电路需记公式集锦

by 张骏扬

这个文档用来在考前清扫公式与部分定义，并不能有效地帮助理解，但是很有用

2021.1.7

- 电路需记公式集锦
- 数学基础
  - 积化和差与和差化积
  - 周期量与复数
  - 傅里叶级数
  - 二阶常系数齐次线性微分方程
- 等效
  - Y-Δ 变换（T-π 变换）
  - 最大功率传输定理
- 电路的图
  - 最大独立方程数
  - 特勒根定理 2
- 元件性质
  - 电容
  - 电感
  - 变压器
- 一阶电路
- 二阶电路
  - RLC 串联电路的零输入响应
  - 利用阶跃响应求冲激响应
  - 利用阶跃函数求复合阶跃响应
  - 利用卷积求任意激励响应
- 正弦稳态电路与相量法
  - 功率
  - 谐振
    - RLC 串联电路谐振
    - GLC 并联电路谐振
  - 三相电路
  - 非正弦周期电流电路
- 二端口网络

数学基础

积化和差与和差化积

请不要尝试记住 8 个公式，反之启发式地从以下二式推导

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)=2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

周期量与复数

设周期量

$$f(t)=A_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)=A_m\cos(2\pi ft+\phi)=A_m\cos(\omega t+\phi)$$

其中 A_m 为最大值，ω 为角频率，ϕ 为初相角（$|\phi|\leq\pi$）

平均值 $f_{avg}\triangleq\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}A_m$

有效值 $f_{eff}\triangleq\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f^2\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{2}}{2}A_m$

周期量的复数形式 $f(t)=\frac{1}{2}A_m\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\phi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\phi)}\right]$

欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$

极坐标形式 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\angle\theta$

傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right]$$

其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\qquad&,n\in\mathbb{Z}_+\\b_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t\qquad&,n\in\mathbb{Z}_+\end{aligned}$$

二阶常系数齐次线性微分方程

形式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=0$$

特征方程

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

特征根 λ_1, λ_2，齐次方程通解如下

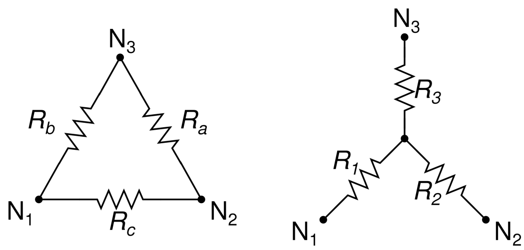
- 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为一对实根：
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
- 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:
$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$
- 当 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

等效

Y-Δ 变换（T-π 变换）

$$\begin{aligned}
\text{Y 形阻抗} &= \frac{\Delta\text{形相邻阻抗的乘积}}{\Delta\text{形阻抗之和}} \\
\Delta\text{形阻抗} &= \frac{\text{Y 形阻抗两两乘积之和}}{\text{Y 形不相邻阻抗}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \\
R_a &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}
\end{aligned}$$

最大功率传输定理

设负载阻抗 Z_L 连接于二端口等效戴维宁电路 $\dot{U}_S, Z_S$。当 $Z_L = Z_S^*$ 时，有负载最大功率：

$$P_{Lmax} = \frac{U_s^2}{4R_S}$$

电路的图

最大独立方程数

对结点数量 n，支路数量 b，的连通图有：

$$
\begin{aligned}
\text{回路电流法方程数} &= \text{独立 KVL 方程数} = b-(n-1) \\
\text{结点电压法方程数} &= \text{独立 KCL 方程数} = n-1
\end{aligned}
$$

特勒根定理 2

如果两个电路的图 $G=\hat{G}$，设各支路关联参考方向电流分别为 $(i_1,i_2,\cdots,i_b)$，$(\hat{i}_1,\hat{i}_2,\cdots,\hat{i}_b)$，电压分别为 $(u_1,u_2,\cdots,u_b)$, $(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\cdots,\hat{u}_b)$，则有：

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=1}^{b} u_k\hat{i}_k = 0 \\
\sum\limits_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0
\end{cases}
$$

由特勒根定理 2 可推出特勒根定理 1（对同一个图）、互易定理（对一对激励响应互换图）。

特勒根定理 2 特例：当存在纯电阻 n 端口网络 $N\subset G$，其中端口关联参考方向方向电流分别为 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, $(\hat{i}_1,\hat{i}_2,\cdots,\hat{i}_n)$，电压分别为 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\cdots,\hat{u}_n)$，则有：

$$
\sum_{k=1}^{n} u_k\hat{i}_k = \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k i_k
$$

元件性质

关联参考方向电压 $u(t)$，电流 $i(t)$，储能 $W(t)$。

电容

一极板上电荷量 q

$$
\begin{aligned}
q &= Cu \\
i &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
u(t) &= u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \\
W(t) &= \frac{1}{2}Cu^2(t)
\end{aligned}
$$

C_1,C_2 串联：$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$，并联：$C_{eq}=C_1+C_2$

阻抗 $Z_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$

电感

电感磁链 Ψ

$$\begin{aligned}\Psi&=Li\\u&=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\i(t)&=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\W(t)&=\frac{1}{2}Li^2(t)\end{aligned}$$

L_1,L_2串联：$L_{eq}=L_1+L_2$，并联：$L_{eq}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$

阻抗 $Z_L=\mathrm{j}\omega L$

变压器

耦合因数 $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\leq 1$

理想变压器：$L_1,L_2\to\infty$，$k=1$，$n=\frac{N_1}{N_2}=\frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$

阻抗变换：$Z_{11'}=n^2Z_L$

一阶电路

RC 一阶电路，时间常数 $\tau\triangleq RC$

RL 一阶电路，时间常数 $\tau\triangleq\frac{L}{R}$

全响应：$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

二阶电路

RLC 串联电路的零输入响应

微分方程：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

特征根：

$$p=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

形式解:

$$\begin{cases} u_C\text{非震荡下降(过阻尼)} & ,R>2\sqrt{\frac{L}{C}}; \\ u_C\text{指数下降(临界阻尼)} & ,R=2\sqrt{\frac{L}{C}}; \\ u_C\text{震荡下降(欠阻尼)} & ,R<2\sqrt{\frac{L}{C}}. \end{cases}$$

利用阶跃响应求冲激响应

设线性电路阶跃响应 $s(t)$，冲激响应 $h(t)$，有 $h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$

利用阶跃函数求复合阶跃响应

求复合形式、分别求解、叠加。（卷积求解的特例）

利用卷积求任意激励响应

设激励函数 $e(t)$，响应 $r(t)$，冲激响应 $h(t)$

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_0^t e(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

正弦稳态电路与相量法

阻抗角 $\phi_Z=\phi_u-\phi_i$

功率

- 有功功率 $P\triangleq UI\cos\phi_Z$，单位 W（瓦）；
- 无功功率 $Q\triangleq UI\sin\phi_Z$，单位 var（乏）；
- 视在功率 $S\triangleq UI$，单位 $\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$（伏安）；
- 复功率 $\bar{S}\triangleq\dot{U}\dot{I}^*=UI\angle\phi_z=P+\mathrm{j}Q=I^2Z=U^2Y^*$，单位 $\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$（伏安）。

功率因数 $\lambda=\cos\phi_Z=\frac{P}{S}$

谐振

电流电压同相位

RLC 串联电路谐振

- 谐振角频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- 品质因数 $Q \triangleq \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_C(\mathrm{j}\omega_0)}{U_S(\mathrm{j}\omega_0)}$
- 带宽 BW：$|H_R(\mathrm{j}\eta)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$，$BW = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

GLC 并联电路谐振

- 谐振角频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- 品质因数 $Q \triangleq \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{I_L(\mathrm{j}\omega_0)}{I_S(\mathrm{j}\omega_0)}$
- 带宽 BW：$|H_R(\mathrm{j}\eta)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$，$BW = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

三相电路

三相：ABC 依次滞后 $\frac{2}{3}\pi$

线电流：$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C, \dot{I}_N$ 为输电线电流

线电压：$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ 为线间电压

相电流：$\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ 为线间电流

相电压：$\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ 为线到中性线电压

二瓦计法：$P = \mathrm{Re}[\dot{U}_{AC}\dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC}\dot{I}_B^*]$

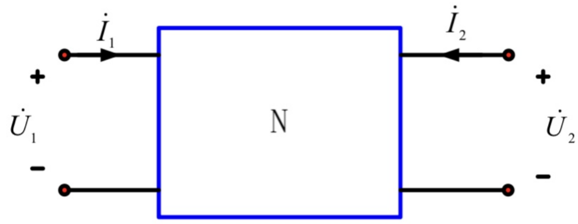
非正弦周期电流电路

设 $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \cos(k\omega_1 t + \phi_{ik})$，$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \cos(k\omega_1 t + \phi_{uk})$，$\phi_k = \phi_{uk} - \phi_{ik}$

有效值：

- 电流 $I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$
- 电压 $U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$
- 功率 $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\phi_k$

二端口网络



Y 参数：短路导纳参数

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\mathbf{Y}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

Z 参数：开路阻抗参数

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\mathbf{Z}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

T 参数：传输参数

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\mathbf{T}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$$

H 参数：混合参数

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\mathbf{H}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$