

# 复变函数与积分变换思维导图

*Mind Map of Complex Analysis and Integral Transformation*

电气钱 91 班谢佳润

2021 年 1 月 6 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN XUESEN COLLEGE ACADEMIC COUNSELING CENTER

#### 作品信息

- 标题：复变函数与积分变换思维导图: *Mind Map of Complex Analysis and Integral Transformation*
- 作者：电气钱 91 班谢佳润
- 出品时间：2021 年 1 月 6 日
- 总页数：10

# 前言

《复变函数》几乎是所有理工科学生的必修课，可以说只要你的专业与“电”相关，你或早或晚都要接触这门课程。相信经过了一学期的学习，各位同学都会对这门课程有着自己的感悟与理解。可能有些同学已经发现这门课程作为工科生的一项“工具”，解题的技巧性并没有那么的强，更多的则是需要记忆并熟练运用样式繁多且容易混淆的公式，而这也恰恰成为一些同学（包括笔者）学习过程中的一些阻碍。所以为了方便记忆同时避免遗漏，笔者在学习之余，将书本上的一些知识要点与公式进行整理，以思维导图的形式呈现出来以理解与复习。

但事实上我并不愿称这一份资料为思维导图，因为其中有些内容过于冗杂甚至可能无用，丝毫没有体现出思维导图的简洁之美。可毕竟笔者能力有限，没有想到一些更好的解决办法，最后只能靠最原始的堆叠与罗列，将知识要点和常用公式呈现出来，并稍微做一些整理，让读者在阅读时能够更快的检索到需要的信息，也方便读者更加系统的去记忆公式。

同时我也相信这份资料对于很多同学其实是无用的，因为一方面其中所有的内容都可以在书上相应位置找到，我做的工作只不过是将它们提取出来，整理到一起；另一方面这些同学也早已根据自己的理解建立起适合自己的学习体系，不需要类似这种资料的辅助。所以大家使用时各取所需就好，而这一份资料的受众群体，也正是那些目前仍需要依靠外部资料协助来进一步掌握知识的同学。另外笔者只是一名普通的同级工科生，能力有限，所以编纂的时候难免会有些错误与遗漏之处，任何与资料内容有关的建设性批评与建议，都欢迎大家积极提出，希望这份资料能够给大家提供适当的帮助，谢谢各位同学！

最后还有一些闲话想要说，很多同学可能会疑惑为什么我们要去学习《复变函数》这门课程，刚开始的时候我也同样如此。但慢慢的在自己学习、查阅资料以及和学长交流的过程中，我逐渐意识到这门课的重要性，借用知乎上一位前辈的回答说：

“复变函数是电的五线谱”

《复变函数》作为未来很多专业课学习的基础，其重要程度，不言而喻。所以希望同学们，尤其是专业与“电”相关的同学，要对这门课程足够重视起来，在复习的过程中也要多一些自己的理解与思考，不要将自己的思想单单的拘泥于记忆公式本身，更多的是要跳脱出公式，真正理解公式背后的意义与使用的精髓所在。

——电气钱 91 班 谢佳润

复变函数基本概念与性质

复数的概念与运算

复数的概念

- 实部:  $\text{Re}(z)$ , 虚部:  $\text{Im}(z)$
- 共轭复数:  $\bar{z}$
- 模:  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 幅角:  $\text{Arg } z = \theta_1 + 2k\pi$  其中 $\text{Arg } z$ 的主值满足条件:  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$

复数的三角表示式:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

复数的指数表达式: 由欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  得到:  $z = re^{i\theta}$

复数乘积和商的模与幅角

- 乘积  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$
- 商  $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $\text{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$
- 几何意义: 向量旋转一个角度+伸长(或缩短)一个倍数

复数的乘幂与方根

- $z$ 的 $n$ 次幂:  $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$   $r=1$ 时
- De Moivre公式:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
- $z$ 的 $n$ 次方根:  $\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$   
多值结果, 当 $k=0, 1, \dots, n-1$ 时, 得到 $n$ 个不同的根

复球面与无穷远点

- 复球面: 球面上的每个点有唯一的一个复数与它对应
- 包含无穷远点的复平面称为扩充复平面, 不包含的称为有限平面, 或称复平面

复变函数及其极限与连续性

复平面上的区域

- 区域的概念
- 简单曲线及单连通和多连通域

复变函数的概念

- 定义
- 几何表示——映射:  $z$ 平面向 $w$ 平面上的映射,  $z$ 为原像,  $w$ 为像

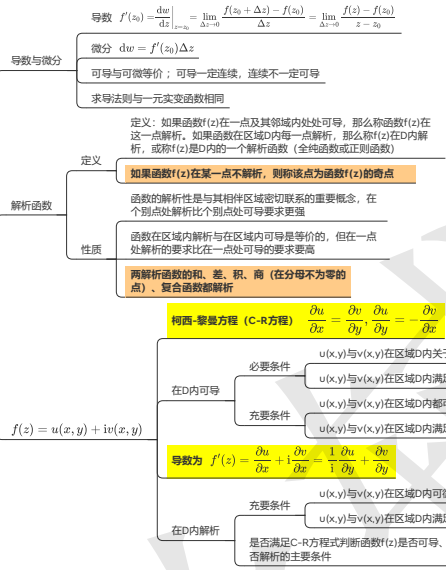
复变函数的极限与连续性

- 复变函数的极限的性质

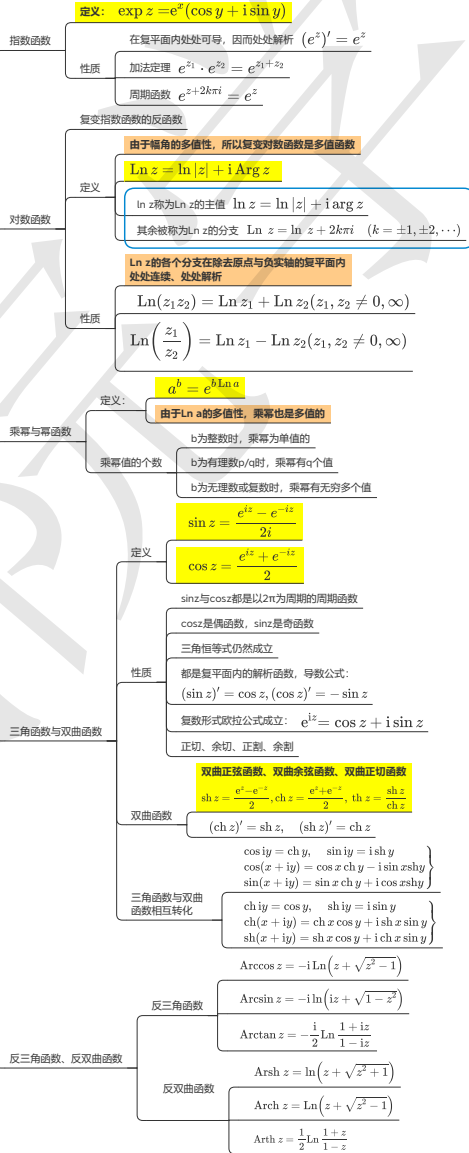
理解掌握

## 解析函数

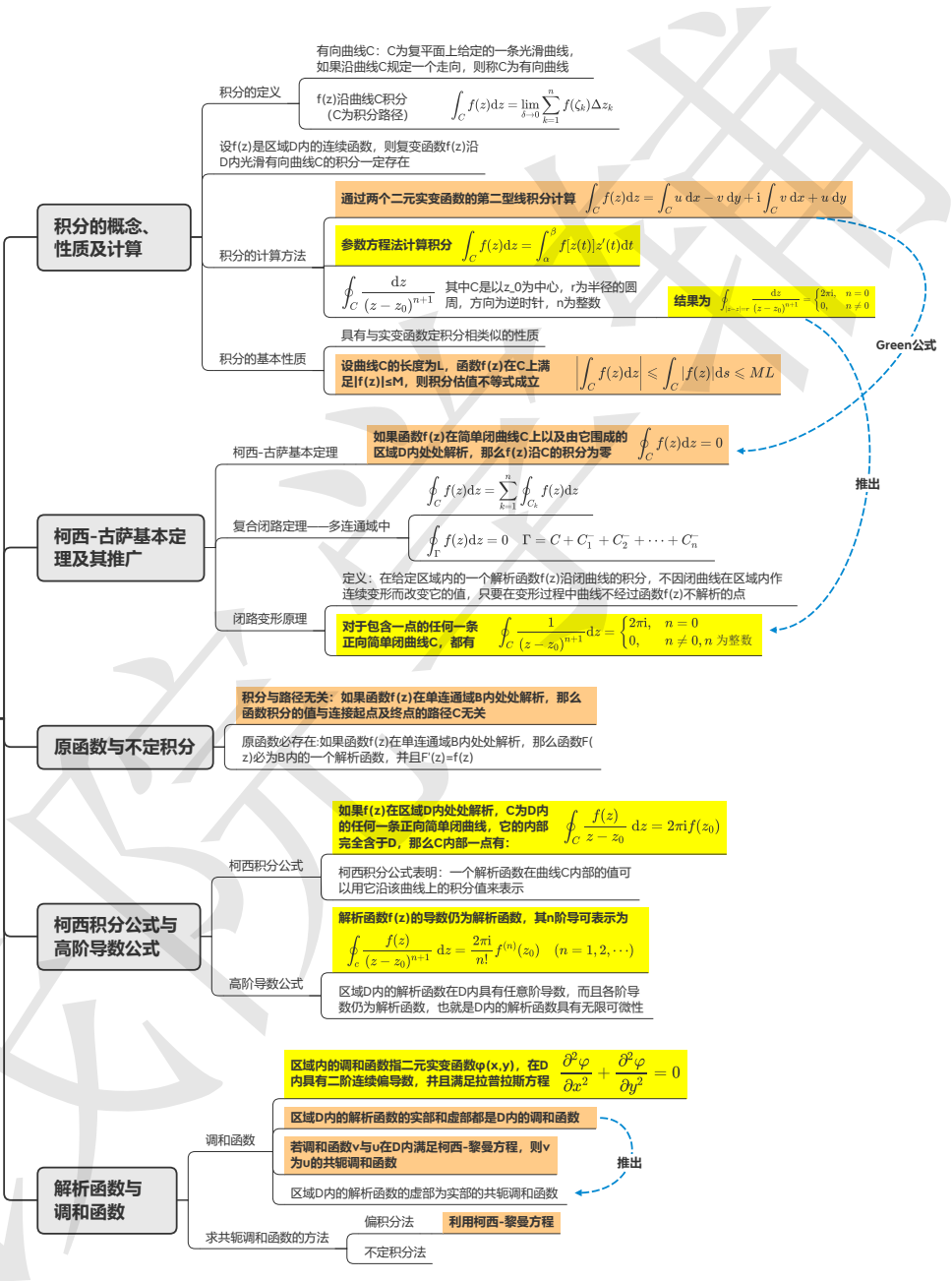
### 解析函数的概念及其判定



### 复变初等函数

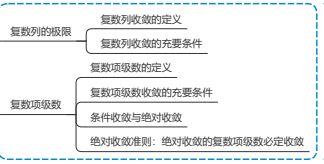


复变函数的积分



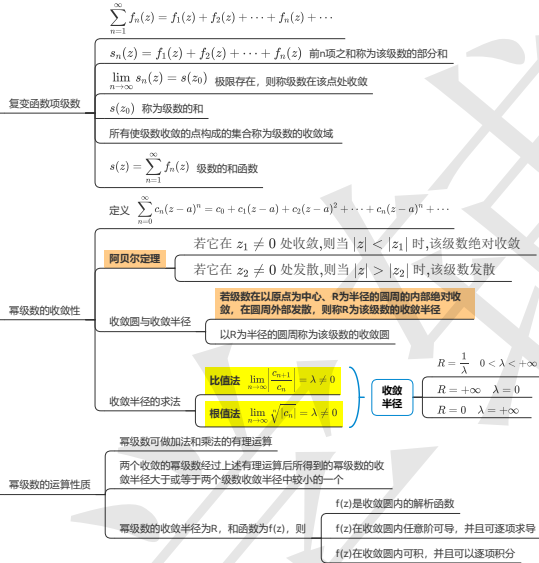
复变函数项级数

复数项级数

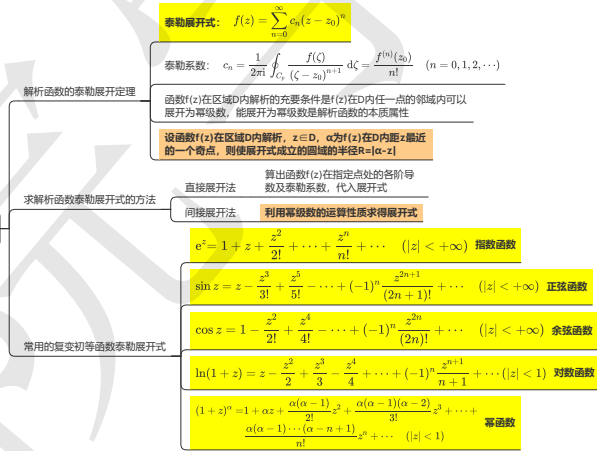


理解掌握

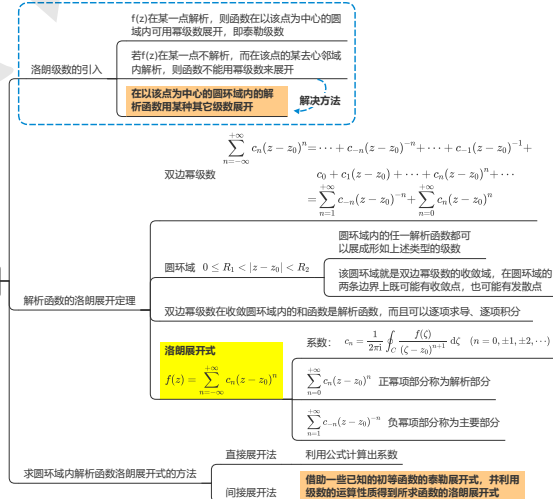
幂级数



泰勒级数



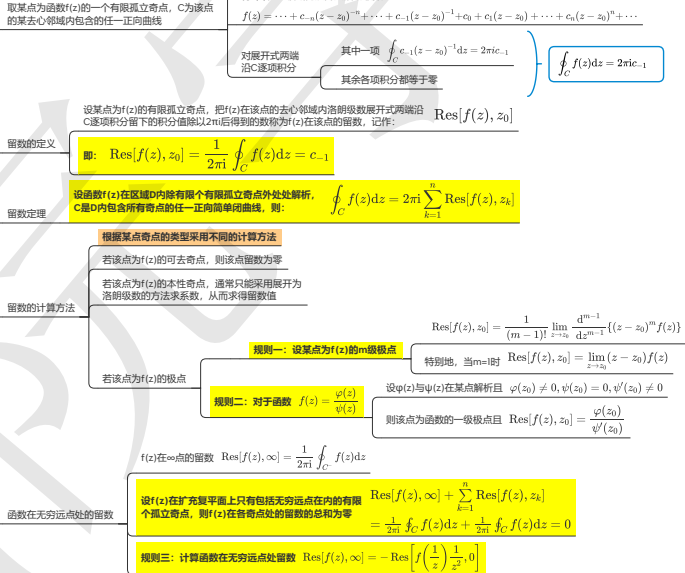
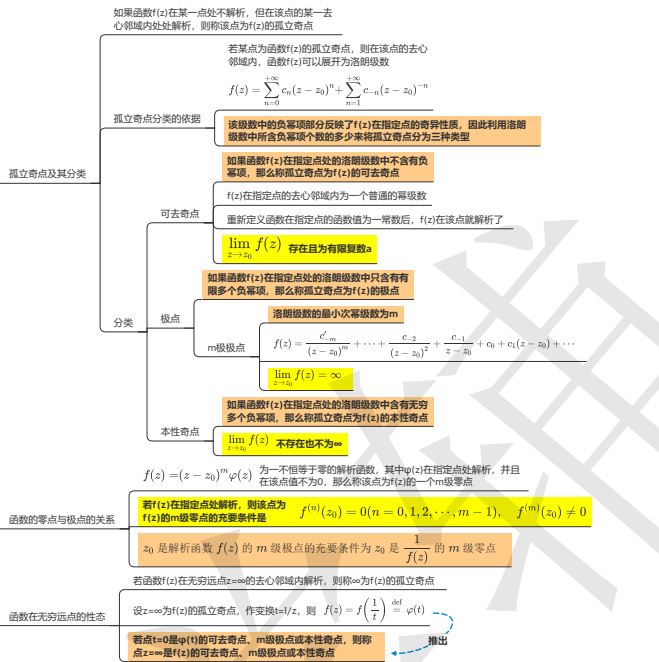
洛朗级数



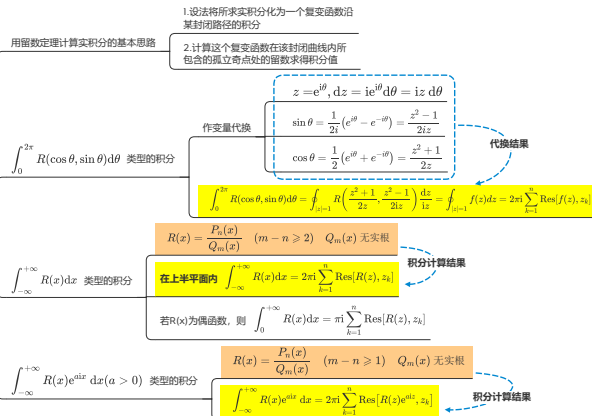
留数及其应用

留数与留数定理

解析函数的孤立奇点



留数定理在计算实积分中的应用





# Fourier变换

## Fourier积分

Fourier积分定理

$f(t)$ 在任一有限区间上满足Dirichlet条件  
 $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积

Fourier积分公式复数形式  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$

原形式  $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega$

Fourier积分公式三角形形式

$f(t)$ 为奇函数时  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega$

$f(t)$ 为偶函数时  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega$

Dirichlet积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$

## Fourier变换

Fourier变换的概念

Fourier变换函数  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$   $F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的象函数

Fourier逆变换函数  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$   $f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的象原函数

Fourier变换式  $F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$   $F(\omega) = -2jF_s(\omega)$

Fourier逆变换式  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$

Fourier变换式  $F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$   $F(\omega) = 2F_c(\omega)$

Fourier逆变换式  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$

指数衰减函数  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega}$

$\delta$ -函数  $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = 1$

单位脉冲函数

筛选性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$

积  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

性质

$\delta$ -函数是偶函数, 即 $\delta(t) = \delta(-t)$

$\delta$ -函数是单位阶跃函数的导数, 即  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t), \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$

若 $a$ 为非零实常数, 则  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数, 则有  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$

单位阶跃函数  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

1的Fourier变换  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$  推导:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

余弦函数  $f(t) = \cos \omega_0 t$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

正弦函数  $f(t) = \sin \omega_0 t$  **Fourier变换**  $F(\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

非周期函数的频谱

频谱图通常指频率和振幅之间的关系图, 描述了振幅随频率变化的分布情况

在频谱分析中, Fourier变换 $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的频谱函数, 而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的幅频谱 (简称为幅频)

## Fourier变换的性质

$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$  线性性质

位移性质

$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$  时域上

$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$  频域上

微分性质

$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]$  象函数

$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega)$  原函数

$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)]$  积分性质

$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  其他性质

## 卷积与相关函数

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$  卷积的定义

交换律、结合律、加法分配律

$a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)]$  ( $a$ 为常数) 卷积的数乘

卷积的性质

$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} f_2(t)$  卷积的微分

$\int_{-\infty}^t [f_1(\xi) * f_2(\xi)] d\xi = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t f_1(\xi) d\xi * f_2(t)$  卷积的积分

$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t)$  卷积定理

## Fourier变换的应用

微分、积分方程的Fourier变换解法

1. 根据Fourier变换的线性性质、微分性质和积分性质, 对欲求解的方程两端取Fourier变换, 将其转化为象函数的代数方程
2. 由这个代数方程求出象函数
3. 最后取Fourier逆变换就得出原来方程的解

# Laplace变换

## Laplace变换的概念

**Laplace变换**  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$

$F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数  
 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的象原函数

**存在定理** 在 $t>0$ 的任一有限区间上连续或分段连续  
当 $t \rightarrow +\infty$ 时,  $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数, 即存在常数 $M>0$ 及 $c>0$ , 使得:  $|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad 0 \leq t < +\infty$

**常用函数Laplace变换**

- 单位阶跃函数  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- e的指数函数  $\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad (\text{Re}(s) > k)$
- 正弦函数  $\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- 余弦函数  $\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- 幂函数  $\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (\text{Re}(s) > 0)$  当 $m$ 为正整数时  $\Gamma(m+1) = m!$
- 单位脉冲函数  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

## Laplace变换的性质

**线性性质**  $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$  一阶导数  
 $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$  二阶导数  
 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{Re}(s) > c)$  **n阶导数**

**微分性质**

- 原函数微分性质
- 象函数微分性质  
一阶导数  $F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)], \quad \text{Re}(s) > c$   
**n阶导数**  $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)], \quad \text{Re}(s) > c$

**积分性质**

- 原函数积分性质  
一次积分  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$   
**n次积分**  $\mathcal{L}\left[\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s^n}F(s)$
- 象函数积分性质  
一次积分  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$  推论  
当 $s=0$ 时  $\int_0^\infty \left[\frac{f(t)}{t}\right] dt = \int_0^\infty F(s) ds$   
**n次积分**  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \dots \int_s^\infty F(s) ds$

**位移性质**  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad (\text{Re}(s-a) > c)$

**延迟性质**  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \quad (\text{Re}(s-a) > c)$

**其他性质**  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$

## 卷积

卷积的概念

**卷积的定义**  $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

**基本性质**

- $a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)]$  ( $a$ 为常数) 数乘
- $\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{d}{dt}f_2(t) + f_1(t)f_2(0) = \frac{d}{dt}f_1(t) * f_2(t) + f_1(0)f_2(t)$  微分
- $\int_0^t [f_1(\xi) * f_2(\xi)]d\xi = f_1(t) * \int_0^t f_2(\xi)d\xi = \int_0^t f_1(\xi)d\xi * f_2(t)$  积分

**卷积定理**

- $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$
- $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$

**计算卷积时常用的积化和差公式**

- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

## Laplace逆变换

$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0$  Laplace逆变换

$f(t)$ 与 $F(s)$ 构成了一个Laplace变换对  
右端的积分称为Laplace反演积分  
可以用留数方法来计算这种反演积分

**留数方法计算**

函数 $F(s)$ 的所有奇点(适当选择 $\beta$ 使这些奇点全在 $\text{Re}(s) < \beta$ 的范围内), 且当 $s \rightarrow \infty$ 时,  $F(s) \rightarrow 0$ , 则有:  $f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}], \quad t > 0$

- $\text{Res}_{s=s_k} \left[ \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}$  情形一: 一极极点计算方法
- $\text{Res}_{s=s_k} \left[ \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s-s_k)^m \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right]$  情形二: m级极点计算方法

**部分分式方法计算**

**卷积定理计算**

## Laplace变换的应用

**微分方程、积分方程** Laplace变换的微分性质与积分性质

- 微分方程
  - 常系数微分方程
  - 变系数微分方程
- 积分方程
  - Laplace积分性质计算
  - 对方程两边求导, 化为微分方程
  - 利用卷积的微分性质
- 微分方程、方程组