3 静电场方程和求解（1）

-电位

Potential

邹建龙

主要内容

- 电场强度的环量（即闭合线积分）
- 斯托克斯旋度定理和静电场中电场强度的旋度
- 真空中静电场的基本方程（微分形式）
- 为什么要引入电位的概念？
- 静电场中电位的引入过程
- 电位的物理意义
- 电位和电场强度的计算

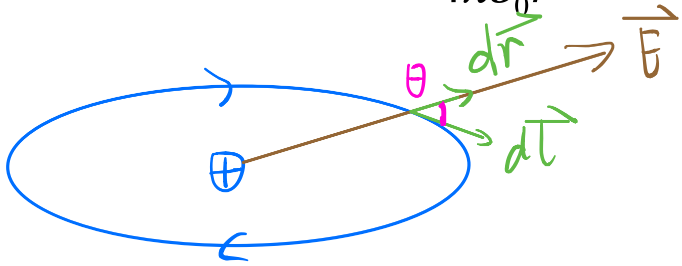
静电场中电场强度的环量（闭合线积分）

- 真空中点电荷产生的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

- 点电荷电场强度的环量（闭合线积分）：

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_A^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_A^A \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_A} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_A}\right) = 0$$



$\vec{e_r}\,\vec{dl}$

$= dl\cdot\cos\theta = dr$

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0}$$

场强的环量为0，反映静电场为无旋场

- 根据叠加定理，对于任意电荷分布，以上结论都成立！

斯托克斯旋度定理和静电场中电场强度的旋度

斯托克斯旋度定理（通用定理）　静电场电场强度闭合线积分

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

但时变电磁场的旋度不为0

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}$$

静电场电场强度的旋度等于零

真空中静电场的基本方程（微分形式）

旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 静电场为无旋场

高斯定律的微分形式

散度方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 静电场为有散场

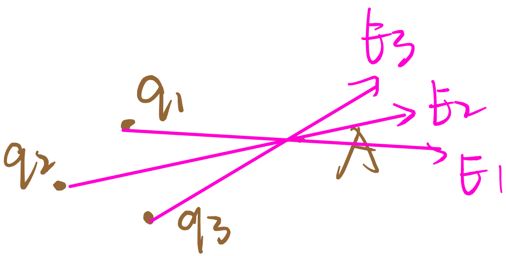
之所以需要给出旋度和散度，是根据亥姆霍兹定理！

在空间有限区域内的某一矢量，

由该矢量的旋度、散度和边界条件唯一确定。

为什么要引入电位的概念？

- **电场强度是矢量**，实在是**太难计算**了！尤其是涉及旋度的时候！
- 标量相对于矢量比较**容易计算**！电位就是为此引入的标量！
- 此外，电位恰好有非常**明确的物理意义**



电荷分布 ⟶ 场强

电荷分布 ⟶ 电位 ⟶ 场强

点数不多，但分析A处场强很复杂

静电场中电位的引入过程（数学引入）

矢量恒等式

静电场旋度方程　　标量梯度的旋度恒等于零：$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$

$$\nabla\times(-\nabla\varphi)=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$$

式中φ称为电位

E的方向由高电位指向低电位，负号表示方向

电位是为了计算电场强度矢量而引入的一个标量（中间量）

电位差的物理定义

- 在电场中将电荷从A点移动到B点，电场力做的功为

$$W=\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\int_A^B q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

- 电位差的物理定义：

单位正电荷从电场中一点移动到另一点，电场力所做的功。

$$\varphi_{AB}=\frac{W}{q}=\frac{q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}{q}=\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

电位差其实就是电路中的电压。

电势能= 量值上等于把电荷从该点移动到电势能参考点时，静电力做的功

电位的物理定义

- 电位的定义：

单位正电荷从电场中的某一点移动到参考点处，电场力所做的功。

$$\varphi_A = \int_A^{\mathrm{Ref}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

参考点的电位为0、电势能也为0

- 电位参考点可以任意选择，但是同一问题一般只选取一个参考点。
- 电位参考点虽然可以任意选择，但一般应使电位表达式越简单越好
- 工程中一般以大地作为电位参考点，

大地近似无穷远

- 理论计算时，如果电荷在有限区域内，一般以无穷远作为电位参考点

$$\varphi_A = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电位物理定义和数学定义的联系

$$\varphi_A = \int_A^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_\infty^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \Rightarrow d\varphi = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad \mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z$$

$\varphi = \int d\varphi$

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$$

全微分

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \quad = \quad -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \rightarrow \mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) = -\nabla\varphi$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi}$$

这恰好是电位的数学定义，也就是说电位的数学定义和物理定义是等价的，殊途同归！

静电场中电场力做功与路径无关

➢ 真空中点电荷产生的电场强度

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

静电力是保守力、静电场是保守场

➢ 真空中点电荷产生的电位差

$$\varphi_{AB}=\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{l}=\int_{r_A}^{r_B}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

静电场中电场力做功与路径无关

➢ 闭合路径的电位差：

回路也是闭合路径

$$\varphi_{AA}=\int_A^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_A}\right)=0$$

KVL方程

$$\varphi_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\int_A^{\infty}\vec{E}d\vec{l}-\int_B^{\infty}\vec{E}d\vec{l}=\int_A^{\infty}\vec{E}d\vec{l}+\int_{\infty}^{B}\vec{E}d\vec{l}=\int_A^B\vec{E}d\vec{l}$$

电位的计算

$$\varphi_A = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\varphi_{AB} = \int_A^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

点电荷产生的电位：

$$\varphi_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_B}$$

与q成线性关系

电位满足叠加定理

体电荷产生的电位：

$$\varphi = \int_{V'} \frac{\rho dV'}{4\pi\varepsilon r}$$

面电荷产生的电位：

$$\varphi = \int_{S} \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon r}$$

电位是标量，电场强度是矢量，所以电位相对于电场强度而言更容易求解

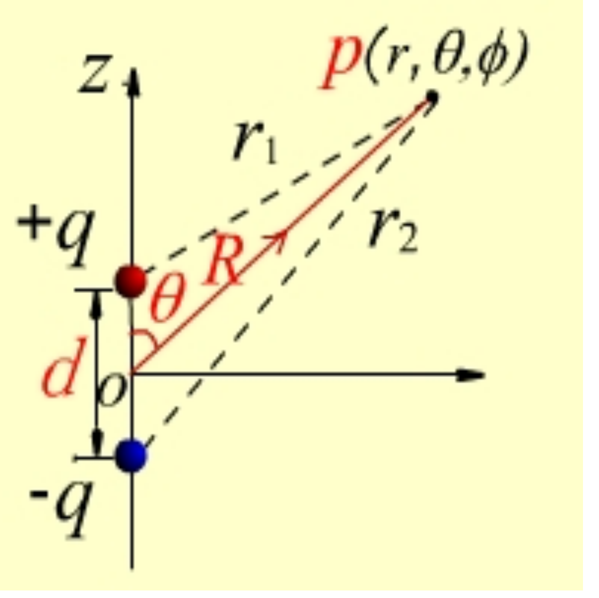
实际中常常先计算电位，再根据电位和电场强度的关系计算电场强度；

如果电场强度很容易计算，则可以先求电场强度，再求电位。

电位计算例1 两点电荷$+q$和$-q$相距为d。当$r>>d$时，这一对等量异号的电荷称为电偶极子。计算任意点P处的电位和电场强度。

解： 根据叠加原理，***P***点电位：

$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$



电偶极子

因**r>>d**，故有

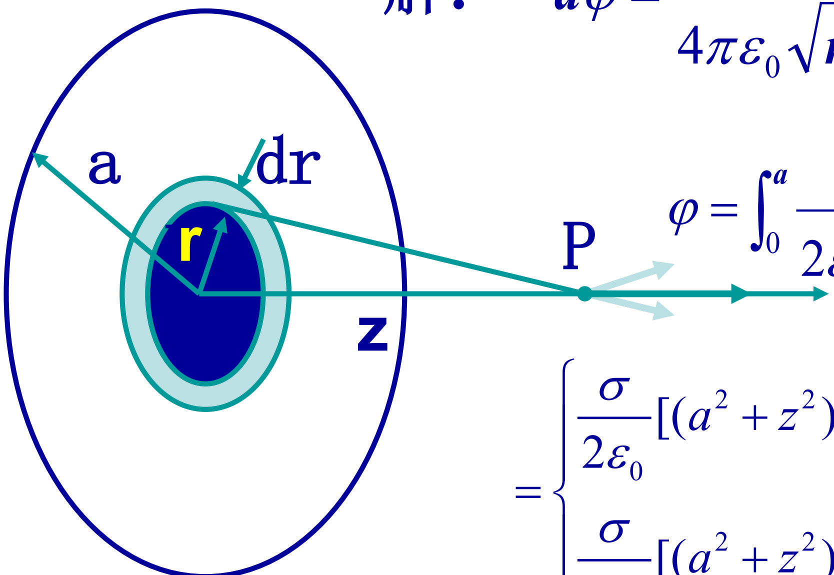
称为电偶极矩，大小为qd
方向由负电荷指向正电荷

$$\varphi_p = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_R}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

球坐标系中 $$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{E}_p = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$$

电位计算例2 求电荷面密度为σ，半径为a的均匀带电圆盘轴线上的电位和电场强度。



解： $$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\varphi = \int_0^a \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{r^2+z^2}\Big|_0^a$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(a^2+z^2)^{1/2}-z] & (z>0) \\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(a^2+z^2)^{1/2}+z] & (z<0) \end{cases}$$

圆盘中心的电位

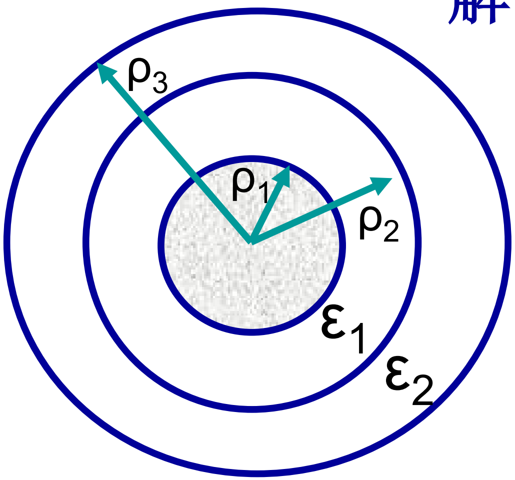
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}a$$

$$\mathbf{E} = E_z\mathbf{e}_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1] & (z>0) \\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1] & (z<0) \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_z & z=0^+ \\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_z & z=0^- \end{cases}$$

电位计算例3

已知单芯电缆内导体与外壳导体之间的电压为U，试求单芯电缆的电场分布。



解: $$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi\rho l D = \tau l$$ τ: 线密度

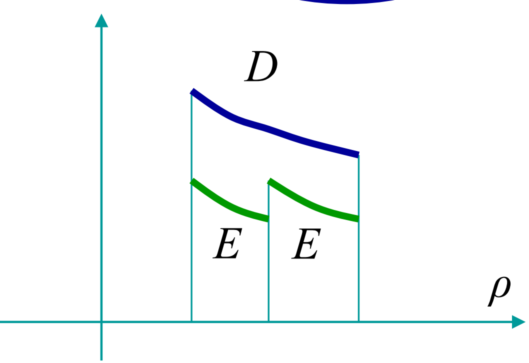
$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\rho} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\rho}$$

$$U = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_1 \mathrm{d}\rho + \int_{\rho_2}^{\rho_3} E_2 \mathrm{d}\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = \frac{U}{\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_1}\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_2}\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}}$$

$$\Downarrow$$

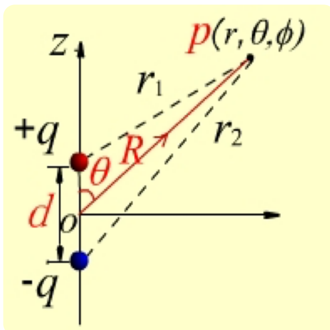


$$E_1 = \frac{U}{\rho\left(\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right)} \qquad E_2 = \frac{U}{\rho\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right)}$$

电缆绝缘采用多层电介质比单层好，因为电场强度分布更合理

例题

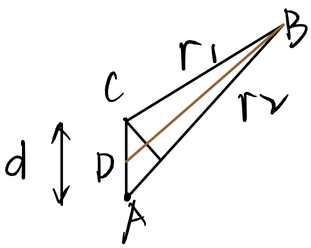
1、



⊕ ⊖ $\xrightarrow{\vec{l}}$ ⊕ $\vec{p} = q\vec{l}$

$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$, $r_1 \approx r_2 = r$

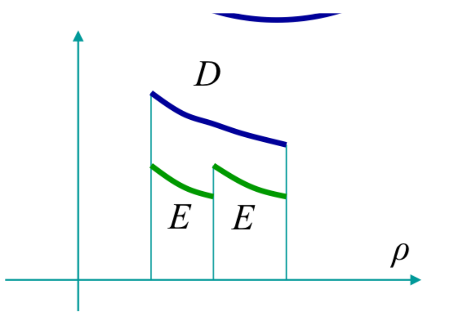
$\therefore r_1 r_2 \approx r^2$



$\angle CAB \approx \angle CDB = \theta$ $\therefore r_2 - r_1 \approx d\cos\theta$

$\therefore \varphi_p = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_R}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

3、设线密度τ → 表示E → 求U → 反推得E



单层介质一直减小。

双层介质在界面有突变。

总体而言场强分布更加均匀

作业二

1. 写出静电场中电场强度闭合线积分为零的数学表达式。
2. 写出静电场的基本方程
3. 写出电位的数学定义和物理定义
4. 解释电压（电位差）的物理意义。
5. 分别写出点电荷和体电荷电位的表达式。
6. 教材1-1-3、1-2-2、1-2-3