20 时变电磁场

-麦克斯韦方程组和分界面衔接条件

邹建龙

主要内容

- 时变电磁场的定义
- 法拉第电磁感应定律
- 全电流定律（时变电磁场的安培环路定律）
- 麦克斯韦方程组（积分形式）
- 时变电磁场、静电场、恒定电场、恒定磁场对比
- 麦克斯韦方程组（微分形式）
- 时变电磁场媒质分界面上的衔接条件
- 时变电磁场理想导体与介质分界面的衔接条件

时变电磁场的定义

随时间变化的电场和磁场称为时变电磁场。

交流电、电磁波、随时间变化才能产生波

法拉第电磁感应定律

变化的磁场会产生感应电动势（**electromotive force**，简写为**emf**），这称为法拉第电磁感应定律。（这是一个实验定律）

实验：楞次定律

emf：克服电场力做功

$$\mathrm{emf} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\left(\int_s \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\right)}{dt} = -\int_s \frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot d\mathbf{S}}$$

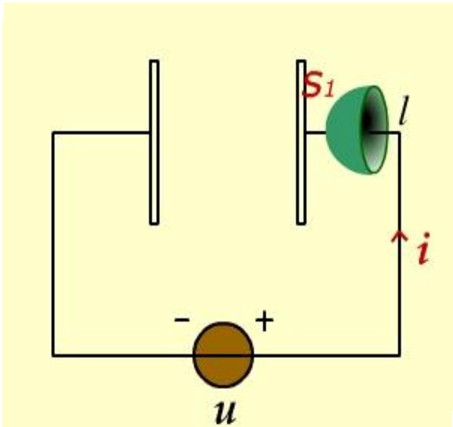
如果闭合回路或闭合回路的一部分相对于媒质有运动，由此产生的感应电动势（动生电动势）为

$U = \frac{d\Phi}{dt}$ = 电场力做功.

$$\mathrm{emf} = \oint_l (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$$

总感应电动势等于两种感应电动势之和。

全电流定律（时变电磁场的安培环流定律）的矛盾



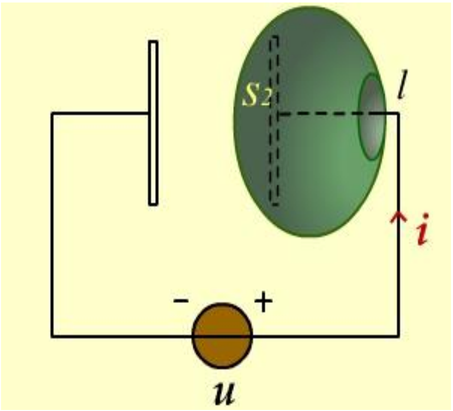
交变电路用安培环路定律

经过S_1面 $$\oint_l \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = i$$

经过S_2面 $$\oint_l \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

穿出闭合面的的电流为0

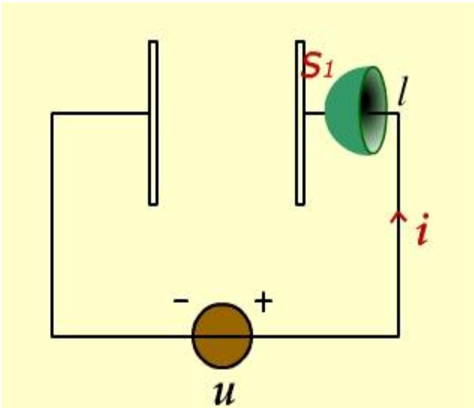
$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{总} = \int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$



产生矛盾的原因是电流不连续。

Stokes旋度定理要求了$(\nabla\times\vec{H})$是连续的

时变电磁场安培环路定律矛盾的解决



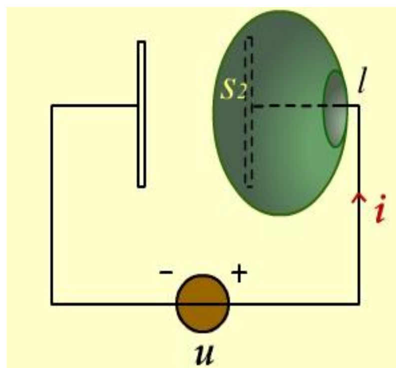
交变电路用安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{总} = \int_s \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

经过S_1面 $$\oint_l \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = i$$

麦克斯韦假想极板间有电流 i

经过S_2面 $$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J}_\mathrm{d}\cdot d\mathbf{S} = i$$



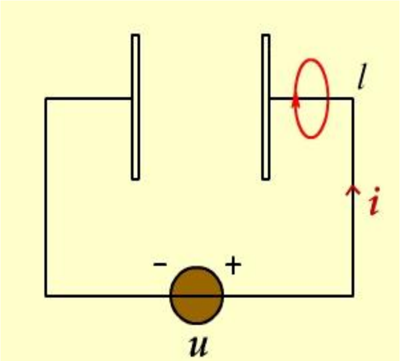
引入假想电流后，电流在极板两侧仍然连续，因此安培环流定律就不矛盾了！

时变电磁场安培环路定律的描述

q变 $\xrightarrow{q=\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}}$ $\vec{D}$变(t)

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 为电通量密度

赫兹证明 $q=\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}$ 在时变电磁场中成立



$I=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}\right)$

$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \longrightarrow I_d=\int_S \vec{J}_D\cdot d\vec{S}$

数学上是相等的，物理上是等效的

由于在电容极板间假想的电流好像是将导线上的电流挪到了极板间，

所以假想的电流称为位移电流，而常规的电流称为传导电流。

那么，位移电流是怎么产生的呢?

本质上是符合电流的定义

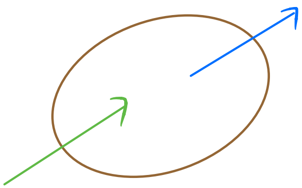
时变电路中，电流变化，则极板上的电荷（电量）会产生变化，因此电通量也会产生变化。而电通量相当于电量。所以，电通量随时间的变化率就相当于电量随时间的变化率，这其实就是电流!

安培环路定律包围的电流既包含传导电流，也包含位移电流

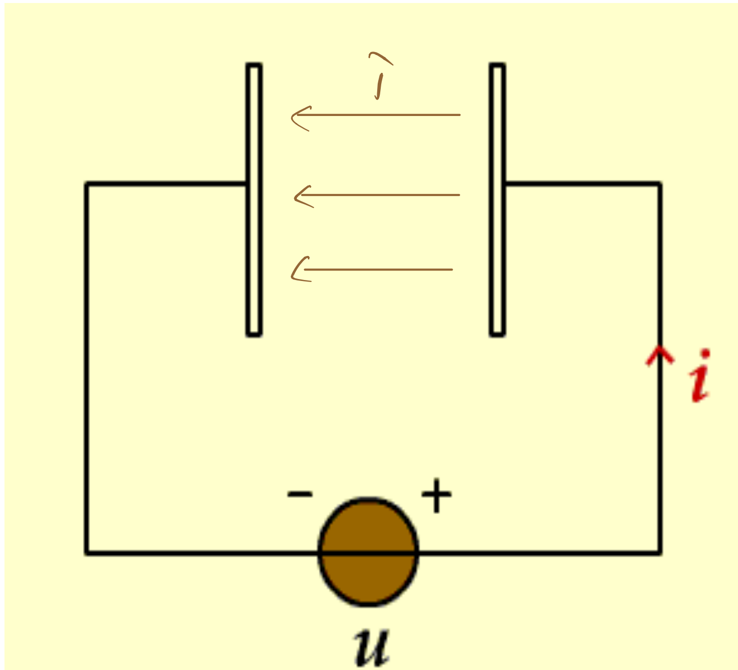
$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{总} = I_{传导} + I_{位移} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_d\cdot d\mathbf{S}$$

电流连续性

$i_d = \oint \vec{J}_d \, d\vec{s}$



$i = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$



$$\oint_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} = 0 \Longrightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

KCL

全电流定律（时变电磁场的安培环路定律）

麦克斯韦猜测正确

赫兹证明正确。

高斯定律 $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$

电流连续性

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \mathbf{J}_d\cdot d\mathbf{S}$$

电荷守恒定律 $\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\dfrac{dq}{dt}$

D：

电通量密度：本质定义

电位移矢量：推导的物理意义

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\left(\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\right)}{dt} = -\oint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{J}_d\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J}_\mathrm{d} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{总} = I_{传导} + I_{位移} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}_\mathrm{d}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{总} = I_{传导} + I_{位移} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

麦克斯韦方程组（积分形式）

- 全电流定律

（时变电磁场安培环路定律）

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- 法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$ （不考虑动生电动势）

- 磁场高斯定律

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

- 电场高斯定律

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

描述媒质特性的方程组

统一了所有电磁场内容

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$$

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 类似电容的关系

ε-介电常数

电物性质 → 电能

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 类似电感的关系

μ-磁导率

磁物性质 → 磁能

$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 类似电阻的关系

γ-电导率

广义欧姆定律.

麦克斯韦方程组的作用

类似电路中的KCL、KVL

描述媒质特性方程组（电磁场本构关系）

的作用类似电路中的VCR

时变电磁场、静电场、恒定电场、恒定磁场方程对比

时变电磁场	静电场	恒定电场	恒定磁场
$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$	$\cancel{\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}} = \cancel{\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}} + \cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}}$ D = 0+0	$\boxed{\cancel{\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}} = \cancel{\frac{dq}{dt}}\ 0 \quad \oint_l \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}}}$	$\boxed{\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I}$ $\cancel{\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}} + \cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}}$
$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$	$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0}$ $-\cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}\cdot d\mathbf{S}$	$\boxed{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0}$ $-\cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}\cdot d\mathbf{S}$	$\cancel{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}} =$ $-\cancel{\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}\cdot d\mathbf{S}$
$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$	$\cancel{\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}} = 0$ 没有B	$\cancel{\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}} = 0$	$\boxed{\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0}$
$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$	$\boxed{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q}$ 没有电流 ↑	$\cancel{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q}$	$\cancel{\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q}$
$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$	$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}}$ $\cancel{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}}$ $\cancel{\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}}$	$\cancel{\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}}$ $\cancel{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}}$ $\boxed{\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}}$	$\cancel{\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}}$ $\boxed{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}}$ $\cancel{\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}}$

麦克斯韦方程组（微分形式）

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \qquad \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$\Downarrow$ 斯托克斯旋度定理 $\Downarrow$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q = \int_V \rho\, dV$$

$\Downarrow$ 高斯散度定理 $\Downarrow$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

麦克斯韦方程组（微分形式）

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

麦克斯韦方程组的作用

类似电路中的KCL、KVL

描述媒质特性方程组的作用

类似电路中的VCR

麦克斯韦方程组（微分形式）的物理意义

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

电流和时变电场（位移电流）都会产生旋转磁场，电流和变化的电场是磁场的漩涡源，电与磁符合右手螺旋法则

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

时变磁场将产生旋转电场，变化的磁场是电场的漩涡源，磁和电符合左手法则

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

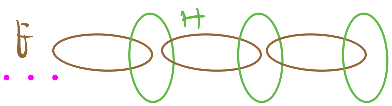
磁场为无散场，磁力线为闭合曲线，无头无尾，因此任意闭合曲面的磁通量为零

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

电场为有散场，其发散源（散度源）是电荷

电磁场一旦产生，即使脱离场源，磁场和电场相互激发

E变化 ⇒ D变化 ⇒ H变化 ⇒ B变化 ⇒ E变化......



由此可见，电场变化和磁场变化会交替进行，从而形成电磁波。

时变电磁场分界面上的衔接条件

取闭合积分路径，面积→0

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{K}\cdot d\mathbf{l} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &H_{1t} - H_{2t} = K \\ &(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times \mathbf{e}_n = \mathbf{K}\end{aligned}}$$

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q \Rightarrow \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

时变电磁场媒质分界面上的衔接条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

通用衔接条件

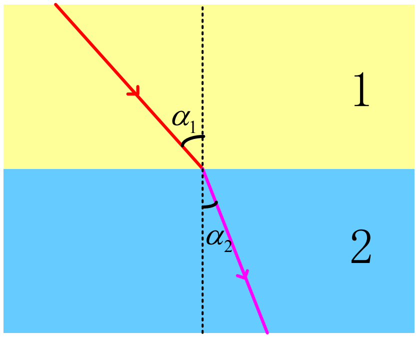
$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

分界面上无自由面电荷和面电流时的衔接条件



$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

时变电磁场折射定律

（无面电荷和面电流）

理想导体与介质分界面衔接条件

媒质分界面通用衔接条件

$$E_{1t}=E_{2t}$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$$

1和2：靠近分界面为1区域，远离分界面为2区域

$$B_{1n}=B_{2n}$$

$$H_{1t}-H_{2t}=K$$

理想导体（1）与介质（2）分界面衔接条件

$\gamma=\infty \quad \mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}$ J为有限值

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{导体内}=0 \Rightarrow E_{1t}=E_{2t} \Rightarrow \boxed{E_{2t}=0}$$

$$\mathbf{D}_{导体内}=0 \Rightarrow D_{1n}=0 \Rightarrow \boxed{D_{2n}=\sigma}$$

分界面形成一层电荷和面电流

$$\mathbf{B}_{(导体内)}=0 \Rightarrow B_{1n}=0 \Rightarrow \boxed{B_{2n}=0}$$

$$\mathbf{H}_{(导体内)}=0 \Rightarrow H_{1t}=0 \Rightarrow \boxed{-H_{2t}=K}$$

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，常数对时变电磁场贡献相当于0，直接当成0（不是0也没关系）

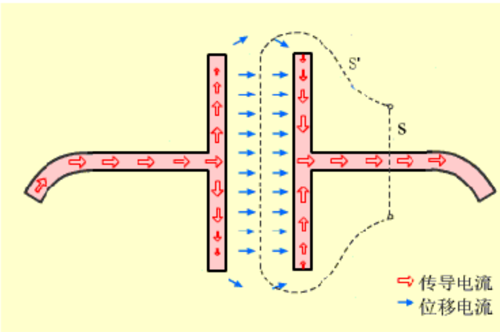
位移电流例1： 已知平板电容器的面积 S，相距 d，介质的介电常数 ε ，极板间电压 $u(t)$。试求位移电流 i_D; 传导电流 i_C与 i_D 的关系是什么？

磁场和电场是相互激发的，相当于考虑第一重关系、

解： 忽略边缘效应和感应电场

后面的激发电场和磁场给忽略了

电场 $$E=\frac{u}{d}\quad,\quad D=\varepsilon E=\frac{\varepsilon u(t)}{d}$$



位移电流密度 $$J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$$

位移电流 认为极板间的位移电流分布是均匀的

传导电流与位移电流

$$i_D=\int_S \boldsymbol{J_D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\varepsilon S}{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=i_c$$

位移电流例2

设导体中存在电场，且电场强度为$E_m \sin\omega t$,导体电导率$\gamma=10^7$S/m，介电常数$\varepsilon=\varepsilon_0$。试比较导体中的传导电流和位移电流的大小。

解：$J=\gamma E=\gamma E_m \sin\omega t$

$J_D=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$J_{\mathrm{d}}=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E_m \sin\omega t)=\varepsilon_0 E_m \omega\cos\omega t \qquad \varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$

$$\left|\frac{J_{\mathrm{d}}}{J}\right|=\frac{\omega\varepsilon_0}{\gamma}=5.56\times10^{-18} f$$

$\omega=2\pi f$

当频率低于光波频率f≈10^{13}Hz时，

在良导体中，位移电流与传导电流相比非常小，近似可以忽略。

作业十八

1 写出麦克斯韦方程组（积分形式和描述媒质特性的本构关系）

2 写出麦克斯韦方程组（微分形式和本构关系），解释物理意义

3 同时写出时变电磁场、静电场、恒定电场、恒定磁场的基本方程（微分形式和本构关系），分析他们的联系和区别。

4 写出时变电磁场媒质分界面的衔接条件

5 教材4-1-1

6 教材4-1-2

7 教材4-2-3