21 时变电磁场-动态位及其积分解

邹建龙

主要内容

- 动态位　位：位势，如电位、磁矢位.
- 达朗贝尔方程　数学物理方程.
- 达朗贝尔方程的解
- 达朗贝尔方程解的物理意义

动态位及其积分解

- **动态位**
  - 推导原理
    - 矢量旋度的散度恒为零 $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$
    - 标量梯度的旋度恒为零 $\nabla\times\nabla\varphi=0$
  - 推导过程
    - $$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}\implies\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
    - fai为动态标量位，A为动态矢量位
- **达朗贝尔方程**
  - 方程形式
    - $\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$
    - $\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
    - 实现了变量分离，形式相同求解方法相同
  - 解的形式
    - 一维波动方程，行波法 $u_{tt}=a^2u_{xx}\implies u=g_1\left(x-at\right)+g_2\left(x+at\right)$
    - 三维达朗贝尔方程，球平均法 $r\varphi=f_1\left(t-\dfrac{r}{v}\right)+f_2\left(t+\dfrac{r}{v}\right),v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
  - 物理意义
    - 一维波动方程——左右行波
    - 三维达朗贝尔方程——入射反射波
  - 积分解
    - 动态矢量位（推迟位） $\varphi\left(\vec{r},t\right)=\displaystyle\int_V\frac{\rho\left(\vec{r},t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}dV$
    - 动态矢量位（推迟位） $\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\displaystyle\int_V\frac{\mu\vec{J}\left(\vec{r},t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi r}dV$

动态位

矢量旋度的散度恒等于零

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

标量梯度的旋度恒等于零

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla\times\nabla\varphi=0 \Longrightarrow \mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

$\vec{B}$和$\nabla\times\vec{A}$、$E+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$和$-\nabla\varphi$

数学上是对等的，推导定义动态位.

$$\boxed{\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}}$$

φ—动态标量位 $\qquad$ $\mathbf{A}$—动态矢量位

达朗贝尔方程 动态位推导达朗贝尔方程

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\qquad\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\longrightarrow\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\frac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}\qquad\mathbf{D}=\varepsilon\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

矢量恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

$\nabla\cdot\vec{A}$ = 散度. 运算结果为标量

$\nabla\vec{A}$ = 梯度. 运算结果为矢量

$$\nabla\times\frac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}=\mathbf{J}+\frac{\partial\left[\varepsilon\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\right]}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

达朗贝尔方程

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Rightarrow$$

达朗贝尔方程

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}}$$

$$\boxed{\text{令}\ \nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\ (\text{洛仑兹规范})}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

类似库仑规范.为了简化方程(因为满足的矢量不唯一)

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\rightarrow\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\rightarrow\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\Rightarrow\nabla^2\varphi+\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

达朗贝尔方程

目的：求解A、φ，再求解E、B

① $\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}$　　② $\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$

与拉普拉斯方程的区别：与时间有关系

① 只与A有关

② 只与φ有关

引入动态位和洛仑兹规范，

避开了旋度和散度，实现了变量分离

变量分离：将偏微分方程转化为常微分方程

推导出的达朗贝尔方程两个方程形式相同，求解方法相同

达朗贝尔方程的解 解的形式

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \qquad \nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

点电荷电量随时间变化，在非点电荷所在位置

三维达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla^2 \varphi$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

波动方程

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 z}$$

一维波动方程

$$u = g_1(x - at) + g_2(x + at)$$

$$r\varphi = g_1(r - vt) + g_2(r + vt)$$

（三维球坐标系）

$$r\varphi = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

达朗贝尔方程的解的推导
详见数学物理方程（球平均法）

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

达朗贝尔方程解的物理意义

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\varphi \qquad v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

左、右：函数图像的平移

$$u=g_1(x-at)+g_2(x+at)$$

$$r\varphi=g_1(r-vt)+g_2(r+vt)$$

右行波　　左行波　　入射波　　反射波

波的传播速度a　at与x的单位相同.　波的传播速度v

其物理意义为速度

t↑. $g_1(x-at)$ 右移

时变电磁场会以波的形式传播，真空中传播速度为光速

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

达朗贝尔方程解的积分解

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$r\varphi=f_1(t-\frac{r}{v})$（如果不考虑反射波）

$\varphi_{静}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$（点电荷）

体密度变得与时间有关

$\varphi_{动}=\frac{q(t-\frac{r}{v})}{4\pi\varepsilon r}$（点电荷）

$\varphi_{动}(\mathbf{r},t)=\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r},t-\frac{r}{v})}{4\pi\varepsilon r}dV'$（体电荷）

次波源

惠更斯原理

动态标量位

r处电磁波受小于r处各点影响 →

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}$$

“$t-\frac{r}{v}$”体现推迟

r↑ 距离↑ 函数右移

$\varphi_{动}(\mathbf{r},t)=\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r},t-\frac{r}{v})}{4\pi\varepsilon r}dV'$（体电荷）

$\mathbf{A}_{动}(\mathbf{r},t)=\int_{V'}\frac{\mu\mathbf{J}(\mathbf{r},t-\frac{r}{v})}{4\pi r}dV'$

φ—动态标量位（推迟位）

$\mathbf{A}$—动态矢量位（推迟位）

作业十九

1. 写出动态位和磁感应强度和电场强度的关系式
2. 写出时变电磁场动态位的达朗贝尔方程
3. 教材4-3-1