《概率统计与随机过程》复习

by. ZJY

概率论

不等式合集

柯西-施瓦茨不等式

由协方差性质推导

$$E\left((XY)^2\right) \le E(X^2)E(Y^2)$$

马尔可夫不等式

r 阶矩存在，则 $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|X| \ge \varepsilon\} \le \frac{(|X|^r)}{\varepsilon^r}$$

切比雪夫不等式

$$\begin{aligned} P\{|X-E(X)| \ge \varepsilon\} &\le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} &\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

事件

随机现象的观察（随机试验）E 的样本空间为 $\Omega = \{\omega\}$，随机事件 $A \subset \Omega$。必然事件 Ω，不可能事件 $\varnothing$

事件 A、B 的和 $A \cup B = A + B$ 表示其中至少一件事情发生

事件 A、B 的积 $A \cap B = AB$ 表示均发生

互斥 $AB = \varnothing$

A 的对立 $\overline{A}$

事件 A、B 的差 $A - B = A\overline{B}$ 表示 A 发生而 B 不发生

交换律、结合律、分配律、对偶律、吸收律、德摩根律

事件的概率

- 古典概型 $P(A)=\frac{A\text{所包含的试验结果的总数}}{\text{试验结果的总数}}$
- 几何概型 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$
- 频数 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$，统计概率 $P(A)=p\sim\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)$

概率的性质

基本性质

- $P(A)\geq 0$
- $P(\Omega)=1$
- 设 A_i 两两互斥，$P\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i P(A_i)$

不可能事件性质 $P(\varnothing)=0$

可减性 $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

取反性 $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$

容斥原理 $P(\bigcup_i A_i)=\sum_{S\subset\{A_i\}}(-1)^{|S|-1}P(\bigcap_{s\in S}s)$

概率的连续性

条件概率

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

若 $B_1,B_2,\cdots$ 构成互斥完备事件组且 $P(B_i)>0$

全概率公式

$$P(A)=\sum_j P(B_j)P(A|B_j)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

独立事件

A,B 独立即 $P(AB)=P(A)P(B)$

$A,B\text{独立}\iff A,\overline{B}\text{独立}\iff\overline{A},B\text{独立}\iff\overline{A},\overline{B}\text{独立}$

事件集中事件相互独立，即对所有子集，满足积的概率等于概率的积

随机变量

随机变量 X 为随机试验 E 中随机事件 ω 的单值实函数

分布函数 $F(x)=P(\{X\le x\})$，（以后记作 $P\{X\le x\}$）

连续型随机变量**概率密度** $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

多维随机变量

二维连续型随机变量 (X,Y)

联合分布函数 $F(x,y)$，联合概率密度函数 $f(x,y)$

边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

随机变量独立
$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\iff f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\text{几乎处处成立}\iff X,Y\text{独立}$

相互独立随机变量的函数相互独立

随机变量的函数

$y=g(x)$ 严格单调可导时，$Y=g(X)$ 的概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| & ,y\in\mathscr{R}(g) \\ 0 & ,\text{else}\end{cases}$$

随机变量和概率密度 $Z=X+Y$（卷积公式）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\mathrm{d}x \xlongequal{X \text{ and } Y \text{ are independent}} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

随机变量商概率密度 $Z=X/Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} |y|f_{XY}(yz,y)\mathrm{d}y \xlongequal{X \text{ and } Y \text{ are independent}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

随机变量取最大最小值概率分布 $M=\max_i\{X_i\}$，$N=\min_i\{X_i\}$

$$F_M(z)=\prod_i F_{X_i}(z)$$
$$F_N(z)=1-\prod_i(1-F_{X_i}(z))$$

随机变量数字特征

期望

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\
E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x \\
E(g(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

- 期望是线性的
- 若随机变量 X 和 Y 独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$

方差

$$
D(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-E^2(X)
$$

- $D(C)=0$
- $D(CX)=C^2D(X)$
- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

协方差

$$
\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)=E(XY)-E(X)E(Y)
$$

- $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

相关系数

$$
\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(Y)}}
$$

矩

n 阶原点矩 $\alpha_n=E(X^n)$

n 阶中心矩 $\mu_n=E\left((X-E(X))^n\right)$

X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩、混合中心矩

各分布随机变量的形式与特征及关系

离散型随机变量

X 的分布	分布律 $P\{x=k\}$	期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
两点分布 $B(n,p)$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

X 的分布	分布律 $P\{x=k\}$	期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

连续型随机变量

X 的分布	概率密度 $f(x)$	分布函数 $F(x)$	期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi(x)$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $\exp(\lambda)$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
卡方分布 $\chi^2(n)$	(Holy crap)	(Nope)	n	$2n$
t 分布 $t(n)$	(Don't do it)	(Gone)	0	(?)
F 分布 $F(n_1,n_2)$	(Well...)	(Sank)	(U guess)	(lol)
伽马分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	(LMAO)	(Blown)	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$

正态分布

X_i 独立分布于 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$， $Z=\sum_i a_iX_i \sim N(\sum_i a_i\mu_i, \sum_i a_i^2\sigma_i^2)$

卡方分布

$\chi^2(2)\sim\exp(\frac{1}{2})$

$Z_1\sim\chi^2(n_1)$， $Z_2\sim\chi^2(n_2)$， $Z_1+Z_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$， $\sum_{i=1}^n X_i^2\sim\chi^2(n)$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $N(\mu,\sigma^2)$， $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

t 分布

$\lim_{n\to\infty} t(n) \to N(0,1)$

$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

F 分布

$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

二维连续分布

二维正态分布

$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

其中 ρ 为 X，Y 的相关系数，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

二维均匀分布

Soo EZ

大数定律

伯努利大数定律

对于伯努利试验

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \frac{\eta_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

切比雪夫大数定律在伯努利试验下的特殊情况

切比雪夫大数定律

两两不相关序列且方差一致有界，$\forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

独立同分布大数定律

切比雪夫大数定律在独立同分布下的特殊情况

辛钦大数定律

$\{X_n\}$ 独立同分布且期望 μ 存在有界（不要求方差存在），则 $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu$

中心极限定理

$\{X_n\}$ 独立同分布，期望 μ、方差 σ^2 存在

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$$

数理统计

统计量

设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的样本

样本均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

若总体具有二阶矩，$E(\overline{X}) = \mu$，$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

是 μ 的无偏估计量

$\overline{X}^2$ 是 μ^2 的渐进无偏估计量

样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]$$

若总体具有二阶矩，$E(S^2) = \sigma^2$

是 σ^2 的无偏估计量

样本标准差

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

样本 k 阶原点矩

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

是 α_k 的无偏估计量

样本 k 阶中心矩

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

B_2 是 σ^2 的渐进无偏估计量

次序统计量

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$$

样本极差

$$X_{(n)} - X_{(1)}$$

正态总体抽样

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本

- $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- $\overline{X}$ 与 X^2 独立
- $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本

$$F = \frac{S_{1n_1}^2/\sigma_1^2}{S_{2n_2}^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

且

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中

$$S_W = \frac{(n_1 - 1)S_{1n_1}^2 + (n_2 - 1)S_{2n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

点估计

矩估计

有 k 个未知参数时，求 k 阶原点矩 α_k 和样本 k 阶原点矩 A_k；矩法方程 $A_k = \alpha_k$

极大似然估计

观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l)$

取对数求导求使似然函数最大的参数

估计量性质

无偏性

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

渐进无偏性 $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

有效性

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

则 θ_1 较 $\hat{\theta}_2$ 有效

相合性

相和估计量

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

或 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 0$

均方相和估计量

$$\hat{\theta} \xrightarrow{L^2} \theta$$

或 $\lim_{n\to\infty} E^2(\hat{\theta} - \theta) = 0$

相合估计量的函数是参数的函数的相合估计

置信区间

分位数

上侧 α 分位数 x_α

$$P\{X > x_\alpha\} = 1 - F(x_\alpha) = \alpha$$

置信区间

表 6.1　正态分布参数的置信区间

待估参数	条件	所用函数及分布	置信区间
均值 μ	方差 σ^2 已知	$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$
均值 μ	方差 σ^2 未知	$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
方差 σ^2	均值 μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	方差 σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left((\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ (\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	方差 σ_1^2,σ_2^2 未知，且 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，大样本	$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}S_{1n_1}^2+\frac{1}{n_2}S_{2n_2}^2}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$	$\left((\overline{X}-\overline{Y})-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n_1}S_{1n_1}^2+\frac{1}{n_2}S_{2n_2}^2},\ (\overline{X}-\overline{Y})+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n_1}S_{1n_1}^2+\frac{1}{n_2}S_{2n_2}^2}\right)$
方差比 σ_1^2/σ_2^2	均值 μ_1,μ_2 未知	$F=\frac{\sigma_2^2S_{1n_1}^2}{\sigma_1^2S_{2n_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

置信上下界

（明明是同一张表……）

表 6.2　正态分布参数的置信上、下界

待估参数	条件	置信上界	置信下界
均值 μ	方差 σ^2 已知	$\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$	$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$
均值 μ	方差 σ^2 未知	$\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$	$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
方差 σ^2	均值 μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	方差 σ_2^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\overline{X}-\overline{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$	$\overline{X}-\overline{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
均值差 $\mu_1-\mu_2$	方差 σ_1^2,σ_2^2 未知，且 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，大样本	$\overline{X}-\overline{Y}+u_\alpha\sqrt{\frac{1}{n_1}S_{1n_1}^2+\frac{1}{n_2}S_{2n_2}^2}$	$\overline{X}-\overline{Y}-u_\alpha\sqrt{\frac{1}{n_1}S_{1n_1}^2+\frac{1}{n_2}S_{2n_2}^2}$
方差比 σ_1^2/σ_2^2	均值 μ_1,μ_2 未知	$\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$	$\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

假设检验

原假设 H_0，备择假设 H_1

拒绝域：拒绝 H_0 的范围；接受域：接受 H_0 的范围

I 类错误概率 $\alpha(\mu)=P\{拒绝H_0|H_0为真\}$

II 类错误概率 $\beta(\mu)=P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\}$

显著性检验：犯第一类错误概率小于显著性水平 α

表 7.1　正态分布参数的检验法

H_0	H_1	条件	检验统计量及分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	方差 σ_0^2 已知	$U=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0}\sim N(0,1)$	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma_0}\right\rvert\geqslant u_{\alpha/2}$
$\mu\leqslant\mu_0$（或 $\mu=\mu_0$）	$\mu>\mu_0$			$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma_0}\geqslant u_\alpha$
$\mu\geqslant\mu_0$（或 $\mu=\mu_0$）	$\mu<\mu_0$			$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma_0}\leqslant -u_\alpha$
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	方差 σ^2 未知	$T=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\sim t(n-1)$	$\left\lvert\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}\right\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu\leqslant\mu_0$（或 $\mu=\mu_0$）	$\mu>\mu_0$			$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}\geqslant t_\alpha(n-1)$
$\mu\geqslant\mu_0$（或 $\mu=\mu_0$）	$\mu<\mu_0$			$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}\leqslant -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	均值 μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$（或 $\sigma^2=\sigma_0^2$）	$\sigma^2>\sigma_0^2$			$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$
$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$（或 $\sigma^2=\sigma_0^2$）	$\sigma^2<\sigma_0^2$			$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_1-\mu_2=c$	$\mu_1-\mu_2\neq c$	方差 σ_1^2、σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-c}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中 $S_w^2=[(n_1-1)S_{1n_1}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^2]/(n_1+n_2-2)$	$\left\lvert\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-c}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2\leqslant c$（或 $\mu_1-\mu_2=c$）	$\mu_1-\mu_2>c$			$\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-c}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2\geqslant c$（或 $\mu_1-\mu_2=c$）	$\mu_1-\mu_2<c$			$\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-c}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=c$	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq c$	均值 μ_1、μ_2 均未知	$F=\dfrac{S_{1n_1}^2}{cS_{2n_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\geqslant F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2/\sigma_2^2\leqslant c$（或 $\sigma_1^2/\sigma_2^2=c$）	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>c$			$\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2/\sigma_2^2\geqslant c$（或 $\sigma_1^2/\sigma_2^2=c$）	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<c$			$\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

方差未知且不等的均值检验

一般先检验 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，题就有得做了

~~否则自行思考，然后发现没法做，继续睡觉~~

或者在大样本条件 $n_1\gg 1$，$n_2\gg 1$ 下

统计量

$$U = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-c}{\sqrt{\frac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\frac{S_{2n_2}^2}{n_2}}} \longrightarrow U(0,1)$$

下均值已知的方差检验

样本 X_i，Y_i 来自总体已知均值分别为 μ_1，μ_2 的分布

H_0：$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=c$，有统计量

$$F=\frac{\frac{1}{n_1}\sum(X_i-\mu_1)^2}{c\frac{1}{n_2}\sum(Y_i-\mu_2)^2} \sim F(n_1,n_2)$$

随机过程

随机过程

称随机变量族

$$\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$$

为**随机过程**

固定 ω 时随机过程 $X(\ \cdot\ ,\omega)$ 称为**样本函数**

$T\in\mathbb{R}$ 称为**指标集**（参数集）

$\mathscr{R}(X)$ 称为**状态集**

有限维分布族

固定一个随机过程的一组 t 得到一个随机变量族，分布函数

$$F_X(x_1,x_2,\cdots;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\left(\bigcap_i\{X(t_i)\le x_i\}\right)$$

称为**有限维分布族**

随机过程数字特征

均值函数

$$m_X(t)=E(X(t))$$

方差函数

$$D_X(t) = D(X(t))$$

自协方差函数

$$C_X(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2))$$

自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$

互协方差函数

$$C_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1), Y(t_2))$$

互相关函数

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

随机过程分类

二阶矩过程

均值和方差对于任意参数均存在

正态过程（高斯过程）

任意有限维分布均为多维正态分布

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{t}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{C}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= (m_X(t_1), m_X(t_2), \cdots, m_X(t_n))^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \cdots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \cdots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_n, t_1) & C_X(t_n, t_2) & \cdots & C_X(t_n, t_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

正交增量过程

若 $T = \{t | t > 0\}$，$X(0) = 0$，$s < t$

有 $R_X(s, t) = E(X^2(s))$

相关函数只与开始时刻有关

独立增量过程

对与任意时间列，增量两两不相关

平稳独立增量过程

增量的概率分布与此增量开始时刻无关

马尔可夫过程

某一时刻将来的分布与之前时刻的分布无关

计数过程

计数过程 $N(t)$ 表示时间 $[0,t)$ 内随机事件 A 发生的次数

- $N(t) \in \mathbb{N}$
- $\forall\, 0 < s < t\,,\ N(s) \le N(t)$

泊松过程

满足如下条件的计数过程 $N(t)$

1. $N(0) = 0$
2. 独立增量
3. $P\{N(t+s) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\}$（增量平稳性）
4. *出现的概率与时间成~~伪~~线性*：$P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t - \mathrm{o}(\Delta t)$
5. *同一时刻不会冒出两个来*：$P\{N(t+\Delta t) - N(t) \ge 2\} = \mathrm{o}(\Delta t)$

称为强度为 λ 的泊松过程

泊松分布性质

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

到达时间性质

S_n 表示第 n 件事发生的时刻

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} & ,\ t > 0 \\ 0 & ,\ t \le 0 \end{cases}$$

特别的，$S_1 \sim \exp(\lambda)$，且时间间隔序列 T_i 独立同分布于 $\exp(\lambda)$，这也是计数过程是齐次泊松过程的充要条件

布朗运动/维纳过程

定义 $W(t), t > 0$ 满足

1. $W(0) = 0$
2. 是独立增量过程
3. $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 |t-s|)$

性质:

- 是平稳独立增量过程
- 是正态过程
- $m_W(t)=0$，$C_W(s,t)=R_W(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$

均方意义下连续

$$\lim_{\Delta t\to 0} E((X(t_0+t)-X(t_0))^2)=0$$

记作

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, X(t+\Delta t)=X(t)$$

平稳过程

严平稳过程

任何有限维分布函数不随时间推移（在参数集上平移）改变

宽平稳过程

均值函数是常数；自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 只是时间差 $\tau=t_2-t_1$ 的函数 $R_X(\tau)$

即一阶矩与二阶矩不随时间推移改变

白噪声序列

自相关函数仅在 $\tau=0$ 为 σ^2，否则为零

宽平稳过程的性质

- $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$
- $|R_X(\tau)|\le R_X(0)$，$|C_X(\tau)|\le C_X(0)$（由柯西不等式推导）
- $R_X(\tau)$ 非负定

平稳相关

X，Y 是两个平稳过程，若 $R_{XY}(t,t+\tau)=E(X(t)Y(t+\tau))=R_{XY}(\tau)$，则称其平稳相关

互协方差函数、互相关函数性质与自协方差函数、自相关函数类似

各态历经性

必须是平稳过程哦

时间均值

$$\overline{X(t)}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$$

它是一个随机变量，那么有期望和方差如下

$$
E(\overline{X(t)}) = m_X
$$
$$
D(\overline{X(t)}) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)\mathrm{d}\tau
$$

时间相关函数

$$
\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t
$$

它是一个随机过程，且参数仅为 τ，可写作 $\overline{Y_\tau(t)}$，*说明时间相关函数是状态集表示时间均值的随机过程！*

而且当 τ 固定时，$Y_\tau(t)$ 是一个平稳过程，有自相关函数与均值~~函数~~如下（注意平稳过程的均值函数是常数）

$$
R_{Y_\tau}(\tau_1) = R_\tau(\tau_1) = E(X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau_1+\tau))
$$
$$
m_{Y_\tau} = R_X(\tau)
$$

那么随机过程 $Y(\tau) = \overline{Y_\tau(t)}$ 的均值函数和方差函数如下

$$
m_Y(\tau) = E(Y(\tau)) = R_X(\tau)
$$
$$
D_Y(\tau) = D(Y(\tau)) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(R_\tau(\tau_1)-R_X^2(\tau))\mathrm{d}\tau_1
$$

均值各态历经性

定义

$$
P\left\{\overline{X(t)} = E(X(t)) = m_X\right\} = 1
$$

充要条件 $D\left(\overline{X(t)}\right) = 0$

充分条件 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = m_X^2$，即无穷远不相关

自相关函数各态历经性

定义

$$
P\left\{\overline{X(t)X(t+\tau)} = E(X(t)X(t+\tau)) = R_X(\tau)\right\} = 1
$$

充要条件 $D_Y(\tau) \equiv 0$（但注意 $Y(\tau)$ 不是平稳过程，$m_Y(\tau)$ 也不是常数）