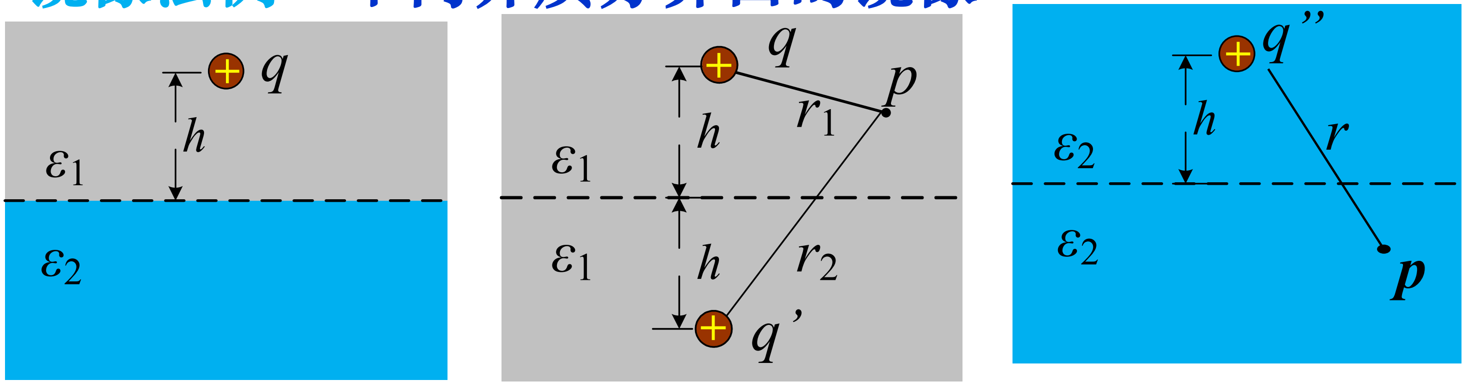
镜像法例6 不同介质分界面的镜像

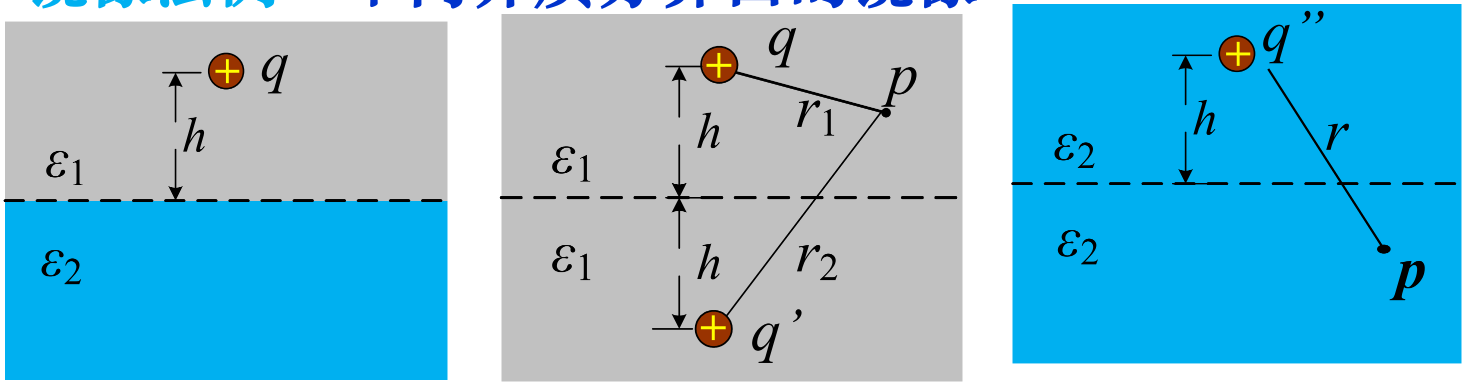


点电荷对无限大介质分界面的镜像

① ε_1中（分界面上方）的电场由q 与q’共同产生，q’等效替代极化电荷的影响。

② ε_2中（分界面下方）的电场由 q” 决定，q” 等效替代自由电荷与极化电荷的作用。

镜像法例6 不同介质分界面的镜像



点电荷对无限大介质分界面的镜像

$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2\varphi_2 = 0$ (除q点外的空间)

$r \to \infty$时， $\varphi_1 \to 0, \varphi_2 \to 0$

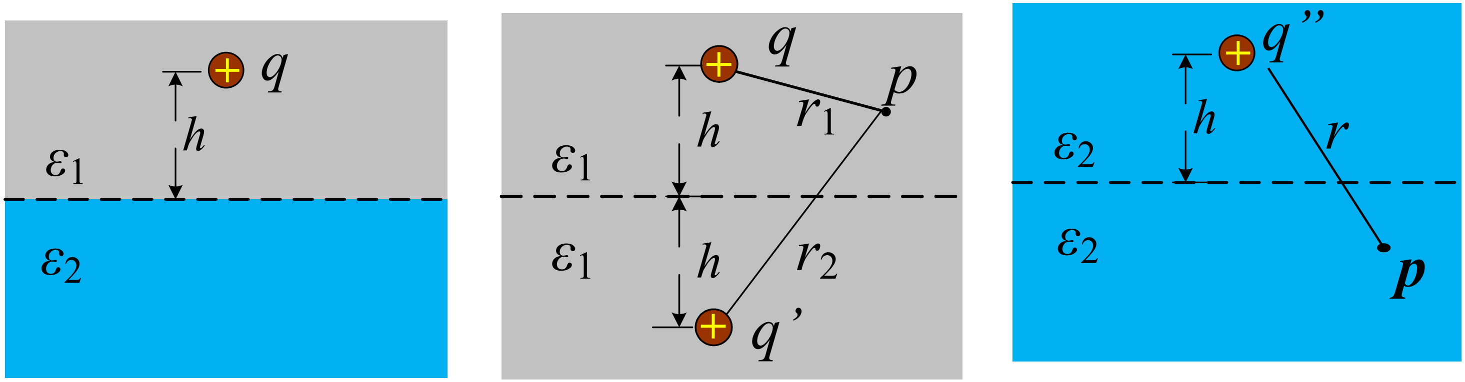
$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r_2}$$

$\varphi_1 = \varphi_2$ (分界面衔接条件)

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

Key: 边界条件

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r_1}$$



点电荷对无限大介质分界面的镜像

由 $\varphi_1 = \varphi_2$ 得到

$$\frac{q}{\varepsilon_1} + \frac{q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$$

由 $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ 得到

$$q - q' = q''$$

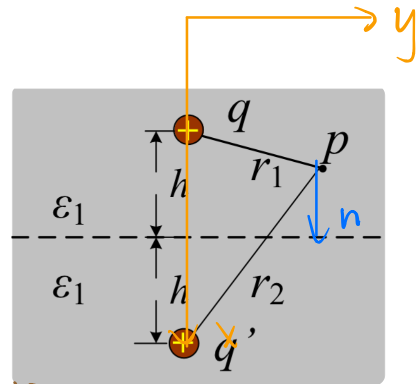
解得

$$\boxed{q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}$$

$$\boxed{q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r_2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r_1}$$



建立如图坐标系，设 $P(x, y)$

$\therefore r_1 = \sqrt{x^2+y^2}$，$r_2 = \sqrt{(2h-x)^2+y^2}$，边界上，$x=h$

① 由 $\varphi_1 = \varphi_2$ $\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{\sqrt{h^2+y^2}} + \frac{q'}{\sqrt{h^2+y^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{h^2+y^2}}$

$\therefore \frac{1}{\varepsilon_1}(q+q') = \frac{1}{\varepsilon_2}q''$ — ①

② $\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[q\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + q'\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(2h-x)^2+y^2}}\right)\right]$

$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-xq}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{xq'}{[(2h-x)^2+y^2]^{3/2}}\right]\Bigg|_{x=h}$

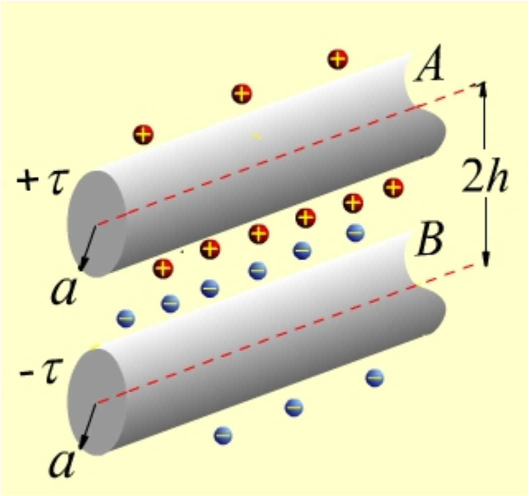
$= \frac{h}{4\pi(h^2+y^2)^{3/2}}(q'-q)$

$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}q''\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{x=h} = \frac{h}{4\pi(h^2+y^2)^{3/2}}(-q'')$

$\therefore q'-q = -q''$ — ②

联立①②可得
$$\begin{cases} q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \\ q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \end{cases}$$

电轴法

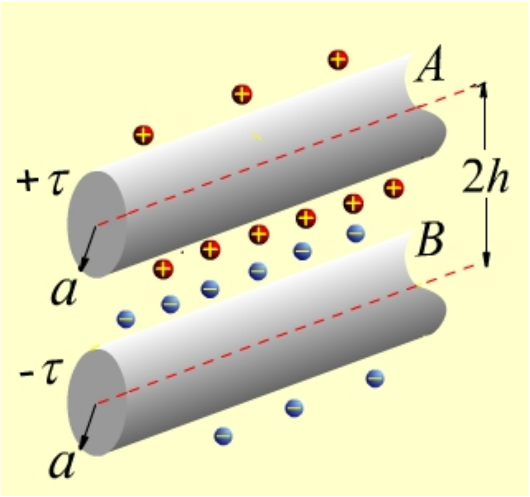


电轴法更加侧重于等效

- 电轴法是镜像法的进一步延伸（广义镜像法）
- 电轴法与镜像法类似，都靠猜
- 电轴法的**依据也是静电场唯一性定理**
- 电轴法也体现了等效变换的思想

电轴法例1： **已知长直平行双传输线单位长度电量为τ，求电轴位置。**

边值问题 $\nabla^2\varphi = 0$ **(导线以外的空间)**



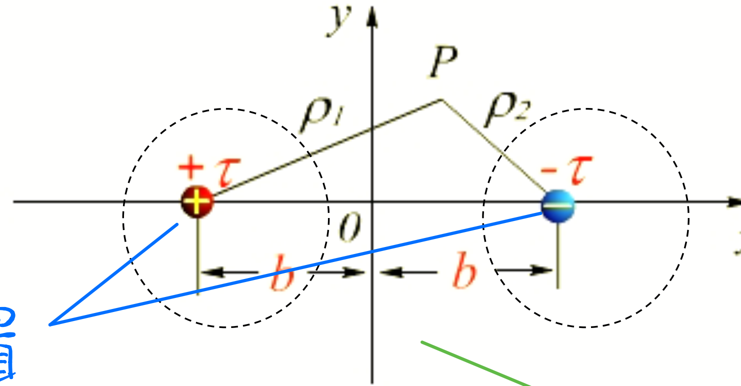
长直平行双传输线

$$\begin{cases} \varphi\big|_{\text{导体A}} = \text{常数} \\ \oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \tau\text{，电荷分布不均匀} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi\big|_{\text{导体B}} = \text{常数} \\ \oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\tau\text{，电荷分布不均匀} \end{cases}$$

根据高斯定律可以计算出无限长细导线的电场强度为

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$



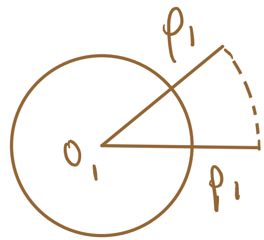
电轴实际位置偏向y轴，即b<R

两根带电细导线

中间对称面为0电位面

$$\varphi_1=\int_{\rho_1}^{Q（零电位面上）}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho_1+C_1$$

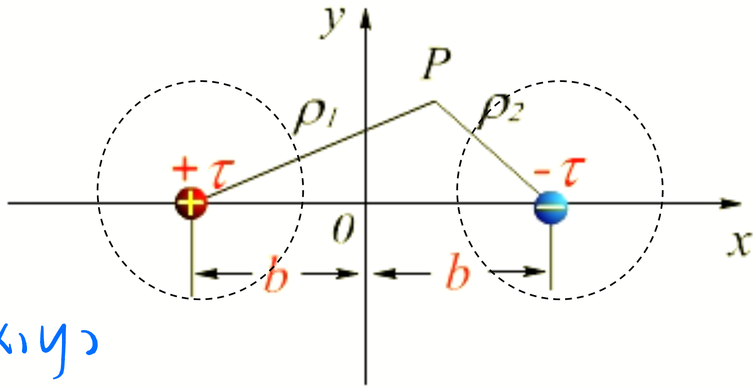
同理，$\varphi_2=-\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho_2+C_2$



以O_1为半径移到x轴方向，积分上下限为x的坐标

$$\varphi_P=\varphi_1+\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+C$$

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + C$$



以 y 轴为参考电位，则 $C=0$，因此

P(x,y)

$$\boxed{\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}{\sqrt{(x+b)^2+y^2}}$$

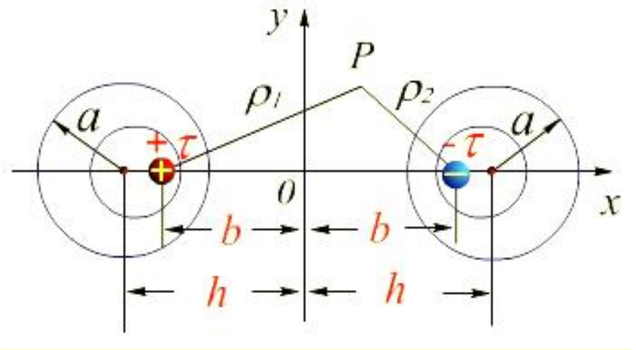
两根带电细导线

令：$\varphi_P =$ 常数，得到等位线方程 $\dfrac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = K^2$

整理后，等位线方程 $$\left(x - \frac{K^2+1}{K^2-1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bK}{K^2-1}\right)^2$$

$$(x-\frac{K^2+1}{K^2-1}b)^2+y^2=(\frac{2bK}{K^2-1})^2$$

圆心坐标 $(d,\ 0)$，其中 $d=\dfrac{K^2+1}{K^2-1}b$



两根细导线的等位线

圆半径 $R=\left|\dfrac{2bK}{K^2-1}\right|$

***K*取不同值时，得到一族圆。**

推导发现，$R^2+b^2=\left(\dfrac{2bK}{K^2-1}\right)^2+b^2=\left(\dfrac{K^2+1}{K^2-1}b\right)^2=d^2$

左右连个导体表面等电位，构成两个等位圆，此时*R*恰好等于传输线半径*a*，*b*为电轴位置，*h*为传输线圆心位置，因此

$$\boldsymbol{a^2+b^2=h^2}$$

半径　电轴距　圆心距

所以电轴的位置 $b=\sqrt{h^2-a^2}$

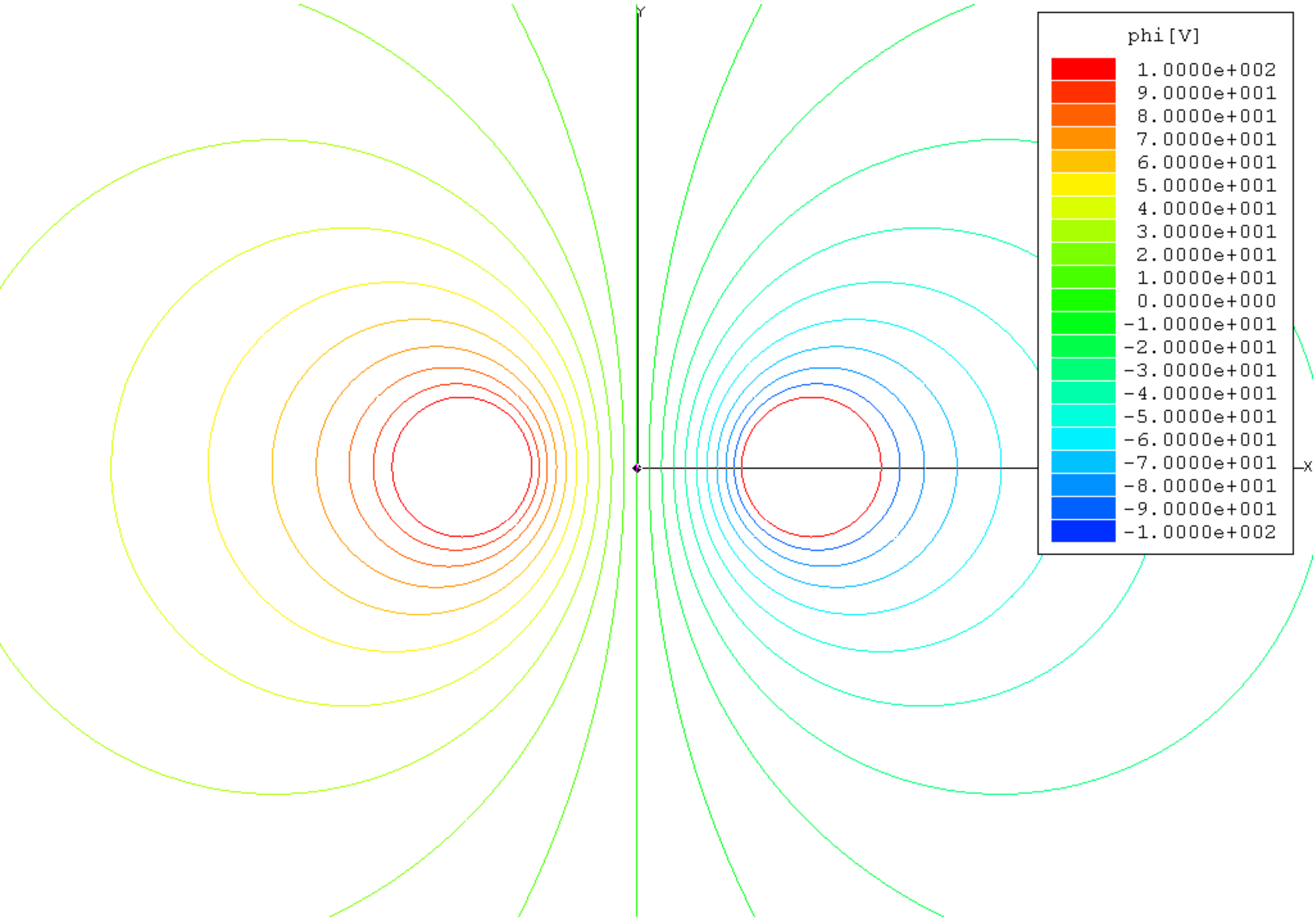
电轴法　　依据：静电场的唯一性定理。

猜测所用电轴等效代换 ⟶ 计算得到等位线方程。

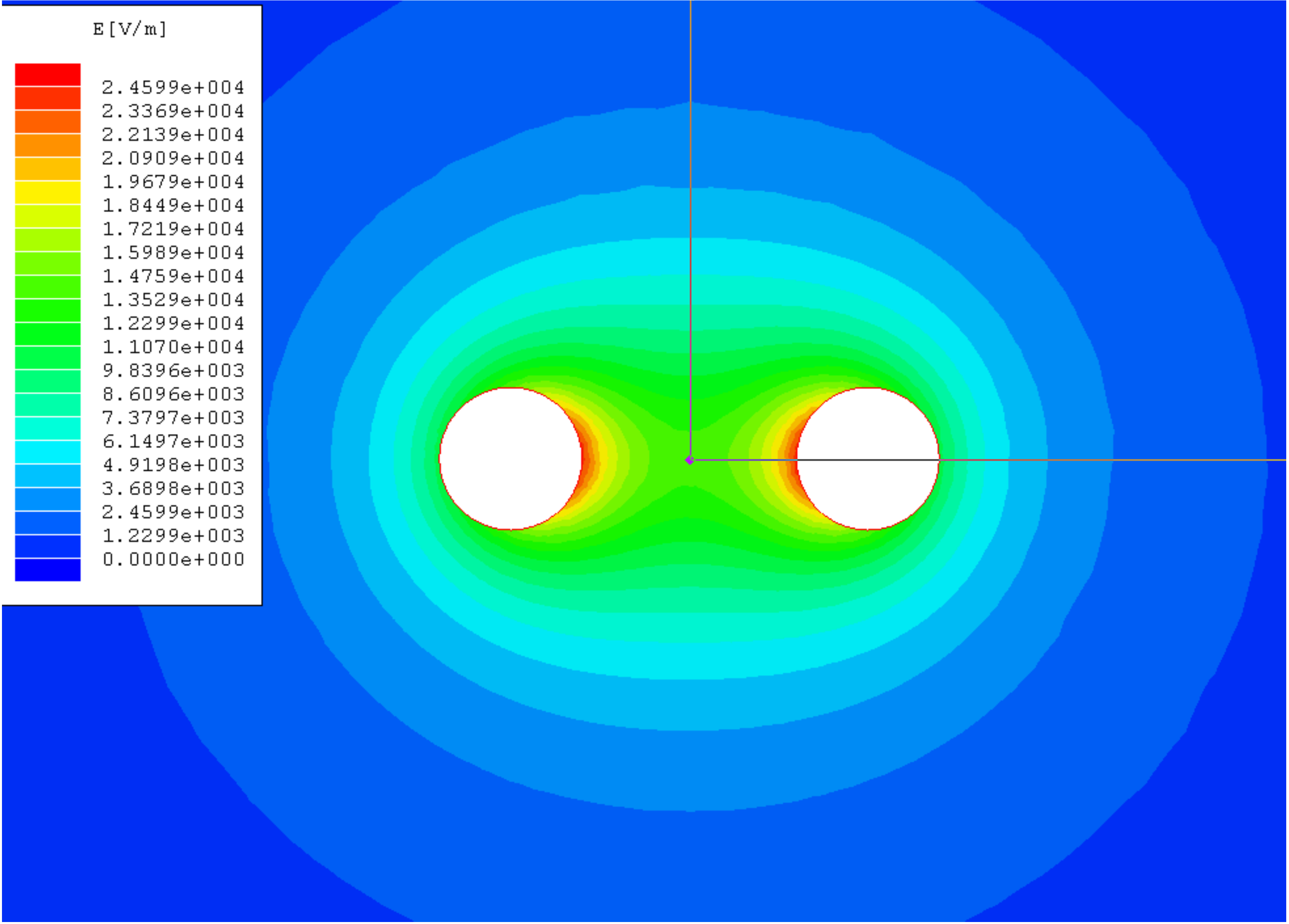
证明可行。

方程为一簇圆，必存在一个K满足导体截面圆

边界条件：为导体表面横截圆等电位



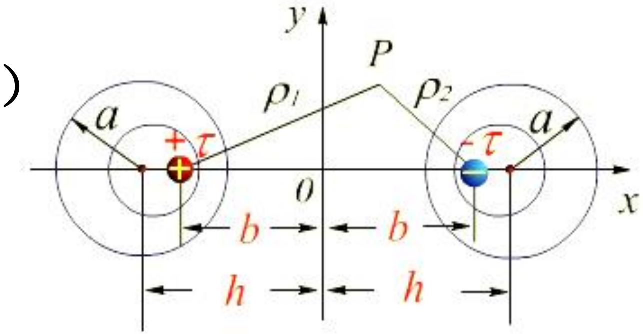
Y
X
phi [V]
1.0000e+002
9.0000e+001
8.0000e+001
7.0000e+001
6.0000e+001
5.0000e+001
4.0000e+001
3.0000e+001
2.0000e+001
1.0000e+001
0.0000e+000
-1.0000e+001
-2.0000e+001
-3.0000e+001
-4.0000e+001
-5.0000e+001
-6.0000e+001
-7.0000e+001
-8.0000e+001
-9.0000e+001
-1.0000e+002


E[V/m]
2.4599e+004
2.3369e+004
2.2139e+004
2.0909e+004
1.9679e+004
1.8449e+004
1.7219e+004
1.5989e+004
1.4759e+004
1.3529e+004
1.2299e+004
1.1070e+004
9.8396e+003
8.6096e+003
7.3797e+003
6.1497e+003
4.9198e+003
3.6898e+003
2.4599e+003
1.2299e+003
0.0000e+000

电轴法步骤：

首先大概猜测两个电轴（正电轴和负电轴）位置，则两个电轴中间位置为等电位，两个电轴一定分别位于-b和+b处

0电位



两根细导线的等位线

其次看传输线半径为a（已知条件，有时为R）

第三观察传输线圆心与电轴中间位置距离为h（可能已知，也可能未知）

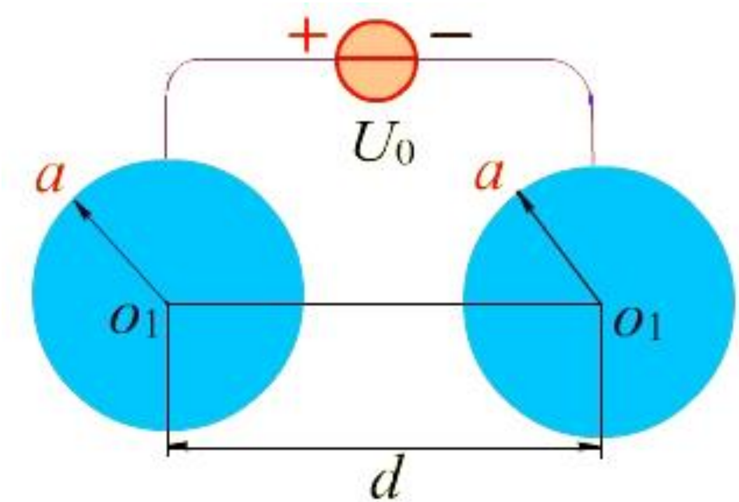
第四，必须满足$a^2 + b^2 = h^2$

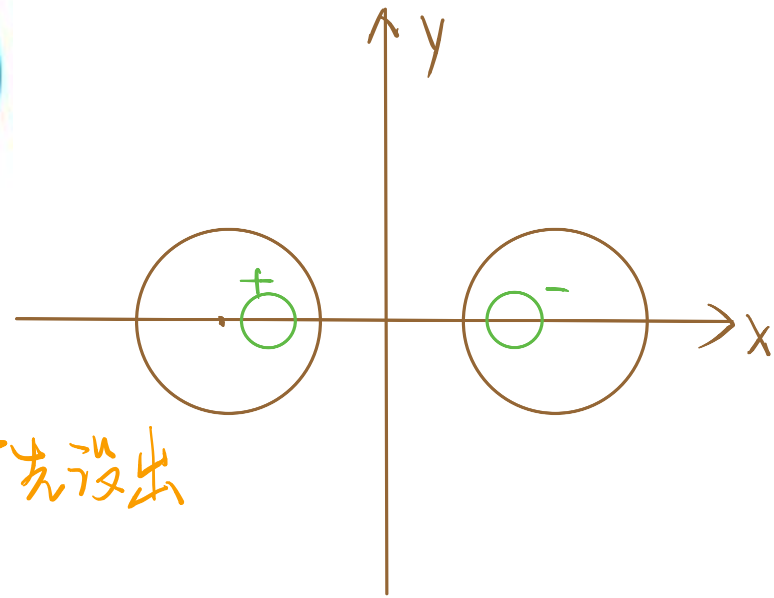
半径平方+电轴距平方=圆心距平方

最后求出b,h

（电轴法最难之处在于弄清b,h的含义）

电轴法例2: 平行传输线之间电压为U_0, 试求电位分布。



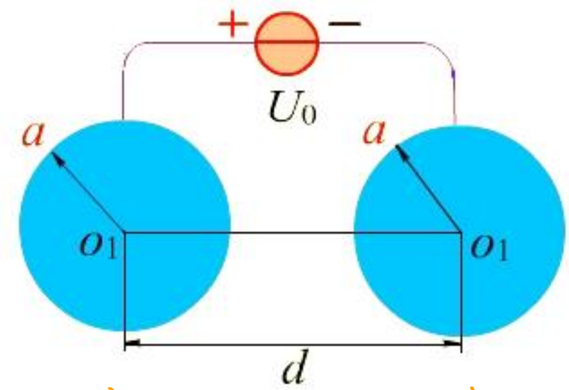


电轴线密度未知，可先设出

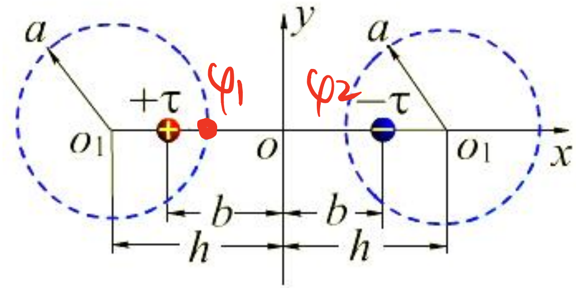
电轴法例2：平行传输线之间电压为U_0，试求电位分布。

解：　确定电轴的位置

$$\begin{cases} b^2 + a^2 = h^2 \\ d = 2h \end{cases} \qquad b = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$$



为了简便取X轴上的点、



电压为U_0的传输线

设电轴线电荷$\pm\tau$，任一点电位

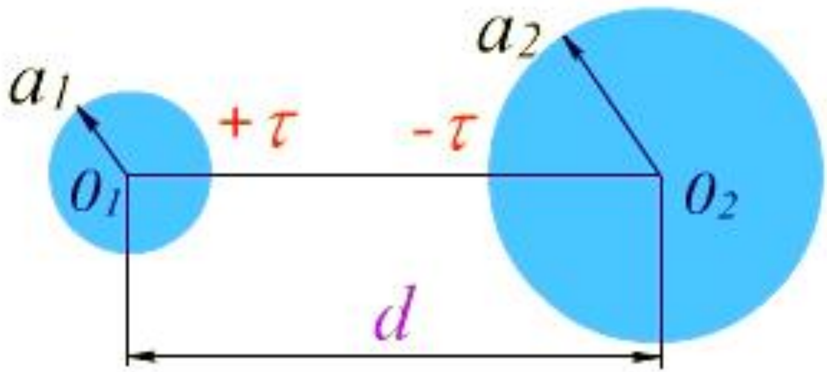
$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

(此处和后面电压用到电轴法例1结论）

$$U_0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} - \ln\frac{b-(h-a)}{b+(h-a)}\right]$$

所以 $$\varphi = \frac{U_0}{2\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

电轴法例3 确定图示不同半径平行长直导线的电轴位置。



左右分布不对称

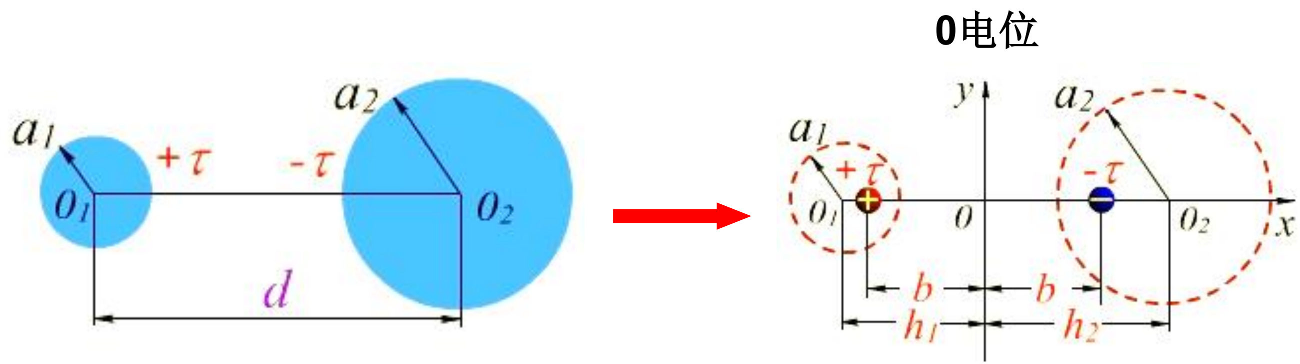
↓

左右圆心距不等

↓

补充方程. $h_1+h_2=d$

电轴法例3 确定图示不同半径平行长直导线的电轴位置。



不同半径传输线的电轴位置

解：

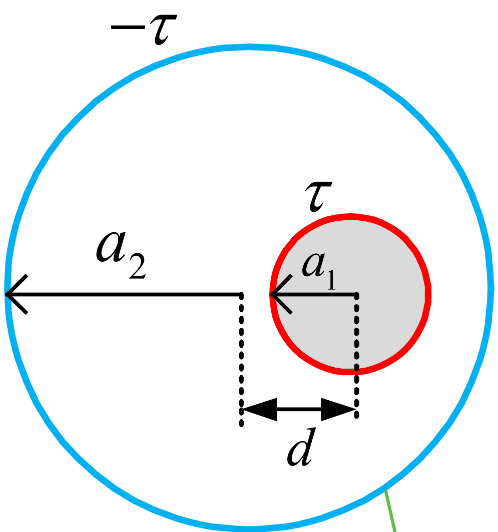
$$\begin{cases} a_1^2 + b^2 = h_1^2 \\ a_2^2 + b^2 = h_2^2 \\ d = h_1 + h_2 \end{cases}$$

$$h_1 = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}$$

$$h_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2}$$

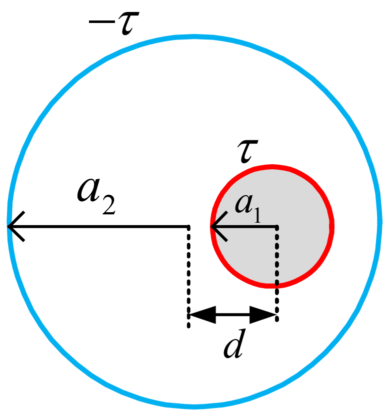
电轴法例4：试确定图示偏心电缆的电轴位置。

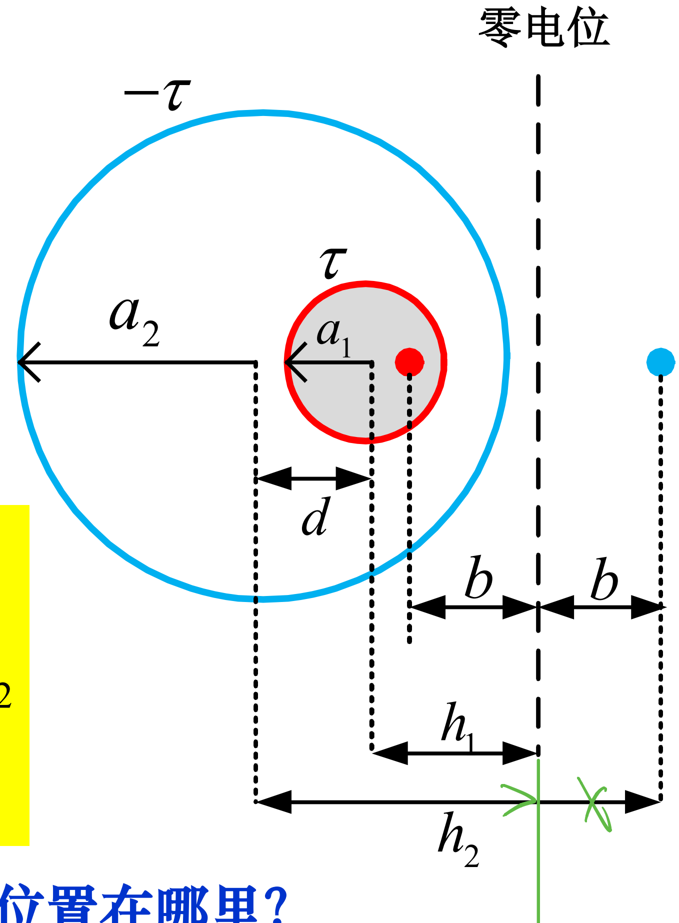


目的为求电缆内部的情况、若电轴
位于内侧，则破坏内部原有状况、
没有意义，猜测电轴位于外部(−τ)

内部导体为圆柱体，外部导体为"壳"

电轴法例4：试确定图示偏心电缆的电轴位置。



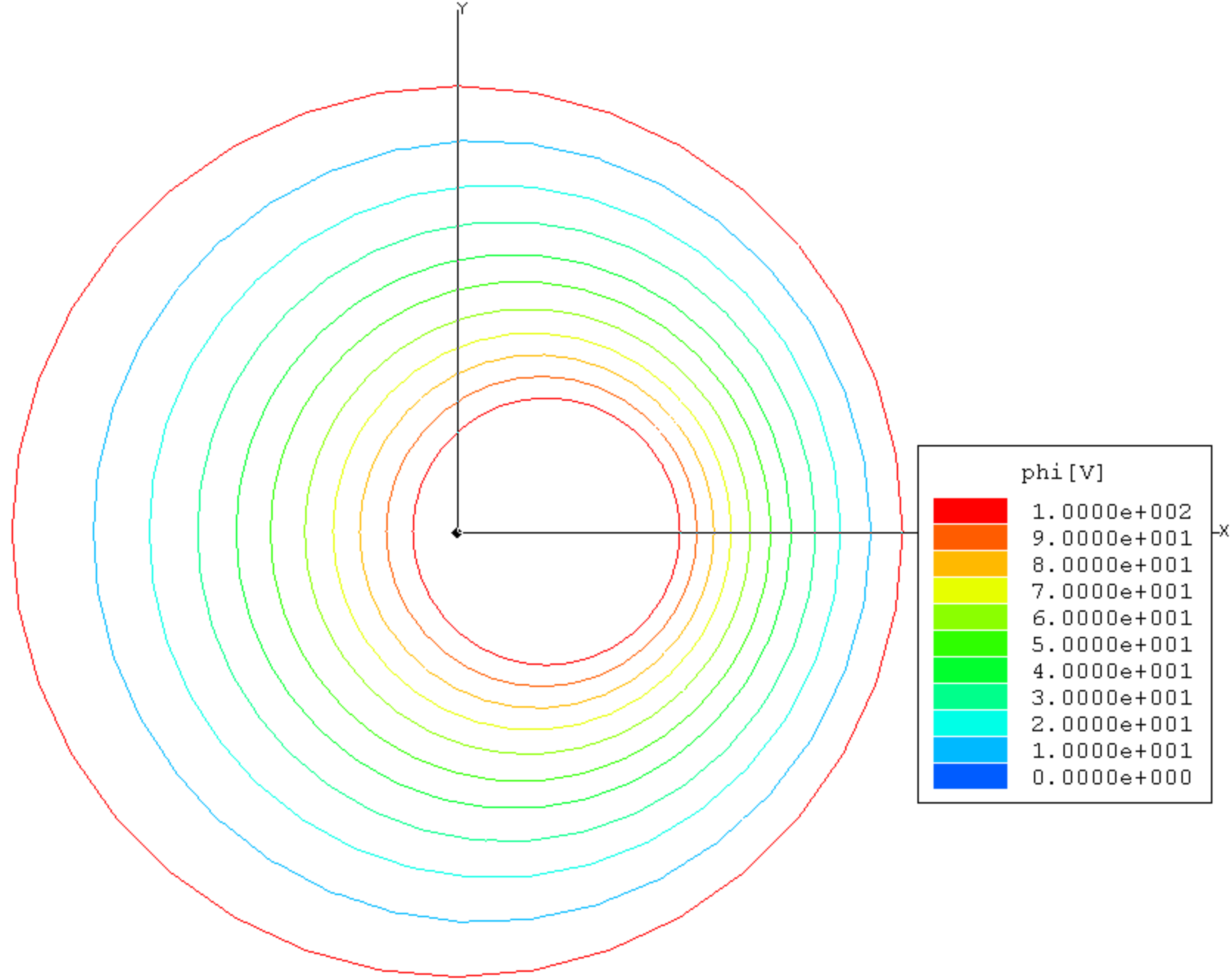


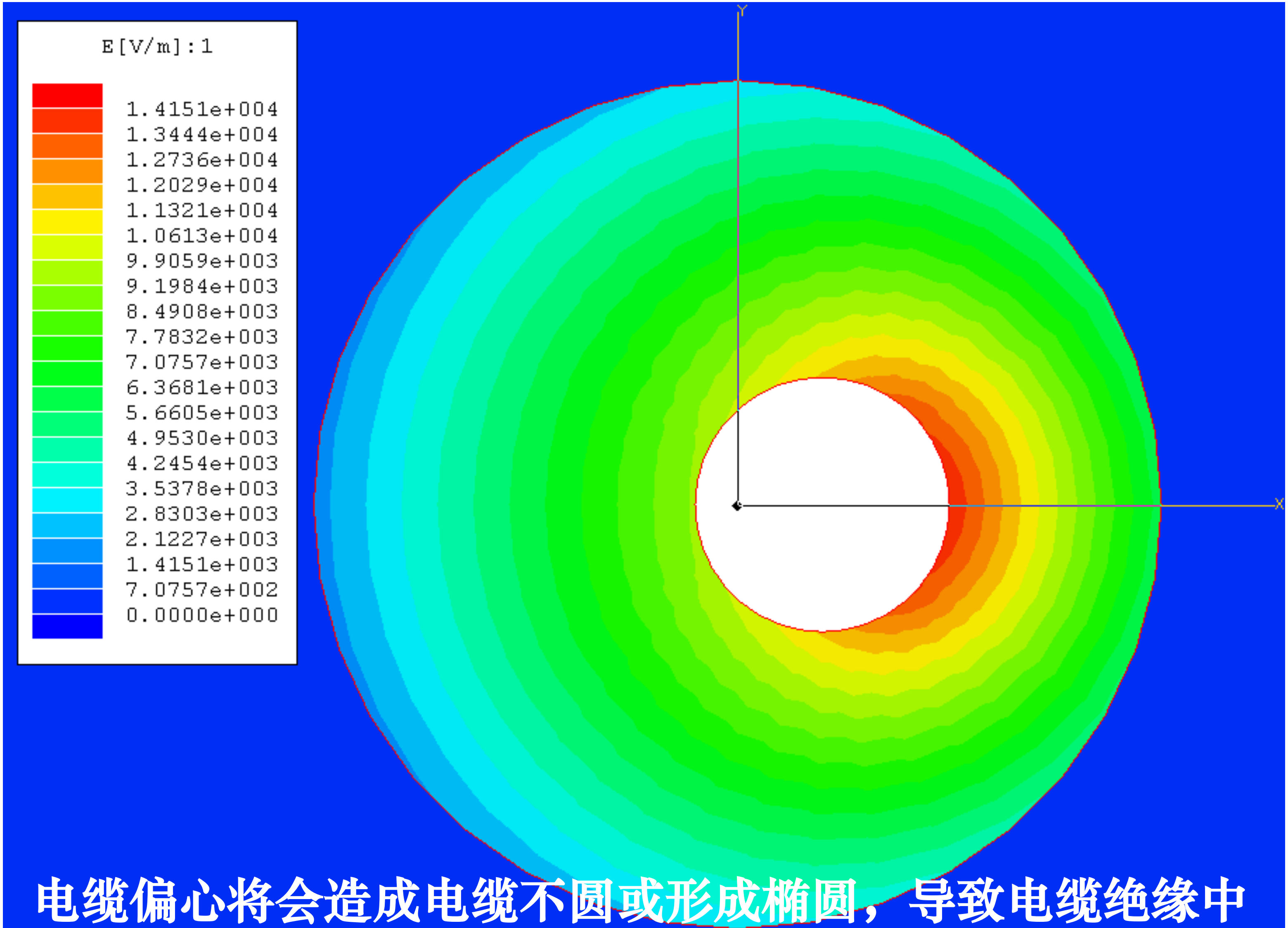
解：

$$\begin{cases} a_1^2 + b^2 = h_1^{\ 2} \\ a_2^2 + b^2 = h_2^2 \\ h_2 - h_1 = d \end{cases} \Rightarrow b, h_1, h_2$$

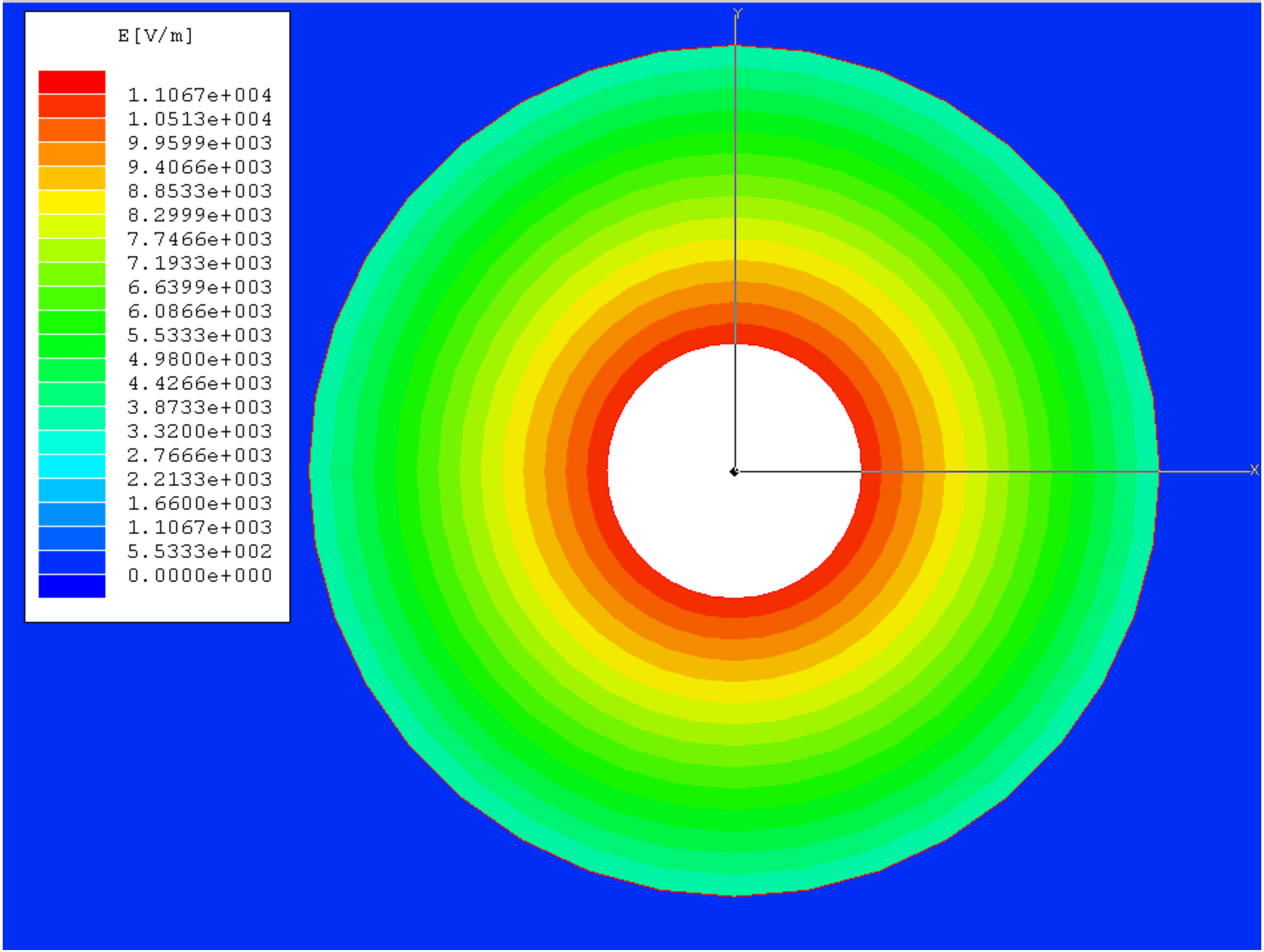
思考：1）参考电位（零电位）的位置在哪里？

2）电场的有效计算区域在哪里？


Y
X
phi [V]
1.0000e+002
9.0000e+001
8.0000e+001
7.0000e+001
6.0000e+001
5.0000e+001
4.0000e+001
3.0000e+001
2.0000e+001
1.0000e+001
0.0000e+000



电缆偏心将会造成电缆不圆或形成椭圆，导致电缆绝缘中电场分布产生畸变，严重影响电缆的运行安全和使用寿命


E[V/m]
1.1067e+004
1.0513e+004
9.9599e+003
9.4066e+003
8.8533e+003
8.2999e+003
7.7466e+003
7.1933e+003
6.6399e+003
6.0866e+003
5.5333e+003
4.9800e+003
4.4266e+003
3.8733e+003
3.3200e+003
2.7666e+003
2.2133e+003
1.6600e+003
1.1067e+003
5.5333e+002
0.0000e+000
Y
X

思考

- 如果直接积分法、分离变量法、镜像法都求解不了，该怎么办？
- 办法就是靠计算机数值仿真！
- 现实中绝大部分电磁场问题都没有办法通过镜像法解决，那么镜像法有什么意义呢？
- 镜像法的意义：（1）可以解决少量的简单问题；（2）适合出题！（3）重要的意义是镜像法充分体现了等效变换在电磁场分析中的重要性！

作业六

1. 镜像法的依据是什么？

2. 镜像法是一种等效变换，对外等效，对内不等效，你对这里的“外”、“内”、“对外等效”、“对内不等效”是如何理解的？

3. 教材1-7-1、1-7-2、1-7-3、1-7-4、1-7-5