数理方程知识总结

• 一、 三大方程与相应定解问题

常考：物理含义、根据题设写出方程

- **波动方程**

$$\begin{cases} \text{波动方程：} U_{tt}=a^2\Delta U+f(x,t) \\ \text{定解条件} \begin{cases} \text{初始条件：} U|_{t=0}=\varphi(x),\ U_t|_{t=0}=\psi(x) \\ \text{边界条件：} \begin{cases} \text{第一类} & U|_{x=0}=\mu_1(t) & U|_{x=l}=\mu_2(t) \\ \text{第二类} & U_x|_{x=0}=\mu_1(t) & U_x|_{x=l}=\mu_2(t) \\ \text{第三类} & (U_x+\sigma U)|_{x=0}=\mu_1(t) & (U_x+\sigma U)|_{x=l}=\mu_2(t) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

  - 柯西问题：只含初始条件的弦振动方程初值问题

- **热传导方程**

$$\begin{cases} \text{热传导方程：} U_t=a^2\Delta U+f \\ \text{定解条件} \begin{cases} \text{初始条件：} U|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \\ \text{边界条件：} \begin{cases} \text{第一类} & U|_{\Gamma}=\psi(x,y,z,t) \\ \text{第二类} & \dfrac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}=\xi(x,y,z,t) \\ \text{第三类} & \left(\dfrac{\partial U}{\partial \vec{n}}+\sigma U\right)|_{\Gamma}=\eta(x,y,z,t) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

- **拉普拉斯方程/泊松方程**

$$\begin{cases} \text{泊松}-\text{拉普拉斯方程：} \Delta U=f \\ \text{定解条件（边界条件）：} \begin{cases} \text{第一类} & U|_{\Gamma}=\xi \\ \text{第二类} & \dfrac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}=\eta \\ \text{第三类} & \left(\dfrac{\partial U}{\partial \vec{n}}+\sigma U\right)|_{\Gamma}=f \end{cases} \end{cases}$$

  - 泊松方程边值问题（没有初始条件）
    - 第一边值问题（迪利克雷问题）
    - 第二边值问题（纽曼问题）
    - 第三边值问题

• 二、解定解问题

• 1. 叠加原理

- **方程的叠加原理**

设二阶线性偏微分方程的一般形式为:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y)$$

引入L算子:

$$L(u)=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y)$$

易知L算子满足齐次性与可加性。

定理 1:若$u_i, i=1,2,\dots,n$是$L_i(u)=f_i(x,y)$的解,则$u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$是$L(u)=\sum_{i=1}^{n}c_if_i$的解

推论:若$u_i, i=1,2,\dots,\infty$是$L_i(u)=f_i(x,y)$的解,且$u\triangleq\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i\in C^{(2)}$,则$u$是$L(u)=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$的解(前提是$\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$、$\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$一致收敛)

- **定解条件的叠加原理**
  - 原定解问题的方程、初始条件、边界条件中的非齐次项分别单独作用下得到的解叠加后就是原定解问题的解(**多因素共同作用的结果是单独作用效果之和**)
  - 多个定解问题的方程、初始条件、边界条件的非齐次项对应叠加后得到的新定解问题,其解等于每个定解问题解的叠加

- ## 2. 化简
  - **方程的化简**
    - **方程的分类与化简**

二阶线性PDE分类与化简.

对 $L(u)=f(x,y)$. 设 $\Delta(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ 为其判别式

若在 (x_0,y_0) 处 Δ 有: 称 $L(u)=f$ 在该点为:

$\Delta>0$ 双曲型

$\Delta=0$ 抛物型

$\Delta<0$ 椭圆型.

波算子 $\square u=u_{tt}-a^2u_{xx}$ $\Delta=a^2>0$ 双曲型

拉氏算子 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ $\Delta=-1<0$ 抛物型

热算子 $Hu=u_t=a^2u_{xx}$ $\Delta=0$ 椭圆型.

设 $L(u)=f$ 的特征方程为 $a_{11}y'^2-2a_{12}y'+a_{22}=0$.

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$

$\Delta>0$ 时. 解得 $\varphi(x,y)=C_1$ $\psi(x,y)=C_2$ 为特征线

令 $\xi=\varphi(x,y)$ $\eta=\psi(x,y)$ 可化简双曲型.

$\Delta<0$ 时. 解得 $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C$

令 $\xi=\varphi(x,y)$ $\eta=\psi(x,y)$ 可化简椭圆型

$\Delta=0$ 时. 解得 $\varphi(x,y)=C$

令 $\xi=\varphi(x,y)$, 设 η 二阶可导且有 $J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq0$ 可化简抛物型

此部分内容还应注意与特征线法相互联系,作为使用特征线时的铺垫工作

- **定解条件的化简**
  - **非齐次边界条件的齐次化**
    - 作辅助函数$w(x,t)$，令$u=v+w$
    - 使得w的边界条件与u一致，进而使得v的边界条件齐次化

      若边界条件为:
      $u|_{x=0}=\mu_1(t), u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$
      则设$W(x,t)=\mu_1(t)+\mu_2(t)\cdot x$

      若边界条件为:
      $u_x|_{x=0}=\mu_1(t), u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$
      则设$W(x,t)=A(t)+B(t)\cdot x+C(t)\cdot x^2$，待定系数法求解
    - 最后答案通过$u=v+w$的关系进行还原
- **3. 解法**
  - **分离变量法：一维弦振动和热传导的定解问题&平面位势/泊松/拉氏方程的边值问题**
    - **一维弦振动和热传导的定解问题**
      - **四大基本步骤：**
        - **1. 设变量分离的函数：$U(x,t)=X(x)T(t)$，代入原定解问题化简，构建本征值问题**
        - **2. 求解本征值问题，得到本征值与本征函数系X_n**
          - **证明λ非负——两边同乘X，移项积分**
          - **证明不同λ对应的X相互正交——交叉乘X_1、X_2，作差后移项积分**
        - **3. 将所得特征值代入关于T的方程，解得另一函数系T_n，得到和式（形式解）**
        - **4. 利用初始条件确定T_n中未知系数，得到最终答案**
      - **齐次方程齐次边界条件（最基本的形式）**
      - **非齐次方程齐次边界条件**
        - 利用特征函数系法处理非齐次方程
        - 按照之前的方法求出齐次方程关于x的特征函数系，再令$U(x,t)=\Sigma \boldsymbol{T_n}(t)\boldsymbol{X_n}(x)$，代入非齐次方程，利用傅里叶变换将非齐次项展开，使得等式两边均为和式，得到关于$\boldsymbol{T_n}$的微分方程，利用初始条件得到改微分方程对应的定解条件，进而求得$\boldsymbol{T_n}$
      - **非齐次边界条件的齐次化处理（见上方化简部分介绍）**
        - 此时经过化简得到的必然是非齐次方程和齐次边界条件
    - **平面位势/泊松/拉氏方程的边值问题**

- **直角坐标**
  - 矩形域
    - 要求至少一组对边上的第一类边界条件为齐次
    - 其余一组的作为初始条件使用
- **极坐标（关注谁用来充当初始条件，自然边界条件的针对性）**

  对于方程：$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$，

  令$\begin{cases}x=\rho cos\theta\\ y=\rho sin\theta\end{cases}$，则有：$u_{xx}+u_{yy}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=f(\rho,\theta)$

  方程以直角坐标描述时，先坐标变换，再分离变量 若出现第二类边界条件，注意对应于x,y偏导数的正负关系

  - **圆域**
    - 没有初始条件
    - 自然条件包含两个
      - **1.**$\Phi(\boldsymbol{\theta})=\Phi(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{2\pi})$
        - 由于该条件具有叠加性，利用此条件参与构建本征值问题，即本征值问题是关于$\Phi(\theta)$的问题
      - **2.**$|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})|<+\infty$
        - 利用该条件帮助确定$R(\rho)$函数系待定系数
  - **扇形域**
    - **关于θ的边界条件视为原边界条件（必为齐次）**
    - 关于ρ的边界条件视为初始条件
    - 自然条件只有一个（关于θ的题目中有了），即$|R(0)|<+\infty$
  - **环域**
    - 没有初始条件
    - 自然条件只有一个，$\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$
  - **扇环域**
    - 两直边边界条件，齐次
    - 两弧边边界条件充当初始条件
    - 没有自然条件
  - **补充知识：**
    - **求解欧拉方程（已知$\Phi(\boldsymbol{\theta})$函数系后求解$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\rho})$）**

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0$$

令$\rho = e^s$，即$s = ln\rho$，有：

$$R'|_\rho = \frac{1}{\rho} R'|_s \quad R''|_\rho = \frac{1}{\rho^2}(R''|_s - R'|_s)$$

$$\therefore R''_{ns} - n^2 R_n = 0$$

- **圆域上的泊松公式**

$$s.t.\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \\ u|_{\rho=a} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

$$\therefore u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(a^2-\rho^2)\varphi(\tau)d\tau}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\tau)}$$

- **贝塞尔函数法：求解二维、三维热传导问题**
  - 背景知识
    - **变系数二阶线性常微分方程的解的形式（2 大定理）**

对于变系数二阶线性常微分方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

定理一：若$p(x)$、$q(x)$在$U(x_0)$解析，则有形式解$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

定理二：若$(x-x_0)p(x)$、$(x-x_0)^2 q(x)$在$U(x_0)$解析，则有形式解$x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

    - **Γ 函数及递推公式**

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$，$\alpha > 0$时积分收敛

1. $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
2. 递推公式：$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

   $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$，$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
3. 定义域扩充：当$\alpha \in (-1,0)$，$\alpha+1 \in (0,1)$，利用公式$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$

   规定：$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$，$n = 0, -1, -2, \ldots$

  - **贝塞尔方程**
    - **贝塞尔函数**
      - **第一类贝塞尔函数**

$$J_r(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

- 第二类贝塞尔函数

  $$N_r(x)=\frac{J_r(x)cos(r\pi)-J_{-r}(x)}{sin(r\pi)},N_n(0)=\infty,N_0(0)=\infty$$

- 通解形式
  - 整数阶

    $$y=CJ_n(x)+DN_n(x)$$

  - 非整数阶

    $$y=\begin{cases}CJ_r(x)+DJ_{-r}(x)\\CJ_r(x)+DN_r(x)\end{cases}$$

- **用初等函数表示半整数阶贝塞尔函数**
  - 利用三角函数的泰勒展开式化简
- **整数阶贝塞尔函数性质**
  - **奇偶性**
    - 与阶数的奇偶性相同
  - **零点**
    - 无复零点，有**无穷多实零点**，且**关于原点对称**
    - $J_0(0)=1$，$\boldsymbol{J_n(0)=0}$**且为$\boldsymbol{n}$重零点**，其余的零点均为**单重零点**
    - 当$x\to\infty$，相邻零点间隔趋近于π，贝塞尔函数几乎以π为周期
    - 相邻阶数贝塞尔函数的**零点相间分布**
  - **递推公式（也适合于非整数阶，化简积分&证明恒等式）**

    $$\begin{aligned}&[x^nJ_n(x)]'=x^nJ_{n-1}(x) && [x^{-n}J_n(x)]'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\\&nJ_n(x)+xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x) && -nJ_n(x)+xJ_n'(x)=-xJ_{n+1}(x)\\&J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x) && J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\end{aligned}$$

- **贝塞尔方程的本征值问题（定理的四步证明）**

  贝塞尔方程的本征值问题

  $\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0,\ 0\leqslant\rho<\rho_0$

  $R(\rho_0)=0,\ |R(0)|<\infty$

  本征值为：$\lambda_n=\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2$；本征函数系：$R_n(\rho)=J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)$，$m=1,2,\ldots$

  且本征函数系在$[0,\rho_0]$上关于ρ正交，即：

$$\int_0^{\rho_0}\rho J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho=\begin{cases}0,\ m\neq k\\ \dfrac{{\rho_0}^2}{2}[J_n{}'(\mu_m^{(n)})]^2,\ m=k\end{cases}$$

  - **第一步，证明 λ>0**

$$\rho R''+R'+\left(\lambda\rho-\frac{n^2}{\rho}\right)R=0$$

$$\therefore [\rho R']'+\left(\lambda\rho-\frac{n^2}{\rho}\right)R=0$$

两边同乘R，再积分

$$\int_0^{\rho_0}Rd[\rho R']+\lambda\int_0^{\rho_0}\rho R^2d\rho-n^2\int_0^{\rho_0}\frac{R^2}{\rho}d\rho=0$$

$$\therefore \lambda\int_0^{\rho_0}\rho R^2d\rho=n^2\int_0^{\rho_0}\frac{R^2}{\rho}d\rho+\int_0^{\rho_0}\rho(R')^2d\rho$$

$$\therefore \lambda=\frac{n^2\int_0^{\rho_0}\frac{R^2}{\rho}d\rho+\int_0^{\rho_0}\rho(R')^2d\rho}{\int_0^{\rho_0}\rho R^2d\rho}\geq 0$$

若$\lambda=0$，则$\begin{cases}\frac{n^2}{\rho}R^2=0\Rightarrow n=0\\ \rho(R')^2=0\Rightarrow R'=0\end{cases}\Rightarrow R\equiv 0$，与题设矛盾

因而，$\lambda>0$得证

  - **第二步，证明本征值问题具有所示形式解（特征函数）**

$$\because \lambda>0$$

$\therefore \sqrt{\lambda}\rho=x, x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$的通解为:

$$y=CJ_n(x)+DN_n(x)$$

$$\therefore R=CJ_n(\sqrt{\lambda}\rho)+DN_n(\sqrt{\lambda}\rho)$$

$$\because \begin{cases}|R(0)|<+\infty\\ N_n(0)=\infty\end{cases}\therefore D=0;C\neq 0$$

$$\because R(\rho_0)=0\ \therefore J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho_0\right)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}\rho_0=\mu_m^{(n)}$$

$$\therefore \lambda=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2, m=1,2,\ldots$$

$$\therefore R=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right), m=1,2,\ldots$$

- **第三步，证明特征函数系具有正交性（线性无关）**

$$记R_m = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right), \alpha_m = \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}, R_k = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\rho_0}\rho\right), \alpha_k = \frac{\mu_k^{(n)}}{\rho_0}$$

$$\because \begin{cases} [\rho R_m']' + \left({\alpha_m}^2\rho - \frac{n^2}{\rho}\right)R_m = 0 \ldots\ldots [1] \\ [\rho R_k']' + \left({\alpha_k}^2\rho - \frac{n^2}{\rho}\right)R_k = 0 \ldots\ldots [2] \end{cases}$$

$$[1] \times R_k - [2] \times R_m 得:$$

$$[\rho R_m']' R_k - [\rho R_k']' R_m + \left({\alpha_m}^2 - {\alpha_k}^2\right)\rho R_m R_k = 0$$

$$\therefore \left({\alpha_m}^2 - {\alpha_k}^2\right)\int_0^{\rho_0} \rho R_m R_k d\rho = 0$$

$$\textbf{当}\boldsymbol{m \neq k}\textbf{时，}\boldsymbol{\int_0^{\rho_0} \rho R_m R_k d\rho = 0}$$

- **第四步，证明贝塞尔函数的平方模公式**

当$\boldsymbol{m = k}$时，利用极限思想研究

$$\because \left({\alpha_m}^2 - \alpha^2\right)\int_0^{\rho_0} \rho R_m R_\alpha d\rho = R_m \rho R_\alpha' |_0^{\rho_0} - R_\alpha \rho R_m' |_0^{\rho_0}$$
$$= -R_\alpha(\rho_0)\rho_0 R_m'(\rho_0)$$

$$\therefore \int_0^{\rho_0} \rho R_m R_\alpha d\rho = \frac{R_\alpha(\rho_0)\rho_0 R_m'(\rho_0)}{\alpha^2 - {\alpha_m}^2} = \frac{R_\alpha(\rho_0) - R_m(\rho_0)}{\alpha^2 - {\alpha_m}^2}\rho_0 R_m'(\rho_0)$$

$$\therefore \int_0^{\rho_0} \boldsymbol{\rho {R_m}^2 d\rho} = \lim_{\alpha \to \alpha_m} \frac{R_\alpha(\rho_0) - R_m(\rho_0)}{\alpha^2 - {\alpha_m}^2}\rho_0 R_m'(\rho_0) = \boldsymbol{\frac{{\rho_0}^2}{2}[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}$$

- **将给定函数展开成傅里叶-贝塞尔级数**

$f(\rho)$在$[0, \rho_0]$上连续且有分段连续一阶导数，则$f(\rho)$可展开为傅里叶-贝塞尔级数

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)$$

$$A_m = \frac{2}{{\rho_0}^2 [J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}\int_0^{\rho_0} \rho f(\rho) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right) d\rho$$

- **格林函数法：求解二维、三维泊松/拉氏定解问题**
  - 格林公式
    - 格林第一公式
      - 二维

$$\iint\limits_{(\Omega)} u\Delta v d\sigma = \int\limits_{(\partial\Omega)} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dl - \iint\limits_{(\partial\Omega)} \nabla u \cdot \nabla v d\sigma$$

      - 三维

$$\iiint\limits_{(\Omega)} u\Delta v dV = \iint\limits_{(\partial\Omega)} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS - \iiint\limits_{(\partial\Omega)} \nabla u \cdot \nabla v dV$$

    - 格林第二公式
      - 二维

$$\iint\limits_{(\Omega)} (u\Delta v - v\Delta u) d\sigma = \int\limits_{(\partial\Omega)} (u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dl$$

      - 三维

$$\iiint\limits_{(\Omega)} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint\limits_{(\partial\Omega)} (u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dS$$

    - **格林第三公式**
      - 二维

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{(\partial\Omega)} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}}) dl - \iint\limits_{(\Omega)} \Gamma\Delta u d\sigma$$

      - 三维

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iint\limits_{(\partial\Omega)} (\Gamma\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}}) dS - \iiint\limits_{(\Omega)} \Gamma\Delta u dV$$

    - **拉氏方程的基本解 Γ**
      - 二维

$$\Gamma(P,P_0) = \frac{1}{2\pi} ln\frac{1}{r_{\overrightarrow{PP_0}}} = -\frac{1}{4\pi}\ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]$$

- 三维

$$\Gamma(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r_{\overline{PP_0}}}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$
$$-\Delta\Gamma=\delta(P,P_0)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$$

- **格林函数 G（纯粹构造得到，用于化简第三公式，便于解决定解问题）**
  - $u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}ds-\iiint_{\Omega}G\Delta u dV\ ,G|_{\partial\Omega}=0$
  - 几个特殊区域上的格林函数 G——对称法
    - 半空间
    - 半平面
    - （半）圆域
- **特征线法：柯西问题&一维波动方程**
  - **一阶偏微分方程的特征线法**
    - **特征线变量变换**

$$a\frac{dx}{dt}-b=0\Rightarrow\varphi(x,t)=C\ or\ x=\varphi(t,C)$$
$$\because\ \varphi_x dx+\varphi_t dt=0$$
$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-\frac{\varphi_t}{\varphi_x}=\frac{b}{a}$$
$$令\begin{cases}\xi=\varphi(x,t)\\ \eta=x\end{cases},\ 故\begin{cases}U_x=U_\eta+U_\xi\varphi_x\\ U_t=U_\xi\varphi_t\end{cases}$$
$$\therefore\ aU_t+bU_x+cU=bU_\eta+CU=f$$

    - **一阶线性偏微分方程的柯西问题**

一般地，对一阶 PDE：

$$aU_t+bU_x+cU=f$$
$$a,b,c,f\leftrightarrow x,t$$

设特征线为$x=\psi(t)$，满足特征方程：

$$a\frac{dx}{dt}-b=0$$

则：

$$\frac{dU}{dt}=a[U_t+U_x\frac{dx}{dt}]=a[U_t+\frac{b}{a}U_x]$$

PDE 在此特征线上必能化为常微分方程，求解后利用$x=\psi(t)$消掉常数即可

    - **一阶拟线性偏微分方程的柯西问题**

$$\begin{cases} a(x,t,U)U_t + b(x,t,U)U_x = c(x,t,U), t > 0, x\epsilon R \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

设$U = U(x,t)$为所求解，则：

$$\boldsymbol{U(x,t) - U = 0} \stackrel{\text{def}}{=} F(x,t,U)$$

由于F的法向量为$\vec{n} = \{U_t, U_x, -1\}$，设特征向量场$\vec{\alpha} = \{a(x,t,U), b(x,t,U), c(x,t,U)\}$

所以原 PDE 化为：$\vec{n} \cdot \vec{\alpha} = 0$

设$\vec{\alpha}$为过P点的在解曲面上某曲线Γ在P点处的切向量，定义Γ为特征线

设$\Gamma = \begin{cases} x = x(s) \\ t = t(s) \\ U = U(s) \end{cases} \to \vec{\alpha} = \{\frac{dx}{ds}, \frac{dt}{ds}, \frac{dU}{ds}\}$，进一步构建原柯西问题的特征方程组：

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x,t,U) \\ \frac{dt}{ds} = b(x,t,U) \\ \frac{dU}{ds} = c(x,t,U) \end{cases}, \begin{cases} x(0) = \tau \\ t(0) = 0 \\ U(0) = \varphi(\tau) \end{cases}$$

- **一维波动方程的特征线法（达朗贝尔公式）**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, t > 0, x \in R \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

特征方程：$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \pm a \Rightarrow \text{特征线：} \begin{cases} x + at = C_1 \\ x - at = C_2 \end{cases}$$

令$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$代入原方程化简，得：

$$-4a^2 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u_{\xi\eta} = 0}$$

$$\therefore \begin{cases} u = f(\xi) + g(\eta) = f(x+at) + g(x-at) \\ \boldsymbol{u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x)} \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x) + g(x) = \varphi(x)} \\ \boldsymbol{a[f(x) - g(x)] = \int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + a[f(0) - g(0)]} \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha}$$