Taller IX

Germán Camilo Rodríguez Perilla[1]

gecrodriguezpe@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia

Econometría Financiera

Colombia

24 Agosto 2021

[1]Estudiante pregrado Universidad Nacional de Colombia

Índice

Considere el siguiente resultado estadístico:
Any random variable x t can be decomposed into the sum of a conditional expectation given some information set I and a residual ν_t which is uncorrelated with that information set, $x_t = E[x_t|I] + \nu_t$ where $E[\nu_t|I] = 0$

1. Considerando el siguiente modelo GARCH(1,1) y haciendo uso del resultado estadístico anterior para η_t^2 muestre que η_t^2 (que representa las innovaciones o choques anteriores sobre los retornos al cuadrado) sigue un proceso ARMA(1,1) con residuales ν_t.

El proceso puede ser descrito mediante:

$$
\begin{aligned}
r_t &= \eta_t \\
\eta_t &= \sigma_t \epsilon_t \qquad \varepsilon \sim N(0,1) \\
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha\eta_t^2 + \beta\sigma_t^2 - 1
\end{aligned}
$$

Sea $I = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \cdots\}$ el conjunto de información que se va a usar para la siguiente demostración. Se escoge este conjunto de información, dado que representa los retornos pasadas de algún activo en particular[2].

Ahora bien, se sabe que una variable aleatoria puede ser descrita mediante:

$$x_t = E[x_t|I] + \nu_t \qquad \text{Donde } E[\nu_t|I] = 0 \tag{1}$$

Ahora bien, la media condicional de los retornos descritos por el sistema de ecuaciones inicial, es:

$$
\begin{aligned}
E[r_t|I] &= E[\sigma_t\eta_t|I] \\
&= \sigma_t \cdot E[\eta_t|I] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, la varianza condicional estaría dada por:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= var(r_t|I) \\
&= E[r_t^2|I] - (E[r_t|I])^2 \\
&= E[r_t^2|I] \\
&= E[\eta_t^2|I]
\end{aligned}
$$

Desarrollando el último término de la ecuación anterior:

$$
\begin{aligned}
E[\eta_t^2|I] &= E[\sigma_t^2\varepsilon_t^2|I] \\
&= \sigma_t^2 \cdot E[\varepsilon_t^2|I] \\
&= \sigma_t^2 \quad \text{Teniendo en cuenta que } \varepsilon \sim N(0,1) \\
&= \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad \text{Usando la fórmula del GARCH(1,1)} \\
&= \omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad \text{teniendo en cuenta que } r_{t-1}^2 = \eta_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

Utilizando 1 y la última ecuación anterior, se tiene que η_t^2 se puede describir como:

$$
\begin{aligned}
\eta_t^2 &= E[\eta_t^2|I] + \nu_t \\
\eta_t^2 &= \omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \nu_t \quad \text{Al reemplazar por el valor de } E[\eta_t^2|I]
\end{aligned}
$$

Como se puede observar, la última ecuación representa un modelo ARMA(1,1) para η_t^2. Por tanto, se pudo demostrar que mediante el conjunto de ecuaciones iniciales que representan el GARCH(1,1) planteado, es posible describir el η_t^2 como un proceso ARMA(1,1) con lo cual la demostración queda terminada.

[2] No se especifica el activo para no perder generalidad en el argumento

2. En el contexto del modelo anterior explique por que el modelo GARCH(1,1) captura clusters de volatilidad de los retornos asociados a una variable financiera.

Sea $I = \{r_{t-1}, r_{t-2}, \cdots\}$ el conjunto de información que se va a usar para la siguiente demostración. Se escoge este conjunto de información, dado que representa los retornos pasadas de algún activo en particular[3].

La *varianza incondicional* del proceso GARCH(1,1) anterior, puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= var(r_t) \\
&= E[r_t^2] - (E[r_t])^2 \\
&= E[r_t^2] \\
&= E[E[r_t^2|I] \quad \text{Por ley de expectativas iteradas} \\
&= E[\eta_t^2|I] \\
&= E[\omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2] \\
&= \omega + \alpha E[r_{t-1}^2] + \beta E[\sigma_{t-1}^2] \\
&= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2 \\
&= \frac{w}{1 - \alpha - \beta}
\end{aligned}$$

Despejando ω, se obtiene:

$$\omega = (1 - \alpha - \beta)\sigma^2$$

Dado, el resultado del ejercicio anterior, a saber que la varianza condicional del modelo GARCH(1,1) se puede modelar como un modelo ARMA(1,1), se tiene que:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \nu_t \tag{2}$$

Partiendo de la ecuación anterior, y reemplazando la *varianza no condicional* dentro de la *varianza condicional* se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \nu_t \\
&= (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \nu_t \\
&= \sigma^2 + \alpha(\eta_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2) + \nu_t \\
&= \sigma^2 + \alpha(r_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2) + \nu_t
\end{aligned}$$

Como se puede observar, la *varianza condicional* σ_t^2 se pudo expresar en términos de la *varianza no condicional* σ^2 y de unas desviaciones respecto a esa varianza no condicional.

Ahora bien, en caso de que $\alpha + \beta < 1$, se tendría que el proceso ARMA(1,1) que describe la varianza o volatilidad condicional del proceso sería estacionaria. Dicha estacionariedad de la series, se podría evidenciar en dicho comportamiento de reversión a la media, que en este caso sería la media de la *varianza condicional*, es decir, la *varianza incondicional*. El término en particular que captura los *clusters de volatilidad* sería $(r_{t-1}^2 - \sigma^2)$ dado que para que haya reversión de la *varianza condicional* o *volatilidad de corto plazo* a la *varianza incondicional* o *volatilidad de largo plazo*, se requiere que

[3] No se especifica el activo para no perder generalidad en el argumento

acompañado de periodos de alta volatilidad haya periodos de baja volatilidad[4] de tal forma que haya *correcciones* en la volatilidad de corto plazo que permitan revertir a la volatilidad de largo plazo[5]. Dicho término, capaz de capturar esos *clusters de volatilidad*, y por ende, esas reversiones a la volatilidad de largo plazo es $(r_{t-1}^2 - \sigma^2)$[6].

[4]Es decir, clusters de volatilidad

[5]Nuevamente, entendida esta volatilidad de largo plazo como la media de la volatilidad de corto plazo

[6]Se clarifica que el término $(\sigma_t^2 - \sigma^2)$ lo que captura es la estructura de autocorrelación en el proceso de volatilidad mientras que el término $(r_{t-1}^2 - \sigma^2)$ es el que captura los *clusters de volatilidad*