《数学物理方程》复习整理

by. ZJY

- 圆柱体或圆域上定解问题
- 格林函数法
  - 格林公式
    - 高斯公式
    - 格林公式
    - 格林第一公式
      - 三维
      - 二维
    - 格林第二公式
      - 三维
      - 二维
    - 格林第三公式
      - 三维
      - 二维
  - 格林函数法
    - 格林函数
    - 应用
      - 半空间上狄利克雷问题
      - 平面圆域上狄利克雷问题
- 特征线法
  - 一阶线性偏微分方程特征线法
  - 一阶拟线性偏微分方程特征线法
  - 一维波动方程特征线法

数学基础

傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right]$$

其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\qquad&,n\in\mathbb{Z}_+\\b_n&=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t\qquad&,n\in\mathbb{Z}_+\end{aligned}$$

二次型正交变化

设有二次型矩阵 A，$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$

存在正交矩阵 P 使 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，$f(x)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}AP\boldsymbol{x}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

步骤

1. 求出 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，（即求解 $|A-\lambda I|=0$）
2. 得出对应的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，（即求解 $(A-\lambda_i I)x=0$）
3. 特征向量标准正交化得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$
4. 得 $P=[\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n]$

应用于梯度算子 $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2},\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$ 以化简二阶线性微分方程

数学模型

一维弦振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\ ,\ 0<x<l\ ,\ t>0$$

其中 $a^2=T_0/\rho$，$f=f_0/\rho$

初始条件

$$u|_{t=0}=\phi(x)\ ,\ u_t|_{t=0}=\psi(x)$$

边界条件

1. 第一类边界条件：已知端点的位移随时间的变化
2. 第二类边界条件：已知端点的受力随时间的变化

   设受外力 $\bar{g}_1(t)$、$\bar{g}_2(t)$

   左端 $u_x(0,t)=-\frac{\bar{g}_1(t)}{T_0}$

   右端 $u_x(l,t)=\frac{\bar{g}_2(t)}{T_0}$
3. 第三类边界条件：端点连接弹簧振子

   以左端为例，弹簧长度 l_1，下端位置 $Q_1(t)$，$\sigma_1=k_1/T_0$

   得条件 $u_x(0,t)-\sigma_1 u(0,t)=-\sigma_1(Q_1(t)+l_1)$

   右端 $u_x(l,t)+\sigma_2 u(l,t)=\sigma_1(Q_1(t)+l_2)$

热传导方程

$$u_t=a^2\Delta u+f$$

其中 $a^2=k/(\rho c)$，（c 为比热容），$f=f_0/c$，表示热源强度

初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$$

边界条件

1. 第一类边界条件：已知边界的温度分布
2. 第二类边界条件：已知通过边界的热流量
$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\partial\Omega}=g(x,y,z,t)$$
3. 第三类边界条件：导热体置于介质之中
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u=g(x,y,z,t)\ ,\ (x,y,z,t)\in\partial\Omega$$

泊松方程

泊松方程即稳态热传导方程

$$-\Delta u=\frac{1}{a^2}f$$

其中 f 描述热源

当 $f\equiv 0$ 时称为拉普拉斯方程

狄利克雷条件

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi$$

诺伊曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=\varphi$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\bigg|_{\partial\Omega}=\varphi$$

叠加原理

线性算子

以下分别为二阶偏微分算子、波算子、拉普拉斯算子和热算子

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$H = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

二阶线性偏微分方程

$$Lu = f$$

以下为一个带有初始条件和边界条件的弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = f & & , 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ u\big|_{x=0} = g_1(t) & , u\big|_{x=l} = g_2(t) & , t \geq 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & , u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & , 0 < x < l \end{cases}$$

初始条件叠加原理

叠加原理 1

若 $f = \sum_i \alpha_i f_i$，α_i 为任意常数，u_i 是 $Lu = f_i$ 的解，则 $\sum_i \alpha_i u_i$ 是原问题的解

叠加原理 2、3

当将方程叠加时将初始条件和非齐次项一起加在一起

边界条件齐次性

方程边界条件 $u\big|_{x=0}$, $u\big|_{x=l}$ 为零时，称为齐次边界条件

齐次化

采用变换 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，其中 $w(x,t)$ 满足 $w(0,t) = g_1(t)$, $w(l,t) = g_2(t)$

可以取 $w(x,t) = g_1(t) + \frac{g_2(t) - g_1(t)}{l}x$

代入可得边界条件齐次化方程

当存在如下边界条件时，w 取以下构造

- $u_x(0,t) = g_1$, $u(l,t) = g_2$: $w = (x-l)g_1 + g_2$
- $u(0,t) = g_1$, $u_x(l,t) = g_2$: $w = xg_2 + g_1$
- $u_x(0,t) = g_1$, $u_x(l,t) = g_2$: $w = xg_1 + \frac{g_2 - g_1}{2l}x^2$

分离变量法

特征函数法

即求解非齐次方程的分离变量法，将非齐次项按特征函数系展开

设有齐次边界条件弦振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f & & ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 & ,\ u|_{x=l} = 0 & ,\ t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & ,\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & ,\ 0 < x < l \end{cases}$$

求解按如下四步进行

假设分离变量解

设 $u = X(x)T(t)$，代入齐次方程得

$$XT'' = a^2 X'' T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} \equiv -\lambda$$

有特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求特征值问题的解

特征方程的通解为

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} l + c_2 \sin \sqrt{\lambda} l$$

代入边界条件有 $\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi$

则特征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，特征函数 $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$，$n \geq 0$

以特征函数系展开比较

将 φ，ψ，f 也按特征函数系展开叠加

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}(x)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}(x)$$

代入原方程并比较各项得

$$
\begin{cases}
T''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n \\
T_n(0)=\varphi(n) \\
T_n'(0)=\psi(n)
\end{cases}
$$

求解可得各项

平面上泊松方程边值问题

极坐标上拉普拉斯方程

$$
u_{xx}+u_{yy}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0
$$

设 $u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$，$\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$，有

$$
\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\frac{R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)}{\frac{1}{\rho^2}R(\rho)}=-\lambda
$$

得特征值问题

$$
\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0
$$

且有

$$
\rho^2R_n''(\rho)+\rho R_n'(\rho)-\lambda_n R_n(\rho)=0
$$

此方程为欧拉方程，作代换 $\rho=\mathrm{e}^s$，有

$$
R_{ss}''-\lambda_n R_n=0
$$

贝塞尔函数

常系数二阶齐次线性微分方程

$$
y''+ay'+by=0
$$

有特征方程

$$
\lambda^2+a\lambda+b=0
$$

基解组如下

- λ 两个不同实根 ρ_1，ρ_2

  $$
  \{\mathrm{e}^{\rho_1 x},\mathrm{e}^{\rho_2 x}\}
  $$

  特别的，当 $\rho_1=\rho=-\rho_2$

  $$
  \left\{\cosh\rho x=\frac{\mathrm{e}^{\rho x}+\mathrm{e}^{-\rho x}}{2},\sinh\rho x=\frac{\mathrm{e}^{\rho x}-\mathrm{e}^{-\rho x}}{2}\right\}
  $$

- λ 两个共轭的复根 $\rho_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$

  $$\left\{\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x},\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x}\right\}$$

  利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{i}\sin\beta x$ 并取实部后

  $$\{\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\}$$

- λ 一个重根 $\rho_1=\rho_2=\rho$

  $$\{\mathrm{e}^{\rho x},x\mathrm{e}^{\rho x}\}$$

幂级数解法

变系数二阶线性常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

若 $p(x)$、$q(x)$ 在 x_0 的邻域内解析，那么有如下形式的解

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

否则若 $(x-x_0)p(x)$、$(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 的邻域内解析，那么有如下形式的解

$$y(x)=(x-x_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

其中 $a_0\neq0$，$\rho\in\mathbb{R}$

Γ 函数

$$\Gamma(\alpha)=\begin{cases}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x & ,\ \alpha>0\\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} & ,\ \alpha<0\ \wedge\ \alpha\notin\mathbb{Z}\\ \infty & ,\ \alpha\leq0\ \wedge\ \alpha\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

性质

- $\Gamma(1)=1$，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$
- $\Gamma(n+1)=n!$，$n\in\mathbb{Z}_+$

贝塞尔方程

$r\geq0$ 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-r^2)y=0$$

化为二阶变系数线性常微分方程标准形式有 $p(x)=x^{-1}$，$q(x)=1-\frac{r^2}{x^2}$，则 $xp(x)$，$x^2q(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上解析

有解的形式

$$y(x)=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

代入比较系数（此处略去推导）

有 $\rho_1=r$，$\rho_2=-r$

1. 讨论情形 $\rho=\rho_1=r\geq 0$

$$J_r(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+r}$$

2. 讨论情形 $\rho=\rho_2=-r<0$
   - r 不为正整数

$$J_{-r}(x)$$

   - r 为正整数

$$N_n(x)=\lim_{r\to n^+}\frac{J_r(x)\cos(r\pi)-J_{-r}(x)}{\sin(r\pi)}$$

贝塞尔函数

有任意 $r\geq 0$，$\{J_r(x),N_r(x)\}$ 是贝塞尔方程的基解组

特殊地，$r>0$ 且不为整数时，$\{J_r(x),J_{-r}(x)\}$ 是贝塞尔方程的基解组

整数阶贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的性质

- 奇偶性 $J_n(x)=(-1)^nJ_n(-x)$
- 第 m 个正零点 $\mu_m^{(n)}$

递推公式

$$\begin{gathered}(x^nJ_n(x))'=x^nJ_{n-1}(x)\\(x^{-n}J_n(x))'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\\J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\\J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)\end{gathered}$$

贝塞尔方程特征值问题

$$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=-\lambda u(\rho,\theta)$$

将 u 变量分离

狄利克雷条件 $u(\rho_0,\theta)=0$ 下，n 阶贝塞尔方程特征值问题

$$\begin{cases}\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda^2\rho^2-n^2)R(\rho)=0 & ,\ 0<\rho<\rho_0\\R(\rho_0)=0 & ,\ |R(0)|<+\infty\end{cases}$$

特征值 $\lambda_m=\left(\frac{\mu_m(n)}{\rho_0}\right)^2$，特征函数 $R_m(\rho)=J_n\left(\frac{\mu_m(n)}{\rho_0}\rho\right)$，$m\geq 1$

贝塞尔函数的正交性与贝塞尔级数

$f(\rho)$ 在 $[0,\rho_0]$ 连续且有分段连续的一阶导数

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n\left(\frac{\mu_m(n)}{\rho_0}\rho\right)$$

其中

$$A_m=\frac{2}{[\rho_0J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}\int_0^{\rho_0}\rho f(\rho)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

圆柱体或圆域上定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u & ,\ (\rho,\theta)\in\Omega \quad ,\ t>0\\ u|_{\rho=\rho_0}=0 & ,\ t\geq 0\\ u|_{t=0}=\varphi(\rho) & ,\ 0\leq\rho\leq 1\end{cases}$$

令 $u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''+\frac{1}{\rho}R'}{R}=-\lambda$$

是零阶贝塞尔方程特征值问题

特征值 $\lambda_m=(\mu_m^{(0)})^2$，特征函数 $R_m(\rho)=J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$，$m\geq 1$

特征值代入得

$$T_m(t)=A_m\mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2t}$$

则

$$u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2t}J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$$

展开 φ 比较得

$$A_m=\frac{2}{[\rho_0J_0'(\mu_m^{(0)})]^2}\int_0^1\rho\varphi(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

格林函数法

格林公式

高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s$$

其中汉密尔顿算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

取 $\boldsymbol{F} = u\nabla v$ 得三维形式格林公式

格林公式

《高等数学》所描述的"格林公式"

设平面场 $F = (P, Q)$

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}S = \int\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

若记 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$，平面区域 Ω，$\boldsymbol{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 表示正向边界切向量，那么

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla \times \boldsymbol{F} \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

有曲面外法向量 $\boldsymbol{n} = (\sin\alpha, -cos\alpha)$ 取 $F = u\nabla v$，*仔细考虑平面区域积分*可得二维形式格林公式

格林第一公式

三维

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s - \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V$$

二维

$$\iint\limits_{\Omega} (uv_x)_x \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s - \iint\limits_{\Omega} (uv_y)_y \mathrm{d}\sigma$$

格林第二公式

三维

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta u - v\Delta u)\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$$

二维

$$\iint\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$$

格林第三公式

格林第三公式的意义是（除去奇点后）u 的值仅与 Δu 和边界上的条件决定

三维

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iint\limits_{\partial\Omega}\left(\mathit{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial \mathit{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s - \iiint\limits_{\Omega}\mathit{\Gamma}\Delta u\mathrm{d}V$$

其中 $\mathit{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$，$r_{P_0P} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

二维

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(\mathit{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial \mathit{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s - \iint\limits_{\Omega}\mathit{\Gamma}\Delta u\mathrm{d}\sigma$$

其中 $P_0(\xi,\eta)\in\Omega$，$\mathit{\Gamma}(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$

格林函数法

格林函数

设 Ω 为二维或三维区域，$\partial\Omega$ 充分光滑，$\boldsymbol{P}_0\in\Omega$，$\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P}_0)$ 为拉普拉斯方程基本解

考虑定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\boldsymbol{p}) & ,\ \boldsymbol{p}\in\Omega \\ u(\boldsymbol{p}) = \varphi(\boldsymbol{p}) & ,\ \boldsymbol{p}\in\partial\Omega \end{cases}$$

若 $h(\boldsymbol{p})$ 是如下定解问题的解

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & ,\ \boldsymbol{p}\in\Omega \\ h(\boldsymbol{p}) = -\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P}_0) & ,\ \boldsymbol{p}\in\partial\Omega \end{cases}$$

使格林函数 $G(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0) = \mathit{\Gamma} + h$

则 G 为如下定解问题的解

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P}_0) & ,\ \boldsymbol{p}\in\Omega \\ G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P}_0) = 0 & ,\ \boldsymbol{p}\in\partial\Omega \end{cases}$$

那么原定解问题的解（三维）可以表示为

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint\limits_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s+\iiint\limits_{\Omega}Gf\mathrm{dV}$$

（二维）

$$u(\xi,\eta)=-\int\limits_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s+\iint\limits_{\Omega}Gf\mathrm{d}\sigma$$

应用

格林函数中 h 的形式仅与给定边界有关，则对于特定问题，先求出格林函数，在通过上述格林函数法的结果给出原定解问题的解

半空间上狄利克雷问题

$\Omega=\{(x,y,z)\mid z>0\}$，$\partial\Omega=\{(x,y,z)\mid z=0\}$

设 $\boldsymbol{P}_0\in\Omega$，$\boldsymbol{P}_1$ 为对称点，有 $G=\Gamma(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0)-\Gamma(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_1)$

计算

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}$$

代入格林函数法公式求解

平面圆域上狄利克雷问题

$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}$

设 $\boldsymbol{P}_0\in\Omega$，$\boldsymbol{P}_1$ 为关于圆的反射点，极坐标 $\boldsymbol{P}(\rho,\theta)$

格林函数

$$G(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0)=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho_0^2R^2+\rho^2R^2-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta_0-\theta)}{R^4+\rho_0\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta_0-\theta)}$$

特征线法

一阶线性偏微分方程特征线法

有关于 $u(x,t)$ 的一阶线性偏微分方程

$$au_t+bu_x+cu=f$$

其中 a、b、c、f 均为 x 和 t 的函数

特征方程:

$$a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-b=0$$

其积分曲线为上述方程的特征曲线（族）（带有任意常数 τ），沿特征曲线有 $au_t+bu_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，常微分方程求解后将 τ 反解代回即可

一阶拟线性偏微分方程特征线法

一阶偏微分方程柯西问题

$$\begin{cases}a(x,t,u)u_x+b(x,t,u)u_t=c(x,t,u) & ,\ x\in\mathbb{R} & ,\ t>t_0\\ u(x,t_0)=\varphi(x) & ,\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

1. 特征向量场 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$
2. 特征方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a(x,t,u) & ,\ x(s_0)=\tau\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=b(x,t,u) & ,\ t(s_0)=t_0\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c(x,t,u) & ,\ u(s_0)=\varphi(\tau)\end{cases}$$

特征方程组的解称为特征曲线族，其中 $s_0=t_0$

特征曲线消去参数 τ、s 即为原问题的解

一维波动方程特征线法

无界弦振动柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & ,\ -\infty<x<\infty & ,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x) & ,\ u_t(x,0)=\psi(x) & ,\ -\infty<x<\infty\end{cases}$$

特征方程:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2-a^2=0$$

特征线 $x-at=c_1$，$x+at=c_2$

得满足微分方程的行波解

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

其中 f，g 为有二阶连续偏导数的任意函数

根据初始条件有达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\left[\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]+\left[\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]$$