23 时变电磁场的应用——平面电磁波（1）

-平面电磁波简介与方程

邹建龙

主要内容

- 认识在空间传播的正弦波
- 平面电磁波和均匀平面电磁波
- 均匀平面电磁波方程的推导
- 任意电磁波的电磁波动方程

平面电磁波

- **空间传播的正弦波**
  - 方程
    - $f(t) = F cos(\omega t + \phi_0)$

      空间传播
    - $f(x,t) = F cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$

      空间不传播
  - 传播方向
    - $f(x,t) = F cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$

      沿x轴正向传播
    - $f(x,t) = F cos(\omega t + \beta x + \phi_0)$

      沿x轴负向传播
  - 相位
    - $\phi = \omega t - \beta x + \phi_0$

      相位反映空间点处某一时刻的运动状态
  - 波数（相位常数）
    - $\beta(x+\lambda) = \beta x + 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

      理解为空间上的“角频率”
  - 相位速度
    - $v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{\beta}$

      理解为一个周期内走过一个波长
- **平面电磁波**
  - 等相位面位平面的电磁波
  - 实际电磁波多位球面，但远离发射源处可近似为平面
  - 均匀平面电磁波：等相位面每一点上E与H相同
- **均匀平面电磁波方程**
  - 均匀平面电磁波可分解为两组电磁波
  - $$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\gamma\frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\gamma\frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

    两组形式类似，另一组将H和E下标互换即可
- **任意电磁波的电磁波动方程**
  - $$\begin{cases} \nabla^2\vec{H} - \mu\gamma\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{E} - \mu\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

    电磁波动方程

认识正弦波——空间不传播和空间传播的正弦波

$$f(t) = F\cos(\omega t + \phi_0)$$ 一点处的波函数

$$f(x,t) = F\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$ 空间各点的波函数

https://v.qq.com/x/page/x0930zamhmg.html

认识正弦波——空间传播正弦波的传播方向

$$f(x,t)=F\cos\left(\omega t-\beta x+\phi_0\right)$$

$t\uparrow$，波传播，为使相位相同（状态相同），$x\uparrow$

说明一点处波动状态传递到 x 更大的位置，即波向 x 正向传播

$$f(x,t)=F\cos\left(\omega t+\beta x+\phi_0\right)$$

同理，波向 x 负方向传播。

认识正弦波——空间传播正弦波的相位

$$f(x,t) = F\cos\left(\omega t - \beta x + \phi_0\right)$$

$\phi = \omega t - \beta x + \phi_0$ 称为相位

相位对于波而言，起着至关重要的作用；

从某种意义上说，相位比幅值更重要！

幅值 $\longrightarrow$ 颜值

相位 $\longrightarrow$ 内在气质

认识正弦波——空间传播正弦波的相位常数（波数）

$$f(x,t) = F\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$

类似

$\beta(x+\lambda) = \beta x + 2\pi$

$\downarrow$

$\beta\lambda = 2\pi$

$\downarrow$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \leftarrow \omega T = 2\pi \leftarrow \omega(t+T) = \omega t + 2\pi$

$\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ **称为相位常数，又称波数**

t是时间的周期，λ是空间的周期

相位常数对空间电磁波的传播而言至关重要！

相位常数可以理解为空间上的“角频率”！

波动状态 ⟶ 相位 ⟶ 时间影响 = ωt　　$\omega = \frac{2\pi}{T}$ 时间的角频率

波动状态 ⟶ 相位 ⟶ 空间影响 = $-\beta x$　　$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ 空间的角频率

认识正弦波——空间传播正弦波的相速度

$$f(x,t)=F\cos\left(\omega t-\beta x+\phi_0\right)$$

$$f(x,t)=F\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_0\right)$$

相（位）速度可以理解为在一个周期内走过一个波长

路程

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\lambda}{T}$$

时间

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{2\pi\lambda}{2\pi T}=\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\omega}{\beta}$$

Vp综合考虑了时间和空间的影响

认识正弦波——空间传播正弦波几个参数的关系

$$f(x,t) = F\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$

周期T,频率f,角频率ω,波长λ,波数（相位常数）β,相速度v_p

$T=\frac{2\pi}{\omega}$、$f=\frac{1}{T}$、$\omega=\frac{T}{2\pi}$、$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$、$v_p=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{\beta}$

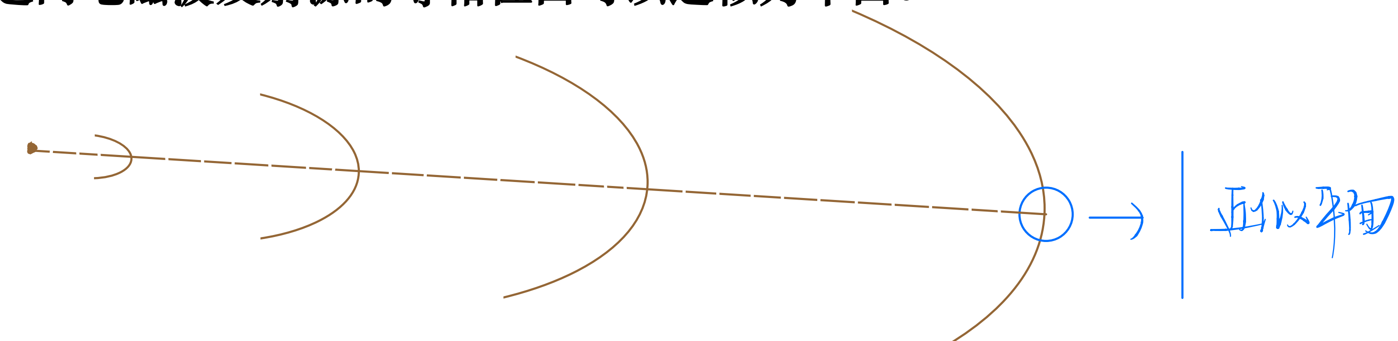
平面电磁波

$$E(x,t)=E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta x+\phi_0) \qquad H(x,t)=H_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta x+\phi_0)$$

等相位面： **电磁波传播过程中，对应于每一时刻t，空间 E 或 H 具有相同相位的点构成等相位面，或称波阵面。**

实际中电磁波等相位面大多为球面。 一般源为点电荷或线电流

远离电磁波发射源的等相位面可以近似为平面。



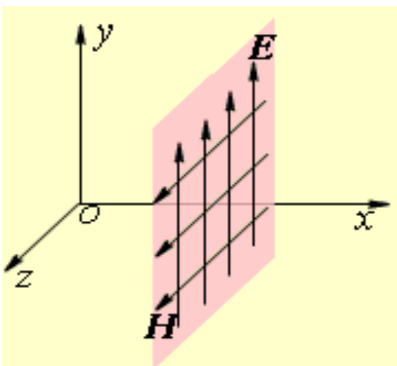
平面电磁波： **等相位面为平面的电磁波。**

均匀平面电磁波

均匀平面电磁波：平面电磁波的等相位面的每一点上， E相同、H相同，这样的电磁波称均匀平面电磁波。

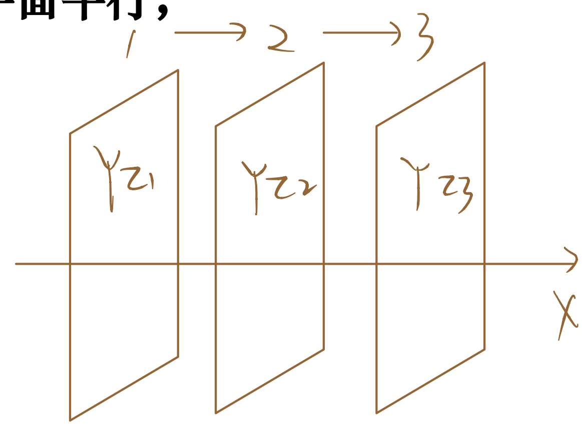
设均匀平面电磁波的等相位面（波阵面）与*yz*平面平行，

则 H=H(*x*, *t*)， E=E (*x* , *t*)，



E、H、K三者满足右螺旋关系

沿 *x* 方向传播的一组均匀平面电磁波



$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$，做叉乘运算，E、H 肯定是相互垂直的

均匀平面电磁波是最常见也最简单的电磁波，是第六章的研究对象。

要想研究均匀平面电磁波，需要建立其满足的方程，进而求解。

均匀平面电磁波方程的推导 假设沿x正向传播

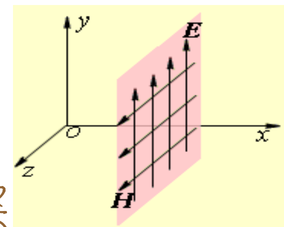
均匀平面电磁波的E和H在yz平面处处相等，因此E和H不随坐标y,z改变

均匀平面电磁波的E和H仅随坐标x改变

把E（x，t）和H（x，t）代入电磁场基本方程，并在直角坐标系中展开

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

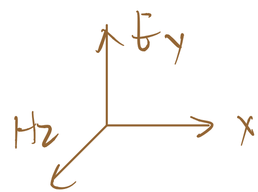
只有对x求偏导的量不为零



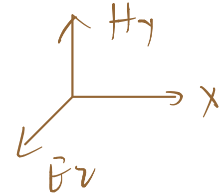
沿 x 方向传播的一组均匀平面电磁波

$$\left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}}\right)\mathbf{e}_x+\left(\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}\right)\mathbf{e}_z$$

$$=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}\mathbf{e}_x\quad-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}\mathbf{e}_y\quad-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\mathbf{e}_z$$



$$0=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}\qquad -\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

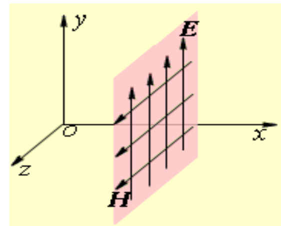


磁和电符合右手定则，从Ez绕向Hy，与x同向，二者同号

均匀平面电磁波方程的推导

把*E*（*x*，*t*）和*H*（*x*，*t*）代入下面的电磁场基本方程，并在直角坐标系中展开

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\,\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial\,t}$$



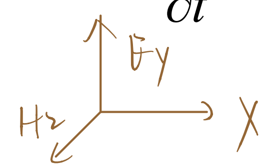
沿 *x* 方向传播的一组均匀平面电磁波

$$\left(\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial z}}\right)\mathbf{e}_x + \left(\cancel{\frac{\partial H_x}{\partial z}} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}}\right)\mathbf{e}_z$$

$$= \left(\gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}\right)\mathbf{e}_x + \left(\gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}\right)\mathbf{e}_y + \left(\gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}\right)\mathbf{e}_z$$

$$0 = \gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

电和磁场符合右手螺旋定则、从Hz绕向Ey、与x反向、故异号



均匀平面电磁波方程的推导

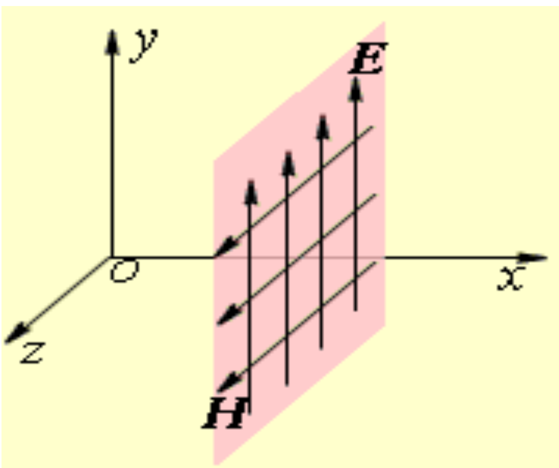
常数对时变电磁场相当于0（不是0也没有影响）

$$0=\gamma E_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow E_x=ae^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}\approx 0 \qquad 0=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow H_x=0$$

远离波源、t很大

均匀平面电磁波是横电磁波（TEM波）Transverse Electromagnetic Wave

TEM波指E和H均与传播方向垂直（无传播方向分量），对于传播方向来说是横向



沿 x 方向传播的一组均匀平面电磁波

横波：质点的振动方向和波传播的方向相互垂直

均匀平面电磁波方程的推导

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \longrightarrow$$ 两边对x求偏导

"$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$" 代进去

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_z}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0}$$

均匀平面电磁波可分解为两组电磁波

两组形式类似，分别独立，以后仅讨论E_y、H_z构成的平面波

任意脱离场源电磁波的电磁波动方程

- 电磁波脱离场源后，在媒质为线性、各项同性和均匀的空间中，电磁场满足的方程称为电磁波动方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \xrightarrow{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \xrightarrow{\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \xrightarrow{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \xrightarrow{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

任意电磁波的电磁波动方程

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\longrightarrow\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=\nabla\times\gamma\mathbf{E}+\nabla\times\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\gamma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

两边同求旋度

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=-\gamma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0\longrightarrow\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H})-\nabla^2\mathbf{H}\text{(矢量恒等式)}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$$

$$-\nabla^2\mathbf{H}=-\gamma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$$

两个方程分别有y、z分量，且Ey与Hz、Ez与Hy相互对应

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E}-\gamma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0}\qquad\boxed{\nabla^2\mathbf{H}-\gamma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0}$$

电磁波动方程

作业二十一

1. 谈谈你对空间传播的波的理解，包括各种参数含义及相互关系。
2. 写出平面电磁波和均匀平面电磁波的定义。
3. 写出均匀平面电磁波的波动方程。
4. 写出TEM波的定义。
5. 写出任意电磁波的电磁波动方程。