

Econometría Financiera^{*}

Parcial 1

Carlos Galindo, Germán Rodríguez y Santiago Hernández

4 Mayo 2021

1. Sustente y explique su respuesta frente a las siguientes preguntas

1.1. ¿Cómo se define un mercado eficiente? Defina las tres formas de la hipótesis usando elementos teóricos y matemáticos. Para ello escriba las fórmulas de precios y retornos.

Un mercado eficiente según Samuelson (1965) es aquel donde existe información libre y completa para todos los agentes, poseen las mismas expectativas y por lo tanto los precios actuales son eficientes porque reflejan los retornos y expectativas esperadas por los agentes. Sin embargo, el precio del activo puede cambiar con la llegada de nueva información, luego los precios reflejan el valor fundamental de los mismos. Por otro lado, existe libre flujo de capitales y costos de transacción iguales a cero.

Por otro lado, para Fama (1970) el comportamiento de los agentes afecta los precios de mercado. Por lo que para alcanzar la eficiencia en el mercado se necesita la presencia de los agentes sofisticados quienes son racionales y corrigen las pequeñas ineficiencias en los precios, no existen costos de transacción y todos los agentes poseen la misma información.

Existen diferentes tipos de eficiencia según la información disponible por los agentes del mercado:

1. Eficiencia débil: los agentes poseen la información del precio histórico, luego los precios históricos reflejan el precio actual. Así mismo, no es posible obtener beneficios del mercado a partir de los precios históricos.
2. Eficiencia semifuerte: los agentes poseen información pública como reportes, noticias, manejo de la empresa y los precios históricos. Como los agentes poseen la misma información no se puede ser más astuto que lo demás.
3. Eficiencia fuerte: los agentes poseen tanto información pública como privada.

Matemáticamente:

$$r_t = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t)$$

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

^{*}Todo el análisis econométrico se realizó por medio del lenguaje de programación estadístico R y el código realizado se encuentra en el script *Parcial 1 - EF.R*

Donde ϵ_t es una diferencia martingale con respecto al conjunto de información disponible (precios históricos, pública y privada), μ_t es la prima de riesgo que obtienen los inversionistas como compensación por asumir un determinado nivel de riesgo. Finalmente, P_t es el precio de un activo en el momento t .

1.2. Suponga que los directores ejecutivos de Ecopetrol (quienes tienen acciones de la empresa y las transan en bolsa) obtienen rendimientos anormalmente altos en las acciones de su propia empresa ¿Esto invalidaría la hipótesis de mercados eficientes?

El uso de información privada por parte de los directores ejecutivos de Ecopetrol para obtener mayores rendimientos del mercado no violan la hipótesis de mercados eficientes fuerte dado que para obtener beneficios superiores al resto del mercado hacen uso de información privada que no poseen los demás agentes. Sin embargo, si violan la eficiencia débil y semifuerte donde se tiene información histórica de los precios y la información pública únicamente, luego, no es posible obtener beneficios superiores al mercado con ese conjunto de información y se viola ese tipo de eficiencia.

1.3. El precio pagado por un inversionista en el mercado por una acción es un precio justo? Discuta su respuesta.

El precio pagado por un inversionista en el mercado por una acción no es un precio justo en muchos casos, ya que en la práctica algunos de los supuestos de la EMH respecto a la disponibilidad de la información no se cumplen. En este caso, los precios del mercado de los activos tienden a alejarse periódicamente de su valor fundamental, por lo que si la acción está infravalorada es injusto para el vendedor y si está sobrevalorada es injusto para el comprador.

A partir de los aportes de Samuelson y Fama se puede entender la eficiencia del mercado como un estado que corresponde a un enfoque axiomático (Samuelson), o como un proceso que corresponde a un enfoque empírico (Fama). No obstante, el tratamiento de la eficiencia en ambos casos es susceptible al tipo de críticas anteriormente mencionadas sobre la discrepancia entre el precio del activo y su valor fundamental, y conlleva a pruebas estadísticas sobre el límite de la varianza. Por esta razón, es necesario redefinir el concepto de eficiencia dado que su actual tratamiento no incorpora características estadísticas de mercados reales como las discontinuidades y las concentraciones de volatilidad.

1.4. Si el mercado es eficiente, cuál es el rendimiento esperado para un activo en ese mercado?

En un mercado eficiente, los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible del mercado y se comportan como un paseo aleatorio:

$$\epsilon_t = X_t - X_{t-1} - \mu$$

Donde $X_t = P_t$ o $X_t = p_t$. Históricamente, asumimos que la constante μ es igual a cero. Para hallar el valor esperado de los precios en un mercado eficiente, suponemos que siguen un proceso Martin Gale, de modo que:

$$E[X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots] = X_t$$

Esto equivale a decir que el valor esperado del precio de mañana, teniendo en cuenta toda su historia, es el precio de hoy. De forma equivalente, la diferencia Martin Gale definida como:

$$\epsilon_{t+1} = X_{t+1} - X_t$$

Cumple que el valor esperado sujeto a los precios del pasado es igual a cero:

$$E[\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = 0$$

Finalmente, el valor esperado tanto de los retornos simples como compuestos entendidos como una diferencia temporal entre precios es igual a cero, ya que según la ecuación 2 no se espera que cambien los precios en términos de valor esperado:

$$X_{t+1} = X_t$$

1.5. Suponga que un inversionista ha descubierto que la raíz cuadrada de cualquier precio de acción multiplicada por el día del mes proporciona un indicador de la dirección en el movimiento del precio de esa acción en particular con una probabilidad del 75 %. En este caso se estaría violando la hipótesis de mercado eficiente?

Según la EMH no se pueden obtener beneficios mayores al mercado o predecir el precio de un activo a partir de su información histórica, por lo que el análisis técnico no sería suficiente para anteceder la dirección del precio de un activo y así obtener mayores beneficios que el mercado. Luego, dado el patrón encontrado por parte de este inversionista se estarían violando los 3 tipos de eficiencia en el mercado al encontrar un patrón técnico en el precio de ese activo.

Sin embargo, en la vida real de los mercados financieros algunos *traders* mencionan que mediante la combinación del análisis técnico y fundamental es posible encontrar patrones y direcciones en los precios de un activo.

2. Obtenga datos diarios y mensuales de cualquier índice accionario de bolsa para un período no inferior a 20 años. Realice los siguientes análisis:

2.1. Discuta lo que mide el índice accionario elegido y realice un análisis estadístico del mismo y de sus retornos.

Para el presente trabajo, se decidió estudiar el comportamiento del índice accionario **DAX** así como los retornos¹ asociados a este. El **DAX**², es un índice accionario para el mercado accionario alemán: el DAX muestra el desempeño de las 30 compañías alemanas más grandes y más líquidas³ que se encuentran listadas en la *Frankfurt Stock Exchange*⁴. Para que una compañía haga parte del DAX debe cumplir principalmente dos criterios: 1) cierto volumen de capitalización bursátil⁵ y 2) por el volumen de facturación en libros (Bodie et al., 2013).

El **DAX** es el índice alemán de mayor reconocimiento y generalmente es visto como un punto de referencia para el mercado accionario alemán. Las 30 compañías que componen el DAX representan el 80 % de la capitalización bursátil de todas las compañías alemanas listadas en bolsa. De igual forma, dicho índice sirve para construir diversos instrumentos financieros como lo son los *ETFs* asociados al mercado accionario alemán como otros productos financieros.

¹Los retornos que se analizarán en el presente trabajo serán retornos continuos dado que son más fáciles de trabajar empíricamente que los retornos discretos

²Deutscher Aktienindex.

³A una compañía de gran tamaño y liquidez se le conoce en terminología financiera como *blue chip* por lo que también se le conoce al DAX como el índice de las *blue chip* alemanas.

⁴La Frankfurt Stock Exchange (FWB) es la principal bolsa de valores alemana.

⁵Que puede ser vista como una medida del tamaño de la compañía.

Ahora bien, para entender un poco mejor el DAX se procederá a analizar estadísticamente dicho índice y a realizar también un análisis estadístico sobre sus retornos⁶.

Lo primero que se debe realizar a la hora de analizar cualquier índice accionario es mirar su comportamiento a lo largo del tiempo. Dado que hay interés de ver el comportamiento del índice tanto en el corto como en el largo plazo se procede a graficar el logaritmo de los precios de dicho índice con frecuencias diarias y mensuales, las gráficas asociadas a dicha frecuencias se encuentran en las figuras 1 y 2 respectivamente.



Figura 1: Precios diarios en escala logarítmica del DAX 30



Figura 2: Precios mensuales en escala logarítmica del DAX 30

Como se puede observar de las imágenes 1 y 2, el comportamiento de los precios tanto en frecuencias altas como en frecuencias bajas no pareciera ser estacionario y por el contrario pareciera ser un proceso con cierta persistencia por lo que dichas gráficas parecieran indicar que el proceso tiene al menos una raíz unitaria.

Respecto a los retornos, se observa que gráficamente estos parecieran tener un comportamiento mucho más cercano al de una serie estacionaria. Tanto a frecuencias diarias como a frecuencias mensuales se observa que los retornos parecieran tener una media constante alrededor de cero y que además pareciera que no

⁶Para el análisis que se realizará a continuación, se tomaron los valores diarios y mensuales del DAX 30 directamente de la página de yahoo finance. Dichos datos, se obtuvieron mediante un API proveída por el paquete *tidyquant* que permite comunicar directamente RStudio con yahoo finance por lo que no fue necesario descargar la base de datos.

hubiese correlación serial importante en ninguna de las dos frecuencias, al menos gráficamente. No obstante, se destaca que la volatilidad de la serie no es constante y eso implicaría que la varianza de la serie de los retornos no es constante. Lo anterior, es claramente evidente para los retornos diarios donde se observa que hay una especie de *clústers de volatilidad* en donde se observa períodos de más alta volatilidad y otros períodos de más baja volatilidad en los retornos. Frente a la serie de retornos mensuales, se observa que la volatilidad de la serie disminuye con el proceso de agregación de datos, no obstante, puede que la varianza aún así siga siendo no constante a lo largo del tiempo. Las gráficas de los retornos diarios y mensuales están representadas por las figuras 3 y 4 respectivamente.

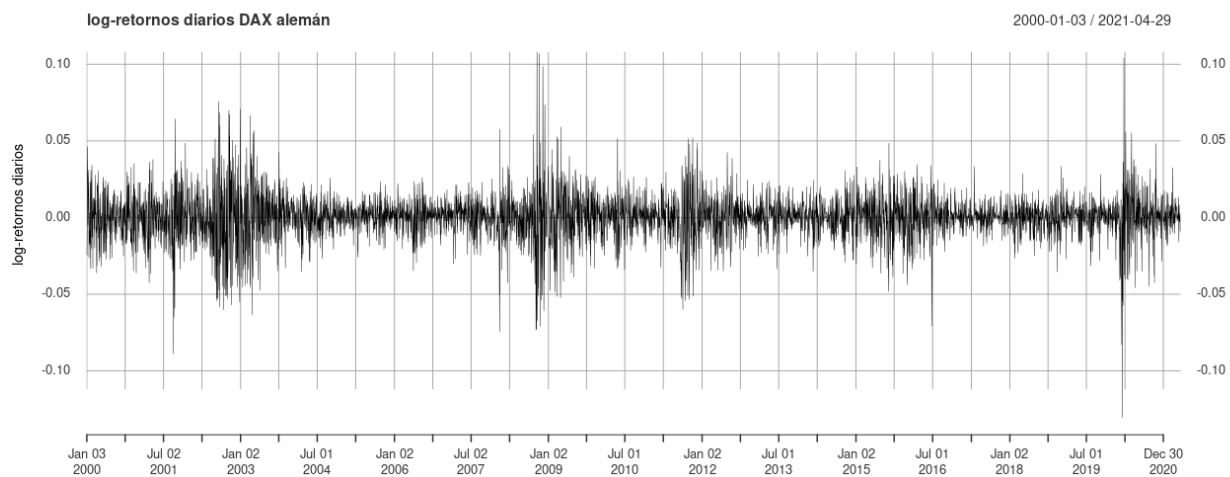


Figura 3: Retornos diarios continuos DAX 30

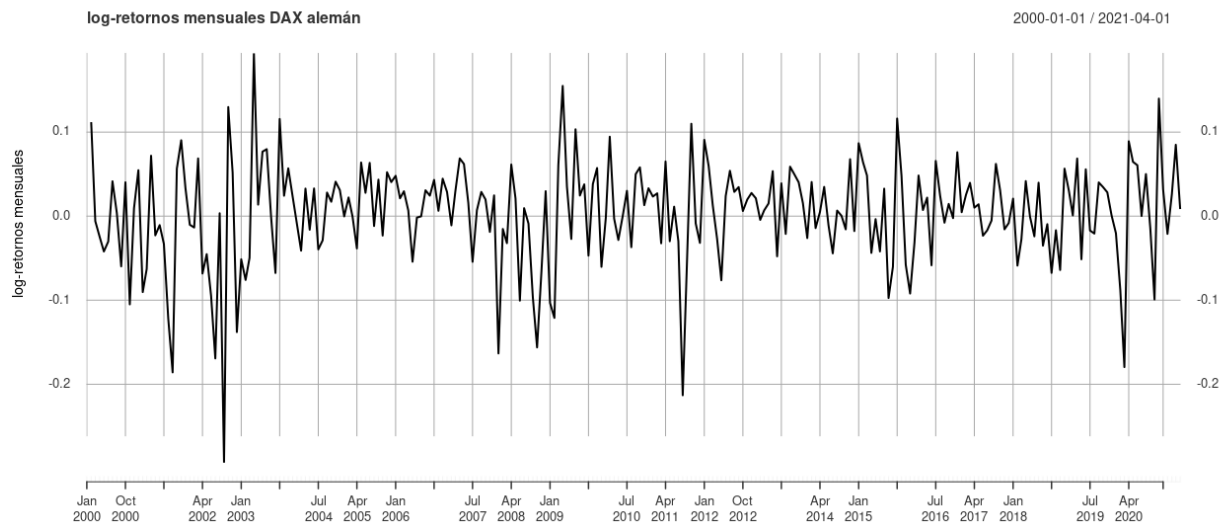


Figura 4: Retornos mensuales continuos DAX 30

Algo que es importante decir desde ya, basándose exclusivamente en el análisis gráfico, es que el DAX 30 sí pareciera satisfacer la hipótesis de los mercados eficientes dado que se observa que la serie de los *logaritmos de los precios* no pareciera ser estacionaria y por el contrario presentar alguna tendencia estocástica, mientras

que la serie de los retornos si pareciera tener al menos una componente que se comporta parecido a una *diferencia martingale*.

Luego de haber realizado los correspondientes gráficos para cada serie de diferente frecuencia, se procede a analizar los hechos estilizados de los retornos del DAX 30.

2.1.1. Baja correlación serial de los retornos diarios y mensuales del DAX 30

El primer hecho estilizado del DAX 30, es la baja correlación serial que presentan los retornos tanto diarios como mensuales. Lo anterior, se puede confirmar gráficamente observando las funciones de autocorrelación⁷ de dichos retornos.

Las ACF de los retornos diarios y de los retornos mensuales están dadas por las figuras 5 y 6, respectivamente.

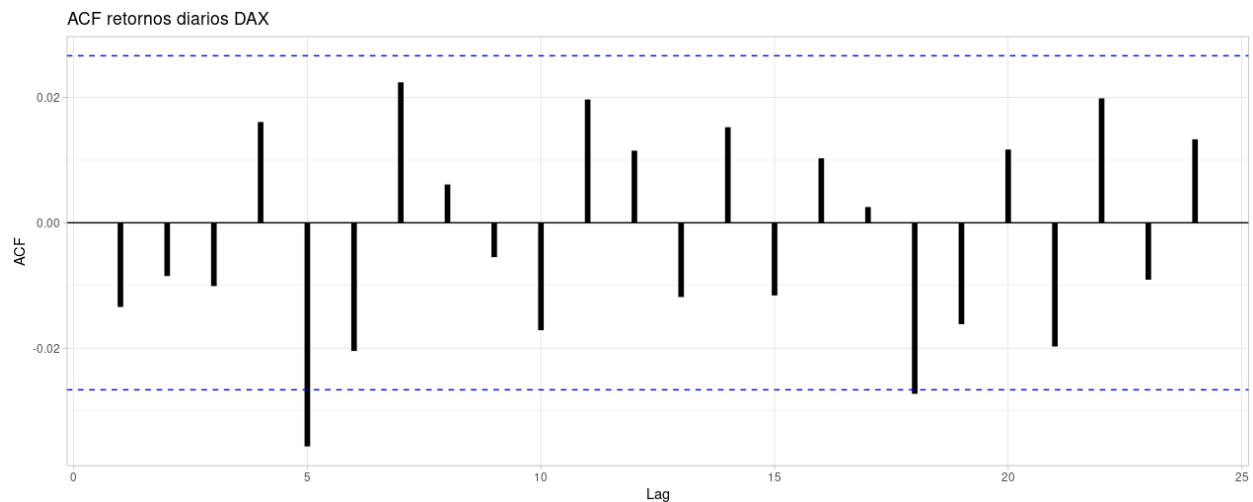


Figura 5: Función de autocorrelación retornos diarios DAX 30



Figura 6: Función de autocorrelación retornos mensuales DAX 30

⁷De acá en adelante se abreviarán las funciones de autocorrelación como ACF.

De ambas figuras, se puede concluir que prácticamente considerando un rezago de hasta 24 días o 24 meses, dependiendo si se considera la serie diaria o mensual de los retornos, se observa que pareciera no haber correlación serial de la serie por lo que se confirmaría el primer hecho estilizado de los retornos de los activos financieros para el mercado accionario alemán.

2.1.2. Histograma de la distribución de los retornos diarios y mensuales

El segundo hecho estilizado de los retornos del mercado accionario alemán, es que éstos tienen un marcado comportamiento distinto al de una distribución normal.

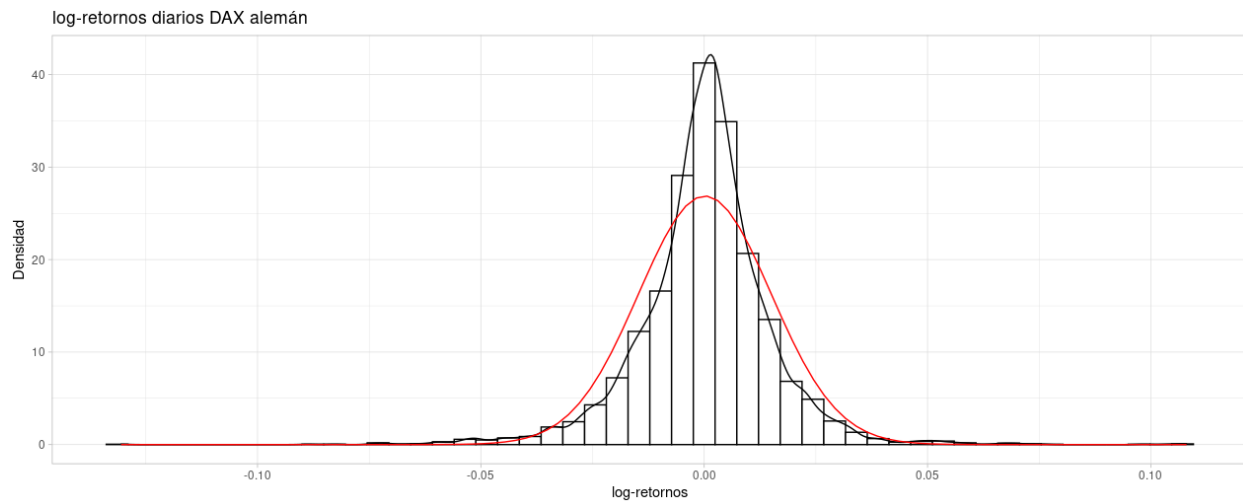


Figura 7: Histograma retornos diarios DAX 30

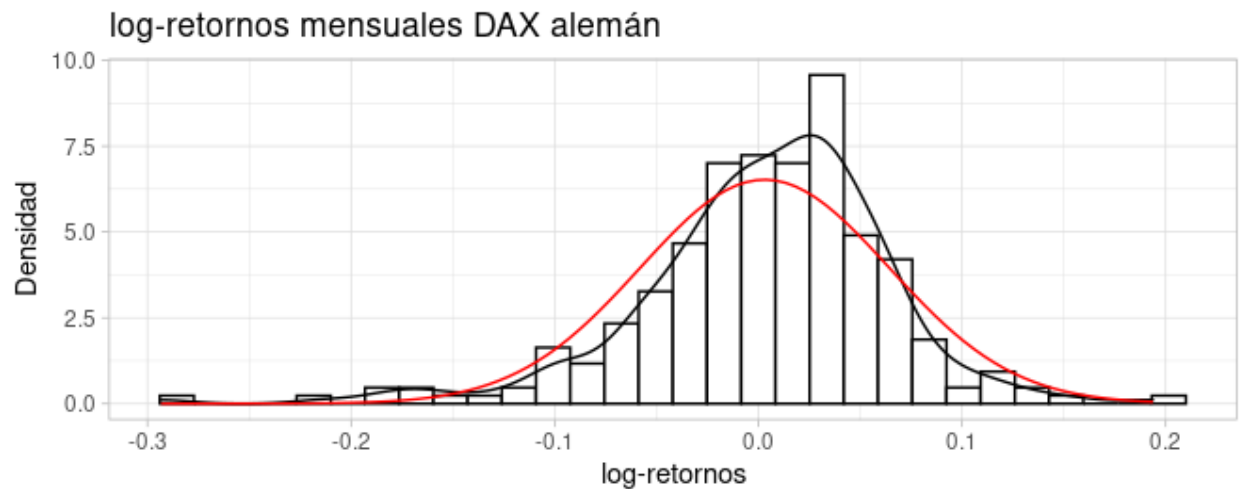


Figura 8: Histograma retornos mensuales DAX 30

Si se observan las figuras 7 y 8 es evidente que existe una marcada diferencia entre la distribución empírica de los retornos diarios y mensuales respecto a una distribución normal con la misma media y varianza. En ambas gráficas, la distribución normal que correspondería a la media y varianza muestral tomados de los retornos se encuentra resaltada en color rojo; y como se puede observar la distribución empírica de los retornos

que se encuentra resaltada en negro, tiene una mayor concentración de datos alrededor de la media y colas más pesadas respecto a la normal⁸.

2.1.3. La desviación estándar de los retornos domina a la media

Otro hecho estilizado que es fácilmente medible empíricamente, es que la desviación estándar muestral de los retornos domina la media de los retornos. La tabla 1 muestra que claramente tanto en frecuencias diarias como en frecuencias mensuales, la desviación estándar de los retornos del mercado accionario alemán es considerablemente más grande que la media de dichos retornos.

	Retornos diarios	Retornos mensuales
Media	0.0001495234	0.003117356
Desviación estándar	0.01484438	0.0611634

Cuadro 1: Media y desviación estándar de los retornos diarios y mensuales del DAX 30

2.1.4. Correlación positiva de retornos al cuadrado

Finalmente, el último hecho estilizado importante que hay que observar de los retornos del mercado accionario alemán, es la correlación positiva de estos si se elevan al cuadrado. Las figuras 9 y 10, muestran el comportamiento de los retornos elevados al cuadrado. De dichas gráficas, se intuye que existe una especie de persistencia en los retornos del mercado accionario alemán elevados al cuadrado, por lo que uno esperaría ver presencia de correlación serial en estos.

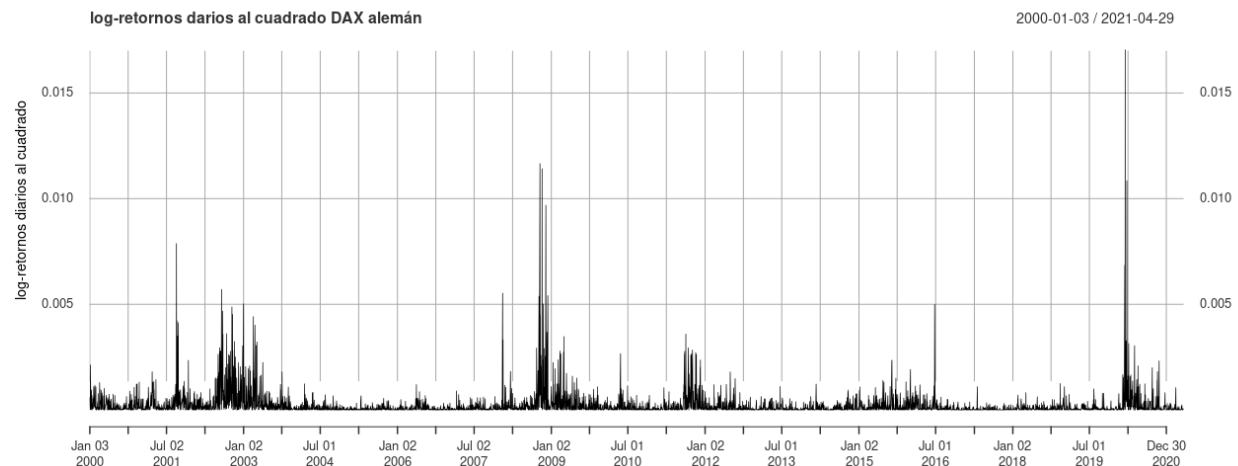


Figura 9: Retornos diarios al cuadrado DAX 30

⁸El comportamiento de la distribución empírica del DAX 30 es el de una distribución leptocúrtica por lo que se espera que esta distribución empírica tenga una kurtosis más alta que una distribución normal con la misma media y varianza.

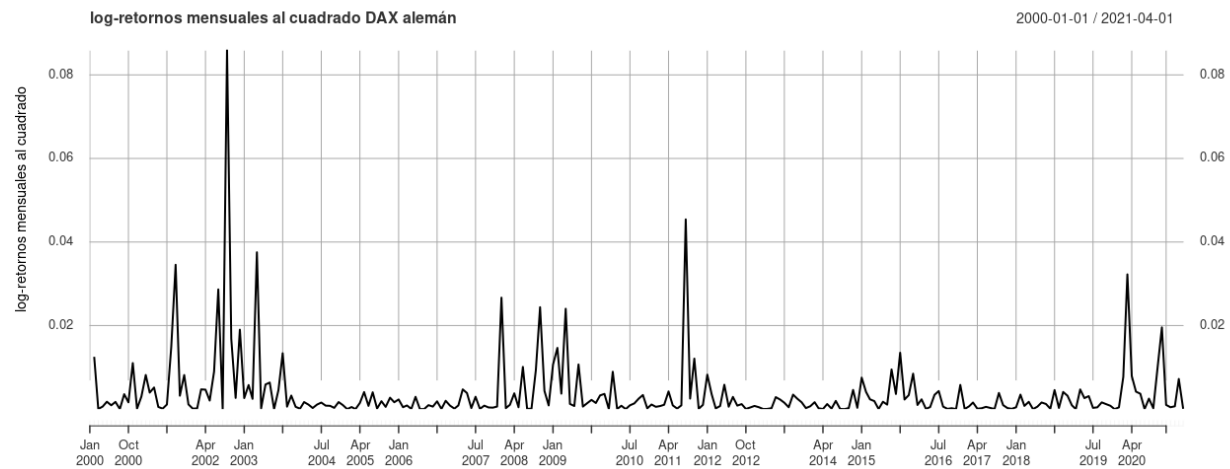


Figura 10: Retornos mensuales al cuadrado DAX 30

Lo anterior, se confirma si observan directamente las funciones de autocorrelación tanto de los retornos diarios como los retornos mensuales elevados al cuadrado. Como se puede observar, de las gráficas 11 y 12 si hay presencia de *correlación serial positiva* en los retornos al cuadrado tanto de los retornos diarios como de los retornos mensuales. Ahora bien, la presencia de correlación serial positiva de los retornos al cuadrado implica *heterocedasticidad* en la serie de los retornos por lo que dichos retornos no tienen varianza constante a lo largo del tiempo.

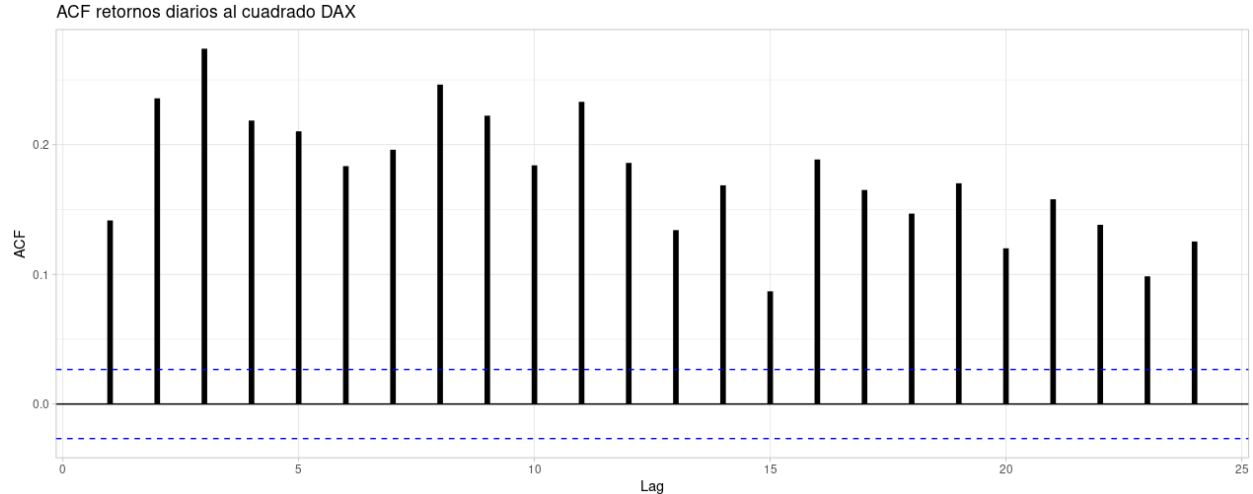


Figura 11: ACF retornos diarios al cuadrado DAX 30

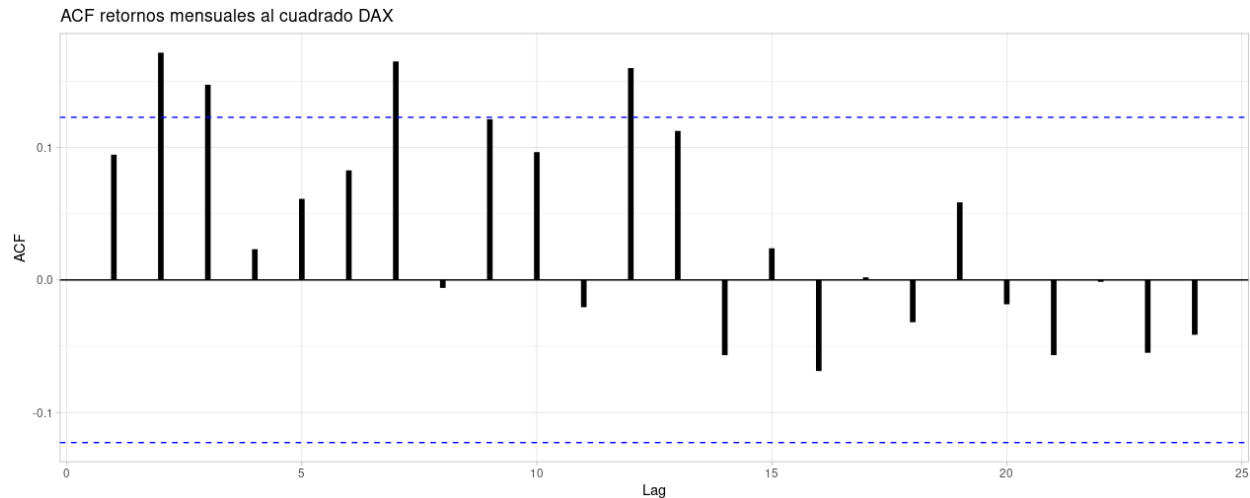


Figura 12: ACF retornos mensuales al cuadrado DAX 30

2.2. ¿Es el mercado accionario elegido eficiente? Use diferentes horizontes de tiempo t pruebe la hipótesis considerando sus diferentes formas. Discuta los resultados.

Por el análisis estadístico realizado sobre el índice accionario DAX 30 y los retornos asociados a este, se observó que pareciera que el mercado accionario alemán si satisface la *hipótesis de mercados eficientes*. Del análisis gráfico, pareciera que el índice no se comportara como una serie estacionaria y que por el contrario se comportara como un proceso persistente, lo que indicaría la posible presencia de al menos una raíz unitaria en el proceso. Por el contrario, el gráfico de los retornos continuos si pareciera comportarse mucho más parecido a una serie estacionaria con una varianza que podría posiblemente ser descrita por el comportamiento estadístico de una *diferencia martingale*.

Ahora bien, no es suficiente realizar un análisis gráfico para corroborar si se satisface o no la hipótesis de mercados eficientes en un determinado mercado de activos, por lo que ahora se procede a realizar test estadísticos formales para verificar dicho supuesto. Primero, se mirarán los tests para las diferentes versiones de la hipótesis para el mercado accionario alemán, haciendo un análisis de corto plazo por lo que se concentrará el análisis en los retornos diarios. Luego, se realizarán las mismas pruebas anteriores pero para un análisis de largo plazo por lo que se usaran los retornos mensuales en dicho caso.

2.2.1. Test para el RW3 para retornos de frecuencia diaria

La primera versión de la hipótesis de mercados eficientes que se testeó estadísticamente fue su versión más débil (RW3). Dado que en dicha versión débil el conjunto de información que se emplea es el de los retornos pasados, lo primero que se podría hacer es mirar la gráfica de ACF de los retornos diarios para ver si gráficamente hay evidencia de correlación serial. Como lo muestra la figura 5, pareciera que no hay evidencia de correlación serial al menos considerando los primeros 24 rezagos para la serie con frecuencia diaria. No obstante, para confirmar esa evidencia gráfica se procede a hacer dos test estadísticos diferentes que permiten corroborar analíticamente mejor la RW3:

1. Tests de correlación serial para series de tiempo:

En primer lugar, se emplean dos tests distintos de correlación serial para ver si los retornos diarios presentan autocorrelación al considerar diferente número de rezagos. Las dos pruebas que se emplearán son las pruebas de *Box-Pierce* y *Ljung-Box*, las cuales son pruebas de significancia conjunta, y permiten

determinar si luego de considerar cierto número de rezagos, existe evidencia de correlación serial en la serie o no⁹.

Prueba de correlación serial	p value
Box Pierce	
lag = 1	0.3234
lag = 10	0.0714
lag = 30	0.01174
lag = 60	2.389e-05
lag = 90	1.352e-05
lag = 700	0.6889
Ljung Box	
lag = 1	0.3233
lag = 10	0.07089
lag = 30	0.01125
lag = 60	1.994e-05
lag = 90	9.979e-06
lag = 700	0.2653

Cuadro 2: Pruebas de correlación serial para la verificación de la RW3 en el mercado accionario alemán

La tabla 2, muestra que al considerar horizontes de corto plazo para datos de frecuencia diaria como lo sería considerar 1 solo rezago y 10 rezagos, el supuesto de no correlación serial se cumple por lo que no es posible predecir el comportamiento del mercado accionario alemán usando información del último día o de los últimos 10 días. Ahora bien, si se usa información de los últimos 30 días, 60 días o 90 días, se rechaza la hipótesis nula de no correlación serial a favor de la hipótesis alternativa de correlación serial, por lo que se podría establecer la presencia de autocorrelación en los retornos del mercado accionario alemán para estos períodos de tiempo. Lo anterior, indica que usando los retornos diarios del último mes, últimos dos meses y últimos 3 meses, es posible ver una correlación serial en la serie, lo cuál podría tener sentido dado que si el mercado esta en alza, es probable que se mantenga en alza durante unos meses y lo mismo si se encuentra en caída. No obstante, dicha autocorrelación en los retornos del mercado accionario alemán es transitoria dado que si se utiliza un rezago de 720 días¹⁰ en la prueba se observa que claramente ya no hay correlación serial en dichos retornos, lo que indica que ya en horizontes de tiempo diarios de más largo plazo no es posible utilizar información pasada de los retornos para predecir el comportamiento de los retornos diarios por lo que hay evidencia estadística que respalda la RW3 para el mercado accionario alemán en horizontes de tiempo diarios de largo plazo¹¹.

2. Prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller:

Ahora bien, una prueba complementaria a las pruebas de significancia conjunta sobre la presencia de correlación serial en los retornos diarios del mercado accionario alemán para corroborar estadísticamente la RW3 es la prueba de raíz unitaria de *Dickey Fuller*. Dicha prueba, permite establecer la presencia de *raíces unitarias* en el logaritmo de los precios. Si la prueba detecta que al menos hay evidencia de la presencia de una raíz unitaria en la serie del logaritmo del índice DAX 30, entonces dicho logaritmo del índice no se comporta como una serie estacionaria lo cuál respaldaría la RW3 dado que existiría la posibilidad de que su primera diferencia, es decir los retornos asociados al índice, sí fueran estacionarios, en cuyo caso el componente aleatorio de dichos retornos, es decir el ε_t , se comportarían como

⁹La hipótesis nula de ambas pruebas indica que no existe correlación serial en la serie considerando un determinado número de rezagos, mientras que la hipótesis alternativa indica que sí hay presencia de correlación serial en la serie.

¹⁰Tiene sentido utilizar 720 rezagos dado que el tamaño total de la serie de retornos diarios del DAX alemán empleada es de 5409 datos lo que hace que 700 rezagos sean menos de $\frac{1}{4}$ de la muestra que en algunos estudios empíricos se utiliza como límite superior al número de rezagos para incluir en las pruebas. La razón por la que se empleo 720 rezagos es porque esa cantidad de rezagos equivale a 720 días, 24 meses o 2 años, por lo que podría considerarse un horizonte de tiempo lo suficientemente largo para datos de frecuencia diaria

¹¹Se evidencia que se obtuvieron los mismos resultados tanto en la prueba de *Box-Pierce* como el prueba de *Ljung-Box*.

ruido blanco y por ende no presentarían correlación serial, $\text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0^{12}$.

Modelo	Hipótesis	Estadístico de prueba	Valor estadístico	Valores críticos para intervalos de confianza del 95 % y el 99 %
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_τ	-2.8694	- 3.41 y - 3.96
	$\gamma = a_2 = 0$	ϕ_3	4.7023	4.68 y 6.09
	$a_0 = \gamma = a_2 = 0$	ϕ_2	3.3345	6.25 y 8.27
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_μ	-0.6668	-2.86 y -3.43
	$a_0 = \gamma = 0$	ϕ_1	0.5214	4.59 y 6.43
$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ	0.7413	-1.95 y -2.58

Cuadro 3: Resultados de la prueba de raíz unitaria de Dickey Fuller Aumentada para los retornos diarios del DAX 30

Como se puede observa de la tabla 3, se ejecutó una prueba secuencial de *Dickey Fuller* empezando con la especificación más general del test $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$. De los resultados, del τ_τ , del ϕ_3 y del ϕ_2 no se rechaza ninguna hipótesis nula por lo que se puede descartar la presencia de tendencia determinística lineal en los retornos diarios de la serie. Por lo anterior, se procede a realizar la segunda especificación de la prueba $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ y observando nuevamente los resultados del τ_μ y del ϕ_1 no se rechaza ninguna hipótesis nula por lo que se puede descartar la presencia de deriva en la serie. Finalmente, dados los resultados de la especificación anterior, se procede a hacer la última especificación de la prueba $\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ y utilizando la información del estadístico τ^{13} se concluye que hay evidencia de raíz unitaria en la serie del logaritmo del DAX 30 y por ende dicha serie no es estacionaria¹⁴. Que la serie de dicho logaritmo del DAX 30 no sea estacionaria, es una evidencia estadística de que satisface la RW3 para el mercado accionario alemán, dado que si por el contrario dicho índice fuera estacionario, entonces su primera diferencia, es decir sus retornos, no podrían ser estacionarios¹⁵ dado que al diferenciar una serie estacionaria se le están agregando estructuras de correlación a la serie que antes no existían.

Para confirmar los resultados de la prueba de Dickey Fuller, se realiza la prueba de KPSS de raíz unitaria con lo que se obtuvo un valor estadístico de 37,59. Dado que, el valor crítico para la prueba KPSS al 95 % de nivel de significancia es 0,463, y teniendo en cuenta que la hipótesis nula de dicha prueba es que la serie es estacionaria, se rechaza la hipótesis nula a favor de la alternativa, con la que se concluye que la serie no es estacionaria y por ende se confirman los resultados de la prueba de ADF realizada anteriormente sobre los retornos diarios del DAX 30.

2.2.2. Test para el RW1 para retornos de frecuencia diaria

Dado los resultados anteriores, hay evidencia estadística de que la RW3 puede que se satisfaga en el mercado accionario alemán dado que parece que el logaritmo del índice del DAX 30 no es estacionario y además parece que a horizontes de tiempo muy cortos y muy largos no hay presencia de correlación serial en los retornos diarios. No obstante, ahora el interés se orienta hacia probar la forma más fuerte de la hipótesis de mercados eficientes, es decir la RW(1). Para probar dicha hipótesis, se realizan los famosos *test de razón de varianza* con lo que se busca ver si en efecto dichos retornos se comportan independiente e idénticamente distribuidos (IID) o por el contrario no lo hacen. En la hipótesis nula de dichos test, se debería cumplir que la varianza de los retornos crece de manera lineal por lo que la razón de varianza debería ser igual o 1 frente a la hipótesis alternativa de que la serie presenta cierto grado de correlación, en cuyo caso no es IID, y el estadístico puede asumir valores ya sean mayores a 1 o menores a 1.

¹²Lo anterior es así, si los retornos se pudieran modelar como $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$. Ahora bien, controlando por primas de riesgo μ_t y modelando el error como ruido blanco se tendría que los retornos r_t también se comportarían como ruido blanco lo que haría que no tuvieran correlación serial si se controlara por primas de riesgo.

¹³Dicha conclusión también se obtuvo de los estadístico τ_τ y τ_μ que se utilizaron en las dos especificaciones anteriores

¹⁴Todo el análisis anterior se realizó utilizando la función *ur.df* del paquete *urca*

¹⁵y no podrían tener autocorrelación de cero ajustando por primas de riesgo

Rezago	M1	M2	Valor crítico para el intervalos de confianza del 95 %
k = 2	-1.0088825	-0.6950008	-1.96
k = 10	-1.5415926	-0.9527398	-1.96
k = 30	-1.1266174	-0.7073144	-1.96
k = 60	-1.0279523	-0.6746608	-1.96
k = 90	-0.9531397	-0.6479166	-1.96
k = 700	-0.6577796	-0.5697482	-1.96

Cuadro 4: M1 y M2 para el test de razón de varianzas para los reotrnos diarios del DAX 30

Como se puede observar tanto en el estadístico M1 como en el estadístico M2 no se puede rechazar la hipótesis nula de razón de varianza igual a 1¹⁶ por lo que no hay evidencia estadística para rechazar que los retornos se comporten como IID lo que hace no rechazar la hipótesis nula. Eso significa, que la RW1 se satisface y parece ser que para el mercado accionario alemán, para los retornos diarios tanto en horizontes de corto como de largo plazo, dichos retornos sí son IID.

2.2.3. Test para el RW2 para retornos de frecuencia diaria

Finalmente, se va a probar la versión semi-fuerte de la hipótesis de mercados eficientes (RW2) para los retornos de frecuencia diaria. Para ello, se realizará un test basado en regresiones en dónde se verá si usando información pública se es posible predecir el comportamiento de los retornos futuros del DAX ciertos pasos adelante. Para dicha regresión auxiliar, se utilizará como variables regresoras:

- **Retornos SP500:** Retornos del índice accionario de las 500 empresas más grande de los Estados Unidos. Dicho retorno podría servir para predecir los retornos futuros del DAX alemán
- **Tasa de cambio nominal:** entre el dólar y el euro
- **Bonos:** Tasa libre de riesgo

Para ello se ejecutó, una regresión por mínimos cuadrado ordinarios dinámicos (MCOD) dado que se quiere conocer que tan bien predicen los regresores anteriores valores futuros de los retornos del DAX¹⁷.

Adelanto	p-valor estadístico F
k = 2	0.07089
k = 10	0.6521
k = 30	0.3923
k = 60	0.08564
k = 90	0.4719
k = 700	0.5327

Cuadro 5: tab:RW2_{diarios}

En la tabla ??, se observa que todos los p-valores, independientemente del número de adelantos que se tomen para los retornos diarios del DAX, son mayores a 0.05 por lo que a un nivel de significancia del 5% no puedo rechazar la hipótesis nula de no significancia conjunta por lo que la información pública utilizada para predecir los retornos futuros del DAX no es significativa y por ende no serviría para realizar dichas predicciones, lo anterior concuerda con la RW2 por lo que dicha versión de la hipótesis parece confirmarse para los retornos diarios del DAX alemán.

¹⁶Los estadísticos M1 y M2 se distribuyen como variables aleatorias normales por lo que los resultados de la tabla claramente indican que no se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 95 %. El M1 es para un test en donde se asume homocedasticidad, mientras que el M2 es para un test en donde se asume heterocedasticidad. En ambos casos, no se rechaza la hipótesis nula.

¹⁷Para implementar el modelo de MCODE se utilizó el comando *dynlm* en dónde L(serie, -k) denota k-pasos adelante de la serie. Dicho comandos e ejecutó directamente en R

2.2.4. Test para el RW3 para retornos de frecuencia mensual

La primera versión de la hipótesis de mercados eficientes que se testeó estadísticamente fue su versión más débil (RW3). Dado que en dicha versión débil el conjunto de información que se emplea es el de los retornos pasados, lo primero que se podría hacer es mirar la gráfica de ACF de los retornos mensuales para ver si gráficamente hay evidencia de correlación serial. Como lo muestra la figura 6, pareciera que no hay evidencia de correlación serial al menos considerando los primeros 24 rezagos para la serie con frecuencia mensual. No obstante, para confirmar esa evidencia gráfica se procede a hacer dos test estadísticos diferentes que permiten corroborar analíticamente mejor la RW3:

1. Tests de correlación serial para series de tiempo:

En primer lugar, se emplean dos tests distintos de correlación serial para ver si los retornos mensuales presentan autocorrelación al considerar diferente número de rezagos. Las dos pruebas que se emplearán son las pruebas de *Box-Pierce* y *Ljung-Box*, las cuales son pruebas de significancia conjunta, y me permiten determinar si luego de considerar cierto número de rezagos, existe evidencia de correlación serial en la serie o no¹⁸.

Prueba de correlación serial	p value
Box Pierce	
lag = 1	0.3044
lag = 2	0.3408
lag = 4	0.5253
lag = 12	0.8142
lag = 24	0.9242
lag = 84	0.999
Ljung Box	
lag = 1	0.3016
lag = 2	0.3358
lag = 4	0.5171
lag = 12	0.7941
lag = 24	0.896
lag = 84	0.9797

Cuadro 6: Pruebas de correlación serial para la verificación de la RW3 en el mercado accionario alemán

La tabla 6, muestra que al considerar horizontes tanto de corto plazo como para largo plazo para datos de frecuencia mensual, el supuesto de no correlación serial se cumple por lo que no es posible predecir el comportamiento del mercado accionario alemán usando información del último mes o de los últimos 7 años. Lo que indica que en cualquier horizonte de tiempo no es posible utilizar información pasada de los retornos para predecir el comportamiento de los retornos mensuales por lo que hay evidencia estadística que respalda la RW3 para el mercado accionario alemán en horizontes de tiempo mensuales tanto de corto plazo como de largo plazo¹⁹.

2. Prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller:

Ahora bien, una prueba complementaria a las pruebas de significancia conjunta sobre la presencia de correlación serial en los retornos mensuales del mercado accionario alemán para corroborar estadísticamente la RW3 es la prueba de raíz unitaria de *Dickey Fuller*. Dicha prueba, permite establecer la presencia de *raíces unitarias* en el logaritmo de los precios. Si la prueba detecta que al menos hay evidencia de la presencia de una raíz unitaria en la serie del logaritmo del índice DAX, entonces dicho logaritmo del índice no se comporta como una serie estacionaria lo cual respaldaría la RW3 dado que existiría la posibilidad de que su primera diferencia, es decir los retornos asociados al índice, sí fueran

¹⁸La hipótesis nula de ambas pruebas indica que no existe correlación serial en la serie considerando un determinado número de rezagos mientras que la hipótesis alternativa indica que sí hay presencia de correlación serial en la serie

¹⁹Se evidencia que se obtuvieron los mismos resultados tanto en la prueba de *Box-Pierce* como en la prueba de *Ljung-Box*

estacionarios, en cuyo caso la componente aleatorio de dichos retornos, es decir el ε_t , se comportarían como ruido blanco y por ende no presentarían correlación serial, $\text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$ ²⁰.

Modelo	Hipótesis	Estadístico de prueba	Valor estadístico	Valores críticos para intervalos de confianza del 95 % y el 99 %
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_τ	-3.2247	- 3.41 y - 3.96
	$\gamma = a_2 = 0$	ϕ_3	4.354	4.68 y 6.09
	$a_0 = \gamma = a_2 = 0$	ϕ_2	6.2675	6.25 y 8.27
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_μ	-0.5927	-2.86 y -3.43
	$a_0 = \gamma = 0$	ϕ_1	0.3869	4.59 y 6.43
$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ	0.6224	-1.95 y -2.58

Cuadro 7: Resultados de la prueba de raíz unitaria de Dickey Fuller Aumentada para los retornos mensuales del DAX 30

Como se puede observa de la tabla 7, se ejecutó una prueba secuencial de *Dickey Fuller* empezando con la especificación más general del test $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$. De los resultados, del τ_τ , del ϕ_3 y del ϕ_2 no se rechaza ninguna hipótesis nula por lo que se puede descartar la presencia de tendencia determinística lineal en los retornos mensuales de la serie. Por lo anterior, se procede a realizar la segunda especificación de la prueba $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ y observando nuevamente los resultados del τ_μ y del ϕ_1 no se rechaza ninguna hipótesis nula por lo que se puede descartar la presencia de deriva en la serie. Finalmente, y dados los resultados de la especificación anterior, se procede a hacer la última especificación de la prueba $\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ y utilizando la información del estadístico τ ²¹ se concluye que hay evidencia de raíz unitaria en la serie del logaritmo del DAX y por ende dicha serie no es estacionaria²². Que la serie de dicho logaritmo del DAX no sea estacionaria, es una evidencia estadística de que se satisface la RW3 para el mercado accionario alemán dado que si por el contrario dicho índice fuera estacionario, entonces su primera diferencia, es decir sus retornos, no podrían ser estacionarios²³ dado que al diferenciar una serie estacionaria se le están agregando estructuras de correlación a la serie que antes no existían.

Para confirmar los resultados de la prueba de Dickey Fuller, se realiza la prueba de KPSS de raíz unitaria con lo que se obtuvo un valor estadístico de 3,3784. Dado que, el valor crítico para la prueba KPSS al 95 % de nivel de significancia es 0,463, y teniendo en cuenta que la hipótesis nula de dicha prueba es que la serie es estacionaria, se rechaza la hipótesis nula a favor de la alternativa con la que se concluye que la serie no es estacionaria y por ende se confirman los resultados de la prueba de ADF realizada anteriormente sobre los retornos diarios del DAX alemán.

2.2.5. Test para el RW1 para retornos de frecuencia mensual

Dado los resultados anteriores, hay evidencia estadística de que la RW3 puede que se satisfaga en el mercado accionario alemán dado que parece que el logaritmo del índice del DAX no es estacionario y además parece que a horizontes de tiempo muy cortos y muy largos no hay presencia de correlación serial en los retornos diarios asociados al DAX. No obstante, ahora el interés se orienta hacia probar la forma más fuerte de la hipótesis de mercados eficientes, es decir la RW(1). Para probar dicha hipótesis, se realizan los famosos *test de razón de varianza* con lo que se busca ver si en efecto dichos retornos se comportan independiente e idénticamente distribuidos (IID) o por el contrario no lo hacen. En la hipótesis nula de dichos test, se debería cumplir que la varianza de los retornos crece de manera lineal por lo que la razón de varianza debería ser igual o 1 frente la hipótesis alternativa de que la serie presenta cierto grado de correlación, en cuyo caso no es IID, y el estadístico puede asumir valores ya sean mayores a 1 o menores a 1.

²⁰Lo anterior es así, si los retornos se pudieran modelar como $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$. Ahora bien, controlando por primas de riesgo μ_t y modelando el error como ruido blanco se tendría que los retornos r_t también se comportarían como ruido blanco lo que haría que no tuvieran correlación serial si se controlará por primas de riesgo

²¹Dicha conclusión también se obtuvo de los estadístico τ_τ y τ_μ que se utilizaron en las dos especificaciones anteriores

²²Todo el análisis anterior se realizó utilizando la función *ur.df* del paquete *urca*

²³y no podrían tener autocorrelación de cero ajustando por primas de riesgo

Rezago	M1	M2	Valor crítico para el intervalos de confianza del 95 %
k = 2	0.9273709	0.7650352	-1.96
k = 4	0.4282832	0.3392876	-1.96
k = 12	0.5475122	0.4445085	-1.96
k = 24	0.1946820	0.1643864	-1.96
k = 84	-1.2275846	-1.2417299	-1.96

Cuadro 8: M1 y M2 para el test de razón de varianzas para los retornos mensuales del DAX 30

Como se puede observar tanto en el estadístico M1 como en el estadístico M2 no se puede rechazar la hipótesis nula de razón de varianzas igual a 1²⁴ por lo que no hay evidencia estadística para rechazar que los retornos se comporten como IID lo que hace que uno se quede con la hipótesis nula. Eso significa, que la RW1 se satisface y parece ser que para el mercado accionario alemán, para los retornos mensuales tanto en horizontes de corto como de largo plazo parece ser que dichos retornos sí son IID.

2.2.6. Test para el RW2 para retornos de frecuencia mensual

Finalmente, se va a probar la versión semi-fuerte de la hipótesis de mercados eficientes (RW2) para los retornos de frecuencia mensual. Para ello, se realizará un test basado en regresiones en dónde se verá si usando información pública se es posible predecir el comportamiento de los retornos futuros del DAX ciertos pasos adelante. Para dicha regresión auxiliar, se utilizará como variables regresoras:

- **Retornos SP500:** Retornos del índice accionario de las 500 empresas más grande de los Estados Unidos. Dicho retorno podría servir para predecir los retornos futuros del DAX alemán
- **Tasa de cambio nominal:** entre el dólar y el euro
- **Bonos:** Tasa libre de riesgo

Para ello se ejecutó, una regresión por mínimos cuadrado ordinarios dinámicos (MCOD) dado que se quiere conocer que tan bien predicen los regresores anteriores valores futuros de los retornos del DAX²⁵.

Adelanto	p-valor estadístico F
k = 2	0.1005
k = 4	0.2012
k = 12	0.8882
k = 24	0.7245
k = 84	0.9114

Cuadro 9: tab:RW2_{mensuales}

En la tabla ??, se observa que todos los p-valores, independientemente del número de adelantos que se tomen para los retornos mensuales del DAX, son mayores a 0.05 por lo que a un nivel de significancia del 5 % no puedo rechazar la hipótesis nula de no significancia conjunta por lo que la información pública utilizada para predecir los retornos futuros del DAX no es significativa y por ende no serviría para realizar dichas predicciones, lo anterior concuerda con la RW2 por lo que dicha versión de la hipótesis parece confirmarse para los retornos diarios del DAX alemán.

²⁴Los estadísticos M1 y M2 se distribuyen como variables aleatorias normales por lo que los resultados de la tabla claramente indican que no se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 95 %. El M1 es para un test en donde se asume homocedasticidad mientras que el M2 es para un test en donde se asume heterocedasticidad. En ambos casos, no se rechaza la hipótesis nula.

²⁵Para implementar el modelo de MCO se utilizó el comando *dynlm* en dónde L(serie, -k) denota k-pasos adelante de la serie. Dicho comandos e ejecutó directamente en R

2.3. Conclusiones

Luego de realizar las pruebas estadísticas y gráficas para el índice accionario DAX 30 representativo del mercado accionario alemán, se concluye que este índice tanto en el corto como largo plazo para datos diarios y mensuales con un período de estudio desde enero de 2000 hasta abril de 2021, se cumple la Hipótesis de Mercados Eficientes en sus tres versiones dado el conjunto de información.

Referencias

- Bodie, Z., Drew, M., Basu, A. K., Kane, A., and Marcus, A. (2013). *Principles of investments*. McGraw-Hill Education (Australia).
- Fama, E. F. (1970). Session topic: stock market price behavior. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417.
- Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly.