南京大学
Nanjing University

命题逻辑（一）

命题

- **定义1.1：**命题是一个能判断真假的陈述句。

命题

- **定义1.1：**命题是一个能判断真假的陈述句。

- 特征：
  - 陈述客观外界发生事情的陈述句；
  - 真假必居其一，且只能其一。

命题

- 下述都是命题：
  - 1+1>2。
  - 三角形的两边之和大于第三边。
  - 明天会下雨。
  - P=NP。(多项式时间可判定问题，非确定性多项式时间可判定问题)

命题

- 下述均不是命题：
  - 1+1>2?
  - 帮我拿下快递。
  - a>b。
  - 我正在撒谎。（悖论）

命题的抽象

- 以字母p、q、r等表示命题。

- 以1表示真，0表示假。

- 若p取值1，则表示p为真命题。

联结词和复合命题

- 由简单命题构造更复杂的命题：
  - 他很聪明。（简单命题）
  - 他即聪明又努力。
  - 他要回家，除非下雨。
  - 如果下雨，他就在家；否则他将去学校。

联结词和复合命题

- “没有”，“如果…那么…”，“既…又…”等都是**联结词**。
- 由联结词和命题连接而成的更加复杂的命题称为**复合命题**。
- 相对地，不能分解为更简单的命题称为**简单命题**（原子命题）。
- 复合命题的真假完全由构成它的简单命题的真假所决定。

否定联结词

定义1.2. 设p为一个命题，复合命题“非p”为p的**否定式**，（简称**否定**）记为$\neg p$，“$\neg$”被称为否定联结词。

$\neg p$为真当且仅当p为假

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取联结词

定义1.2. 设p、q为两个命题，复合命题“p且q”称为p、q的**合取式**（简称**合取**），记为$p \wedge q$，“$\wedge$”称为合取联结词。

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q$为真当且仅当p和q均为真

析取联结词

定义1.3. 设p、q为两个命题，复合命题"p或q"称为p、q的**析取式**（简称**析取**），记为$p \vee q$，"∨"称为析取联结词。

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$p \vee q$为真当p与q中至少一个为真

“或”与“异或”

- 日常用语中“或”有两种含义，如：
  - 下周在一食堂或二食堂吃饭；
  - 下一餐在一食堂或二食堂吃。
- 当构成它们的简单命题均为真时，前者为真，后者为假。
- 前者称为“相容或”，即析取；后者称为“相异或”，也称异或 ($p\oplus q$)。

p	q	$p\oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

蕴含联结词

定义1.4. 设p、q为命题，复合命题“如果p，则q”称为p对q的**蕴含式**（简称**蕴含**），记作$p \rightarrow q$，其中p为此蕴含式的**前件**，q为**后件**，“→”称为蕴含联结词。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow q$为假当且仅当p为真q为假

蕴含联结词

- 日常用语中“如果…那么…”有时指它们所联结的两个命题之间的某种关系，可能具有很多涵义，不在我们所讨论的范围内。
  - 如果他来，那么太阳从西边升起了。

- 人们可能会觉得，p为假的时候，“p蕴含q”是没有真假值的，或者这个命题是没有意义的。

蕴含联结词

- 在此处，“p蕴含q”的涵义为“p的真蕴含q的真”，或者“并非p真q假”。
  - 如果$x > 3$，则$x^2 > 9$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

等价联结词

定义1.5. 设p、q为命题，复合命题“p当且仅当q”称为p、q的**等值式**（简称**等值**），记作$p \leftrightarrow q$，“$\leftrightarrow$”称为等价联结词。

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词和复合命题

- 注意：
  - 上述联结词来源于日常用语的词汇，但并不完全一致。
  - 我们主要关心命题的真假值的关系，而不关心命题的内容。

字母表

定义1.6（字母表）． 命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$$p \quad q \quad r \quad \ldots$$

(2) 联结符号（联结词）：

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$$

(3) 辅助符号（标点符号）：

$$(\quad)$$

字母表

定义1.6（字母表）．命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$$p \quad q \quad r \quad \ldots$$

(2) 联结符号（联结词）：

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$$

(3) 辅助符号（标点符号）：

$$(\quad)$$

注：有些教科书联结符号还包含其它联结词，如“↔”。

表达式

- 表达式是有限的符号串。
  - p
  - pq
  - (r)
  - $p \wedge\!\rightarrow q$
  - $(p \vee q)$

- 表达式的长度是其中符号出现的数目。
  - 长度为0的表达式，称为空表达式，用记号∅表示。

表达式

- 两个表达式U和V是**相等**的，记作$U = V$，当且仅当长度相同且依次有相同的符号。

- UV表示U和V依次并列得到的表达式。
  - $U\emptyset = \emptyset U = U$

表达式

- 设U,V,W_1,W_2是表达式。

  如果$U = W_1VW_2$，那么称V是U的**段**。

  如果V是U的段，且$V \neq U$，那么V是U的**真段**。

表达式

- 设U, V, W_1, W_2是表达式。

  如果$U = W_1VW_2$，那么称V是U的**段**。

  如果V是U的段，且$V \neq U$，那么V是U的**真段**。

例如，$p \vee q$是$(p \vee q)$的真段。

任何表达式是它自己的段。

空表达式是任何表达式的段。

表达式

- 设U,V,W是表达式。

  如果$U = VW$，那么V是U的**初始段**，W是U的**结尾段**。

  如果$W \neq \emptyset$，那么V是U的**真初始段**。

  如果$V \neq \emptyset$，那么W是U的**真结尾段**。

表达式

- 设U, V, W是表达式。

  如果$U = VW$，那么V是U的**初始段**，W是U的**结尾段**。

  如果$W \neq \emptyset$，那么V是U的**真初始段**。

  如果$V \neq \emptyset$，那么W是U的**真结尾段**。

例如，$(p \vee q)$是$(p \vee q)$的初始段和结尾段。

$(p$是$(p \vee q)$的真初始段。

命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为PS（命题符集合）和$PROP$（命题集）。
  - 公式由表达式定义
  - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句

命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为PS（命题符集合）和$PROP$（命题集）。
  - 公式由表达式定义
  - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句

- 表达式不一定是公式
  - p
  - pq
  - (r)
  - $p \land\!\to q$
  - $(p \lor q)$

命题公式

定义1.7（$\boldsymbol{PS}$）. 命题语言中的一个表达式是PS中的元，当且仅当它是单独的一个命题符号。

- 注：PS是可数无穷集，即$|PS| = |N|$。

命题的定义

定义1.8（$\boldsymbol{PROP}$）. $A \in PROP$当且仅当它能**有限次**地由以下(i)~(iii)生成：

(i) $PS \subseteq PROP$；

(ii) 如果$A \in PROP$，则$(\neg A) \in PROP$；

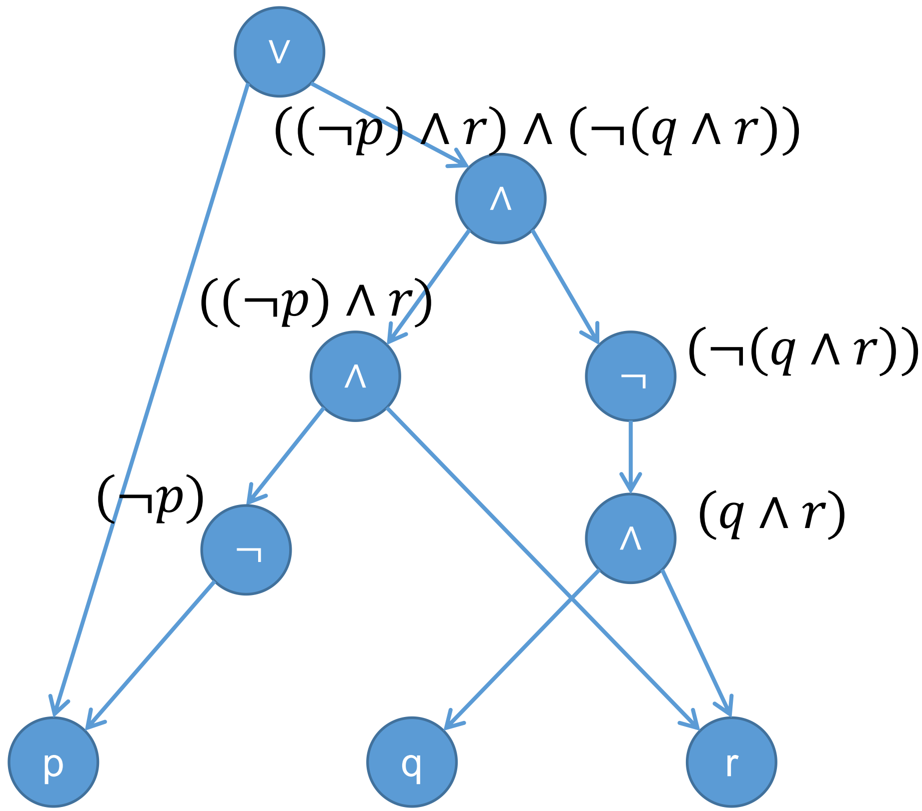
(iii) 如果$A, B \in PROP$，则$(A * B) \in PROP$。

其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

- 定义中的(i)~(iii)称为命题公式的**形成规则**。

命题的定义

- 例，$(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))$。



命题的定义

定义1.9（命题）.

1. 命题符为命题；
2. 若A，B为命题，则

   $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$和$(A \to B)$为命题；
3. 命题仅限于此。

命题的定义

定义1.9（命题）.

1. 命题符为命题；
2. 若A，B为命题，则

   $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$和$(A \rightarrow B)$为命题；
3. 命题仅限于此。

也可以用Bacus-Naur Form定义命题为

$$\varphi ::= P | (\neg\varphi) | (\varphi_1 \wedge \varphi_2) | (\varphi_1 \vee \varphi_2) | (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$$

其中$P \in PS$。

命题的定义

也可以用封包法定义命题：

令$C_\neg$，$C_\wedge$，$C_\vee$和$C_\rightarrow$为所有表达式之集上的函数：

$$C_\neg(A) = (\neg A)$$

$$C_*(A, B) = (A * B)$$

其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

命题的定义

定义1.10（$\boldsymbol{PROP}$）.

所有命题的集合$PROP$是满足以下条件的最小集合：

(i) $PS \subseteq PROP$；

(ii) 若$A \in PROP$，则$C_{\neg}(A) \in PROP$；

(iii) 若$A, B \in PROP$，则

$C_{\wedge}(A, B)$，$C_{\vee}(A, B)$和$C_{\rightarrow}(A, B) \in PROP$。

即$PROP$为在函数$C_{\neg}$，$C_{\wedge}$，$C_{\vee}$和$C_{\rightarrow}$下PS的归纳闭包。

命题的结构

定理1.11. 设R是一个性质。如果

(i) 对于$\forall p \in PS$，有$R(p)$；

(ii) 对于$\forall A \in PROP$，如果$R(A)$，则$R((\neg A))$；

(iii) 对于$\forall A, B \in PROP$，如果$R(A)$并且$R(B)$，则$R((A * B))$；

则对于$\forall A \in PROP$，有$R(A)$。

证明：令$S=\{A \in PROP | R(A)\}$，则$S \subseteq PROP$。

S满足定义1.10中条件(i)~(iii)：

(i) $PS \subseteq S$；

(ii) 若$A \in S$，则 $(\neg A) \in PROP$且有$R((\neg A))$，

因此$(\neg A) \in$S；

(iii) 若$A, B \in S$，则$(A * B) \in PROP$且有$R((A * B))$，

因此$(A * B) \in S$。

由定义可知$PROP \subseteq S$，即对于∀A $\in PROP$，有$R(A)$。

□

命题的结构

证明： 命题集是无穷可数集，即$|PROP| = |N|$ 。

$|PS| = |N|$，

$\forall A \in PROP$经过有限步生成

括号引理

引理1.12. 命题公式是不空的表达式。 □

括号引理

引理1.12. 命题公式是不空的表达式。 □

引理1.13（括号引理）. 对于任意命题公式，左括号和右括号出现的数目相同。 □

例，$(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg (q \wedge r))))$。

括号引理

引理1.12. 命题公式是不空的表达式。 □

引理1.13（括号引理）. 对于任意命题公式，左括号和右括号出现的数目相同。 □

易证，一个命题公式A要么为原子公式，要么以 (为开始，) 为结尾。

构造序列

引理1.14. $A \in PROP$等价于存在有穷序列$A_0, A_1, ..., A_n$使得$A = A_n$且对于$\forall i \leq n$,

或(a) $A_i \in PS$,

或(b) $\exists k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$,

或(c) $\exists k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

以上序列$A_0, A_1, ..., A_n$被称为A的构造序列。

证明：

令$PROP' = \{A|$存在有穷序列$A_0, A_1, \ldots, A_n$使A_n为A且对任何$i \leq n$或(a)或(b)或$(c)\}$。

欲证$PROP = PROP'$，只需证

(1) $PROP' \subseteq PROP$ 和 (2) $PROP \subseteq PROP'$

现证 (1)

设$A \in PROP'$，从而存在$A_0, A_1, ..., A_n$满足对任何 $i \leq n$ 有 (a) 或 (b) 或 (c)。对 i 归纳证明$A_i \in PROP$。

归纳基础：当 $i = 0$ 时，只有(a)成立，即$A_0 \in PS$。

归纳假设：设对于 $\forall k < i$ 有 $A_k \in PROP$ 成立。

归纳步骤：对于 i 有如下情况

(a) $A_i \in PS$ 从而 $A_i \in PROP$

(b) $A_i = (\neg A_k)$，此处 $k < i$，由归纳假设可知 $A_k \in PROP$。由形成规则(ii)，可得 $A_i \in PROP$。

(c) $A_i = (A_k * A_l)$，此时 $k, l < i$，从而有归纳假设可知

$A_k, A_l \in PROP$，由形成规则(iii)，可得 $A_i \in PROP$。

由数学归纳法，可得$A_n \in PROP$，$PROP' \subseteq PROP$。

现证 (2)

由定义1.10可知，$PROP$是满足定义1.10中条件(i)~(iii)的最小集合，故只需证$PROP'$也满足条件(i)~(iii)。

(i) $PS \subseteq PROP'$是显然的；

(ii) 设$A \in PROP'$，则存在A的构造序列$A_0, A_1, \ldots, A_n$，那么

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, (\neg A)$$

是$(\neg A)$的构造序列，因此$(\neg A) \in PROP'$；

(iii) 类似地，设$A, B \in PROP'$，则存在A和B的构造序列，

$A_0, A_1, \ldots, A_n$和$B_0, B_1, \ldots, B_n$，那么

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n, (A * B)$$

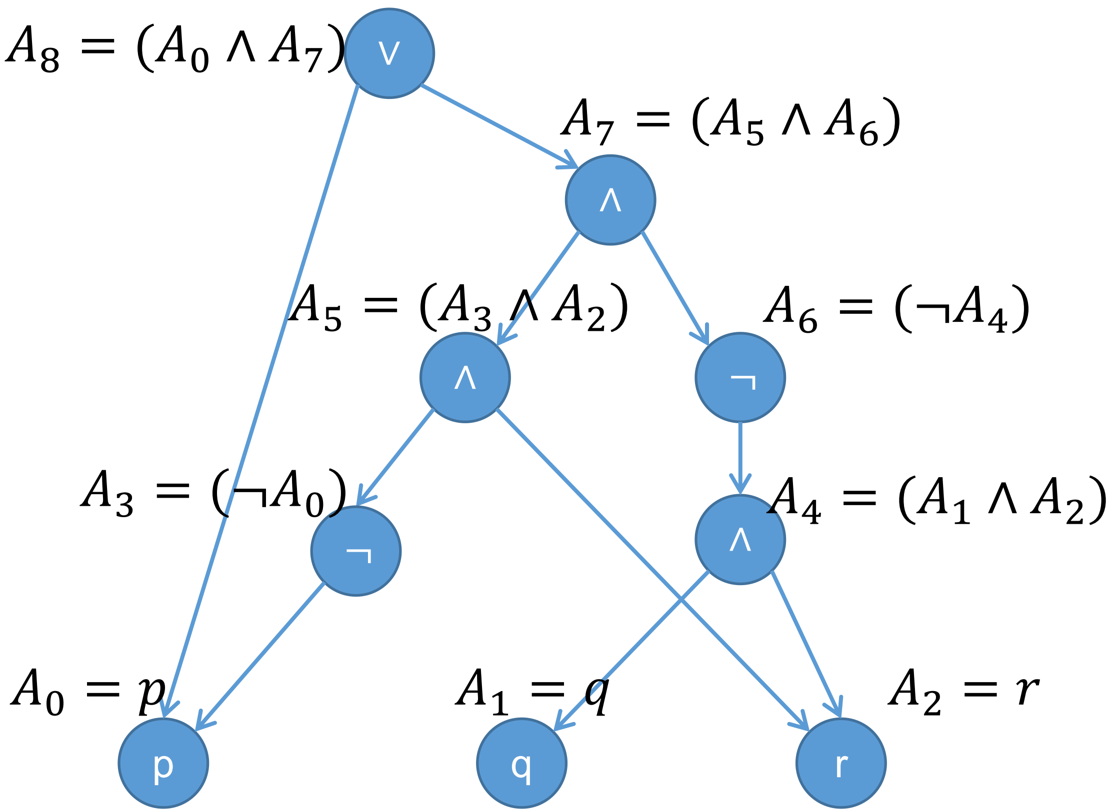
是$(A * B)$的构造序列，因此$(A * B) \in PROP'$。

所以$PROP'$也满足条件(i)~(iii)，故$PROP \subseteq PROP'$。

□

结构归纳

- 每个命题都有构造过程，但是不一定唯一。
- 例，$A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))) = A_8$。



结构归纳

- 每个命题都有构造过程，但是不一定唯一。

- 若$A_0, A_1, ..., A_n$为A的最短构造序列，

  则称n为A的**构造长度**。

- 上述归纳证明被称为**对命题公式的生成过程的结构作归纳**，简称**对命题公式的结构作归纳**。

公式的结构

引理1.15.

在命题公式的任意非空真初始段中，左括号出现的次数大于右括号。

在命题公式的任意非空真结尾段中，右括号出现的次数大于左括号。

<u>命题公式的非空真初始段和真结尾段都不是命题公式。</u>

□

例，$U = VW$

$$A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))。$$

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \to B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \rightarrow B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = (((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$

  属于上述哪一种形式？

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \rightarrow B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = (\underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_{B} \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_{C})$

$A = (B \rightarrow C)$ ✔

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \to B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = (\underbrace{((\neg p) \vee (q \to r))}_{\text{B}} \to \underbrace{(p \wedge r)}_{\text{C}})$ $\quad A = (B \to C)$ ✔

$$A = (\underbrace{((\neg p)}_{\text{B}} \vee \underbrace{(q \to r)) \to (p \wedge r)}_{\text{C}}) \qquad A = (B \vee C)\ ?$$

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \land B)$，$(A \lor B)$，或$(A \to B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = ((\underbrace{(\neg p) \lor (q \to r))}_{\mathrm{B}} \to \underbrace{(p \land r)}_{\mathrm{C}})$　　$A = (B \to C)$ ✔

$$A = (\underbrace{((\neg p)}_{\mathrm{B}} \lor \underbrace{(q \to r)) \to (p \land r)}_{\mathrm{C}})$$　　$A = (B \lor C)$ ✘

$B = ((\neg p)$，$C = (q \to r)) \to (p \land r)$

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \to B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = (\underbrace{((\neg p) \vee (q \to r))}_{\text{B}} \to \underbrace{(p \wedge r)}_{\text{C}})$　　$A = (B \to C)$ ✔

$$A = (\underbrace{((\neg p) \vee (q \to r)) \to (p}_{\text{B}} \wedge \underbrace{r)}_{\text{C}})$$　　$A = (B \wedge C)$ ✘

$B = ((\neg p) \vee (q \to r)) \to (p$，$C = r)$

公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，或$(A \rightarrow B)$；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设$A = (\underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_{\mathrm{B}} \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_{\mathrm{C}})$　　$A = (B \rightarrow C)$ ✔

$$A = ((\underbrace{(\neg p) \vee (q}_{\mathrm{B}} \rightarrow \underbrace{r)) \rightarrow (p \wedge r}_{\mathrm{C}}))$$

$A = (B \rightarrow C)$ ✘

$$B = ((\neg p) \vee (q，\ C = r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

证明：定理需要证明如下四点：

(1) 每一个公式所具有的形式包括在五种形式之中。

(2) 这五种形式中的任两种都不相同。

(3) 如果$(\neg A) = (\neg A_1)$，则$A = A_1$。

(4) 如果$(A * B) = (A_1 *_1 B_1)$，则$A = A_1$，$B = B_1$。

(1)至多五种，(2)一种不能少

(3)和(4)为证明唯一性。

由定义可得，(1)显然成立。

证(2)

原子公式是单独一个符号，故与其它形式不同。

假设$(\neg A)$和其它三种形式之一相同，即存在B和C，使得

$$(\neg A) = (B * C).$$

那么符号$\neg$是公式B的初始段，根据命题公式的定义，矛盾。

继续证(2)

假设存在公式A，B，A_1和B_1，使得

长度相等且依次有相同符号

$$(A \wedge B) = (A_1 \vee B_1).$$

那么A和A_1以同一个符号开始。

假设$A \neq A_1$，那么其中一个是另一个的非空真初始段，非空真初始段不是公式（引理1.15），矛盾。

由于$\wedge$与$\vee$不同，所以$(A \wedge B) \neq (A_1 \vee B_1)$。

其他两个不同的二元联结符号的情形都是类似的。

证(3)

如果$(\neg A) = (\neg A_1)$，则$A = A_1$是显然的。

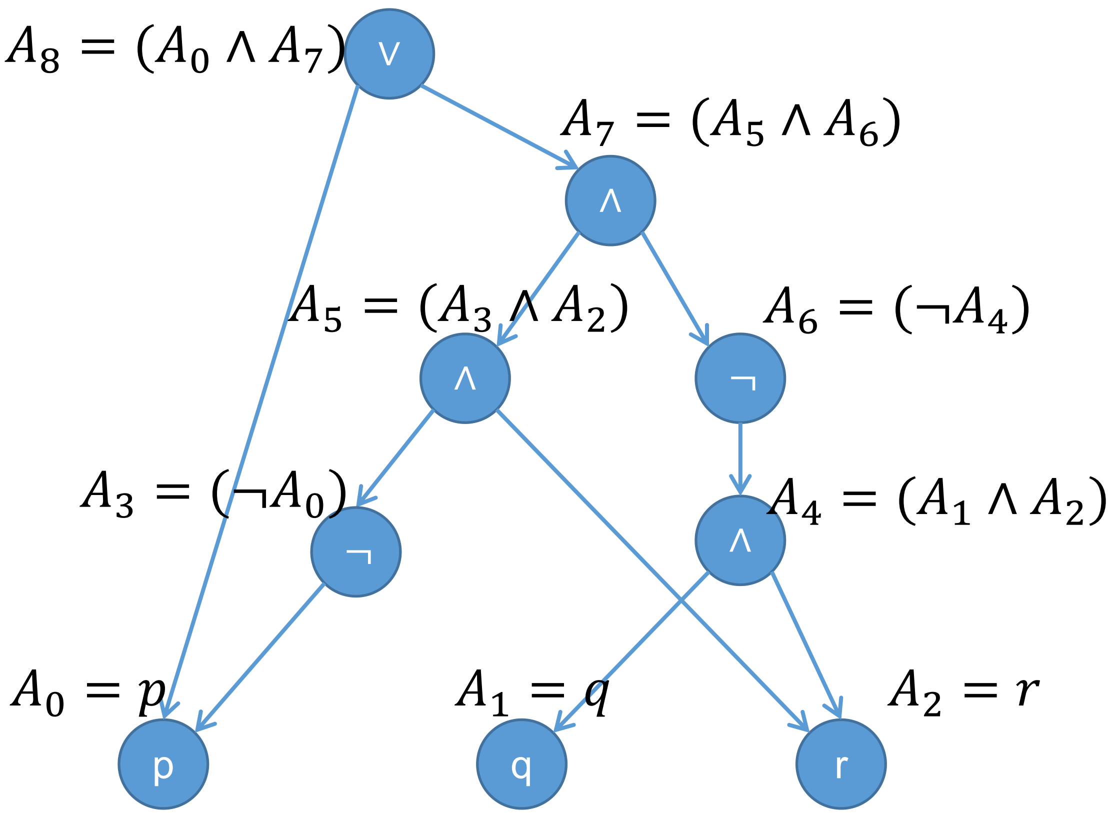
证(4)

如果$(A * B) = (A_1 *_1 B_1)$，由(2)的证明可证$A = A_1$，那么*与$*_1$是同一个符号，所以自然地，$B = B_1$。

□

公式的结构

- $A \in PROP$的构造序列不唯一，但若不考虑其中步骤的顺序，那么公式的生成过程是唯一的。
- 例，$A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))) = A_8$。



辖域

定义1.17（辖域）.

如果$(\neg A)$是C的段，则称A为它左边的¬在C中的**辖域**。

如果$(A * B)$是C的段，则分别称A和B为它们之间的*在C中的**左辖域**和**右辖域**。

注：这里的A、B、C都是公式。

辖域

定义1.17（辖域）.

如果$(\neg A)$是C的段，则称A为它左边的¬在C中的**辖域**。

如果$(A * B)$是C的段，则分别称A和B为它们之间的*在C中的**左辖域**和**右辖域**。

例，设$A = ((\neg(p \to q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$。

第一个¬在A中的辖域是$(p \to q)$

第二个¬在A中的辖域是r

辖域

定义1.17（辖域）.

如果$(\neg A)$是C的段，则称A为它左边的¬在C中的**辖域**。

如果$(A * B)$是C的段，则分别称A和B为它们之间的*在C中的**左辖域**和**右辖域**。

例，设$A = ((\neg(p \to q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$。

$\to$的左辖域是p，右辖域是q

∨的左辖域是$(\neg(p \to q))$，右辖域是$(q \wedge (\neg r))$

辖域

定理1.18. 任何命题公式A中的任何¬（若存在）有唯一的辖域。任何A中的任何*（若存在）有唯一的左辖域和右辖域。

证明：

A中任何¬均由¬的形成规则生成，

所以存在某个公式B使得$(\neg B)$是A的段，

B即为此¬在A中的辖域。

同理可证*存在左辖域和右辖域。

下证辖域的唯一性。

设¬是A中的一个联结符号，假设B和B’都是它在A中的辖域。

那么$(\neg B)$和$(\neg B')$均为A中的段。

由于B和B’左侧的¬是A中的同一个符号，B和B’非空，

那么B与B’以A的同一个符号开始，因此B=B’（由定理1.16中关于(2)的证明可得）。

下证辖域的唯一性。

设¬是A中的一个联结符号，假设B和B'都是它在A中的辖域。

那么$(\neg B)$和$(\neg B')$均为A中的段。

由于B和B'左侧的¬是A中的同一个符号，B和B'非空，

那么B与B'以A的同一个符号开始，因此B=B'（由定理1.16中关于(2)的证明可得）。

<u>**注意：**$(\neg B)$和$(\neg B')$中的(和¬都是同一个符号，但是右括号)不一定。</u>

下证左、右辖域的唯一性。

设*是A中的一个符号，假设B和B’是它在A中的左辖域，C和C’是它在A中的右辖域。

那么$(B * C)$和$(B' * C')$都是A的段，且B、C与B’、C’间的*是A中的同一个符号。

类似地，B和B’以A的同一个符号结尾，C和C’以A的同一个符号开始，从而可证B＝B’，C＝C’。

□

辖域

推论1.19. 如果公式A是公式B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。

辖域

推论1.19. 如果A是B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。

例，设$B = ((\neg(p \to q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$，

$A = (q \wedge (\neg r))$是B的段。

$\wedge$在A中的左、右辖域为q和$(\neg r)$，在B中的左、右辖域也是q和$(\neg r)$。

辖域

推论1.19. 如果公式A是公式B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。

- 由命题公式生成过程的唯一性，与辖域的唯一性，可证。

公式的结构

定理1.20.

(i) 如果公式A是$(\neg B)$的段，则$A = (\neg B)$，或者A是B的段。

(ii) 如果公式A是$(B * C)$的段，则要么$A = (B * C)$，或者A是B或C的段。

公式的结构

定理1.20.

(i) 如果A是$(\neg B)$的段，则$A = (\neg B)$，或者A是B的段。

(ii) 如果A是$(B * C)$的段，则要么$A = (B * C)$，或者A是B或C的段。

例，设A是$(\neg B) = (\neg(((\neg p) \vee q) \to r))$的段。

若A是$(\neg B)$的真段，则A不能含$(\neg B)$的开始的左括号，结尾的右括号，和B左边的$\neg$，否则A不是公式。

A只能为p，$(\neg p)$，q，$((\neg p) \vee q)$，r或$((\neg p) \vee q) \to r)$。

公式的结构

定理1.20.

(i) 如果A是$(\neg B)$的段，则$A=(\neg B)$，或者A是B的段。

(ii) 如果A是$(B*C)$的段，则要么$A=(B*C)$，或者A是B或C的段。

例，设A是$(B*C)=((p\wedge(\neg q))*(\neg r))$的段。

若A是$(B*C)$的真段，则A不能含$(B*C)$的开始的括号，结尾的右括号，和B、C间的*。

任何含这三个符号的$(B*C)$的真段都不是公式。

证明：

要证(i)，只需证明，若A是$(\neg B)$的真段，则A是B的段。

设A是$(\neg B)$的真段，即$(\neg B) = WAW_1$。

假设A含$(\neg B)$的开始的左括号，则A是$(\neg B)$的真初始段（即W为空表达式），那么A不是公式。

同理，A也不能含有$(\neg B)$的结尾的右括号。

假设A含$(\neg B)$中B左侧的$\neg$，则A必须含$(\neg B)$的开始的左括号，那么A是$(\neg B)$的真初始段，矛盾。

现在证(ii)，即证明若A是$(B * C)$的真段，则A是B的段或是C的段。设A是$(B * C)$的真段。

假设A含$(B * C)$的开始的左括号或结尾的右括号，证明同(i)。

假设A含$(B * C)$的B、C之间的*，则由于A是公式，此处的*在A中有左、右辖域，令它们分别为B_1和C_1。

由推论1.19可知，$B = B_1$和$C = C_1$。

由辖域的定义1.17，可知$(B_1 * C_1)$=$(B * C)$是A的段，矛盾。

□

思考

- 命题逻辑公式的长度不能为2、3或6，但其他长度都是可能的。

思考

- 命题逻辑公式的长度不能为2、3或6，但其他长度都是可能的。

- 设U、V和W是非空的命题表达式，证明UV和VW不能都是公式。

如何判断是否是公式

- 括号数目不足以判断一个表达式是公式。
  - 必要非充分

- 例，(p)

如何判断是否是公式

令U是一个命题表达式。

- 第一步：空表达式不是公式。
- 第二步：单独一个符号的表达式是公式，当且仅当它是命题符号。
- 第三步：如果U长度大于1，则U必须以左括号开始，否则U不是公式。
- 第四步：
  - 如果U的第二个符号是$\neg$，则U必须是$(\neg V)$，且U是公式当且仅当V是公式。
  - “U是否是公式”的问题规约为更短的表达式“V是否是公式”的问题，然后转入第一步。

如何判断是否是公式

- 第五步：
  - 如果U的第二个符号不是¬，那么对U从左向右扫描，在遇到$(V$后停止，其中V是一个含左括号与右括号数目相同的表达式。
  - U是公式当且仅当U是$(V * W)$的形式，且V和W均为公式。
  - 如果对U扫描完未发现这样的V，则U不是公式。
  - 因此将“U是否是公式”的问题规约为更短的表达式“V和W是否是公式”的问题，然后转入第一步。

如何判断是否是公式

- 第五步：
  - 如果U的第二个符号不是¬，那么对U从左向右扫描，在遇到$(V$后停止，其中V是一个含左括号与右括号数目相同的表达式。
  - U是公式当且仅当U是$(V * W)$的形式，且V和W均为公式。
  - 如果对U扫描完未发现这样的V，则U不是公式。
  - 因此将“U是否是公式”的问题规约为更短的表达式“V和W是否是公式”的问题，然后转入第一步。

- 由于表达式长度是有限的，上述过程会在有限步之后结束。

命题公式的简写

- $(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg (q \wedge r))))$
- $(((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$
- $((\neg (p \rightarrow q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$
- $(\neg (((\neg p) \vee q) \rightarrow r))$

- 括号太多，不方便书写和阅读

命题公式的简写

- 通常省略最外层的括号

$$(((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$$

可写成

$$((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

- 辅助符号引入方括号、大括号

$$p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))$$

可写成

$$p \vee \{[(\neg p) \wedge r] \wedge [\neg(q \wedge r)]\}$$

命题公式的简写

- 约定联结符号的优先级

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow$$

$$((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

可写成

$$\neg p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg (q \wedge r)))$$

可写成

$$p \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg (q \wedge r))$$

命题公式的简写

注：省略括号是为了方便阅读和书写。过渡省略括号会适得其反。

例如，命题公式

$$p \vee \neg q \wedge r \rightarrow \neg r$$

写成

$$p \vee (\neg q \wedge r) \rightarrow \neg r$$

可能更好。

命题公式的简写

注：省略括号是为了方便阅读和书写。过渡省略括号会适得其反。

当考虑公式的结构时，不能省略括号。

小结

- 命题逻辑表达式
- 命题逻辑公式
  - 归纳定义
- 命题逻辑公式的结构
  - 结构归纳证明

命题公式的语法