6 静电场方程和求解（4）

-泊松方程、拉普拉斯方程、边值问题及其求解

邹建龙

主要内容

- 高斯定律的局限性
- 泊松方程和拉普拉斯方程的由来
- 对泊松方程和拉普拉斯方程的再认识
- 求解泊松方程用到的静电场边值问题
- 泊松方程或拉普拉斯方程求解——直接积分法（例题）
- 泊松方程或拉普拉斯方程边值问题描述（例题）
- 静电场问题数值求解方法——有限差分法

方程和求解

- **方程推导**
  - 原因：高斯定律为矢量运算，繁琐，转化为标量方程有利于求解
  - 推导关系式
    $$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$
- **方程内容**
  - 泊松方程
    $$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
  - 拉普拉斯方程
    $$\nabla^2 \varphi = 0$$
  - 直角坐标系、柱坐标系、球坐标系下的形式
    - 柱坐标， $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
    - 球坐标， $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}$
- **边值问题**
  - 第一类：给边界上电位值
  - 第二类：给边界上电位法向导数
  - 第三类：给电位和法向导数线性组合
- **边界条件**
  - 场域边界条件
  - 分界面衔接条件
    - $$\varphi_1 = \varphi_2$$
    - $$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma$$
  - 自然边界条件
    $$\lim_{r \to \infty} r\varphi < \infty$$

高斯定律的局限性

高斯定律的积分形式 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$

高斯定律的微分形式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

- 矢量微积分非常繁琐复杂
- 介质和导体上的电荷分布往往未知
- 如果能将矢量方程转化为标量方程，

  且对电荷分布没有要求，显然有利于求解

泊松方程和拉普拉斯方程的由来

电通量密度

与电场强度的关系

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \Longrightarrow \mathbf{D} = \varepsilon(-\nabla\varphi)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

电场强度

与电位的关系

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

高斯定律的微分形式

$$\nabla \cdot (-\varepsilon\nabla\varphi) = \rho$$

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\rho}{-\varepsilon}$$

泊松方程

如果 $\rho = 0 \Longrightarrow \nabla \cdot (\nabla\varphi) = 0$

拉普拉斯方程

对泊松方程和拉普拉斯方程的再认识

$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\dfrac{\rho}{-\varepsilon}$ 泊松方程

$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=0$ 拉普拉斯方程

泊松方程和拉普拉斯方程的变量只有一个标量——电位**φ**

而静电场的基本方程有两个，两个变量，且两个变量都是矢量，即**D**和**E**

$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$

只要通过求解泊松方程或拉普拉斯方程得到电位**φ**

就可以根据电位得到电场强度和电通量密度

$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$

列写方程

↓

解方程得φ

↓

求负梯度得E

对泊松方程和拉普拉斯方程的再认识

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\frac{\rho}{-\varepsilon}$$ 泊松方程

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=0$$ 拉普拉斯方程

$$\boxed{\nabla\cdot\nabla}\varphi=\frac{\rho}{-\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=0$$

柱坐标

$$\nabla^2\varphi=\frac{\rho}{-\varepsilon}$$

$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ 称为**拉普拉斯算子** 拉普拉斯算子是**标量算子**

直角坐标

$$\nabla=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\Longrightarrow\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\begin{cases}-\rho/\varepsilon & \text{泊松方程}\\ 0 & \text{拉普拉斯方程}\end{cases}$$

静电场边值问题

- 有了静电场的泊松方程或拉普拉斯方程，接下来就是如何求解
- 求解泊松方程或拉普拉斯方程的解，称为静电场边值问题
- 之所以称为边值问题，因为求解偏微分方程必须确定边界条件！
- 只要边界条件确定，结合方程本身，就可以求出方程的解。

解析解：通过严格的公式所求得的解

数值解：给出一系列对应的自变量，采用数值方法求出的解

静电场边值问题

- 边值问题
  - 偏微分方程
    - 泊松方程 $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$
    - 拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$
  - 边界条件
    - 场域边界条件
    - 分界面衔接条件
      - $\varphi_1 = \varphi_2$
      - $\varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \sigma$
    - 自然边界条件 $\lim\limits_{r\to\infty} r\varphi =$ 有限值
  - 初始条件

- 边界条件包含场域边界条件与分界面衔接条件（关于电位）两部分
- 任何一个电磁场问题，都有可能既需要考虑场域边界条件，也有可能需要考虑分界面衔接条件

静电场不需要初始条件

- 自然边界条件仅适用于场域延伸至无限远的情况
- 初始条件仅在时变电磁场用到

静电场边值问题——分界面电位的衔接条件

拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0$$

$\varphi_1 = \varphi_2$.

介质分界面上电位连续

泊松方程

$$\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{-\varepsilon}$$

因为拉普拉斯方程和泊松方程求解的变量是电位φ，所以需要求φ的分界面衔接条件，并且应该与E和D衔接条件等价。

在分界面两侧取距离趋于零的两个点，则 $\int_l \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \Rightarrow \boxed{\varphi_1=\varphi_2}$

1

dl

2

$E \to \infty$ 不可能

$$\Downarrow$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

分界面处，$D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$

$$\Downarrow$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \sigma}$$

σ扣时、电位的导数不连续

静电场边值问题——场域边界条件

拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0$$

泊松方程

$$\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{-\varepsilon}$$

第一类边值问题：已知边界上的电位值

$$\varphi|_s = f_1(s)$$

第二类边值问题：已知边界上电位法向导数（相当于知道电荷密度σ）

$$\sigma \leftarrow D_n \leftarrow E_n \leftarrow \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s = f_2(s)$$

第三类边值问题：给定电位和法向导数线性组合的值

$$\left.\left(\varphi+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right|_s = f_3(s)$$

泊松方程和拉普拉斯方程的求解-直接积分法

$$\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{-\varepsilon}$$ 泊松方程

$$\nabla^2\varphi = 0$$ 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

对于一维问题，可用直接积分法求解泊松方程和拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi=-\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2+Ax+B$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi=Ax+B$$

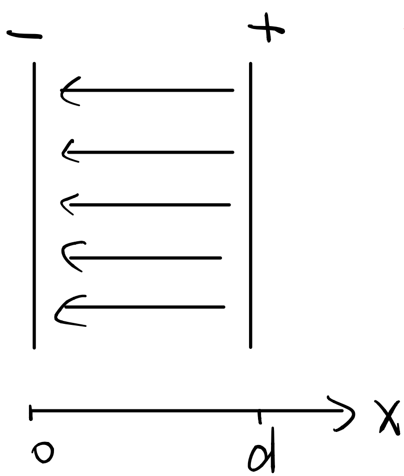
待定系数需要通过边界条件（三类，见电磁场和数学物理方程教材）求出，

类似动态电路求解微分方程需要用初始条件求待定系数

泊松方程和拉普拉斯方程的求解-直接积分法（适用于一维）

边值问题例题1：

已知平行板电容器电容平板面积S，平板间距离d，平板间电位差φ_0，平板间电介质介电常数ε，求平行板电容器平板间任意点的φ、**E**、**D**



拉普拉斯方程 $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \Longrightarrow \varphi=Ax+B \Longrightarrow A=\dfrac{\varphi_0}{d},B=0$

边界条件 $x=0,\varphi=0 \quad x=d,\varphi=\varphi_0$

$$\varphi=\frac{\varphi_0}{d}x$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\varphi_0}{d}\mathbf{e}_x$$

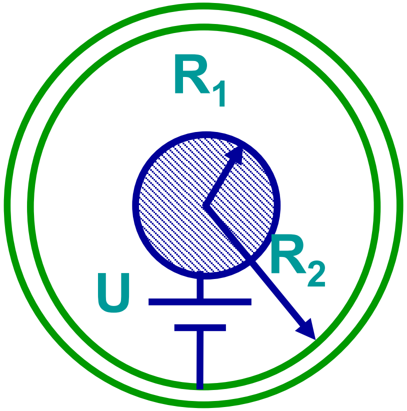
$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=-\varepsilon\frac{\varphi_0}{d}\mathbf{e}_x$$

默认负极板，电源负极板的电势为0

边值问题例2

一很长的同轴电缆截面，如图所示。求电场和电荷分布。

解：把电缆理想化为无限长，取圆柱坐标系，电位仅随r坐标变化。此时有：



$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=0$$

（此为圆柱坐标系拉普拉斯方程，与角度和z无关，参考教材333页）

边界条件

$r=R_1,\varphi=U$

$r=R_2,\varphi=0$

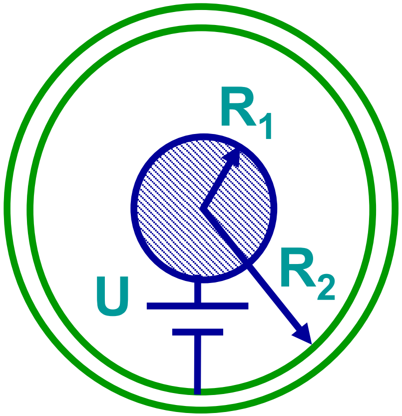
积分可得：

$\varphi=A\ln r+B$

代入边界条件可得：

$$A=\frac{-U}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}\qquad B=\frac{U\ln R_2}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

$$\varphi = \frac{U}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}(\ln R_2 - \ln r) = \frac{U\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}\mathbf{e}_r$$



在导体表面，$D=\sigma$，因此

$$r = R_1\text{处},\ \sigma = \frac{\varepsilon U}{R_1\ln(R_2/R_1)}$$

$$r = R_2\text{处},\ \sigma = -\frac{\varepsilon U}{R_2\ln(R_2/R_1)}$$

由于σ均匀分布，所以内外导体上每单位长度的电荷分布分别为

$$r = R_1\text{处},\ \tau = 2\pi R_1\sigma = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$r = R_2\text{处},\ \tau = 2\pi R_2\sigma = -\frac{2\pi\varepsilon U}{\ln(R_2/R_1)}$$

1、柱坐标系下，$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

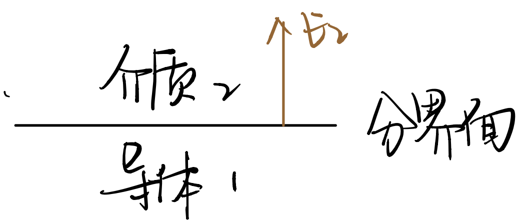
由结构的对称性，φ与θ、z无关

$\therefore \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$

$\therefore \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0$

$\therefore r\frac{d\varphi}{dr}=A$，$d\varphi = A\frac{dr}{r}$ $\therefore \varphi = A\ln r + B$

2、



$E_1=0 \longrightarrow E_n=0 \longrightarrow D_n=0$

$E_{2n}=E_2 \longrightarrow D_2=\varepsilon_2 E$

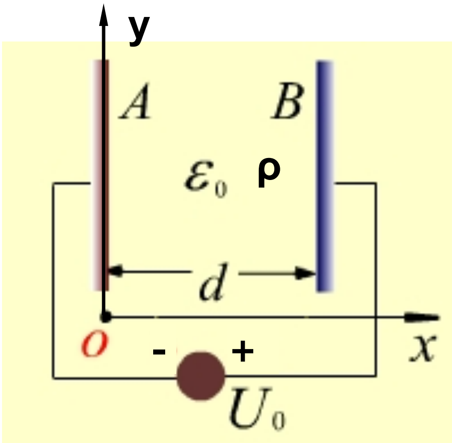
1、2界面要分清楚

$D_2-D_1=\sigma \longrightarrow D_2=\varepsilon_2 E=\sigma$

一般而言，电场线由导体指向介质，介质电位移矢量为σ

电场线由介质指向导体，介质的电位移矢量为$-\sigma$

边值问题例3 图示平板空气电容器（板的尺度远大于板间距离）中，有体密度为ρ的电荷均匀分布，已知两板间电压值为U_0。求电场分布。



平板空气电容器

解： 边值问题 $$\nabla^2\varphi=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi\big|_{x=0}=0$$

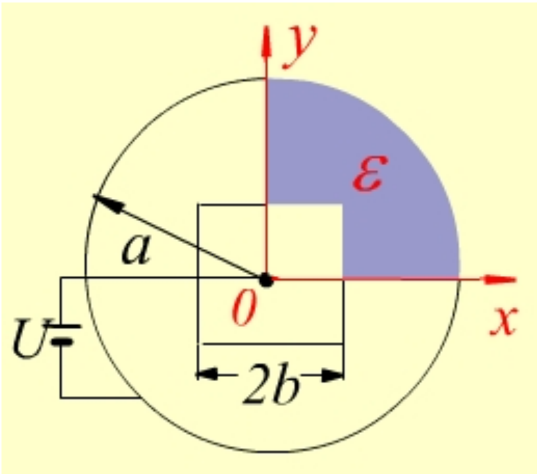
$$\varphi\big|_{x=d}=U_0$$

求解得到

$$\varphi=-\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2+\left(\frac{U_0}{d}+\frac{\rho}{2\varepsilon}d\right)x$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_x=\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x-\frac{U_0}{d}-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\right)\boldsymbol{e}_x$$

边值问题例4　试写出长直同轴电缆中静电场的边值问题。（只写出，不求解）



缆心为正方形的同轴电缆

解：根据场分布的对称性确定计算场域，边值问题 根据对称性，算一半即可

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$（阴影区域）

内导体边界：$\varphi\big|_{(x=b,0\le y\le b\text{及}y=b,0\le x\le b)}=U$

外导体边界：$\varphi\big|_{(x^2+y^2=a^2,x\ge 0,y\ge 0)}=0$

根据对称性，电介质中x轴电场强度和y轴电力线分别与x轴和y轴重合，

x轴电场强度y分量为零，y轴电场强度x分量为零

x轴边界：$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\big|_{(y=0,b<x<a)}=0$　　y轴边界：$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\big|_{(x=0,b<y<a)}=0$

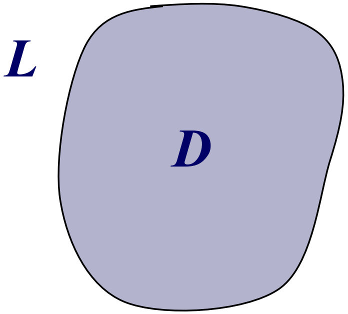
有限差分法

- 由于形状、材料、场源等的复杂性，大多数电磁场问题无法得到解析解
- 此时需要进行数值求解
- 数值求解其实就是将连续问题转化为离散问题
- 转化为离散问题后，就可以利用计算机编程或软件进行仿真
- 电磁场数值求解的方法非常多
- 有限差分法是电磁场数值求解方法中的一种

有限差分法

基本思想：将场域离散为许多网格，应用差分原理，将求解连续函数 φ 的微分方程问题转换为求解网格节点上 φ 的代数方程组的问题。

1.　二维静电场边值问题



待求场域

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\varphi\big|_L = f(L)$$

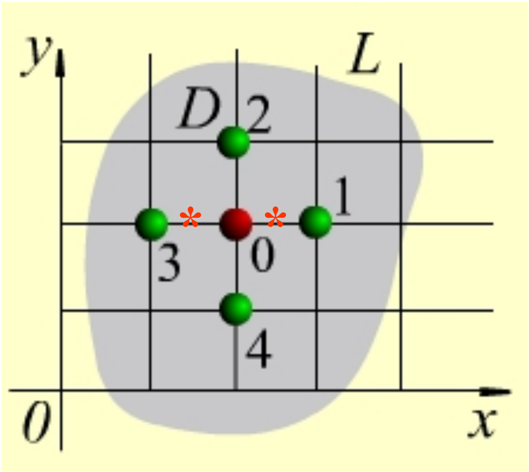
有限差分法

2. 网格剖分

单元、节点、步距h

3. 拉普拉斯方程的离散

1）场域内离散

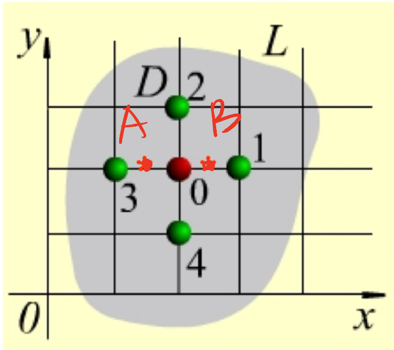


有限差分法的网格剖分

对任一点0，有

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0} \approx \frac{\varphi(x_0+h, y_0)-\varphi(x_0-h, y_0)}{2h} = \varphi_x$$

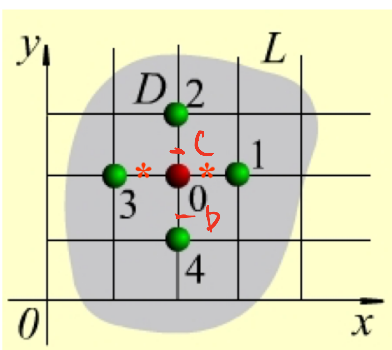
$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \approx \frac{\varphi_x(x_0+h/2, y_0)-\varphi_x(x_0-h/2, y_0)}{h} = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h^2}$$



有限差分法的网格剖分

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=A}=\frac{\varphi_0-\varphi_3}{h} \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=B}=\frac{\varphi_1-\varphi_0}{h}$$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}=\frac{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=B}-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=A}}{h/2+h/2}=\frac{\varphi_1-2\varphi_0+\varphi_3}{h^2}$$



有限差分法的网格剖分

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=D}=\frac{\varphi_0-\varphi_4}{h}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=C}=\frac{\varphi_2-\varphi_0}{h}$$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}=\frac{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=C}-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=D}}{h/2+h/2}=\frac{\varphi_2-2\varphi_0+\varphi_4}{h^2}$$

有限差分法

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \approx \frac{\varphi_1-2\varphi_0+\varphi_3}{h^2}$$

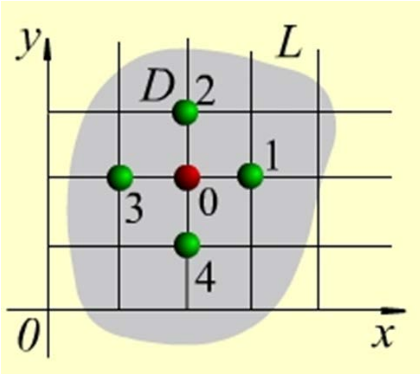
同理，

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{y=y_0} \approx \frac{\varphi_2-2\varphi_0+\varphi_4}{h^2}$$

二维拉普拉斯方程的离散格式，或称差分方程

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4-4\varphi_0=0$$

五点差分格式



即

$$\varphi_0=\frac{1}{4}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)$$

在点（x_0，y_0）的电位可近似取为周围相邻四点电位的平均值。

有限差分法

$$\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

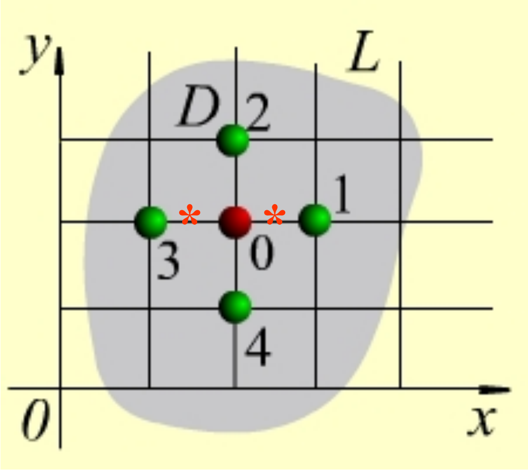
有限差分法就是对场域边界内的

每一个点列写五点差分格式

从而形成一个代数方程组

通过迭代可求解出代数方程组的解

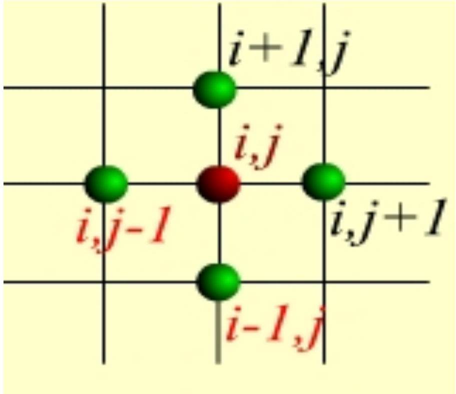
即场域内每个节点的电位值



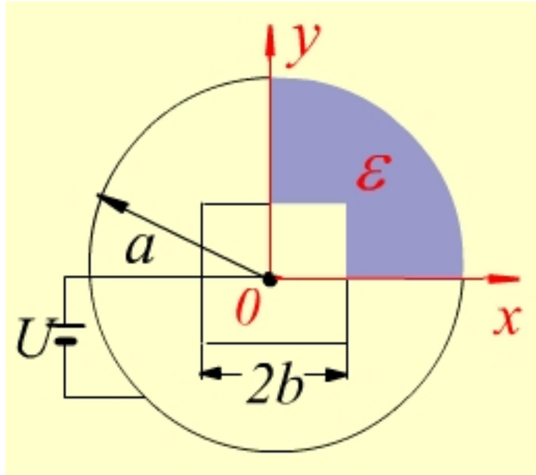
例如：高斯—赛德尔迭代

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}[\varphi_{i-1,j}^{(k+1)} + \varphi_{i,j-1}^{(k+1)} + \varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)}]$$

$$\left|\varphi_{i,j}^{(k+1)} - \varphi_{i,j}^{(k)}\right| < \varepsilon$$

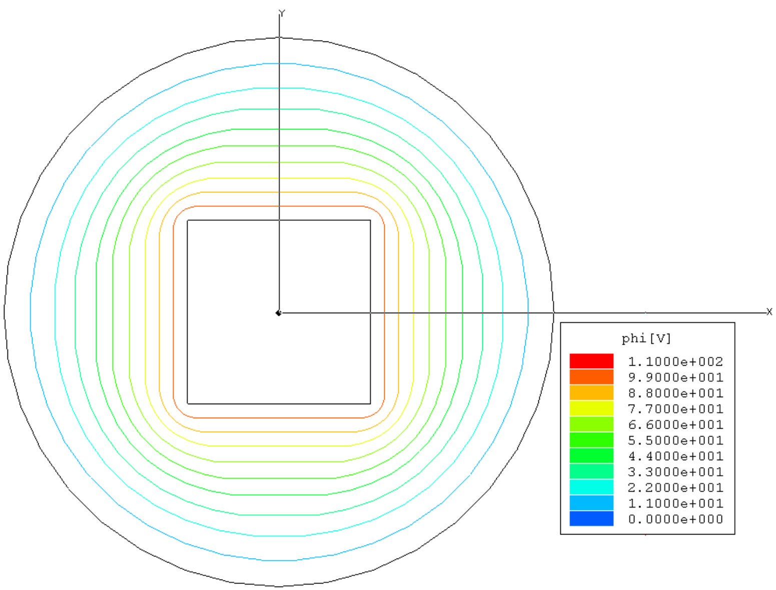


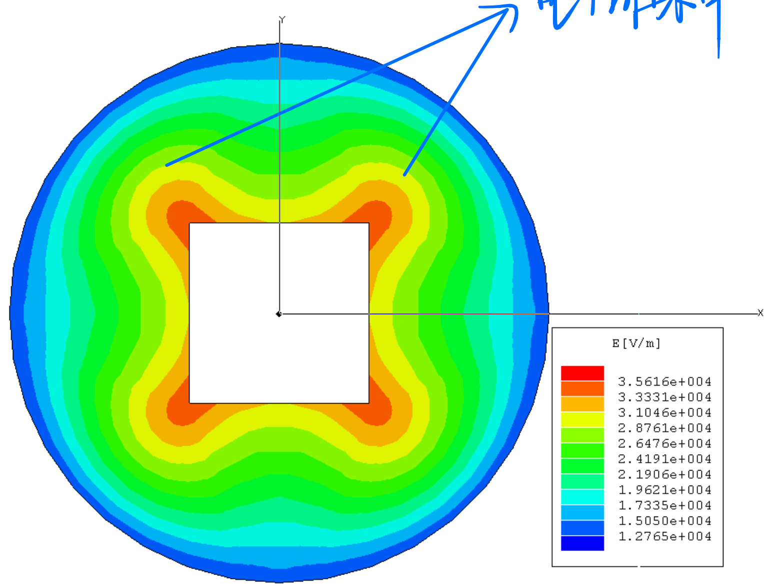
网格编号



缆心为正方形的长直同轴电缆静电场计算

曲率小的地方
电荷集中





作业五

1. 分别写出静电场泊松方程、拉普拉斯方程、三类边界条件、自然边界条件。
2. 教材1-4-1、1-4-2、1-4-3