ALJABAR LINIER DAN GEOMETRI
SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

LAPORAN TUGAS BESAR 1

Diajukan sebagai salah satu tugas mata kuliah Aljabar Linier dan Geometri pada Semester 3 Tahun Akademik 2020-2021

Oleh

Gede Prasidha Bhawarnawa	**13520004**
I Gede Arya Raditya Parameswara	**13520036**
Arik Rayi Arkananta	**13520048**

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
BANDUNG

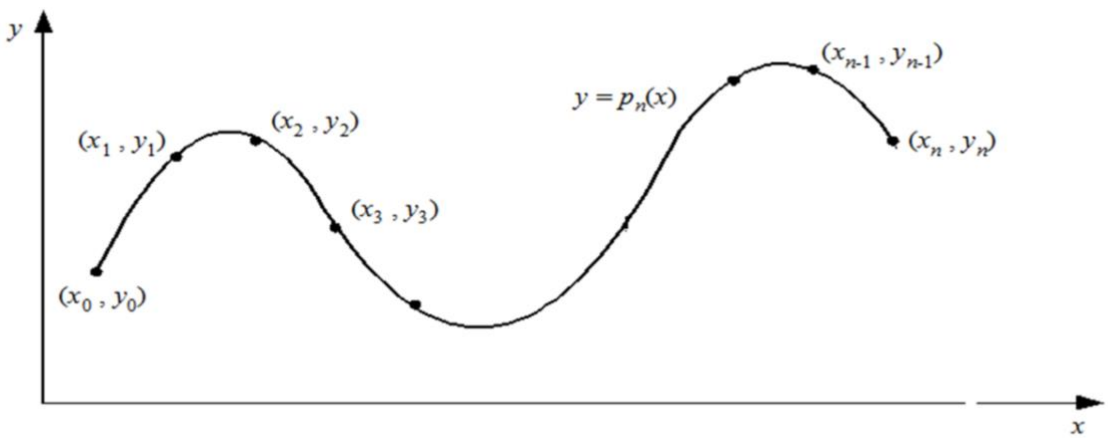
2021

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Ada berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

I. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + \dots + a_n\, {x_0}^n &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \dots + a_n\, {x_1}^n &= y_1 \\
\dots \qquad\qquad\qquad & \dots \\
a_0 + a_1x_n + a_2{x_n}^2 + \dots + a_n\, {x_n}^n &= y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a0 , a1 , …, an , diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk p2(x) = a0 + a1x + a2x 2 . Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$
\begin{aligned}
a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 &= 2.0794 \\
a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 &= 2.1972 \\
a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 &= 2.2513
\end{aligned}
$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a0 = 0.6762, a1 = 0.2266, dan a2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah 2 titik tersebut adalah p2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x 2 . Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: p2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)2 = 2.2192.

II. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \quad + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} \quad + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki} \quad &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \quad + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} &= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \quad &= \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

SPESIFIKASI TUGAS

A. Buatlah pustaka dalam Bahasa Java untuk menemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan), menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor dan menghitung balikan matriks.
B. Gunakan pustaka di atas untuk membuat program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linear, menghitung matriks balikan, menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor). Spesifikasi program adalah sebagai berikut:
    1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari keyboard maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari keyboard adalah m, n, koefisien a_{ij}, dan b_i. Masukan dari file berbentuk matriks augmented tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,
    ```
     3 4.5 2.8 10 12
    -3 7 8.3 11 -4
    0.5 -10 -9 12 0
    ```
    2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari keyboard adalah n dan koefisien a_{ij}. Masukan dari file berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,
    ```
     3 4.5 2.8 10
    -3 7 8.3 11
     0.5 -10 -9 12
    ```
    3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari keyboard adalah n, (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_{n-1}, y_{n-1}), dan nilai x yang akan ditaksir fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file textnya ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari keyboard adalah *n* (jumlah peubah x), semua nilai-nilai $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, nilai\ y_i$, dan nilai-nilai x_k yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.
5. Untuk persoalan SPL, luaran (Output) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada. Jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya x_4=-2, x_3=2s-t, x_2=s, dan x_1=t)
6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing.
7. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.
8. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file.
9. Bahasa pemrograman yang digunakan adalah Java.
10. Program tidak harus berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas Eclipse misalnya).
11. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilahkan dirancang masing-masing. Misalnya, menu :

```
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
```

Untuk pilihan nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode :

```
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
```

Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

BAB II
TEORI SINGKAT

I. Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks menjadi matriks augmented yang lebih sederhana dan banyak digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Prosedur penyelesaian dari metode ini adalah dengan melakukan operasi baris elementer menjadi matriks eselon-baris. Operasi baris elementer adalah operasi yang bertujuan untuk membuat elemen-elemen di bawah diagonal utama bernilai nol. Operasi baris elementer ini dapat dibagi menjadi tiga operasi, kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol, lalu pertukarkan dua baris, serta menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya. Hasil akhirnya adalah suatu matriks dengan setiap elemen terkiri pada setiap baris adalah 1 dengan semua elemen di bawah 1 tersebut adalah 0. Matriks inilah yang disebut sebagai matriks eselon tereduksi. Bila matriks ini memiliki nilai elemen 0 di atas setiap elemen 1 terkiri pada setiap baris, maka yang terbentuk adalah matriks eselon baris tereduksi. Pada metode Gauss, matriks yang diproses adalah matriks eselon baris.

II. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks menjadi matriks augmented yang lebih sederhana dan banyak digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Prosedur penyelesaian dari metode ini adalah dengan melakukan operasi baris elementer menjadi matriks eselon-baris. Operasi baris elementer adalah operasi yang bertujuan untuk membuat elemen-elemen di bawah diagonal utama bernilai nol. Operasi baris elementer ini dapat dibagi menjadi tiga operasi, kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol, lalu pertukarkan dua baris, serta menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya. Hasil akhirnya adalah suatu matriks dengan setiap elemen terkiri pada setiap baris adalah 1 dengan semua elemen di bawah 1 tersebut adalah 0. Matriks inilah yang disebut sebagai matriks eselon tereduksi. Bila matriks ini memiliki nilai elemen 0 di atas setiap elemen 1 terkiri pada setiap baris, maka yang terbentuk adalah matriks eselon baris tereduksi. Pada metode Gauss-Jordan, matriks yang diproses adalah matriks eselon baris tereduksi.

III. Determinan

Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks yang jika dan hanya jika berbentuk persegi. Salah satu kegunaan determinan adalah untuk mencari matriks balikan. Pada program ini akan digunakan dua cara untuk mencari determinan matriks, yaitu metode kofaktor dan reduksi baris. Pada metode kofaktor, determinan ditentukan dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen-elemen yang bersesuaian pada suatu baris dan kolom dengan kofaktor yang bersesuaian dari elemen-elemen tersebut. Pada metode reduksi baris, metode ini adalah metode yang mengubah matriksnya menjadi matriks augmented, lalu menjadi matriks OBE, lalu mengembalikan determinan yang senilai dengan hasil perkalian semua elemen pada diagonal utama dikalikan dengan suatu faktor. Faktor ini bernilai positif bila jumlah pertukaran baris dalam proses OBE adalah genap atau nol dan negatif bila jumlah pertukarannya negatif.

IV. Matriks Balikan

Matriks balikan biasa juga disebut matriks invers. Jika matriks balikan dikalikan dengan matriks awalnya akan menghasilkan matriks identitas. Matriks memiliki balikan jika dan hanya jika berbentuk persegi. Matriks balikan senilai dengan suatu adjoint matriks dibagi dengan skalar determinannya. Adjoint matriks adalah transpose dari semua matriks kofaktor matriks tersebut dikalikan dengan faktor. Faktor ini bernilai positif apabila penjumlahan kolom dan baris pada adjoint tersebut bernilai genap dan bernilai negatif jika penjumlahan kolom dan baris elemen adjoint itu bernilai ganjil. Matriks balikan juga dapat dicari dengan mengalikan dua buah matriks. Jika perkalian tersebut menghasilkan matriks identitas, maka kedua matriks itu saling menginvers satu sama lain.

V. Matriks Kofaktor

Kofaktor adalah hasil perkalian minor dengan suatu angka yang besarnya menuruti suatu aturan yaitu (-1)^(i+j) dimana i adalah baris dan j adalah kolom. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-

j dari matriks A dilambangkan dengan Cij. Matriks kofaktor dapat digunakan untuk mencari determinan suatu matriks. Dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen matriks dengan elemen kofaktornya yang bersesuaian dengan baris dan kolom tertentu, maka dapat dikembalikan nilai determinan.

VI. Matriks Adjoin

Matriks adjoin dapat dihasilkan dari transpose matriks kofaktor dari sebuah matriks. Transpose dapat digunakan untuk menghasilkan balikan matriks dengan cara dikalikan dengan satu per determinannya.

VII. Kaidah Cramer

Dalam aljabar linear, kaidah Cramer adalah rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan banyak persamaan sama dengan banyak variabel, dan berlaku ketika sistem tersebut memiliki solusi yang tunggal. Kaidah cramer juga hanya dapat berlaku jika setelah persamaan SPL diubah menjadi matriks yang augmented, besar determinan matriks n x n pertama tidak nol. Jadi semisal bentuk persamaannya adalah Ax = B, maka det(A) bukan nol. Proses penyelesaian SPL dengan menggunakan kaidah Cramer dilakukan dengan mengubah variabel yang bersangkutan dengan kodomain. Jadi untuk menghitung besar dari variabel x_i, maka kolom ke-i pada matriks A diganti dengan B. Lalu, dilakukan perbandingan antara determinan dengan kolom yang ditukar dengan det(A). Hasil yang dikembalikan adalah nilai dari variabel peubah tersebut.

VIII. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom merupakan mencari nilai fungsi yang tidak diketahui dari sebuah polinom, di antara beberapa nilai fungsi yang diketahui. Polinom ini dapat dicari menggunakan rumus:

$$a0 + a1x0 + a2x0^2 + \ldots + anx0^n = y0$$

$$\ldots.$$

$$a0 + a1xn + a2xn^2 + \ldots + anxn^n = yn$$

Penyelesaian daripada interpolasi polinom ini dapat menggunakan metode SPL Cramer atau metode lainnya. Karena dicari suatu pola mirip regresi yang menunjukkan hubungan antara variabel pengubah dengan hasil, maka hanya bisa diterima input titik-titik yang dapat memberikan 1 hasil yang valid. Solusi parametrik atau nol solusi tidak dapat diterima pada kasus interpolasi polinom. Hasil akhir dari interpolasi ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan polinom :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

IX. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear Berganda adalah model regresi linear dengan melibatkan lebih dari satu variabel bebas. Model regresi linear berganda dilukiskan dengan persamaan sebagai berikut:

$$Y = \beta 0 + \beta 1\ X2 + \beta 2\ X2 + \beta n\ Xn + e$$

Keterangan:
Y = Variabel terikat.
X = Variabel bebas.
α = Konstanta.
β = Koefisien estimate.

Untuk menentukan nilai dari β_0, β_1, …, β_n, dapat digunakan fungsi Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression. Setelah didapatkan fungsi persamaan se

BAB III
IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM

Program ini diimplementasikan oleh 7 buah file Java yang masing-masing memuat satu atau lebih fungsi/prosedur. File tersebut terdiri dari 1 file program utama, 1 file tipe data abstrak, dan 5 file yang menjalankan menu-menu pada program utama dengan menggunakan tipe data abstrak matriks.

I. mainMenu.java

Program ini berisi *main* yang bertugas sebagai program utama untuk menjalankan solusi dari permasalahan tugas ini. Dalam class *main* terdapat program *input/output*, pemilihan menu/submenu, dan pemanggilan *class* dari file lain. Terdapat juga fungsi-fungsi untuk inisiasi matriks untuk fungsi determinan, serta inisiasi matriks untuk dilakukan perhitungan SPL. Fungsi untuk menawarkan pilihan bagi pengguna untuk menginput data dari keyboard atau dari file txt juga terdapat di dalam source code ini.
Program ini akan memanggil fungsi Menu(), lalu akan menunggu input dari pengguna untuk memilih menu yang dipilih. Berikut adala

II. matriks.java

Class ini berisi tipe data abstrak matriks yang terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu:

1. **Konstruktor -** berisi jumlah baris, jumlah kolom, dan isi dari matriks tersebut.
2. **Selektor -** berisi isIdxValid, getLastIdxRow dan getLastIdxCol.
3. **Input/Output -** berfungsi menulis dan menampilkan suatu matriks.
4. **Operasi Matriks -** melakukan operasi pada satu atau dua buah matriks, seperti menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan.
5. **Operasi Baris Elementer -** melakukan operasi pada baris dari suatu matriks, seperti menukar, menambahkan, mengurangkan, dan mengalikan.
6. **Predikat -** memeriksa suatu matriks merupakan matriks identitas atau matriks kotak.

III. menuSPL.java

Class ini berfungsi menjalankan program untuk menyelesaikan sebuah permasalahan Sistem Persamaan Linier menggunakan 4 metode (eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, metode Matriks Balikan, dan kaidah Cramer). Penjelasan mengenai metode-metode yang digunakan terdapat pada bab IV.

IV. menuDeterminan.java

Class ini berfungsi menjalankan program untuk menentukan nilai determinan dari sebuah matriks menggunakan 2 metode, yaitu kofaktor dan reduksi baris. Penjelasan mengenai metode-metode yang digunakan terdapat pada bab IV.

V. menuInverse.java

Class ini berfungsi menjalankan program untuk menentukan balikan dari sebuah matriks sehingga jika balikan tersebut dikalikan dengan matriks awalnya akan menghasilkan matriks identitas. Penjelasan mengenai metode-metode yang digunakan terdapat pada bab IV.

VI. menuInterpolasi.java

VII. menuRegresi.java

BAB IV
EKSPERIMEN

1. **Kasus 1 (Mencari solusi SPL Ax = B)**

   a. Masukan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Keluaran untuk Metode Gauss:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 1
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
4
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
5
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Solusi dari SPL di atas adalah :
SPL tidak memiliki solusi yang memenuhi
```

Analisis: Program mengeluarkan output bahwa SPL tidak memiliki solusi yang memenuhi karena di matriks eselonnya pada baris terakhir hanya terdapat satu elemen yang tidak nol yaitu kolom terakhir.

b. Masukan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Keluaran untuk Metode Matriks Balikan:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 3
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
4
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
6
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Metode SPL dengan matriks Inverse hanya bisa menjalankan SPL dengan ukuran matriks augmented n x (n+1). Sil
ahkan gunakan metode Gauss atau Gauss Jordan untuk menyelesaikan permasalahan anda.
```

Analisis: Karena metode matriks balikan hanya bisa menerima matriks dengan ukuran n x (n+1), maka SPL ini tidak bisa diselesaikan dengan metode ini dan program mengeluarkan output untuk menyarankan memakai teknik lainnya seperti Gauss dan Gauss-Jordan.

Keluaran untuk Metode:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 4
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
4
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
6
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Metode SPL dengan Cramer hanya bisa menjalankan SPL dengan ukuran matriks augmented n x (n+1). Silahkan gun
akan metode Gauss atau Gauss Jordan untuk menyelesaikan permasalahan anda.
```

Analisis: Sama seperti metode matriks balikan, cramer hanya bisa menerima matriks dengan ukuran n x (n+1) sehingga mengeluarkan output yang sama.

2. **Kasus 2 (Mencari solusi SPL Matriks Augmented)**

   a. Masukan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Keluaran untuk Metode Gauss-Jordan:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 2
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
6
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
5
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Solusi dari SPL di atas adalah :
X1 adalah 0.0
X2 adalah 2.0
X3 adalah 1.0
X4 adalah 1.0
```

   Analisis: Dapat dilihat matriks ini mempunyai penyelesaian tunggal sehingga program mengeluarkan nilai-nilai tiap x-nya.

   b. Masukan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Keluaran untuk Metode Matriks Balikan:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 3
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
4
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
5
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
SPL tidak memiliki solusi.
```

Analisis: Dapat dilihat SPL tidak memiliki solusi, ini karena Metode ini hanya bisa dipakai untuk matriks dengan determinan != 0.

3. Kasus 3 (Mencari solusi SPL)

a. Masukan:

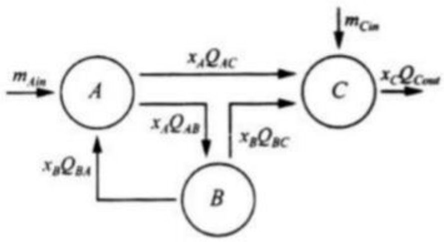
$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 1
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
4
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
5
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
Solusi dari SPL di atas adalah :
X1 adalah -0.2243243243243243
X2 adalah 0.18243243243243246
X3 adalah 0.7094594594594594
X4 adalah -0.25810810810810797
```

Analisis: Sama seperti studi kasus 1 dan 2, kita tinggal masukkan saja ke dalam bentuk matriks augmented lalu akan didapat hasil seperti di atas.

5. **Kasus 5 (Sistem reaktor)**

Masukan:



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$

$$\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$$

$$\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

Akan didapat matriks seperti ini:

-120 60 0 -1300

40 -80 0 0

80 20 -150 -200

Keluaran untuk Metode Gauss:

```
Menu
1. Sistem Persamaan Linear
2. Determinan
3. Invers Matriks
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi Linear Berganda
6. Keluar

Masukan: 1
Pilih Metode Untuk Menyelesaikan SPL :
1. Metode Eliminasi Gauss
2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode Matriks Balikan
4. Kaidah Cramer
5. Kembali ke Menu Utama

Masukan: 1
Pilih cara untuk mengisi matriks untuk diproses
1. Input keyboard
2. Baca dari file

Masukan: 1
Silahkan input jumlah baris dalam matriksnya:
3
Silahkan input jumlah kolom dalam matriksnya:
4
Silahkan input elemen dalam matriksnya:
-120 60 0 -1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
Solusi dari SPL di atas adalah :
X1 adalah 14.444444444444446
X2 adalah 7.222222222222223
X3 adalah 10.0
```

Analisis: Sama seperti Kasus-kasus sebelumnya, program akan mengeluarkan nilai-nilai dari tiap x-nya.

BAB V

KESIMPULAN

1. Kesimpulan

Telah berhasil didesain suatu program dengan objek “matriks” yang memiliki ukuran baris x kolom dengan isi data type double. Matriks yang terbentuk telah sesuai dengan matriks yang dipelajari dalam mata kuliah Aljabar Linear dan Geometri. Beberapa sifat dan karakteristik yang telah diimplementasikan adalah bentuk matriks (persegi, persegi panjang), pertukaran baris dalam Operasi Baris Elementer, Kofaktor matriks, serta jenis-jenis matriks seperti matriks eselon baris dan matriks eselon baris tereduksi. Dengan mengimplementasikan sifat dan karakteristik di atas, maka spesifikasi dari tugas ini yang terdiri atas penyelesaian SPL dengan metode Gauss, metode Gauss-Jordan, metode Invers, dan metode Cramer; pencarian determinan dengan kofaktor atau dengan adjoin, serta menentukan invers dari suatu matriks. Dengan menggunakan metode Cramer dan Gauss, dapat juga dibuat spesifikasi untuk interpolasi polinom dan regresi linear berganda.

2. Saran

Agar memudahkan pengguna dalam memakai program ini, dapat juga diimplementasikan program ini dengan GUI. Agar dapat menjalankan program ini dengan baik, pengguna harus terlebih dahulu membaca file README sehingga dapat memahami alur program. Jika menggunakan GUI yang lebih visual, maka pengguna dapat lebih mudah menggunakan program.

3. Refleksi

Matriks memiliki berbagai manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa penerapannya yang sudah diimplementasikan di dalam program tugas besar ini yang dapat dipakai dalam kehidupan sehari-hari adalah Interpolasi Polinom dan Regresi Linear Berganda. Regresi Linear Berganda dapat digunakan untuk mencari suatu korelasi antara beberapa variabel pengubah hasil dengan hasil itu sendiri, lalu mengembalikan hasil berdasarkan persamaan regresi yang telah dibuat sebelumnya dan dengan menggunakan input variabel-variabel yang baru. Interpolasi Polinom dapat digunakan untuk memprediksi nilai kodomain berdasarkan pola-pola dari beberapa input pasangan domain dan kodomain. Ini dapat diterapkan dalam fisika atau kimia dimana suatu kejadian/event dapat dipengaruhi oleh satu atau beberapa variabel bebas.