14 恒定磁场

-磁矢位的定义和计算（真空中）

邹建龙

主要内容

- 为什么要引入磁矢位的概念?
- 磁矢位的引入
- 磁矢位和电位比较
- 真空中恒定磁场磁矢位满足的泊松方程
- 真空中恒定磁场磁矢位的计算公式
- 磁矢位计算及其在磁场计算中的应用
- 磁矢位引入的主要原因

磁矢位的定义和计算

- **磁矢位的引入**
  - 原因
    - 旋度难记且计算繁杂
    - 毕萨拉定律叉乘计算复杂
  - 目的
    - 通过引入磁矢位简化计算
  - 推导
    - $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
    - 令 $\nabla \cdot \vec{A} = 0, \nabla^2 \cdot \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
- **恒定磁场的泊松方程**
  - 直角分量形式
    - $\nabla^2 \cdot \vec{A}_i = -\mu_0 J_i, i = x, y, z$
    - $A_i = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi R} J_i dV, i = x, y, z$
    - $Id\vec{l} = \vec{J} dS = \vec{K} dS$ 不同形式的电流密度
  - 与电位的比较
    - $\varphi \leftrightarrow \vec{A}, \rho \leftrightarrow \vec{J}, \mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}$

为什么要引入磁矢位的概念?

真空中恒定磁场安培~~换~~路定律的微分形式

环

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- 旋度看起来很美! 但大多数人非常不喜欢旋度（很难记住！很难算！）
- 毕奥-萨伐尔定律 貌似可以计算任意恒定磁场,但又乘让人心生畏惧，其实只适合计算简单的问题 $d\vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{e_R}$
- 对于稍微复杂的问题，毕奥萨伐尔定律只能望洋兴叹，因为前面是星辰大海!
- 那么我们该怎么办呢?

磁矢位的引入 曲线救国

解决磁场难以计算问题的方法是：它山之石，可以攻玉！

联想：静电场计算电场强度难，解决方法是引入电位的概念，将矢量计算转化为标量计算，计算出标量电位，就可以推导出矢量电场强度

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad \nabla\times(-\nabla\varphi)=0 \Longrightarrow \mathbf{E}=-\nabla\varphi$$

恒定磁场计算能否采取类似的方法呢？

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0 \Longrightarrow \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

恒定磁场可以先计算出矢量**A**（我们称之为磁矢位），再计算出**B**！

任意复杂的恒定磁场都可以计算出矢量**A**，进而推出**B**！

磁矢位和电位比较

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times (-\nabla \varphi) = 0 \Longrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

相同之处：

（1）都是我们人为引入的中间量

（2）引入的目的都是为了简化分析，磁矢位计算可以使B 计算“更容易” （其实是更全能），电位计算使E计算更容易

不同之处：

（1）电位是标量，磁矢位是矢量，磁矢位计算比电位计算难

（2）电位有明确的物理意义，磁矢位没有明确的物理意义，纯属无中生有！

真空中恒定磁场磁矢位满足的泊松方程

$\underline{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$ $\underline{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

待续。。。。。。

$\nabla \times \vec{E} = 0$、 $\nabla \times (-\nabla \varphi) = 0$

引入变量需要满足方程恒为零

① 标量梯度的旋度恒为零，故将场强表示为电位的负梯度，但是恰好有明确的物理意义

② 矢量旋度的梯度为零，故将磁感应强度表示为磁矢位的旋度，并没有明确的物理意义，只是数学上的变量代换，因而更加抽象

恒定磁场磁矢位满足的泊松方程

为使计算方便

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\mathbf{J}$$

矢量恒等式

所以选取∇·A=0的矢量

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=-\nabla^2\mathbf{A}$$

对任意矢量均成立

令 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$（库仑规范）

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{e}_x+A_y\mathbf{e}_y+A_z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J}=J_x\mathbf{e}_x+J_y\mathbf{e}_y+J_z\mathbf{e}_z$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J}}$$

$$\boxed{\nabla^2 A_x=-\mu_0 J_x}$$

$$\boxed{\nabla^2 A_y=-\mu_0 J_y}$$

$$\boxed{\nabla^2 A_z=-\mu_0 J_z}$$

求解三个三维泊松方程极其困难！

只有一维问题才能勉强接受，此时可用直接积分法

变量分离法可以解决二维泊松方程.

真空中磁矢位的计算公式

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varphi = \int_V \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}V$$

$$A_x = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi R} J_x \mathrm{d}V$$

$$A_y = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi R} J_y \mathrm{d}V$$

$$A_z = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi R} J_z \mathrm{d}V$$

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{J} dV$$

对偶帮助记忆

$$\begin{cases} \rho \longleftrightarrow \vec{J} \\ \mu_0 \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \\ \varphi \longleftrightarrow \vec{A} \end{cases}$$

$$\vec{J} dV = \vec{K} d\vec{S} = I d\vec{l}$$

真空中磁矢位的计算公式

$$\mathbf{A}=\int_V \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{J}\mathrm{d}V$$

$\longleftarrow$ $\mathbf{J}\mathrm{d}V=I\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathbf{K}\mathrm{d}S$ 称为元电流段

体电流产生

$\Downarrow$

$$\mathbf{A}=\int_l \frac{\mu_0}{4\pi R}I\mathrm{d}\mathbf{l}$$

线电流产生

$$\mathbf{A}=\int_S \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{K}\mathrm{d}S$$

面电流产生

真空中磁矢位的计算公式

$$\mathbf{A}=\int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} I\mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}=\int_S \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{K}\mathrm{d}S$$

$$\mathbf{A}=\int_V \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{J}\mathrm{d}V$$

即便是有了磁矢位的计算公式，

磁矢位的计算仍然超级困难！！！

在柱坐标和球坐标中，
矢量旋度的表达式很复杂

磁场计算要远比电场计算复杂，为什么？

① 计算电位为标量积分，计算磁矢位为矢量积分

② 电位计算场强为标量求梯度，磁矢位求磁感应强度为矢量求旋度

磁矢位用于分析磁场

如果已经求出$\mathbf{A}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$

斯托克斯旋度定理：

矢量旋度的面积分等于

矢量沿曲面边缘的闭合线积分。

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_l\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\int_S\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_l\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\Phi_m=\int_S\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\boxed{\Phi_m=\oint_l\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}$$

虽然磁矢位没有明确的物理意义，但可借助他将磁场的基本物理量磁感应强度和磁通量求解出来，达到目的

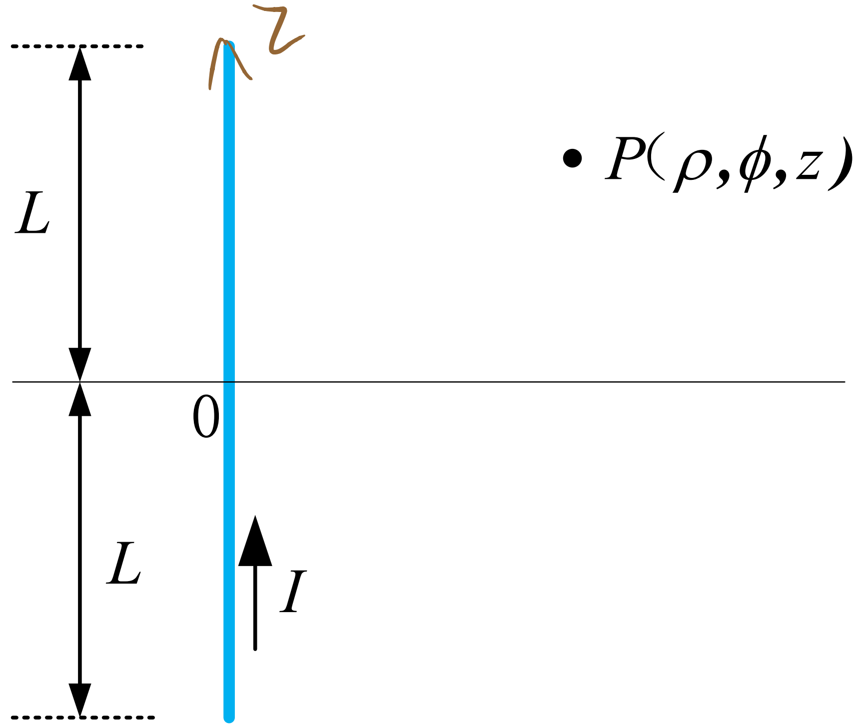
例题1：求空气中载流细导线在任意一点产生的磁感应强度B。

法一：毕萨拉定律.

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I d\vec{l} \times \vec{e}_R$、$\vec{r}$

为直线、积分运算简单

法二：泊松方程求解磁矢位A. 再求旋度得B、但本题形式简单、没有很必要



但实际应用中情况都很复杂、泊松方程的应用更有实际意义

例1：求空气中载流细导线在任意一点产生的磁感应强度B。

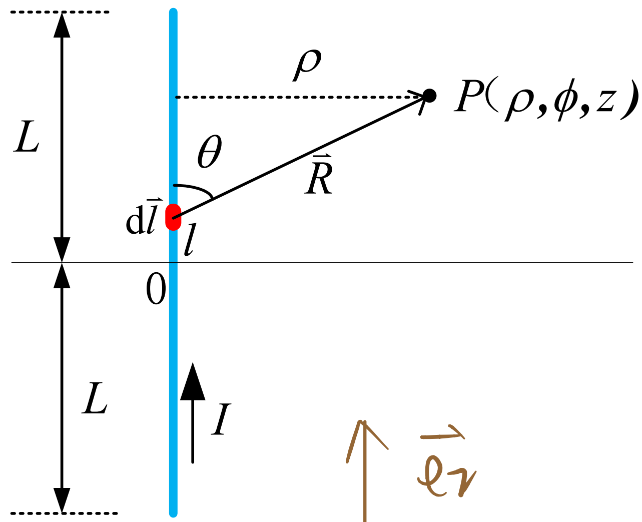
（通过磁矢位 A求解）

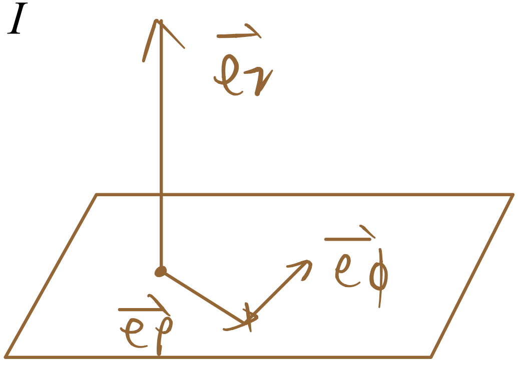
解： 对于元电流段 $\mathbf{A}=\int_{l}\frac{\mu_0}{4\pi R}Id\mathbf{l}$

$$A=A_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}l}{R}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}+L-z}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}-(L+z)}$$

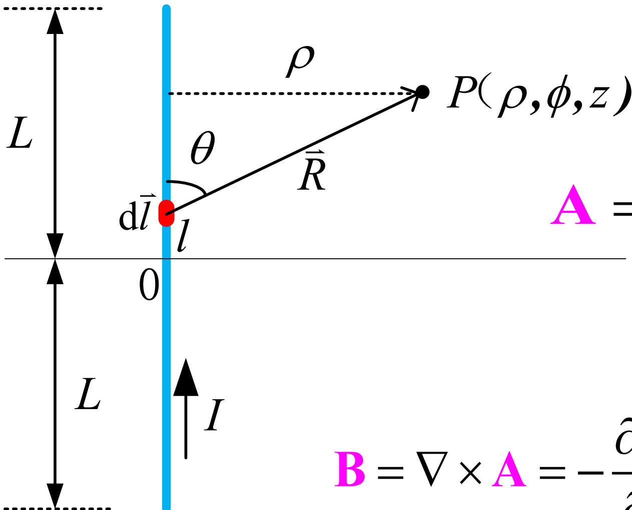




$\vec{e_\rho}\times\vec{e_\phi}=\vec{e_z}$

例1：求空气中载流细导线在任意一点产生的磁感应强度B。

（通过磁矢位 A求解）



$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}+L-z}{\sqrt{\rho^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}-(L+z)}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\phi$$

(圆柱坐标系矢量旋度公式见教材333页）

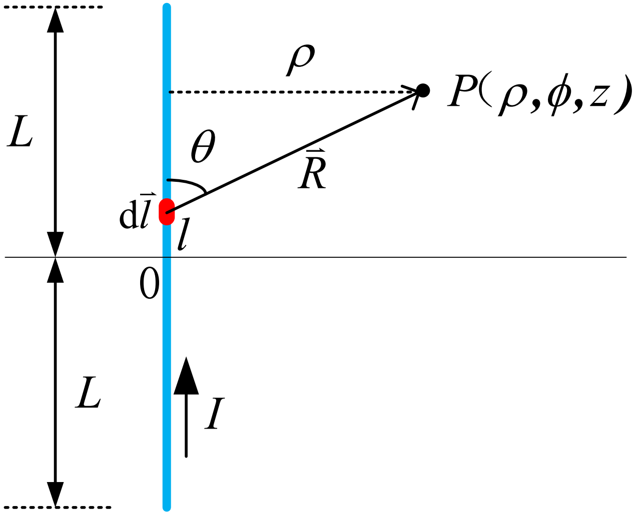
$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{z+L}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}}-\frac{z-L}{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}}\right\}\mathbf{e}_\phi$$

例1：求空气中载流细导线在任意一点产生的磁感应强度B。

(通过毕奥萨伐尔定律求解）

毕奥-萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{e}_\mathbf{R}=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}I\mathrm{d}l\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$$

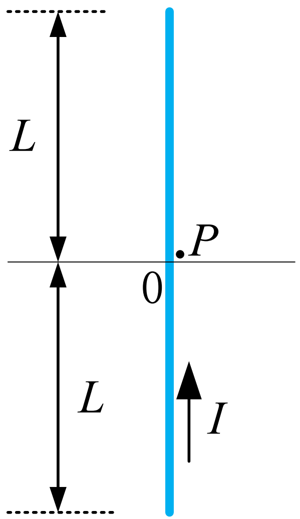


$$R=\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}\qquad \sin\theta=\frac{\rho}{R}$$

$$\mathbf{B}=\int\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I\mathbf{e}_\phi}{4\pi R^2}\int_{-L}^{L}\frac{\rho}{\left[\rho^2+(z-l)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}l$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{z+L}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}}-\frac{z-L}{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}}\right\}\mathbf{e}_\phi$$

例1（特殊情况）：求空气中载流的很长的细导线在导线附近产生的磁感应强度B。



$$A=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}+L-z}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}-(L+z)}$$

$$A=A_z\approx\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2L}{\rho}\ (L>>\rho,L>>z)$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi$$ (圆柱坐标矢量旋度见教材333页）

其实对于以上特殊情况，可以直接用安培环路定律求解瞬间即可完成，那为什么还要用磁矢位计算呢？

不为什么，其实就是为了算而算！

引入磁矢位的主要原因！

- 对于简单的磁场计算例子，通过磁矢位计算磁场是杀鸡用牛刀，更费劲！
- 引入磁矢位的主要目的不是为了计算简单例子，而是为了计算复杂例子，越复杂的例子，磁矢位的优势越大，毕竟其体积分、面积分和线积分要比毕奥萨伐尔定律的叉乘再积分要容易！！
- 引入磁矢位计算复杂例子更重要的实际价值是磁矢位满足泊松方程（或拉普拉斯方程），泊松方程（拉普拉斯方程）易于通过数值方法求解，也就是通过计算机求解。

作业十二

1. 谈谈引入磁矢位的原因，并写出磁矢位满足的泊松方程。
2. 写出线电流、面电流和体电流对应的磁矢位表达式
3. 写出磁感应强度、磁通量与磁矢位的关系式。
4. 教材3-4-1（场域的磁导率为真空中的磁导率）