är att större fraktaldimensioner svarar mot ett objekt med mer skenbar detaljrikedom och/eller mot objekt som är skrovligare än de med lägre fraktaldimensioner.

## 2.2 Syfte och frågeställningar

### 2.2.1 Syfte

Flertalet källor har beskrivit kopplingen mellan fraktaler och kaotiska system [6, 2], exempelvis förekomsten av fraktala attraktorer, men den eventuella tillämpningen av fraktaler på mängder av begynnelsevärden som leder till givna beteenden tycks inte lika undersökt. Samtidigt visar Heyl [8] på relevansen i området genom att påvisa ett exempel på en mängd av begynnelsestillsättning som leder till ett givet beteende, som är en fraktal.

Detta arbete syftar således till att bygga vidare på detta område, genom att betrakta mer generella dubbelpendlar, dock forfarande idealiserade, och vidare undersöka fraktalegenskaperna hos dessa mängder. Detta ämnas jämföras med mått för systemets kaos, specifikt att undersöka om det kan relateras till den maximala Lyapunov-exponenten, för att se om dimensionsmåtten kan användas för att karakterisera kaotiska system.

### 2.2.2 Frågeställningar

#### Fraktaler ur överslagsmängder

Den första frågeställningen var huruvida överslagsmängder, eller deras kustlinjer, kan utgöra fraktaler, konkretiserat genom att något av dimensionsmåtten låddimension och passardimension ger ett värde som skiljer sig signifikant från ett heltal. Fraktala överslagsmängder har som nämnt redan påvisats av Heyl [8], så frågeställningen innebär delvis att bekräfta detta, men även att vidare söka eventuella ytterligare fraktalmängder från dubbelpendelsystemet.

Vidare är det relevant att avgöra till vilken grad de olika framtagna dimensionsmåtten, låddimensionen och passardimensionen, sammanfaller i deras värden för givna överslagsmängder.

#### Inverkan på fraktaler genom variation av systemparametrar

En andra frågeställning var hur eventuella fraktaler påverkas kvalitativt och kvantitativt av variation av systemparametrarna  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $m_1$  och  $m_2$ .

Konkret avsågs studera huruvida mängderna eller särskilda komponenter av mängderna sätts samman eller bryts isär under variation av parametrar, samt hur fraktalernas dimensioner påverkas under variation av systemparametrar.

#### Kategorisering på systemnivå genom maximal Lyapunov-exponent

Den maximala Lyapunov-exponenten baseras på ett gränsvärde över en given bana (se sektion 2.3.2 och 3.4). Därav är det rimligt att se MLE som beroende av begynnelsevärdet snarare än bara systemet. Den maximala Lyapunov-exponenten beskriver enligt Strogatz [2] en egenskap hos en viss attraktor, men då dubbelpendelsystemet bevarar mekanisk energi kan ingen entydig attraktor existera, ty begynnelsestillsättning med olika energi kan inte konvergera mot en gemensam attraktor, för det skulle motsäga energins bevarande.

Emellertid grundar sig vår sista och främsta frågeställning nedan på en tolkning av den maximala Lyapunov-exponenten som ett mått på hur känsligt *systemet* är för ändringar i begynnelse-

setillstånd. Därav är det centralt att besluta om ett mått som på tillfredsställande sätt beskriver känslighet på systemnivå.

För detta kommer ett antal lägesmått för MLE att testas för att se om någon ger en signifikant korrelation med dimensionsmåtten, samt vilken tolkningen kan sägas vara av de givna lägesmåtten i det sammanhanget.

### **Koppling mellan Lyapunov-exponent och dimension av fraktaler**

Under förutsättning att överslagsmängder visas ge fraktaler och att såväl MLE som dimensionsmått antar en bredd av olika värden då systemparametrarna för dubbelpendeln varieras, avsåg den sista frågeställningen att avgöra om det finns någon korrelation mellan tolkningen av MLE på systemnivå och dimensionsmåtten.

Vidare skulle en sådan eventuell koppling behöva tolkas och förklaras teoretiskt.

Frågeställningen grundar sig på resonemanget att fraktaler med högre dimension tenderar ha mer detaljrikedom och tenderar vara mer komplexa. Således är vår hypotes att mer kaotiska system (system med högre MLE) i genomsnitt kommer ge högre fraktaldimension för överslagsmängderna.

## **2.3 Teori**

### **2.3.1 Definition av kaos**

Det existerar många definitioner för begreppet kaos, även då inskränkningen görs att endast betrakta det i fysikaliska sammanhang, men följande ges av Strogatz [2, s. 323–324], och innehåller många av de nyckelegenskaper som denna rapport ämnar undersöka:

#### **Långsiktigt aperiodiskt beteende**

Kaotiska system uppvisar långsiktigt aperiodiskt beteende för en mängd av begynnelsevärden. Detta innebär att det finns begynnelsevärden som ger att systemet inte konvergerar mot någon stabil fixpunkt eller en stabil gränscykel, uppvisar kvasiperiodiskt beteende, eller heller divergerar mot oändligheten. Med andra ord är banan begränsad, men konvergerar inte mot något enkelt beteende. Enligt Poincaré-Bendixsons sats måste ett kontinuerligt system ha minst 3 frihetsgrader för att kunna vara kaotiskt i denna bemärkelse [2].

#### **Determinism och icke-linearitet**

För att ett system ska kunna kallas kaotiskt måste systemets oförutsägbarhet vara en effekt av icke-linearitet i dess styrande ekvationer, och inte från någon form av stokastisk mekanism i systemet [2, s. 324].

Med andra ord får inte explicit slumpmässiga processer vara del i hur systemet fungerar, utan systemet måste vara deterministiskt.

## Känsligt beroende av begynnelsevärde och Lyapunov-exponenter

För att ett system ska kunna klassificeras som kaotiskt ska gälla att två banor som börjar med en liten men positiv skillnad  $\delta_0$  i fasrummet till slut divergerar till helt olika rörelser, oavsett storleken på  $\delta_0$ . I praktiken växer denna skillnad i genomsnitt exponentiellt med tiden.

Detta krav är det som denna rapport framförallt undersöker, då det är det enda krav som är direkt kvantitativt. Det kvantifieras av så kallade maximala Lyapunov-exponenter, vilka förklaras härnäst.

### 2.3.2 Lyapunov-exponenter

Kravet om känsligt beroende av begynnelsevärde formaliseras genom den så kallade maximala Lyapunov-exponenten. Vid varje punkt i tid kan ses att ett tillräckligt litet tidssteg  $\Delta t$  kommer orsaka att skillnaden i avståndet  $\delta(t) = |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$  mellan två snarlika banor, 1 och 2, växer till  $\delta(t + \Delta t) = \delta(t) \cdot e^{\lambda \Delta t}$ . Detta kommer av att endast betrakta linjära termer i differentialekvationen som styr systemet. Här beror  $\lambda$  av riktningen på  $\phi_1 - \phi_2$ , men då systemet betraktas under längre tid kommer den *maximala* Lyapunov-exponenten styra hur systemet utvecklas [2, 9].

Av lineariseringen kan modellen göras att magnituden av skillnaden växer som

$$\delta(t) \approx \delta_0 \cdot e^{\lambda_1 t}, \quad (2.2)$$

där  $\delta_0 \equiv \delta(0)$  och  $\lambda$  ges index 1 för att indikera att det är den maximala Lyapunov-exponenten (På motsvarande sätt svarar  $\lambda_2$  mot den näst största,  $\lambda_3$  mot den tredje största o.s.v., vilka ges av andra egenvektorer till lineariseringen.) [2, s. 322]

Detta ger upphov till definitionen för den maximala Lyapunov-exponenten:

**Definition 2.1** (Maximal Lyapunov-exponent). Låt  $\delta(t) \equiv |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$  beteckna avståndet i fasrummet mellan två banor  $\phi_1$  och  $\phi_2$ , med en ursprunglig separation  $\delta(0) = \delta_0$ . Då definieras den maximala Lyapunov-exponenten, betecknad  $\lambda_1$ , från

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta_0}. \quad (2.3)$$

För kaotiska system är  $\lambda_1 > 0$ , vilket innebär att alla små perturbationer, oavsett storlek, växer, givet tillräckligt lång tid.

Vidare kan den så kallade Lyapunov-tiden definieras:

**Definition 2.2** (Lyapunov-tid). Låt betrakta ett dynamiskt system med maximal Lyapunov-exponent  $\lambda_1$ . Systemet sägs då ha Lyapunov-tid  $1/\lambda_1$ .

Lyapunov-tiden används för att karakterisera för hur lång tid ett givet system kan ses som förutsägbart [2, s. 322]. Detta för att varje multipel av tiden  $\Delta t = \frac{1}{\lambda_1}$  får felet att öka med en faktor  $e$ . Därav beror tiden  $T$  som ett system är förutsägbart av logaritmen av mätnogrannheten, vilket bara påverkar tiden i storleksordningen ett fatal multiplar av  $\Delta t$  uppåt eller nedåt.

Specifikt kan följande uttryck härledas från ekvation 2.2 där  $a$  är felet som modellen ska hålla sig inom:

$$T = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{a}{\delta_0} \right) \quad (2.4)$$

Från detta kan tolkningen göras att system med större  $\lambda_1$  kommer vara förutsägbara under kortare tid. Sådana system kan i någon mån sägas vara "mer kaotiska".

### 2.3.3 Fraktaldimensioner och dimensionsmått

#### Introduktion

Ett sätt att betrakta det vardagliga konceptet dimension är att det är exponenten  $d$  sådan att då en kropp skalas upp med en faktor  $r$ , så kommer dess innehåll, alltså längd, area, volym, o.s.v., skalas med en faktor  $r^d$ .

För att kunna generalisera detta till fraktalmängder, som i många fall inte kan beskrivas tillfredsställande med längd, area, volym o.s.v. (de är antingen 0 eller  $\infty$  beroende på vilken som väljs) införs begreppet *mått*. Se Falconer [4] för en redogörelse för detta begrepp i sammanhanget fraktaler. Väsentligen beskriver ett mått "storleken" på en given mängd, och med rätt val av mått kan även fraktaler ges värden som är ändliga och nollskilda.

#### Självlikhetsdimension

Även utan den formella definitionen av mått kan emellertid en särskild klass av fraktaler enkelt karaktäriseras. Somliga fraktaler, såsom Cantor-mängden eller Sierpinski-triangeln uppvisar direkt självlikhet, vilket innebär att fraktalen är sammansatt av ett antal kopior av sig själv nedskalade med någon faktor.

Låt betrakta en självlik fraktal  $A$  bestående av  $N$  kopior av sig själv,  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , alla nedskalade med en faktor  $\frac{1}{r}$ . Då, om den sammansatta fraktalen skalas upp med en faktor  $r$ , kommer  $N$  fraktaler erhållas, alla kongruenta med den ursprungliga fraktalen. Så om det ursprungliga måttet var  $0 < m < \infty$ , kommer måttet nu vara  $Nm$  (förutsatt att måttet är valt så att kongruenta mängder har lika mått). Måttet har alltså skalats upp med en faktor  $N$ .

Från detta kan regeln från fysisk dimension generaliseras för att ansätta att måttet bör ha skalats med en faktor  $r^d$  för någon generaliserad dimension  $d$ , vilket ger definitionen för självlikhetsdimension:

**Definition 2.3** (Självlikhetsdimension). Antag en fraktal  $A$ , självlik på sådant sätt att den består av  $N$  kopior av  $A$ ,  $\frac{1}{r}$  av storleken av hela  $A$ . Då definieras självlikhetsdimensionen av  $A$  som det  $d$  så att

$$r^d = N \iff d = \frac{\log N}{\log r}. \quad (2.5)$$

Här bör observeras att  $d$  inte nödvändigtvis behöver vara ett heltal, utan är ett reellt tal  $0 \leq d \leq n$  där  $n$  är  $n$  är den linjäralgebraiska dimensionen för rummet fraktalen ligger i [4]. En fraktaldimension som inte är ett heltal visar på att den betraktade mängden är en fraktal.

## Dimension för icke självlika fractaler

För icke självlika fractaler används andra dimensionsmått utifrån samma grundidé att måttet av någon given mängd  $A$  skalas med en faktor  $r^d$  då fractalen skalas upp med en faktor  $r$ , där  $d$  då är den resulterande dimensionen. I applicerade sammanhang kan dessa mått ses som approximationer av fractalerna. Således gäller skalningslagen inte exakt, men den gäller i något gränsvärde då uppskalningen går mot oändligheten eller upplösningen går mot perfekt upplösning [4].

### Låddimension

Den så kallade låddimensionen approximerar fractalen med ett rutnät av lådor, och räknar antalet lådor som innehåller någon del av fractalen då fractalen skalas upp med olika faktorer  $r$ . I själva verket är detta ekvivalent med att låta fractalen ha en fix storlek och sedan låta upplösningen på rutnätet bli finare, vilket mestadels är vad som görs i praktiken.

Följande definition för den så kallade låddimensionen ges av Falconer [4], Peitgen, Jürgens och Saupe [6] och Strogatz [2]:

**Definition 2.4** (Låddimension). Betrakta en fractal  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Låt rummet  $\mathbb{R}^n$  delas in i ett rutnät med rutbredd  $s$ . Låt  $N_A(s)$  beteckna antalet rutor i rutnätet som innesluter minst en punkt i  $A$ , d.v.s antalet rutor som fractalen  $A$  skär igenom. Dimensionsmåttet låddimension, betecknat  $\dim_B(A)$ , ges då teoretiskt av

$$\dim_B(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N_A(s)}{\log \frac{1}{s}}. \quad (2.6)$$

I applicerade sammanhang, där godtyckligt små rutor inte är rimliga att använda, ställs istället ett diagram upp med  $\log \frac{1}{s}$  och  $\log N_A(s)$  som axlar och en linje anpassas. Dimensionen tillskrivs då lutningen på linjen,

$$\dim_B(A) = \frac{\Delta(\log N_A(s))}{\Delta(\log \frac{1}{s})}, \quad (2.7)$$

förutsatt att linjen på tillfredsställande sätt anpassar sig till datan för ett nog stort spann av olika  $s$  [4, 2].

### Passardimension

För fractaler  $C$  som beskrivs av kontinuerliga kurvor som inte skär sig själva (formellt är  $C$  bilden av en bijektion med ett reellt intervall), kan den så kallade passardimensionen definieras [4, 6].

I passardimensionen approximeras istället fractalen med ett antal lika långa sträckor, och antalet sträckor som passar på fractalen jämförs då över olika längder på sträckorna.

**Definition 2.5** (Passardimension). Låt  $A$  vara en kontinuerlig kurva som inte skär sig själv och som inte är sluten. Definiera  $M_A(r)$  som det maximala antalet punkter

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in A,$$

så att

$$|x_k - x_{k-1}| = r.$$

Detta kan liknas med en passare med radie  $r$  som går längs  $A$  och  $(M_A(r) - 1)r$  kan ses som en approximation av "längden" av  $A$ .

Från detta kan passardimensionen definieras teoretiskt:

$$\dim_C(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_A(r)}{\log \frac{1}{r}} \quad (2.8)$$

Formuleringen av denna definition är hämtad ur Falconer [4].

Som för låddimensionen används i applicerade sammanhang linjeregression av diagrammet från  $\log \frac{1}{r}$  till  $\log M_A(r)$  och dimensionen tillskrivs värdet på lutningen

$$\dim_C(A) = \frac{\Delta(\log M_A(r))}{\Delta(\log \frac{1}{r})}, \quad (2.9)$$

med samma villkor som beskrivits ovan för låddimensionen. Det bör noteras att det  $M_A(r)$  som används i applicerade sammanhang inte är det maximala antalet punkter utan bara någon uppsättning punkter som uppfyller att avståndet mellan intilliggande punkter är  $r$ .

Viktigt att anmärka är också att denna rapport endast kommer betrakta slutna kurvor, där punkterna väljs så att passaren går exakt ett varv runt kurvan, och där sista punkten ska ha ett avstånd till den första  $\leq r$ . Med samma beteckningar som ovan gäller alltså

$$\begin{cases} |x_k - x_{k-1}| = r \\ |x_0 - x_m| \leq r \end{cases}. \quad (2.10)$$

En sista anmärkning är att det  $M_A(r)$  som kommer användas definieras till

$$M_A(r) = m + 1 + \frac{|x_0 - x_m|}{r}. \quad (2.11)$$

Med andra ord kommer andelen av en passare som återstår för att sluta kurvan räknas in i  $M_A(r)$ .

### 2.3.4 Dubbelpendelns rörelseekvationer

I den simulering som varit del av denna rapport har numerisk integrering av dubbelpendelns rörelseekvationer gjorts. Dessa rörelseekvationer härledes med lagrangemekanik. För den fullständiga härledningen se bilaga A.

Ekvationerna som styr dubbelpendelsystemet, bestående av två punktmassor, två fullständigt fasta masslösa stavar och utan förluster, är följande:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \cos^2(\alpha-\beta)\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\mu \sin \alpha - \cos(\alpha-\beta) \sin \beta)}{\sigma(\cos^2(\alpha-\beta)-\mu)} \\ \ddot{\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\mu} \cos(\alpha-\beta)\dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\cos(\alpha-\beta) \sin \alpha - \sin \beta)}{1 - \frac{1}{\mu} \cos^2(\alpha-\beta)} \end{cases} \quad (2.12)$$

Givet beteckningen  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \implies \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}$  kan ekvationen (2.12) förkortas till

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.13)$$

där funktionen  $\mathbf{F}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  införs som vektorn som har högerled 1 respektive högerled 2 i (2.12) som koordinater, i den ordningen, där  $l_2 = L$ . Låt vidare

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.14)$$

stå för denna funktion då  $L = l_2 = 1 \text{ m}$ .

### 2.3.5 Egenskaper hos rörelseekvationerna

#### Invariant beteende då massorna ändras så att $m_1/m_2$ hålls konstant

I och med att massornas bidrag till rörelseekvationerna är parametriserad genom  $\mu = (1 + \frac{m_1}{m_2})$  så är ekvationssystemet (2.12) invariant under lika uppskalning av massorna och således är beteendet för systemet invariant med avseende på en sådan förändring.

Detta formaliseras i följande sats:

**Sats 2.1.** *Om  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t)$  är en lösning till rörelseekvationerna (2.12) för begynnelsevärde  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 = \mathbf{g}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{g}'(0)$ , längder  $l_1$  och  $l_2$  och massor  $m_1$  och  $m_2$ , kommer lösningen  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  till ekvationssystemet med samma begynnelsevärde och längder  $\tilde{l}_1 = l_2$  och  $\tilde{l}_2 = l_2$  med massor  $\tilde{m}_1 = m_1 \cdot k$  och  $\tilde{m}_2 = m_2 \cdot k$  vara  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{g}(t)$  också.*

#### Invariant i kvalitativt beteende då längderna ändras så att $l_1/l_2$ hålls konstant

Då  $l_1$  och  $l_2$  skalas upp med gemensam faktor, i jämförelse med en lösning  $\mathbf{q}(t)$  existerar en annan invariant. Då löper den nya lösningen  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  genom samma sekvens av tillstånd, men med en annan tidsskala. Satsen nedan preciserar detta.

**Sats 2.2.** *Antag att ekvationssystemet (2.12) för givna  $\mu$ , stavlängder  $l_1$  och  $l_2$  och begynnelsevärde  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$  har lösning  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t)$ . Då kommer lösningen  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  till systemet med samma  $\mu$ , begynnelsevärde  $\tilde{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \cdot \sqrt{k}$  och stavlängder  $\tilde{l}_1 = l_1/k$  respektive  $\tilde{l}_2 = l_2/k$  vara  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{g}(t \cdot \sqrt{k})$ .*

Beviset till denna sats kan ses i bilaga B.

För detta arbete är följande korrolarium framförallt av intresse:

**Korrolarium 2.1.** Antag att ekvationssystemet (2.12) för givna  $\mu$ , stavlängder  $l_1$  och  $l_2$  och begynnelsevärde  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$  har lösning  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t)$ . Då kommer systemet med samma  $\mu$  och samma begynnelsevärde, men med stavlängder  $\tilde{l}_1 = l_1/k$  respektive  $\tilde{l}_2 = l_2/k$  ha lösning  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{g}(t \cdot \sqrt{k})$

### 2.3.6 Parametrisering av längder och massor

Av satserna ovan kan ses att dubbelpendelns fullständiga beteende, bortsett en eventuell om-skalning i tid bestäms entydigt av  $\mathbf{q}(0)$ ,  $\sigma$  och  $\mu$  i alla de fall där  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$ . Därför kommer för denna undersökning variation av systemparametrar ske genom variation av  $\sigma$  och  $\mu$  (för  $l_2 = 1 \text{ m}$  och  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ) och inskränkningen göras att endast betrakta begynnelsevillkor med  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$ . Denna sista inskränkning kommenteras vidare i sektion 2.4.3.

## 2.4 Avgränsningar

### 2.4.1 Val av kaotiskt system

I rapporten har endast en enkel dubbelpendel med punktmassor studerats. Detta för per körning konstanta stavlängder och massor. Algoritmer för numerisk framtagning av den maximala Lyapunov-exponenten har prövats gentemot Lorenz-systemet, ty detta är mer lättanterligt och dess Lyapunov-spektrum, inklusive MLE, har fastställts med stor säkerhet [2, 10].

Vidare har dubbelpendelsystemet endast betraktats numeriskt, framförallt på grund av nödvändighet, då tillräckligt hög precision och tillräcklig mängd data omöjligt skulle kunna uppnås med tillgängliga resurser om dubbelpendeln hade studerats experimentellt.

### 2.4.2 Fysikaliska inskränkningar

Systemet är förenklat i den mån att stavarna har densitet 0 och all massa är koncentrerad till de två punktmassorna.

I arbetet har vidare inte hänsyn tagits till några former av förluster, och vidare har såväl kvantmekaniska som relativistiska effekter försummats.

### 2.4.3 Betraktade begynnelsevärden

I avseende att förminka antalet testfall som behöver köras, och således till gagn för säkerheten i slutsatserna, har endast begynnelsevärden med  $\dot{\alpha} = 0$  och  $\dot{\beta} = 0$  betraktats. Detta minskar antalet testfall från  $\mathcal{O}(n^4)$  till  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Denna avgränsning är även rimlig utifrån det faktum att begynnelsevärden som är av intresse i verkligheten till stor del är sådana där dubbelpendeln ”släpps”.

Korrolarium 2.1 innebär dessutom att dubbelpendeln för sådana begynnelsevillkor kan karakteriseras kvalitativt utifrån endast *kvoter* av längder eller massor utan att behöva ta hänsyn till de exakta värdena. Detta underlättar för proceduren att variera systemparametrar, och gör valet av betraktade systemparametrar mindre godtyckligt.

### 2.4.4 Dimensionsmått

Av de många dimensionsmått som existerar har avgränsningen gjorts att endast betrakta låd-dimension och passardimension, dels på grund av enkelheten i att implementera dessa programmeringsmässigt, men framförallt på grund av att de är bättre lämpade än många andra dimensionsmått för ändamålen som står för denna rapport.

Hausdorffdimensionen är ett av de oftast använda dimensionsmåtten i teoretiska sammanhang på grund av dess fördelaktiga egenskaper [4], men den är i många fall opraktisk att använda i numeriska sammanhang, och algoritmer för att ta fram den automatiskt existerar ofta inte [4].

## 2.4.5 Lyapunov-spektra och Lyapunov-exponenter

I många fall kan kaotiska system karakteriseras vidare genom ett så kallat Lyapunov-spektrum, som beskriver den exponentiella förändringen av differensen för perturbationer i olika riktningar i fasrummet [2], men för ändamålet att beskriva systemets generella känslighet för begynnelsevärde är den maximala Lyapunov-exponenten mer relevant [6]. Därför har avgränsningen gjorts att endast betrakta den maximala Lyapunov-exponenten.

# 3. METOD

Undersökningarna gjordes som beskrivet på en simulerad, idealiserad, dubbelpendel, och samtliga storheter för analys, fraktaldimension och maximal Lyapunov-exponent, framtogs numeriskt från erhållna data. Här redogörs för de program och algoritmer som användes för framtagning av data och bearbetning av data för att få fram dimensionsmått och MLE.

## 3.1 Praktisk implementering

### 3.1.1 Programmering

Samtliga algoritmer som beskrivs i detta arbete implementerades i programmeringsspråket C++. Beräkningarna gjordes på så sätt att samtliga variabla storheter behandlades med datatypen *double*, vilket innebar en avrundning till ca. 15 värdessiffror i varje beräkningssteg.

Algoritmerna som används finns beskrivna i bilaga C. Den exakta källkoden kan läsas och köras på följande länk: <https://github.com/geckoanton/PendulumFractals>

Notera att för att köra koden krävs Microsoft Visual Studio. Koden använder sig även av SDL, ett multimediasbibliotek med öppen licens. För information och dokumentation, se <https://www.libsdl.org/index.php>

### 3.1.2 Parametervärden

I algoritmerna har konstanter satts till värden enligt vad som ges nedan:

$g$	9,82	$\text{m s}^{-2}$
$l_2$	1	m
$l_1$	$\sigma \cdot l_2$	
$m_2$	1	kg
$m_1$	$(\mu - 1) \cdot m_2$	
$\delta_0$	$10^{-7}$	rad
$D$	$10^{-4}$	rad
$N$	100	
$h$	0,001	s

### 3.1.3 Numerisk lösning av differentialekvationerna

För all simulering användes fjärde ordningens Runge-Kutta för att uppdatera  $\mathbf{q}$  och  $\dot{\mathbf{q}}$  i varje tidssteg. Detta för differentialekvationen

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.1)$$

med något begynnelsevärde  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  och  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$ .

För en redogörelse för den exakta proceduren, se bilaga C.1.1.

## 3.2 Generering av fraktaler

För att bilda fraktaler för visualisering och senare beräkning av dimensionsmått ställdes ett rutnät av begynnelsevärden  $(\alpha_0, \beta_0)$  upp med någon rutbredd  $R$ . Från var och en av punkterna  $(\alpha_0, \beta_0)$  i detta rutnät simulerades dubbelpendeln under en tid från  $t = 0$  till  $t = t_{\text{stopp}}$ , alla utifrån samma systemparametrar. Om dubbelpendeln under mätperioden gjorde överslag sparades detta som värdet 1 i en tabell, på den plats som svarar mot begynnelsevärdet, och i de fall mängderna ritades, så färgades även pixeln som svarade mot begynnelsevärdet i vitt. I de fall överslag inte skedde sparades värdet 0, och pixeln färgades svart. Se bilaga C.1.2 för den exakta algoritmen.

### 3.2.1 Överslagsmängder

I rapporten studerades överslagsmängder vilket även studerades av Heyl [8]. Överslagsmängderna definieras som mängden av  $\mathbf{q}(0)$  så att dubbelpendeln inte vid någon tidpunkt  $< t_{\text{stopp}}$  gör överslag. Överslag definieras som att  $\alpha$  eller  $\beta$  vid någon tidpunkt antar något värde  $\pi + 2\pi k$ . Programmeringsmässigt bedömdes ett överslag ha skett om  $\alpha$  eller  $\beta$  från ett tidssteg till det nästkommande gick från ena sidan om lodrätt uppåt till andra.

För överslagsmängder användes endast innerkustlinjen till överslagsmängder som fraktalkandidat, då mängden annars innehåller ett helfyllt område innanför energigränsen med dimension 2. Överslagsmängden är en union av denna med övriga mängden, och enligt satsen om finit stabilitet för läddimension i Falconer [4, s. 48] som säger att läddimensionen för unionen av två mängder är maximum av mängdernas enskilda läddimensioner, måste hela överslagsmängden då vara av dimension 2.

Programmeringsmässigt blev förfarandet att betrakta den nya fraktalen som mängden av "rutor" (de numeriska fraktalerna framtogs för en matris av begynnelsevillkor) i överslagsfraktalen som angränsar till någon ruta som inte är i överslagsfraktalen. Då endast den centrala komponentens kant betraktades gjordes detta genom att stega runt fraktalen enligt algoritmen i bilaga C.4.

## 3.3 Analys av fraktaldimension

En punktmängd  $P$  som approximerar innerkustlinjen till given en överslagsfraktal  $F$  tas fram genom att stega längs kanten på överslagsfraktalen. Det exakta förfarandet beskrivs i algoritm C.4.

För att bestämma dimensionsmått för genererade fraktaler användes algoritmerna som återfinns i bilaga C.3 och bilaga C.4 som baserar sig på definition 2.4 och definition 2.5, men linjeregession användes för att ge ett numeriskt approximativa värden för de båda dimensionsmåtten, enligt standardförfarande i applicerade sammanhang.

Logaritmen av de funktioner som erhålls i algoritmerna,  $N_A(s)$  och  $M_A(s)$ , ställdes upp i diagram mot  $\log \frac{1}{s}$  respektive  $\log \frac{1}{r}$ . Sedan anpassades en linje och dimensionen gavs av linjens lutning.

## 3.4 Numerisk bestämning av Lyapunov-exponenter

För att erhålla större säkerhet i den maximala Lyapunov-exponenten användes en metod som Murison [11] sammanställt utifrån det som beskrivs av Benettin, Galgani och Strelcyn [12] samt Wolf m. fl. [10], men som även tangentIELLT togs upp av Gustafsson [9]. Algoritmen beskrivs även av Peitgen, Jürgens och Saupe [6].

Då dubbelpendelsystemet betraktas är längden på den användbara mätperioden för att studera den exponentiella tillväxten för felet begränsad av tiden det tar för systemet att nå en "diameter" i fasrummet, d.v.s. ett område innan största möjliga  $\delta$  från vilket banorna inte kan divergera vidare på grund av systemets utformning [2]. Metoden som beskrivs nedan och i ovan nämnda källor bygger på att upprepat skala ned  $\delta$  för att sedan ta den genomsnittliga lutningen av  $\ln(\frac{\delta}{\delta_0})$  mot  $t$ , vilket således kringgår begränsningen.

$$\lambda_{\text{avg}} = \frac{1}{t_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N \Delta(\ln \delta)_i = \frac{1}{t_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta_{\max_i}}{\delta_0} \quad (3.2)$$

I metoden som används i detta arbete används två dubbelpendlar,  $P_{\text{ref}}$  och  $P_{\text{test}}$  identiska bortsett att  $P_{\text{test}}$  får en initial förflyttning  $\delta_0$  i fasrummet, genom att  $P_{\text{test}}$  ges  $\alpha_{\text{test}} = \alpha_{\text{ref}} + \delta_0$  från början. Dessa dubbelpendlar utvecklas sedan parallellt och för varje tidssteg beräknas avståndet

$$\delta(t) \equiv |\phi_{\text{test}} - \phi_{\text{ref}}|. \quad (3.3)$$

Då  $\delta(t) > D$  sparas  $a_i = \frac{\delta}{\delta_0}$  och  $P_{\text{test}}$  uppdateras genom att flytta  $\alpha_{\text{test}}, \beta_{\text{test}}, \dot{\alpha}_{\text{test}}, \dot{\beta}_{\text{test}}$  längs den raka linjen från  $\phi_{\text{ref}}$  till  $\phi_{\text{test}}$  så att  $\delta$  åter får storleken  $\delta_0$ . Detta innebär att

$$\phi_{\text{test}} \leftarrow \phi_{\text{ref}} + \frac{\phi_{\text{test}} - \phi_{\text{ref}}}{a_i}. \quad (3.4)$$

Sedan  $N$  upprepningar gjorts beräknas  $\lambda_1$  enligt (3.2) ut som

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N \ln a_i. \quad (3.5)$$

En överblick av algoritmen mer programmatiskt ses i bilaga C.2.

## 3.5 Samband mellan MLE och dimensionsmått

För att avgöra huruvida ett samband existerar mellan den maximala Lyapunov-exponenten och de båda studerade dimensionsmåtten fordras en spridning av värden för såväl MLE som för dimensionsmåtten. I försök att erhålla olika värden för MLE och dimensioner varierades systemparametrarna. Exakta parametervärden beskrivs i sektion 3.1.

Systemparametrarna varierades enligt följande schema:

- Längderna varieras på sådant sätt att  $l_1/l_2 = \sigma$  för  $l_2 = 1$  m och  $\sigma = 2^{a/2}$  för heltalet  $a$  mellan  $-6$  och  $6$ .

- Massorna varieras på sådant sätt att  $m_1/m_2 = \mu - 1$  för  $m_2 = 1\text{ kg}$  och  $\mu - 1 = 2^{b/2}$  för heltal  $b$  mellan  $-6$  och  $6$ .
- Alla kombinationer av sådana  $\sigma$  och  $\mu$  användes.
- För varje kombination av systemparametrar framtogs den maximala Lyapunov-exponenten för ett  $128 \times 128$  rutnät av begynnelsevillkor  $\mathbf{q}(0)$  från  $(-\pi, -\pi)$  till  $(\pi, \pi)$ , med  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0}$ , och den högsta uppnådda  $\lambda_1$  bland dessa, deras övre kvartiler, median och genomsnitt identifierades, samt övre kvartil, genomsnitt och median då värden  $\lambda_1 < 0,05\text{ s}^{-1}$  exkluderats. Till sist ställdes histogram upp.
- Kustlinjen till en given överslagsmängd  $\Phi_{10}(\sigma, \mu)$  togs fram med algoritm C.4 för  $h = 0,001\text{ s}$  och med ett rutnät av bredd  $2^{13} = 8192$ , kustlinjens passardimension togs fram för passarlängder på formen  $r = 2\pi/2^k$  för heltal  $k$  från  $1$  till  $13$ , och kustlinjens låddimension togs fram för lådstorlekar på formen  $s = 2\pi/2^k$  för heltal  $k$  från  $1$  till  $13$ .
- Spridningsdiagram ställdes sedan upp mellan största  $\lambda_1$ , och vardera dimensionsmått för motsvarande systemparametrar samt mellan ovan nämnda statistiska lägesmått för  $\lambda_1$  och vardera dimensionsmått, med avsikt att kunna iaktta en eventuell korrelation mellan MLE och dimension.
- Till sist ställdes också ett spridningsdiagram upp mellan passardimension och låddimension för motsvarande systemparametrar.

Välet att separat testa att exkludera värden  $\lambda_1 < 0,05\text{ s}^{-1}$  grundar sig på den tidiga observationen att en närmare diskret förändring i frekvensen av värden för MLE, där en betydande andel av värden ligger strax över  $0$  fram till cirka  $0,02\text{ s}^{-1}$  men mycket få värden strax över det intervallet.

Vidare ställdes upp 3D-grafer som illustrerar låddimensionens, passardimensionens och samtidiga lägesmått för MLE:s beroende av systemparametrarna  $\sigma$  och  $\mu$ , där  $\sigma$  och  $\mu$  sätts på  $x$ -respektive  $y$ -axeln och resulterande värde sätts på  $z$ -axeln, för att grafiskt kunna jämföra om dimension och MLE varierar på liknande sätt.

Lådagram över MLE för olika parametrar ställdes upp för att på mer översiktligt sätt åskådliggöra hur de olika lägesmåtten för MLE kan relateras.

Till sist ritades ett antal olika överslagsmängder ut fullständigt för att kunna säkerställa rimligheten i slutsatserna, samt att färggrafer sparades för samtliga beräkningar av MLE för att kunna uppfölja och kontrollera resultaten för MLE:s fördelning.

# 4. RESULTAT

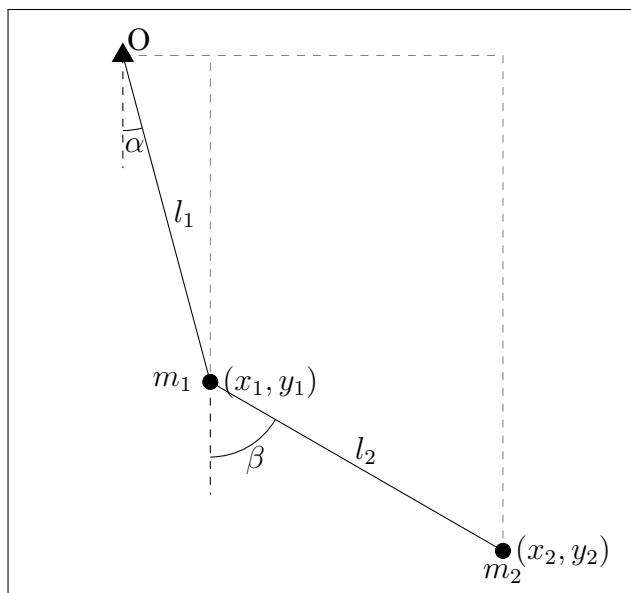
Redogörelsen för resultaten är indelad i sektioner som väsentligen innebär olika grader av abstraktion. Sektion 4.1 redogör för ett exempel av de delresultat, i form av diagram, vars tolkning används för att ta fram datapunkter till de senare sektionerna. Sektionerna 4.2–4.4 illustrerar de oberoende variablerna, MLE och dimension, samt deras samband över variation av systemparametrar. Rådata visas inte i rapporten, men det förklaras i sektion 4.6 var dessa återfinns.

För lägesmåtten till MLE kommer ett antal beteckningar användas:

$\hat{\lambda}_1$	Maximalt uppnått värde för MLE
$U(\lambda_1)$	Övre kvartil av MLE tagen från samtliga värden
$U'(\lambda_1)$	Övre kvartil av MLE efter att värden $< 0,05 \text{ s}^{-1}$ exkluderats
$M(\lambda_1)$	Median av MLE tagen från samtliga värden
$M'(\lambda_1)$	Median av MLE efter att värden $< 0,05 \text{ s}^{-1}$ exkluderats
$\overline{\lambda_1}$	Aritmetiskt genomsnitt av MLE
$\overline{\lambda_1}'$	Aritmetiskt genomsnitt av MLE efter att värden $< 0,05 \text{ s}^{-1}$ exkluderats

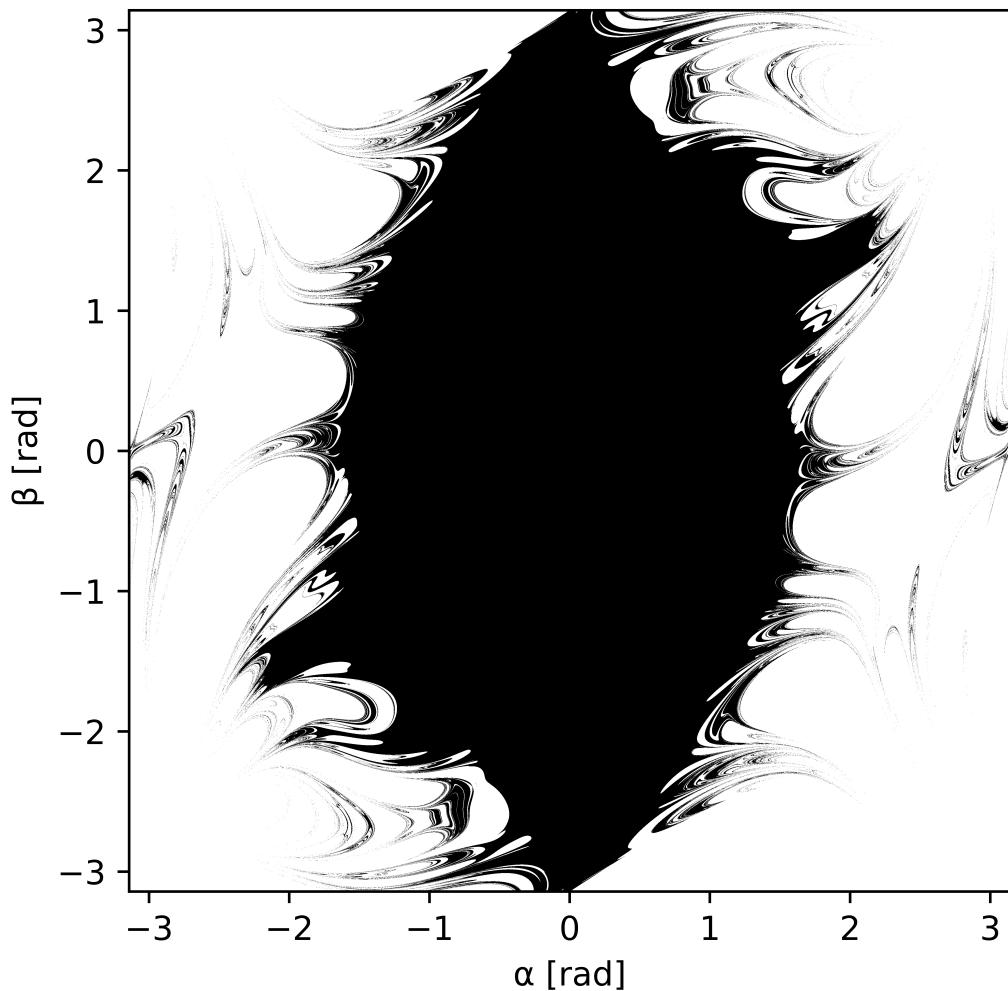
## 4.1 Utfört exempelfall för överslagsmängd

I denna sektion redogörs för ett exempel av de delresultat som används för att ge datapunkter till resultaten i sektion 4.2–4.4. Specifikt behandlas här exemplet överslagsmängden som ges av  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 2$ , den enklaste dubbelpendeln med  $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$  och  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ , med  $t_{\text{stopp}} = 10 \text{ s}$ , framtagen med  $h = 0,001 \text{ s}$ , eller kompakt  $\Phi_{10}(1, 2)$ . Vidare ges resultat för dimension och maximal Lyapunov-exponent.



Figur 4.1: Diagram över dubbelpendel med  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 2$ . Här gäller att  $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$  och  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ .

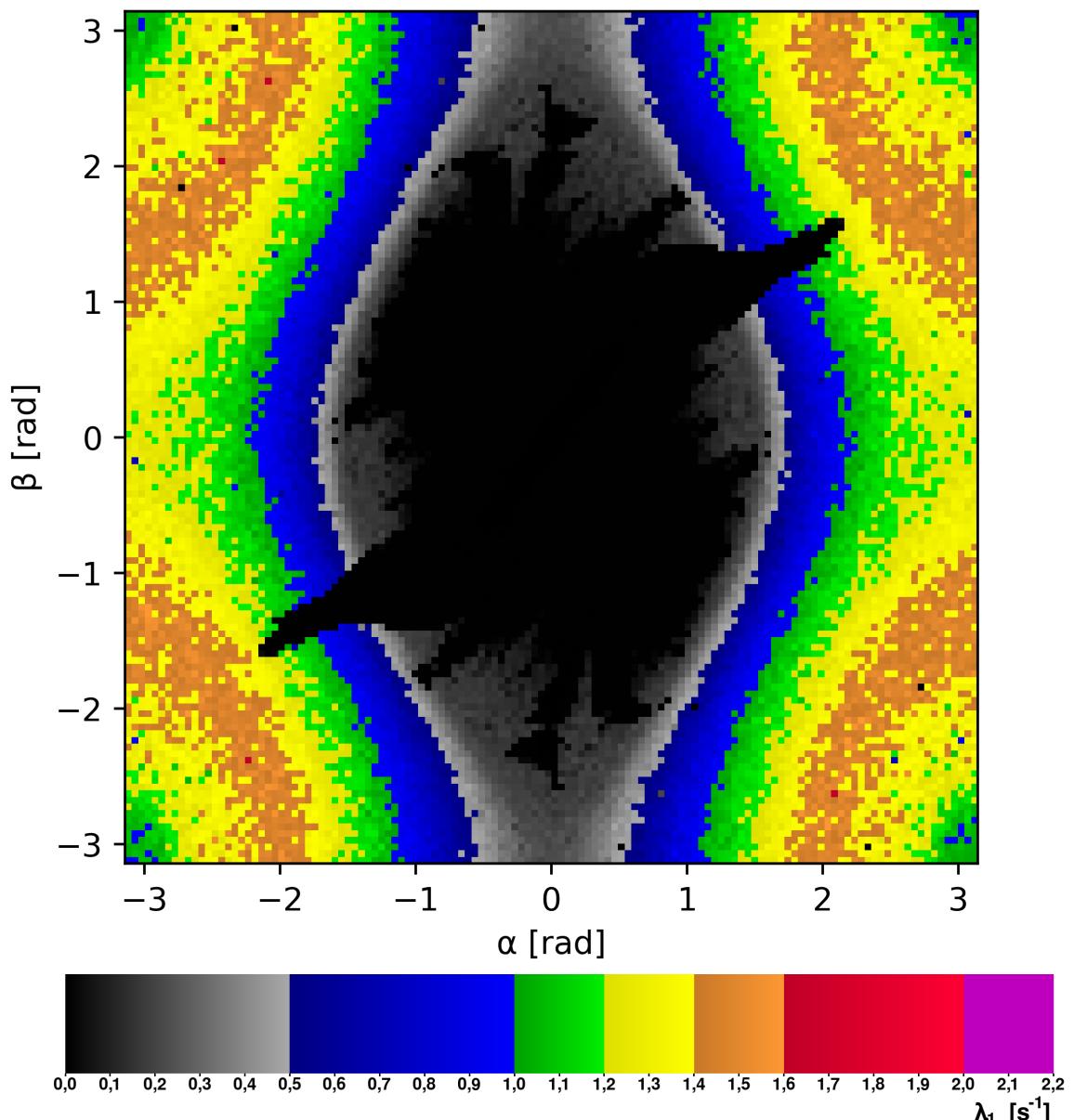
#### 4.1.1 Bild av överslagsmängd



Figur 4.2: Diagram över överslagsmängd  $F = \Phi_{10}(1, 2)$  definierad från  $t_{\text{stopp}} = 10$  s,  $h = 0,001$  s,  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$ . Vita punkter markerar begynnelseställstånd som gör överslag.

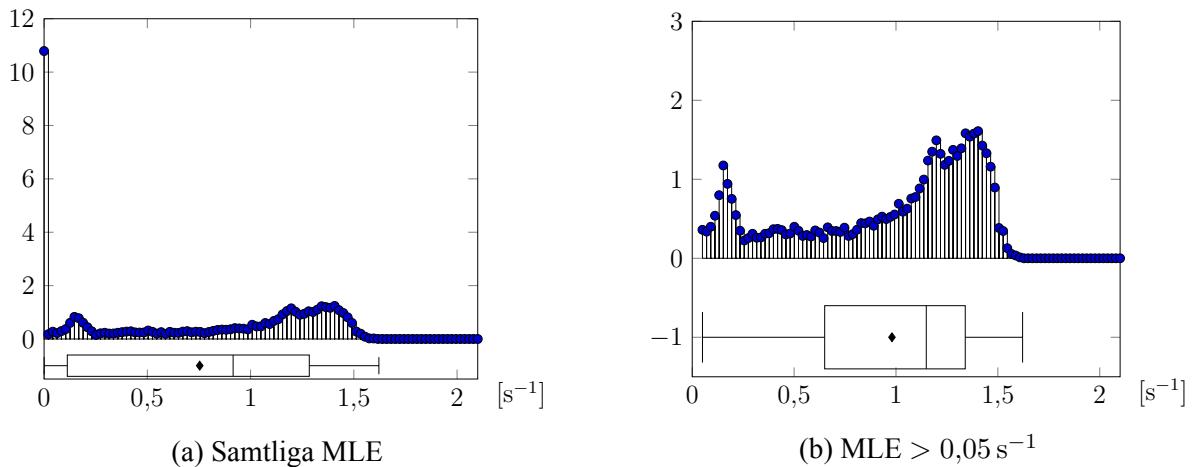
Bilden här är ett exempel på en överslagsmängd. Ett kollage med samtliga framtagna överslagsmängder kan ses i bilaga F.

#### 4.1.2 Maximal Lyapunov-exponent



Figur 4.3: Färggraf över Lyapunov-exponenten som funktion av begynnelsevärdet för  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$ , beräknade med tidsteg  $h = 0,001$  s,  $N = 100$ ,  $\delta_0 = 10^{-7}$  rad och  $D = 10^{-4}$  rad.

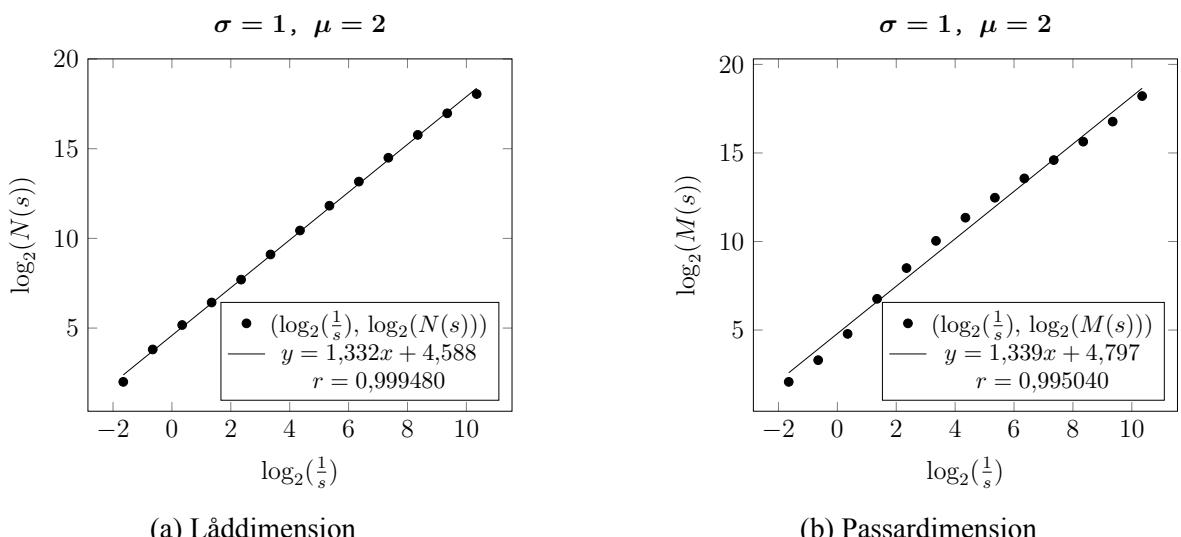
Bilden här är ett exempel på en MLE-graf. Ett kollage med samtliga framtagna MLE-grafer kan ses i bilaga F.



Figur 4.4: Histogram över MLE, arean under grafen är lika med ett. Undertill finns ett läddagram, medianen är markerad med ett streck och medelvärdet med en romb. Samtliga histogram går att se i bilaga E.

#### 4.1.3 Framtagning av fraktaldimension

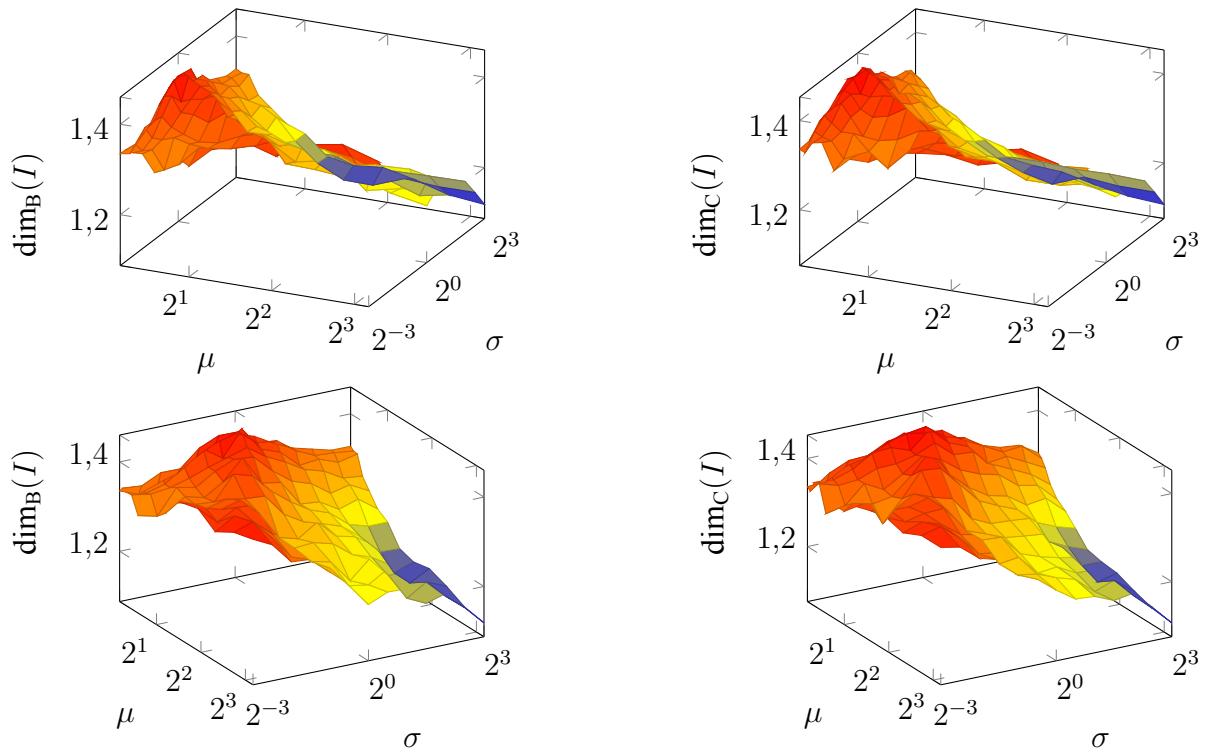
Diagrammen nedan beskriver sambandet i logaritmer som används för att ta fram de båda dimensionsmåtten, låddimension och passardimension, för specialfallet  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$ . Mängden som mäts är innerkustlinjen  $I$  till  $\Phi_{10}(1, 2)$ . För sådana diagram till övriga systemparametrar, se instruktioner i sektion 4.6. Rådatan till dessa diagram, och även till samtliga övriga, kan nås enligt instruktion i sektion 4.6. De respektive dimensionsmåtten ges, enligt vad som beskrivs i definition 2.4 och definition 2.5, av lutningen på de anpassade linjerna.



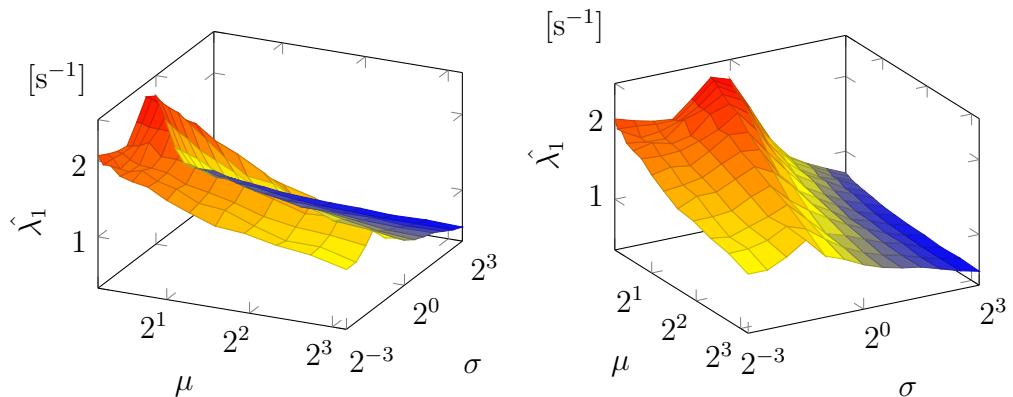
Figur 4.5: Diagram för framtagning av låddimension (a) och passardimension (b) för  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$ . Logaritmen av lådantal  $N(s)$ , respektive passarantal  $M(s)$ , ställs mot mätskalan  $\log \frac{1}{s}$ . Linjer har anpassats, vars lutningar ger de respektive dimensionsmåtten. Samtliga regressionslinjer kan ses i bilaga D.

Experimentellt erhållna värden för  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$  är alltså att  $\dim_B(I) = 1,332$  och  $\dim_C(I) = 1,339$ .

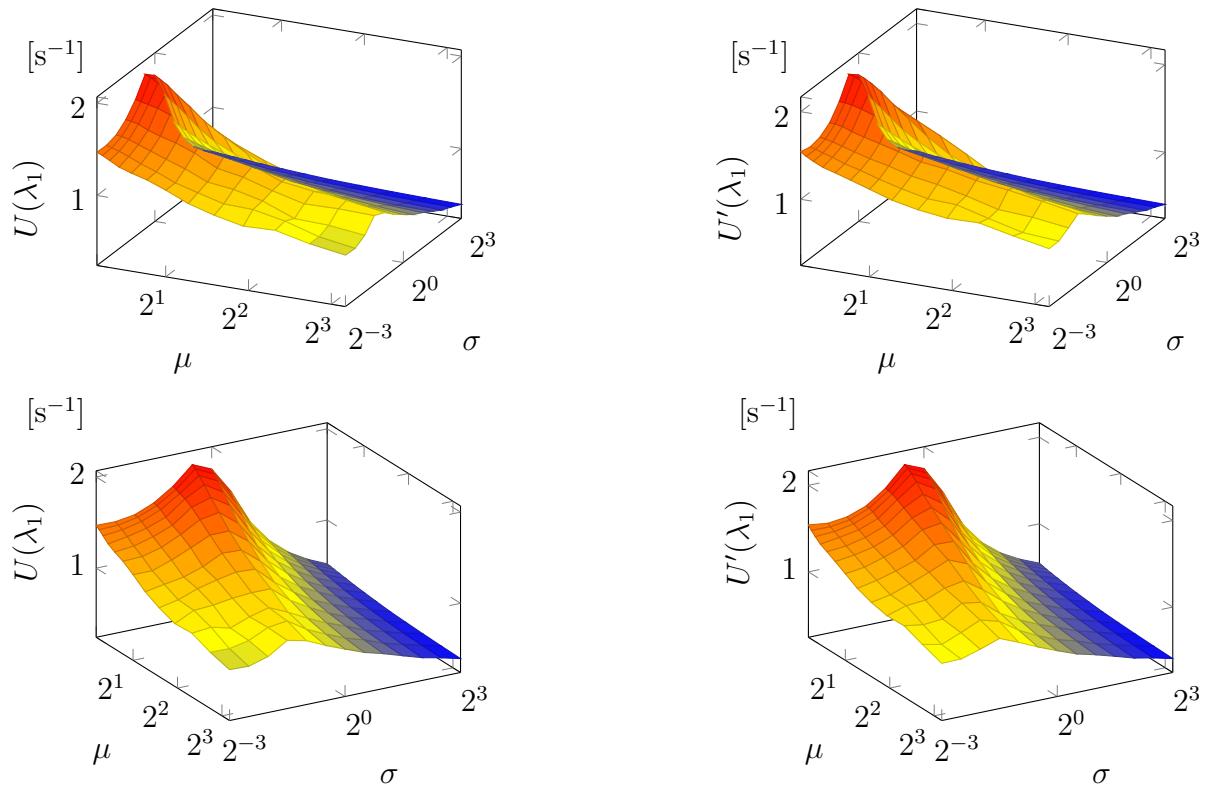
## 4.2 3D-grafer



Figur 4.6: Tredimensionell framställning av dimensionsmåtten beroende på systemparametrar, låddimension till vänster och passardimensionen till höger, från två perspektiv.

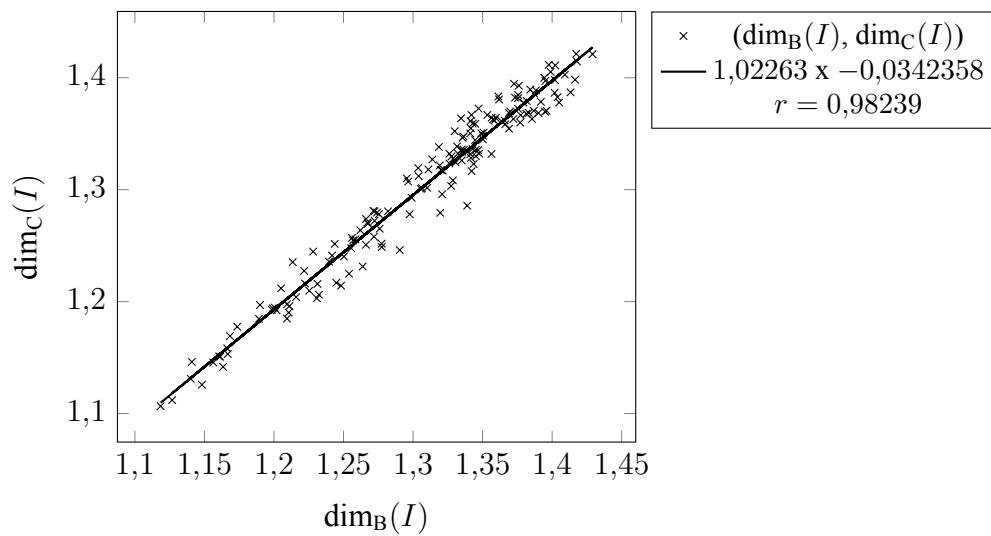


Figur 4.7: Tredimensionell framställning av största MLE beroende på systemparametrar, från två perspektiv.



Figur 4.8: Tredimensionell framställning av övre kvartil utav MLE beroende på systemparametrar, med värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  till vänster och utan värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  till höger, från två perspektiv.

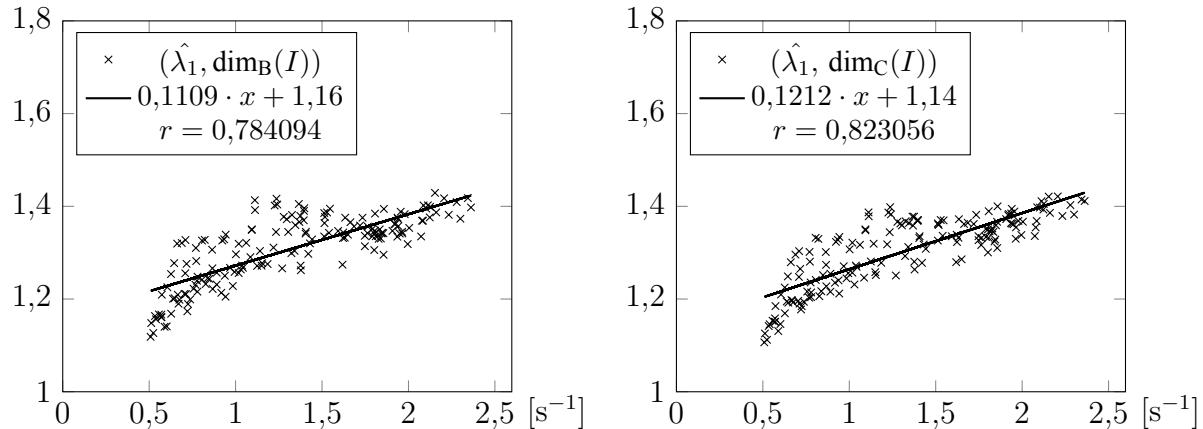
### 4.3 Jämförelse mellan dimensionsmåten



Figur 4.9: Jämförelse mellan låddimension och passardimension för motsvarande värden för systemparametrar, samt anpassad linje och korrelationskoefficient.

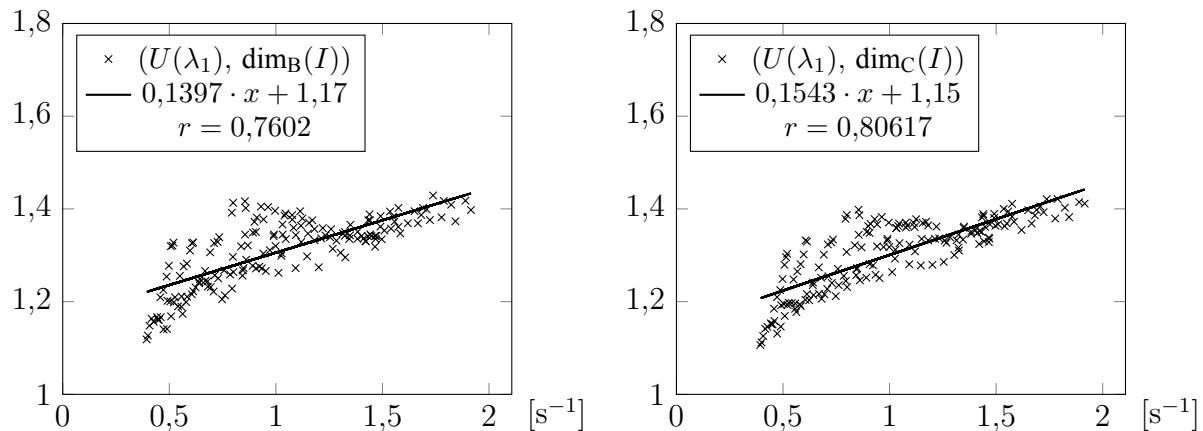
## 4.4 Spridningsdiagram mellan MLE och dimensionsmått

### 4.4.1 Maximalt uppnådd MLE



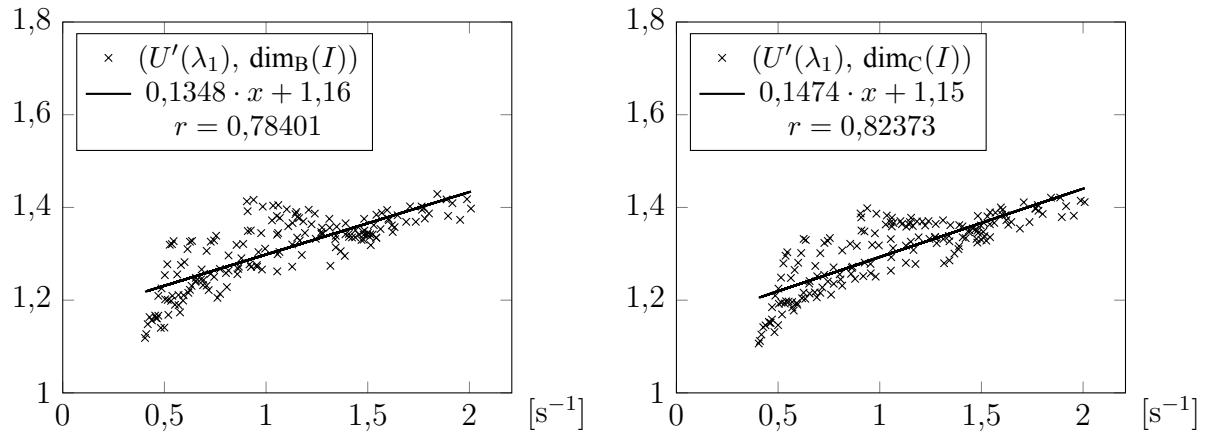
Figur 4.10: Samband mellan största uppnådda värde för MLE i rutnätet, mot låddimensionen till vänster och passardimension till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

### 4.4.2 Övre kvartil av samtliga värden för MLE



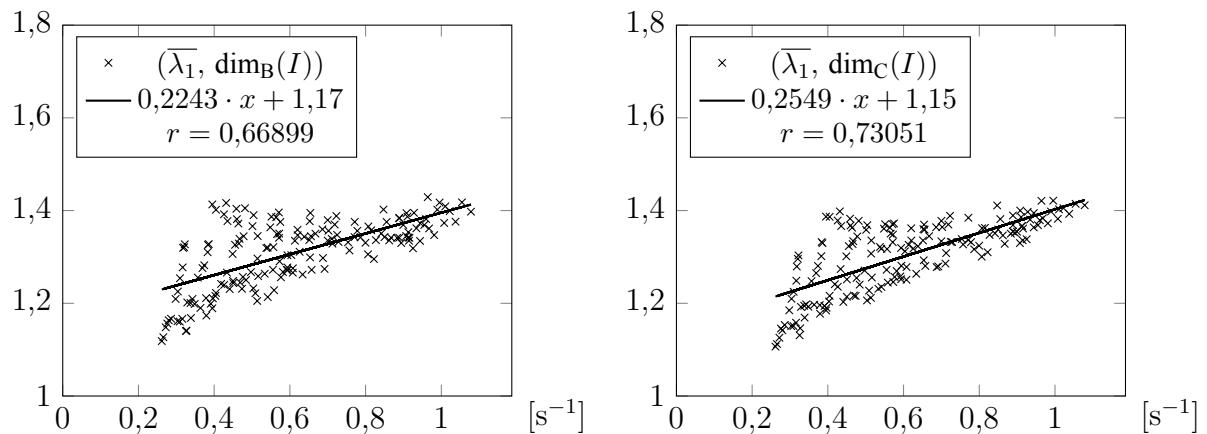
Figur 4.11: Samband mellan övre kvartil av uppnådda värden för MLE i rutnätet, mot låddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

#### 4.4.3 Övre kvartil av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$



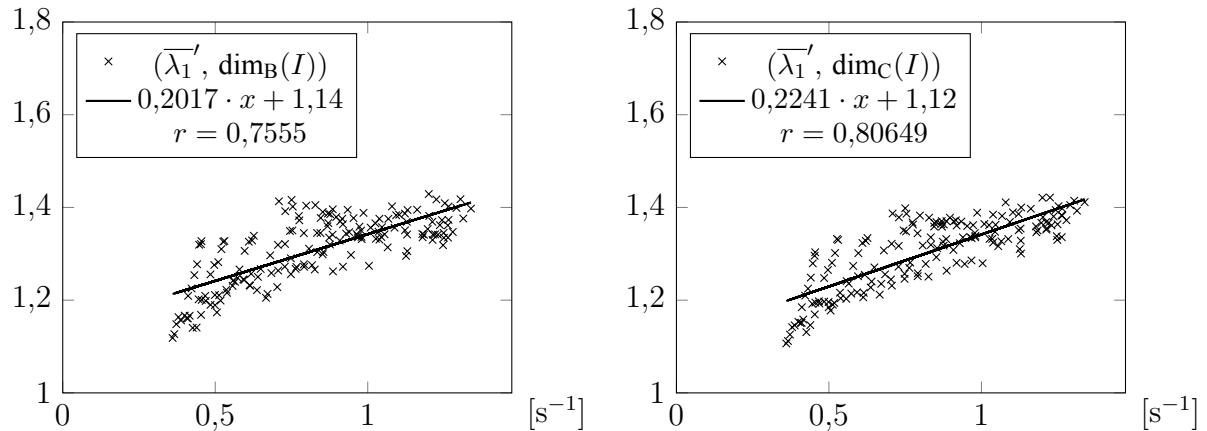
Figur 4.12: Samband mellan övre kvartil av uppnådda värden för MLE i rutnätet med värden lägre än  $0,05 \text{ s}^{-1}$  bortplockade, mot låddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

#### 4.4.4 Medelvärde av MLE



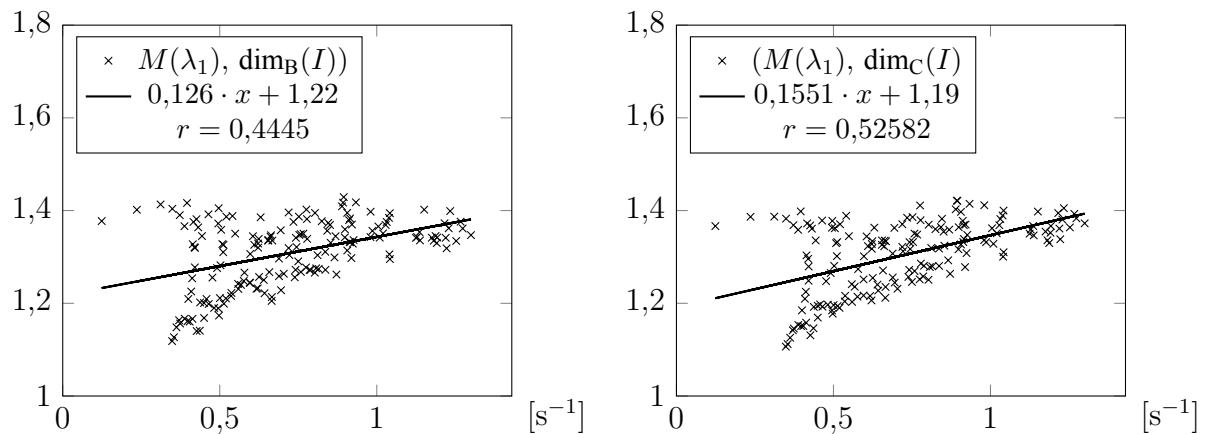
Figur 4.13: Samband mellan medelvärdet av uppnådda värden för MLE i rutnätet med värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  bortplockade, mot låddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

#### 4.4.5 Medelvärde av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$



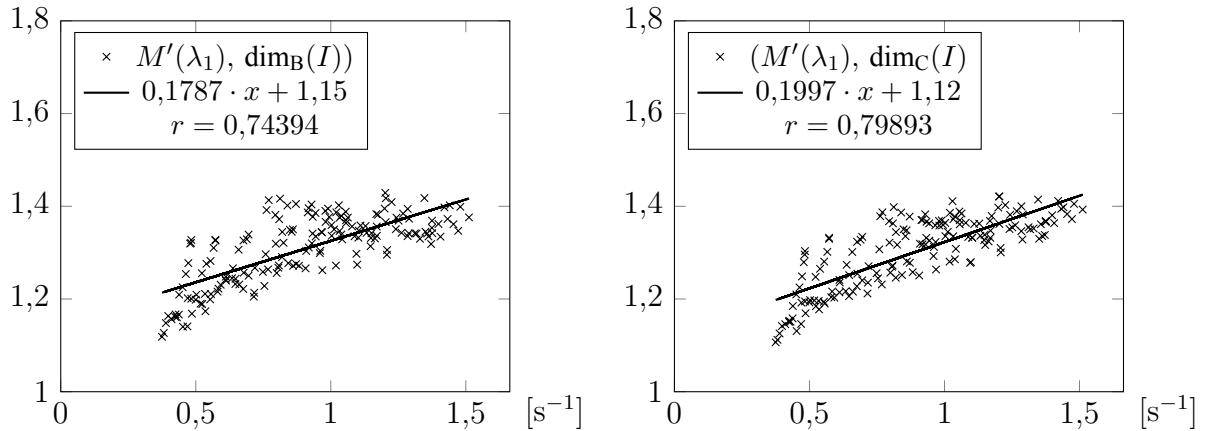
Figur 4.14: Samband mellan medelvärdet av uppnådda värden för MLE i rutnätet med värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  bortplockade, mot låddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

#### 4.4.6 Medianen av MLE



Figur 4.15: Samband mellan medianen av uppnådda värden för MLE i rutnätet med värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  bortplockade, mot låddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

#### 4.4.7 Medianen av MLE större än $0,05 \text{ s}^{-1}$



Figur 4.16: Samband mellan medianen av uppnådda värden för MLE i rutnätet med värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  bortplockade, mot läddimensionen till vänster och passardimensionen till höger. Korrelationskoefficienterna är angivna.

## 4.5 Felberäkningar

### 4.5.1 Dimensionsmått

Under antagande att beräknade  $\log_2(N(s))$  och  $\log_2(M(r))$  är normalt fördelade kring sina respektive väntevärden med varians  $\sigma_\epsilon^2$  kan variansen för riktningskoefficienten i regressionsanalys till funktionen

$$y = kx + m, \quad (4.1)$$

tas fram. Här är  $x = \log \frac{1}{s}$  (eller motsvarande  $\log \frac{1}{r}$  för passardimension), och  $y = \log(N(s))$  (eller motsvarande  $\log(M(r))$ ) för passardimension. Därefter ska  $k$  och  $m$  tas fram som parametrar enligt minsta-kvadratmetoden, d.v.s. givet

$$y_i = kx_i + m + \epsilon_i, \quad (4.2)$$

ska  $\sum \epsilon_i^2$  minimeras genom att välja  $k$  och  $m$ .

För denna modell gäller att variansen för  $k$  är

$$\sigma_k^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sum (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (4.3)$$

där  $\bar{x}$  är det aritmetiska genomsnittet av  $x_i$ .

Låt sätta in  $x_i = \log \frac{1}{s_i} = -\log(s_i) = -\log(2\pi \cdot 2^{-i})$ , vilket ger  $\bar{x} = 4,348\,503$  och  $\sum (\bar{x} - x_i)^2 = 182$ . Detta ger standardavvikelsen

$$\sigma_k = \frac{\sigma_\epsilon}{\sqrt{182}}. \quad (4.4)$$

Genom att konservativt anta att  $2\sigma_\epsilon = 1$ , d.v.s. att 95% av värden  $N(s)$  (eller  $M(r)$ ) avviker mindre än en faktor 2 upp eller ned, fås att  $\sigma_k = 0,04$ .

### 4.5.2 Maximal Lyapunov-exponent

Ett antal olika kombinationer av systemparametrar och begynnelsevillkor testades för fördelning av värden av MLE. Detta gjordes dels med  $N = 1$  och  $N = 25$  för att inte låta beräkningsfel växa för mycket. Detta gav en närmare normal fördelning av MLE-värden med standardavvikelse som mest  $0,8 \text{ s}^{-1}$  respektive  $0,1 \text{ s}^{-1}$ . Dessutom ställdes histogram upp mellan över differensen mellan de olika lägesmåtten för olika upplösning av begynnelsevillkor. I jämförelse mellan  $128 \times 128$  och  $64 \times 64$  gav detta nära normal fördelning för max och standardavvikelse  $0,03 \text{ s}^{-1}$  och mycket nära normal fördelning för övre kvartil med standardavvikelse  $0,003 \text{ s}^{-1}$ .

## 4.6 Rådata

Arbetets dimensionsmått är som beskrivet framtagen från en stor mängd datapunkter för  $s$ ,  $N(s)$ ,  $r$  och  $M(r)$  tillsammans med ett diagram för varje mätpunkt för dimension. Dessutom baserar sig MLE också på ett mycket stort antal mätpunkter. Att redovisa samtliga dessa rådata och grafer i rapporten skulle ta orimlig plats, men det är fortfarande av vikt att de finns tillgängliga.

Rådata för mätpunkter, log-log-grafer för dimension, samt sammanställningar av data för MLE finns att läsa på följande länk: <https://github.com/geckoanton/PendulumFractals>

# 5. DISKUSSION

## 5.1 Tolkning av resultat

### 5.1.1 Fraktaler ur överslagsmängder

För samtliga de studerade kombinationerna av systemparametrar erhölls för både låddimension och passardimension av innerkustlinjen till överslagsfraktaler endast värden mellan 1,1 och 1,45. Se bilaga G. Detta innebär till stor säkerhet att dessa kustlinjer på gott sätt kan modelleras som fraktaler.

Låddimensionen och passardimensionen uppvisar relativ enhällighet och tydlig korrelation under variation av systemparametrar, se figur 4.3. Detta styrker att resultaten om dimensionerna inte uppkommer på grund av defekter i mätmetoderna, då dimensionsmåttens tekniska formuleringskiljer sig avsevärt. Däremot kan inte sägas om dimensionerna skulle vara desamma för än mindre skalning än de utförda  $r \geq 2\pi/2^{13}$  och  $s \geq 2\pi/2^{13}$ .

Vidare kan ses komplexa strukturer och snarlik upprepning av vissa strukturer på olika skalor i figur 4.2 vilket är typiskt för fraktaler.

### 5.1.2 Inverkan på fraktaler genom variation av systemparametrar

Resultaten visar på att variation av  $\sigma$  och  $\mu$  påverkar båda dimensionsmått. Se bilaga G. Grafiskt kan detta ses i sektion 4.2. I detta kan ses att det finns tydliga mönster i hur dimensionen varierar i figur 4.6, i avseendet att värdet påverkas enligt trender som är större än den uppenbara lokala variansen. Dimensionsmåttet påverkas alltså signifikant av variation av systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$ .

### 5.1.3 Kategorisering av dubbelpendeln på systemnivå genom Lyapunov-exponent

Som diskuteras nedan i 5.1.4 är korrelationerna olika starka för sambandet mellan MLE och dimensionsmått, med mest framstående korrelation för maximalt uppnådda MLE,  $\hat{\lambda}_1$ . Det skulle kunna förklaras av att det maximala uppnådda värdet beskriver en slags potential för systemet att producera kaos. Emellertid svarar kustlinjen av överslagsmängder ofta mot en annan energinivå än den som ger störst MLE, men resultaten tycks visa på att största MLE trots det kan fungera som en indikator för systemet.

Högsta uppnådda MLE har vissa nackdelar i sin användning, då den per definition utgör ett extremt värde. I och med att MLE har en betydande statistisk spridning gör det att det skulle kunna existera en tendens för  $\hat{\lambda}_1$  att vara större än väntat för sitt begynnelsevillkor, då slumpfaktorer sannolikt gör att värdet med "för högt" värde mer sannolikt hamnar i toppen än de som ligger nära väntevärdet. Mått såsom övre kvartil, median eller genomsnitt skulle inte drabbas till samma grad av sådana effekter, då överskattade och underskattade värden till stor grad tar ut varandra med så många mätpunkter.

Välet att testa att exkludera värden  $\lambda_1 < 0,05 \text{ s}^{-1}$  grundar sig på den stora förekomsten av värden mycket nära 0 som kan ses i histogrammet i figur 4.4a, vilka egentligen skulle kunna sägas inte svarar mot systemets genuint kaotiska beteenden. Dessa värden svarar mot närmare

kvasistabila beteenden, i att närliggande banor separeras men bara mycket långsamt. Då toppen i histogrammet är närmare diskret, med mycket få värden strax till höger om toppen, och många värden i toppen, resonerades att valet av exakt brytpunkt (så länge den är till höger om toppen) inte borde påverka median och övre kvartil avsevärt.

Att  $\overline{\lambda_1}'$  skulle ge dålig korrelation kan i någon mån väntas, då MLE upptar ett stort spann av värden och sådana mindre frekventa värden men som ligger långt från de mer frekventa, skulle då kunna göra genomsnittet skevt.

Då histogrammet i figur 4.4a betraktas ses att det existerar "pucklar" av värden som är mer frekventa och det skulle vara rimligt att tänka att mittenvärdena i dessa pucklar bäst beskriver ett entydigt värde för MLE och som kan relativt väl karakterisera hela spridningen. Övre kvartil efter att toppen vid  $\lambda_1 \approx 0$  exkluderas skulle relativt väl fånga denna punkt, varför det kan motiveras att den rimligen kan ge den tydliga korrelation som den har gjort med dimensionsmåttet.

### 5.1.4 Koppling mellan Lyapunov-exponent och dimension av fraktaler

#### Observationer

Det kan ses en uppåtgående trend för samtliga figurer 4.10–4.16 som indikerar att större maximal Lyapunov-exponent, oavsett vilket mått av de som beskrivits som används, i genomsnitt ger större fractaldimension. Detta är i enlighet med vår hypotes.

De mest framstående korrelationerna ges då det maximala uppnådda värdet för Lyapunov-exponenten samt övre kvartil efter exklusion jämförs med respektive dimension. Båda korrelationerna har korrelationskoefficienter  $> 0,7$ , vilket är en betydande korrelation, och det gäller till båda dimensionsmått. Se figurer 4.6–4.8. Dessutom kan ett skenbart approximativt samband ses.

Alla mått för Lyapunov-exponenten ger under en linjär regression positiv lutning, och, förutom medianen efter exklusion av värden  $< 0,05 \text{ s}^{-1}$  (se figur 4.15), korrelationskoefficienter  $> 0,65$ , så högre dimensionsmått tycks svara mot Lyapunov-exponenter som i allmänhet är förflyttade mot högre värden. Sambanden är för samtliga mått skenbara, så denna utsaga kan ses som styrkt i stort.

Det kan nämnas att korrelationen är skenbart begränsad, med stora variationer kring trenden, vilket sannolikt delvis beror på godtyckliga faktorer i framtagandet av låd- och passardimensioner, då log-log-diagrammen inte alltid ger perfekt anpassning till linjen, och valet av intervall för vilket linjen är anpassad då spelar roll på värdet. Dessutom har Lyapunov-algoritmerna en viss stokastisk natur i och med att den exponentiella separationen av banor endast gäller i genomsnitt och erhållna värden för MLE då kan variera upp och ned från det egentliga gränsvärdet för  $t \rightarrow \infty$ . Dessutom kan tänkas att algoritmen som tar fram kustlinjerna i somliga fall ger att kustlinjen diskontinuerligt och tydligt förändras då parametrarna varieras, vilket skulle ge större varians för båda dimensioner. Det finns inte heller något teoretiskt underlag till stöd för att en eventuell korrelation skulle vara perfekt. Inte heller förklaringsmodellen vi anger skulle innebära det.

En punkt att anmärka är att korrelationskoefficienterna för samtliga figurer 4.10–4.16 är nära-

mare 1 för passardimension än låddimension, med mellan 0,02 och 0,08 större värde för korrelationskoefficienten då MLE jämförs med passardimension än motsvarande då MLE jämförs med låddimension.

Att MLE skulle vara kopplat till dimensionsmåtten styrks även av 3D-graferna i sektion 4.2, framförallt då jämförelsen görs mellan diagrammen för maximalt uppnådd MLE, och dimensionerna. Se figur 4.12. Detta ger också ytterligare belägg för hypotesen i och med att variation av parametrar i båda dimensioner  $\sigma$  och  $\mu$  ger en närmare parallell utveckling mellan båda dimensionsmått och största MLE.

### **Teoretiska förklaringsmodeller**

Vår hypotes grundades på bilden att mer kaotiska system kommer ha mer variabilitet mellan utfallet för olika begynnelsevillkor, och specifikt antogs därfor att utseendet av mängden av begynnelsevillkor som ger överslag skulle vara mer komplex för sådana mer kaotiska system, vilket i datan svarar mot system med högre MLE (i någon bemärkelse). Denna komplexitet i mängdens utseende skulle därmed kunna svara mot en tendens för fraktaldimensionen av innerkustlinjen att vara större i genomsnitt för system med större MLE.

En annan förklaring skulle vara att förekomsten av områden där punkter i överslagsmängden och utanför överslagsmängden ligger nära varandra är vanligare i system med i stort högre MLE, ty divergensen får fler närliggande par av punkter att utvecklas till olika beteenden, varav i en andel av fall den ena då slår över och den andra inte. Detta kan då resultera i att innerkustlinjen upptar ett större område, vilket kan ge större dimension om detta större område uppstår genom fler veck och dylika strukturer.

### **Sammanfattning och slutsatser**

Spridningsdiagrammen visar att högre maximal Lyapunov-exponent korrelerar med högre fraktaldimension, både låddimension och passardimension. Framförallt gäller detta korrelationen mellan den maximala uppnådda MLE av alla testade begynnelsevillkor och båda dimensionsmått samt mellan övre kvartil efter exklusion och dimensionsmått där korrelationskoefficienten är  $> 0,75$ . Dock existerar en tydlig varians kring trendlinjen. Även andra mått ger korrelation, i synnerhet övre kvartil utan exkluderade punkter där korrelationskoefficienten är  $> 0,75$ . Även övriga mått för MLE ger positiv korrelation men av begränsad styrka, där korrelationskoefficienten är mindre än 0,6, eller där endast det ena dimensionsmåttet ger god korrelation.

Sammanfattningsvis kan sägas att högre fraktaldimension, både låddimension och passardimension, svarar mot att systemets MLE-värden tenderar att gå upp, i genomsnitt, men variationen kring trendlinjen är stor, och en precis och kvantifierbar relation mellan mätten kan således inte etableras. Detta kan förklaras delvis genom att konstatera att ökad divergens av närliggande banor kan orsaka ökade värden för både MLE och dimensionsmått.

## 5.2 Metodanalys

### 5.2.1 Felkällor

Ett antal felkällor kan identifieras för detta arbetes metod. Somliga av dessa är av kritisk relevans, då systemet i fråga är kaotiskt och introducerade fel i början av mätningarna är garanterade att påverka resultatet efter en given tid. Dessa fel behandlas enskilt och i ordning av deras vikt:

#### Tidsstegets storlek och RK4

För samtliga simuleringar användes fjärde ordningens Runge-Kutta. Denna metod är välkänd och etablerad som en standardmetod för numerisk integrering av differentialekvationer och den har ett lokalt fel som är  $\mathcal{O}(h^5)$ , alltså ett globalt fel som är  $\mathcal{O}(h^4)$ .

Undersökning för ett slumpmässigt urval begynnelsevärden för ett slumpmässigt urval av parametervärden gav att felmarginalen (som mätt i  $\delta(t)$ ) mellan identiska dubbelpendlar med identiska begynnelsevillkor, men den ena har  $h = 0,001$  s och den andra har  $h = 0,000\ 01$  s, konsekvent ger  $\delta(t) < 0,1$  rad för  $t = 10$  s. Tidssteget  $h = 0,001$  s bör därav vara av försumbar påverkan på huruvida dubbelpendeln slår över eller inte, och därav till försumbar grad påverka överslagsmängderna.

#### Avrundningsfel

En viktig punkt beträffande numerisk simulering är förekosten av avrundningsfel [13, 2]. Som nämnt i metodavsnittet användes *double*-precision vilket innebar avrundning till ca. femton decimaler. För att avgöra påverkan av detta följdes de procedurer som rekommenderas av Hubbard och West [13, s. 143–144]. Beskrivningen är att det lokala felet som funktion av tidssteget i numerisk beräkning ges av

$$E(h) \approx C_1 h^p + \frac{C_2}{h}, \quad (5.1)$$

där  $p$  är ordningen av lösningsmetoden (4 i fallet RK4) och  $C_1$  och  $C_2$  är konstanter. I modellen är

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = \infty \quad (5.2)$$

och ett minimalt fel, (dock större än 0), ges för något  $h > 0$ . För att finna detta jämförs logaritmen av differensen mellan den numeriska lösningen (i samma tidpunkt) för olika tidssteg  $h$  enligt ett särskilt schema. Se Hubbard och West [13] för den exakta metoden.

Resultatet av dessa undersökningar blev att det optimala tidssteget var  $h \approx 2^{-10} \approx 0,001$  s, så avrundningsfel ska därav inte utgöra ett problem färann vid än mindre tidssteg.

Detta avrundningsfel introduceras emellertid till ett kaotiskt system. Låt konservativt anta att divergensen som orsakad av avrundningsfelet följer  $\lambda_1$  större än någon MLE uppmätt i resultaten, samt att avrundningen har maximalt utslag ( $E_{\text{avr}} = 5 \cdot 10^{-16}$  rad) i varje tidssteg och i samma riktning som det existerande felet. Detta ger följande rekursionsekvation för felet:

$$\delta(t+h) = \delta(t) \cdot e^{\lambda_1 h} + E_{\text{avr}}, \quad (5.3)$$

där  $\delta(t)$  beskriver fasrumsavståndet mellan den sanna lösningen och denna tänkta numeriska. Den första termen är fjärilseffekten och den andra termen är avrundningen per tidssteg.

Skriv om med  $\delta_n = \delta(nh)$  och sätt  $r = e^{\lambda_1 h}$ :

$$\delta_{n+1} = r\delta_n + E_{\text{avr}}, \quad \delta_0 = 0 \quad (5.4)$$

Lösningen till den motsvarande homogena ekvationen är  $\delta_n = Cr^n$ . Till den inhomogena ekvationen (5.4), ansätt partikulärlösning  $\delta_n = B$ , vilket efter insättning ger:

$$B = rB + E_{\text{avr}} \quad (5.5)$$

Lös ut B:

$$B = \frac{E_{\text{avr}}}{1 - r} = -\frac{E_{\text{avr}}}{r - 1} \quad (5.6)$$

Den allmänna lösningen (summan av homogen och inhomogen lösning) blir av detta

$$\delta_n = Cr^n - \frac{E_{\text{avr}}}{r - 1}. \quad (5.7)$$

Begynnelsevillkoret  $\delta_0 = 0$  ger  $C = -B$  vilket insatt och faktoriserat ger

$$\delta_n = \frac{E_{\text{avr}}}{r - 1}(r^n - 1) \quad (5.8)$$

Detta översatt i kontinuerlig tid blir följande:

$$\delta(t) = \frac{E_{\text{avr}}}{r - 1}(r^{t/h} - 1) = \frac{E_{\text{avr}}}{e^{\lambda_1 h} - 1}(e^{\lambda_1 h \cdot t/h} - 1) = \frac{E_{\text{avr}}}{e^{\lambda_1 h} - 1}(e^{\lambda_1 t} - 1) \quad (5.9)$$

Sätt in numeriska värden  $\lambda_1 = 2,5 \text{ s}^{-1}$  (strax över det största uppmätta värdet),  $E_{\text{avr}} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ rad}$ ,  $h = 0,001 \text{ s}$  och  $t = t_{\text{stopp}} = 10 \text{ s}$ .

$$\delta(t_{\text{stopp}}) = \frac{5 \cdot 10^{-16}}{e^{0,0025} - 1} \cdot (e^{2,5 \cdot 10} - 1) = 0,014 \text{ rad} \quad (5.10)$$

Detta fel är baserat på mycket konservativa antaganden; avrundningsfelet är snarare spritt runt 0 på sådant sätt att det ibland tar ut det existerande felet, och  $\lambda_1 = 2,5$  uppnås inte av någon dubbelpendel så som studerad här. Trots det är felet klart mindre än något som är avgörande för huruvida ett överslag sker eller inte.

### Konfidensintervall för dimensionsmått

I resultatdelen redogjordes för en modell för att beskriva konfidensintervallet för dimensionsmåttet, baserat på antagande om normal fördelning i log-log-grafen. En ofta lyft punkt vad gäller fel då fraktaldimensioner uppskattas är urvalet av punkter. Detta kan exempelvis gälla hur många punkter som ska inkluderas i extremen för särskilt stora lådor/passarlängder eller särskilt små lådor/passarlängder. För att undersöka detta valdes ett antal kombinationer av systemparametrar ut godtyckligt och det testades att ta bort olika antal punkter från vardera ände av grafen. Inget systematiskt fel sågs med detta, utan värdena var spridda symmetriskt och i alla observerade fall inom 0,05 från det använda mätvärdet.

## Konfidensintervall för MLE

Numeriska undersökningar gjordes av MLE för ett antal olika kombinationer av systemparametrar och begynnelsevärden. I mätserier där MLE beräknades per omskalning (motsvarande  $N = 1$ ) sågs att MLE hade en nära normal fördelning med varierande standardavvikelse, men vilken aldrig översteg  $\sigma = 0,8 \text{ s}^{-1}$ . När detta sedan undersöktes för  $N = 25$  ficks att standardavvikelsen inte översteg  $\sigma = 0,1 \text{ s}^{-1}$ . Om centrala gränsvärdessatsen antas kunna appliceras ges att standardavvikelsen för  $N = 100$  borde understiga hälften av detta, vilket då ger standardavvikelsen  $\sigma = 0,05 \text{ s}^{-1}$ .

För lägesmåtten borde felsmarginalen vara mindre. Detta undersöktes numeriskt, enligt beskrivet i resultatdelen, genom att jämföra lägesmåtten för samma  $\sigma$  och  $\mu$  men olika bredd på rutnätet av begynnelsevillkor för MLE. Dessa undersökningar gav konsekvent en standardavvikelse mindre än  $\sigma = 0,05 \text{ s}^{-1}$ .

## Godtyckligt valda parametervärden

Som nämnt valdes upplösningen av begynnelsevärden för MLE till  $128 \times 128$ . Inverkan av detta val som gjordes nästan uteslutande med hänsyn till beräkningstid undersöktes som beskrivet, men ett antal liknande val har också gjorts:

- I algoritmen för MLE valdes  $\delta_0 = 10^{-7}$  rad och  $D = 10^{-4}$  rad.
- Ursprungligt separation i MLE-algoritm fås genom att förflytta endast  $\alpha$ .
- Upplösningen för överslagsmängderna valdes till  $2^{13} \times 2^{13}$  rutor.
- Utgångspunkten till dubbelpendlarna är att  $l_2 = 1 \text{ m}$  och  $m_2 = 1 \text{ kg}$ .
- Simuleringstiden för överslagsmängder valdes till  $t_{\text{stopp}} = 10 \text{ s}$ .

Det första valet kom från det som skrevs av Murison [11], men testning genomfördes att variera  $\delta_0$  och  $D$  utan märkbar systematisk påverkan på MLE. Den andra punkten testades likaså med samma resultat.

Den tredje valdes med hänsyn till beräkningsbördan, men det är inget alls ovanligt att välja upplösning av en approximerad fraktal utifrån tekniska möjligheter. Detta görs exempelvis inom bildanalys.

De två sista valdes godtyckligt och utan särskilt motivering för att kunna avgränsa arbetet till färre testfall.

### 5.2.2 Metodens giltighet

Vad beträffar metodens validitet till besvarandet av frågeställningarna, så är existerar få andra sätt att bestämma fraktaldimension för såpass komplexa fractaler som överslagsmängderna än att beräkna dem numeriskt. Även algoritmerna för MLE är direkt relevanta till divergenshastigheten för dubbelpendeln, och så som formulerad beskriver den exakt det den är menad att beskriva, i att den mäter hur snabbt närliggande banor divergerar.

Metodernas reliabilitet har demonstrerats dels i hur tydlig korrelationen mellan MLE och dimension har visats, samt de små felsmarginalerna för dessa två. Passardimension korrelerar väl med låddimension, vilket stöder att de båda är korrekt formulerade och implementerade. I och med metodens numeriska natur är experimenten reproducerbara och vidare ter sig datan på förutsägbara sätt.

### 5.2.3 Metodförbättringar

Ett antal förändringar till arbetets metodik föreslås nedan:

- Olika tidssteg skulle kunna jämföras direkt för att tydligare kunna utesluta eventuella fel som ett för stort tidssteg skulle kunna föra med sig.
- Fraktalerna skulle kunna genereras med högre upplösning för att avgöra till vilken grad statistisk självlikhet gäller över än mindre skalor än de studerade.
- Fler mellanliggande värden för systemparametrar skulle kunna undersökas för att avgöra hur kontinuerligt MLE och dimension varierar då systemparametrar ändras.

## 5.3 Resultaten i relation till tidigare forskning och teori

### 5.3.1 Fraktaler ur överslagsmängder

Resultaten överensstämmer med de som erhölls av Heyl [8] i den mån att överslagsmängden  $\Phi_T(1, 2)$  för någon tid  $T$  kan ge en fraktal. I undersökningarna i denna rapport användes ett mindre  $T$  än vad som gjordes av Heyl [8]. Därav kan de specifika värdena för dimensionerna inte jämföras.

### 5.3.2 Inverkan på fraktaler genom val av begynnelsevillkor

Överslagsmängder  $\Phi_T(\sigma, \mu)$  med andra parametrar än  $\sigma = 1$  och  $\mu = 2$  har inte studerats i den allmänna litteraturen. Däremot existerar teori för hur andra dimensioner av fraktaler i andra system påverkas under variation av parametrar.

### 5.3.3 Koppling mellan Lyapunov-exponent och dimension av fraktaler

Ingen tidigare studie har undersökt kopplingen mellan den maximala Lyapunov-exponenten och fraktaldimensioner av mängder av begynnelsevärden som uppvisar givna kriterium, för något system.

Däremot existerar Kaplan-Yorke-dimensionen som koncept för differensekvationer, som kopplar Lyapunov-spektrat för systemet till dimensionen för attraktorn till systemet [7]. Formuleringen av Kaplan-Yorke-dimensionen är nära besläktad i att även den ger en större dimension då Lyapunov-spektrat är förskjutet mot högre värden, men dimensionen som uppmäts är den av systemets attraktorer. För dubbelpendelsystemet existerar ingen universell attraktor, och inte heller något universellt Lyapunov-spektrum, ens per kombination av systemparametrar. Men existensen av Kaplan-Yorke-förmodan innebär oavsett en etablerad jämförelse mellan dimensioner och Lyapunov-exponenter.

## 5.4 Framtid

### 5.4.1 Förändringar och förfiningar

Arbetets resultat är baserade på en stor mängd beräkningar, och datamängden har begränsats av såväl beräkningskraft som tid som möjligheter att redovisa fullständiga data. Vidare studier skulle kunna förbättra säkerheten i slutsatserna, genom att ägna problemet mer beräkningskraft. Detta skulle kunna ske genom följande:

- Fler kombinationer av systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$  skulle kunna undersökas, för att ge större datagrund för korrelationen mellan MLE och dimension. Slumpfaktorer skulle kunna förklaras än mindre sannolika som förklaring för resultatet. Fler kombinationer skulle dessutom ge insikt i felsmarginalen för dimensionsmåtten, då kontinuiteten av dimensionens beroende av  $\sigma$  och  $\mu$  görs mer uppenbar.
- Tidssteget  $h$  skulle kunna minskas för att säkerställa att simuleringarna på tillfredsställelande sätt beskriver dubbelpendelns beteende över längre tid.
- Simulerigstiden  $t_{\text{stopp}}$ , skulle kunna varieras som ett första steg till att undersöka fenomenets potentiella universitalitet.
- Antalet nedskalningar  $N$  för framtagning av MLE skulle kunna ökas för att ge mindre statistisk spridning av MLE.
- Andra metoder skulle kunna undersökas för framtagning av MLE och dimensionsmått.
- Ytterligare dimensionsmått skulle kunna prövas.
- Andra urval av fractaler från dubbelpendeln skulle kunna prövas, exempelvis unionen av alla kustlinjer. Det senare gjordes i testningsfasen för detta arbete vilket visade på en aningen större dimension än för innerkustlinjen. Men med hänsyn till beräkningstid uteslöts det från arbetet.
- Genom att istället för att för att ta medeltillväxthastigheten för felet mellan två till färrummet sett närliggande pendlar, ta det geometriska medelvärdet av den största derivatan längs en bana, kan man övergå till det gränsvärde med infinitesimala fel som MLE är definierad för. Den metod som används här tenderar underskata MLE, men är också mer mottaglig för andra typer av störningar Peitgen, Jürgens och Saupe [6]. Med metoder baserade på derivatan kan resultatet fastställas mer entydigt.
- Man skulle utöver MLE;  $\lambda_1$ , kunna ta hänsyn till förhållandet mellan alla Lyapunov-exponenter,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , och  $\lambda_4$ . Dessas värden och proportioner skulle möjligtvis kunna ge korrelation med dimensionsmåtten.

### 5.4.2 Breddning av arbetet

Det skulle finnas intresse i att undersöka liknande förhållanden för andra kaotiska system med kvalitativa beteenden snarlika dubbelpendelns överslag, för att se om sambandet mellan fractaldimensionen av mängder av begynnelsevillkor som leder till givet beteende och systemets maximala Lyapunov-exponent är universellt mellan olika system, eller om det snarare är begränsat till dubbelpendelsystemet.

Enligt hypotes och diskussion skulle det tänkas att samma argumentation kan appliceras på kaotiska system i allmänhet, men experimentellt stöd för detta saknas. Intresse skulle alltså finnas i att undersöka detta.

### 5.4.3 Användningsområden

Vad det gäller användningsområden måste arbetet ses som grundforskning, och det kan lätt inses att mycket återstår för att se om liknande förhållanden existerar även i andra system. Dock har det nu visats att det, i alla fall i vissa system, går att uppskatta MLE baserat på fraktaldimensionerna av rummen av dess utfall. I sådant fall att det visar sig möjlig, lär det i fall där ett stort antal initialtillstånd är mätbara men MLE är svårt att beräkna direkt, vara möjligt att uppskatta MLE med denna metod. Avvärvningsområdena för MLE är många; vet man hur bra ett system går att förutsäga så kan man justera sina säkerhetsmarginaler därefter.

Ett exempel skulle vara att observera förloppet av vädret på olika platser med olika förhållanden som lufttryck, luftfuktighet etc., varpå det går att beräkna fraktaldimensioner, uppskatta MLE med hjälp av tidigare insamlade data, och ge förbättrade tillförlitlighetsvärden. Detta är inte bara användbart för att bestämma när man ska planera badturen, utan också för att bland mycket annat öka säkerheten vid global handel till havs.

Ett annat exempel är biltrafiken där man skulle kunna analysera till exempel trafiktäthet i olika områden och beräkna fraktaldimensionen för att uppskatta hur tillförlitliga tidsprognoserna är, och på så sätt avgöra vilken extra tidsmarginal som är lämplig utöver tiden som prognosen ger.

Och kanske av störst ekonomiskt intresse: genom att undersöka utfallet av olika aktier, sorterat över till exempel ekonomiska sektorer och beräkna fraktaldimensionen av till exempel prisändringarna skulle man kunna få ett nytt sätt att uppskatta instabiliteten på aktiemarknaden.

Detta är självklart endast spekulationer då det återstår att se om samma fenomen ens går att återfinna bland andra kriterier hos dubbelpendeln. Men givet resultaten torde det finnas anledning att tro att det gör det, i alla fall för vissa system. Värdet av den här rapporten har framförallt varit att visa på nya möjligheter till fruktsam forskning på området.

# REFERENSLISTA

- [1] Edward Lorenz. "Deterministic nonperiodic flow". I: *J. Atmos. Sci.* 20.130 (1963). Tillgänglig: [https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469\\_1963\\_020\\_0130\\_dnf\\_2\\_0\\_co\\_2.xml?tab\\_body=pdf](https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml?tab_body=pdf). (hämtad 1.3.2021).
- [2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos. With Applications to Physics, Biology, and Engineering*. Cambridge: Perseus Books Publishing, LLC, 1994. ISBN: 0-7382-0453-6.
- [3] Benoit Mandelbrot. *Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman och Company, 1977.
- [4] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. West Sussex: Wiley, 2003. ISBN: 0-470-84861-8.
- [5] James W. Baish och Rakesh K. Jain. "Fractals and Cancer". I: *American Association for Cancer Research* 60.14 (2000). Tillgänglig: <https://cancerres.aacrjournals.org/content/60/14/3683>. (hämtad 25.1.2021).
- [6] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens och Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. New York: Springer, 2004. ISBN: 978-1-4684-9396-2.
- [7] James L. Kaplan och James A. Yorke. "Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations". I: *Physica* (1979). Tillgänglig: [http://yorke.umd.edu/Yorke\\_papers\\_most\\_cited\\_and\\_post2000/1979\\_C11\\_Kaplan\\_multidimensional.pdf](http://yorke.umd.edu/Yorke_papers_most_cited_and_post2000/1979_C11_Kaplan_multidimensional.pdf). (hämtad 25.1.2021).
- [8] Jeremy S. Heyl. *The Double Pendulum Fractal*. 2008. Tillgänglig: <https://www.famaf.unc.edu.ar/~vmarconi/fiscomp/Double.pdf>. (hämtad: 7.11.2020).
- [9] Kristian Gustafsson. *Chaos and Lyapunov Exponents*. 2018. Tillgänglig: <http://fy.chalmers.se/~f99krgu/dynsys/DynSysLecture10.pdf>. (hämtad: 30.10.2020).
- [10] Alan Wolf m. fl. "Determining Lyapunov exponents from a time series". I: *Physica* 16.3 (1985). Tillgänglig: <http://chaos.utexas.edu/manuscripts/1085774778.pdf>. (hämtad 21.12.2020).
- [11] Marc A. Murison. *Notes on how to numerically calculate the maximum Lyapunov exponent*. 1995. Tillgänglig: <http://murison.alpheratz.net/papers/Notes/LyapCalc/LyapCalc.pdf>. (hämtad: 9.11.2020).
- [12] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani och Jean-Marie Strelcyn. "Kolmogorov entropy and numerical experiments". I: *Phys. Rev. A* 14.2338 (1976).
- [13] J. H. Hubbard och B. H. West. *Differential Equations. A Dynamical Systems Approach*. Vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1991. ISBN: 3-540-97286-2.

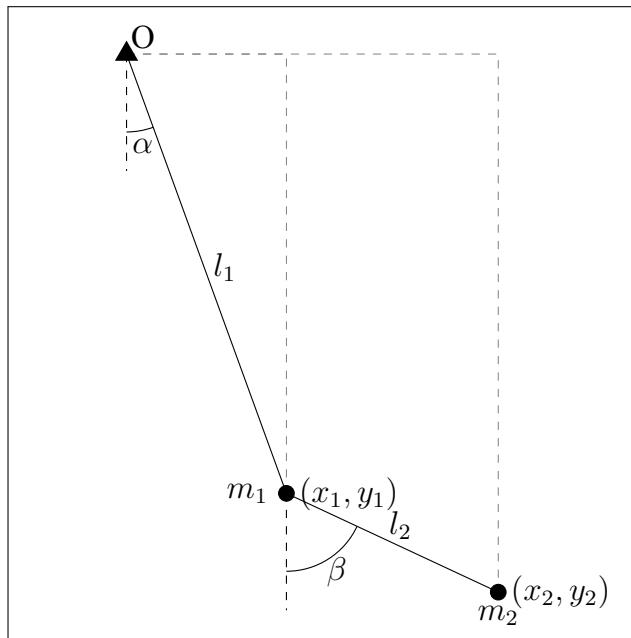
**BILAGOR**

# A. Härledning av rörelseekvationer

Spännkrafterna i dubbelpendeln försvårar härledning av rörelseekvationerna genom newtonisk mekanik. Emellertid kan den potentiella energin och rörelseenergin framtas relativt enkelt, vilket gör lagrangemekanik lämplig för härledningen.

## Framtagning av lagrangefunktionen

Börja med att utgå från ett kartesiskt koordinatsystem med ökande  $y$  uppåt och ökande  $x$  åt höger som har origo i  $O$ . Låt  $(x_1, y_1)$  och  $(x_2, y_2)$  beteckna koordinaterna för  $m_1$  respektive  $m_2$ . Se figur A.1. Låt vidare farterna  $v_1$  och  $v_2$  vara beloppen av hastigheten av  $m_1$  respektive  $m_2$ .



Figur A.1: Diagram över dubbelpendel

Från detta erhålls att

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \alpha \\ y_1 = -l_1 \cos \alpha \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

samt

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta \implies \dot{x}_2 = \dot{\alpha} l_1 \cos \alpha + \dot{\beta} l_2 \cos \beta \\ y_2 = -l_1 \cos \alpha - l_2 \cos \beta \implies \dot{y}_2 = \dot{\alpha} l_1 \sin \alpha + \dot{\beta} l_2 \sin \beta \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

För att ta fram lagrangefunktionen krävs potentiell och kinetisk energi uttryckt i de generaliserade koordinaterna  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  och de generaliseringarade hastigheterna  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$ .

Den potentiella energin beror av  $y_1$  och  $y_2$ .

$$V = E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -g((m_1 + m_2)l_1 \cos \alpha + m_2 l_2 \cos \beta) \quad (\text{A.3})$$

Den kinetiska energin beror av hastigheterna  $v_1$  och  $v_2$  för  $m_1$  respektive  $m_2$ .

$$E_k = T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (\text{A.4})$$

Hastigheterna kan uttryckas i kända koordinater på följande sätt:

$$\begin{cases} v_1 = l_1\dot{\alpha} \\ v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Uttryck  $\dot{x}_2$  och  $\dot{y}_2$  i  $\mathbf{q}$  och  $\dot{\mathbf{q}}$  genom (A.2):

$$\implies \begin{cases} v_1^2 = l_1^2\dot{\alpha}^2 \\ v_2^2 = (\dot{\alpha}l_1 \cos \alpha + \dot{\beta}l_2 \cos \beta)^2 + (\dot{\alpha}l_1 \sin \alpha + \dot{\beta}l_2 \sin \beta)^2 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Den nedre raden kan skrivas om till

$$v_2^2 = \dot{\alpha}^2l_1^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \dot{\beta}^2l_2^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \quad (\text{A.7})$$

Använd den pythagoreiska identiteten för de två första termerna och skriv om parentesen i den sista med additionsformeln för cosinus. Det ger de slutgiltiga formlerna för  $v_1^2$  och  $v_2^2$ :

$$v_1^2 = l_1^2\dot{\alpha}^2 \quad (\text{A.8})$$

$$v_2^2 = \dot{\alpha}^2l_1^2 + \dot{\beta}^2l_2^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2 \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{A.9})$$

Sätt in i (A.4). Då får att

$$T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2 + 2l_1l_2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)). \quad (\text{A.10})$$

Omgruppera parenteserna för isolera  $\dot{\alpha}^2$  och  $\dot{\beta}^2$ :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\beta}^2 + m_2l_1l_2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta). \quad (\text{A.11})$$

Sedan båda energifunktioner uttrycks i de generaliserade koordinaterna kan lagrangefunktionen  $L$  bildas enligt definition:

$$L = T - V = T(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) - V(\alpha, \beta). \quad (\text{A.12})$$

## Euler-Lagranges ekvation

Från detta gäller Euler-Lagranges ekvation som fastställer för potentialdrivna system (såsom dubbelpendeln utan förluster) att

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad (\text{A.13})$$

där  $\mathbf{q}$  är vektorn som beskriver de generaliserade koordinaterna. Detta ska tolkas som att ekvationen gäller för var och en av koordinaterna i  $\mathbf{q}$  var för sig, vilket ger ett ekvationssystem med  $n$  ekvationer, där  $n$  är antalet koordinater i  $\mathbf{q}$ .

## Omskrivning av Euler-Lagranges ekvation för $\alpha$

Euler-Lagranges ekvation för  $\alpha$  ger.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \alpha}. \quad (\text{A.14})$$

Ekvationen kan nu utvecklas. För vänsterledet kommer termer som är konstanta med avseende på  $\dot{\alpha}$  försummas, då den partiella derivatan med avseende på  $\dot{\alpha}$  är noll.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} L \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left( \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\alpha}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) \right) \quad (\text{A.15})$$

Använd potenslagen för derivering:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left( (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\alpha} + m_2 l_1 l_2 \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) \quad (\text{A.16})$$

Första termen ges enkelt då allt framför  $\dot{\alpha}$  är konstant. Inför den tillfälliga funktionen  $\gamma = (\alpha - \beta)$  och använd produktregeln, sedan kedjeregeln, på den andra termen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\alpha} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\beta} \cos \gamma + m_2 l_1 l_2 \dot{\beta} \cdot (-\sin \gamma) \cdot \dot{\gamma} \quad (\text{A.17})$$

Återsubstituera  $\gamma = (\alpha - \beta)$  och  $\dot{\gamma} = (\dot{\alpha} - \dot{\beta})$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\alpha} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - m_2 l_1 l_2 \dot{\beta} \cdot \sin(\alpha - \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \quad (\text{A.18})$$

Enligt samma princip kan högerledet i (A.14) skrivas om genom att försumma termer konstanterna med avseende på  $\alpha$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + l_1 g (m_1 + m_2) \cos \alpha) \quad (\text{A.19})$$

Använd produkt- och kedjeregeln.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha - \beta) - l_1 g (m_1 + m_2) \sin \alpha \quad (\text{A.20})$$

Från  $\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha - \beta) = 1$  ges slutligen att högerledet är:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - l_1 g (m_1 + m_2) \sin \alpha \quad (\text{A.21})$$

Allt sammantaget ges den första rörelsekvationen:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\alpha} + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} - \dot{\beta} m_2 l_1 l_2 \sin(\alpha - \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = \\ = -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - l_1 g (m_1 + m_2) \sin \alpha. \quad (\text{A.22})$$

Detta kan förenklas till

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\alpha} + m_2 l_2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} = -\dot{\beta}^2 m_2 l_2 \sin(\alpha - \beta) - g(m_1 + m_2) \sin \alpha. \quad (\text{A.23})$$

För ytterligare förenkling kan ekvationen divideras med  $l_2 m_2$  och substitutionerna  $\mu = (1 + \frac{m_1}{m_2})$  och  $\sigma = \frac{l_1}{l_2}$  införas. Den slutgiltiga första ekvationen blir då:

$$\mu \sigma \ddot{\alpha} + \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} = -\dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) - \frac{g}{l_2} \mu \sin \alpha \quad (\text{A.24})$$

## Omskrivning av Euler-Lagranges ekvation för $\beta$

På motsvarande sätt utvecklas Euler-Lagranges ekvation för  $\beta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \beta} \quad (\text{A.25})$$

Återigen, försumma termer konstanta med avseende på  $\dot{\beta}$ , och betrakta vänsterledet.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}} \left( \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\beta}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) \right) \quad (\text{A.26})$$

Använd potenslagen.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{d}{dt} \left( m_2 l_2^2 \ddot{\beta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \right) \quad (\text{A.27})$$

Använd produktregeln.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\beta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \frac{d}{dt} (\cos(\alpha - \beta)) \quad (\text{A.28})$$

På samma sätt som för ekvationen för  $\alpha$ , använd funktionen  $\gamma = (\alpha - \beta)$ , utför kedjeregeln och återsubstituera.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\beta} + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} - m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \quad (\text{A.29})$$

Betrakta högerledet i (A.29) genom att försumma termer konstanta med avseende på  $\beta$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + g m_2 l_2 \sin \beta \right) \quad (\text{A.30})$$

Applicera kedjeregeln med innerfunktionen  $\gamma = (\alpha - \beta)$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} (\alpha - \beta) - g m_2 l_2 \sin \beta \quad (\text{A.31})$$

Från  $\frac{\partial}{\partial \beta} (\alpha - \beta) = -1$  fås det slutgiltiga högerledet:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - g m_2 l_2 \sin \beta \quad (\text{A.32})$$

Detta ger resultatet från Euler-Lagranges ekvation i  $\beta$ :

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\beta} + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} - m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) &= \\ &= m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - g m_2 l_2 \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Detta kan förenklas:

$$m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} + m_2 l_2^2 \ddot{\beta} = m_2 l_1 l_2 \sin(\alpha - \beta) \dot{\alpha}^2 - g m_2 l_2 \sin \beta. \quad (\text{A.34})$$

Dividera med  $m_2 l_2^2$  och substituera  $\sigma$  och  $\mu$ , vilket ger den slutgiltiga andra ekvationen:

$$\sigma \cos(\alpha - \beta) \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} = \sigma \sin(\alpha - \beta) \dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta \quad (\text{A.35})$$

## Omskrivning för att lösa ut $\ddot{\alpha}$ och $\ddot{\beta}$

Nu har följande två ekvationer erhållits:

$$\begin{cases} \mu\sigma\ddot{\alpha} + \cos(\alpha - \beta)\ddot{\beta} &= -\sin(\alpha - \beta)\dot{\beta}^2 - \frac{g}{l_2}\mu \sin \alpha \\ \sigma \cos(\alpha - \beta)\ddot{\alpha} + \ddot{\beta} &= \sigma \sin(\alpha - \beta)\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Att lösa ut  $\ddot{\alpha}$  och  $\ddot{\beta}$  i termer av  $\alpha, \beta, \dot{\alpha}$  och  $\dot{\beta}$  ur (A.36) är analogt med att lösa (A.36) som ett linjärt ekvationssystem med  $\ddot{\alpha}$  och  $\ddot{\beta}$  som obekanta. Först kan (A.36) uttryckas med matrismultiplikation. Låt  $C = \cos(\alpha - \beta)$  och  $S = \sin(\alpha - \beta)$ .

$$\begin{bmatrix} \mu\sigma & C \\ C\sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S\dot{\beta}^2 - \frac{g}{l_2}\mu \sin \alpha \\ S\sigma\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Subtrahera  $C$  gånger nedre raden från övre raden.

$$\begin{bmatrix} \sigma(\mu - C^2) & 0 \\ C\sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(C \sin \beta - \mu \sin \alpha) \\ S\sigma\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Multiplicera den övre raden med  $-\frac{C}{\mu - C^2} = \frac{C}{C^2 - \mu}$ .

$$\begin{bmatrix} -C\sigma & 0 \\ C\sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-SC(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}C(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \\ S\sigma\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Addera den övre raden till den nedre raden.

$$\begin{bmatrix} -C\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-SC(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}C(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \\ S\sigma\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2} \sin \beta + \frac{-SC(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}C(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Faktorisera ut  $C$  ur bråket i övre raden av högerledet och sätt nedre raden på gemensamt bråkstreck.

$$\begin{bmatrix} -C\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \cdot \frac{-S(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \\ \frac{S\sigma(C^2 - \mu)\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{l_2}(C^2 - \mu) \sin \beta - SC(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}C(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Utveckla parenteserna i täljaren i nedre raden, stryk termer som tar ut varandra och faktorisera till nya termer.

$$\begin{bmatrix} -C\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \cdot \frac{-S(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(C \sin \beta - \mu \sin \alpha)}{C^2 - \mu} \\ \frac{-S(\sigma\mu\dot{\alpha}^2 + C\dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(-\mu C \sin \alpha + \mu \sin \beta)}{C^2 - \mu} \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Dividera den övre raden med  $-C\sigma$  och förläng kvoten i den nedre raden med  $-\frac{1}{\mu}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S(C\sigma\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\mu \sin \alpha - C \sin \beta)}{\sigma(C^2 - \mu)} \\ \frac{S(\sigma\dot{\alpha}^2 + \frac{C}{\mu}\dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(C \sin \alpha - \sin \beta)}{1 - \frac{C^2}{\mu}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

När detta gjorts ges systemet av differentialekvationer på enkel form:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \cos^2(\alpha-\beta)\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\mu \sin \alpha - \cos(\alpha-\beta) \sin \beta)}{\sigma(\cos^2(\alpha-\beta) - \mu)} \\ \ddot{\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\mu} \cos(\alpha-\beta)\dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\cos(\alpha-\beta) \sin \alpha - \sin \beta)}{1 - \frac{1}{\mu} \cos^2(\alpha-\beta)} \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Givet beteckningen  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \implies \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}$  kan (A.44) förkortas till

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (\text{A.45})$$

där  $\mathbf{F}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  definieras till vektorn som ges av högerled 1 och högerled 2, i den ordningen, då  $l_2 = L$ . Låt vidare

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A.46})$$

stå för denna funktion då  $L = l_2 = 1 \text{ m}$ .

# B. Bevis till sats 2.2

## Satsen som shall bevisas

**Sats B.1.** Antag att ekvationssystemet (B.1) för givna  $\mu$ , stavlängder  $l_1$  och  $l_2$  och begynnelsevärden  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$  har lösning  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t)$ . Då kommer lösningen  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  till systemet med samma  $\mu$ , begynnelsevärden  $\tilde{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \cdot \sqrt{k}$  och stavlängder  $l_1/k$  respektive  $l_2/k$  vara  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{g}(t \cdot \sqrt{k})$ .

## Rörelseekvationerna

Rörelseekvationerna för vilka satsen gäller är följande:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \cos^2(\alpha-\beta)\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\mu \sin \alpha - \cos(\alpha-\beta) \sin \beta)}{\sigma(\cos^2(\alpha-\beta)-\mu)} \\ \ddot{\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)(\sigma \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{\mu} \cos(\alpha-\beta)\dot{\beta}^2) + \frac{g}{l_2}(\cos(\alpha-\beta) \sin \alpha - \sin \beta)}{1 - \frac{1}{\mu} \cos^2(\alpha-\beta)} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

*Bevis.* Betrakta följande lemma:

**Lemma B.1.** Antag att systemet

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

med begynnelsevärden  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  har lösning  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t)$ . Då gäller att funktionerna

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\sqrt{k}t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k}t) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

beskriver en lösning till systemet

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}{\sqrt{k}}\right) \cdot k \iff \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{\tilde{\mathbf{y}}}{\sqrt{k}}) \cdot k \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{y}}, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

för begynnelsevärde  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{y}_0$ .

*Bevis.* Bekräfta den nya lösningen till den modifierade ekvationen genom att sätta in (B.3) i (B.4):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{d}{dt}(\sqrt{k} \cdot \mathbf{r}'(\sqrt{k}t)) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{\tilde{\mathbf{y}}}{\sqrt{k}}) \cdot k = \mathbf{f}(g(\sqrt{k}t), \mathbf{r}(\sqrt{k}t)) \cdot k \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{d}{dt}(g(\sqrt{k}t)) = \tilde{\mathbf{y}} = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k}t) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Det som ska bekräftas är alltså:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\sqrt{k} \cdot \mathbf{r}'(\sqrt{k}t)) = \mathbf{f}(g(\sqrt{k}t), \mathbf{r}(\sqrt{k}t)) \cdot k \\ \frac{d}{dt}(g(\sqrt{k}t)) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k}t) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Vänsterleden skrivs om genom derivering:

$$VL_1 = \frac{d}{dt}(\sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k}t)) = k \cdot \mathbf{r}'(\sqrt{k}t) \quad (B.7)$$

$$VL_2 = \frac{d}{dt}\mathbf{g}(\sqrt{k}t) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{g}'(\sqrt{k}t) \quad (B.8)$$

Högerleden i ekvationerna skrivs om med genom antagandet om ursprunglig lösning till det ursprungliga systemet, d.v.s. följande:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(t), \mathbf{r}(t)) \\ \mathbf{g}'(t) = \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}. \quad (B.9)$$

Insättning av ekvation 1, respektive ekvation 2 ger direkt

$$HL_1 = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\sqrt{k}t), \mathbf{r}(\sqrt{k}t)) \cdot k = \mathbf{r}'(\sqrt{k}t) \cdot k \quad (B.10)$$

och

$$HL_2 = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k}t) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{g}'(\sqrt{k}t). \quad (B.11)$$

Likhet råder för (B.5), och likhet i begynnelsevärdena är trivial, för från (B.9) fås:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{g}(\sqrt{k} \cdot 0) = \mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(\sqrt{k} \cdot 0) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{r}(0) = \sqrt{k} \cdot \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (B.12)$$

Alltså är begynnelsevärdena enligt antagande, så de modifierade funktionerna löser de modifierade ekvationerna, med givna begynnelsevillkor.

Om  $\mathbf{f}$  är kontinuerlig och alla partiella derivata till  $\mathbf{f}$  är kontinuerliga för alla  $x$  och  $y$  så är lösningen unik. Detta enligt satsen om unika lösningar till enkla differentialekvationer som återfinns i Strogatz [2, s. 149].  $\square$

Från lemmat (B.1) kan nu lösningen  $\mathbf{q}(t)$  för en dubbelpendel med något  $\mu$  och längder  $l_1 = \sigma \cdot L$  och  $l_2 = L$  betraktas. Ansätt nu en lösning  $\tilde{\mathbf{q}}$  till ett system med längder  $\tilde{l}_1 = \sigma \cdot L/k$  och  $\tilde{l}_2 = L/k$ .

Det första systemet har i tidpunkten  $t$  följande andraderivata:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{F}_L(\mathbf{q}(t)), \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (B.13)$$

Enligt den sats som skall bevisas ansätts nu att den föreslagna lösningen  $\tilde{\mathbf{q}}$  till det andra systemet uppfyller att

$$\tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k}) = \mathbf{q}(t), \quad (B.14)$$

men även

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t/\sqrt{k}) = \sqrt{k} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (B.15)$$

Låt betrakta  $\mathbf{q}(t)$  och  $\tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k})$  och jämför funktionerna som ger andraderivata,  $\mathbf{F}_L$  och  $\mathbf{F}_{L/k}$  för respektive tidpunkter. Då rörelseekvationerna (B.1) betraktas kan ses att  $(\dot{\alpha}(t/\sqrt{k}))^2 =$

$k(\dot{\alpha}(t))^2$  samt  $(\dot{\tilde{\beta}}(t/\sqrt{k}))^2 = k(\dot{\beta}(t))^2$ . Även den sista termen i rörelseekvationerna skalas upp med  $k$ , i och med att  $\tilde{l}_2 = l_2/k$ . Faktorn  $k$  kan brytas ut ur högerledet i ekvationen vilket kan formuleras utifrån högerledsfunktionen  $\mathbf{F}_L$  för det första systemet på följande sätt:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t/\sqrt{k}) = \mathbf{F}_{L/k}(\tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k}), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t/\sqrt{k})) = k \cdot \mathbf{F}_L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (\text{B.16})$$

För att göra lemmat direkt applicerbart skall förhållandena (B.14) och (B.15) sättas in i (B.16). Detta ger förhållandet på önskad form:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t/\sqrt{k}) = k \cdot \mathbf{F}_L \left( \tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k}), \frac{\tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \right) \quad (\text{B.17})$$

Uppställd kan detta skrivas:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = k \cdot \mathbf{F}_L \left( \tilde{\mathbf{q}}, \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{\sqrt{k}} \right) \quad (\text{B.18})$$

Från lemmat (B.1), då funktionen  $\mathbf{f}$  sätts som  $\mathbf{f} = \mathbf{F}_L$ , kan det slutledas att

$$\tilde{\mathbf{q}}(t/\sqrt{k}) = \mathbf{q}(t) \iff \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}(t \cdot \sqrt{k}) \quad (\text{B.19})$$

är en lösning till det nya systemet. Vidare gäller av satsen om entydighet, då  $\mathbf{F}_L$  uppfyller kontinuitet och kontinuerliga partiella derivata, att denna lösning är unik. Således följer satsen (B.1).  $\square$

# C. Pseudokod för algoritmer

I denna bilaga beskrivs med pseudokod de algoritmer som används för framtagning av alla data till detta arbete. Psuedokoden illustrerar de generella principerna i varje beräkningssteg, utan hänsyn till mindre programmeringsmässiga detaljer såsom datatyper eller deklarering av variabler.

Den exakta källkod som användes för arbetets framtagning av data kan nås med följande länk: <https://github.com/geckoanton/PendulumFractals>

Notera att för att köra koden krävs Microsoft Visual Studio. Koden använder sig även av SDL, ett multimediasbibliotek med öppen licens. För information och dokumentation, se <https://www.libsdl.org/index.php>

## C.1 Simulering och framtagning av mängder

Algoritmen som följer i denna sektion beskriver förfarandet för framtagning av mängder med kriterium A. För simuleringen användes RK4 för att uppdatera  $\mathbf{q}$  i varje tidsteg, vilket förklaras i större detalj nedan, tills det givna kriteriet uppfylls eller tiden gått ut. Algoritmen ger som utdata vilket av dessa fall som skedde.

### C.1.1 Runge-Kuttametoden av fjärde ordningen

De konkreta beräkningar som gjordes för varje tidssteg var var följande, där tidssteget är  $\Delta t = h$ :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \frac{1}{6}h(\mathbf{k}_{q1} + 2\mathbf{k}_{q2} + 2\mathbf{k}_{q3} + \mathbf{k}_{q4}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{6}h(\mathbf{k}_{v1} + 2\mathbf{k}_{v2} + 2\mathbf{k}_{v3} + \mathbf{k}_{v4}) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Konstanterna ges av:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{v1} = \mathbf{F}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) \\ \mathbf{k}_{q1} = \dot{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{k}_{v2} = \mathbf{F}(\mathbf{q}_n + \frac{\mathbf{k}_{q1}}{2}h, \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\mathbf{k}_{v1}}{2}h) \\ \mathbf{k}_{q2} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\mathbf{k}_{v1}}{2}h \\ \mathbf{k}_{v3} = \mathbf{F}(\mathbf{q}_n + \frac{\mathbf{k}_{q2}}{2}h, \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\mathbf{k}_{v2}}{2}h) \\ \mathbf{k}_{q3} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\mathbf{k}_{v2}}{2}h \\ \mathbf{k}_{v4} = \mathbf{F}(\mathbf{q}_n + \mathbf{k}_{q3}h, \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{k}_{v3}h) \\ \mathbf{k}_{q4} = \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{k}_{v3}h \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Här förkortar funktionen  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) = \mathbf{F}(\alpha_n, \beta_n, \dot{\alpha}_n, \dot{\beta}_n)$  högerleden i rörelseekvationerna (2.12) för  $l_2 = 1$  m. Alltså är  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

### C.1.2 Algoritm för framtagning av mängder

Algoritmen ges för simulering och framtagning av mängd med kriterium A är den som följer nedan:

#### Algoritm C.1: Algoritm för framtagning av mängder genom simulering

**Indata:** Rutbredd  $R$ , tidssteg  $h$ , längd av mätning  $t_{stop}$ , kriterium A

**Utdata:** Rutnät med punkter klassificerade utifrån om de tillhör mängden för kriterium A

```

1 begin
2    $n \leftarrow 2\pi/R$ 
3   Skapa rutnät med  $n \times n$  rutor från  $\alpha, \beta = -\pi$  till  $\pi$ 
4    $\alpha_0 \leftarrow -\pi + R/2$ 
5   while  $\alpha_0 < \pi$  do
6      $\beta_0 \leftarrow -\pi + R/2$ 
7     while  $\beta_0 < \pi$  do
8       Initiera dubbelpendel med systemkonstanter
          $l_1 = \sigma, l_2 = 1, m_1 = \mu - 1, m_2 = 1$  och begynnelsevärde
          $\alpha \leftarrow \alpha_0, \beta \leftarrow \beta_0, \dot{\alpha} \leftarrow 0$  och  $\dot{\beta} \leftarrow 0$ 
9        $t \leftarrow 0$ 
10      Sätt ruta  $(\alpha_0, \beta_0)$  till att inte tillhöra mängden för kriterium A
11      Måla ruta  $(\alpha_0, \beta_0)$  svart
12      while  $t < t_{stop}$  do
13        Uppdatera dubbelpendel ett tidssteg  $h$  framåt med RK4
14        if kriterium A uppfylls then
15          Sätt ruta  $(\alpha_0, \beta_0)$  till att tillhöra mängden för kriterium A
16          Måla ruta  $(\alpha_0, \beta_0)$  vit
17           $t \leftarrow t + h$ 
18        end
19      end
20       $\beta_0 \leftarrow \beta_0 + R$ 
21    end
22     $\alpha_0 \leftarrow \alpha_0 + R$ 
23 end
```

## C.2 Maximal Lyapunov-exponent

**Algoritm C.2:** Algoritm för framtagande av maximal Lyapunov-exponent

**Indata:**  $\sigma, \mu, \alpha_0, \beta_0, \delta_0, D, N, h$

**Utdata:**  $\lambda_1$

```

1 begin
2   Initiera dubbelpendel  $P_{\text{ref}}$  med systemkonstanter
       $l_1 = \sigma, l_2 = 1, m_1 = \mu - 1, m_2 = 1$  och begynnelsevärde  $\alpha_{\text{ref}} \leftarrow \alpha_0, \beta_{\text{ref}} \leftarrow \beta_0,$ 
       $\dot{\alpha}_{\text{ref}} \leftarrow 0, \dot{\beta}_{\text{ref}} \leftarrow 0$ 
3   Initiera dubbelpendel  $P_{\text{test}} \leftarrow P_{\text{ref}}$ 
4    $\alpha_{\text{test}} \leftarrow \alpha_{\text{test}} + \delta_0$ 
5    $t_{\text{tot}} \leftarrow 0$ 
6   for  $i \leftarrow 1$  till  $N$  do
7      $\delta \leftarrow \delta_0$ 
8      $t_i \leftarrow 0$ 
9     while  $\delta < D$  and  $t_i < 20$  do
10       Uppdatera  $P_{\text{ref}}$  ett tidssteg  $h$  framåt med RK4
11       Uppdatera  $P_{\text{test}}$  ett tidssteg  $h$  framåt med RK4
12        $t_i \leftarrow t_i + h$ 
13        $\delta \leftarrow |\phi_{\text{test}} - \phi_{\text{ref}}|$ 
14   end
15    $t_{\text{tot}} \leftarrow t_{\text{tot}} + t_i$ 
16    $a_i \leftarrow \frac{\delta}{\delta_0}$ 
17   Återställ  $P_{\text{test}}$  genom att sätta  $\phi_{\text{test}} \leftarrow \phi_{\text{ref}} + \frac{\phi_{\text{test}} - \phi_{\text{ref}}}{a_i}$ 
18 end
19    $\lambda_1 \leftarrow \frac{1}{t_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N \ln a_i$ 
20   return  $\lambda_1$ 
21 end

```

## C.3 Låddimension

**Algoritm C.3:** Algoritm för framtagning av datapunkter till låddimension

**Indata:** Matris  $M$  över fraktalen  $F$  som ska undersökas, rutbredd  $s$

**Utdata:**  $N_F(s)$

```
1 begin
2    $N \leftarrow 0$ 
3   for  $x \leftarrow 0$  till  $n - 1$  do
4      $\alpha_{\min} \leftarrow -\pi + 2\pi \cdot s \cdot x$ 
5      $\alpha_{\max} \leftarrow -\pi + 2\pi \cdot s \cdot (x + 1)$ 
6     for  $y \leftarrow 0$  till  $n - 1$  do
7        $\beta_{\min} \leftarrow -\pi + 2\pi \cdot s \cdot y$ 
8        $\beta_{\max} \leftarrow -\pi + 2\pi \cdot s \cdot (y + 1)$ 
9       Låt  $R = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ 
10      if  $\exists p \in R \cap M : p \in F$  then
11        |  $N \leftarrow N + 1$ 
12      end
13    end
14  end
15  return  $N$ 
16 end
```

## C.4 Passardimension

**Algoritm C.4:** Algoritm för framtagning av datapunkter till passardimension

**Indata:** Passarlängd  $r$ , rutbredd  $R$ , parametrar för dubbelpendel,  $\sigma$  och  $\mu$

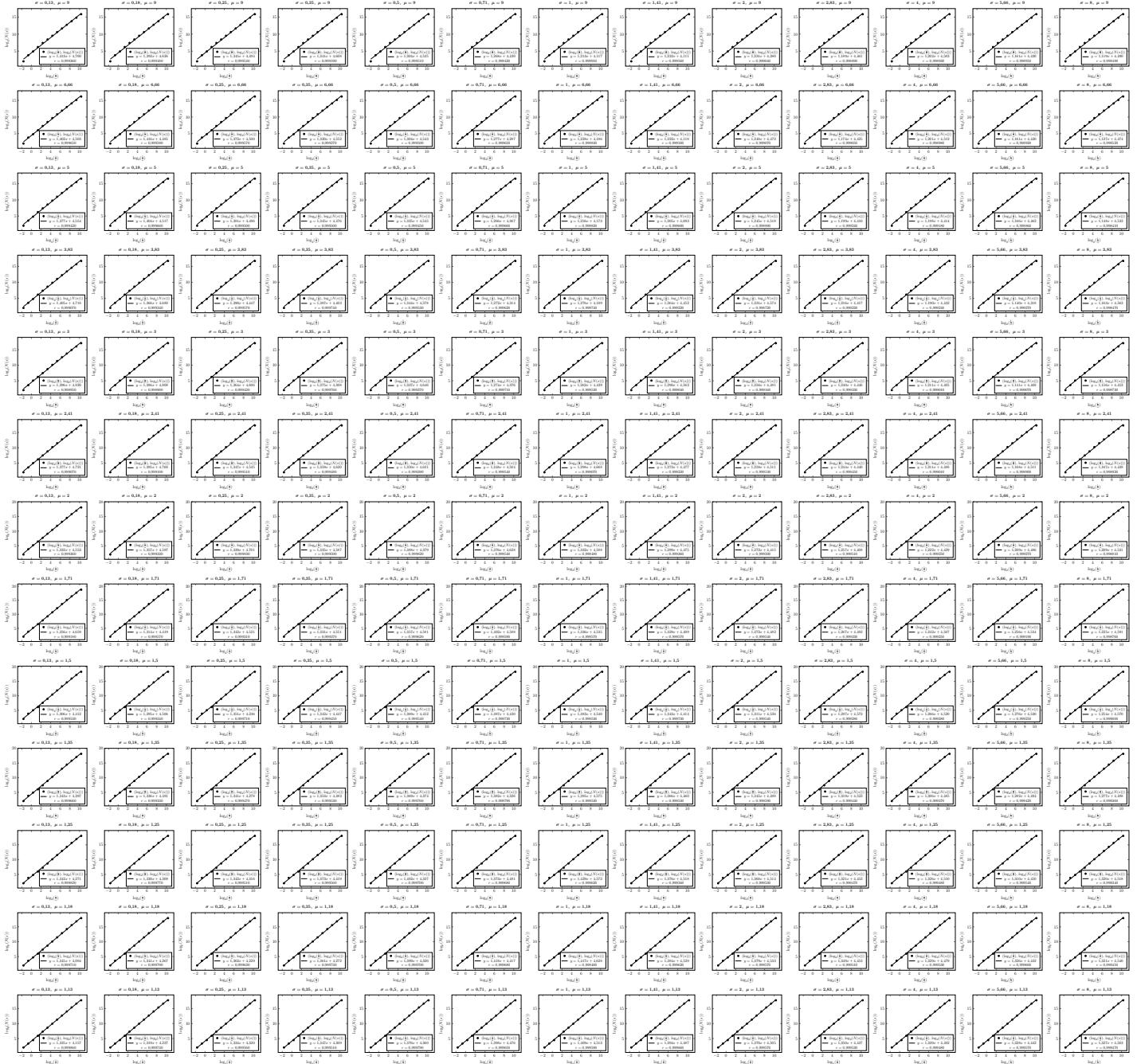
**Utdata:**  $M_F(r)$  för fraktalen  $F$  som ges av  $\sigma, \mu$

```

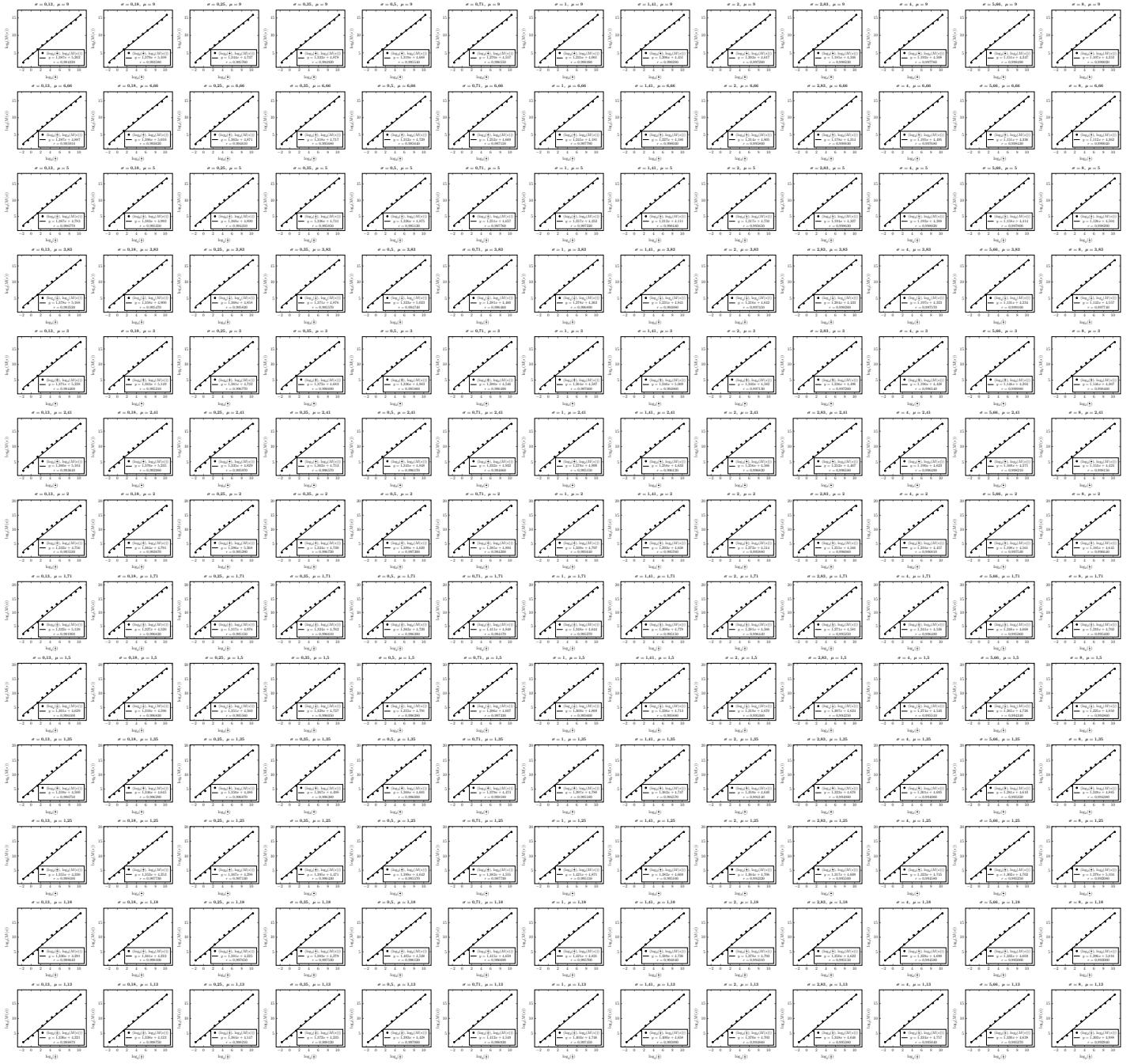
1 begin
2   Function steg() is
3     Vrid stegriktningen 90° medurs
4     Definiera  $p_{\text{test}}$  som ett steg  $R$  i stegriktningen från  $p_{\text{nu}}$ 
5     for rutor  $p_{\text{test}}$  intill  $p_{\text{nu}}$  medsols med början i stegriktning do
6       if  $p_{\text{test}}$  ej utanför rutnät then
7         Simulera dubbelpendel för begynnelsevärde  $(\alpha, \beta) = p_{\text{test}}$ 
8         if  $p_{\text{test}} \in F$  then
9           Sätt stegriktning till riktning från  $p_{\text{nu}}$  till  $p_{\text{test}}$ 
10           $p_{\text{nu}} \leftarrow p_{\text{test}}$ 
11          return
12        end
13      end
14    end
15  end
16  Initiera dubbelpendel med  $l_1 = \sigma$ ,  $l_2 = 1$ ,  $m_1 = \mu - 1$  och  $m_2 = 1$ 
17   $n \leftarrow 2\pi/R$ 
18  Skapa ett  $n \times n$ -rutnät  $(\alpha, \beta)$  från  $\alpha, \beta = -\pi$  till  $\pi$ 
19  /* Höger är positiv  $\alpha$ , uppåt är positiv  $\beta$  */ 
20  if  $\mu\sigma - 1 \geq 0$  then
21     $p_{\text{start}} \leftarrow (0, \pi)$  avrundat till närmaste punkt i rutnätet.
22    /* Startar i mitten på överkanten i rutnätet */ 
23    Sätt stegriktning åt höger, d.v.s.  $(+1, 0)$ 
24  else
25     $p_{\text{start}} \leftarrow (\pi, 0)$  avrundat till närmaste punkt i rutnätet.
26    /* Startar i mitten på högerkanten i rutnätet */ 
27    Sätt stegriktning nedåt, d.v.s.  $(0, -1)$ 
28  end
29   $p_{\text{center}} \leftarrow p_{\text{start}}$ 
30   $p_{\text{nu}} \leftarrow p_{\text{start}}$ 
31  steg()
32   $M \leftarrow 0$ 
33  while  $p_{\text{nu}} \neq p_{\text{start}}$  do
34    if  $|p_{\text{center}} - p_{\text{nu}}| \geq r$  then
35       $M \leftarrow M + 1$ 
36       $p_{\text{center}} \leftarrow p_{\text{nu}}$ 
37    end
38    steg()
39  end
40   $M \leftarrow M + \frac{p_{\text{center}} - p_{\text{start}}}{r}$ 
41  return  $M$ 
42 end

```

# D. Regressionslinjer för dimension

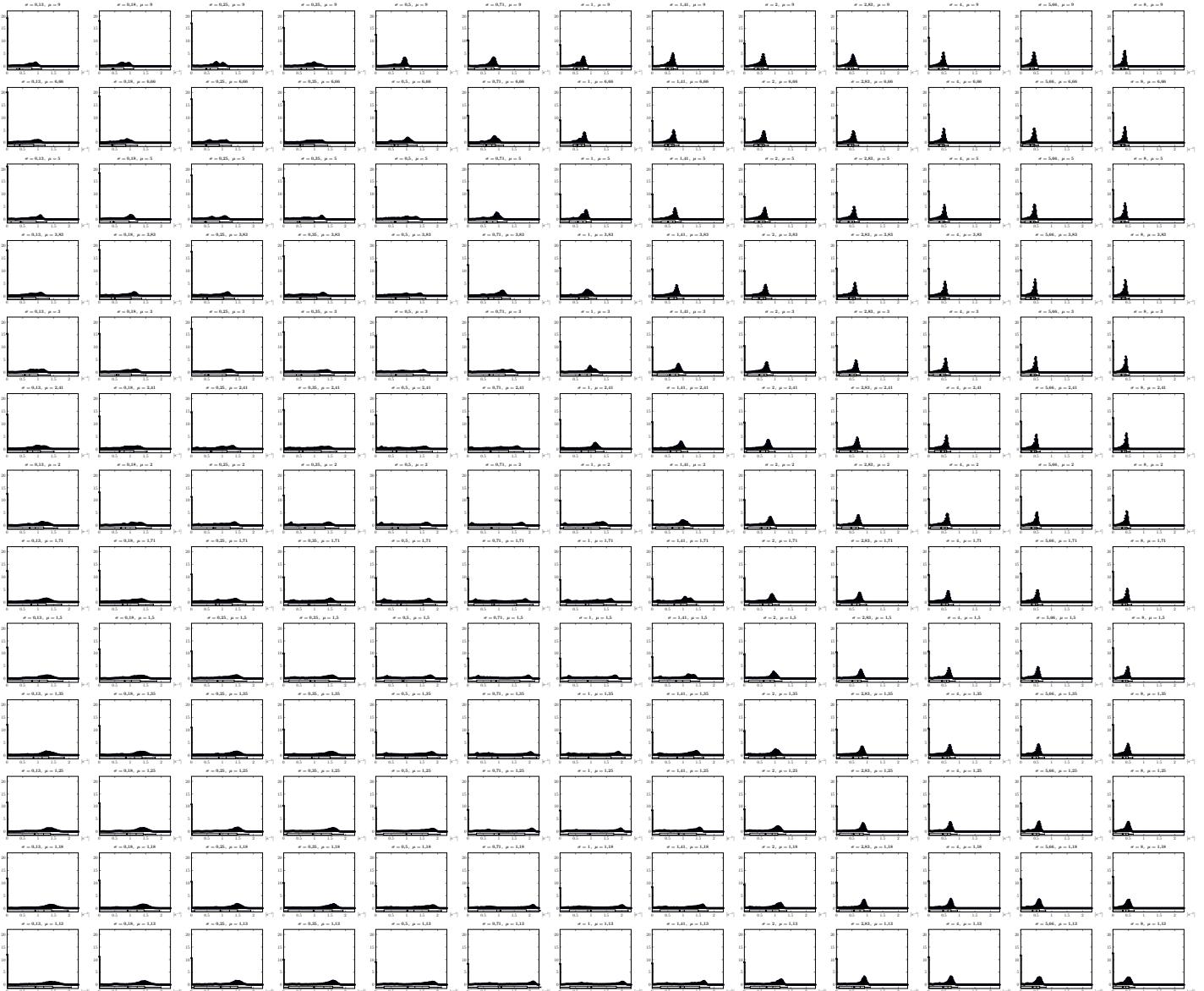


Figur D.1: Linjerna från samtliga regressionsanalyser av låddimension. Uppställningen är sådan att  $\sigma$  ökar åt höger med  $\sigma = 1$  i mitten och  $\mu$  ökar uppåt med  $\mu = 2$  i mitten. Fullstorlek av graferna återfinns bland rådata.

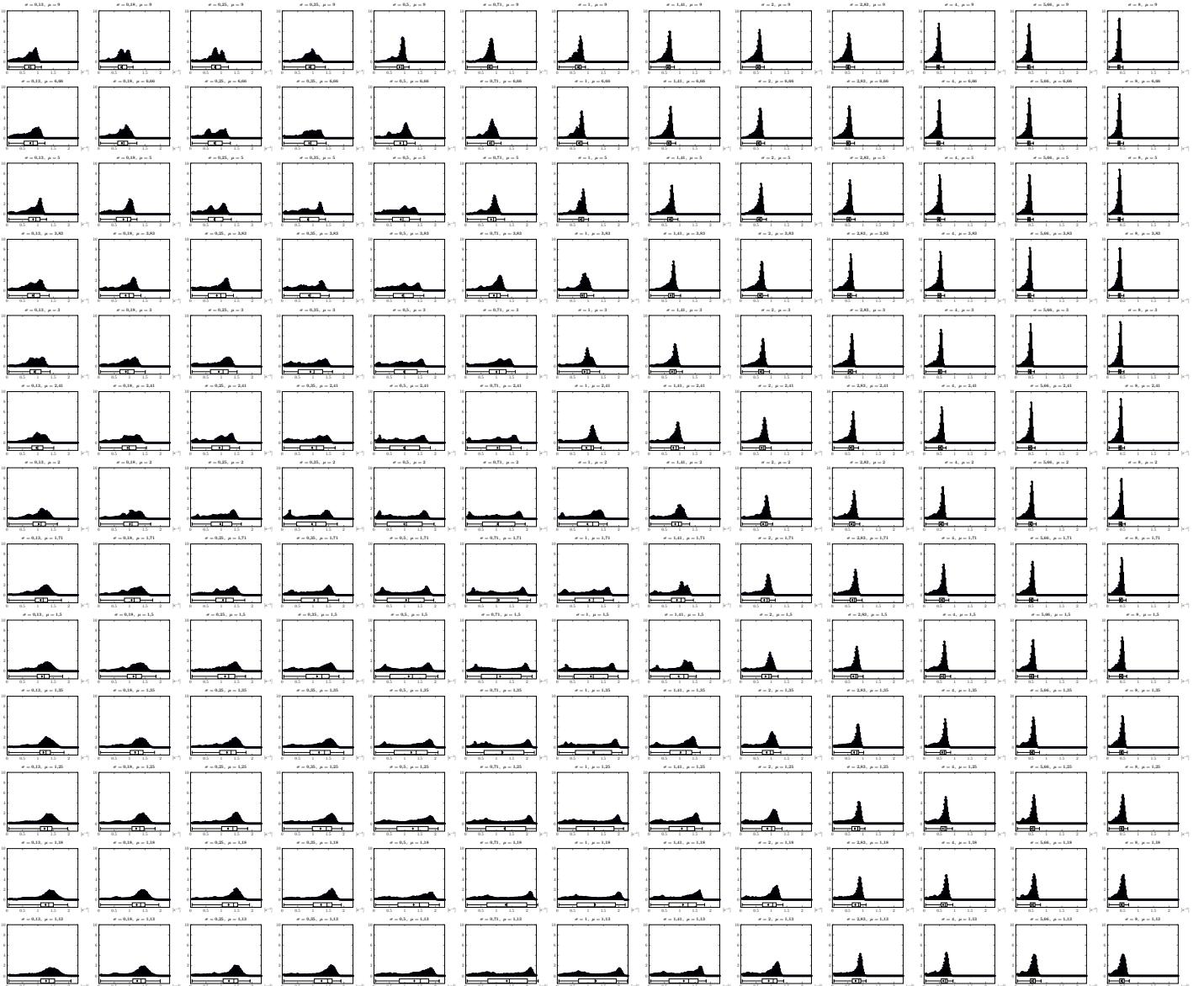


Figur D.2: Linjerna från samtliga regressionsanalyser av passardimension. Uppställningen är sådan att  $\sigma$  ökar åt höger med  $\sigma = 1$  i mitten och  $\mu$  ökar uppåt med  $\mu = 2$  i mitten. Fullstorlek av graferna återfinns bland rådata.

# E. Histogram för MLE

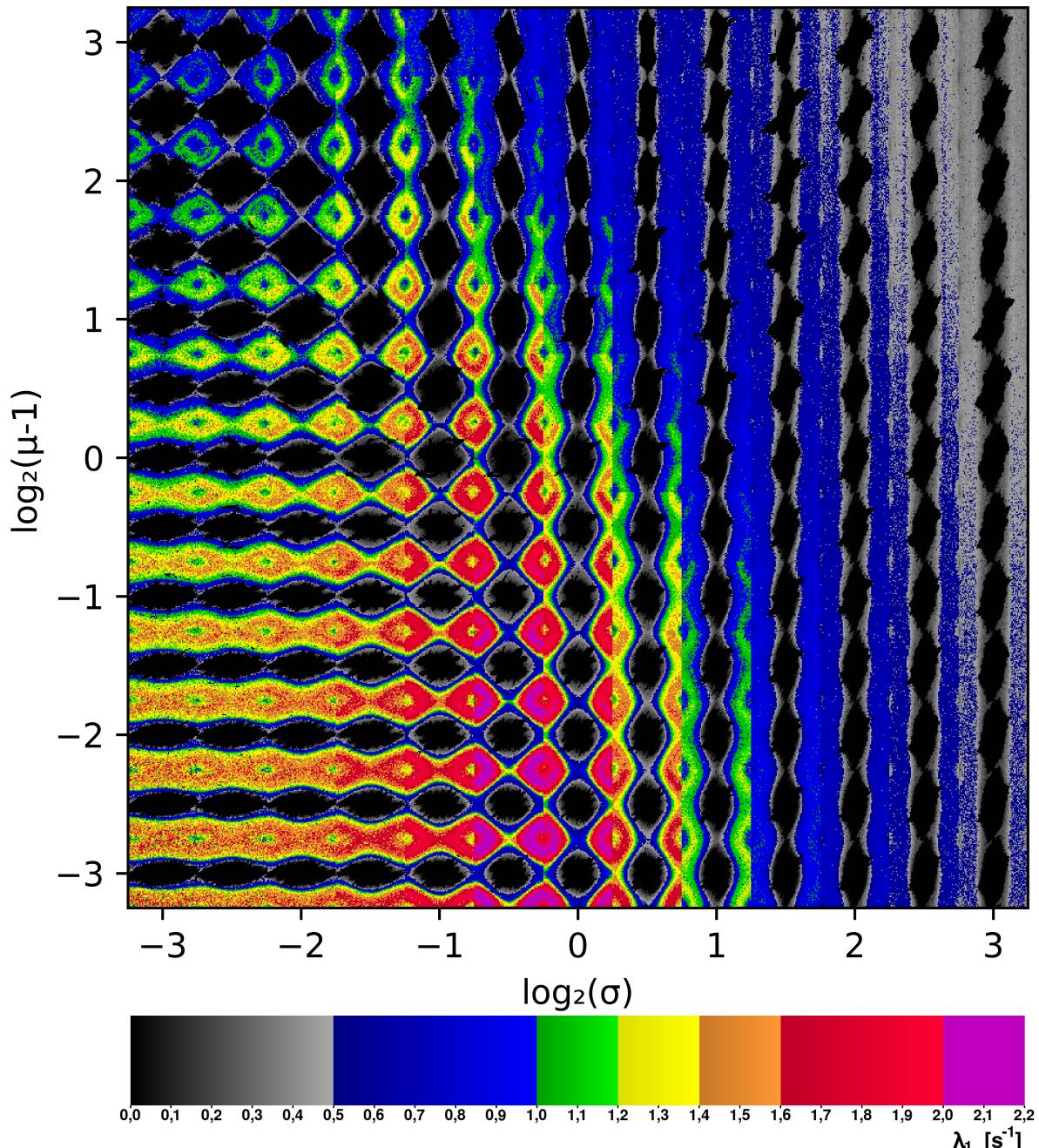


Figur E.1: Samtliga histogram över MLE beroende på systemparametrar, arean under grafen är = 1. Undertill finns ett lådagram, medianen är markerad med ett streck och medelvärdet med en romb. Uppställningen är sådan att  $\sigma$  ökar åt höger med  $\sigma = 1$  i mitten och  $\mu$  ökar uppåt med  $\mu = 2$  i mitten. Fullstorlek av histogrammen återfinns bland rådata.

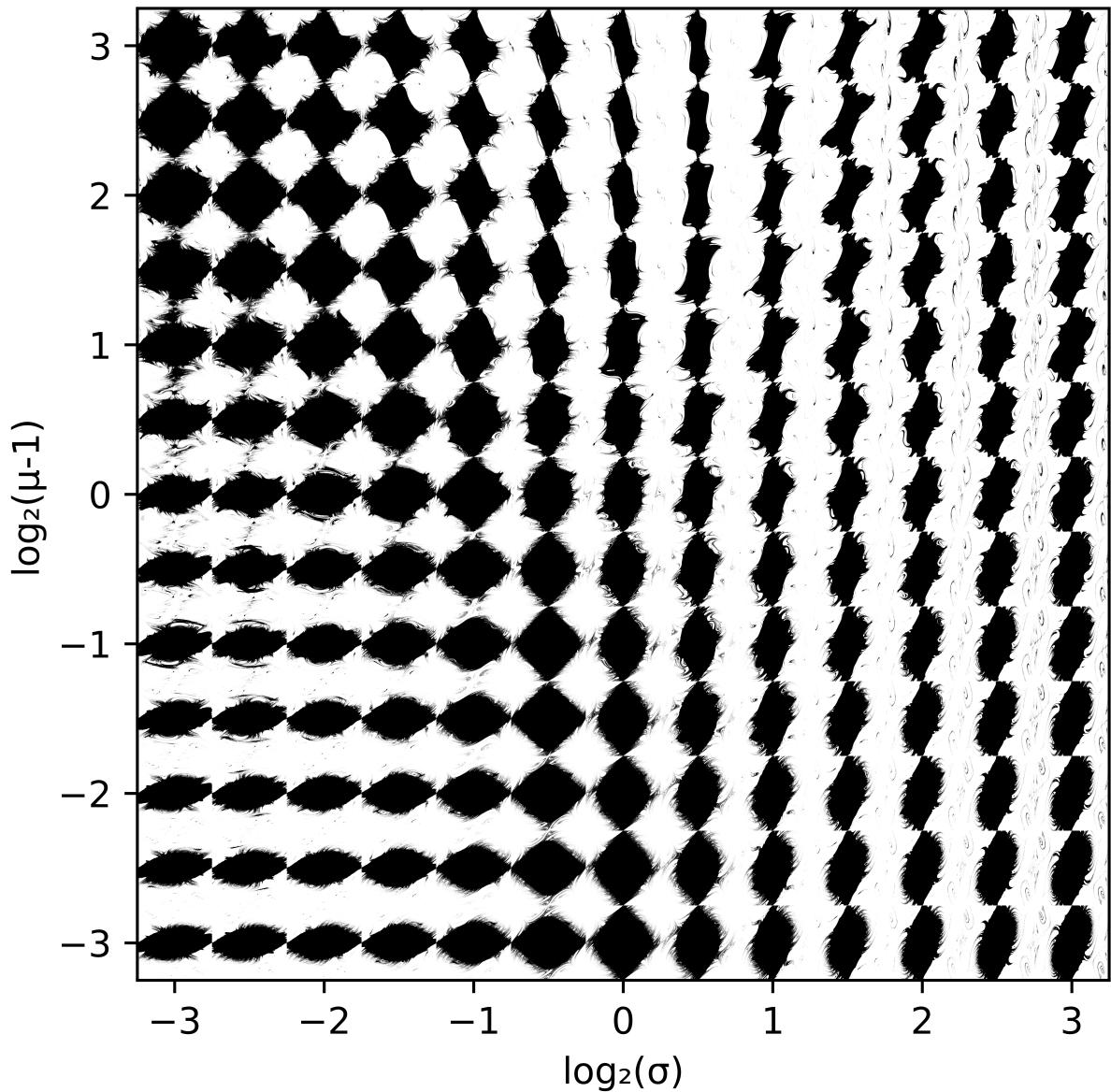


Figur E.2: Samtliga histogram över  $\text{MLE} > 0.05 \text{ s}^{-1}$  beroende på systemparametrar, arean under grafen är = 1. Undertill finns ett lådagram, medianen är markerad med ett streck och medelvärdet med en romb. Uppställningen är sådan att  $\sigma$  ökar åt höger med  $\sigma = 1$  i mitten och  $\mu$  ökar uppåt med  $\mu = 2$  i mitten. Fullstorlek av histogrammen återfinns bland rådata.

## F. Kollage över MLE-grafer och överslagsmängder



Figur F.1: Kollage över samtliga MLE-grafer. Värden för  $\sigma$  och  $\mu$  är enligt axlarna, och bryggnelsevärdena inom de respektive bilderna följer de konventioner som används i övriga grafer.



Figur F.2: Kollage över samtliga Överslagsmängder-grafer. Värden för  $\sigma$  och  $\mu$  är enligt axlarna, och begynnelsevärdena inom de respektive bilderna följer de konventioner som används i övriga grafer.

# G. Tabell över Lyapunov-exponenter och dimensionsmått

Tabell G.1: Erhållna värden för lägesmått för MLE samt dimensionsmått, ordnade utifrån systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$ . Lägesmått för MLE är angivna i enheten  $s^{-1}$ .

$\sigma$	$\mu$	$\hat{\lambda}_1$	$U(\lambda_1)$	$U'(\lambda_1)$	$M'(\lambda_1)$	$\overline{\lambda'_1}$	$\dim_B(I)$	$\dim_C(I)$
0,125	1,125	2,0732	1,4681	1,5424	1,3617	1,2632	1,33498	1,33592
0,125	1,1768	1,9628	1,4431	1,5007	1,3505	1,2488	1,34515	1,32999
0,125	1,25	1,9645	1,4024	1,4569	1,3112	1,214	1,34155	1,35474
0,125	1,3536	1,8485	1,3476	1,4068	1,2618	1,179	1,34286	1,3591
0,125	1,5	1,8023	1,3037	1,3671	1,2086	1,1298	1,30563	1,30058
0,125	1,7071	1,7648	1,259	1,3129	1,1699	1,088	1,35637	1,33188
0,125	2	1,6317	1,1813	1,2445	1,1021	1,0267	1,33234	1,33223
0,125	2,414	1,5169	1,0769	1,1626	0,9945	0,9535	1,37703	1,35994
0,125	3	1,3976	0,9963	1,1017	0,918	0,8853	1,39594	1,37053
0,125	3,828	1,3657	0,9302	1,06	0,871	0,8284	1,4051	1,37785
0,125	5	1,2784	0,942	1,0675	0,9333	0,8457	1,37738	1,36658
0,125	6,657	1,226	0,8587	0,9835	0,8395	0,7543	1,40176	1,38657
0,125	9	1,1114	0,7996	0,9055	0,7702	0,7088	1,41322	1,38693
0,1768	1,125	1,9956	1,4653	1,5149	1,3715	1,247	1,31857	1,33812
0,1768	1,1768	1,9496	1,4481	1,4966	1,3568	1,23	1,34128	1,36127
0,1768	1,25	1,8275	1,4223	1,4692	1,3301	1,2125	1,32993	1,35222
0,1768	1,3536	1,8113	1,3826	1,4383	1,2845	1,18	1,3356	1,34644
0,1768	1,5	1,856	1,3256	1,3871	1,2077	1,1255	1,29547	1,31012
0,1768	1,7071	1,7479	1,2667	1,3427	1,147	1,0653	1,31389	1,32697
0,1768	2	1,6856	1,1811	1,2753	1,0788	1,0096	1,35655	1,36441
0,1768	2,414	1,5457	1,1141	1,2095	0,9898	0,9342	1,39491	1,36966
0,1768	3	1,5127	1,0405	1,1445	0,9434	0,8768	1,38556	1,36319
0,1768	3,828	1,3689	1,0312	1,1305	0,981	0,8707	1,36636	1,35849
0,1768	5	1,2412	0,9634	1,0348	0,9287	0,7983	1,4039	1,38263
0,1768	6,657	1,2366	0,8549	0,9385	0,8121	0,7502	1,41646	1,3982
0,1768	9	1,1123	0,7932	0,9093	0,7622	0,7295	1,39189	1,37852
0,25	1,125	1,9356	1,4968	1,5418	1,4061	1,2496	1,33449	1,36372
0,25	1,1768	1,9195	1,4907	1,5297	1,3987	1,2366	1,36185	1,3806
0,25	1,25	1,8548	1,4712	1,5123	1,3759	1,2207	1,34201	1,36671
0,25	1,3536	1,8021	1,4316	1,4804	1,3174	1,1842	1,34114	1,35025
0,25	1,5	1,7898	1,3837	1,4395	1,2408	1,1223	1,35068	1,35095
0,25	1,7071	1,7632	1,3235	1,3904	1,1508	1,0552	1,34209	1,3165
0,25	2	1,6498	1,254	1,3429	1,0386	0,9674	1,33894	1,28572
0,25	2,414	1,5931	1,1506	1,2713	1,0327	0,9393	1,3468	1,33536
0,25	3	1,5142	1,1176	1,2233	1,0563	0,9187	1,3638	1,36101
0,25	3,828	1,3953	1,045	1,1484	0,9799	0,8526	1,39015	1,36847
0,25	5	1,3259	0,9107	1,0532	0,7948	0,774	1,38145	1,36783
0,25	6,657	1,2957	0,8995	1,0292	0,809	0,7758	1,37213	1,36313
0,25	9	1,2337	0,8555	0,976	0,8202	0,7905	1,34464	1,34424

Tabell G.1: Erhållna värden för lägesmått för MLE samt dimensionsmått, ordnade utifrån systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$ . Lägesmått för MLE är angivna i enheten  $s^{-1}$ .

$\sigma$	$\mu$	$\hat{\lambda}_1$	$U(\lambda_1)$	$U'(\lambda_1)$	$M'(\lambda_1)$	$\overline{\lambda_1}'$	$\dim_B(I)$	$\dim_C(I)$
0,3536	1,125	1,9075	1,5841	1,6226	1,4719	1,2787	1,3471	1,37247
0,3536	1,1768	1,9229	1,5749	1,6186	1,4542	1,2626	1,36139	1,3833
0,3536	1,25	1,9399	1,5569	1,6037	1,4324	1,2434	1,37265	1,39462
0,3536	1,3536	2,0042	1,5093	1,5629	1,3745	1,1964	1,35344	1,36676
0,3536	1,5	1,8446	1,4654	1,5241	1,2887	1,1291	1,34163	1,32834
0,3536	1,7071	1,8404	1,4207	1,4798	1,1633	1,0385	1,33061	1,32425
0,3536	2	1,7909	1,3445	1,4225	1,088	0,968	1,33531	1,33385
0,3536	2,414	1,7198	1,22	1,3473	1,1101	0,9728	1,35855	1,36186
0,3536	3	1,6339	1,1709	1,3112	1,0329	0,9163	1,37549	1,37224
0,3536	3,828	1,5289	1,0766	1,2397	0,9145	0,8697	1,38681	1,37051
0,3536	5	1,4068	0,9908	1,1911	0,8555	0,8339	1,34505	1,33557
0,3536	6,657	1,4303	0,9988	1,1284	0,9298	0,8761	1,32004	1,31763
0,3536	9	1,405	0,9891	1,0543	0,9327	0,8846	1,34126	1,33179
0,5	1,125	2,1231	1,7227	1,7806	1,5116	1,3133	1,37608	1,39294
0,5	1,1768	2,1251	1,7077	1,7772	1,4797	1,2911	1,39896	1,40523
0,5	1,25	2,0873	1,6901	1,7649	1,4405	1,265	1,402	1,39787
0,5	1,3536	2,084	1,6664	1,7364	1,3748	1,212	1,369	1,36848
0,5	1,5	2,0785	1,6191	1,6893	1,2511	1,1284	1,36903	1,3545
0,5	1,7071	1,9417	1,5402	1,6321	1,1287	1,0465	1,35747	1,3627
0,5	2	1,955	1,4397	1,569	1,0552	0,9861	1,38832	1,38872
0,5	2,414	1,8339	1,3241	1,4838	1,0124	0,9784	1,35027	1,34485
0,5	3	1,7477	1,2129	1,408	1,0033	0,9796	1,3365	1,3356
0,5	3,828	1,623	1,0936	1,2799	0,9671	0,9291	1,34355	1,32297
0,5	5	1,5126	1,0467	1,1529	0,9441	0,8736	1,335	1,32613
0,5	6,657	1,3411	1,0274	1,0656	0,9613	0,8548	1,30399	1,31218
0,5	9	1,141	0,9413	0,9626	0,909	0,8345	1,30368	1,31935
0,7071	1,125	2,3617	1,9154	2,0077	1,4208	1,3385	1,39758	1,41151
0,7071	1,1768	2,3437	1,8895	1,9882	1,3466	1,3041	1,41777	1,41457
0,7071	1,25	2,3005	1,8425	1,9545	1,29	1,2649	1,3733	1,38226
0,7071	1,3536	2,2329	1,7773	1,8952	1,1746	1,2017	1,38174	1,37917
0,7071	1,5	2,1608	1,6819	1,8011	1,0202	1,1218	1,38696	1,38591
0,7071	1,7071	2,1121	1,5752	1,7082	1,0296	1,0795	1,40225	1,41104
0,7071	2	1,9365	1,4411	1,6018	1,0631	1,0382	1,37561	1,38452
0,7071	2,414	1,8055	1,3142	1,4758	1,1033	1,0355	1,3475	1,33223
0,7071	3	1,6185	1,2011	1,3164	1,0978	1,0039	1,27412	1,27956
0,7071	3,828	1,376	1,0925	1,1286	1,0189	0,9186	1,27222	1,28061
0,7071	5	1,2694	0,9527	0,9798	0,9065	0,8264	1,26613	1,25075
0,7071	6,657	1,1535	0,891	0,9189	0,8426	0,791	1,27737	1,25175
0,7071	9	1,0423	0,8453	0,8629	0,8058	0,7636	1,26753	1,26959
1	1,125	2,279	1,8226	1,9164	1,2253	1,2528	1,40912	1,40271
1	1,1768	2,2062	1,7879	1,8876	1,2037	1,225	1,41731	1,42139
1	1,25	2,1535	1,7375	1,8423	1,2018	1,2001	1,42902	1,42102
1	1,3536	2,1029	1,6505	1,767	1,1991	1,162	1,39516	1,39725
1	1,5	1,9783	1,5501	1,647	1,1684	1,0932	1,38316	1,36858

Tabell G.1: Erhållna värden för lägesmått för MLE samt dimensionsmått, ordnade utifrån systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$ . Lägesmått för MLE är angivna i enheten  $s^{-1}$ .

$\sigma$	$\mu$	$\hat{\lambda}_1$	$U(\lambda_1)$	$U'(\lambda_1)$	$M'(\lambda_1)$	$\overline{\lambda}_1'$	$\dim_B(I)$	$\dim_C(I)$
1	1,7071	1,8236	1,4114	1,5093	1,1706	1,0446	1,33629	1,34752
1	2	1,6214	1,2843	1,3399	1,1487	0,9802	1,33162	1,33864
1	2,414	1,4207	1,1467	1,1757	1,0949	0,945	1,29758	1,27806
1	3	1,3778	1,0123	1,0548	0,9687	0,886	1,2621	1,26367
1	3,828	1,185	0,9227	0,9547	0,8715	0,8173	1,27551	1,27817
1	5	1,0178	0,8435	0,8589	0,7996	0,7481	1,25606	1,2569
1	6,657	0,9839	0,7949	0,8073	0,7541	0,7034	1,2282	1,24469
1	9	0,9173	0,7613	0,7737	0,7166	0,6715	1,21347	1,2353
1,414	1,125	1,8578	1,5355	1,5956	1,2848	1,1305	1,39438	1,39998
1,414	1,1768	1,8066	1,4911	1,5428	1,2678	1,1033	1,38432	1,38942
1,414	1,25	1,7342	1,4334	1,4823	1,243	1,0677	1,3755	1,3817
1,414	1,3536	1,6642	1,3496	1,3914	1,2032	1,0251	1,36577	1,36186
1,414	1,5	1,5402	1,233	1,2725	1,1328	0,9633	1,34277	1,33641
1,414	1,7071	1,4425	1,1193	1,1658	1,0422	0,9082	1,32864	1,30829
1,414	2	1,3229	1,0254	1,0567	0,9593	0,8522	1,29901	1,29274
1,414	2,414	1,1503	0,9342	0,9558	0,8822	0,7914	1,27194	1,25798
1,414	3	1,0857	0,8607	0,8787	0,8194	0,7479	1,29044	1,24603
1,414	3,828	1,0298	0,8007	0,8156	0,7679	0,7064	1,26381	1,23137
1,414	5	0,9419	0,7475	0,7608	0,7148	0,6664	1,2051	1,21188
1,414	6,657	0,8673	0,7078	0,7177	0,6756	0,6369	1,2217	1,22745
1,414	9	0,827	0,681	0,6902	0,6466	0,6126	1,23232	1,20616
2	1,125	1,3942	1,1556	1,1831	1,0568	0,9096	1,36992	1,3699
2	1,1768	1,3747	1,1247	1,1543	1,0386	0,8968	1,3794	1,3778
2	1,25	1,3456	1,0831	1,1091	1,0029	0,8682	1,3595	1,36409
2	1,3536	1,3045	1,032	1,0594	0,966	0,845	1,34471	1,35886
2	1,5	1,2193	0,9718	0,9954	0,9185	0,8075	1,31105	1,31802
2	1,7071	1,1247	0,907	0,926	0,8606	0,7665	1,27159	1,28102
2	2	1,038	0,8481	0,8658	0,8079	0,7281	1,27231	1,27225
2	2,414	0,9942	0,7853	0,8027	0,7485	0,6841	1,25853	1,25563
2	3	0,9377	0,7293	0,7446	0,6955	0,64	1,25026	1,24028
2	3,828	0,8907	0,6944	0,7077	0,661	0,6143	1,2313	1,21584
2	5	0,8382	0,6691	0,6803	0,6344	0,5922	1,24483	1,21684
2	6,657	0,7796	0,6431	0,6547	0,6112	0,5733	1,24825	1,21423
2	9	0,7678	0,6233	0,6338	0,5922	0,5569	1,23083	1,20296
2,828	1,125	1,0936	0,9064	0,9248	0,8597	0,7531	1,35034	1,34822
2,828	1,1768	1,0933	0,8928	0,9101	0,8487	0,7449	1,3491	1,3504
2,828	1,25	1,0617	0,8684	0,8873	0,8248	0,7288	1,32129	1,31703
2,828	1,3536	1,018	0,837	0,8548	0,7964	0,7056	1,31918	1,3216
2,828	1,5	1,0017	0,7985	0,8155	0,7588	0,6802	1,29652	1,30722
2,828	1,7071	0,9678	0,7574	0,773	0,719	0,649	1,2673	1,27075
2,828	2	0,8909	0,7132	0,727	0,6775	0,6178	1,25685	1,25467
2,828	2,414	0,8481	0,6794	0,6925	0,6472	0,5954	1,24367	1,25156
2,828	3	0,7764	0,6399	0,6529	0,612	0,565	1,23961	1,23573
2,828	3,828	0,779	0,6055	0,6178	0,5808	0,5385	1,21591	1,20404

Tabell G.1: Erhållna värden för lägesmått för MLE samt dimensionsmått, ordnade utifrån systemparametrar  $\sigma$  och  $\mu$ . Lägesmått för MLE är angivna i enheten  $s^{-1}$ .

$\sigma$	$\mu$	$\hat{\lambda}_1$	$U(\lambda_1)$	$U'(\lambda_1)$	$M'(\lambda_1)$	$\overline{\lambda_1}'$	$\dim_B(I)$	$\dim_C(I)$
2,828	5	0,7373	0,5791	0,5917	0,5535	0,5175	1,19914	1,19405
2,828	6,657	0,7209	0,5627	0,5769	0,5357	0,5055	1,1736	1,17758
2,828	9	0,7248	0,5568	0,5699	0,5239	0,4991	1,18918	1,1846
4	1,125	0,9428	0,7343	0,7544	0,6956	0,6265	1,339	1,33403
4	1,1768	0,934	0,7267	0,7445	0,6892	0,6209	1,32889	1,3278
4	1,25	0,9228	0,7104	0,7278	0,6766	0,61	1,32616	1,3234
4	1,3536	0,8642	0,6915	0,7076	0,6586	0,5964	1,30638	1,30135
4	1,5	0,8658	0,6679	0,683	0,6376	0,5795	1,26622	1,27385
4	1,7071	0,8061	0,6409	0,6552	0,6109	0,558	1,24182	1,24117
4	2	0,7569	0,6122	0,6254	0,584	0,5364	1,22234	1,21619
4	2,414	0,7125	0,5836	0,5944	0,5564	0,5126	1,21057	1,1902
4	3	0,7045	0,5578	0,5692	0,5342	0,4989	1,21118	1,19603
4	3,828	0,6699	0,541	0,552	0,518	0,4846	1,18997	1,19695
4	5	0,6752	0,5213	0,5328	0,4997	0,4688	1,19847	1,19272
4	6,657	0,6381	0,5048	0,5168	0,4834	0,4556	1,2006	1,19466
4	9	0,6472	0,4915	0,5037	0,4701	0,4454	1,20183	1,19223
5,657	1,125	0,8214	0,6125	0,6361	0,5728	0,5302	1,3277	1,32973
5,657	1,1768	0,8054	0,606	0,6257	0,5728	0,5264	1,32611	1,3321
5,657	1,25	0,77	0,597	0,6137	0,5661	0,5201	1,31017	1,30168
5,657	1,3536	0,7723	0,5826	0,599	0,5547	0,51	1,282	1,28067
5,657	1,5	0,7164	0,5673	0,5814	0,5394	0,4968	1,27596	1,26514
5,657	1,7071	0,7088	0,5495	0,563	0,5227	0,4843	1,25551	1,24773
5,657	2	0,6656	0,5264	0,5392	0,5023	0,4671	1,20934	1,19759
5,657	2,414	0,6274	0,5085	0,5195	0,4856	0,4535	1,16835	1,1692
5,657	3	0,6017	0,4894	0,5	0,4692	0,4389	1,14096	1,14612
5,657	3,828	0,5892	0,4729	0,4822	0,4525	0,426	1,14018	1,13098
5,657	5	0,5703	0,4596	0,4701	0,4375	0,4159	1,16641	1,15823
5,657	6,657	0,5715	0,4515	0,4635	0,43	0,4104	1,16057	1,151
5,657	9	0,5689	0,4463	0,4589	0,4244	0,4067	1,16133	1,15079
8	1,125	0,7098	0,5194	0,5453	0,4835	0,4549	1,32735	1,30334
8	1,1768	0,6885	0,5147	0,5369	0,4823	0,4531	1,3209	1,2959
8	1,25	0,6619	0,5072	0,526	0,4792	0,4471	1,31955	1,27936
8	1,3536	0,6446	0,498	0,5144	0,4725	0,4406	1,27747	1,24876
8	1,5	0,6265	0,4872	0,502	0,4632	0,4315	1,25397	1,2249
8	1,7071	0,6052	0,4721	0,4861	0,4513	0,4223	1,2254	1,20976
8	2	0,5732	0,458	0,4702	0,4384	0,4111	1,20935	1,18483
8	2,414	0,5563	0,4428	0,4546	0,4251	0,3999	1,16678	1,1532
8	3	0,5396	0,4272	0,4385	0,4104	0,3877	1,15636	1,14563
8	3,828	0,5337	0,4166	0,4271	0,3981	0,3795	1,16342	1,1417
8	5	0,512	0,4071	0,418	0,3894	0,3724	1,14821	1,12575
8	6,657	0,524	0,3995	0,4109	0,3816	0,3658	1,12677	1,11198
8	9	0,5083	0,3936	0,4046	0,3748	0,3602	1,1185	1,10657