5 静电场方程与求解（3）

-媒质分界面上的衔接条件

邹建龙

主要内容

- 亥姆霍兹定理回顾
- 高斯定律的积分形式
- 静电场电场力做功与路径无关
- 静电场媒质分界面的衔接条件 衔接条件属边界条件
- 静电场媒质分界面衔接条件-分界面无面电荷，且电场强度斜入射

亥姆霍兹定理回顾

在空间有限区域内的某一矢量，由该矢量的散度、旋度和边界条件（即包围该区域的闭合面上的矢量场分布）唯一确定。

亥姆霍兹定理决定了电磁场的主线：

散度+旋度 +边界条件

前面我们已经确定了静电场的散度和旋度，

接下来就要确定边界条件，

而媒质分界面的衔接条件属于边界条件中的其中一种，

因此接下来我们要确定媒质分界面的衔接条件。

要确定衔接条件，还需要复习前面的知识！

高斯定律的积分形式

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\vec{D} = (1+\chi)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\sigma = \vec{P} \cdot \overrightarrow{e_r},\quad \rho = -\nabla \cdot \vec{P}$$

静电场电场力做功与路径无关

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

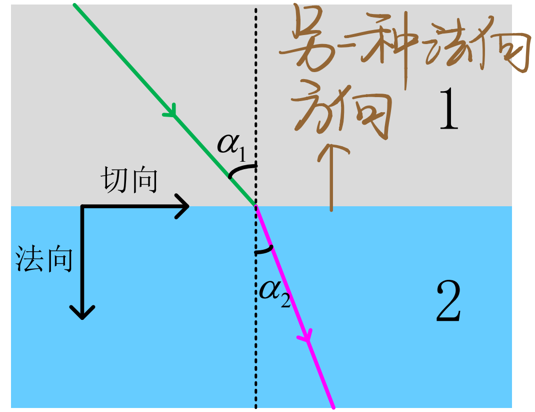
$$\Downarrow$$

$$\oint_l q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

保守力、保守场

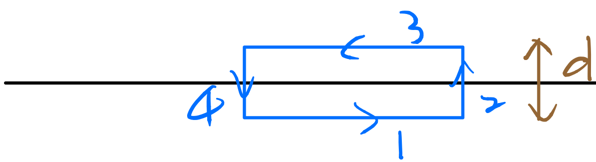
静电场媒质分界面的切向衔接条件

媒质分界面两侧电场强度的切向分量相等



$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \Longrightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

分界面做矩形状闭合路径



且 $d \to 0$

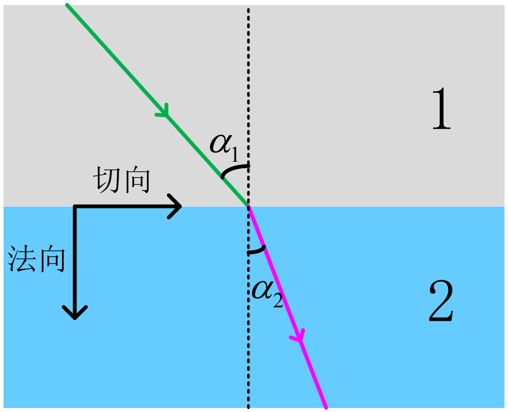
$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4$ l_2、$l_4 \to 0$，E 有界 ∴ $\int_2 = \int_4 = 0$

$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \int_1 + \int_3 = (E_{2t} + E_{2n})l - (E_{1t} + E_{1n})l = E_{1t} - E_{2t} = 0$

∴ $E_{1t} = E_{2t}$

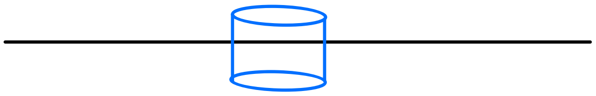
静电场媒质分界面的法向衔接条件

媒质分界面两侧电通量密度的法向分量之差等于分界面上的自由电荷面密度。



$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

做高度无穷小的圆柱高斯面



$S_上$、$S_下$、$h \to 0$

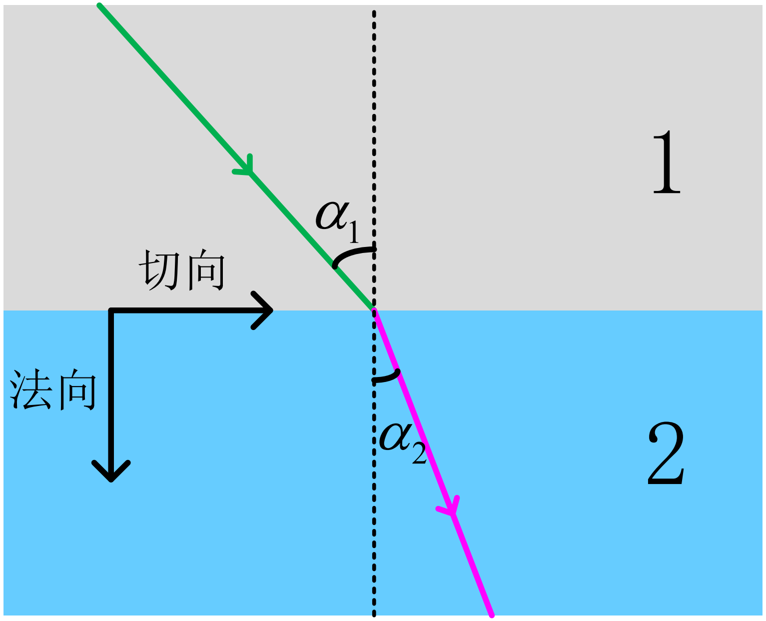
$h \to 0$，$\int_{S侧} = 0$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S侧} = \pi r^2 D_{2n} - \pi r^2 D_{1n} = q$$

$$\therefore D_{2n} - D_{1n} = \frac{q}{\pi r^2} = \sigma$$

静电场媒质分界面的衔接条件

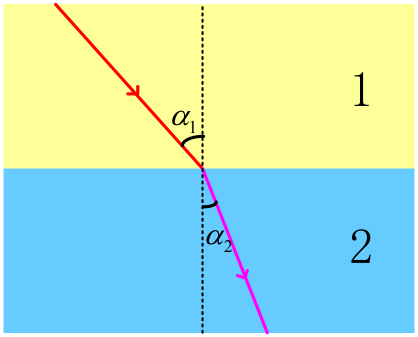
- $E_{1t} = E_{2t}$
- $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$



静电场媒质分界面的衔接条件-分界面无面电荷且斜入射

媒质分界面两侧电通量密度的法向分量之差等于面电荷密度。

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$



如果媒质分界面上无面电荷，且电场强度斜入射，则

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \qquad D_{1n} = D_{2n}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 \qquad E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

媒质分界面上如果无面电荷，则满足静电场的折射定律

$$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

衔接条件例1　在空气与聚苯乙烯$\varepsilon=2.6\varepsilon_0$分界面两边，聚苯乙烯中场强为2500V/m，电场方向与分界面法线的夹角是20°，分界面上无自由电荷。试求：（1）空气中电场强度与分界面法线夹角；（2）空气中的电场强度与电位移。

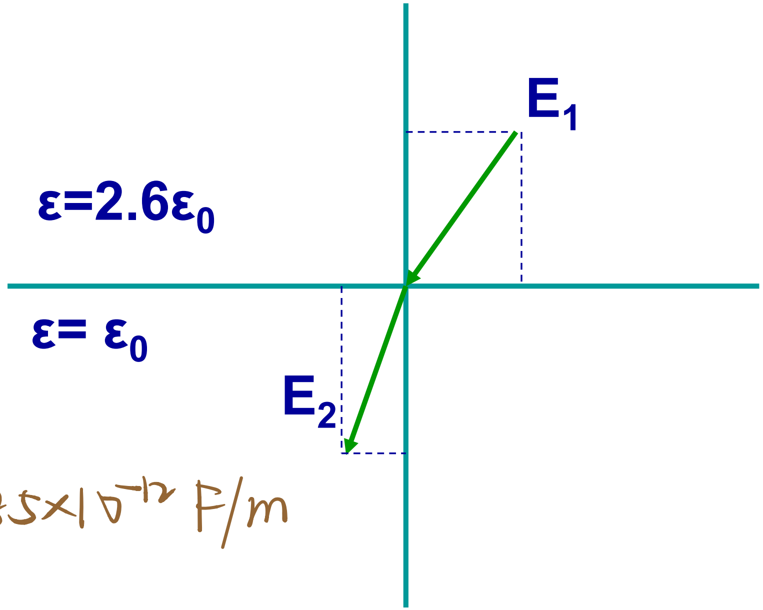
解：　根据 折射定理，有

$$\tan\alpha_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\alpha_1$$

解得　$\alpha_2=8°$

根据　$E_{1t}=E_{2t}$，有

$$E_2=\frac{E_1\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=6150\ \ \mathrm{V/m}$$



$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ F/m

$$D_2=\varepsilon_0E_2=0.0543\times10^{-6}\ \ \mathrm{C/m^2}$$

衔接条件例2

试写出导体与电介质分界面上的衔接条件。

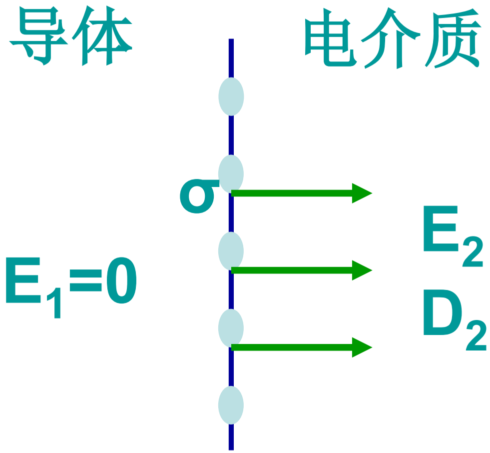
解： 根据 $E_{1t} = E_{2t}$ ，有

$$E_{2t} = 0 \Rightarrow D_{2t} = 0$$

$D_{2n} - D_{1n} = D_{2n} = \sigma$

$$D_{2n} = \sigma \Rightarrow E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

看到D想到电荷面密度

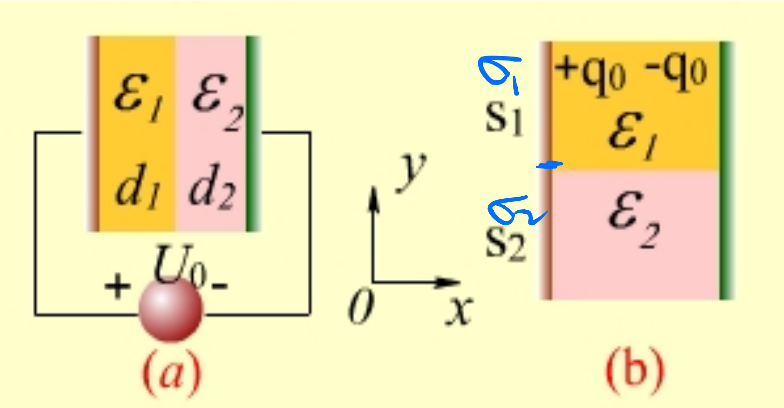


导体与电介质分界面

在电介质与导体表面相邻处，电场强度与电位移都垂直于导体表面，且电位移的量值就等于分别界面的电荷面密度。

衔接条件例3 试求两个平板电容器的电场强度。

解：忽略边缘效应



平行板电容器

图(a)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \text{（根据}D_{1n}=D_{2n}\text{）} \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \qquad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

图(b)

$\sigma_1 = D_1$

$\sigma_2 = D_2$

（导体$D=\sigma$）

$$\begin{cases} \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q_0 \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \text{（根据}E_{1t}=E_{2t}\text{）} \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{q_0}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}$$

作业四

1. 写出静电场满足的方程（关于**D**和**E**的积分形式）
2. 写出静电场媒质分界面上的衔接条件。
3. 写出媒质分界面无面电荷时的静电场折射定律
4. 教材1-3-3