4 静电场方程和求解（2）

-场中有导体或电介质

邹建龙

主要内容

- 静电场中的导体
- 静电场中的电介质
- 电偶极矩回顾
- 电介质中的电极化强度
- 根据电极化强度计算电位
- 电介质等效极化体电荷密度和面电荷密度
- 通过实验确定电极化强度
- 电通量密度（电位移矢量）的引入
- 电介质中的高斯定律
- 电介质中电通量密度D和电场强度E的关系

静电场中的导体

- 导体中有大量自由电子，可以自由移动
- 达到稳态后，导体内部电场强度处处为零，否则电荷会继续移动，这与稳态矛盾　导体达到静电平衡
- 外加电场会导致电荷集中到导体表面，导体内部无电荷
- 达到稳态后，导体表面上的电场强度必然垂直于导体表面，否则电场的水平分量会使导体表面的电荷移动，这与稳态矛盾。　切向分量

静电场中的导体

- 由于导体内部电场处处为零，所以整个导体是个等位体，导体表面是等位面，电位处处相等

设A、B为表面两点，$\varphi_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$，$\because \vec{E}=0$ $\therefore \varphi_{AB}=0$

- 电荷全部分布于导体表面，导体越平滑处，电荷分布越稀疏，越尖锐处，电荷分布越密集

尖端放电

静电场中的电介质

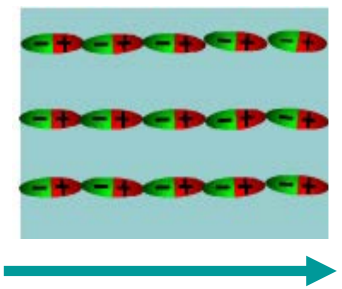
- 电介质就是俗称的绝缘体，自身无可自由移动的电荷
- 在外加电场时，会形成有序排列的**电偶极子**

电介质特性=在电场作用下电极化

电介质

无极分子 $\xrightarrow{E}$ 位移极化

有极分子 $\xrightarrow{E}$ 取向极化

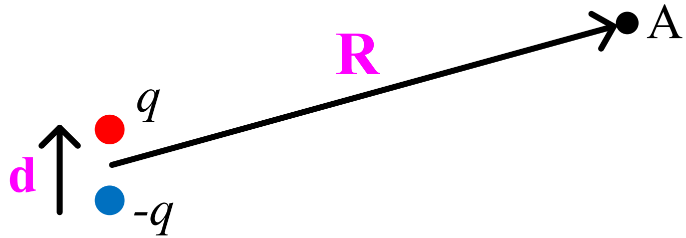


合场强小于原有场强

- 有序排列的电偶极子会产生新的附加电场，称为**极化电场**
- 电介质中总的电场由外加电场和极化电场共同作用
- 接下来我们的目标就是计算电偶极子所产生的电场强度！

电偶极子回顾

两个距离很近的等量异号点电荷+*q*和-*q*相距为*d*。
当场点与源点距离*R*>>*d*时，两个点电荷称为电偶极子



电偶极子在A点产生的电位：$\varphi_{\mathrm{p}} = \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

式中，电偶极矩$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$

$\mathbf{d}$的大小为d，方向由负电荷指向正电荷

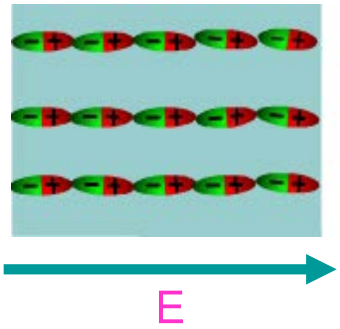
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{e_r} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\mathbf{E_p} = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{e_r} + \sin\theta\,\mathbf{e_\theta})$$

电极化强度

衡量电介质极化程度的指标是**电极化强度P**，

其物理意义是电介质单位体积内所有电偶极矩的矢量和。



$$\mathbf{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i}{\Delta V}$$

我们的目标是为了计算极化的电偶极子产生的电场强度

电偶极子产生的电场强度是矢量，太难计算了！怎么办?

可以先计算电偶极子产生的电位（标量），

再根据电位计算电场强度（其实也是超级难！）

计算电偶极子产生电位的方法是微元法，

即先计算微元产生的电位，再对微元进行积分

根据电极化强度计算电偶极子产生的电位

$$\mathbf{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i}{\Delta V} \Rightarrow \mathbf{P}\Delta V=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i$$

单个电偶极子产生的电位：$\varphi_{\mathrm{p}}=\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

假设**P**已知，则体积微元dV内的电偶极距之和为 **P**dV

体积微元dV内的电偶极子产生的电位为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathbf{P}\mathrm{d}V\cdot\mathbf{e_R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{e_R}\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

根据电极化强度计算电偶极子产生的电位

$$d\varphi = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_R dV}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \varphi = \int_V \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_R dV}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$ (这是一个体积分）

V：场源所在的区域，而非求导

经过极为复杂漫长的数学推导，可以得到

Green

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_n dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla\cdot\mathbf{P} dV$$

量纲分析，$\oint \vec{P}\cdot\vec{e_n} ds$、$\int \nabla\cdot\vec{P} dV$ 单位为库仑

所以认为是面密度和体密度

刚才我们假设**P**已知，但其实不知道**P**，

虽然如此，但我们有了意外的收获！

体积V内电偶极子产生的电位可以等效为

极化面电荷产生的电位+极化体电荷产生的电位！

也就是说电偶极子可以等效为极化面电荷+极化体电荷

这就是一种等效变换！

等效变换的思想。

电介质等效的极化电荷面密度和体密度

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla\cdot\mathbf{P}\mathrm{d}V$$

体积V内电偶极子产生的电位可以等效为

极化面电荷产生的电位+极化体电荷产生的电位！

这就是一种等效变换！

极化电荷面密度$\sigma_\mathrm{p}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_\mathrm{n}$

极化电荷体密度$\rho_\mathrm{p}=-\nabla\cdot\mathbf{P}$

数学推导+实验

按理说，只要知道极化电荷面密度和体密度，就可以计算出电场强度，但是前提是得知道极化强度P。可是我们并不知道P！

怎么办？方法是做实验！

通过做实验确定电极化强度P

实验表明，介质电极化强度P取决于电场强度E，其关系为

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

E↑ 极化↑

χ代表介质的电极化率（无量纲），可通过实验测定。

对于各项同性的线性介质，χ为常数

E为介质中的电场强度

即便通过实验，其实仍然无法得到极化强度P，

因为电场强度E未知，怎么办呢？

解决方法是引入一个新的物理量

（电通量密度或电位移矢量**D**），通过列写方程来求解

电位移矢量（电通量密度）的引入

在真空中，高斯定律的微分形式为

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ为自由电荷体密度

在电介质中，还有极化体电荷，因此介质中的电荷体密度等于

自由电荷体密度+极化电荷体密度 $\rho_{总}=\rho+\rho_{\rm p}$

极化电荷体密度$\rho_{\rm p}=-\nabla\cdot\mathbf{P}$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho+\rho_{\rm p}}{\varepsilon_0}\Rightarrow\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho-\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})=\rho$$

引入一个新的物理量 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$

$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$

此为介质中高斯定律的微分形式

D称为电通量密度或电位移矢量

电介质中的高斯定律

电介质中高斯定律的微分形式为 $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$

高斯散度定理：$\int_V(\nabla\cdot\mathbf{D})\mathrm{d}V=\oint_S\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$

$$\int_V\rho\mathrm{d}V=\oint_S\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

电通量密度

$$\oint_S\underline{\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}=q$$

这就是电介质中高斯定律的积分形式，可以用于计算D，

但我们想计算的是E，所以接下来需要推导D和E的关系

电介质中电通量密度D和电场强度E的关系

根据前面所学 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ← $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$，$\chi$ – 电介质的电极化率

$\varepsilon_r = 1 + \chi$

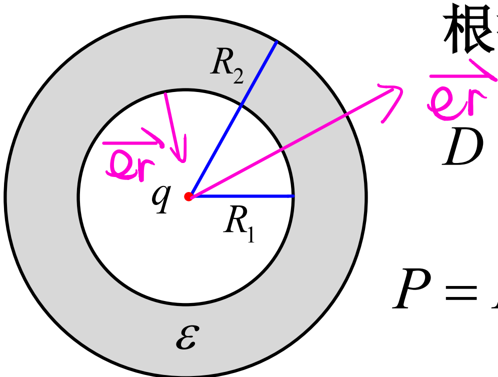
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

式中$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$称为电介质的介电常数，$\varepsilon_r$称为为相对介电常数

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 电介质中的D与E的关系 $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E$

例题

一个电量为q的点电荷位于电介质球壳（内半径R_1，外半径R_2，介电常数ε）中心，求电介质中的极化面电荷密度和极化体电荷密度。



根据高斯定律，介质球壳中,$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$ $= D4\pi r^2$

$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = D\oint dS$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$P = D - \varepsilon_0 E = (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{q}{4\pi r^2}$$（方向为半径方向）

均匀线性介质.

内部无极化电荷

球壳内表面：$\sigma_p = \vec{P}\cdot(-\vec{e}_r) = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{q}{4\pi R_1^{\ 2}}$

球壳外表面：$\sigma_p = \vec{P}\cdot(\vec{e}_r) = (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{q}{4\pi R_2^{\ 2}}$

球坐标系、因对称性只与ρ有关

球壳中：$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{q}{4\pi}\right]}{\partial r} = 0$

作业三

1、写出电介质电通量密度D和极化强度P的关系式

2、写出电介质中电通量密度D和电场强度E的关系式

3、分别写出电介质中高斯定律的微分形式和积分形式

4、写出电介质极化体电荷密度、极化面电荷密度

与电极化强度P的关系式。

5、教材1-2-1、1-3-1