16 恒定磁场

-分界面衔接条件

邹建龙

主要内容

- 恒定磁场基本方程回顾
- 恒定磁场分界面的衔接条件
- 磁矢位在分界面的衔接条件

恒定磁场基本方程回顾

积分形式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$ $\Longrightarrow$ 磁场为有旋场

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$ $\Longrightarrow$ 磁场为无散场

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

媒质分界面上的衔接条件

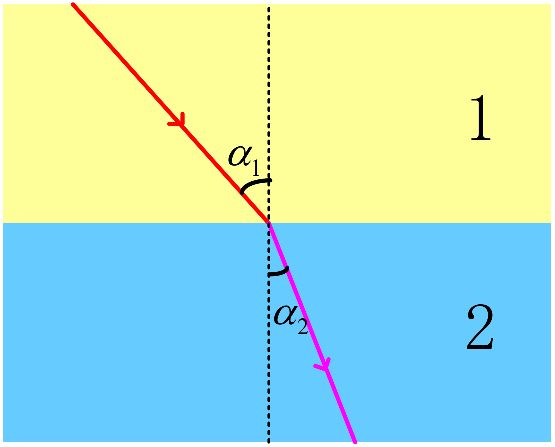
$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I = \int_l \mathbf{K}\cdot d\mathbf{l}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times\mathbf{e}_n = \mathbf{K}$$

$$\oint_s \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



如果分界面无面电流 $$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

磁矢位在分界面上的衔接条件

斯托克斯旋度定理：

矢量旋度的面积分等于

矢量沿曲面边缘的闭合线积分。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

高斯散度定理：

矢量散度的体积分等于

矢量沿体积外表面的闭合面积分。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I$$

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \Phi_{\mathrm{m}}$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

$$A_{1t} = A_{2t} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2} \Longleftarrow A_{1n} = A_{2n}$$

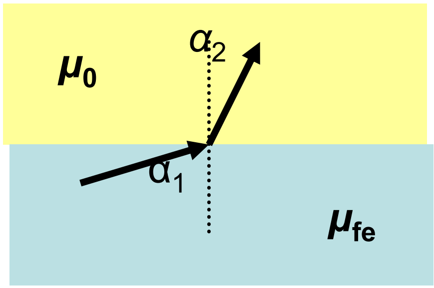
$$\boxed{\frac{(\nabla \times \mathbf{A}_1)_t}{\mu_1} - \frac{(\nabla \times \mathbf{A}_2)_t}{\mu_2} = K}$$

恒定磁场方程和分界面衔接条件例1：

分析铁磁材料与空气分界面情况。

恒定磁场方程和分界面衔接条件例1：

分析铁磁媒质与空气分界面情况。



铁磁媒质与
空气分界面

解： 折射定律 $\dfrac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

$$\tan\alpha_1=\frac{\mu_1}{\mu_2}\tan\alpha_2=\frac{\mu_{fe}}{\mu_0}\tan\alpha_2\to\infty$$

$$\Rightarrow\alpha_1\approx 90^0\quad（前提\alpha_2\neq 0）$$

$$\tan\alpha_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\alpha_1=\frac{\mu_0}{\mu_{fe}}\tan\alpha_1\to 0$$

$$\Rightarrow\alpha_2\approx 0^0\quad（前提\alpha_1\neq 0）$$

如果α_1=0,则α_2=0,
此时分界面两侧的
磁力线均与分界面垂直

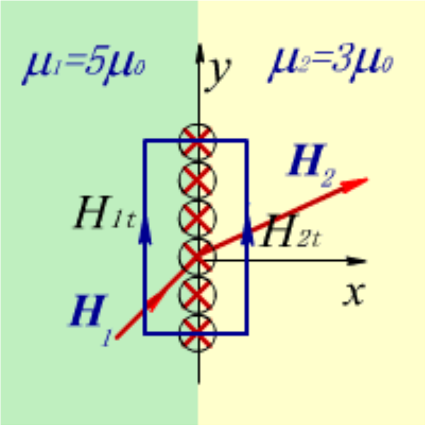
通常，铁磁媒质内磁力线几乎与分界面平行
空气中磁力线方向近似与分界面垂直

恒定磁场方程和分界面衔接条件例2：

在两种导磁材料分界面两侧， $\mu_1 = 5\mu_0 \quad \mu_2 = 3\mu_0$

面电流 $\mathbf{K} = -4\mathbf{e}_z$ **A/m** ，且 $\mathbf{H}_1 = 6\mathbf{e}_x + 8\mathbf{e}_y$ **A/m**，

试求 ***B*₁**，***B*₂**与 ***H*₂** 。



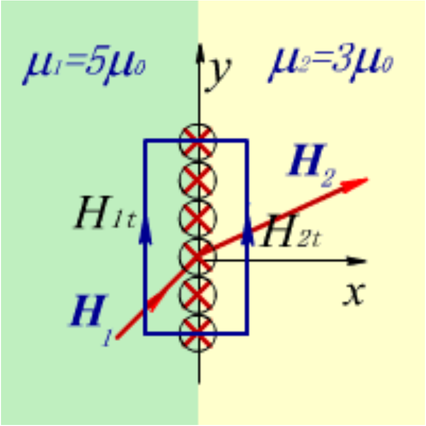
含有*K*的分界面
衔接条件

恒定磁场方程和分界面衔接条件例2：

在两种媒质分界面两侧， $\mu_1 = 5\mu_0 \quad \mu_2 = 3\mu_0$

面电流 $\mathbf{K} = -4\mathbf{e}_z$ A/m ，且 $\mathbf{H}_1 = 6\mathbf{e}_x + 8\mathbf{e}_y$ A/m，

试求 B_1，B_2与 H_2 。



含有K的分界面
衔接条件

解：$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 = 5\mu_0(6\mathbf{e}_x + 8\mathbf{e}_y)$

$$\because \quad B_{1x} = B_{2x} \quad \therefore \quad B_{2x} = 30\mu_0 \qquad H_{2x} = \frac{B_{2x}}{\mu_2} = 10$$

$$\because \quad H_{1y} - H_{2y} = K \quad \therefore \quad H_{2y} = H_{1y} - K = 8 - 4 = 4$$

$$\mathbf{H}_2 = H_{2x}\mathbf{e}_x + H_{2y}\mathbf{e}_y = 10\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mu_0(30\mathbf{e}_x + 12\mathbf{e}_y)$$

恒定磁场分界面衔接条件例3：

一半径为 a 的带电长直圆柱体，$\mathbf{J}=J\mathbf{e}_z$，试求用恒定磁场边值问题求解方法求解导体内外的磁矢位 **A** 与磁感应强度 **B** 。

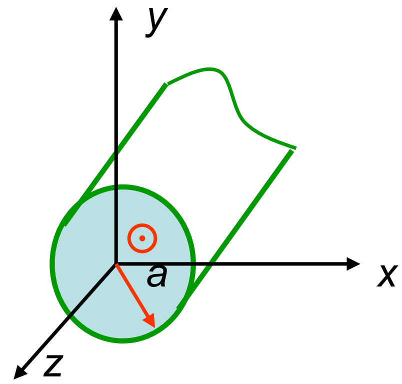
恒定磁场分界面衔接条件例3：

一半径为 a 的带电长直圆柱体，$\mathbf{J}=J\mathbf{e}_z$，试求用恒定磁场边值问题求解方法求解导体内外的磁矢位 **A** 与 磁感应强度 **B** 。

解: 采用圆柱坐标系, $\mathbf{A}=A_z\mathbf{e}_z$ 且 $A_z=f(\rho)$

$$\nabla^2 A_1=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial A_1}{\partial\rho})=-\mu_0 J \qquad \rho\le a$$

$$\nabla^2 A_2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial A_2}{\partial\rho})=0 \qquad \rho> a$$



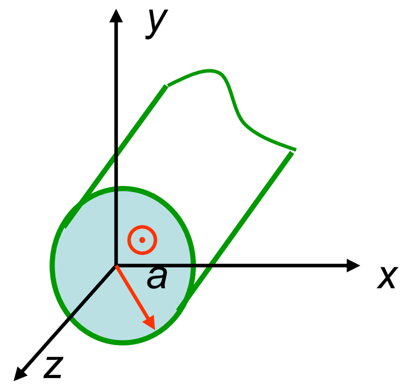
边界条件 $A_1\big|_{\rho=a}=0$ （参考磁矢位） **(1)**

$\rho\to 0$ ，A_1 有限值 **(2)**

衔接条件 $\rho=a$ $A_1=A_2$ $\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial A_1}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial A_2}{\partial\rho}$ **(3)**

$$\nabla^2 A_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial A_1}{\partial \rho}) = -\mu_0 J \qquad \rho \le a$$

$$\nabla^2 A_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial A_2}{\partial \rho}) = 0 \qquad \rho > a$$



$$A_1(\rho) = -\frac{\mu_0 J}{4}\rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2 \qquad A_2(\rho) = C_3 \ln \rho + C_4$$

代入边界和衔接条件可得 $\mathbf{A}_1 = \mu_0 J \frac{a^2 - \rho^2}{4}\boldsymbol{e}_z$, $\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2}\mu_0 J a^2 \ln\frac{a}{\rho}\boldsymbol{e}_z$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial \rho}\mathbf{e}_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 J \rho}{2}\mathbf{e}_\phi & \rho \le a \\ \frac{\mu_0 a^2 J}{2\rho}\mathbf{e}_\phi & \rho > a \end{cases}$$

作业十四

1. 写出恒定磁场的积分形式和微分形式
2. 写出恒定磁场分界面的衔接条件
3. 教材3-3-2
4. 教材3-3-3
5. 教材3-4-2
6. 教材3-4-3