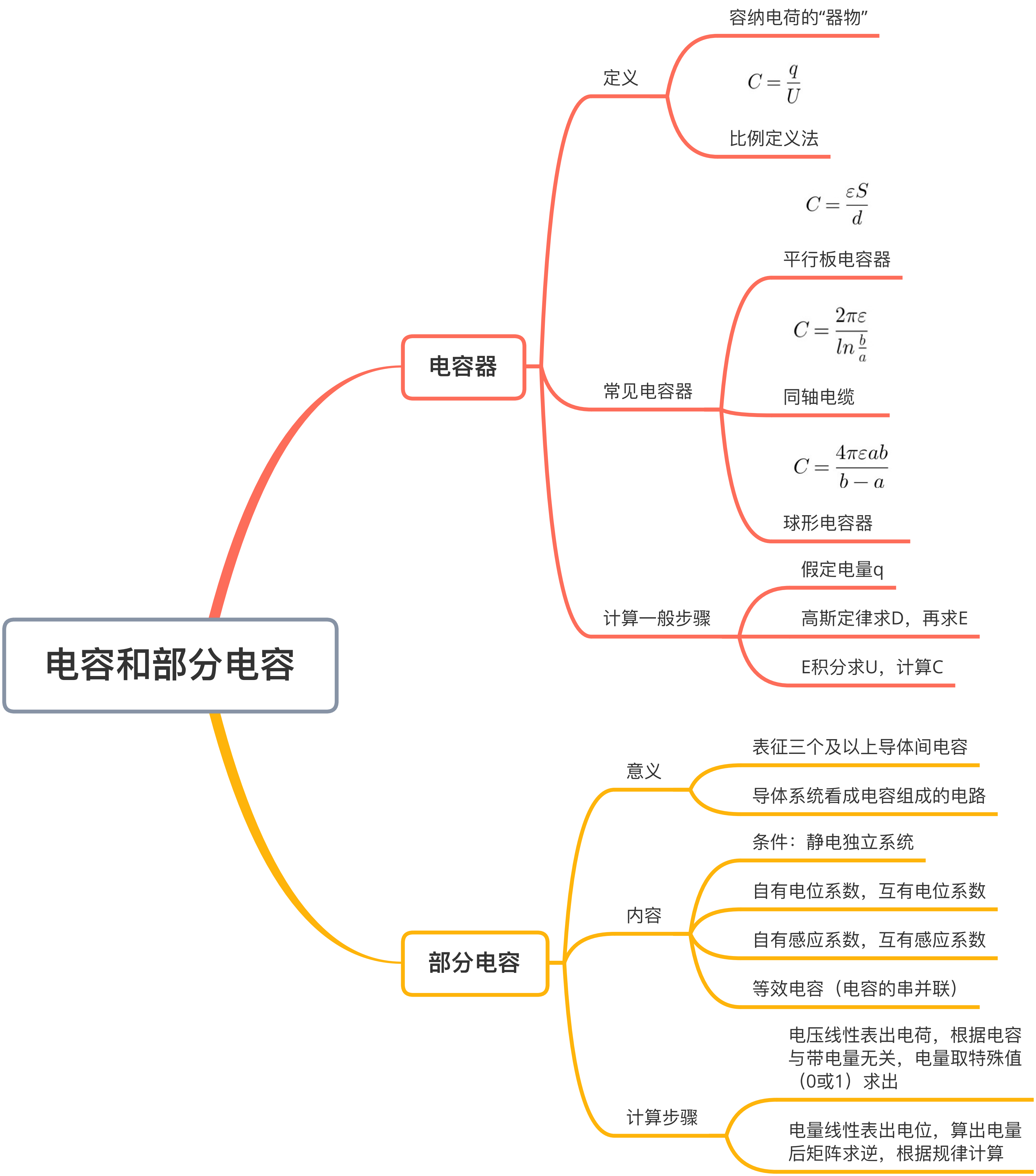
9 静电场的应用

-电容和部分电容

邹建龙

主要内容

- 电容器和电容
- 为什么要定义部分电容？
- 部分电容
- 静电屏蔽


电容和部分电容
电容器
定义
容纳电荷的“器物”
$C=\frac{q}{U}$
比例定义法
常见电容器
$C=\frac{\varepsilon S}{d}$
平行板电容器
$C=\frac{2\pi\varepsilon}{ln\frac{b}{a}}$
同轴电缆
$C=\frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$
球形电容器
计算一般步骤
假定电量q
高斯定律求D，再求E
E积分求U，计算C
部分电容
意义
表征三个及以上导体间电容
导体系统看成电容组成的电路
内容
条件：静电独立系统
自有电位系数，互有电位系数
自有感应系数，互有感应系数
等效电容（电容的串并联）
计算步骤
电压线性表出电荷，根据电容与带电量无关，电量取特殊值（0或1）求出
电量线性表出电位，算出电量后矩阵求逆，根据规律计算

电容器和电容

- 电容器就是能够容纳电荷的器物。
- 电荷可以形成电场和电位，因而电容器也可以。
- 常见的电容器一般为导体。
- 教材中出现最多的电容器就是平行板电容器。
- 电容是用来表征电容器容纳电荷能力的参数。
- 电容等于电量除以电压。 $C = \dfrac{q}{U}$

电容器和电容

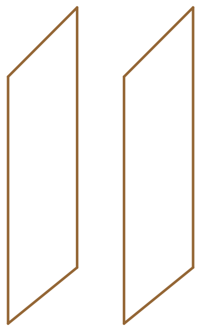
- 电容等于电量除以电压。 $C = \dfrac{q}{U}$

- 平行板电容器电容 $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$

- 同轴电缆 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{b}{a}}$

- 两个同心球面 $C = \dfrac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$

① 平行板电容器

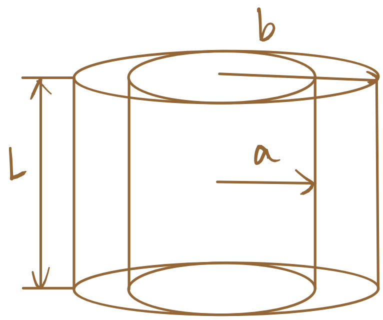


$$E = 2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$$

$$q = S\sigma$$

$$\therefore C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

② 同轴电缆



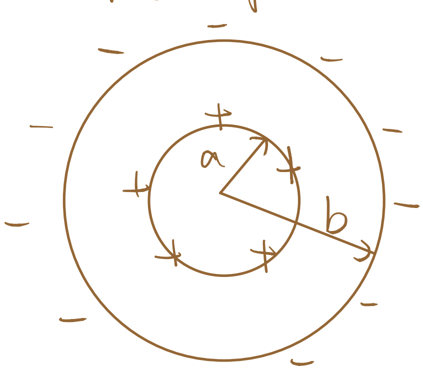
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}, \quad q = \tau L$$

$$U = \int_a^b \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{b}{a}$$

$$\therefore C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}$$

若是每单位长度电容,则没有L.

③ 同心球面



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2}$$

$$U = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{b-a}{ab}$$

$$\therefore C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

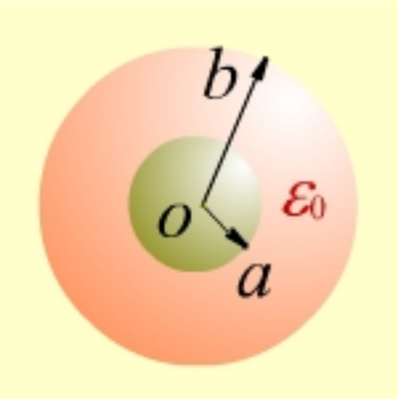
计算电容的一般步骤

1. 首先假定电量为q
2. 根据高斯定律求D，与q有关
3. 再根据D求E，与q有关
4. 再根据E的线积分求U，与q有关
5. 最后$C=U/q$

设q

$D \longrightarrow E \longrightarrow U \longrightarrow C = \frac{q}{U}$

电容例1 试求同心球壳电容器的电容。



同心球壳电容器

解： 设内导体的电荷为 q ，则

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \ , \ \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

同心球壳间的电压 $U = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

球形电容器的电容 $\boxed{C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}}$

当 $b \to \infty$时 $\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 a}$ （孤立导体球的电容）

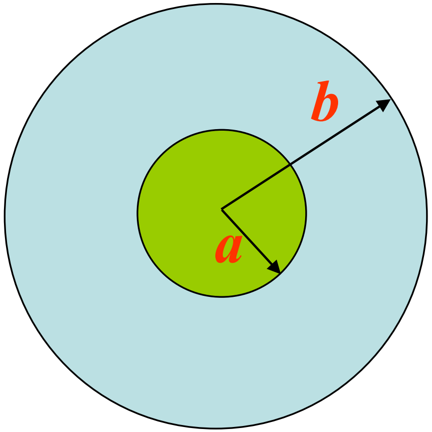
电容例2 试求无限长同轴圆柱导体间每单位长度的电容。内外导体间介质的介电常数为 ε

解：设内导体每单位长度电荷为 τ，则

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \tau l$$

$$2\pi r l \varepsilon E = \tau l$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon}$$



内外圆柱导体间的电压 $U = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$

每单位长度的电容

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

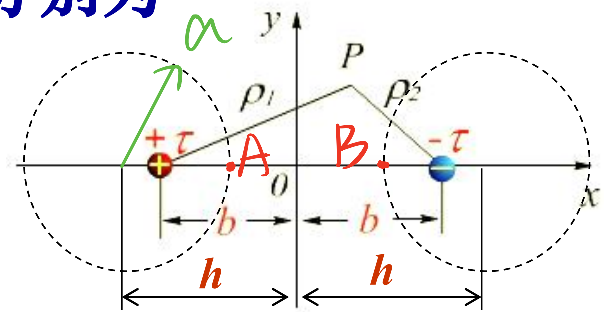
电容例3 试求解二线传输线的电容。

解： 带有正负电荷 τ 的导线电位分别为

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} \quad \varphi_A$$

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-(h-a)}{b+(h-a)} \quad \varphi_B$$

此处用到电轴法例1结论



两根带电细导线

两线间的电压 $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}$

二线传输线每单位长度的电容 $C = \dfrac{\tau}{U} = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}$

h*>>*a*（传输线半径），*b*≈*h $\boxed{C \approx \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln(2h/a)}}$

为什么要定义部分电容？

部分电容概念的意义

1、指出电容概念的本质：除非被静电屏蔽，任何导体与地大地之间、任意两导体之间都可能存在电容

2、将场的概念与电路结合起来，可把导体系统看成由各个电容构成的电路

部分电容

- 三个或三个以上导体之间需要用部分电容表征。
- 我认为部分电容其实称呼为分布电容更直观形象！
- 部分电容可以定义的前提是系统为静电独立系统。
- 静电独立系统指与系统外带电体无关联，即电力线全部从系统内发出，在系统内终止。

与外界无任何联系 $\sum q_i = 0$

部分电容

对于线性系统，根据叠加原理：

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \cdots + a_{1k} q_k + \cdots + a_{1n} q_n$$

$$\varphi_k = \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \cdots + a_{kk} q_k + \cdots + a_{kn} q_n$$

$$\varphi_n = \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + \cdots + a_{nk} q_k + \cdots + a_{nn} q_n$$

矩阵求逆

$$q_1 = \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2 + \cdots + \beta_{1k} \varphi_k + \cdots + \beta_{1n} \varphi_n$$

$$q_k = \beta_{k1} \varphi_1 + \beta_{k2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{kk} \varphi_k + \cdots + \beta_{kn} \varphi_n$$

$$q_n = \beta_{n1} \varphi_1 + \beta_{n2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{nk} \varphi_k + \cdots + \beta_{nn} \varphi_n$$

$$q_1 = C_{10} \varphi_{10} + C_{11} \varphi_{11} + \cdots + C_{1k} \varphi_{1k} + \cdots + C_{1n} \varphi_{1n}$$

$$q_k = C_{k0} \varphi_{k0} + C_{k1} \varphi_{k1} + \cdots + C_{kk} \varphi_{kk} + \cdots + C_{kn} \varphi_{kn}$$

$$q_n = C_{n0} \varphi_{n0} + C_{n1} \varphi_{n1} + \cdots + C_{nk} \varphi_{nk} + \cdots + C_{nn} \varphi_{nn}$$

$$\varphi_{kj} = \varphi_k - \varphi_j$$

C_{kj}称为

第 k 个导体和第 j 个导体之间的部分电容

$$C_{kj} = C_{jk}$$

以 q_0、q_1、q_2、q_3 为例

$$\begin{cases} \varphi_{10} = a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 \\ \varphi_{20} = b_0q_0 + b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3 \\ \varphi_{30} = c_0q_0 + c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 \end{cases}$$

电势的叠加原理

$q_0 = -(q_1+q_2+q_3)$ n个电荷，只有n-1个电荷是独立的

$\varphi_{i0} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} q_j$，$i=1,2,3$

α_{ii} = 自有电位系数

α_{ij} = 互有电位系数

α_{ii}、$\alpha_{ij} > 0$

矩阵形式 $[\varphi] = [\alpha][q]$

α_{ij} 均为正值，仅与导体几何形状、相互位置及介质分布有关

矩阵作逆变换 $q_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} \varphi_j$

矩阵形式 $[q] = [\alpha]^{-1}[\varphi] = [\beta][\varphi]$

β_{ii} = 自有感应系数

β_{ij} = 互有感应系数

$\beta_{ii} > |\beta_{ij}|$

$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3$

$= (\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{13})\varphi_1 - \beta_{12}(\varphi_1-\varphi_2) - \beta_{13}(\varphi_1-\varphi_3)$

$= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}$

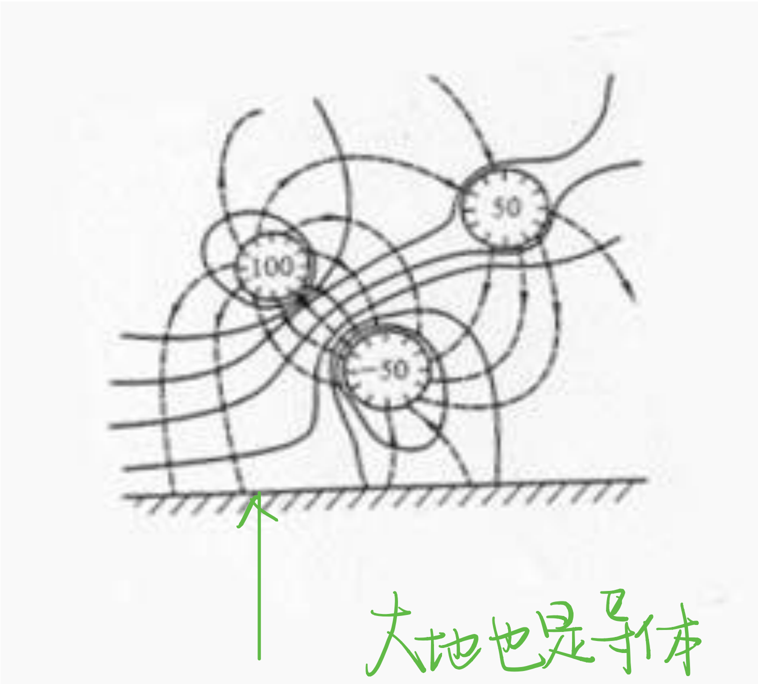
n+1个导体有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个部分电容（C_n^2）

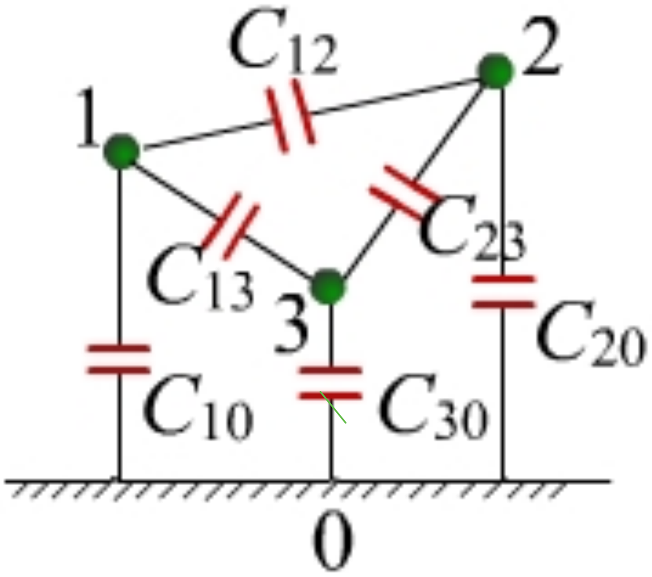
$q_i = \sum_{j=1}^{3} C_{ij} U_{ij}$，$C_{ij}$ 为部分电容

C_{ij} 均为正值，且 $C_{ij} = C_{ji}$

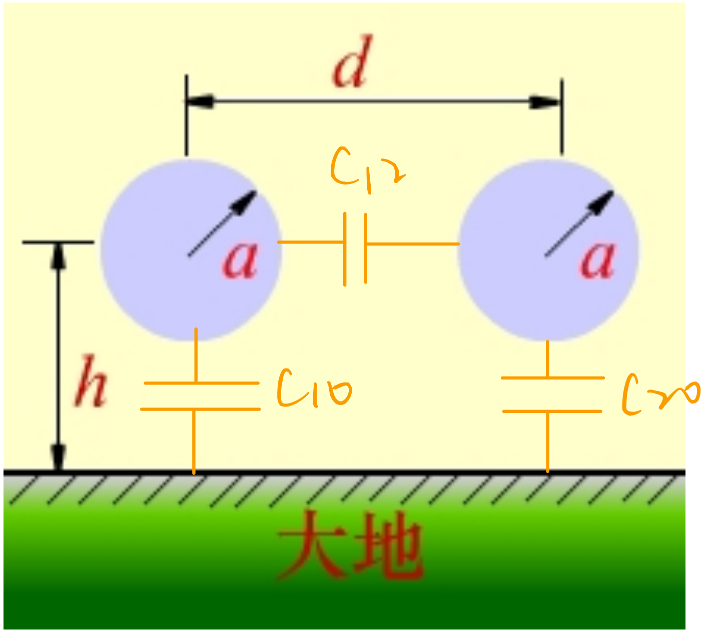
部分电容例1：

画出图示系统的部分电容的位置（部分电容网络）





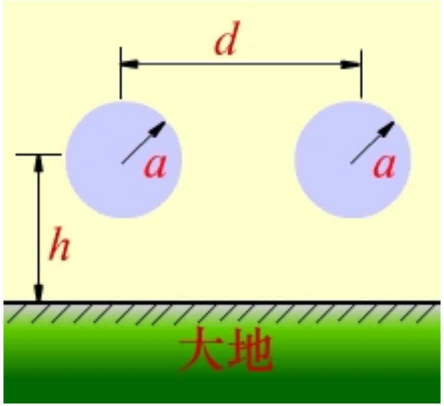
部分电容例2 试计算考虑大地影响时，两线传输线单位长度的部分电容及等效电容。已知$d>>a$，且$a<<h$。

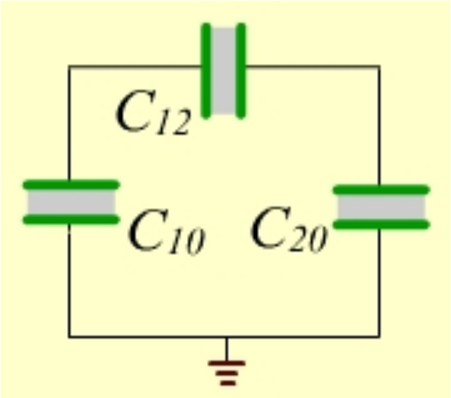


因对称性可知，$C_{10}=C_{20}$

$d>>a$，$a<<h$，分析时可作近似

部分电容例2 试计算考虑大地影响时，两线传输线单位长度的部分电容及等效电容。已知$d>>a$, 且$a<<h$。





解

部分电容个数为3

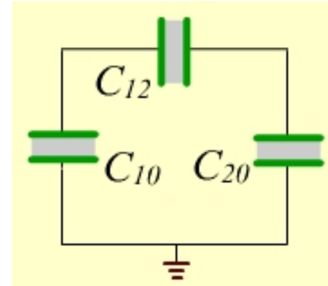
$C_3^2 = \frac{3\times 2}{2} = 3$

$$\begin{cases} \tau_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tau_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 \end{cases} \quad (1)$$

单位长度的部分电容

$q = \tau \times 1 = \tau$

$$\begin{cases} \tau_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tau_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 \end{cases} \quad (1)$$



线性无关

电容与带电量无关，故可设 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0$，则

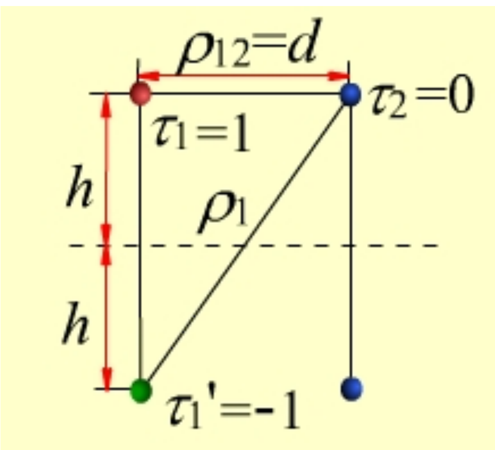
$$\begin{cases} 1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 = C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{10}\varphi_2 \end{cases} \quad (2)$$

利用镜像法，任意两导体间的电位差

镜像法+电轴法

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad ,(d >> a)$$

（由高斯定律例5电场强度公式积分得到）



$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a}$$

用圆心距代替ρ₁和ρ₂

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

两线输电线对大地的镜像

$$1 = C_{10} \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{2h}{a} + C_{12} \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{2hd}{a\sqrt{4h^2+d^2}}$$

$$0 = C_{12} \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{a\sqrt{4h^2+d^2}}{2hd} + C_{10} \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

可直接法计算、也可克莱姆法则计算

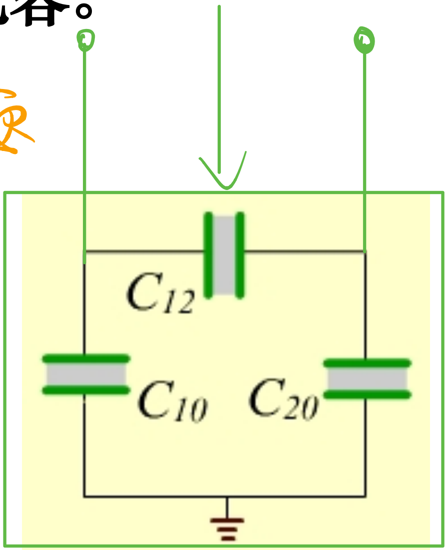
联立解得

$$C_{10} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\sqrt{4h^2+d^2}}{ad}} \qquad C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ln\left(\sqrt{4h^2+d^2}/d\right)}{(\ln\dfrac{2h}{a})^2 - (\ln\left(\sqrt{4h^2+d^2}/d\right))^2}$$

等效电容：多导体静电独立系统中，把两导体作为电容器两个极板，设在两极板上加已知电压U，极板上电荷分别为±q，则q/U称为这两导体间的等效电容。

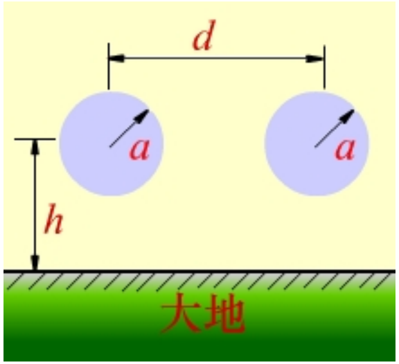
电容的串并联问题

两线间的等效电容：

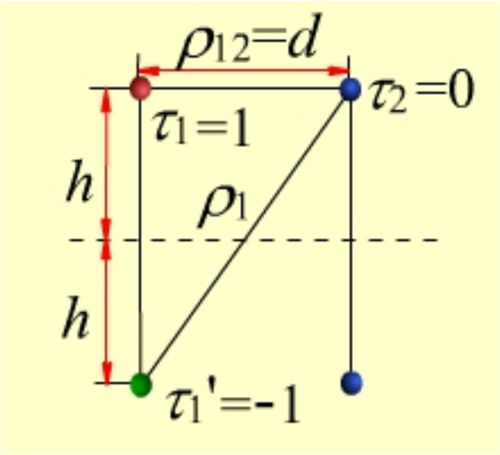


$$C_e = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{2h}{d}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}}\right)}$$

部分电容例2（解法2） **试计算考虑大地影响时，两线传输线的部分电容及等效电容。已知$d>>a$, 且$a<<h$。**



两线输电线及其电容网络



两线输电线对大地的镜像

解:
$$\begin{cases} \varphi_1 = a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 \\ \varphi_2 = a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 \end{cases}$$

令 $\tau_1=\tau$，$\tau_2=0$，则

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a}$$（由高斯定律例5电场强度公式积分得到）

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

$$a_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a} \qquad a_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

$\beta=\alpha^{-1}$（该公式以及后面的公式为教材48-49页公式结论）

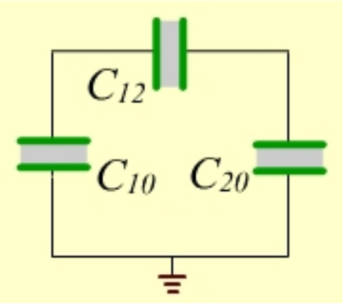
后面的公式根本记不住，除非考试时给出

$$C_{10}=C_{20}=\beta_{11}+\beta_{12}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h\sqrt{4h^2+d^2}}{ad}}$$

$$C_{12}=C_{21}=-\beta_{12}=\frac{2\pi\varepsilon_0\ln\left(\sqrt{4h^2+d^2}/d\right)}{(\ln\frac{2h}{a})^2-(\ln\left(\sqrt{4h^2+d^2}/d\right))^2}$$

两线间的等效电容：

$$C_e=C_{12}+\frac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{2h}{d}\cdot\frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}})}$$



课本 P48-49.

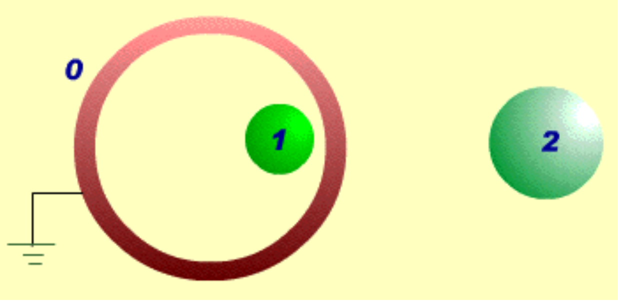
不建议用法二，麻烦

$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1n}$.

$C_{12} = -\beta_{12}$，$C_{13} = -\beta_{13}$，$C_{1n} = -\beta_{1n}$

矩阵求逆：解方程组法、初等行变换法、伴随矩阵法

静电屏蔽



静电屏蔽

三导体静电系统的方程为：

$$q_1 = C_{10}\varphi_{10} + C_{12}\varphi_{12}$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_{21} + C_{20}\varphi_{20}$$

令 $q_1 = 0 \Rightarrow \varphi_{10} = 0 \Rightarrow C_{12} = 0$

同理 $C_{21} = 0$

1 号与 2 号导体之间无电场联系，实现了静电屏蔽。

静电屏蔽就是将不希望受外部电场影响的部分用金属罩罩起来，被罩住的部分就不受金属罩外电场的影响了。

作业七

1. 谈谈你对电容和部分电容的认识和理解
2. 教材1-8-1
3. 教材1-8-2
4. 教材1-8-3