

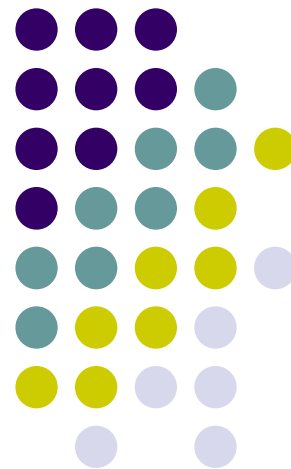


南京大学
Nanjing University

数理逻辑

葛存菁

南京大学人工智能学院





课程信息

- 葛存菁 (gecunjing@nju.edu.cn)
- 王烨阳 (助教 502024370036@smail.nju.edu.cn)
- 课件和作业链接
 - <https://gecunjing.github.io/Logic/2025/>



课程信息

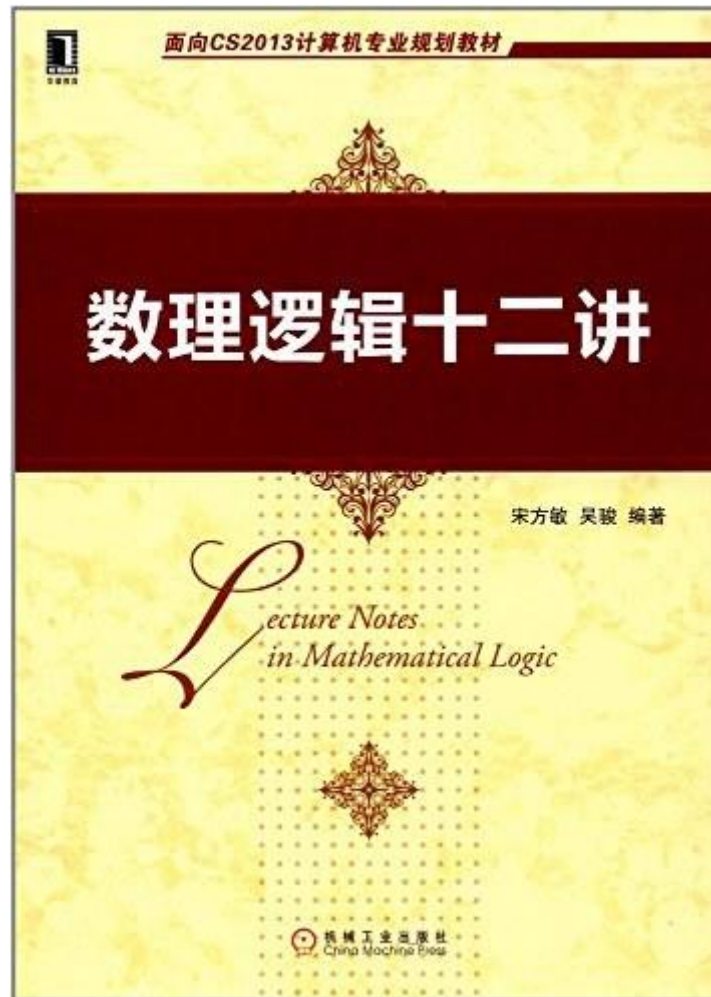
- 成绩：

- 作业（30%）
- 期中考试（20%）
- 期末考试（50%）

- 作业：

- 交作业的日子会在布置作业时说明
 - 每两周交一次作业
- 迟交至多得70%（特殊原因联系我或助教）

课本



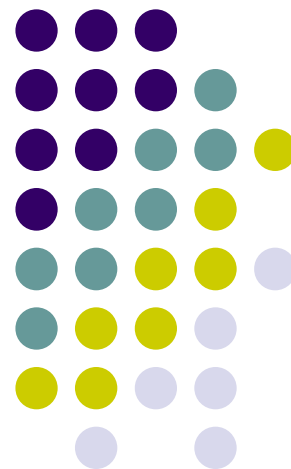


推荐书籍

- [1] 陆钟万，面向计算机科学的数理逻辑
- [2] Hantao Zhang, Jian Zhang, Logic in Computer Science - Problem Solving by Logic Tools
- [3] 胡世华，陆钟万，数理逻辑基础，上下



什么是数理逻辑？



例子



- All men are mortal
Socrates is a man
Therefore, Socrates is mortal



例子

- All men are mortal
Socrates is a man
Therefore, Socrates is mortal
- 推理正确，前提与结论为真

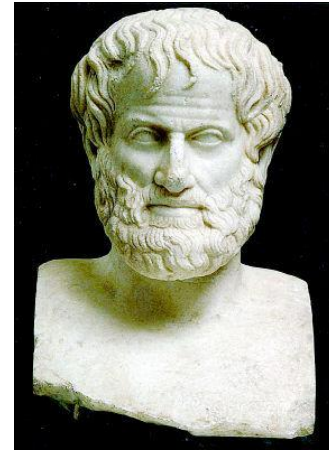


例子

- All men are mortal
Socrates is a man
Therefore, Socrates is mortal
- 推理正确，前提与结论为真
- 所有学生打网球（前提）
小王不打网球（前提）
小王不是学生（结论）
- 推理也正确，但前提与结论未必为真

三段论

- 历史上可追溯到亚里士多德
- All men are mortal
Socrates is a man
Therefore, Socrates is mortal
- 基本形式
大前提: All M are P
小前提: All S are M
结论: All S are P



Aristotle
(384BC - 324BC)





例子

- 所有的牛都有角（前提）
有些动物是牛（前提）
因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确



例子

- 所有的牛都有角（前提）
有些动物是牛（前提）
因此，所有动物有角（结论）
- 推理不正确
- 推理方法的正确性
- 前提与结论的真假

两件事



例子

- 白头翁是一种鸟
老李是一个白头翁
因此，老李是一个鸟



例子

- 白头翁是一种鸟
老李是一个白头翁
因此，老李是一个鸟
- 推理不正确（自然语言相似不保证逻辑形式上相同）



例子

- 白头翁是一种鸟
老李是一个白头翁
因此，老李是一个鸟
- 推理不正确（自然语言相似不保证逻辑形式上相同）
- 两套语言
 - 被讨论的语言，称为**对象语言**
 - 讨论对象语言所用的语言，称为**元语言**



符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，
符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。
符号构成公式，公式表示命题.....



符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，
符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。
符号构成公式，公式表示命题.....
- 语法（Syntax）与语义（Semantics）的分离。
 - 语法：符号表达式的形式结构
 - 语义：符号和符号表达式的涵义



符号逻辑

- 自然语言表达人的思想与情感，
符号逻辑 —— 思想与推理的**形式语言**。
符号构成公式，公式表示命题.....
- 语法（Syntax）与语义（Semantics）的分离。
 - 语法：符号表达式的形式结构
 - 语义：符号和符号表达式的涵义
- 自然语言中命题的逻辑形式可以做到精确，但是不如形式语言方便



什么是数理逻辑？

- 用数学的方法研究逻辑问题的学科
 - 研究如何正确的推理（推理方法、语言）
- 传统上，数学不把推理方法和语言作为研究的对象

现代逻辑-萌芽时代

- *The only way to rectify our reasoning is to make them as tangible as those of the Mathematicians, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: Let us calculate , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

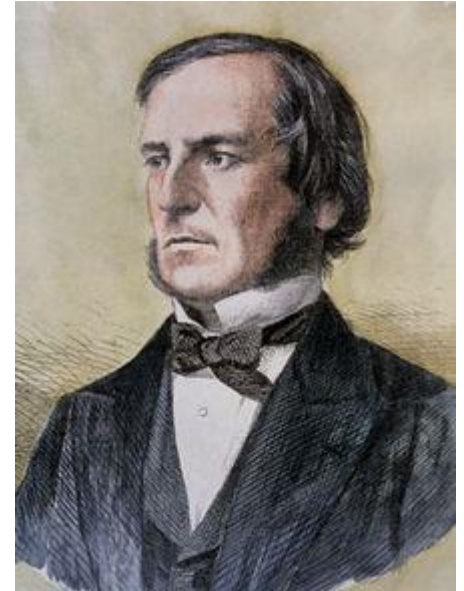
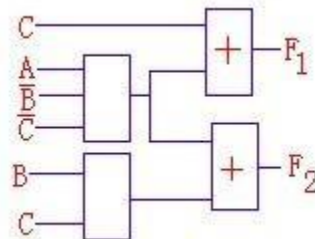
- 通用语言&通用数学

现代逻辑-代数时代

- 建立人类思维的代数规律的系统，boolean algebra。

AB		00	01	11	10
C	0	0	0	0	1
	1	1	1	1	1

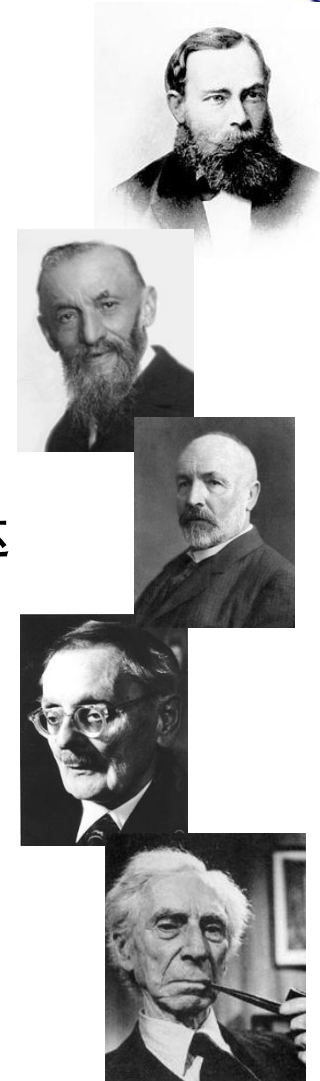
AB		00	01	11	10
C	0	0	0	0	1
	1	0	1	1	0



G.Boole (1815—1864)

现代逻辑-逻辑主义时代

- Gottlob Frege (1848—1925) 1879出版 Begriffsschrift (概念文字), 严格建立人类第一个人工的形式语言PK。
- Giuseppe Peano (1858—1932) 建立算术的形式语言 PA (Peano's Arithmetic)
- Georg Cantor (1845—1918) 建立Set Theory, 表达整个数学的形式语言
- Ernst Zermelo(1871-1953) 创立第一个Axiomatic Set Theory。
- Bertrand Russell (1872—1970) 与他老师 Whitehead合著Principia Mathematica (3卷)
 - Russell's Paradox曾使整个数学基础为之震动...





罗素悖论

- 一位理发师：“我给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，也只给这些人刮胡子。”
- 那么，他能不能给自己刮胡子呢？

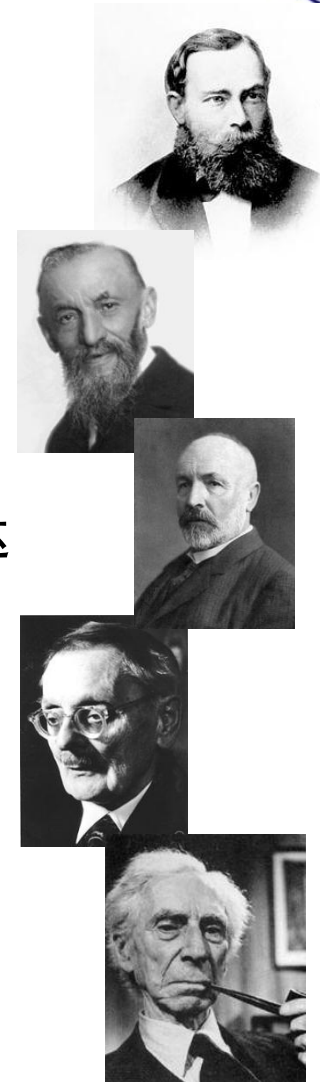


罗素悖论

- 一位理发师：“我给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，也只给这些人刮胡子。”
- 那么，他能不能给自己刮胡子呢？
- 将所有不包含自身元素的集合构成一个集合 S ，即 $S = \{X: X \notin X\}$ ，那么 S 是否属于 S 呢？
 - 要么 $S \in S$ ，要么 $S \notin S$ ，但此处无论怎样都存在矛盾。

现代逻辑-逻辑主义时代

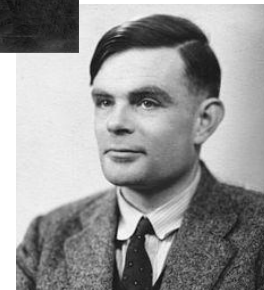
- Gottlob Frege (1848—1925) 1879出版 Begriffsschrift (概念文字), 严格建立人类第一个人工的形式语言PK。
- Giuseppe Peano (1858—1932) 建立算术的形式语言 PA (Peano's Arithmetic)
- Georg Cantor (1845—1918) 建立Set Theory, 表达整个数学的形式语言
- Ernst Zermelo(1871-1953) 创立第一个Axiomatic Set Theory。
- Bertrand Russell (1872—1970) 与他老师 Whitehead合著Principia Mathematica (3卷)
 - Russell's Paradox曾使整个数学基础为之震动...



现代逻辑-元数学时代

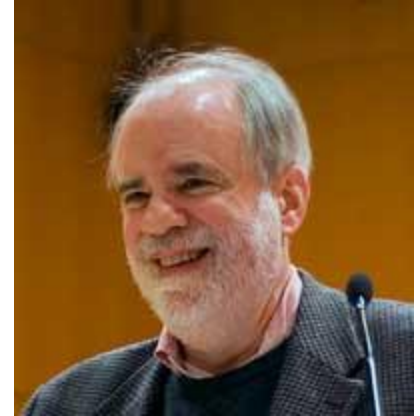


- David Hilbert (1862—1943) 著作几何基础，数学基础，建立几何和数学的形式语言。
- Alan Turing (1913—1954) 提出Turing Machine（算法的理想模型），建立Computation的形式语言
- Alfred Tarski (1901-1983) 定义Logical Consequence，创立语义学；
- Kurt Gödel (1906-1978) PK的完全性定理 PA的不完全性定理



现代逻辑-战后时代

- 四论
 - 证明论
 - 模型论
 - 递归论（可计算性理论）
 - 公理化集合论
- Saul Kripke
- Jaakko Hintikka
- ...





现代逻辑的家族

• 经典逻辑

- 三段论（传统逻辑，词项逻辑）
- 布尔逻辑
- 命题逻辑
- 一阶逻辑（谓词逻辑）

• 数理逻辑（符号逻辑）

- 代数逻辑
 - 布尔代数
 - 关系代数
- 模型论
- 证明论
 - 希尔伯特演绎系统
 - 自然演绎
 - 相继式演算
 - Curry-Howard同构
- 递归论
 - λ 演算
 - 组合子逻辑
- 公理化集合论
- 二阶逻辑
- 哥德尔不完备定理

• 直觉逻辑（构造性逻辑）

- Heyting代数
- 中间逻辑
- 直觉类型论

• 多值逻辑

- 三值逻辑
- 模糊逻辑
- 概率逻辑

• 亚结构逻辑（子结构逻辑）

- 线性逻辑
- 相干逻辑

• 非单调逻辑

- 缺省逻辑
- 自动认识逻辑
- 可废止逻辑

• 模态逻辑

- 真势模态逻辑
- 认识逻辑
- 道义逻辑
- 时间逻辑（时态逻辑）
- 动态逻辑
- 可证明性逻辑
- 可解释性逻辑

• 哲学逻辑

- 次协调逻辑（非协调逻辑）
- 自由逻辑

• 辩证法（辩证逻辑）

• 非形式逻辑

• 逻辑推理

- 演绎推理
- 归纳推理
- 溯因推理（设因推理，假设推理）
- 可废止推理

• 逻辑史

- 工具论（古希腊）[亚里士多德](#)（BC384-BC322）
- [思维规律研究](#)（英国）[乔治·布尔](#)（1815-1864）
- 概念文字（德国）[弗雷格](#)（1848-1925）
- [数学原理](#)（英国）[罗素](#)（1872-1970）

• 逻辑学应用

- 数学基础
- [量子逻辑](#)
- 分析哲学
- 计算机逻辑
- 人工智能
- 法律逻辑学

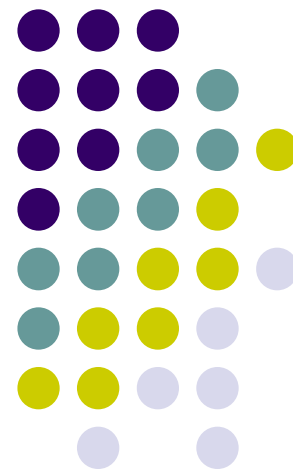


数理逻辑与计算机科学

- 数理逻辑的研究孕育了计算机科学...
 - Alan Turing, "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", 1936 提出了Turing Machine — 算法的通用模型;
 - John von Neumann, Von Neumann architecture
- 数理逻辑在计算机科学中有诸多应用
 - 数字逻辑电路
 - 程序设计语言
 - 时态逻辑与模型检测
 - 知识表示与推理
 -



与人工智能什么关系？





事物的定义

- 外延定义 (Extensional definitions)

- 通过列举词项的所指对象或某一概念范畴内的所有个体来表述语词的意义
- 例如，常任理事国 {China, France, Russia, UK, USA}

- 内涵定义 (Intensional definitions)

- 描述语词指称物所具有的属性集来解释语词含义，揭示并表述出被释义词的概念特征，即对概念内涵的描述
- 例如，母亲：有孩子的女性

母亲：有一个孩子的女性

母亲：有两个孩子的女性

.....



什么是AI?

- AI的内涵定义

- 人工智能就是研究如何使计算机去做过去只有人才能做的智能工作，例如，理解语言、识别图片、求解问题、总结知识等
- 人工智能就是让机器（计算机的软硬件）来模拟人类某些智能行为



什么是AI?

- AI的内涵定义

- 人工智能就是研究如何使计算机去做过去只有人才能做的智能工作，例如，理解语言、识别图片、求解问题、总结知识等
- 人工智能就是让机器（计算机的软硬件）来模拟人类某些智能行为

- 什么是智能行为？

- 内涵定义：大致上，一系列与人类心理相关的能力
- 外延定义：看、听、闻、感觉、思考、推理、计算、交流、阅读、理解、想象以及情感.....



智能行为

- 行动（物质）
 - 抓取、行走.....
- 感知（物质&精神）
 - 看、听、闻、感觉.....
- 认知（精神）
 - 思考、推理、计算、交流.....

智能行为

- 输入：一幅图片



智能行为

- 输入：一幅图片



- 输出：小金毛

智能行为

- 输入：一幅图片



- 输出：小金毛
- 识别图片内容的方式：
 - 人的眼睛、其他动物的眼睛
 - 机器的计算

智能行为

- 输入：一段古文

鱼，我所欲也，熊掌，亦我所欲也，二者不可得兼，舍鱼而取熊掌者也。生，亦我所欲也，义，亦我所欲也，二者不可得兼，舍生而取义者也。生亦我所欲，所欲有甚于生者，故不为苟得也。

和一个问题：这段话作者想表达他更喜欢熊掌

智能行为

- 输入：一段古文

鱼，我所欲也，熊掌，亦我所欲也，二者不可得兼，舍鱼而取熊掌者也。生，亦我所欲也，义，亦我所欲也，二者不可得兼，舍生而取义者也。生亦我所欲，所欲有甚于生者，故不为苟得也。

和一个问题：这段话作者想表达他更喜欢熊掌

- 输出：错误

智能行为

- 输入：一段古文

鱼，我所欲也，熊掌，亦我所欲也，二者不可得兼，舍鱼而取熊掌者也。生，亦我所欲也，义，亦我所欲也，二者不可得兼，舍生而取义者也。生亦我所欲，所欲有甚于生者，故不为苟得也。

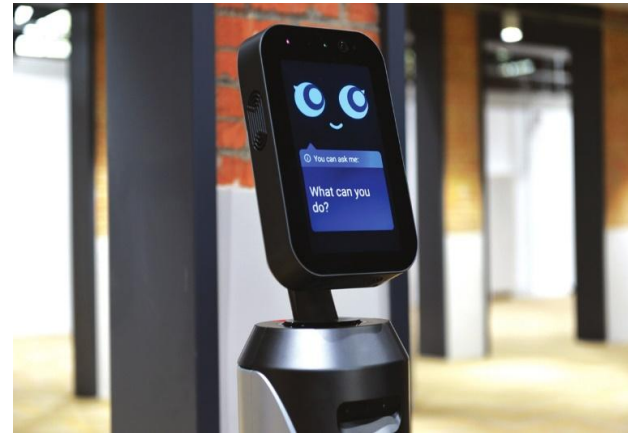
和一个问题：这段话作者想表达他更喜欢熊掌

- 输出：错误
- 理解文本的方式：
 - 人类的理解与推理
 - 机器的计算

人工智能的作用

- 提高人类工作的速度、准确性和效果

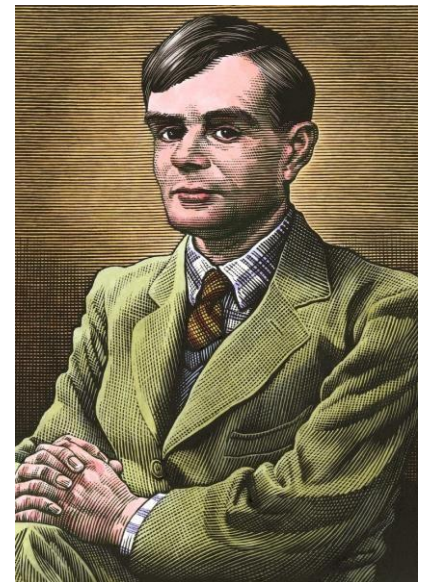
- 解放劳动力、提高生产效率



人工智能的各个方向

为了通过图灵测试，机器至少需要具备以下能力：

1. 操作物体 (robotics)
2. 感知物体 (计算机视觉 computer vision)
3. 用人类的语言进行交流 (自然语言处理 natural language processing)
4. 存储知识 (知识表示 knowledge representation)
5. 利用已有的知识回答问题及得出新的结论 (自动推理 automated reasoning)
6. 适应新环境、对模式进行发现和推断 (机器学习 machine learning)





人工智能的优势

- 机器的**计算**能力强于人类
 - 计算更快速
 - 存储更准确、快速
 - 不间断工作
 -



人工智能的优势

- 机器的**计算**能力强于人类
 - 计算更快速
 - 存储更准确、快速
 - 不间断工作
 -
- 什么是计算？
 - 按步骤执行一些列指令（称为**程序**）
 - 包含算术步骤和非算术步骤
 - 与数学高度相关



如何通过计算进行推理？

- 简单推理题：

甲、乙、丙三人，每个人要么是只说真话的老实人，要么是只说假话的骗子。

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

问：丙是老实人还是骗子？



如何通过计算进行推理？

- 简单推理题：

甲、乙、丙三人，每个人要么是只说真话的老实人，要么是只说假话的骗子。

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

问：丙是老实人还是骗子？

- 假设丙是老实人，那么.....
 - 假设甲也是老实人，那么.....否则



如何通过计算进行推理？

- 令变量 a 表示“甲是老实人”， b 表示“乙是老实人”， c 表示“丙是老实人”
- a 为真即“甲是老实人”为真



如何通过计算进行推理？

- 令变量 a 表示“甲是老实人”， b 表示“乙是老实人”， c 表示“丙是老实人”
- a 为真即“甲是老实人”为真

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

如何通过计算进行推理？

- 令变量 a 表示“甲是老实人”， b 表示“乙是老实人”， c 表示“丙是老实人”
- a 为真即“甲是老实人”为真

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

假设丙是老实人，那么...

代入 $c = 1$ ，可计算得

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = 1) \leftrightarrow (b = 0),$$

矛盾！

如何通过计算进行推理？

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

- 假设丙是骗子，那么...
 - 假设甲是老实人，那么...否则

代入 $c = 0$ ，可计算得

$$\begin{cases} (a = 1) \leftrightarrow (b = 0) \\ (b = 1) \leftrightarrow (a = 0) \end{cases}$$

代入 $a = 1$ ，得

$$\begin{cases} 1 \leftrightarrow (b = 0) \\ (b = 1) \leftrightarrow 0 \end{cases}$$

如何通过计算进行推理？

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

- 假设丙是骗子，那么...
 - 假设甲是老实人，那么...否则
- $a=1, b=0, c=0$
- $a=0, b=1, c=0$

代入 $c = 0$ ，可计算得

$$\begin{cases} (a = 1) \leftrightarrow (b = 0) \\ (b = 1) \leftrightarrow (a = 0) \end{cases}$$

代入 $a = 1$ ，得

$$\begin{cases} 1 \leftrightarrow (b = 0) \\ (b = 1) \leftrightarrow 0 \end{cases}$$



如何通过计算进行推理？

甲说：“乙是骗子”。

乙说：“甲和丙是同一类人”。

$$(a = 1) \leftrightarrow (b = 0)$$

$$(b = 1) \leftrightarrow (a = c)$$

- 表示+推理

- 知识表示
- 自动推理



“推理+学习”的难题

- 人工智能领域有一个长期存在的“圣杯”问题
 - 推理+学习，提出一个统一的框架
- 为什么要考虑这件事？
 - 逻辑推理更容易利用知识
 - 机器学习更容易利用数据、证据、事实
 - 从人类决策来看，常常同时要使用知识以及证据



“推理+学习”的难题

- 历史上，逻辑推理和机器学习各自独立发展起来的
 - 1950~1990年代，逻辑推理和知识工程是人工智能的主流技术
 - 1990年代中期之后，机器学习研究变得热门
- “推理+学习”结合的难点：
 - 两套表示方式：逻辑公式、特征表示
 - 两种数学基础：离散数学、概率论



课程目标

- 理解逻辑语言，
- 学会用精确、简洁的数学符号，
- 能够用形式语言描述问题，
- 并能在推理系统中进行推理。