15.
正弦稳态电路—相量法

邹建龙

主要内容

- 正弦稳态电路简介
- 正弦量的三要素
- 正弦与复数的关系
- 相量法的引入
- 相量法的应用

正弦稳态电路简介

正弦稳态电路：

激励为正弦经长时间达到稳态的线性电路。

正弦稳态电路广泛应用在

输变电、信号处理等领域

正弦稳态电路的求解是

基于相量法的**KCL、KVL**

Fourier变换

正弦量的三要素

$$U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

描述量 振幅
角频率
初相

$$\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)$$

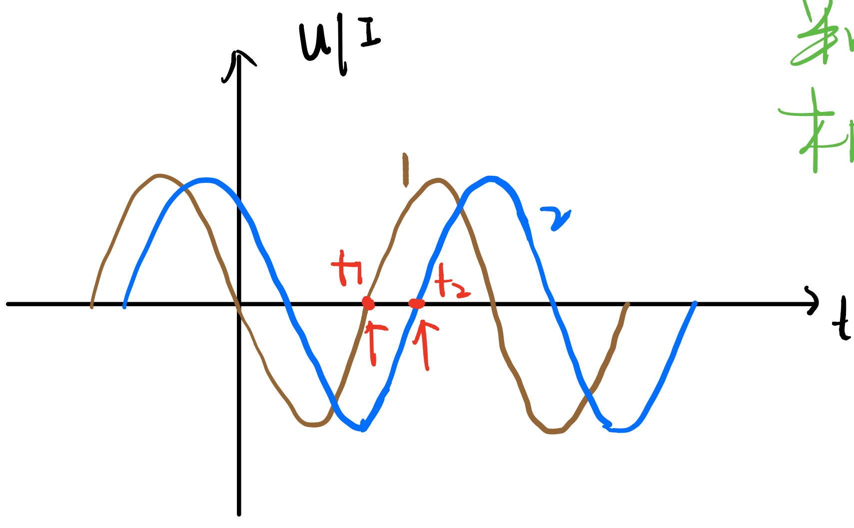
多个正弦量的运算极为复杂！

正弦量的相位超前和滞后

① 达到相同相位时，所需时间短的为超前

反之为滞后

② 从图像角度



判断时两点、

相位差 $|\psi| < 180°$

复数的基本知识

复数共有4种表达形式

1. 代数形式：$z = a + \mathrm{j}b$

2. 三角形式：$z = |\mathrm{Z}|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

3. 指数形式：$z = |\mathrm{Z}|e^{\mathrm{j}\theta}$

4. 极坐标形式:$z = |\mathrm{Z}|\angle\theta$

复数的基本运算

复数的运算： 加减用代数形式，乘除可用指数形式、极坐标形式、代数形式，电路中较少采用三角形式。

复数在复平面中表示为**向量**（矢量），可利用平行四边形法则进行加减，乘除则表现为伸缩和旋转。

相乘角度相加

相除角度相减

正弦与复数的关系

$$e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$ 欧拉公式

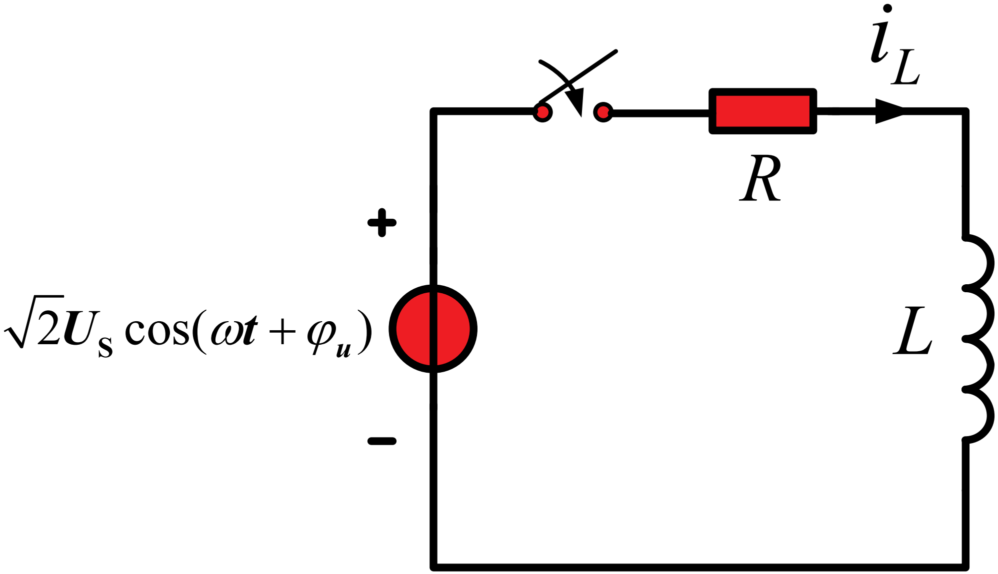
$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}\theta}\right)$$

$$\sqrt{2}U\cos(\omega t + \phi_u) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}Ue^{\mathrm{j}(\omega t+\phi_u)}\right)$$

复数的优势在于：

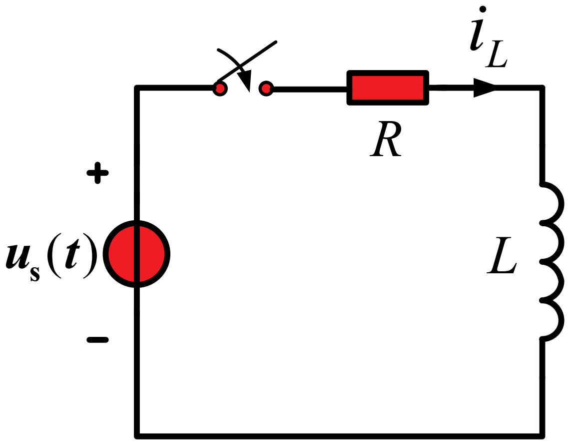
复数加减乘除都特别方便，远远优于正弦量计算！

相量法的引入——从一简例开始



电感电流初始值为0，t=0时开关闭合，求i_L(t)

相量法的引入——从一简例开始



$$u_s(t) = \sqrt{2}U_S\cos(\omega t + \varphi_u)$$

电感电流初始值为0，

t=0时开关闭合，求i_L(t)

$$u_s(t) = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

代入 $u_s(t)$ 得

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = \sqrt{2}U_s\cos(\omega t + \varphi_u)$$

常规方法难以解决

通过Fourier变换到相量域

进行简化运算

相量法的引入——相量的标准形式

$$\dot{U} = U e^{\mathrm{j}\varphi_u} = U \angle \varphi_u$$

注意：相量必须大写且打点！有效值也应大写。

关于变量大小写的一般原则：

相量法的引入——相量法的实质

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

相量法就是利用正弦量与复数的关系

将时域转化到相量域（复数域）处理。

它去掉了正弦量中的角频率和时间，

保留了有效值和初相角。

相量法的引入—相量形式的优势

$$\dot{U} = Ue^{\mathrm{j}\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

与时域的正弦量相比：

1、相量形式中去掉了角频率和时间

2、相量形式的加减乘除等运算更为方便

相量法的引入—
时域与相量域的一一对应和相互转换

时域与相量域一一对应，可以相互转换

在电路中正弦指的是余弦，非余弦应先变为余弦

时域 ——→ 相量域 ——→ 时域

在相量域完成计算、结果再转为时域

例题-1

$$\sqrt{2}100\cos(100t-10^{0})$$

$100\angle -10^{\circ}$

$$-100\sin(1000t+45^{0})$$

$100\sin(1000t+225^{\circ})$

$50\sqrt{2}\angle 135^{\circ}$

$100\cos(1000t+135^{\circ})$

写出上述两个正弦量的相量形式

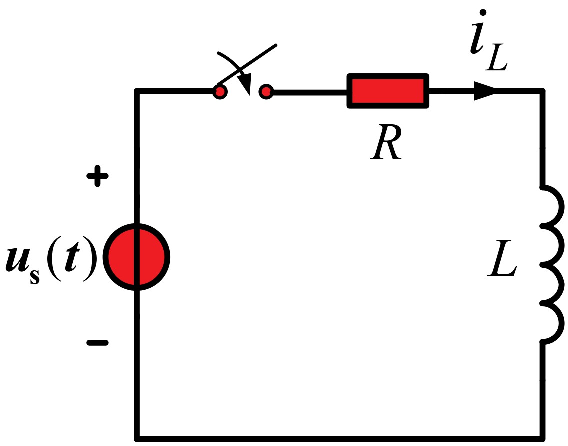
相量法的引入—时域运算在相量域的体现

时域的加、减、比例体现为相量域的加、减、比例

时域的微分、积分体现为相量域的乘、除一个系数

微分相当于乘jω、积分相当于除jω

相量法的引入——简例的解决



$$u_s(t) = \sqrt{2}U_S\cos(\omega t + \varphi_u)$$

电感电流初始值为0，

***t*=0时开关闭合，求i_L(t)**

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = \sqrt{2}U_s\cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i_L = Ae^{\lambda t} + \sqrt{2}I_L\cos(\omega t + \varphi_i)$$

令$t=0$求得A

$$I_L e^{j\varphi_i} = \frac{U_s e^{j\varphi_u}}{j\omega L + R}$$

求得I_L、φ_i、$i(t)$可解

相量法的应用

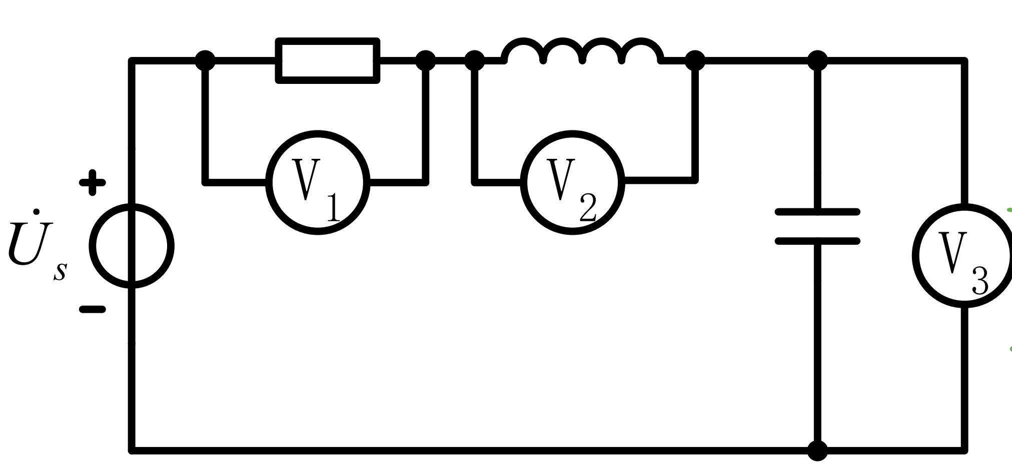
KCL、KVL在相量域的体现

$$\sum \dot{U}_k = 0$$

$$\sum \dot{I}_k = 0$$

加减运算对应，故KCL、KVL形式对应

相量法的应用—例题3



过电压现象，不是代数运算而是矢量运算

已知电压表V_1、V_2、V_3读数分别为30V、80V、120V（交流电压表和电流表读数为有效值），求U_s

$$\dot{U}_s = \dot{U}_R + j\omega L\dot{I}_1 + \frac{\dot{I}_1}{j\omega C}$$

$RI = 30$、$\omega LI = 80$、$\frac{I}{\omega C} = 120$

$$\therefore U_s = \sqrt{30^2 + (80-120)^2}$$

$$= 50V$$

作业-1

$$\sqrt{2}100\cos(1000t+30^0)$$ $100\angle 30^\circ$

$$100\sin(1000t+30^0)$$ $50\sqrt{2}\angle -60^\circ$

$$-\sqrt{2}100\cos(1000t-\frac{\pi}{6})$$ $100\angle 150^\circ$

$\sqrt{2}100(10^3t+\frac{5\pi}{6})$

写出上述三个正弦量的相量形式

作业-2

$$\dot{U} = 100\angle -\frac{\pi}{2}\ \text{V}$$

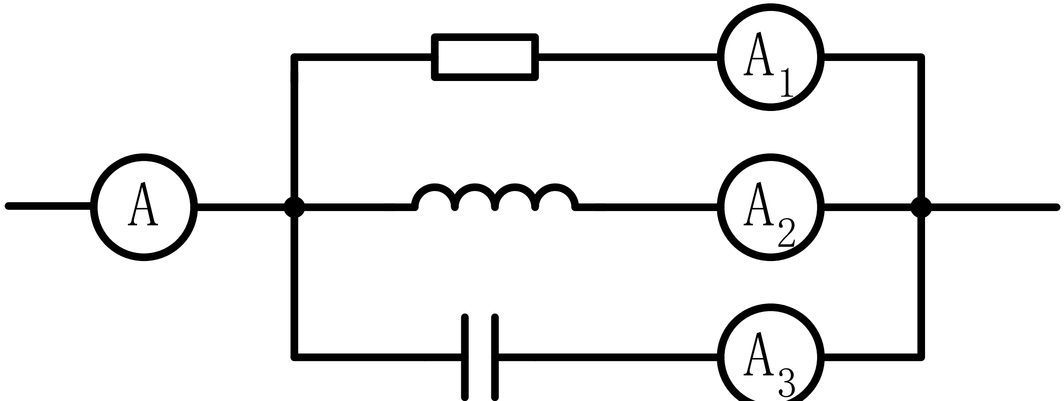
已知频率50Hz，求*u*(*t*)

$\omega = 2\pi f = 100\pi$

$\therefore u(t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$

作业-3

蔡易騤整理



已知安培表A_1、A_2、A_3读数分别为10A、30A、40A，求安培表A的读数。

$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3$

$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{R}$、$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{j\omega L}$、$\dot{I}_3=j\omega C\dot{U}$

∴ $\dot{I}=10+10j$

∴ $I=10\sqrt{2}$ A