10 恒定电场的定义和方程

邹建龙

主要内容

- 恒定电场的概念
- 导电媒质的电流和电流密度
- 电荷守恒定律
- 电流连续性方程
- 对恒定电场的再认识
- 电源电动势与局外场强
- 电场强度的环路积分
- 微观欧姆定律
- 恒定电场的基本方程（积分形式）
- 对散度、旋度和梯度的重新审视
- 恒定电场的基本方程（微分形式）
- 恒定电场基本方程（重新审视）

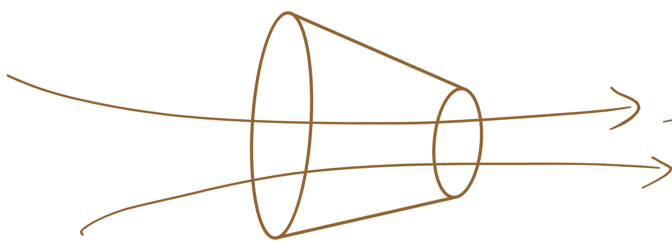
恒定电场的定义与方程

- **微观描述**
  - 恒定电流产生的电场
  - $$I=\oint_S \vec{J}\,d\vec{S}$$
    KCL的电磁场证明
  - $$\oint_l \vec{E}d\vec{l}=0$$
    KVL的电磁场证明
  - $$\vec{J}=\gamma\vec{E}$$
    微观欧姆定律（电导率）
- **电场方程**
  - 亥姆霍兹定理：散度、梯度、边界条件
  - $$\begin{cases}\oint_S \vec{J}\,d\vec{S}=0\\ \oint_l \vec{E}d\vec{l}=0\\ \vec{J}=\gamma\vec{E}\end{cases}$$
    积分形式的基本方程
  - $$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{J}=0 & \text{无散场}\\ \nabla\times\vec{E}=0 & \text{无旋场}\end{cases}$$
    微分形式的基本方程

恒定电（流）场

- 恒定电场是恒定电流场的简称
- 顾名思义，恒定电流场就是由恒定电流产生的电场
- 描述恒定电场电流的宏观量是电流*I*
- 描述恒定电场电流的微观量是电流面密度*J*

恒定电场不是静电场、但有与静电场类似的性质



J，反映微观

导电媒质中的电流和电流密度

$$I = \frac{dq}{dt}$$

电流的概念仅是宏观描述，
无法描述每一个点的情况。

$$dI = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

J称为电流面密度，是矢量，类似B和D。

$$\boxed{I = \int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}}$$

$\vec{J}$ = 反映横截面上各点、电流的分布情况

$I=\int_s \vec{J}\cdot d\vec{s}$

外法线方向上投影才可以说是"穿过"

I是$\vec{J}$的通量

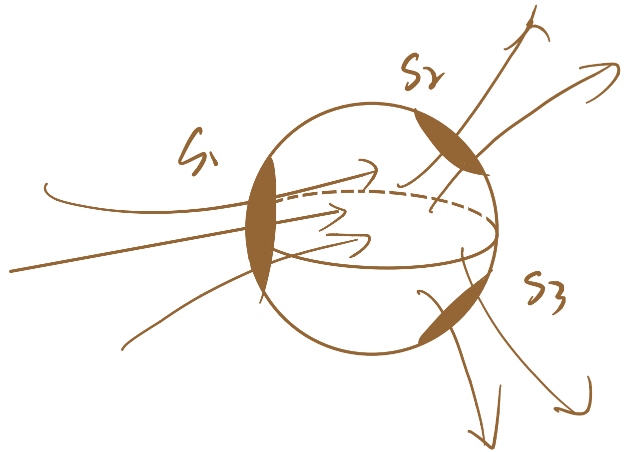
电荷守恒定律

假定一个封闭曲面内有电荷，电荷流出曲面，形成电流；则闭合曲面的总电流等于曲面内电荷随时间变化的减少率

负号反映减少率

$$I_{总}=\oint_{s}\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{dq}{dt}$$

$I_{总}$为封闭曲面的总电流



内外电荷量守恒

这就是电荷守恒定律。

$$\int_{s_1}\vec{J_1}\,d\vec{s_1}=\int_{s_2}\vec{J_2}\,d\vec{s_2}+\int_{s_3}\vec{J_3}\,d\vec{s_3}$$

（通用定律，对任何电磁场都成立）

电流连续性方程

电荷守恒定律： $\oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\dfrac{dq}{dt}$

对于恒定电流场而言，电流恒定，任意封闭曲面的流入电流=流出电流，因此任意封闭曲面的总电流等于零

$$I_{总} = \oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$I_{总}$为封闭曲面的总电流

电流恒定，曲面内外电荷量不变，J的通量必为0

这称为恒定电场的电流连续性方程

（对应于电路中的KCL） KCL的电磁场证明

对恒定电场的再认识

电流恒定，电荷分布不随时间改变，

由此产生的不随时间变化的电场称为恒定电场。

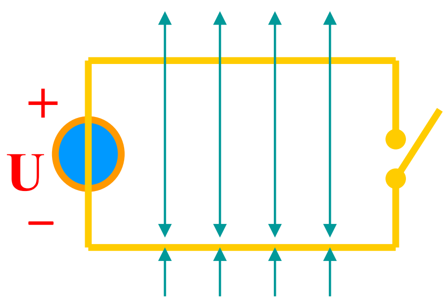
恒定电场与静电场的不同之处:

① **有推动自由电荷运动的电场存在，*E*不仅存在于导体外而且存在于导体中；**

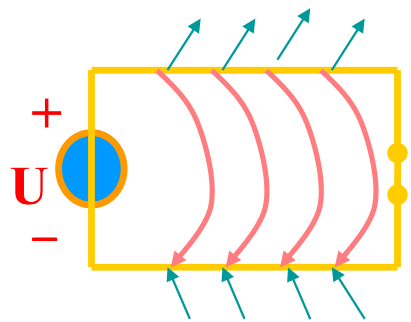
② **电流恒定说明流走的自由电子被新的自由电子补充，** 外置电源

空间电荷密度处于动态平衡，故场分布类似但又不同于静电场；

③ **恒定电场可以产生磁场，静电场不能产生磁场**



静电场

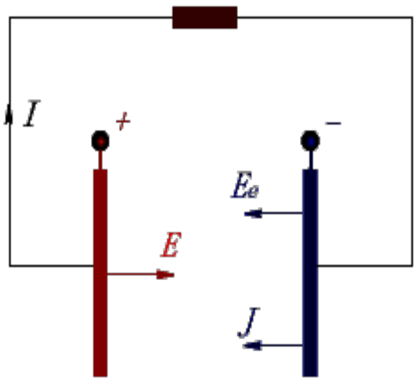


恒定电场

电源电动势与局外场强

电源： 提供非静电力，将其它形式的能转为电能的装置。

非静电力的作用是将正负电荷分开。



电源电动势与局外场强

局外场强： 作用于单位正电荷上的局外力

$$\mathbf{E}_{\text{external}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{external}}}{q}$$

电源中的总电场强度等于正负电荷之间的场强与局外场强之和，且等于零：

$$\mathbf{E}_{\text{电源内}} = \mathbf{E}_{\text{电源内常规}} + \mathbf{E}_{\text{external}} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{电源内常规}} = -\mathbf{E}_{\text{external}}$$

电源电动势 $emf = \int_l \mathbf{E}_{\text{external}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$

emf=电磁力

① 局外场强针对电源内部情况，外部电路没有局外场强

② 电源电动势是电场场强的线积分，与局外场强无关，局外场强产生的力为非静电力，为电路提供能量

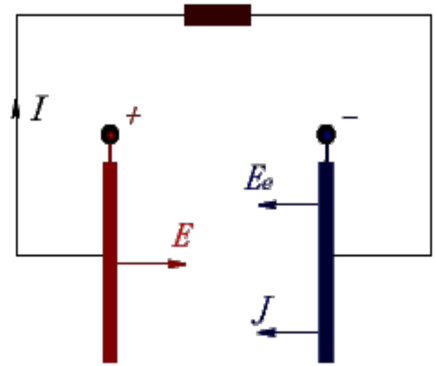
③ 以铜-锌原电池为例分析、

负极 $Zn - 2e^- = Zn^{2+}$

正极 $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$

化学能使 Cu^{2+}、SO_4^{2-} 分别移向正极和负极，克服静电力做功

电场强度的环路积分



电源内局外场强的线积分等于环路积分

$$emf = \int_l \mathbf{E}_{\text{external}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_{\text{external}} \cdot d\mathbf{l}$$

外电路局外场强为0

常规电场强度的环路积分 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

如果环路中含有电源，电场强度的环路积分

$$\oint_l (\mathbf{E}_{\text{external}} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = emf$$

$$\mathbf{E}_{\text{电源内常规}} = -\mathbf{E}_{\text{external}}$$

$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U$

$$\oint_l (-\mathbf{E}_{\text{电源内常规}} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = emf \;\Rightarrow\; \int_l \mathbf{E}_{\text{电源外常规}} \cdot d\mathbf{l} = emf$$

如果环路中不含电源 $\boxed{\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0}$

这对应于电路中的KVL

KVL的电磁场证明

微观欧姆定律

$U = RI$　　宏观欧姆定律只能看整体，不能看到每个点的特征

$\Downarrow$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\gamma S}$$

$R = \rho \frac{l}{S}$，$\gamma = \frac{1}{\rho}$，电导率

$\Downarrow$

$$\Delta R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}}{\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}} = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}$$

可人为选取 $\Delta\vec{l}$ 与 $\vec{E}$ 同向.

$\Delta\vec{S}$ 与 $\vec{J}$ 同向

$\Downarrow$

$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, γ称为电导率

微观欧姆定律

恒定电场的基本方程（积分形式-宏观）

恒定电场的电流连续性方程

$$\oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

电场强度的环路积分等于零

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

微观欧姆定律

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$$

J与E方向相同，仅相差一个常数

描述恒定电场的两个基本物理量是J和E

恒定电场的基本方程

（积分形式）

$$\oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$$

对散度、旋度、梯度的重新审视

高斯散度定理：矢量散度的体积分等于矢量沿体积外表面的闭合面积分。

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathrm{d}V = \oint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

第二型面积分

斯托克斯旋度定理：矢量旋度的面积分等于矢量沿曲面边缘的闭合线积分。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

第二型线积分

梯度定理（自命名）：标量梯度的线积分等于标量（点）之差。

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_l \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

矢量恒等式：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

矢量旋度的散度等于零

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

标量梯度的旋度等于零

点 $\longleftrightarrow$ 线 $\longleftrightarrow$ 面 $\longleftrightarrow$ 体

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_l \nabla\varphi \cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_1 = \int_1^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}\,,\quad \varphi_2 = \int_2^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}\,,\quad \vec{E} = -\nabla\varphi.$$

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_1^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 \nabla\varphi\, d\vec{l} + \int_1^0 \nabla\varphi\, d\vec{l}$$

$$= \int_1^2 \nabla\varphi\, d\vec{l}$$

恒定电场的基本方程（微分形式-微观）

恒定电场的基本方程（积分形式）

$$\oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=0 \qquad \oint_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_V(\nabla\cdot\mathbf{J})dV \qquad \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \qquad \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{J}dV=0 \qquad \int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}=0$$

$$\nabla\vec{E}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma\nabla\vec{J}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla\vec{J}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{E}=0$$

恒定电场的基本方程（微分形式）

$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ 无散场

$\nabla\times\mathbf{E}=0$ 无旋场

$\mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}$

作业八

1. 恒定电场和静电场有何不同?
2. 写出电荷守恒定律
3. 写出恒定电场的基本方程（积分形式和微分形式），并解释物理意义
4. 谈谈你对散度、旋度和梯度的理解