15 恒定磁场

-导磁材料的磁化

邹建龙

主要内容

- 基于磁化能力的材料分类
- 磁偶极子和磁偶极矩
- 导磁材料的磁化强度
- 导磁材料的等效磁化体电流和面电流
- 导磁材料中的安培环路定律
- 磁通量、磁通密度和磁场强度的联系和区别

基于磁化能力的材料分类

抗磁材料：对外施磁场产生微乎其微的抵抗。

抗磁材料：金、银、铜、水、大多数有机物和生物体等

顺磁材料：对外施磁场产生微乎其微的加强。

顺磁材料：铝、镁、钛、氧等

铁磁材料：对外施磁场产生山呼海啸的加强。

铁磁材料：铁、钴、镍、钢、铁氧体、永磁铁等

磁化后的附加磁场特别强

基于磁化能力的材料分类-铁磁材料分类

铁磁材料可以进一步分为3类：

（1）硬磁材料：

俗称永磁铁，撤掉外施磁场仍保留磁性
常见硬磁材料：碳钢、钨钢、锰钢、铷铁硼等
硬磁材料用途：耳机、指南针、永磁电机、磁电系仪表等

（2）软磁材料

撤掉外施磁场，磁性消失
常见软磁材料：纯铁、硅钢、铁氧体等
软磁材料用途： 变压器、电机、电磁铁、电感（电抗器）等

矩磁材料具有近矩形的磁矩曲线（B-H曲线，

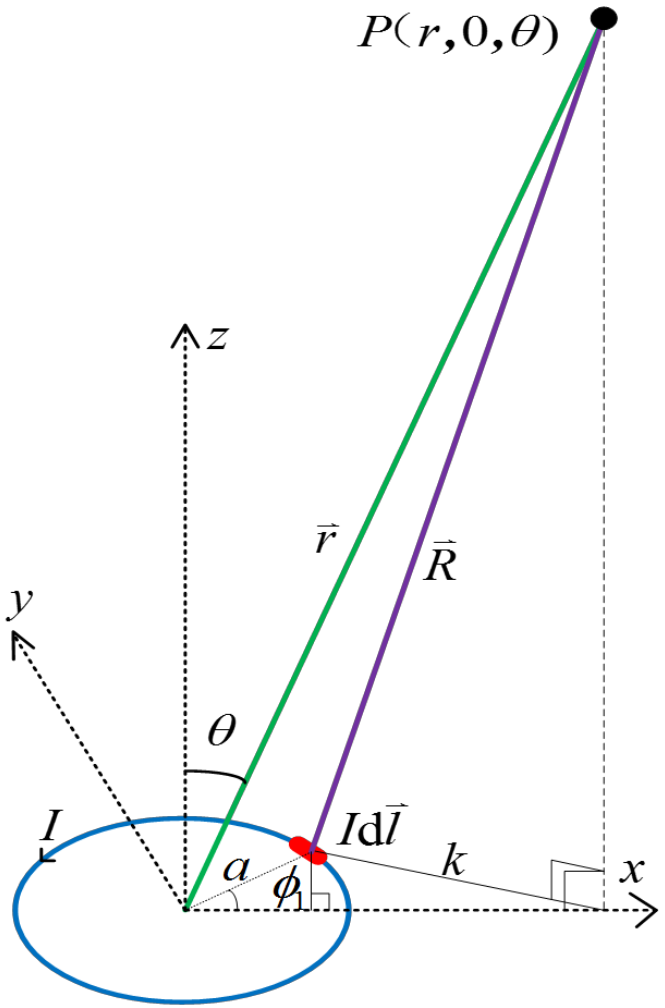
（3）矩磁材料

要么+1（正），要么-1（反），起到二进制作用
常见矩磁材料：锰镁铁氧体、锂锰铁氧体等
矩磁材料用途： 磁盘存储、开关等

磁偶极子

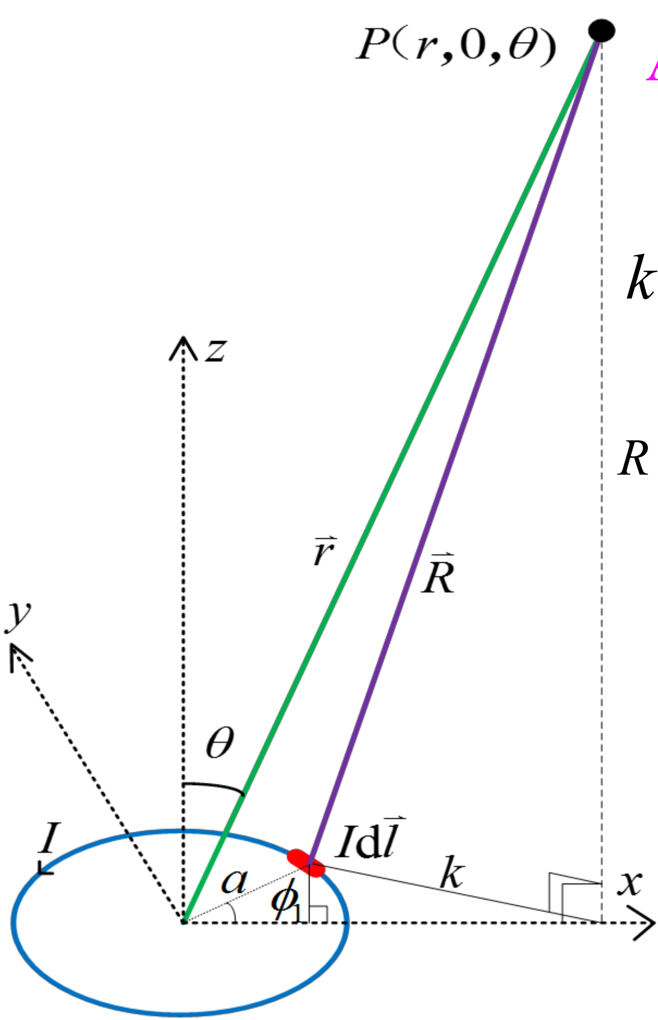
- 通以电流的**极小圆环**称为磁偶极子
- 目标是求**远离圆环的P点**的磁场
（P与圆环的距离远大于圆环半径）
- 根据图形特点，宜采用**球坐标系**
- 根据图形对称性，**P点磁场与 ϕ 无关**

磁偶极子和磁偶极矩



$$\mathbf{A} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} I \mathrm{d}\mathbf{l}$$

磁偶极子和磁偶极矩



$$\mathbf{A}=\int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} I\mathrm{d}\mathbf{l}$$

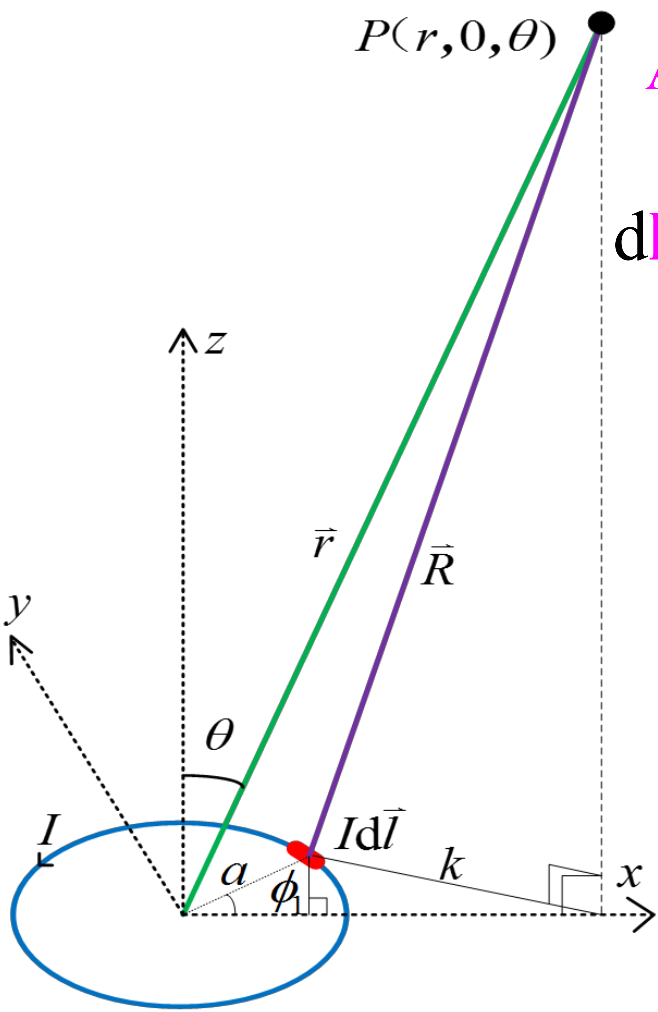
$$k=\sqrt{\left(a\sin\phi_1\right)^2+\left(r-a\cos\phi_1\right)^2}$$

$$R=\sqrt{k^2+\left(r\cos\theta\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(a\sin\phi_1\right)^2+\left(r\sin\theta-a\cos\phi_1\right)^2+\left(r\cos\theta\right)^2}$$

$$=\left(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

磁偶极子和磁偶极矩



$$\mathbf{e}_{\phi_1} = -\cos\phi_1\mathbf{e}_x + \sin\phi_1\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{A} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} I\mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = a\mathrm{d}\phi_1 = a\mathrm{d}\left(\phi_1\mathbf{e}_{\phi_1}\right)$$

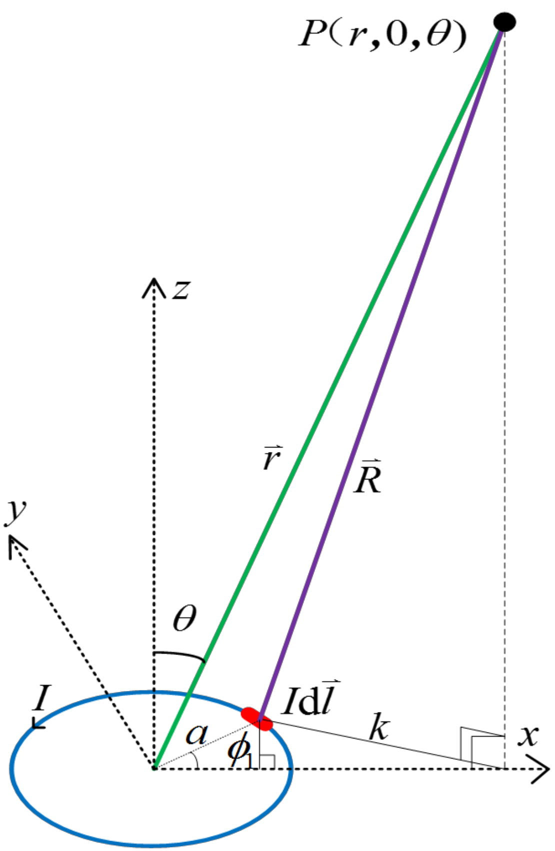
$$\mathrm{d}\mathbf{l} = a\sin\phi_1\mathrm{d}\phi_1\mathbf{e}_x + a\cos\phi_1\mathrm{d}\phi_1\mathbf{e}_y$$

$\mathbf{e}_x$分量在积分时会相互对消，因此不需要考虑

$\mathbf{e}_y$才是P点磁矢位的真正方向

$$\mathbf{A} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} Ia\cos\phi_1\mathrm{d}\phi_1\mathbf{e}_y$$

磁偶极子和磁偶极矩



$$\mathbf{A}=\int_l \frac{\mu_0}{4\pi R} Ia\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1 \mathbf{e_y}$$

$$A=\int \mathrm{d}A=\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R} Ia\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{R}\frac{\mu_0}{4\pi} Ia\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1$$

$$R=\left(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

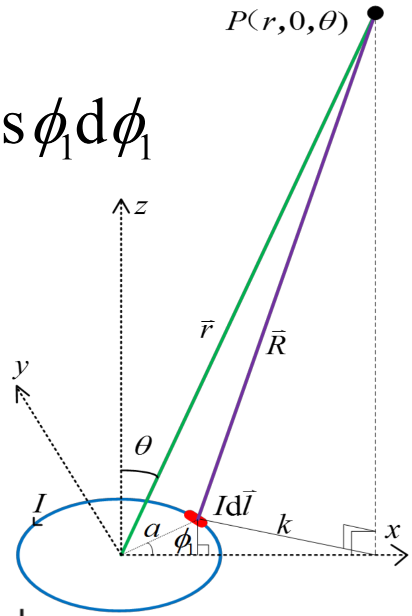
$$A=\int_0^{2\pi}\left(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi_1\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi} Ia\cos\phi_1 \mathrm{d}\phi_1$$

磁偶极子和磁偶极矩

$$A=\int_0^{2\pi}\left(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi_1\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}Ia\cos\phi_1\mathrm{d}\phi_1$$

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi_1\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}Ia\cos\phi_1\mathrm{d}\phi_1$$

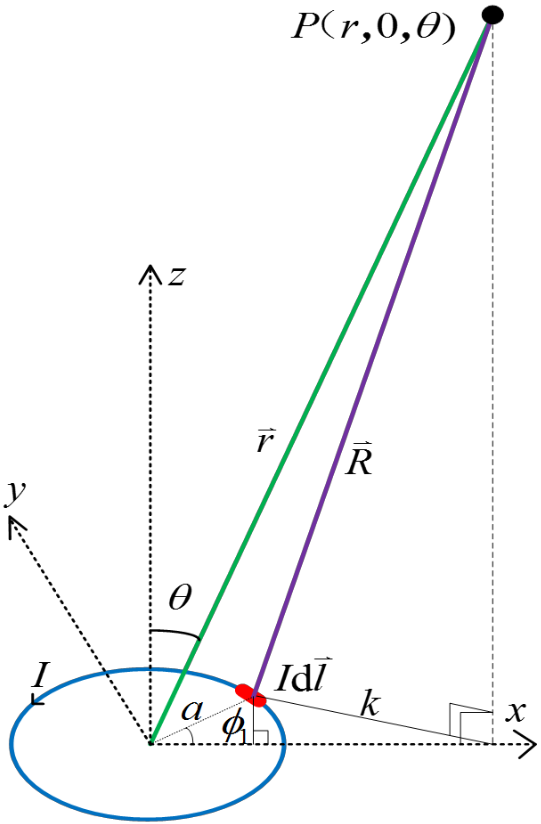
$$\approx\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\left[1-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi_1\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}Ia\cos\phi_1\mathrm{d}\phi_1$$



$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2+\ldots\ldots$$

$$A\approx\frac{\mu_0}{4\pi r}I\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi_1\right)\cos\phi_1 a\,\mathrm{d}\phi_1$$

磁偶极子和磁偶极矩



$$A \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} I \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi_1\right)\cos\phi_1 a \, d\phi_1$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2}\mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times e_r}{4\pi r^2}} \qquad \boxed{\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z = I\mathbf{S}}$$

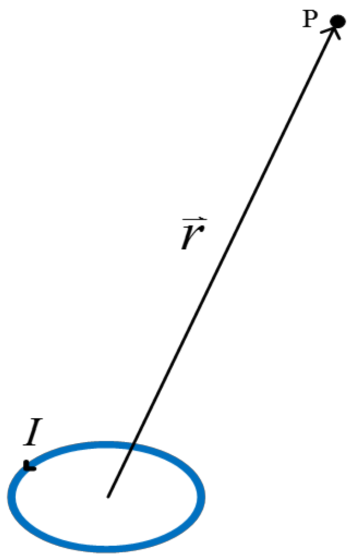
磁偶极矩

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}\left(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta\right)$$

这是经过查阅教材附录334页球坐标系旋度公式，并且经过极为繁琐的计算得到

磁偶极子和电偶极子的对偶

磁偶极子

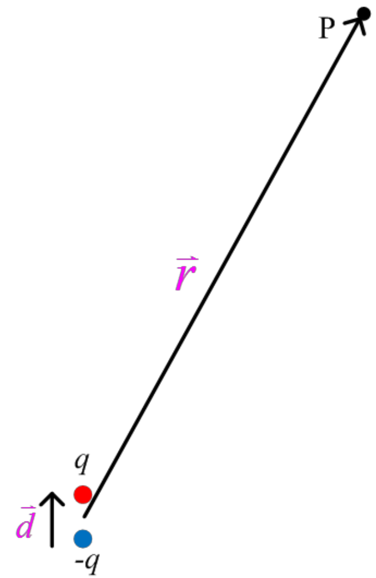


$\vec{m} \longleftrightarrow \vec{p}$

$\vec{S} \longleftrightarrow \vec{d}$

$I \longleftrightarrow q$

电偶极子



磁矢位 $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$

电位 $\varphi = \dfrac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

磁偶极矩 $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z = I\mathbf{S}$

电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$

材料的磁化

- 电子绕原子核运动，这是电荷的流动，
- 电荷的流动就形成了电流，称为分子电流（束缚电流）
- 分子电流会产生磁场 电子绕核运动 → 分子电流 → 磁偶极子
- 无外加磁场时，分子电流磁场杂乱无章，总磁场为零
- 有外加磁场时，分子电流受力，方向趋同，产生不为零的总磁场
- 单个分子电流的磁偶极矩为 $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$
- 单位体积内的分子磁矩矢量和称为磁化强度

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

外加磁场

↓

分子电流受力重新排布

↓

相当于很多磁偶极子，产生附加磁场

材料的磁化

$$\mathbf{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

$$\mathbf{A}=\int_V \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{J}\mathrm{d}V$$

$$\mathbf{A}=\int_S \frac{\mu_0}{4\pi R}\mathbf{K}\mathrm{d}S$$

- 经过极为复杂的推导过程，可得

$$\mathbf{A}=\int_V \frac{\mu_0\nabla\times\mathbf{M}}{4\pi R}\mathrm{d}V+\oint_S \frac{\mu_0\mathbf{M}\times\mathbf{e}_n}{4\pi R}\mathrm{d}S$$

- 大量磁偶极子的作用可等效为

磁化体电流和磁化面电流的共同作用

$$\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}_M=\mathbf{M}\times\mathbf{e}_n$$

$\nabla\times\vec{M}$、$\vec{M}\times\vec{e}_n$ 与电流密度的单位相同.

对A的贡献等效为体电流和面电流共同作用.

这是数学推导出来的结果在物理上的解释.

导磁材料中的安培环路定律（微分形式）

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$ (in vacuum)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$$ (in magnetic material)

$$\boxed{\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}}$$ 附加磁化的等效体密度

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$ (in magnetic material)

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

$$\boxed{\text{Let } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}$$

导磁材料中安培环路定律的微分形式

导磁材料中的安培环路定律（积分形式）

$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ 导磁材料中安培环路定律的微分形式

斯托克斯旋度定理 $\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_s \nabla\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=I$$

导磁材料中安培环路定律的积分形式

$$\boxed{\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I}$$

微分形式

Stokes旋度定理

积分形式

B与H的关系

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}$$

M未知，所以还是无法建立**B**和**H**的关系

M与H有关，其关系可通过实验测定，有很多种可能性

当导磁材料为线性且各向同性时，**M**与**H**成正比

$\mathbf{M}=\chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}$　　χ_{m}称为磁化率，无量纲

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})=\mu_0(\mathbf{H}+\chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H})=\mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})\mathbf{H}=\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\mathbf{H}=\mu\mathbf{H}$$

$\mu_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{m}}$称为相对磁导率，$\mu=\mu_{\mathrm{r}}\mu_0$称为磁导率

$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$　　这就是线性各项同性材料中的**B**和**H**关系

磁通量、磁通密度和磁场强度的联系和区别

磁偶极子、磁偶极矩

↓

磁介质中存在大量分子电流 ⟶ 得到A的形式、导致的体密度与面密度

↓ 磁化强度M

磁介质中的安培环路定律 ⟵ 定义H、用M和H关系得出B与H的关系

磁通量：磁感线穿过平面S的数量

磁通密度B ⟶ $B=\nabla\times A$、B从力的角度定义，$dB = Idl \times e_r$

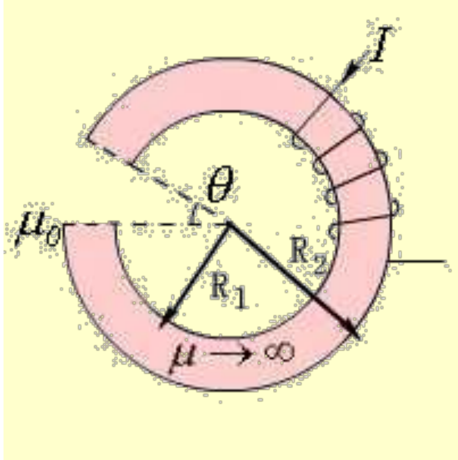
磁场强度H ⟶ $H=\frac{B}{\mu_0}-M$，反映了B和M间的关系

安培环路定律例题1：一矩形截面的镯环，镯环上绕有 N 匝线圈，电流为 I，如图所示，试求气隙中的 **B** 和 **H**。

解: 在镯环内, $\mu \to \infty$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 为有限值，所以镯环内 $H = 0$。

取安培环路的半径 , $R_1 < r < R_2$
且环路与 I 交链,

$\mu \to \infty$
$\mu = \mu_0\mu_r$
$\Longrightarrow \mu_r = 1 + \chi_m \to \infty$



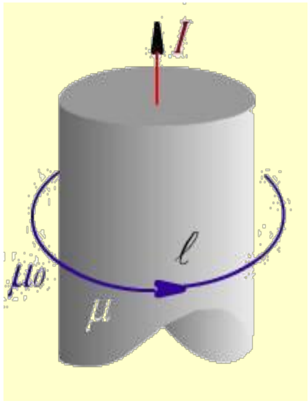
镯环

忽略边缘效应 $\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = NI$

$Hr\theta = NI$ $r\theta$为弧长

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{r\theta}\mathbf{e}_\phi \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{r\theta}\mathbf{e}_\phi$$

安培环路定律例2：有一磁导率为 μ ，半径为 a 的无限长导磁圆柱，其轴线处有无限长的线电流 I，圆柱外是空气 μ_0，试求 B，H 与 M 的分布。



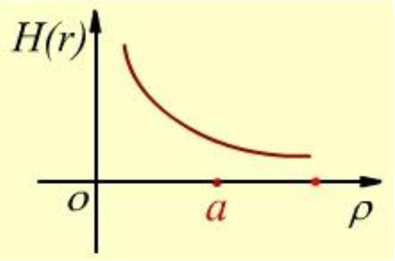
解：平行平面磁场，且轴对称，故

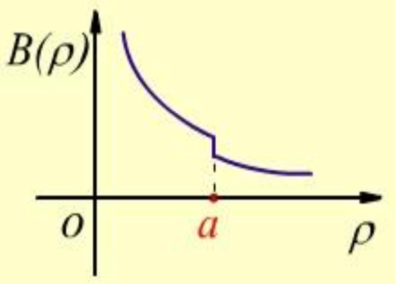
$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H = I$$

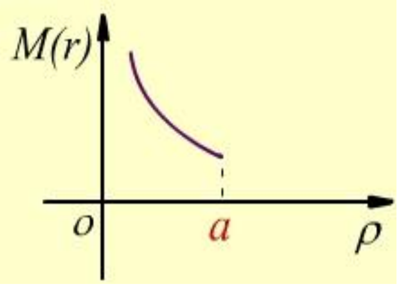
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi \quad 0<\rho<\infty$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi & 0<\rho<a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi & a<\rho<\infty \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \begin{cases} \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\cdot\dfrac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi & 0<\rho<a \\ 0 & a<\rho<\infty \end{cases}$$







作业十三

1　写出J_m（磁化电流面密度）和K_m（磁化电流线密度）与磁化强度M之间的关系式

2　写出导磁材料中H、B和M三者之间的关系式（三者同时出现）

3　写出导磁材料中的安培环路定律（积分形式和微分形式）

4　简述磁通量、磁通密度和磁场强度的联系和区别

5　教材3-2-1

6　教材3-2-2

7　教材3-2-3