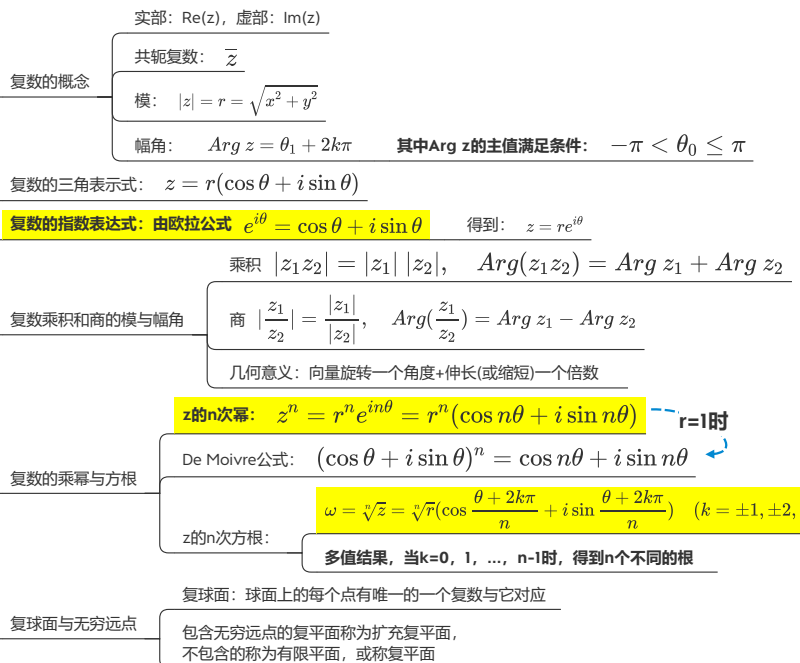
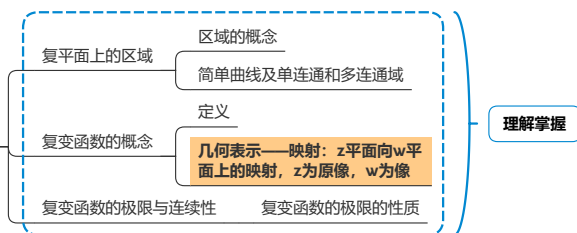


# 复变函数基本概念与性质

## 复数的概念与运算



## 复变函数及其极限与连续性



# 解析函数

## 解析函数的概念及其判定

$$\text{导数 } f'(z_0) = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\text{微分 } dw = f'(z_0) \Delta z$$

可导与可微等价；可导一定连续，连续不一定可导

求导法则与一元实变函数相同

定义：如果函数 $f(z)$ 在一点及其邻域内处处可导，那么称函数 $f(z)$ 在这点解析。如果函数在区域 $D$ 内每一点解析，那么称 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，或称 $f(z)$ 是 $D$ 内的一个解析函数（全纯函数或正则函数）

如果函数 $f(z)$ 在某一点不解析，则称该点为函数 $f(z)$ 的奇点

函数的解析性是其相伴区域密切联系的重要概念，在个别点处解析比个别点处可导要求更强

函数在区域内解析与在区域内可导是等价的，但在一点处解析的要求比在一点处可导的要求要高

两解析函数的和、差、积、商（在分母不为零的点）、复合函数都解析

$$\text{柯西-黎曼方程 (C-R方程)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

在 $D$ 内可导的必要条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内关于 $x, y$ 的偏导数都存在

在 $D$ 内可导的充分条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足C-R方程

在 $D$ 内可导的充要条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内都可微

在 $D$ 内可导的充要条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足C-R方程

$$\text{导数为 } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

在 $D$ 内解析的充要条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微

在 $D$ 内解析的充要条件： $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足C-R方程

是否满足C-R方程式判断函数 $f(z)$ 是否可导、是否解析的主要条件

$$\text{定义: } \exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

在复平面内处处可导，因而处处解析  $(e^z)' = e^z$

$$\text{性质 加法定理 } e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$\text{周期函数 } e^{z+2k\pi i} = e^z$$

复变指数函数的反函数

由于幅角的多值性，所以复变对数函数是多值函数

$$\text{定义 } \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

$$\ln z \text{ 称为 } \text{Ln } z \text{ 的主值 } \ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$\text{其余被称为 } \text{Ln } z \text{ 的分支 } \text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$\text{Ln } z$ 的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析

$$\text{性质 } \text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0, \infty)$$

$$\text{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0, \infty)$$

$$a^b = e^{b \text{Ln } a}$$

由于 $\text{Ln } a$ 的多值性，乘幂也是多值的

乘幂值的个数： $b$ 为整数时，乘幂为单值的

$b$ 为有理数 $p/q$ 时，乘幂有 $q$ 个值

$b$ 为无理数或复数时，乘幂有无穷多个值

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\sin z$ 与 $\cos z$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数

$\cos z$ 是偶函数， $\sin z$ 是奇函数

三角恒等式仍然成立

都是复平面内的解析函数，导数公式： $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$

$$\text{复数形式欧拉公式成立: } e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

正切、余切、正割、余割

$$\text{双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数}$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}$$

$$(\text{ch } z)' = \text{sh } z, (\text{sh } z)' = \text{ch } z$$

$$\left. \begin{aligned} \cos iy &= \text{ch } y, \quad \sin iy = i \text{sh } y \\ \cos(x + iy) &= \cos x \text{ch } y - i \sin x \text{sh } y \\ \sin(x + iy) &= \sin x \text{ch } y + i \cos x \text{sh } y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } iy &= \cos y, \quad \text{sh } iy = i \sin y \\ \text{ch}(x + iy) &= \text{ch } x \cos y + i \text{sh } x \sin y \\ \text{sh}(x + iy) &= \text{sh } x \cos y + i \text{ch } x \sin y \end{aligned} \right\}$$

$$\text{三角函数与双曲函数相互转化}$$

$$\text{反三角函数: } \text{Arccos } z = -i \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\text{反三角函数: } \text{Arcsin } z = -i \text{Ln} \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\text{反三角函数: } \text{Arctan } z = \frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\text{反双曲函数: } \text{Arsh } z = \ln \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

$$\text{反双曲函数: } \text{Arch } z = \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\text{反双曲函数: } \text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$$

复变函数的积分

积分的概念、性质及计算

有向曲线C: C为复平面上给定的一条光滑曲线, 如果沿曲线C规定一个走向, 则称C为有向曲线

积分的定义  $f(z)$ 沿曲线C积分 (C为积分路径)  $\int_C f(z)dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$

设 $f(z)$ 是区域D内的连续函数, 则复变函数 $f(z)$ 沿D内光滑有向曲线C的积分一定存在

积分的计算方法

通过两个二元实变函数的第二型线积分计算  $\int_C f(z)dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$

参数方程法计算积分  $\int_C f(z)dz = \int_a^\beta f[z(t)]z'(t)dt$

$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$  其中C是以 $z_0$ 为中心,  $r$ 为半径的圆周, 方向为逆时针,  $n$ 为整数

结果为  $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

积分的基本性质

具有与实变函数定积分相类似的性质

设曲线C的长度为L, 函数 $f(z)$ 在C上满足 $|f(z)| \leq M$ , 则积分估值不等式成立  $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML$

柯西-古萨基本定理及其推广

柯西-古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线C上以及由它围成的区域D内处处解析, 那么 $f(z)$ 沿C的积分为零  $\oint_C f(z)dz = 0$

复合闭路定理——多连通域中  $\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz$

$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$   $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \dots + C_n^-$

闭路变形原理

定义: 在给定区域内的一个解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 不解析的点

对于包含一点的任何一条正向简单闭曲线C, 都有  $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0, n \text{ 为整数} \end{cases}$

原函数与不定积分

积分与路径无关: 如果函数 $f(z)$ 在单连通域B内处处解析, 那么函数积分的值与连接起点及终点的路径C无关

原函数必存在: 如果函数 $f(z)$ 在单连通域B内处处解析, 那么函数 $F(z)$ 必为B内的一个解析函数, 并且 $F'(z)=f(z)$

柯西积分公式与高阶导数公式

柯西积分公式

如果 $f(z)$ 在区域D内处处解析, C为D内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于D, 那么C内部一点有:  $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

柯西积分公式表明: 一个解析函数在曲线C内部的值可以用它沿该曲线上的积分值来表示

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 其 $n$ 阶导数可表示为  $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n=1, 2, \dots)$

高阶导数公式

区域D内的解析函数在D内具有任意阶导数, 而且各阶导数仍为解析函数, 也就是D内的解析函数具有无限可微性

解析函数与调和函数

区域内的调和函数指二元实变函数 $\varphi(x,y)$ , 在D内具有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

调和函数

区域D内的解析函数的实部和虚部都是D内的调和函数

若调和函数 $v$ 与 $u$ 在D内满足柯西-黎曼方程, 则 $v$ 为 $u$ 的共轭调和函数

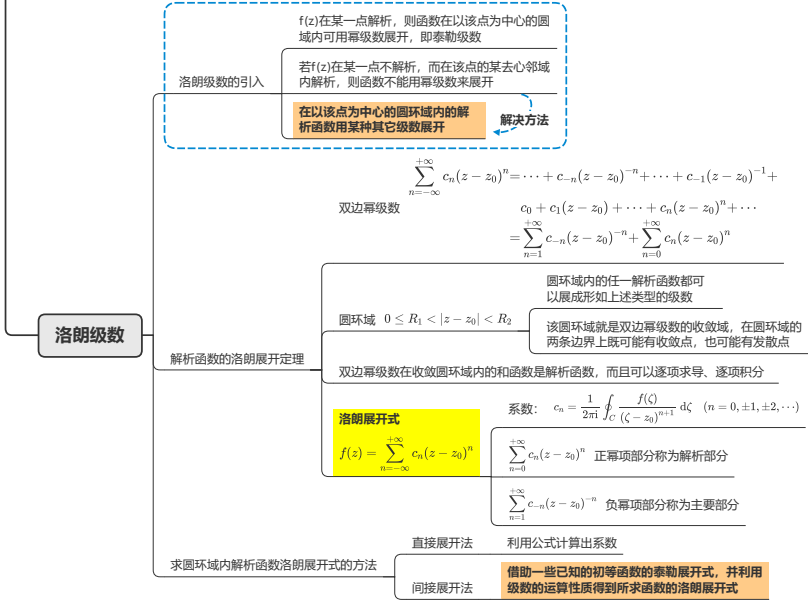
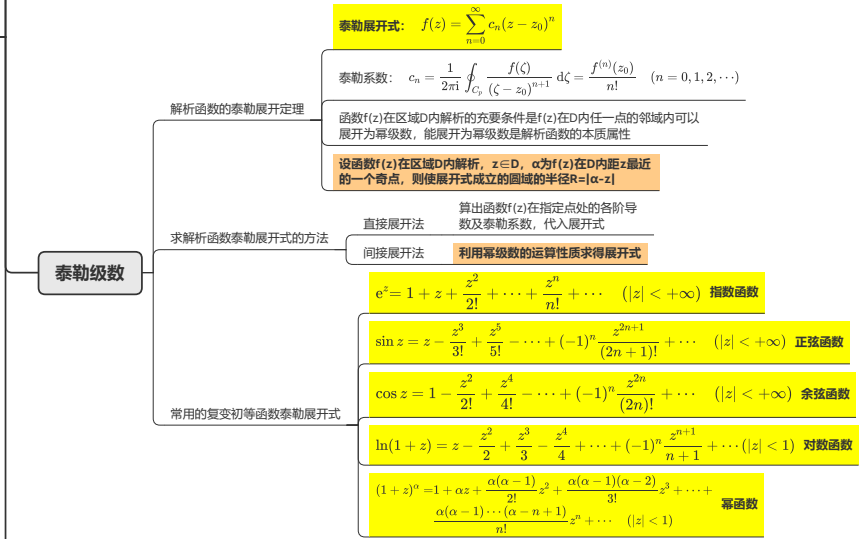
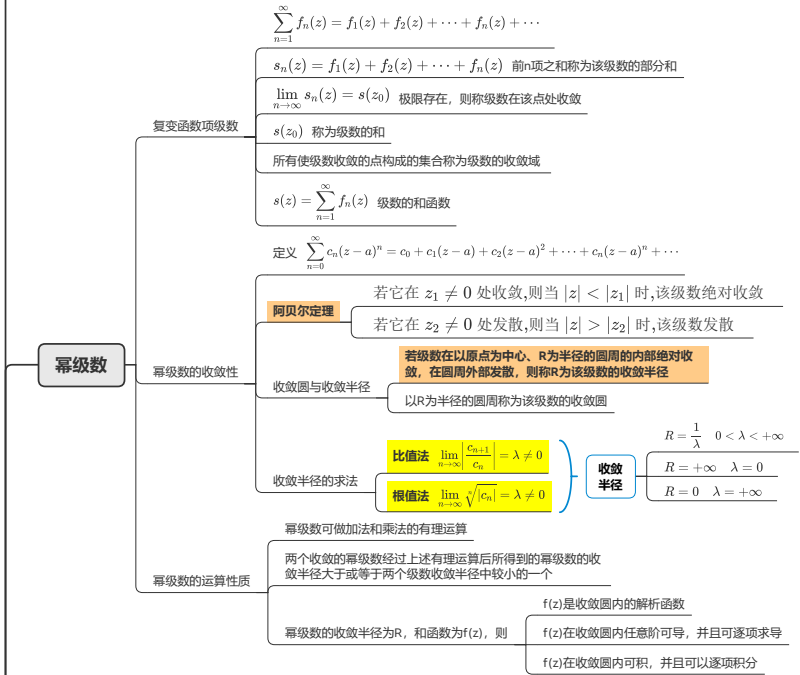
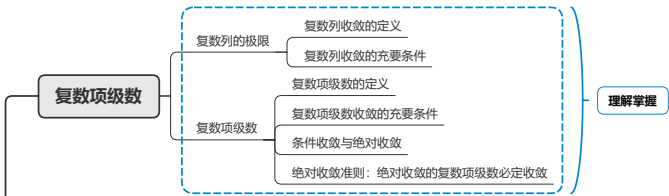
区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数

求共轭调和函数的方法

偏积分法 利用柯西-黎曼方程

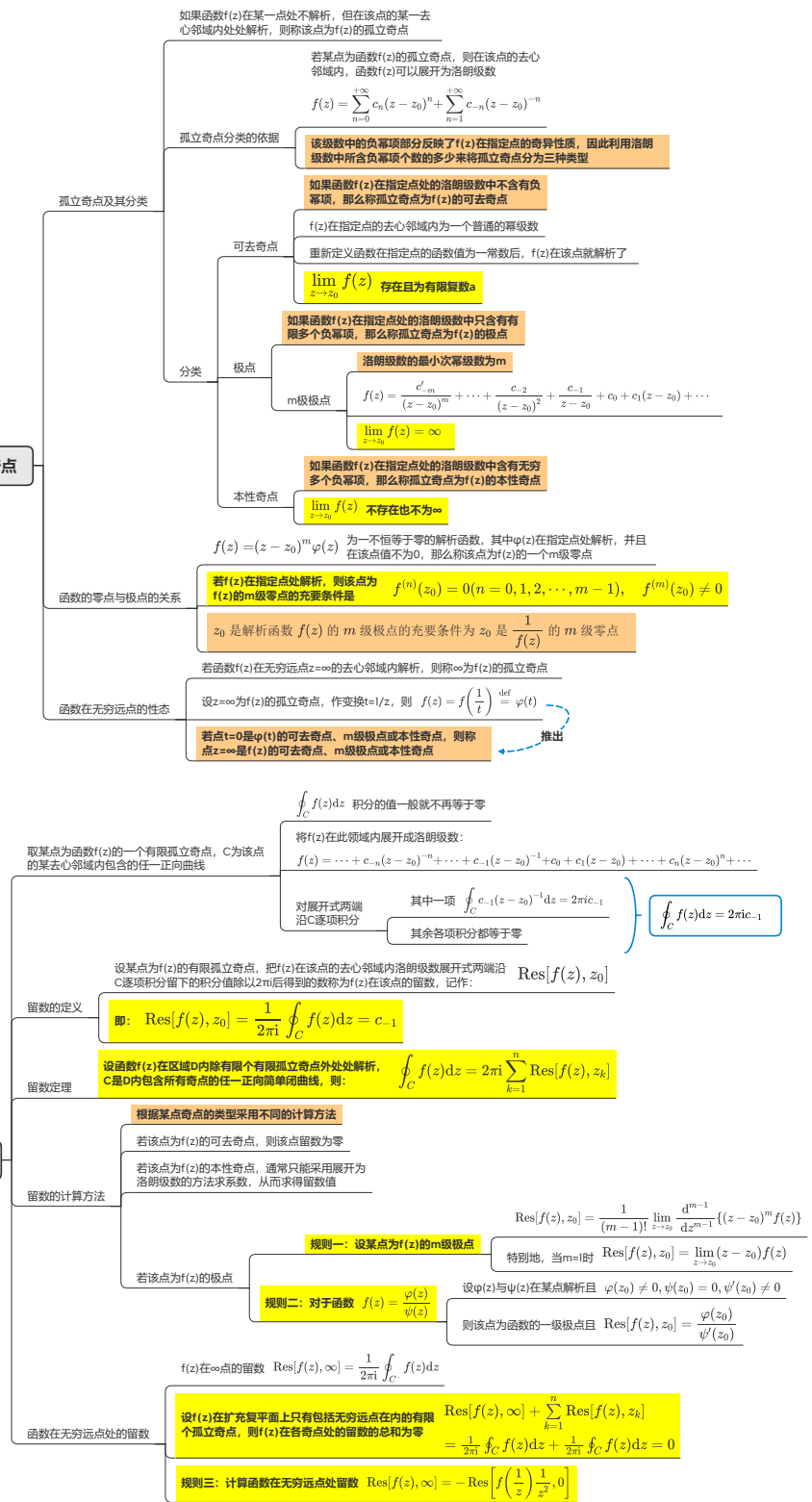
不定积分法

复变函数项级数

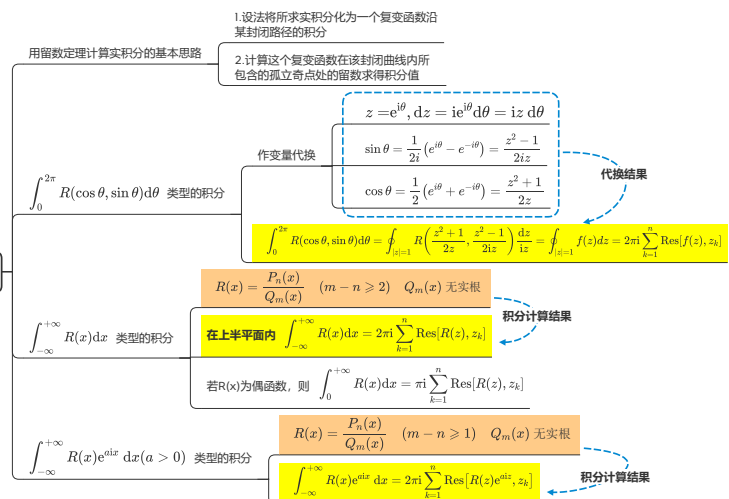


留数及其应用

留数与留数定理



留数定理在计算实积分中的应用



Fourier变换

Fourier积分

Fourier积分定理

$f(t)$ 在任一有限区间上满足Dirichlet条件  
 $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积

Fourier积分公式复数形式  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$

原形式  $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega$

Fourier积分公式三角形形式

$f(t)$ 为奇函数时  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega$

$f(t)$ 为偶函数时  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega$

Dirichlet积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$

Fourier变换

Fourier变换的概念

Fourier变换函数  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$   $F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的象函数

Fourier逆变换函数  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$   $f(t)$ 叫做 $F(\omega)$ 的象原函数

Fourier变换式  $F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$   $F(\omega) = -2jF_s(\omega)$

正弦变换

Fourier逆变换式  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$

Fourier变换式  $F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$   $F(\omega) = 2F_c(\omega)$

余弦变换

Fourier逆变换式  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$

指数衰减函数  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega}$

单位脉冲函数

$\delta$ -函数  $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = 1$

性质

筛选性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

$\delta$ -函数是偶函数, 即 $\delta(t) = \delta(-t)$

$\delta$ -函数是单位阶跃函数的导数, 即  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t), \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$

若 $a$ 为非零实常数, 则  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数, 则有  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - t_0) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$

单位阶跃函数  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$1$ 的Fourier变换  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$  推得:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

余弦函数  $f(t) = \cos \omega_0 t$  **Fourier变换**  $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

正弦函数  $f(t) = \sin \omega_0 t$  **Fourier变换**  $F(\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

非周期函数的频谱

频谱图通常指频率和振幅之间的关系图, 描述了振幅随频率变化的分布情况

在频谱分析中, **Fourier变换** $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的**频谱函数**, 而**频谱函数**的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的**振幅频谱** (简称为**频谱**)

Fourier变换的性质

$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$  线性性质

位移性质

$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$  时域上

$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$  频域上

微分性质

$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \mathcal{F}[t^n f(t)]$  象函数

$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega)$  原函数

积分性质  $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)]$

其他性质  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

卷积与相关函数

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$  卷积的定义

卷积的性质

交换律、结合律、加法分配律

$a[f_1(t) * f_2(t)] = [a f_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [a f_2(t)]$  ( $a$ 为常数) 卷积的数乘

$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} f_2(t)$  卷积的微分

$\int_{-\infty}^t [f_1(\xi) * f_2(\xi)] d\xi = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t f_1(\xi) d\xi * f_2(t)$  卷积的积分

$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t)$  卷积定理

Fourier变换的应用

微分、积分方程的Fourier变换解法

1. 根据Fourier变换的线性性质、微分性质和积分性质, 对欲求解的方程两端取Fourier变换, 将其转化为象函数的代数方程

2. 由这个代数方程求出象函数

3. 最后取Fourier逆变换就得出原来方程的解

# Laplace变换

## Laplace变换的概念

**Laplace变换**  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$

$F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数  
 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的象原函数

**存在定理**  
在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上连续或分段连续  
当 $t \rightarrow +\infty$ 时,  $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数, 即存在常数 $M > 0$ 及 $c \geq 0$ , 使得:  $|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad 0 \leq t < +\infty$

**常用函数Laplace变换**

- 单位阶跃函数  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- e的指数函数  $\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad (\text{Re}(s) > k)$
- 正弦函数  $\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- 余弦函数  $\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (\text{Re}(s) > 0)$
- 幂函数  $\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (\text{Re}(s) > 0)$  当 $m$ 为正整数时  $\Gamma(m+1) = m!$
- 单位脉冲函数  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

## Laplace变换的性质

**线性性质**

**微分性质**

- 原函数微分性质
  - $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$  一阶导数
  - $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$  二阶导数
  - $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{Re}(s) > c)$  **n阶导数**
- 象函数微分性质
  - 一阶导数  $F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)], \quad \text{Re}(s) > c$
  - n阶导数  $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)], \quad \text{Re}(s) > c$**

**积分性质**

- 原函数积分性质
  - 一次积分  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$
  - n次积分  $\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t f(t)dt}_{n \text{ 次}}\right] = \frac{1}{s^n}F(s)$**
- 象函数积分性质
  - 一次积分  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$  推论
  - 当 $s=0$ 时  $\int_0^\infty \left[\frac{f(t)}{t}\right] dt = \int_0^\infty F(s)ds$
  - n次积分  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \underbrace{\int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \dots \int_s^\infty F(s)ds}_{n \text{ 次}}$**

**位移性质**  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad (\text{Re}(s-a) > c)$

**延迟性质**  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \quad (\text{Re}(s-a) > c)$

**其他性质**  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$

## 卷积

卷积的概念

$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$  定义

**基本性质**

- $a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [af_2(t)]$  ( $a$ 为常数) 数乘
- $\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{d}{dt}f_2(t) + f_1(t)f_2(0) = \frac{d}{dt}f_1(t) * f_2(t) + f_1(0)f_2(t)$  微分
- $\int_0^t [f_1(\xi) * f_2(\xi)]d\xi = f_1(t) * \int_0^t f_2(\xi)d\xi = \int_0^t f_1(\xi)d\xi * f_2(t)$  积分

**卷积定理**

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= F_1(s) \cdot F_2(s) \\ \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] &= f_1(t) * f_2(t) \end{aligned} \right\}$$

**计算卷积时常用的积化和差公式**

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

## Laplace逆变换

$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0$  Laplace逆变换

$f(t)$ 与 $F(s)$ 构成了一个Laplace变换对  
右端的积分称为Laplace反演积分  
可以用留数方法来计算这种反演积分

**留数方法计算**

函数 $F(s)$ 的所有奇点(适当选择 $\beta$ 使这些奇点全在 $\text{Re}(s) < \beta$ 的范围内), 且当 $s \rightarrow \infty$ 时,  $F(s) \rightarrow 0$ , 则有:  $f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}], \quad t > 0$

- $\text{Res}_{s=s_k} \left[ \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}$  情形一: 一级极点计算方法
- $\text{Res}_{s=s_1} \left[ \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s-s_1)^m \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right]$  情形二: m级极点计算方法

**部分分式方法计算**

**卷积定理计算**

## Laplace变换的应用

**微分方程、积分方程** Laplace变换的微分性质与积分性质

- 微分方程
  - 常系数微分方程
  - 变系数微分方程
- 积分方程
  - Laplace积分性质计算
  - 对方程两边求导, 化为微分方程
  - 利用卷积的微分性质

微分方程、方程组