复变函数基本概念与性质

- **复数的概念与运算**
  - 复数的概念
    - 实部：Re(z)，虚部：Im(z)
    - 共轭复数：$\overline{z}$
    - 模：$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
    - 幅角：$Arg\ z = \theta_1 + 2k\pi$　**其中Arg z的主值满足条件：** $-\pi < \theta_0 \leq \pi$
  - 复数的三角表示式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
  - **复数的指数表达式：由欧拉公式** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　得到：$z = re^{i\theta}$
  - 复数乘积和商的模与幅角
    - 乘积 $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$，$Arg(z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$
    - 商 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，$Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg\ z_1 - Arg\ z_2$
    - 几何意义：向量旋转一个角度+伸长(或缩短)一个倍数
  - 复数的乘幂与方根
    - **z的n次幂：** $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
    - **r=1时**
    - De Moivre公式：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
    - z的n次方根：
      - $\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = \pm1, \pm2, \cdots)$
      - **多值结果，当k=0，1，…，n-1时，得到n个不同的根**
  - 复球面与无穷远点
    - 复球面：球面上的每个点有唯一的一个复数与它对应
    - 包含无穷远点的复平面称为扩充复平面，不包含的称为有限平面，或称复平面
- **复变函数及其极限与连续性**
  - 复平面上的区域
    - 区域的概念
    - 简单曲线及单连通和多连通域
  - 复变函数的概念
    - 定义
    - **几何表示——映射：z平面向w平面上的映射，z为原像，w为像**
  - 复变函数的极限与连续性
    - 复变函数的极限的性质
  - **理解掌握**

解析函数

解析函数的概念及其判定

- 导数与微分
  - 导数 $f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$
  - 微分 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$
  - 可导与可微等价；可导一定连续，连续不一定可导
  - 求导法则与一元实变函数相同
- 解析函数
  - 定义
    - 定义：如果函数f(z)在一点及其邻域内处处可导，那么称函数f(z)在这一点解析。如果函数在区域D内每一点解析，那么称f(z)在D内解析，或称f(z)是D内的一个解析函数（全纯函数或正则函数）
    - **如果函数f(z)在某一点不解析，则称该点为函数f(z)的奇点**
  - 性质
    - 函数的解析性是与其相伴区域密切联系的重要概念，在个别点处解析比个别点处可导要求更强
    - 函数在区域内解析与在区域内可导是等价的，但在一点处解析的要求比在一点处可导的要求要高
    - **两解析函数的和、差、积、商（在分母不为零的点）、复合函数都解析**
- $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$
  - **柯西-黎曼方程（C-R方程）** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
  - 在D内可导
    - 必要条件
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内关于x、y的偏导数都存在
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内满足C-R方程
    - 充要条件
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内都可微
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内满足C-R方程
  - **导数为** $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$
  - 在D内解析
    - 充要条件
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内可微
      - u(x,y)与v(x,y)在区域D内满足C-R方程
    - 是否满足C-R方程式判断函数f(z)是否可导、是否解析的主要条件

复变初等函数

- 指数函数
  - **定义：** $\exp z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$
  - 性质
    - 在复平面内处处可导，因而处处解析 $(e^z)'=e^z$
    - 加法定理 $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$
    - 周期函数 $e^{z+2k\pi i}=e^z$
- 对数函数
  - 复变指数函数的反函数
  - 定义
    - **由于幅角的多值性，所以复变对数函数是多值函数**
    - $\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z$
    - ln z称为Ln z的主值 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$
    - 其余被称为Ln z的分支 $\mathrm{Ln}\ z=\ln\ z+2k\pi i\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$
  - 性质
    - **Ln z的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析**
    - $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2(z_1,z_2\neq0,\infty)$
    - $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2(z_1,z_2\neq0,\infty)$
- 乘幂与幂函数
  - 定义:
    - $a^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$
    - **由于Ln a的多值性，乘幂也是多值的**
  - 乘幂值的个数
    - b为整数时，乘幂为单值的
    - b为有理数p/q时，乘幂有q个值
    - b为无理数或复数时，乘幂有无穷多个值
- 三角函数与双曲函数
  - 定义
    - $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
    - $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
  - 性质
    - sinz与cosz都是以2π为周期的周期函数
    - cosz是偶函数，sinz是奇函数
    - 三角恒等式仍然成立
    - 都是复平面内的解析函数，导数公式: $(\sin z)'=\cos z,(\cos z)'=-\sin z$
    - 复数形式欧拉公式成立: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$
    - 正切、余切、正割、余割
  - 双曲函数
    - **双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数** $\mathrm{sh}\,z=\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2},\mathrm{ch}\,z=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2},\ \mathrm{th}\,z=\frac{\mathrm{sh}\,z}{\mathrm{ch}\,z}$
    - $(\mathrm{ch}\,z)'=\mathrm{sh}\,z,\quad(\mathrm{sh}\,z)'=\mathrm{ch}\,z$
  - 三角函数与双曲函数相互转化
    - $\left.\begin{array}{l}\cos\mathrm{i}y=\mathrm{ch}\,y,\quad\sin\mathrm{i}y=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,y\\ \cos(x+\mathrm{i}y)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\mathrm{sh}y\\ \sin(x+\mathrm{i}y)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\mathrm{sh}y\end{array}\right\}$
    - $\left.\begin{array}{l}\mathrm{ch}\,\mathrm{i}y=\cos y,\quad\mathrm{sh}\,\mathrm{i}y=\mathrm{i}\sin y\\ \mathrm{ch}(x+\mathrm{i}y)=\mathrm{ch}\,x\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,x\sin y\\ \mathrm{sh}(x+\mathrm{i}y)=\mathrm{sh}\,x\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\,x\sin y\end{array}\right\}$
- 反三角函数、反双曲函数
  - 反三角函数
    - $\mathrm{Arccos}\,z=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$
    - $\mathrm{Arcsin}\,z=-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$
    - $\mathrm{Arctan}\,z=-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$
  - 反双曲函数
    - $\mathrm{Arsh}\,z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$
    - $\mathrm{Arch}\,z=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$
    - $\mathrm{Arth}\,z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$

复变函数的积分

- **积分的概念、性质及计算**
  - 积分的定义
    - 有向曲线C：C为复平面上给定的一条光滑曲线，如果沿曲线C规定一个走向，则称C为有向曲线
    - f(z)沿曲线C积分（C为积分路径） $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$
  - 设f(z)是区域D内的连续函数，则复变函数f(z)沿D内光滑有向曲线C的积分一定存在
  - 积分的计算方法
    - **通过两个二元实变函数的第二型线积分计算** $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y$
    - **参数方程法计算积分** $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$
    - $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$ 其中C是以z_0为中心，r为半径的圆周，方向为逆时针，n为整数
      - **结果为** $\oint_{|z-z|=r}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$
  - 积分的基本性质
    - 具有与实变函数定积分相类似的性质
    - **设曲线C的长度为L，函数f(z)在C上满足|f(z)|≤M，则积分估值不等式成立** $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)|\mathrm{d}s\leqslant ML$

Green公式

推出

- **柯西-古萨基本定理及其推广**
  - 柯西-古萨基本定理
    - **如果函数f(z)在简单闭曲线C上以及由它围成的区域D内处处解析，那么f(z)沿C的积分为零** $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$
  - 复合闭路定理——多连通域中
    - $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum\limits_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$
    - $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0\quad \Gamma=C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$
  - 闭路变形原理
    - 定义：在给定区域内的一个解析函数f(z)沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中曲线不经过函数f(z)不解析的点
    - **对于包含一点的任何一条正向简单闭曲线C，都有** $\oint_C\dfrac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=0\\ 0, & n\neq 0, n\text{ 为整数}\end{cases}$
- **原函数与不定积分**
  - **积分与路径无关：如果函数f(z)在单连通域B内处处解析，那么函数积分的值与连接起点及终点的路径C无关**
  - 原函数必存在:如果函数f(z)在单连通域B内处处解析，那么函数F(z)必为B内的一个解析函数，并且F'(z)=f(z)
- **柯西积分公式与高阶导数公式**
  - 柯西积分公式
    - **如果f(z)在区域D内处处解析，C为D内的任何一条正向简单曲线，它的内部完全含于D，那么C内部一点有：** $\oint_C\dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)$
    - 柯西积分公式表明：一个解析函数在曲线C内部的值可以用它沿该曲线上的积分值来表示
  - 高阶导数公式
    - **解析函数f(z)的导数仍为解析函数，其n阶导可表示为** $\oint_c\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad(n=1,2,\cdots)$
    - 区域D内的解析函数在D内具有任意阶导数，而且各阶导数仍为解析函数，也就是D内的解析函数具有无限可微性
- **解析函数与调和函数**
  - 调和函数
    - **区域内的调和函数指二元实变函数φ(x,y)，在D内具有二阶连续偏导数，并且满足拉普拉斯方程** $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$
    - **区域D内的解析函数的实部和虚部都是D内的调和函数**
    - **若调和函数v与u在D内满足柯西-黎曼方程，则v为u的共轭调和函数**
    - 区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数

推出

  - 求共轭调和函数的方法
    - 偏积分法 **利用柯西-黎曼方程**
    - 不定积分法

复变函数项级数

- **复数项级数**
  - 复数列的极限
    - 复数列收敛的定义
    - 复数列收敛的充要条件
  - 复数项级数
    - 复数项级数的定义
    - 复数项级数收敛的充要条件
    - 条件收敛与绝对收敛
    - 绝对收敛准则：绝对收敛的复数项级数必定收敛
  - **理解掌握**
- **幂级数**
  - 复变函数项级数
    - $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$
    - $s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ 前n项之和称为该级数的部分和
    - $\lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z_0)$ 极限存在，则称级数在该点处收敛
    - $s(z_0)$ 称为级数的和
    - 所有使级数收敛的点构成的集合称为级数的收敛域
    - $s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 级数的和函数
  - 幂级数的收敛性
    - 定义 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$
    - **阿贝尔定理**
      - 若它在 $z_1 \neq 0$ 处收敛，则当 $|z| < |z_1|$ 时，该级数绝对收敛
      - 若它在 $z_2 \neq 0$ 处发散，则当 $|z| > |z_2|$ 时，该级数发散
    - 收敛圆与收敛半径
      - **若级数在以原点为中心、R为半径的圆周的内部绝对收敛，在圆周外部发散，则称R为该级数的收敛半径**
      - 以R为半径的圆周称为该级数的收敛圆
    - 收敛半径的求法
      - **比值法** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$
      - **根值法** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$
      - **收敛半径**
        - $R = \frac{1}{\lambda}$ $0 < \lambda < +\infty$
        - $R = +\infty$ $\lambda = 0$
        - $R = 0$ $\lambda = +\infty$
  - 幂级数的运算性质
    - 幂级数可做加法和乘法的有理运算
    - 两个收敛的幂级数经过上述有理运算后所得到的幂级数的收敛半径大于或等于两个级数收敛半径中较小的一个
    - 幂级数的收敛半径为R，和函数为f(z)，则
      - f(z)是收敛圆内的解析函数
      - f(z)在收敛圆内任意阶可导，并且可逐项求导
      - f(z)在收敛圆内可积，并且可以逐项积分
- **泰勒级数**
  - 解析函数的泰勒展开定理
    - **泰勒展开式：** $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
    - 泰勒系数：$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$
    - 函数f(z)在区域D内解析的充要条件是f(z)在D内任一点的邻域内可以展开为幂级数，能展开为幂级数是解析函数的本质属性
    - **设函数f(z)在区域D内解析，z∈D，α为f(z)在D内距z最近的一个奇点，则使展开式成立的圆域的半径R=|α-z|**
  - 求解析函数泰勒展开式的方法
    - 直接展开法：算出函数f(z)在指定点处的各阶导数及泰勒系数，代入展开式
    - 间接展开法：**利用幂级数的运算性质求得展开式**
  - 常用的复变初等函数泰勒展开式
    - $\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$ **指数函数**
    - $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$ **正弦函数**
    - $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$ **余弦函数**
    - $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots (|z| < 1)$ **对数函数**
    - $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots \quad (|z| < 1)$ **幂函数**
- **洛朗级数**
  - 洛朗级数的引入
    - f(z)在某一点解析，则函数在以该点为中心的圆域内可用幂级数展开，即泰勒级数
    - 若f(z)在某一点不解析，而在该点的某去心邻域内解析，则函数不能用幂级数来展开
    - **在以该点为中心的圆环域内的解析函数用某种其它级数展开** **解决方法**
  - 解析函数的洛朗展开定理
    - 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$
    - 圆环域 $0 \le R_1 < |z - z_0| < R_2$
      - 圆环域内的任一解析函数都可以展成形如上述类型的级数
      - 该圆环域就是双边幂级数的收敛域，在圆环域的两条边界上既可能有收敛点，也可能有发散点
    - 双边幂级数在收敛圆环域内的和函数是解析函数，而且可以逐项求导、逐项积分
    - **洛朗展开式** $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$
      - 系数：$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
      - $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 正幂项部分称为解析部分
      - $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 负幂项部分称为主要部分
  - 求圆环域内解析函数洛朗展开式的方法
    - 直接展开法：利用公式计算出系数
    - 间接展开法：**借助一些已知的初等函数的泰勒展开式，并利用级数的运算性质得到所求函数的洛朗展开式**

留数及其应用

解析函数的孤立奇点

- 孤立奇点及其分类
  - 如果函数f(z)在某一点处不解析，但在该点的某一去心邻域内处处解析，则称该点为f(z)的孤立奇点
  - 孤立奇点分类的依据
    - 若某点为函数f(z)的孤立奇点，则在该点的去心邻域内，函数f(z)可以展开为洛朗级数
    - $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$
    - **该级数中的负幂项部分反映了f(z)在指定点的奇异性质，因此利用洛朗级数中所含负幂项个数的多少来将孤立奇点分为三种类型**
  - 分类
    - 可去奇点
      - **如果函数f(z)在指定点处的洛朗级数中不含有负幂项，那么称孤立奇点为f(z)的可去奇点**
      - f(z)在指定点的去心邻域内为一个普通的幂级数
      - 重新定义函数在指定点处的函数值为一常数后，f(z)在该点就解析了
      - $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ **存在且为有限复数a**
    - 极点
      - **如果函数f(z)在指定点处的洛朗级数中只含有有限多个负幂项，那么称孤立奇点为f(z)的极点**
      - m极极点
        - **洛朗级数的最小次幂级数为m**
        - $f(z)=\frac{c'_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$
        - $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$
    - 本性奇点
      - **如果函数f(z)在指定点处的洛朗级数中含有无穷多个负幂项，那么称孤立奇点为f(z)的本性奇点**
      - $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ **不存在也不为∞**
- 函数的零点与极点的关系
  - $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ 为一不恒等于零的解析函数，其中φ(z)在指定点处解析，并且在该点值不为0，那么称该点为f(z)的一个m级零点
  - **若f(z)在指定点处解析，则该点为f(z)的m级零点的充要条件是** $f^{(n)}(z_0)=0(n=0,1,2,\cdots,m-1),\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$
  - z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件为 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点
- 函数在无穷远点的性态
  - 若函数f(z)在无穷远点z=∞的去心邻域内解析，则称∞为f(z)的孤立奇点
  - 设z=∞为f(z)的孤立奇点，作变换t=1/z，则 $f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)\overset{\text{def}}{=}\varphi(t)$
  - 推出
  - **若点t=0是φ(t)的可去奇点、m级极点或本性奇点，则称点z=∞是f(z)的可去奇点、m级极点或本性奇点**

留数与留数定理

- 取某点为函数f(z)的一个有限孤立奇点，C为该点的某去心邻域内包含的任一正向曲线
  - $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 积分的值一般就不再等于零
  - 将f(z)在此领域内展开成洛朗级数：
  - $f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$
  - 对展开式两端沿C逐项积分
    - 其中一项 $\oint_C c_{-1}(z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}$
    - 其余各项积分都等于零
    - $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}$
- 留数的定义
  - 设某点为f(z)的有限孤立奇点，把f(z)在该点的去心邻域内洛朗级数展开式两端沿C逐项积分留下的积分值除以2πi后得到的数称为f(z)在该点的留数，记作：$\mathrm{Res}[f(z),z_0]$
  - **即：** $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=c_{-1}$
- 留数定理
  - **设函数f(z)在区域D内除有限个有限孤立奇点外处处解析，C是D内包含所有奇点的任一正向简单闭曲线，则：** $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$
- 留数的计算方法
  - **根据某点奇点的类型采用不同的计算方法**
  - 若该点为f(z)的可去奇点，则该点留数为零
  - 若该点为f(z)的本性奇点，通常只能采用展开为洛朗级数的方法求系数，从而求得留数值
  - 若该点为f(z)的极点
    - **规则一：设某点为f(z)的m级极点**
      - $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$
      - 特别地，当m=1时 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
    - **规则二：对于函数** $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$
      - 设φ(z)与ψ(z)在某点解析且 $\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\neq 0$
      - 则该点为函数的一级极点且 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
- 函数在无穷远点处的留数
  - f(z)在∞点的留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$
  - **设f(z)在扩充复平面上只有包括无穷远点在内的有限个孤立奇点，则f(z)在各奇点处的留数的总和为零** $\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$
  - **规则三：计算函数在无穷远点处留数** $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$

留数定理在计算实积分中的应用

- 用留数定理计算实积分的基本思路
  - 1.设法将所求实积分化为一个复变函数沿某封闭路径的积分
  - 2.计算这个复变函数在该封闭曲线内所包含的孤立奇点处的留数求得积分值
- $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 类型的积分
  - 作变量代换
    - $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$
    - $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2-1}{2iz}$
    - $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$
  - 代换结果
  - $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 类型的积分
  - $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\quad(m-n\geqslant 2)\quad Q_m(x)$ 无实根
  - 积分计算结果
  - **在上半平面内** $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$
  - 若R(x)为偶函数，则 $\int_0^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}\,\mathrm{d}x(a>0)$ 类型的积分
  - $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\quad(m-n\geqslant 1)\quad Q_m(x)$ 无实根
  - 积分计算结果
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k]$

Fourier变换

- **Fourier积分**
  - Fourier积分定理
    - f(t)在任一有限区间上满足Dirichlet条件
    - f(t)在无限区间(-∞, +∞)上绝对可积
  - Fourier积分公式复数形式 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$
  - Fourier积分公式三角形式
    - 原形式 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$
    - f(t)为奇函数时 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$
    - f(t)为偶函数时 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$
  - **Dirichlet积分** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$
- **Fourier变换**
  - Fourier变换的概念
    - **Fourier变换函数** $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$ F(ω)叫做f(t)的象函数
    - **Fourier逆变换函数** $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$ f(t)叫做F(ω)的象原函数
    - 正弦变换
      - Fourier变换式 $F_s(\omega)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\quad F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega)$
      - Fourier逆变换式 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$
    - 余弦变换
      - Fourier变换式 $F_c(\omega)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\quad F(\omega)=2F_c(\omega)$
      - Fourier逆变换式 $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$
  - 常用函数
    - 指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ **Fourier变换** $F(\omega)=\dfrac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}$
    - 单位脉冲函数
      - δ-函数 $\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases}$ **Fourier变换** $F(\omega)=1$
      - 性质
        - 筛选性质
          - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$
          - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$
        - 积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$
        - δ-函数是偶函数，即δ(t)=δ(-t)
        - **δ-函数是单位阶跃函数的导数，即** $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$
        - 若a为非零实常数，则 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
        - **若f(t)为无穷次可微的函数，则有** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0)$
    - 单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ **Fourier变换** $F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$
    - **1的Fourier变换** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$ 推得: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
    - 余弦函数 $f(t)=\cos\omega_0 t$ **Fourier变换** $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
    - 正弦函数 $f(t)=\sin\omega_0 t$ **Fourier变换** $F(\omega)=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
  - 非周期函数的频谱
    - 频谱图通常指频率和振幅之间的关系图，描述了振幅随频率变化的分布情况
    - **在频谱分析中，Fourier变换F(ω)又称为f(t)的频谱函数，而频谱函数的模|F(ω)|称为f(t)的振幅频谱（简称为频谱）**
- **Fourier变换的性质**
  - $\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$ 线性性质
  - 位移性质
    - $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega)$ **时域上**
    - $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$ **频域上**
  - 微分性质
    - $F^{(n)}(\omega)=(-j)^n\mathscr{F}[t^n f(t)]$ **象函数**
    - $\mathscr{F}[f^{n}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$ **原函数**
  - $\mathscr{F}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathscr{F}[f(t)]$ **积分性质**
  - $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ **其他性质**
- **卷积与相关函数**
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*f_2(t)$ **卷积的定义**
  - 卷积的性质
    - 交换律、结合律、加法分配律
    - $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]$($a$ 为常数) 卷积的数乘
    - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)$ 卷积的微分
    - $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}[f_1(\xi)*f_2(\xi)]\mathrm{d}\xi=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{t}f_1(\xi)\mathrm{d}\xi*f_2(t)$ 卷积的积分
  - $\left.\begin{array}{l}\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\\ \mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)\end{array}\right\}$ **卷积定理**
- **Fourier变换的应用**
  - 微分、积分方程的Fourier变换解法
    - 1、根据Fourier变换的线性性质、微分性质和积分性质，对欲求解的方程两端取Fourier变换，将其转化为象函数的代数方程
    - 2.由这个代数方程求出象函数
    - 3.最后取Fourier逆变换就得出原来方程的解

Laplace变换

- **Laplace变换的概念**
  - Laplace变换 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
    - F(s)为f(t)的象函数
    - f(t)为F(s)的象原函数
  - 存在定理
    - 在t≥0的任一有限区间上连续或分段连续
    - 当t→+∞时，f(t)的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数M>0及c≥0,使得: $|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct},\quad 0\leqslant t<+\infty$
  - 常用函数Laplace变换
    - 单位阶跃函数 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$
    - e的指数函数 $\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{kt}\right]=\dfrac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k)$
    - 正弦函数 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$
    - 余弦函数 $\mathscr{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$
    - 幂函数 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$
      - 当m为正整数时 $\Gamma(m+1)=m!$
    - 单位脉冲函数 $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$
- **Laplace变换的性质**
  - 线性性质
  - 微分性质
    - 原函数微分性质
      - $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$ 一阶导数
      - $\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ 二阶导数
      - $\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\quad(\mathrm{Re}(s)>c)$ n阶导数
    - 象函数微分性质
      - 一阶导数 $F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>c$
      - n阶导数 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>c$
  - 积分性质
    - 原函数积分性质
      - 一次积分 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{s}F(s)$
      - n次积分 $\mathscr{L}[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t}_{n\text{ 次}}]=\dfrac{1}{s^n}F(s)$
    - 象函数积分性质
      - 一次积分 $\mathscr{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s$
        - 推论
      - 当s=0时 $\int_0^\infty\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]\mathrm{d}t=\int_0^\infty F(s)\mathrm{d}s$
      - n次积分 $\mathscr{L}\left[\dfrac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^\infty \mathrm{d}s\int_s^\infty \mathrm{d}s\cdots\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s}_{n\text{ 次}}$
  - 位移性质 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)\Rightarrow\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right]=F(s-a)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>c)$
  - 延迟性质 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)\Rightarrow\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>c)$
  - 其他性质 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)\quad(a>0)$
- **卷积**
  - 卷积的概念
    - $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 定义
    - 基本性质
      - $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)](a\text{ 为常数 })$ 数乘
      - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)+f_1(t)f_2(0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)+f_1(0)f_2(t)$ 微分
      - $\int_0^t[f_1(\xi)*f_2(\xi)]\mathrm{d}\xi=f_1(t)*\int_0^t f_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^t f_1(\xi)\mathrm{d}\xi*f_2(t)$ 积分
    - $\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)\\&\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)\end{aligned}\right\}$ 卷积定理
    - 计算卷积时常用到的积化和差公式
      - $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
      - $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
      - $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
      - $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
- **Laplace逆变换**
  - $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\quad t>0$ Laplace逆变换
    - f(t)与F(t)构成了一个Laplace变换对
    - 右端的积分称为Laplace反演积分
    - 可以用留数方法来计算这种反演积分
  - 留数方法计算
    - 函数F(s)的所有奇点(适当选择β使这些奇点全在Re(s)<β的范围内)，且当s→∞时，F(s)→0，则有: $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{s=s_k}\left[F(s)\mathrm{e}^{st}\right],\quad t>0$
    - $\mathrm{Res}_{s=s_k}\left[\dfrac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]=\dfrac{A(s_k)}{B'(s_k)}\mathrm{e}^{s_kt}$ 情形一：一级极点计算方法
    - $\mathrm{Res}_{s=s_1}\left[\dfrac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{s\to s_1}\dfrac{d^{m-1}}{\mathrm{d}s^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\dfrac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]$ 情形二：m级极点计算方法
  - 部分分式法计算
  - 卷积定理计算
- **Laplace变换的应用**
  - 微分方程、积分方程
    - Laplace变换的微分性质与积分性质
  - 微分方程
    - 常系数微分方程
    - 变系数微分方程
  - 积分方程
    - Laplace积分性质计算
    - 对方程两边求导，化为微分方程
    - 利用卷积的微分性质
  - 微积分方程、方程组