

7 静电场方程和求解 (5)

-静电场的唯一性定理和分离变量法

邹建龙

主要内容

- 静电场唯一性定理的内容
- 静电场唯一性定理的意义
- 分离变量法的思想
- 拉普拉斯方程求解的分离变量法

静电场唯一性定理 分离变量法

静电场唯一性定理

内容

满足给定边界条件

满足电位偏微分方程

所得解为唯一解

意义

求解可无所不用其极，可猜

分离变量法

猜想

$$\varphi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$$

数理方程

刘维尔定理（特征值问题）

平面位势方程

矩形域

圆域

一般过程

分离变量，求解特征值问题

正交分解过程（傅立叶展开）

待定系数法

结合边界、初始条件求解

思想

一变量转三变量

偏微分变常微分

三维问题化一维

静电场唯一性定理的内容

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{-\varepsilon} \quad \text{泊松方程}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{拉普拉斯方程}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

静电场唯一性定理：

在静电场中，如果一个解满足电位偏微分方程和给定的边界条件，
那么该解是唯一解！

证明过程见教材或其他参考书（数学证明过程极为复杂！）。

静电场唯一性定理的意义

- 不管白猫黑猫，逮住**唯一的老鼠**，就是好猫！
- 静电场的解可以**猜！** 因为只要猜中，就是**唯一解！**

可根据方程特点猜测解的形式

接下来将要讲到的两种求解静电场问题的方法

- **分离变量法靠猜！**
- **镜像法也靠猜！**

分离变量法的思想

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

猜想: $\varphi = f(x)g(y)h(z)$

$f(x)$ 仅是 x 的函数

$g(y)$ 仅是 y 的函数

$h(z)$ 仅是 z 的函数

猜想合理吗? 试试就知道!

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$g(y)h(z)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + f(x)h(z)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + f(x)g(y)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -k_y^2$$

$$\frac{1}{h(z)} \frac{d^2 h(z)}{dz^2} = -k_z^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{h(z)} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} = 0$$

三项互不相关
各为常数

分离变量法的思想:

① 一个变量变成3个变量(猜);

② 偏微分方程变成常微分方程;

③ 三维问题转化为一维问题。

拉普拉斯方程求解的分离变量法

- 分离变量法是求解有解析解电磁场问题的重要方法！
在教材中会多次用到。不过考虑到分离变量法求解过程极为漫长，故此不再展开。有兴趣的同学可以自己查阅，大多数同学在需要用到时直接查结论即可。
- 详细过程和结论看电磁场教材
- 在数学物理方程中也有关于分离变量法的详细讲解，因此可参考数学物理方程教材。

(分离变量法不考)