

# 19 恒定磁场的应用

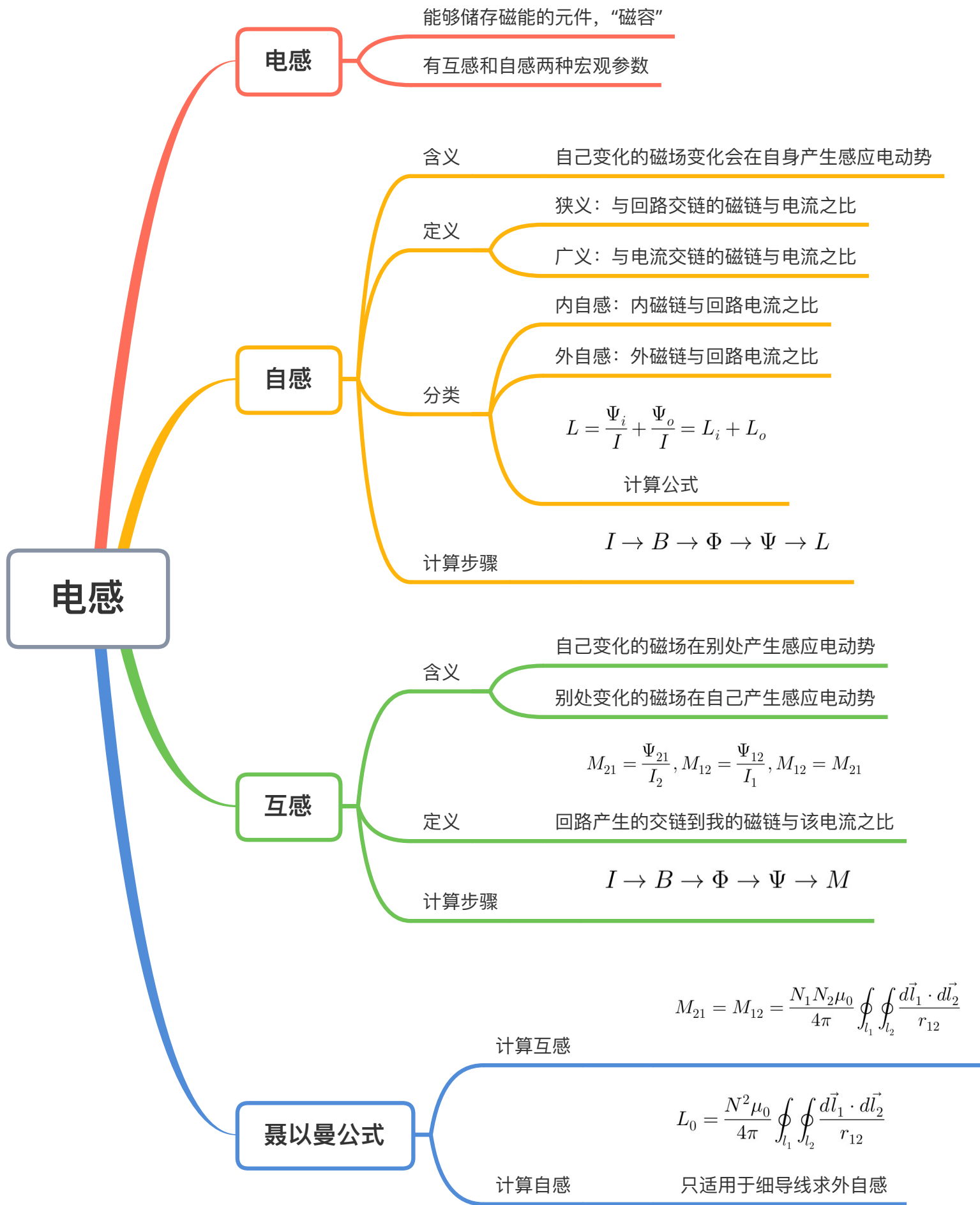
-电感

邹建龙

# 主要内容

---

- 电感
- 自感的含义
- 自感的定义
- 计算自感的步骤
- 互感的含义
- 互感的定义
- 计算互感的步骤
- 互感和自感的计算——聂以曼公式



# 电感

- 电感就是能够**储存磁能**的元件 “磁能”
- 磁场需要电流产生，只要能通过电流产生磁场，就是电感
- 电感可以**刻意**制造，也可能**不经意**就存在
- 电磁场中讲电感的目的是深刻理解电感的**本质**，  
并给出**计算**电感值的方法
- 电感有**自感**和**互感**两种参数，是**宏观参数**
- 自感和互感反映的是电感**容纳磁场的**能力

# 自感的含义

- 自感就是自己能感应自己
- 自己感应自己就是自己的磁场变化会在自身产生感应电动势

自感现象：导体回路中由于自身电流的变化，而在自身回路中产生感应电动势的现象

法拉第电磁感应定律：导体回路中产生的感应电动势与穿过回路的磁通量变化率成正比

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

楞次定律：感应电流方向引起的磁通反抗引起感应电流磁通的变化。

# 自感的定义

- 自感定义（狭义）：与回路交链的磁链与电流之比

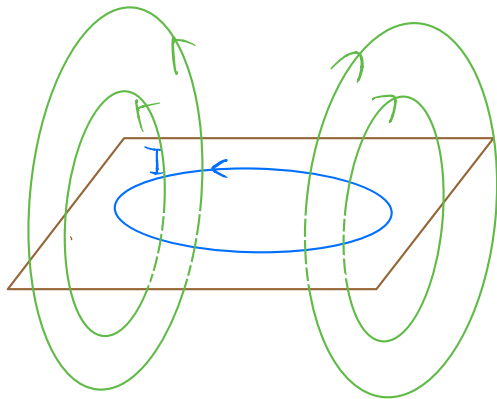
$$L = \frac{\Psi}{I}$$

$$C = \frac{q}{U}$$

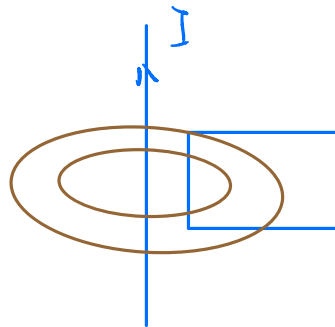
磁通量匝数

$$R = \frac{U}{I}$$

- 自感定义（广义）：与电流交链的磁链与电流之比



与电流交链



# 自感的定义

## ➤ 自感=内自感+外自感

内自感定义：导体内部的磁场仅与部分电流交链的磁链

（内磁链），与回路电流之比 无限细的导线实际是不存在的

外自感定义：导体外部的磁场与全部电流交链的磁链

（外磁链），与回路电流之比

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_{\text{inside}} + \Psi_{\text{outside}}}{I} = \frac{\Psi_{\text{inside}}}{I} + \frac{\Psi_{\text{outside}}}{I} = L_{\text{inside}} + L_{\text{outside}} = L_i + L_o$$

## 计算自感的步骤

1. 假定电流**I**
2. 根据电流计算**B**（安培环流定律）
3. 根据**B**计算磁通量（积分）
4. 根据磁通量计算磁链（磁链等于磁通量乘以匝数）
5. 求磁链与电流**I**的比值得到自感值

假定 I  $\xrightarrow{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I}$  B  $\xrightarrow{\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}}$   $\Phi$   $\xrightarrow{\Psi = \mu \Phi}$   $\Psi$   $\xrightarrow{L = \frac{\Psi}{I}}$  L

一步到位  $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\oint \vec{J} \cdot d\vec{S}}$



自感的计算例1：试求图示长为 $l$ 的同轴电缆的自感  $L$ 。

解： 1) 内导体的内自感 ( $0 \leq \rho \leq \rho_1$ )

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{\pi \rho_1^2} \pi \rho^2 = \frac{I}{\rho_1^2} \rho^2 \quad \text{安匝}$$

$$H = \frac{I}{2\pi \rho_1^2} \rho, \quad \text{磁场与电流交链匝数} \quad N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$$

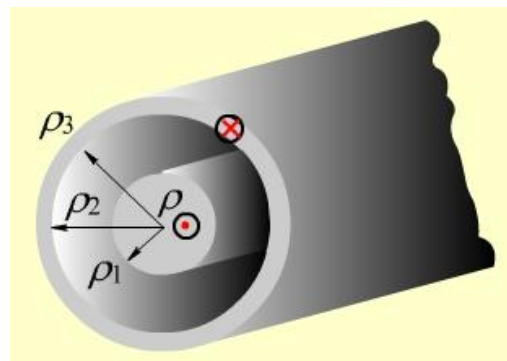
$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho_1^2} \rho l d\rho \quad d\psi_{i1} = N d\Phi$$

$$\psi_{i1} = \int N d\Phi = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi \rho_1^2} \frac{\rho^2}{\rho_1^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

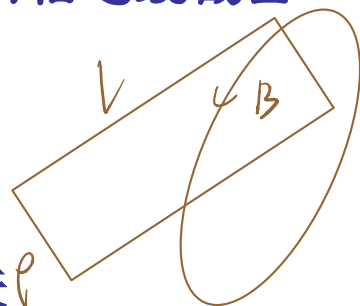
内自感  $L_{i1} = \frac{\psi_{i1}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$

仅与导体长度有关

$$S = \rho l \rightarrow ds = l d\rho$$



同轴电缆截面

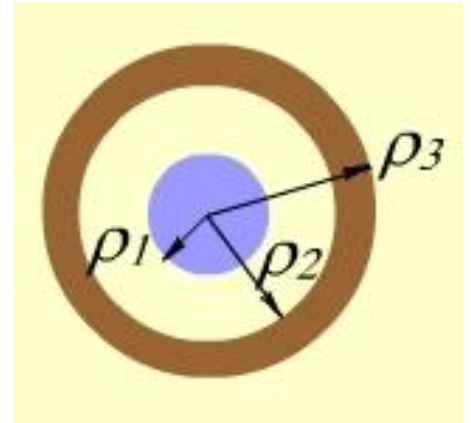


## 2) 内导体外自感 ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ )

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$d\psi_0 = d\Phi_0 = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$L_{o1} = \frac{\psi_0}{I} = \frac{1}{I} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



### 3) 外导体内自感 ( $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_3$ )

内外电流相同, 实际上就是外部

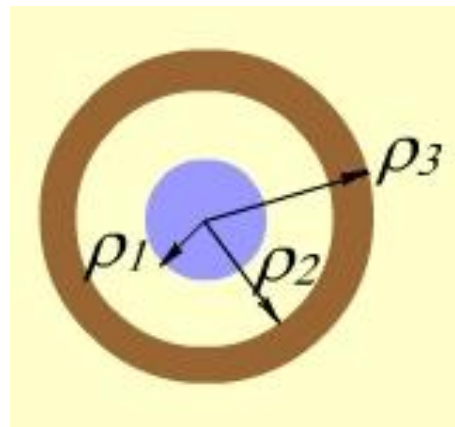
圆环外侧与外部圆环面积之比

$$B = \frac{I' \mu_0}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

圆环面积之比

$$d\Phi_{i2} = B dS = B \cdot l d\rho$$

面积之比



同轴电缆

磁通与电流  
交链匝数

$$N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

$$L_{i2} = \frac{1}{I} \int_{\rho_2}^{\rho_3} N B l d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \frac{\rho_3^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)^2 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\mu_0 l \rho_3^2}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)} + \frac{\mu_0 l (\rho_3^2 + \rho_2^2)}{8\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}$$

总自感  $L = L_{i1} + L_{o1} + L_{i2} + (L_{o2}=0)$

自感的计算例2：试求半径为 $R$ 的两平行传输线自感。

定义式

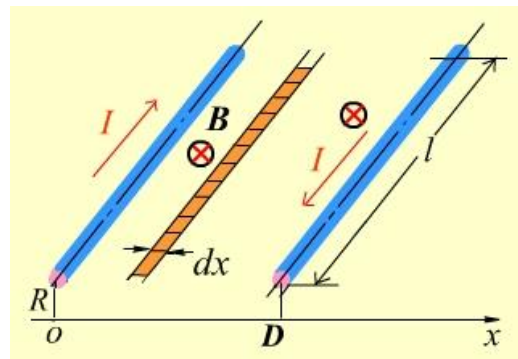
解:根据例1结论, 内自感  $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ , 总自感  $L = 2L_i + L_0$  做

设  $I \rightarrow B = \frac{I\mu_0}{2\pi x} + \frac{I\mu_0}{2\pi(D-x)}$

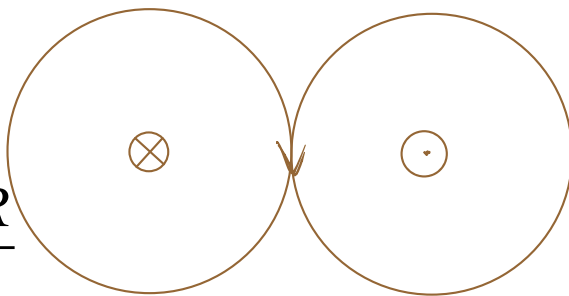
$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{D-R} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{(D-x)} \right) l dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$L_0 = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$



两线传输线



电流在两传输线中间产生的B方向相同

总自感为  $L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$

# 互感的含义

---

- 互感就是我和别人可以相互感应
- 我感应别人，就是我的磁场变化会在别人身上产生感应电动势
- 别人感应我，就是别人的磁场变化会在我身上产生感应电动势

# 互感的定义

互感定义：

一个电流（回路）产生的交链到我的磁链与该电流之比

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

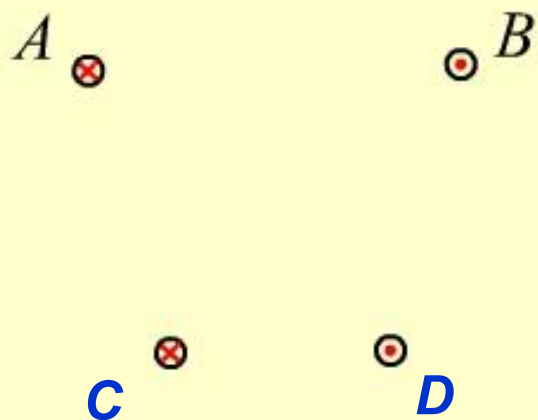
$\Psi_{12}$  = 2 在外部的磁链

# 计算互感的步骤

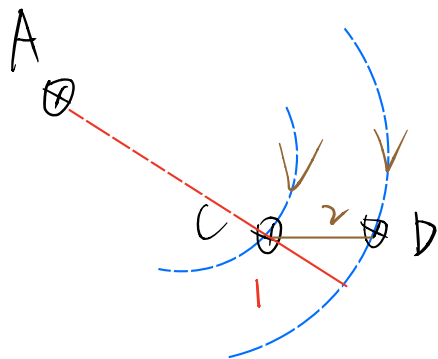
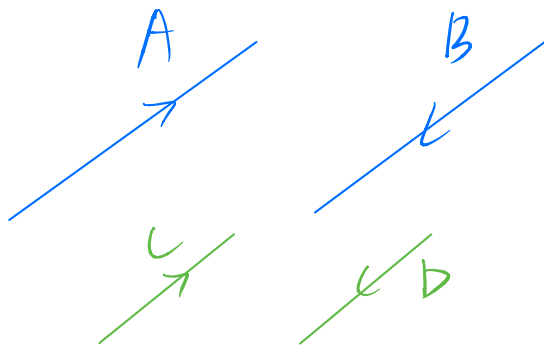
1. 假定电流  $I$
2. 根据电流计算  $B$  (安培环流定律)
3. 根据  $B$  计算耦合磁通量 (积分)
4. 根据磁通量计算耦合磁链 (磁链等于磁通量乘以匝数)
5. 求耦合磁链与电流  $I$  的比值得到互感值

$$\text{假定 } I \xrightarrow{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I} \vec{B}_1 \xrightarrow{\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}} \Phi_1 \xrightarrow{\Psi = N\Phi} \Psi_1 \xrightarrow{M = \frac{\Psi}{I}} M_{12}$$

互感的计算例题：试求图示两对传输线的互感。



AB是一对传输线，CD是另外一对。

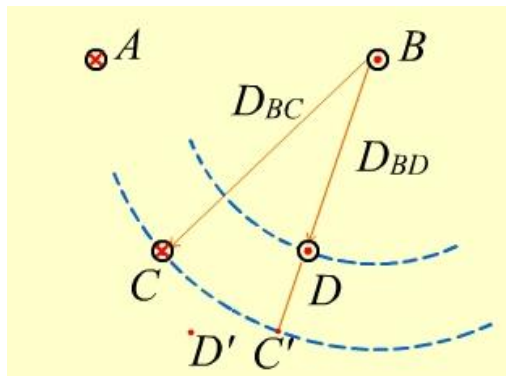


穿过 $r$ 面的磁感线条数与穿过 $r$ 面的相等  
等效将 $r$ 的面积投影为 $1$ 的面积



互感的计算例题：试求图示两对传输线的互感。

解： 设传输线 **AB** 带电，求穿过 **CD** 回路的磁链



**两对传输线的互感**

导线 **A** 作用时  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$$\psi_{mA} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_l B dl \rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{AD}{AC}$$

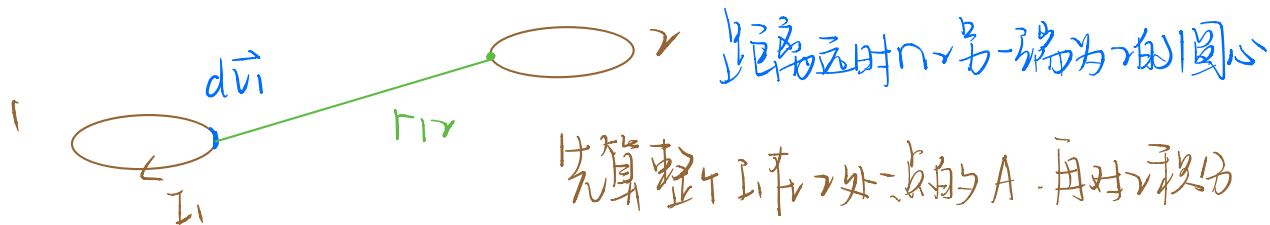
同理，导线 **B** 单独作用时

$$\psi_{mB} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_l B dl \rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{BC}{BD}$$

$$\psi_m = \psi_{mA} + \psi_{mB} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot BD}$$

$$M = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot BD}$$

# 互感和自感的计算——聂以曼 (Neumann) 公式



单匝线圈产生的磁矢位

$$\mathbf{A} = \oint_l \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \oint_l \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1}{4\pi r_{12}} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}_1}{r_{12}}$$

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\Phi_{m21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \quad \leftarrow \quad \Phi_{m21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{l}_2$$

(单匝线圈)

回路1、2形状和相对位置确定时, 互感也同时确定

$$M_{21} = M_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}$$

(多匝线圈)

计算互感的  
聂以曼公式

# 互感和自感的计算——聂以曼 (Neumann) 公式

$$M_{21} = M_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \quad \text{(计算互感的聂以曼公式)}$$

(多匝线圈)

$$L_o = \frac{N^2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \quad \text{(计算外自感的聂以曼公式, 只适用于细导线求外自感)}$$

思想: 可对一个线圈进行数学上的拆分, 拆分为两个线圈。

求自感 → 求拆分两线圈的互感

$$N \begin{cases} \rightarrow N_1 = N \\ \rightarrow N_2 = N \end{cases}$$

自感的磁链等于拆分后耦合的磁链, 但自感少算了

→ 细导线可忽略  
由自感

# 作业十七

---

1. 简要描述自感和互感的定义
2. 教材3-7-1
3. 教材3-7-2
4. 教材3-7-3