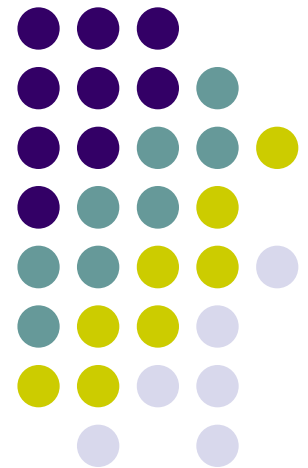


预备知识





集合

- 集合有一些对象汇集而成。这些对象称为元素。

$$a \in S$$

$$a \notin S$$

$$a, b, c \in S$$

- 集合由所包含的元素确定。称集合S与T相等，记作 $S=T$ ，当且仅当对于 $\forall x \in S$ ，有 $x \in T$ ，且 $\forall x \in T$ ，有 $x \in S$ 。
 - $\{a\} = \{a, a\}$,
 - $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, b\} = \{a, b, b, a\}$
 - $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{b, c, b, a\}$



集合

- 集合所包含元素的全体，称为**外延**。集合的元素所共有的性质，称为集合的**内涵**。
 - 例如，非负偶数集的外延为 $\{0, 2, 4, \dots\}$ ，它的内涵是“非负的偶数”。
- 对于 $\forall x \in S$ ，则 $x \in T$ ，称 S 为 T 的**子集**，记作 $S \subseteq T$ 。
- 称 S 为 T 的**真子集**，当且仅当 $S \subseteq T$ 且 $S \neq T$ 。



集合

- **空集**是一个特殊的集合，它不包含任何元素，且是任何集合的子集。

- 给定集合S和T，我们定义

$$\bar{S} = \{x | x \notin S\},$$

$$S \cup T = \{x | x \in S \text{ 或 } x \in T\},$$

$$S \cap T = \{x | x \in S \text{ 且 } x \in T\},$$

$$S - T = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin T\},$$

- 称 \bar{S} 为S的**补（集）**， $S \cup T$ 为S和T的**并（集）**， $S \cap T$ 为S和T的**交（集）**， $S - T$ 为S和T的**差（集）**。

有序偶

- 对象 a 和 b 的有序偶记作 $\langle a, b \rangle$.
 - $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$
 - $\langle a, b \rangle$ 与 $\{a, b\}$ 不同
- 有序 n 元组 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.
 - $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$, 当且仅当 $n=m$ 且 $a_i = b_i$ 。
- 例如, $\{\langle m, n \rangle | m, n \text{ 是自然数并且 } m < n\}$ 是自然数的序偶的集合, 其中序偶的第一个数小于第二个数。



笛卡尔积

- 集合 S_1, \dots, S_n 的笛卡尔积为：

$$S_1 \times \dots \times S_n = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n\}.$$

- 当 $S_1 = \dots = S_n = S$ 时， $S_1 \times \dots \times S_n = S^n$ ，称为 S 的 n 次笛卡尔积。



关系

- 当 $n=1$ 时, S 上的**一元关系** R 是 S 中元素的一个性质:

$$R = \{x \in S | x \text{ 有 } R \text{ 的性质}\}.$$

- 当 $n \geq 2$ 时, 集合 S 上的 **n 元关系** R 为:

$$R = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | x_1, \dots, x_n \in S, \text{ 且 } x_1, \dots, x_n \text{ 之间有 } R \text{ 关系}\}.$$

➤ 特别地, $R \subseteq S^n$ 。



关系

- 相等关系是任何集合 S 上的一个特殊二元关系

$$\{\langle x, y \rangle | x, y \in S, \text{且} x = y\},$$
$$\{\langle x, x \rangle | x \in S\}.$$

- 自然数集的一元关系“是偶数”，它的内涵是“被2整除”，它的外延是 $\{x | x \text{是自然数, 且被2整除}\}$ 。



关系

- 自然数集行的二元关系“小于”， $m < n$ 的内涵是：
存在不等于0的自然数 x ，使得 $m + x = n$ 。

“小于”的外延是

$$\{\langle m, n \rangle | m, n \text{ 是自然数, 且 } m < n\}.$$



函数

- 函数（也称映射） f 是有序偶构成的集合，使得如果 $\langle x, y \rangle \in f$ ，并且 $\langle x, z \rangle \in f$ ，则 $y=z$ 。

- 函数 f 的定义域为：

$$\text{dom}(f) = \{x | \exists y, s.t., \langle x, y \rangle \in f\}.$$

- 函数 f 的值域为：

$$\text{ran}(f) = \{y | \exists x, s.t., \langle x, y \rangle \in f\}.$$



函数

- 若 f 是函数，且 $x \in \text{dom}(f)$ ，则使得 $\langle x, y \rangle \in f$ 成立的唯一的 y 记作 $f(x)$ ，即 y 为 f 在 x 处的值。
- 若 f 是函数，且 $\text{dom}(f) = S$ ， $\text{ran}(f) \subseteq T$ ，则称 f 为由 S 到 T 中的函数（或映射），记作
$$f: S \rightarrow T.$$
 - 若 $\text{ran}(f) = T$ ，则称 f 映射 S 到 T 上，即满射。
 - 若 $f(x) = f(y)$ ，则 $x = y$ ，称 f 是单射。
 - 单射+满射=双射（一一映射）。



函数

- 集合 S 上的 n 元函数 f 是 S^n 到 S 中的映射。
 - 加法、乘法是自然数集上的二元函数
- 若 f 是 n 元函数，且 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \text{dom}(f)$ ，则一般用 $f(x_1, \dots, x_n)$ 表示 $f(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$ 。



关系与函数的限制

- 设 R 是 S 上的 n 元关系, $S_1 \subseteq S$ 。 R 到 S_1 上的限制为 n 元关系
 $R \cap S_1^n = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | x_1, \dots, x_n \in S_1, \text{ 且 } x_i \text{ 之间有 } R \text{ 关系}\}.$

- 设 $f: S \rightarrow T$ 是函数, $S_1 \subseteq S$ 。 f 到 S_1 上的限制为:

$$f|_{S_1}: S_1 \rightarrow T,$$

即, 对于 $\forall x \in S_1$, $(f|_{S_1})(x) = f(x)$ 。



等价类

- 设 R 是二元关系，我们常用

$$xRy$$

表示 $\langle x, y \rangle \in R$ 。

- R 在 S 上是**自反的**，当且仅当对于 $\forall x \in S$ ， xRx 。
- R 在 S 上是**对称的**，当且仅当对于 $\forall x, y \in S$ ，若 xRy ，则 yRx 。



等价类

- R 在 S 上是传递的，当且仅当对于 $\forall x, y, z \in S$ ，若 xRy ，且 yRz ，则 xRz 。
- R 是 S 上的二元关系，若 R 满足自反性、对称性、传递性，则称 R 是 S 上的等价关系。
- 设 R 是 S 上的等价关系，对于 $\forall x \in S$ ，称集合
$$\bar{x} = \{y \in S | xRy\}$$
为 x 的 R 等价类。



等价类

- R等价类作出S的一个划分，即R等价类是S的子集，且S的每个元素恰好属于一个R等价类。
 - 对于 $\forall x, y \in S$ ，有 $\bar{x} = \bar{y}$ 当前仅当 xRy 。
- 例如，自然数集合上的同余等价类
 - $x \bmod 3 = 0, 1, 2$, (xRy 即 $x \bmod 3 = y \bmod 3$)



集合的势

- 称两个集合S和T为**等势的**，记作 $S \sim T$ ，当且仅当存在有S到T的一一映射。
 - 等势是等价关系，所以可以根据等势将集合分类。
- 集合S的**基数**（或**势**），记作 $|S|$ 。
 - 若 $|S|=|T|$ 当前仅当 $S \sim T$ 。
 - $|S| \leq |T|$ 表示存在从S到T中的一一函数。



集合的势

- 对于有限集 S ， $|S|$ 是一个自然数 n ，则 n 表示 S 内元素数目。
且 S 与 $\{1, \dots, n\}$ 是等势的。
- 称 S 为无限可数的，当且仅当 $|S| = |\mathbb{N}|$ 。
- 称 S 为可数的，当且仅当 $|S| \leq |\mathbb{N}|$ 。



集合的势

- 定理:

可数集的子集是可数的。

有限个可数集的并是可数的。

可数个可数集的并是可数的。

有限个可数集的笛卡尔积是可数的。

所有以可数集的元素为分量的有限序列构成的集合是可数的。