# 《数学物理方程》复习整理

by. ZJY

```
《数学物理方程》复习整理
 数学基础
   傅里叶级数
   二次型正交变化
 数学模型
   一维弦振动方程
      初始条件
      边界条件
   热传导方程
      初始条件
      边界条件
   泊松方程
      狄利克雷条件
      诺伊曼条件
 叠加原理
   线性算子
   二阶线性偏微分方程
   初始条件叠加原理
      叠加原理1
      叠加原理 2、3
   边界条件齐次性
      齐次化
 分离变量法
   特征函数法
      假设分离变量解
      求特征值问题的解
      以特征函数系展开比较
   平面上泊松方程边值问题
      极坐标上拉普拉斯方程
 贝塞尔函数
   常系数二阶齐次线性微分方程
   幂级数解法
   Γ函数
    贝塞尔方程
      贝塞尔函数
   贝塞尔方程特征值问题
    贝塞尔函数的正交性与贝塞尔级数
```

圆柱体或圆域上定解问题

格林函数法

格林公式

高斯公式

格林公式

格林第一公式

三维

二维

格林第二公式

三维

二维

格林第三公式

三维

二维

格林函数法

格林函数

应用

半空间上狄利克雷问题 平面圆域上狄利克雷问题

#### 特征线法

- 一阶线性偏微分方程特征线法
- 一阶拟线性偏微分方程特征线法
- 一维波动方程特征线法

## 数学基础

## 傅里叶级数

$$f(t) = rac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) 
ight]$$

其中

$$egin{aligned} a_n &= rac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) \mathrm{d}t &, n \in \mathbb{Z}_+ \ b_n &= rac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) \mathrm{d}t &, n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

### 二次型正交变化

设有二次型矩阵  $A, f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$ 

存在正交矩阵 
$$P$$
 使  $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ ,  $f(x) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} A P \boldsymbol{x} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 

步骤

- 1. 求出 A 的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  , (即求解  $|A \lambda I| = 0$ )
- 2. 得出对应的特征向量  $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ ,(即求解  $(A-\lambda_i I)x=0$ )
- 3. 特征向量标准正交化得  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$
- 4. 得 $P = [\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_n]$

应用于梯度算子  $\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$  以化简二阶线性微分方程

## 数学模型

### 一维弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ 0 < x < l, \ t > 0$$

其中 
$$a^2=T_0/
ho,\;f=f_0/
ho$$

### 初始条件

$$|u|_{t=0} = \phi(x) \; , \; u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

### 边界条件

- 1. 第一类边界条件:已知端点的位移随时间的变化
- 2. 第二类边界条件: 已知端点的受力随时间的变化

设受外力 
$$\bar{g}_1(t)$$
、 $\bar{g}_2(t)$ 

左端 
$$u_x(0,t)=-rac{ar{g}_1(t)}{T_0}$$

右端 
$$u_x(l,t)=rac{ar{g}_2(t)}{T_0}$$

3. 第三类边界条件:端点连接弹簧振子

以左端为例, 弹簧长度  $l_1$ , 下端位置  $Q_1(t)$ ,  $\sigma_1 = k_1/T_0$ 

得条件 
$$u_x(0,t) - \sigma_1 u(0,t) = -\sigma_1 (Q_1(t) + l_1)$$

右端 
$$u_x(l,t) + \sigma_2 u(l,t) = \sigma_1(Q_1(t) + l_2)$$

### 热传导方程

$$u_t = a^2 \Delta u + f$$

其中 $a^2 = k/(
ho c)$ ,(c 为比热容), $f = f_0/c$ ,表示热源强度

## 初始条件

$$|u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

## 边界条件

1. 第一类边界条件:已知边界的温度分布

2. 第二类边界条件: 已知通过边界的热流量

$$k rac{\partial u}{\partial m{n}}igg|_{\partial\Omega} = g(x,y,z,t)$$

3. 第三类边界条件: 导热体置于介质之中

$$rac{\partial u}{\partial m{n}} + \sigma u = g(x,y,z,t) \ , \ (x,y,z,t) \in \partial \Omega$$

## 泊松方程

泊松方程即稳态热传导方程

$$-\Delta u = rac{1}{a^2} f$$

其中f描述热源

当 $f \equiv 0$  时称为拉普拉斯方程

## 狄利克雷条件

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi$$

### 诺伊曼条件

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \varphi$$

或

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \right|_{\partial \Omega} = \varphi$$

## 叠加原理

### 线性算子

以下分别为二阶偏微分算子、波算子、拉普拉斯算子和热算子

$$egin{align} L &= a_{11} rac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12} rac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1 rac{\partial}{\partial x} + b_2 rac{\partial}{\partial y} + c \ &\Box &= rac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &\Delta &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial y^2} \ &H &= rac{\partial}{\partial t} - a^2 rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{22} rac{\partial^2}{\partial x^2} \ &D &= rac{\partial$$

### 二阶线性偏微分方程

$$Lu = f$$

以下为一个带有初始条件和边界条件的弦振动问题

$$\left\{egin{array}{ll} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f &, \ 0 < x < l \ , \ t > 0 \ u|_{x=0} = g_1(t) &, \ u|_{x=l} = g_2(t) &, \ t \geq 0 \ u|_{t=0} = arphi(x) &, \ u_t|_{t=0} = \psi(x) &, \ 0 < x < l \end{array}
ight.$$

## 初始条件叠加原理

#### 叠加原理1

若 $f = \sum_i \alpha_i f_i$ ,  $\alpha_i$  为任意常数,  $u_i$  是  $Lu = f_i$  的解, 则  $\sum_i \alpha_i u_i$  是原问题的解

### 叠加原理 2、3

当将方程叠加时将初始条件和非齐次项一起加在一起

### 边界条件齐次性

方程边界条件  $u|_{x=0}$  ,  $u|_{x=l}$  为零时, 称为齐次边界条件

### 齐次化

采用变换 u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),其中 w(x,t) 满足  $w(0,t)=g_1(t)$ , $w(l,t)=g_2(t)$ 可以取  $w(x,t)=g_1(t)+rac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x$ 

代入可得边界条件齐次化方程

当存在如下边界条件时,w取以下构造

• 
$$u_x(0,t)=g_1$$
 ,  $u(l,t)=g_2$ :  $w=(x-l)g_1+g_2$ 

• 
$$u(0,t)=g_1\;,\;u_x(l,t)=g_2\colon\,w=xg_2+g_1$$

$$ullet \ u_x(0,t)=g_1\ ,\ u_x(l,t)=g_2\colon \, w=xg_1+rac{g_2-g_1}{2l}x^2$$

## 分离变量法

### 特征函数法

即求解非齐次方程的分离变量法,将非齐次项按特征函数系展开

设有齐次边界条件弦振动问题:

$$\begin{cases} & u_{tt} - a^2 u_{xx} = f & , \ 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ & u|_{x=0} = 0 & , \ u|_{x=l} = 0 & , \ t \ge 0 \\ & u|_{t=0} = \varphi(x) & , \ u_t|_{t=0} = \psi(x) & , \ 0 < x < l \end{cases}$$

求解按如下四步进行

### 假设分离变量解

设u = X(x)T(t),代入齐次方程得

$$XT''=a^2X''T\Rightarrow rac{X''}{X}=rac{T''}{a^2T}\equiv -\lambda$$

有特征值问题

$$\left\{egin{array}{ll} X''(x) + \lambda X(x) = 0 &, & 0 < x < l \ X(0) = X(l) = 0 \end{array}
ight.$$

### 求特征值问题的解

特征方程的通解为

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} l + c_2 \sin \sqrt{\lambda} l$$

代入边界条件有 $\sin\sqrt{\lambda}l=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=n\pi$ 

则特征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ,特征函数  $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$ , $n \geq 0$ 

## 以特征函数系展开比较

将 $\varphi$ ,  $\psi$ , f 也按特征函数系展开叠加

$$egin{aligned} arphi(x) &= \sum_{n=0}^\infty arphi_n \sinrac{n\pi}{l}(x) \ \psi(x) &= \sum_{n=0}^\infty \psi_n \sinrac{n\pi}{l}(x) \ f(x,t) &= \sum_{n=0}^\infty f_n(t) \sinrac{n\pi}{l}(x) \end{aligned}$$

代入原方程并比较各项得

$$\begin{cases} T''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n \\ T_n(0) = \varphi(n) \\ T'_n(0) = \psi(n) \end{cases}$$

求解可得各项

## 平面上泊松方程边值问题

### 极坐标上拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{
ho
ho}+rac{1}{
ho}u_{
ho}+rac{1}{
ho^2}u_{ heta heta}=0$$

设 $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Phi(\theta), \ \Phi(\theta+2\pi) = \Phi(\theta), \$ 有

$$rac{arPhi''( heta)}{arPhi( heta)} = -rac{R''(
ho) + rac{1}{
ho}R'(
ho)}{rac{1}{
ho^2}R(
ho)} = -\lambda$$

得特征值问题

$$\Phi''(\theta) + \lambda \Phi(\theta) = 0$$

且有

$$\rho^2 R_n''(\rho) + \rho R_n'(\rho) - \lambda_n R_n(\rho) = 0$$

此方程为欧拉方程,作代换  $\rho = e^s$ ,有

$$R_{ss}'' - \lambda_n R_n = 0$$

## 贝塞尔函数

### 常系数二阶齐次线性微分方程

$$y'' + ay' + by = 0$$

有特征方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

基解组如下

•  $\lambda$  两个不同实根  $\rho_1$  ,  $\rho_2$ 

$$\{\mathrm{e}^{
ho_1 x},\mathrm{e}^{
ho_2 x}\}$$

特别的, 当  $\rho_1 = \rho = -\rho_2$ 

$$\left\{\cosh 
ho x = rac{\mathrm{e}^{
ho x} + \mathrm{e}^{-
ho x}}{2}, \sinh 
ho x = rac{\mathrm{e}^{
ho x} - \mathrm{e}^{-
ho x}}{2}
ight\}$$

•  $\lambda$  两个共轭的复根  $\rho_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 

$$\left\{ \mathrm{e}^{(lpha+eta\mathrm{i})x},\mathrm{e}^{(lpha-eta\mathrm{i})x}
ight\}$$

利用欧拉公式  $e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + e^{\alpha x}i\sin\beta x$  并取实部后

$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$$

•  $\lambda$  一个重根  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 

$$\{\mathrm{e}^{
ho x},x\mathrm{e}^{
ho x}\}$$

## 幂级数解法

变系数二阶线性常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

若 p(x)、q(x) 在  $x_0$  的邻域内解析,那么有如下形式的解

$$y(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k (x-x_0)^k$$

否则若  $(x-x_0)p(x)$ 、 $(x-x_0)^2q(x)$  在  $x_0$  的邻域内解析,那么有如下形式的解

$$y(x)=(x-x_0)^
ho\sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$$

其中  $a_0 \neq 0, \ \rho \in \mathbb{R}$ 

### Г函数

$$\Gamma(lpha) = egin{cases} \int_0^\infty x^{lpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x &, \ lpha > 0 \ rac{\Gamma(lpha+1)}{lpha} &, \ lpha < 0 \ \land \ lpha 
otin \mathbb{Z} \ \end{pmatrix}$$

性质

- $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$
- $\Gamma(n+1)=n!$ ,  $n\in\mathbb{Z}_+$

### 贝塞尔方程

 $r \geq 0$  阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - r^2)y = 0$$

化为二阶变系数线性常微分方程标准形式有  $p(x)=x^{-1}$ ,  $q(x)=1-\frac{r^2}{x^2}$ ,则 xp(x), $x^2q(x)$  在  $\mathbb R$  上解析

有解的形式

$$y(x) = x^
ho \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

代入比较系数(此处略去推导)

有  $\rho_1 = r$ ,  $\rho_2 = -r$ 

1. 讨论情形  $\rho = \rho_1 = r \geq 0$ 

$$J_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k rac{1}{k!\Gamma(k+r+1)} \Big(rac{x}{2}\Big)^{2k+r}$$

- 2. 讨论情形  $\rho = \rho_2 = -r < 0$ 
  - r 不为正整数

$$J_{-r}(x)$$

 $\circ$  r 为正整数

$$N_n(x) = \lim_{r o n^+} rac{J_r(x)\cos(r\pi) - J_{-r}(x)}{\sin(r\pi)}$$

### 贝塞尔函数

有任意 r > 0, $\{J_r(x), N_r(x)\}$  是贝塞尔方程的基解组

特殊地, r>0且不为整数时,  $\{J_r(x),J_{-r}(x)\}$ 是贝塞尔方程的基解组

整数阶贝塞尔函数  $J_n(x)$  的性质

- 奇偶性  $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$  第m个正零点  $\mu_m^{(n)}$

递推公式

$$(x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x) \ (x^{-n} J_n(x))' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \ J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = rac{2n}{x} J_n(x) \ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

### 贝塞尔方程特征值问题

$$u_{
ho
ho}+rac{1}{
ho}u_{
ho}+rac{1}{
ho^2}u_{ heta heta}=-\lambda u(
ho, heta)$$

将u变量分离

狄利克雷条件  $u(\rho_0,\theta)=0$  下,n 阶贝塞尔方程特征值问题

$$\left\{ egin{aligned} 
ho^2 R''(
ho) + 
ho R'(
ho) + (\lambda^2 
ho^2 - n^2) R(
ho) &= 0 \ R(
ho_0) &= 0 \end{aligned} 
ight. , \; 0 < 
ho < 
ho_0 \ R(0) &= 0 \end{aligned} 
ight.$$

特征值 
$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m(n)}{\rho_0}\right)^2$$
,特征函数  $R_m(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_m(n)}{\rho_0}\rho\right)$ , $m \geq 1$ 

### 贝塞尔函数的正交性与贝塞尔级数

 $f(\rho)$  在  $[0, \rho_0]$  连续且有分段连续的一阶导数

$$f(
ho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left(rac{\mu_m(n)}{
ho_0}
ho
ight)$$

其中

$$A_m = rac{2}{[
ho_0 J_n'(\mu_m^{(n)})]^2} \int_0^{
ho_0} 
ho f(
ho) J_n \left(rac{\mu_m^{(n)}}{
ho_0} 
ho
ight) \mathrm{d}
ho$$

### 圆柱体或圆域上定解问题

$$\begin{cases} \left. u_t = a^2 \Delta u \right. &, \ (\rho, \theta) \in \Omega \quad, \ t > 0 \\ \left. u \right|_{\rho = \rho_0} = 0 &, \ t \geq 0 \\ \left. u \right|_{t = 0} = \varphi(\rho) \quad, \ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

 $\Rightarrow u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ 

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\lambda$$

是零阶贝塞尔方程特征值问题

特征值  $\lambda_m = (\mu_m^{(0)})^2$ ,特征函数  $R_m(\rho) = J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$ , $m \geq 1$ 特征值代入得

$$T_m(t) = A_m \mathrm{e}^{-a^2 (\mu_m^{(0)})^2 t}$$

则

$$u(
ho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t} J_0(\mu_m^{(0)}
ho)$$

展开 $\varphi$ 比较得

$$A_m = rac{2}{[
ho_0 J_0'(\mu_m^{(0)})]^2} \int_0^1 
ho arphi(
ho) J_0\left(rac{\mu_m^{(0)}}{
ho_0}
ho
ight) \mathrm{d}
ho$$

## 格林函数法

### 格林公式

### 高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega} 
abla \cdot oldsymbol{F} \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} oldsymbol{F} \cdot oldsymbol{n} \mathrm{d}s$$

其中汉密尔顿算子  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ 

取  $F = u \nabla v$  得三维形式格林公式

### 格林公式

《高等数学》所描述的"格林公式"

设平面场 F = (P, Q)

$$\iint\limits_{D} \left( rac{\partial Q}{\partial x} - rac{\partial P}{\partial y} 
ight) \mathrm{d}S = \int\limits_{L} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$$

若记 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ ,平面区域 $\Omega$ , $s = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 表示正向边界切向量,那么

$$\iint\limits_{\Omega} 
abla imes oldsymbol{F} \mathrm{d} \sigma = \int\limits_{\partial\Omega} oldsymbol{F} \cdot \mathrm{d} oldsymbol{s}$$

有曲面外法向量  $\mathbf{n}=(\sin\alpha,-\cos\alpha)$  取  $F=u\nabla v$ ,  $F=u\nabla v$   $F=u\nabla v$  F=u

## 格林第一公式

三维

$$\iiint\limits_{\Omega} u \Delta v \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial \Omega} u rac{\partial v}{\partial m{n}} \mathrm{d}s - \iiint\limits_{\Omega} 
abla u \cdot 
abla v \mathrm{d}V$$

二维

$$\iint\limits_{\Omega}(uv_x)_x\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\partial\Omega}vrac{\partial u}{\partialm{n}}\mathrm{d}s-\iint\limits_{\Omega}(uv_y)_y\mathrm{d}\sigma$$

## 格林第二公式

三维

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta u - v\Delta u) dV = \iint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) ds$$

二维

$$\iint\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} \left(vrac{\partial u}{\partial m{n}} - urac{\partial v}{\partial m{n}}
ight) \mathrm{d}s$$

### 格林第三公式

格林第三公式的意义是(除去奇点后)u 的值仅与  $\Delta u$  和边界上的条件决定

### 三维

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left( arGamma rac{\partial u}{\partial m{n}} - u rac{\partial arGamma}{\partial m{n}} 
ight) \mathrm{d}s - \iiint\limits_{\Omega} arGamma \Delta u \mathrm{d}V$$

其中
$$\Gamma=rac{1}{4\pi r_{P_0P}},\; r_{P_0P}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

二维

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{\partial\Omega} \left( \Gamma rac{\partial u}{\partial oldsymbol{n}} - u rac{\partial\Gamma}{\partialoldsymbol{n}} 
ight) \mathrm{d}s - \iint\limits_{\Omega} \Gamma \Delta u \mathrm{d}\sigma$$

其中
$$P_0(\xi,\eta)\in\Omega$$
, $\Gamma(P,P_0)=rac{1}{2\pi} ext{ln} rac{1}{\sqrt{\left(x-\xi
ight)^2+\left(y-\eta
ight)^2}}$ 

## 格林函数法

### 格林函数

设 $\Omega$ 为二维或三维区域, $\partial\Omega$ 充分光滑, $P_0\in\Omega$ , $\Gamma(p,P_0)$ 为拉普拉斯方程基本解考虑定解问题

$$\left\{egin{aligned} -\Delta u = f(oldsymbol{p}) &, \ oldsymbol{p} \in \Omega \ u(oldsymbol{p}) = arphi(oldsymbol{p}) &, \ oldsymbol{p} \in \partial \Omega \end{aligned}
ight.$$

若h(p)是如下定解问题的解

$$\left\{egin{array}{ll} \Delta h = 0 &, ~m{p} \in \Omega \ h(m{p}) = - arGamma(m{p},m{P}_0) &, ~m{p} \in \partial \Omega \end{array}
ight.$$

使格林函数  $G(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) = \Gamma + h$ 

则G为如下定解问题的解

$$\left\{egin{array}{ll} \Delta G = \delta(oldsymbol{p}, oldsymbol{P}_0) &, \, oldsymbol{p} \in \Omega \ G(oldsymbol{p}, oldsymbol{P}_0) = 0 &, \, oldsymbol{p} \in \partial \Omega \end{array}
ight.$$

那么原定解问题的解(三维)可以表示为

$$u(\xi,\eta,\zeta) = - \iint\limits_{\partial\Omega} arphi rac{\partial G}{\partial m{n}} \mathrm{d}s + \iiint\limits_{\Omega} G f \mathrm{d}V$$

(二维)

$$u(\xi,\eta) = -\int\limits_{\partial\Omega} arphi rac{\partial G}{\partial oldsymbol{n}} \mathrm{d}s + \iint\limits_{\Omega} G f \mathrm{d}\sigma$$

#### 应用

格林函数中h的形式仅与给定边界有关,则对于特定问题,先求出格林函数,在通过上述格林函数法的结果给出原定解问题的解

#### 半空间上狄利克雷问题

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z > 0\}, \ \partial\Omega = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$$

设
$$\mathbf{P}_0 \in \Omega$$
,  $\mathbf{P}_1$  为对称点,有 $G = \Gamma(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) - \Gamma(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1)$ 

计算

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}$$

代入格林函数法公式求解

#### 平面圆域上狄利克雷问题

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$$

设  $P_0 \in \Omega$ ,  $P_1$  为关于圆的反射点, 极坐标  $P(\rho, \theta)$ 

格林函数

$$G(m{P},m{P}_0) = -rac{1}{4\pi} {
m ln} \, rac{
ho_0^2 R^2 + 
ho^2 R^2 - 2
ho_0 
ho R^2 \cos( heta_0 - heta)}{R^4 + 
ho_0 
ho^2 - 2
ho_0 
ho R^2 \cos( heta_0 - heta)}$$

## 特征线法

## 一阶线性偏微分方程特征线法

有关于u(x,t)的一阶线性偏微分方程

$$au_t + bu_x + cu = f$$

其中a、b、c、f均为x和t的函数

特征方程:

$$a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - b = 0$$

其积分曲线为上述方程的特征曲线(族)(带有任意常数au),沿特征曲线有 $au_t + bu_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ,常微分方程求解后将au反解代回即可

### 一阶拟线性偏微分方程特征线法

一阶偏微分方程柯西问题

$$\left\{egin{array}{ll} a(x,t,u)u_x+b(x,t,u)u_t=c(x,t,u) &, \ x\in\mathbb{R} &, \ t>t_0 \ u(x,t_0)=arphi(x) &, \ x\in\mathbb{R} \end{array}
ight.$$

- 1. 特征向量场  $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$
- 2. 特征方程组

$$\left\{egin{array}{l} rac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,t,u) &, \ x(s_0) = au \ rac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = b(x,t,u) &, \ t(s_0) = t_0 \ rac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c(x,t,u) &, \ u(s_0) = arphi( au) \end{array}
ight.$$

特征方程组的解称为特征曲线族, 其中  $s_0 = t_0$ 

特征曲线消去参数 $\tau$ 、s即为原问题的解

### 一维波动方程特征线法

无界弦振动柯西问题

$$\left\{ egin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \ u(x,0) &= arphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) &= \psi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} 
ight.$$

特征方程:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a^2 = 0$$

特征线  $x - at = c_1$ ,  $x + at = c_2$ 

得满足微分方程的行波解

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

其中f, g 为有二阶连续偏导数的任意函数

根据初始条件有达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \left[rac{1}{2}arphi(x-at) - rac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(lpha)\mathrm{d}lpha
ight] + \left[rac{1}{2}arphi(x+at) + rac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(lpha)\mathrm{d}lpha
ight]$$