

# 第九章——热力学

## 9.1 热学的研究对象

总体上，大量粒子的热运动遵循着确定规律，这种大量偶然事件的总体所具有的规律性被称为统计规律性。热现象是大量微观粒子热运动的集体表现，服从统计规律。

研究热现象的理论统称为热学。

热学领域包含两大理论，分别是热力学与统计物理学。

|       |   |
|-------|---|
| 热力学   | 由 <b>观察和实验总结归纳</b> 出的有关热现象的规律构成热学的宏观理论；根据自然界 <b>大量现象的观察与实验总结的几个基本定理</b> ，用 <b>逻辑推理</b> 的方法研究宏观物体的热性质，而不追究其微观本质。                         |
| 统计物理学 | 从分子、原子等 <b>微观粒子的运动</b> 和它们之间的 <b>相互作用</b> 出发，研究热现象的规律；从物质的 <b>微观结构</b> 出发，依据 <b>粒子运动所遵循的力学规律</b> ，对大量粒子的总体，应用 <b>统计方法</b> 去研究热现象的规律与本质。 |

## 9.2 平衡态 理想气体状态方程

### 9.2.1 气体的状态参量

用来描述物体运动状态的物理量称为状态参量。

**热力学的研究对象**是由大量粒子组成的宏观物体或物体系，常称之为**热力学系统**，简称**系统**，也叫**工质**。

| 系统的分类 | 系统与外界的物质交换 | 系统与外界的能量交换 |
|-------|------------|------------|
| 开放系统  | √          | √          |
| 封闭系统  | ×          | √          |
| 孤立系统  | ×          | ×          |

**气体是最简单的热力学系统，也是主要的研究对象**，对于定量的气体，其状态可用气体的**压强、体积与温度**来描述，称之为**气体的状态参量**。

|        |   |
|--------|---|
| 体积 $V$ | 等于容器体积，大于气体分子总体积  |
| 压强 $p$ | 也称压力，气体在单位面积容器壁上的垂直作用力  |
| 温度 $T$ | 物体的冷热程度，其数值表示法称作温标，最基本的温标是热力学温标，符号为 $T$ ，单位是 $K$ ，常用温标为摄氏温标，符号 $t$ ，单位 $^{\circ}C$ ，且满足 $t = T - 273.15$ 由上规定的摄氏温标中，水的冰点是 $0^{\circ}C$ ，沸点是 $99.975^{\circ}C$ 。 |

## 9.2.2 平衡态

平衡态是指系统在没有外界（与系统有关的周围环境）影响的条件下，系统各部分的宏观性质长时间不发生变化的状态。

“没有外界影响”指的是系统和外界之间不通过做功或传热的方式交换能量，没有能量和粒子的交换，平衡态在此意义下是一种理想化状态。

应指出，平衡态是指系统的宏观性质不随时间变化的状态，但在微观上，平衡态系统内部分子仍在做永不止息的热运动，分子热运动的平均效果不随时间变化。因而也把这种平衡称之为热动平衡。

只有在平衡态，系统的宏观性质才可以用一组确定的参量描写，而非平衡态各部分状态不同且不稳定，无法用一组确定参量描述系统宏观状态。

## 热力学第零定律

如果两个热力学系统中的每一个都与第三个热力学系统处于热平衡(温度相同)，则它们彼此也必定处于热平衡。

## 9.2.3 理想气体状态方程

各种实际气体在压强不太大、温度不太低的条件下，经过综合各实验定律，可以导出1mol气体的状态方程，为

$$pV = RT$$

上式中， $R = 8.314J/(mol \cdot K)$ ，为摩尔气体常量。

若气体质量为 $m$ ，摩尔质量为 $M$ ，则气体的摩尔数为 $\nu = m/M$ ，则气体状态方程为

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$$

上式被称作**克拉珀龙方程**。

实际气体在温度不太低，压强趋近于零时严格遵守该方程。

我们把**在任何条件下都严格遵守克拉珀龙方程的气体称为理想气体**，而将上式称为理想气体状态方程。

对于混合气体，上述结论依然成立。

设混合气体由 $n$ 种成分气体组成，第 $i$ 种气体的质量为 $m_i$ ，摩尔质量为 $M_i$ ，分压强为 $p_i$ ，则满足

$$p_i V = \frac{m_i}{M_i} RT$$

对所有气体求和得

$$\begin{aligned} \sum p_i V &= \sum \frac{m_i}{M_i} RT \\ pV &= \sum \nu_i RT = \nu RT = \frac{m}{M} RT \end{aligned}$$

PS：对于实际气体，应当使用范德瓦尔斯公式： $(p + a/V^2)(V - b) = RT$ ，其中的 $a, b$ 为范德

瓦尔斯修正量，经实验确定。

## 9.3 功 热量 内能 热力学第一定律

### 9.3.1 功 热量 内能

- 绝热过程中系统状态的变化只是由外界对系统做功引起的。
  - 绝热过程中的功仅由系统的初、末状态完全决定，与过程的具体进行方式无关。
- 在热力学系统中存在一种仅由其热运动状态单值决定的能量，它的改变可以用绝热过程中外界对系统所做的功来量度。这种能量称作内能。

设 $E_1$ 与 $E_2$ 分别表示系统在初、末两平衡态的内能，用 $A_Q$ 表示外界在绝热过程对系统做的功，做功的结果将使得系统的内能增加，即：

$$E_2 - E_1 = A_Q$$

设外界对系统不做功，仅由于外界与系统之间的温差而发生的能量交换，使得系统的内能由 $E_1$ 变成 $E_2$ 时，外界传给系统的“热量”为 $Q$ ，则：

$$E_2 - E_1 = Q$$

内能是系统状态的单值函数，是一个状态量；功和“热量”不属于任何系统，与系统状态变化过程相关，是过程量。

“热量”不是某种形式的能量，而是系统之间因温度不同而交换的能量的量度。

### 9.3.2 热力学第一定律

一般情况下，假定在系统从内能为 $E_1$ 的状态变化到内能为 $E_2$ 的状态的某一过程中，外界传给系统的“热量”为 $Q$ ，同时系统对外界做功为 $A$ ，根据能量守恒与转换定律，有：

$$Q = (E_2 - E_1) + A$$

根据 $Q$ 、 $A$ 的正负号确定能量转化方向。

上式即为热力学第一定律的数学表达式，它表明：系统从外界吸收的热量，一部分使其内能增加，另一部分则用于对外界做功。应用此式时，只需保证始末状态时平衡态即可。

对于无限小的状态变化过程，热力学第一定律可表示为：

$$dQ = dE + dA$$

*(注意，上式中只有 $dE$ 表示内能这一状态量的微分，而其余两个只代表无限小过程中的一个无限小量。)*

热力学第一定律内含了能量守恒与转换定律，适用于任何系统（气、液、固）。

热力学第一定律说明，做功必须有能量转化而来，不消耗能量而获得功的企图是不可能实现的，即：第一类永动机是不可能制成的。

## 9.4 准静态过程中功和热量的计算

### 9.4.1 准静态过程

热力学过程，系统从某状态开始经历一系列的中间状态到达另一个状态的过程。

准静态过程(平衡过程)，在这种过程中系统所经历的任意中间过程都无限接近平衡态。

实际上，准静态过程就是足够缓慢过程的理想极限。所有的实际过程都是非准静态过程。

### 9.4.2 准静态过程中功的计算

设一定质量的气体贮藏在气缸中，活塞面积为 $S$ ，气体作用于活塞的压强为 $p$ ，当活塞向外移动微小距离 $dl$ 时，气体对活塞所做元功为：

$$dA = fdl = pSdl = pdV$$

在一个有限的准静态过程中，当气体的体积由 $V_1$ 变化为 $V_2$ 时，气体对外做功为：

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

在 $p - V$ 图中，气体对外做功可以理解为曲边梯形的面积。

根据上式，热力学第一定律可以改写为：

$$dQ = dE + pdV$$

或：

$$Q = (E_2 - E_1) + \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

### 9.4.3 准静态过程中热量的计算 热容

质量为 $m$ 的物体，当温度从 $T_1$ 变为 $T_2$ 时，从外界吸收热量为：

$$Q = mc(T_2 - T_1) = \nu C_x(T_2 - T_1)$$

其中 $c$ 为物体的比热容，表示单位质量物体在温度变化 $1T$ 时传递的热量。

物体质量与比热容的乘积，定义为热容：

$$\overline{C}_x = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_x, C_x = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_x = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_x$$

下标表示具体过程，注意：热容是过程量，与具体过程有关；

**1mol物质的热容，称为该物质的摩尔热容**

$$\overline{C}_x = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_x, C_x = \frac{1}{\nu} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_x = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dQ}{dT}\right)_x$$

- 温度变化不大时，同一物质的比热容视为定值。同时热容也随传递热量过程的改变而改变，只有指明具体过程与具体物质才能确定唯一的热容值。
- 对于气体，1mol气体在等体过程中的热容称为定体摩尔热容 ( $C_V$ )，在等压过程中的热容称为定压摩尔热容 ( $C_p$ )。

在等体过程中，气体体积不变，对外界不做功，吸收热量 $Q_V$ 等于内能增量，即：

$$Q_V = E_2 - E_1 = \Delta E$$

在等压过程中，气体压强不变，当气体的体积由 $V_1$ 变化为 $V_2$ 时，气体对外做功为：

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

同时吸收热量 $Q_p$ ，由热力学第一定律得：

$$Q_p = \Delta E + p\Delta V = Q_V + p\Delta V$$

假定 $1\text{mol}$ 气体在等体过程中温度升高 $\Delta T$ 时，吸收热量 $Q_V$ ，则气体的定体摩尔热容定义为：

$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q_V}{\Delta T} = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V$$

同理， $1\text{mol}$ 气体在等压过程中温度升高 $\Delta T$ 时，吸收热量 $Q_p$ ，则气体的定压摩尔热容定义为：

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q_p}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta E + p\Delta V}{\Delta T}\right) = \left(\frac{dE}{dT}\right)_p + p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$$

$C_V$ 、 $C_p$ 的单位均为 $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

| 准静态过程中热量的计算                            |                          |
|--|--------------------------|
| $Q_x = \nu \int_{T_1}^{T_2} C_x(T) dT$ | $Q = \nu C_x(T_2 - T_1)$ |

## 9.5 理想气体的内能和 $C_V$ 、 $C_p$

### 9.5.1 理想气体的内能

#### 焦耳定律

气体向真空绝热容器膨胀，不受阻碍因而不对外做功，和外界也不存在热量交换，因而有：

$$A = 0, \quad Q = 0$$

即：

$$E_2 = E_1$$

这说明，气体的内能仅是其温度的函数，与体积无关，即

$$E = E(T)$$

事实上，经过实验验证发现，焦耳定律只是反映了气体的内能与体积变化的关系很小，由体积膨胀导致的内能变化不易观测；同时，压强越小，气体内能随体积的变化越小；压强趋于零时，气体内能趋于仅是温度的函数。

因而，通常把在任何情况下都遵守焦耳定律的气体定义为理想气体，也即：理想气体的内能仅仅是其温度的函数。

### 9.5.2 关于 $C_V$ 、 $C_p$ 的进一步研究

由于理想气体的内能仅仅是其温度的函数，因此：

$$\left(\frac{dE}{dT}\right)_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_p = \frac{dE}{dT}$$

所以：

- 理想气体的定体摩尔热容可表示为：

$$C_V = \frac{dE}{dT}$$

因而

$$dE = C_V dT \quad (\text{理想气体内能计算公式})$$

积分可得：

$$E(T) = E(T_0) + \int_{T_0}^T C_V dT$$

如果研究 $\nu mol$ 理想气体，只需将以上等式中的 $C_V$ 改为 $\nu C_V$ 即可。

- 理想气体的定压摩尔热容可表示为：

$$C_p = \frac{dE}{dT} + p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = C_V + p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$$

由于理想气体状态方程为：

$$pV = RT$$

在压强不变的情况下，等式两边对 $T$ 求导，得：

$$p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = R$$

所以经过整理：

$$C_p = C_V + R$$

此公式也叫迈耶公式，它表明，理想气体的定压摩尔热容等于其定体摩尔热容与摩尔气体常量之和。等压过程相对于等体过程除了气体内能（温度）变化，还对外界做功。

通常，把定压摩尔热容与定体摩尔热容之比 $\frac{C_p}{C_V} = \gamma > 1$ ，称为比热容比。在一般问题涉及的温度里，这三个量均近似为常量，规律如下：

| 气体分子类型                                   | $C_V$       | $\gamma$ |
|--|-------------|----------|
| 单原子分子气体                                  | $3R/2$      | $5/3$    |
| 双原子分子气体                                  | $5R/2$      | $7/5$    |
| 多原子分子气体                                  | $3R = 6R/2$ | $4/3$    |
| $C_V = kR/2$ ，记忆方法：不同分子在空间的自由度 $k$ 再除以 2 |             |          |

## 9.6 热力学第一定律对理想气体在典型准静态过程中的应用

### 9.6.1 等体过程

等体过程中，系统不对外做功，由热力学第一定律有：

$$dQ_V = dE$$

假定 $\nu mol$ 气体有状态 $(p_1, V_1, T_1)$ 变化到 $(p_2, V_1, T_2)$ ，并且定体摩尔热容 $C_V$ 是常量，则：

$$Q_V = E_2 - E_1 = \nu C_V(T_2 - T_1)$$

等体过程中气体吸收的热量，全部用来增加它的内能，从而使它的温度上升

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

由于：

$$pV = \nu RT$$

所以：

$$\frac{\Delta pV}{R} = \nu \Delta T$$

所以：

$$Q_V = E_2 - E_1 = \frac{V}{R} C_V(p_2 - p_1)$$

上式说明等体过程，气体吸收的热量只用于增加其内能，表现为压强增加、温度升高。

## 9.6.2 等压过程

假定 $\nu mol$ 气体有状态 $(p_1, V_1, T_1)$ 变化到 $(p_1, V_2, T_2)$ 时，对外做功为：

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

根据理想气体状态方程改写：

$$A = \nu R(T_2 - T_1)$$

根据热力学第一定律，可见理想气体在等压过程中吸收的热量为：

$$Q_p = (E_2 - E_1) + A = (E_2 - E_1) + \nu R(T_2 - T_1)$$

假定气体的定压摩尔热容 $C_p$ 为常量，则有：

$$Q_p = \nu C_p(T_2 - T_1)$$

因而，在等压过程中理想气体的内能增量为：

$$E_2 - E_1 = Q_p - A = \nu(C_p - R)(T_2 - T_1) = \nu C_V(T_2 - T_1)$$

上式说明，在等压过程中气体吸收的热量除了用来对外做功，还有一部分用来增加内能。

## 9.6.3 等温过程

由于理想气体的内能只与温度相关，因此在等温过程中内能不变，根据热力学第一定律，有：

$$Q_T = A$$

等温膨胀过程中，理想气体吸收的热量完全用来做功；等温压缩过程中，外界对气体做的功完全转化为气体对外放出的热量。

假定 $\nu mol$ 气体有状态 $(p_1, V_1, T_1)$ 变化到 $(p_2, V_2, T_2)$ ，则：

$$Q_T = A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV$$

所以：

$$Q_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

由于：

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

所以：

$$Q_T = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

热量和功的值都等于等温线下的面积。

## 9.7 绝热过程

### 9.7.1 绝热过程

系统在绝热过程中始终不与外界交换热量，气缸内气体的燃烧爆炸、声波传播时空气的压缩膨胀由于过程极快、系统来不及交换热量，可以看作近似的绝热过程。

由于  $Q = 0$ ，热力学第一定律变为：

$$A = E_1 - E_2$$

系统内能的改变完全是外界对它做功的结果。

当理想气体经由任意的绝热过程，温度由  $T_1$  变化为  $T$  时，气体对外做功为：

$$A = -(E_2 - E_1) = -\nu C_V (T_2 - T_1)$$

在无限小的准静态绝热过程中，有：

$$dA = -dE = -\nu C_V dT$$

根据  $dA = pdV$ ，可得：

$$pdV = -\nu C_V dT$$

由  $pV = \nu RT$ ，两边取全微分可得：

$$pdV + Vdp = \nu R dT$$

联立得：

$$(C_V + R)pdV + C_V Vdp = 0$$

由于  $C_p = C_V + R$ ， $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ ，可将上式化为：

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

此为理想气体在准静态绝热过程中所满足的微分方程。视  $\gamma$  为常量，两边积分，得：

$$\ln p + \gamma \ln V = C$$

或：

$$pV^\gamma = C_1$$

继而可得：

$$TV^{\gamma-1} = C_2$$

$$p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = C_3$$

这三个关系式就是在准静态绝热过程中理想气体满足得关系，称作**泊松方程**或**绝热过程方程**。

理想气体在绝热过程中所做的功，还可以根据功的定义利用绝热过程方程求得。

由于：

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = C$$

所以：



$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = -\frac{\nu R}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

## \*9.7.2 多方过程

多方过程方程：

$$pV^n = C$$

根据此方程，两边取全微分，有：

$$pd(V^n) + V^n dp = 0$$

$$\frac{dp}{dV} = -n \frac{p}{V}$$

|              |      |
|--------------|------|
| $n = 1$      | 等温过程 |
| $n = \gamma$ | 绝热过程 |
| $n = 0$      | 等压过程 |
| $n = \infty$ | 等体过程 |

多方过程内能增量计算：

$$\Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1)$$

多方过程功的计算：

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^n \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = -\frac{\nu R}{n-1} (T_2 - T_1)$$

多方过程热量的计算：

$$Q = \nu C_n (T_2 - T_1) = \Delta E + A = \nu (C_V - \frac{R}{n-1}) (T_2 - T_1)$$

多方过程的摩尔热容：

$$C_n = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{n-\gamma}{n-1} C_V = \frac{(n-\gamma)R}{(n-1)(\gamma-1)}$$

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| $0 < n < 1$           | $C_p < C_n < \infty$ |
| $1 < n < \gamma$      | $-\infty < C_n < 0$  |
| $\gamma < n < \infty$ | $0 < C_n < C_V$      |

## 应用热力学第一定律求解热学问题的一般思路

- 选好研究对象（具体的热力学系统），弄清楚系统所经历的状态变化过程的特征以及已知状态参量和未知状态参量；
- 应用状态方程和过程方程先求出有关的状态参量；
- 应用内能、热量、功的计算规律和热力学第一定律列出相关方程并求出结果。

## 多过程组合的联合过程问题

- 对各分过程进行分析，特别注意两过程的联接状态，这些状态既满足状态方程，又满足与它相连的两个过程的过程方程。

# 理想气体在各种过程中的重要公式

| 过程   | 特征      | 过程方程  | 吸收热量 $Q$                                       | 对外做功 $A$                                | 内能增量 $\Delta E$      |
|--|---------|---|--|---|----------------------|
| 等体   | $V = C$ | $\frac{p}{T} = C$   | $\nu C_V(T_2 - T_1)$                           | 0                                       | $\nu C_V(T_2 - T_1)$ |
| 等压   | $p = C$ | $\frac{V}{T} = C$   | $\nu C_p(T_2 - T_1)$                           | $\frac{p(V_2 - V_1)}{\nu R(T_2 - T_1)}$ | $\nu C_V(T_2 - T_1)$ |
| 等温   | $T = C$ | $pV = C$  | $\nu RT \ln(V_2/V_1)$<br>$\nu RT \ln(p_2/p_1)$ | $A = Q$                                 | 0                    |
| 绝热   | $Q = 0$ | $pV^\gamma = C_1$<br>$V^{\gamma-1}T = C_2$<br>$p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3$ | 0  | $\frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$ | $\nu C_V(T_2 - T_1)$ |
| 各过程通用: $A = -\Delta E = -\nu C_V(T_2 - T_1)$ |         |   |  |   |                      |

## 9.8 循环过程

### 9.8.1 循环过程

如果物质系统的状态经历一系列变化后, 又回到原来的状态, 就说它经历了一个循环过程 (简称循环)。

在循环后, 系统回到初始状态, 因而内能不变,  $\Delta E = 0$ 。在正循环中, 工质对外做正功,  $A > 0$ , 系统从外界吸收的总热量 $Q_1$ 大于向外界放出的总热量 $Q_2$ , 根据热力学第一定律, 有:

$$A = Q_1 - Q_2$$

如果循环是准静态过程, 在 $p - V$ 图上就构成一条闭合曲线, 且:

$$\Delta E = 0,$$

$$A = \oint dA,$$

即闭合曲线包围的面积为系统 (工质) 对外 (外界对系统) 做的净功

正循环中, 工质将从某些高温热源吸收热量, 部分用于对外做功, 部分放在某些低温热源 (冷凝装置), 具有热机工作的一般特征, 所以正循环也叫热机循环;

正循环中,  $p - V$ 图循环沿顺时针方向进行

逆循环中, 外界对工质做正功 $A$ , 工质从低温热源 (冷库) 吸收热量 $Q_2$ 而向外界放出热量 $Q_1$ , 并且 $Q_1 = Q_2 + A$ 。这是致冷机的工作过程, 所以逆循环也叫致冷循环。

逆循环中,  $p - V$ 图循环沿逆时针方向进行

### 9.8.2 循环效率

热机循环中, 工质对外做功 $A$ 与其吸收的热量 $Q_1$ 的比值, 称为热机效率或循环效率, 设 $Q_2$ 为对外放热, 即:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2} < 100\%$$

而逆循环起到致冷作用，关注的是能在冷库中吸收多少热量，因此将一个循环中工质从冷库吸收的热量 $Q_2$ 与外界对工质做的功 $A$ 的比值称为循环的致冷系数，即：

$$\omega = \frac{Q_2}{A}$$

致冷系数越大，致冷效果越好。

## 热力学第三定律

通过计算，我们发现，物体的温度越低，取出同样多的热量所需的功越大，因此降低温度越困难。当物体温度趋近于 $0K$ 时，所需的功趋近无穷大，因而绝对零度是达不到的。

热力学第三定律：不可能用有限的步骤使物体达到绝对零度，也叫绝对零度不能达到原理。

## 9.9 热力学第二定律

### 9.9.1 开尔文表述

- 不可能从单一热源吸收热量，使之完全转换为功而不引起变化。
- 第二类永动机是不可能制成的。热功转化具有方向性。
- $\eta < 1$

### 9.9.2 克劳修斯表述

- 不可能使热量从低温物体传向高温物体而不引起变化。
- 理想制冷机是不可能制成的。热传导具有方向性。
- $\omega \rightarrow \infty$

## 9.10 可逆与不可逆过程

设想系统经历了一个过程，如果过程的每一步都可沿相反的方向进行，同时不引起外界的任何变化，那么这股过程就称为可逆过程。

如果对于某一过程，用任何方法都不能使系统和外界恢复到原来状态，该过程就是不可逆过程。

热功转换过程、热传导过程都是不可逆过程。

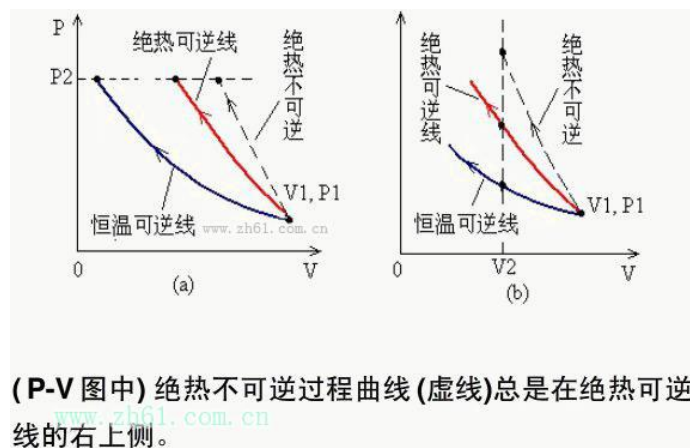
自然界不受外界影响而能够自动发生的过程，称为自发过程；不受外界影响的热力学系统称为孤立系统，自发过程就是孤立系统内发生的与热现象有关的实际过程。一切自发过程都是不可逆过程。自然界一切不可逆过程都具有等价性和内在联系，不同过程的不可逆性可

以相互推导。

不平衡和耗散等因素的存在是导致过程不可逆的原因。

只有无摩擦的准静态过程才是可逆过程。

热力学第二定律的实质就是揭示了自然界发生的一切自发过程都是单方向进行的不可逆过程。



## 9.11 卡诺循环 卡诺定理

### 9.11.1 卡诺循环

#### ➤ 卡诺热机

热机的工质只与两个热源交换热量，并且不存在散热和摩擦等因素，称为卡诺热机

#### ➤ 卡诺循环

由两个等温过程、两个绝热过程组成。工质可以是理想气体、气液两相系统等。

通常把由可逆过程组成的循环称为可逆循环；否则为不可逆循环。

一般的卡诺循环是指可逆循环。

设气体从状态 $a(p_1, V_1, T_1)$ 经过等温膨胀到达状态 $b(p_2, V_2, T_1)$ ，再经过绝热膨胀到达状态 $c(p_3, V_3, T_2)$ ，然后经过等温压缩到达状态 $d(p_4, V_4, T_2)$ ，最后经过绝热压缩回到初始状态。

假定工质是 $\nu$ mol的理想气体，则在等温过程 $a-b$ 中，气体从 $T_1$ 的热源处吸热：

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

在等温过程 $c-d$ 中，气体从 $T_2$ 的低温热源放出的热量为：

$$Q_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

对于 $b-c$ 与 $d-a$ 两个绝热过程，应用绝热过程方程，则有：

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

因此：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

最后可得到卡诺循环的效率为：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{vRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{vRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

由此可见, 理想气体的可逆卡诺循环的效率只与高低温热源的温差有关, 温差越大, 效率越高。

若卡诺循环逆向进行, 则成为卡诺逆循环, 显然这是致冷循环, 由致冷系数公式得:

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

由此可见, 当高温热源温度一定时, 理想气体卡诺逆循环的致冷系数只取决于冷库温度, 温度越低, 致冷系数越小。

工业上, 制冷机放出的热量 $Q_1$ 是完全可利用的。

## 9.11.2 卡诺定理

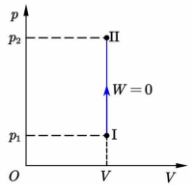
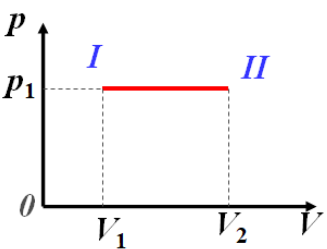
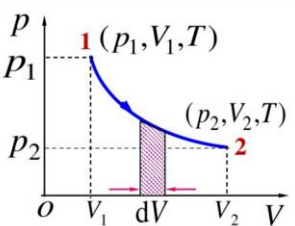
卡诺定理解决了热机效率的极限问题:

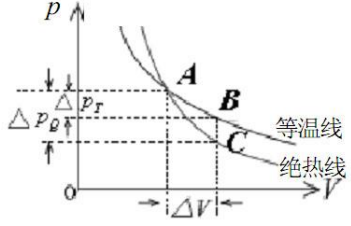
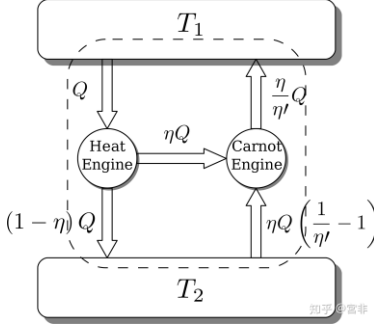
- 在温度分别为 $T_1$ 、 $T_2$ 的两个给定热源之间工作的一切可逆热机, 其效率相同, 都等于理

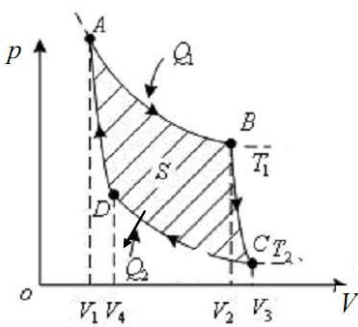
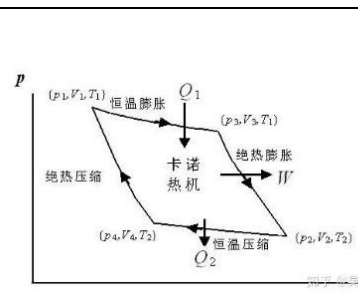
想气体可逆卡诺热机的效率, 即 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ;

- 在相同的高低温热源之间工作的一切不可逆热机, 其效率都不可能大于可逆热机的效率。

## 章末小结

|                     |      |   |  |   |
|---------------------|------|---|--|---|
| 热力学第一定律在理想气体典型准静态过程 | 等体过程 | 系统对外不做功, 从外界吸收的热量, 全部用来增加自己的内能                    | $Q = E_2 - E_1$ $Q = \nu C_V(T_2 - T_1)$   |  |
|                     | 等压过程 | 系统在压强保持不变的条件下, 从外界吸收的热量, 一部分用来增加自己的内能, 另一部分用来对外做功 | $Q = (E_2 - E_1) + A$ $Q = \nu C_p(T_2 - T_1)$ $A = \nu R(T_2 - T_1)$ $E_2 - E_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$ |   |
|                     | 等温过程 | 系统内能不变, 从外界吸收的热量全部用来对外做功                          | $Q = A$ $Q = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ $A = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$ $E_2 - E_1 = 0$              |  |

|          |                  |  |  |   |
|----------|------------------|--|--|---|
| 中的应用     | 绝热过程             | 系统与外界无热量交换, 减小内能全部用于对外做功   | $Q = 0$ $A = -(E_2 - E_1)$ $= -\nu C_V(T_2 - T_1)$   |   |
| 理想气体状态方程 |                  | 理想气体处于平衡态时满足   | $pV = \nu RT$  |   |
| 热力学第一定律  |                  | 系统从外界吸收的热量, 一部分使其内能增加, 另一部分用以对外做功  | $Q = (E_2 - E_1) + A$  |   |
| 循环过程     | 正循环 (热机循环) 和循环效率 | 循环沿顺时针方向进行, 一个正循环中工质对外做的净功 $A$ 为正, 它与吸收的热量 $Q_1$ 的比值, 称为循环效率             | $\eta = \frac{A}{Q_1}$ $= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ $= 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ $= \frac{A}{A + Q_2}$ |  |
|          | 逆循环 (制冷循环) 和制冷系数 | 循环沿逆时针方向进行, 一个逆循环中工质对外做的净功为负, 工质从冷库中吸收的热量 $Q_2$ 与外界对工质做功 $A$ 的比值, 称为致冷系数 | $\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$   |   |
| 热力学第二定律  | 开尔文表述            | 不可能从单一热源吸收热量, 使之全部转化为功, 而不引起其他变化<br>第二类永动机不可能制成                          |  |   |
|          | 克劳修斯表述           | 不可能使热量从低温物体传向高温物体而不引起变化<br>理想的制冷机是不可能制成的                                 |  |   |

|      |   |   |  |
|------|---|---|--|
| 卡诺定理 | 在温度分别为 $T_1$ 、 $T_2$ 的两个给定热源之间工作的一切可逆热机, 其效率相同, 都等于理想气体可逆卡诺热机的效率; | $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ $\omega = \frac{Q_2}{A}$ $= \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ $= \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ |  |
|      | 在相同的高低温热源之间工作的一切不可逆热机, 其效率都不可能大于可逆热机的效率。                          |   |  |

## 第十章 气体动理论

### 10.1 分子运动的基本概念

#### 10.1.1 宏观物体由大量粒子（分子原子等）组成

宏观物体由大量粒子（分子、原子等）组成, 分子之间存在一定的空隙。  
热学研究的对象是微观粒子, 微观世界的数量尺度是  $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$

#### 10.1.2 物体的分子在永不停息地作无序热运动

例如:

- (1) 气体、液体、固体的相互扩散
- (2) 布朗运动

#### 10.1.3 分子间存在相互作用力

分子力是短程力, 作用距离小于  $10^{-9}m$ ;  
假定分子间的相互作用力有球对称性时, 分子间的相互作用(分子力)可近似地表示为:

$$f = \frac{\lambda}{r^s}(\text{斥力}) - \frac{\mu}{r^t}(\text{引力}) \quad (s > t)$$

式中的 $r$ 表示两个分子中心的距离，其余量均为实验测定正的常数。

由于上述关系，有如下结论：

令： $f = 0$ ，则： $r = r_0 = (\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{1-s}} \approx 10^{-10}m$  (平衡位置)

$$\begin{cases} r > r_0, & \text{分子力表现为引力} \\ r < r_0, & \text{分子力表现为斥力} \end{cases}$$

结论：

一切宏观物体都是由大量分子组成的，分子都在永不停息地作无序热运动，分子之间有相互作用的分子力。

## 10.2 气体分子的热运动

分子间距离很大，分子力作用范围很小：除分子与分子（器壁）相互碰撞瞬间外，分子力是极其微小的。气体分子质量一般较小：重力对其作用一般可忽略。分子间的距离在数量级上约为分子本身线度的十倍以上：分子可视为质点。个别分子的运动是杂乱无章的、无序的，但大量分子运动的集体表现存在着一定的统计规律。

**气体分子热运动的内容：**

1. 气体分子热运动可以看作是在惯性支配下的自由运动；
2. 气体分子之间的碰撞非常频繁；
3. 气体分子热运动服从统计规律，而统计物理学只关心分布、平均值。

**统计规律是对大量偶然事件整体起作用的规律：**

关于物理量 $M$ 的统计平均值：

$$\bar{M} = \frac{N_A M_A + N_B M_B + \cdots}{N} \quad N = \sum_i N_i$$

$N_i$ 是 $M$ 的测量值为 $M_i$ 的次数，实验总次数为 $N$

$$\bar{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} (N_A M_A + N_B M_B + \cdots) / N$$

状态 $A$ 出现的概率为：

$$W_A = \lim_{N \rightarrow \infty} (\frac{N_A}{N})$$

$$\bar{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} (N_A W_A + N_B W_B + \cdots)$$

归一化条件：

$$\sum_i W_i = 1$$

**平衡态下理想气体分子速度分量的统计规律平均值：**

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{\Delta N_1 v_{1x} + \Delta N_2 v_{2x} + \cdots + \Delta N_i v_{ix} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{ix}}{N} \\ \bar{v}_y &= \frac{\Delta N_1 v_{1y} + \Delta N_2 v_{2y} + \cdots + \Delta N_i v_{iy} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iy}}{N} \\ \bar{v}_z &= \frac{\Delta N_1 v_{1z} + \Delta N_2 v_{2z} + \cdots + \Delta N_i v_{iz} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iz}}{N} \end{aligned}$$



气体处于平衡态时，分子沿各方向运动的概率相等，故有：

$$\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$$

平衡态下理想气体分子速度分量平方的统计规律平均值：

$$\bar{v}_x^2 = \frac{\Delta N_1 v_{1x}^2 + \Delta N_2 v_{2x}^2 + \cdots + \Delta N_i v_{ix}^2 + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{ix}^2}{N}$$

气体处于平衡状态时，分子沿各方向运动的概率相等，有：

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = 1/3 \bar{v}^2$$

结论：气体分子运动不同于经典力学规律，遵循基于大量分子情况下的统计规律，其基本点是大量气体分子的统计行为。

## 10.3 统计规律的特征

1. 统计规律是大量偶然事件的总体所遵从的规律；
2. 统计规律和涨落现象是分不开的。

## 10.4 理想气体的压强公式与温度的微观本质

### 10.4.1 理想气体的微观模型

1. 不考虑分子的内部结构并忽略其大小，标准状况下，气体分子间的平均距离：

$$n_0 = \frac{6.02 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}} = 2.7 \times 10^{25} m^{-3}$$

$$\bar{L} = \left(\frac{1}{n_0}\right)^{1/3} = 3.3 \times 10^{-9} m^{-3}$$

气体分子间平均距离远大于气体分子半径；

2. 分子力的作用距离很短，可以认为气体分子之间除了碰撞的一瞬间外，其相互作用力可忽略不计；
3. 分子间及分子与器壁间的碰撞是完全弹性的。
4. 理想气体分子可以看作是没有大小而且除碰撞瞬间外没有相互作用的弹性球。

### 10.4.2 理想气体的压强公式

1. 从气体分子运动看气体压强的形成：

气体压强是由大量分子在和器壁碰撞中不断给器壁以力的作用所引起的。

2. 理想气体压强公式

一定量理想气体，将有限个分子分组，每组分子具有相同的速度，由于气体处于平衡态时，器壁上各处的压强相等，所以只研究器壁上任一块小面积所受的压强即可。分子碰

撞器壁产生压强，碰撞使分子改变动量，同时对器壁产生冲力，而大量分子总冲量的效果即对应单位面积器壁的压强。

**分析单个分子的碰撞：**

碰前： $\vec{v}_i(v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ ，碰后： $\vec{v}_i'(-v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$

一次碰撞单分子动量变化：（设分子质量为 $\mu$ ） $-2\mu v_{ix}$

**分析大量分子的情况：**

$dt$ 内，所有速度为 $v_i$ 的分子中能与 $dA$ （垂直于 $x$ 轴的小面积）相碰撞的分子数：

$$\frac{\Delta N_i}{V} v_{ix} dt dA \quad (v_{ix} > 0)$$

对应的动量变化为：

$$-2\mu v_{ix} \cdot \frac{\Delta N_i}{V} v_{ix} dt dA$$

总冲量（所有相碰撞分子的动量变化量的总和）：

$$-2 \sum_{v_{ix} > 0} \frac{\Delta N_i}{V} \mu v_{ix}^2 dt dA = - \sum_i \frac{\Delta N_i}{V} \mu v_{ix}^2 dt dA = -p dt dA$$

$$\therefore p = \sum_i \frac{\Delta N_i}{V} \mu v_{ix}^2 = \mu \sum_i \frac{N \Delta N_i v_{ix}^2}{N} = n \mu \bar{v}_{ix}^2 = \frac{1}{3} n \mu \bar{v}^2 = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$$

其中， $n = N/V$ 为分子数密度， $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2$ 为分子平均动能，理想气体压强公式为：

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$$

**说明：**

- (1) 压强 $p$ 是一个统计平均量。它反映的是宏观量 $p$ 和微观量 $\bar{\epsilon}$ 的关系。对大量分子，压强才有意义。
- (2) 压强公式无法用实验直接验证。
- (3)  $n$ 是一个统计平均量。
- (4) 宏观量是微观量的统计平均值。从微观粒子遵从的力学规律入手，用统计方法得到对应的宏观量。这是典型的理想气体模型的应用。

### 10.4.3 理想气体温度与分子平均动能的关系

由理想气体状态方程得：

$$p = \frac{\nu}{V} RT = \frac{\nu N_0}{V} \frac{R}{N_0} T = nkT \quad k = \frac{R}{N_0} = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K (玻尔兹曼常数)}$$

理想气体分子平均动能：

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \xrightarrow{p = \frac{1}{3} n \mu \bar{v}^2 = nkT} \frac{3}{2} kT$$

每个分子平均动能只与温度有关，与气体种类无关。

1. 温度是大量分子热运动平均动能的度量，反映了宏观量 $T$ 与微观量 $\bar{\epsilon}$ 的统计平均值之间的关系；
2. 温度是统计概念，是大量分子热运动的集体体现。对于单一分子或少数分子失去意义。

## 10.4.4 理想气体定律的推证

### 1. 理想气体定律

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT = nkT$$

相同温度与压强下，各种气体分子数密度相等。

### 2. 道尔顿分压定律

混合气体的分子数密度为：

$$n = n_1 + n_2 + \cdots$$

由于温度相同，故：

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_2 = \cdots = \bar{\epsilon}$$

混合气体的压强为：

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} (n_1 + n_2 + \cdots) \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} n_1 \bar{\epsilon}_1 + \frac{2}{3} n_2 \bar{\epsilon}_2 + \cdots = p_1 + p_2 + \cdots$$

混合气体的压强等于各种气体的分压强之和。

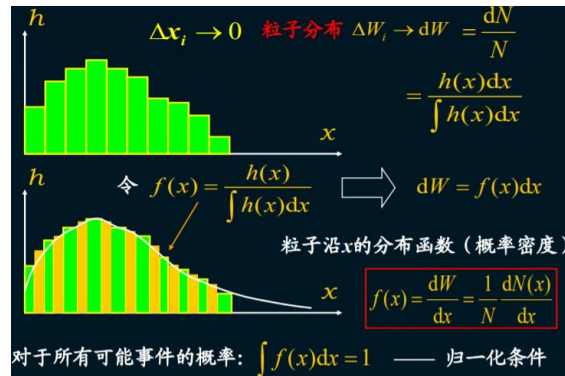
## 10.5 麦克斯韦速率分布定律

### 10.5.1 分布的概念

问题的提出：

气体系统由大量分子组成，各分子的速率通过碰撞不断地改变，不可能逐个加以描述，只能给出分子数按速率的分布。

分布函数的概念：



### 10.5.2 速率分布函数 $f(v)$

设某系统处于平衡态，总分子数为  $N$ ，在  $v \sim v + dv$  区间内分子数的比率为：

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv$$

$$\therefore f(v) = \frac{dN}{Ndv}$$

意义：分布在速率 $v$ 附近单位速率间隔内的分子数与总分子数的比率。

1859 年，Maxwell 推出，理想气体处于平衡态下，分子速率分布函数：

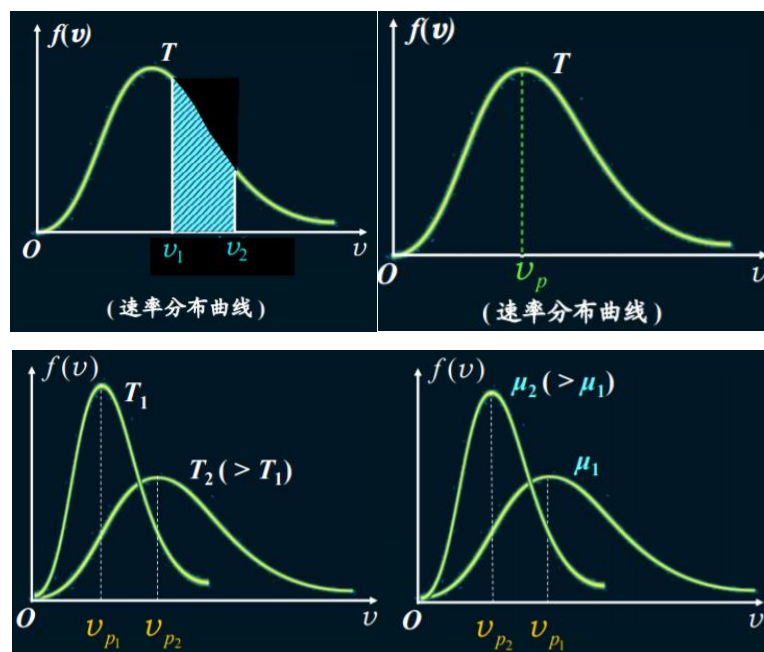
$$f(v) = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}$$

$$\therefore \frac{dN}{N} = f(v)dv = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv$$

上述公式称为麦克斯韦速率分布定律。

说明：

1. 麦克斯韦速率分布定律是一个统计规律，仅适用于由大量分子组成的气体；
2. 从统计的概念来看，速率恰好等于某一值的分子数多少，是没有意义；
3. 麦克斯韦速率分布定律对于处于平衡态下的混合气体的各组分分别适用；
4.  $\Delta N$  只表示在某一速率附近、 $\Delta v$  速率间隔内的分子数的统计平均值， $\Delta v$  宏观上要足够小，微观上足够大；
5. 麦克斯韦速率分布曲线



- a) 由图可见，气体中速率很小、速率很大的分子数都很少；
- b) 在 $dv$ 间隔内，曲线下的面积表示速率分布在 $v \sim v + dv$ 中的分子数与总分子数的比率，即： $f(v)dv = dN/N$
- c) 在 $v_1 \sim v_2$ 区间内，曲线下的面积表示速率分布在 $v_1 \sim v_2$ 中的分子数与总分子数的比率，即： $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \Delta N/N$
- d) 曲线下面的总面积，等于分布在整个速率范围内所有各个速率间隔中的分子数与总分子数的比率总和（归一化条件），即： $\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$
- e) 最概然速率 $v_p$

$$\frac{df(v)}{dv}|_{v=v_p} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$f(v)$ 出现极大值时，对应的速率称为最概然速率。

f) 不同的气体，不同温度下的速率分布曲线的关系由于曲线下的面积不变，由此可见：

i.  $\mu$ 一定， $T$ 越大， $v_p$ 越大，曲线向右移动；

ii.  $T$ 一定， $\mu$ 越大， $v_p$ 越小，曲线向左移动。

g) 在 $v_1 \sim v_2$ 区间内气体的平均速率：

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$$

### 10.5.3 气体速率分布的实验测定

#### 测量原理

只要测得分子速率在 $v \sim v + \Delta v$ 区间的分子数 $\Delta N$ 即可；关键在于如何变化 $v$ 和制造 $\Delta v$ 。

#### 实验装置



1. 能通过细槽到达检测器 $D$ 的分子所满足的条件：

$$\frac{L}{v} = \frac{\varphi}{\omega} \Rightarrow v = \frac{\omega}{\varphi} L$$

通过改变角速度 $\omega$ 的大小，选择速率 $v$

2. 通过细槽的宽度，选择不同的速率区间

$$|\Delta v| = \frac{\omega L}{\varphi^2} \Delta \varphi = \frac{v}{\varphi} \Delta \varphi$$

3. 沉淀在检测器上相应的金属层厚度必定正比相应速率下的分子数

### 10.5.4 三种典型的分子速率统计平均值

1. 最概然速率（讨论速率分布）

$$\frac{df(v)}{dv}|_{v=v_p} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

2. 分子平均速率（讨论分子碰撞次数）

$$\bar{v} = \frac{\sum N_i v_i}{N} \Rightarrow \bar{v} = \int v \frac{dN}{N} \xrightarrow{dN=Nf(v)dv} \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{2}{3}} v^3 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \approx 1.59 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

3. 平方平均速率 (讨论分子平均平动动能)

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum N_i v_i^2}{N} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{\mu}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

三种典型速率的比较:

$$\sqrt{\bar{v}^2} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}} > \bar{v} \approx 1.59 \sqrt{\frac{RT}{M}} > v_p \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

## 10.5.5 气体分子按平动动能的分布规律

已知:

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{2}{3}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv$$

又:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu v^2$$

$$d\varepsilon = \mu v dv$$

所以:

$$\frac{dN}{N} = F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon$$

该式表明: 理想气体在平衡态下, 分子动能在  $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$  区间内的分子数与总分子数的比率。

1. 最概然平动动能

$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_p} = 0$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{-1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - \varepsilon^{1/2} \frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 0$$

$$\therefore \varepsilon_p = \frac{1}{2} kT$$

理想气体在平衡态下, 分子动能分布在  $\varepsilon_p$  附近, 单位动能区间内的分子数占分子数的百分比

2. 平均平动动能

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \varepsilon^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx = \frac{3kT}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = 3/2 kT$$

# 10.6 能量按自由度均分原理

目的：研究热运动能量所遵从的统计规律。

## 10.6.1 气体分子自由度

完全确定一个物体空间位置所需的独立坐标数目

|       |     |             |     |
|-------|-----|-------------|-----|
| 分子结构  | 单原子 | 双原子         | 多原子 |
| 分子模型  | 质点  | 由刚性杆连接的两个质点 | 刚体  |
| 自由度数目 | 3   | 5           | 6   |

说明：

- 1) 分子的自由度不仅取决于内部结构，还取决于温度；
- 2) 实际上，双原子、多原子分子并不完全是刚性的，还有振动自由度。但在常温下，将其分子作为刚性处理，能给出与实验大致相符的结果。因此，可不考虑分子内部的振动，而认为分子都刚性的。

## 10.6.2 能量按自由度均分定理

理想气体分子的平均平动动能：

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

由于平衡态中，分子沿各方向运动的机会均等，即：

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = 1/3 \bar{v}^2$$

等式各项同乘 $\frac{1}{2} \mu$ 得：

$$\frac{1}{2} \mu \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} \mu \bar{v}_y^2 = \frac{1}{2} \mu \bar{v}_z^2 = \frac{1}{2} kT$$

对于处在温度为 $T$ 的平衡态下的系统，其分子在每个自由度上都具有相同的平均动能 $\frac{kT}{2}$

（能量按自由度均分）

- 1) 能量按自由度均分是大量分子统计平均的结果，是分子间的频繁碰撞而致。该定理具有普适性，不仅适用于分子的平动，也适用于分子的振动和转动，还适用于液体和固体。
- 2) 若某种气体分子具有 $t$ 个平动自由度和 $r$ 个转动自由度， $s$ 个振动自由度，则分子的平均总动能为：

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} (t + r + s) kT = \frac{i}{2} kT$$

- 3) 由振动的知识，在一个周期内，平均动能=平均势能。  
若气体分子具有 $t$ 个平动自由度和 $r$ 个转动自由度， $s$ 个振动自由度，则分子的平均总能量为：

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(t+r+s)kT + \frac{1}{2}skT = \frac{1}{2}(t+r+2s)kT$$

| 分子类别  | $t$ | $r$ | $s$ | $\bar{\varepsilon}$                       |
|-------|-----|-----|-----|---|
| 单原子分子 | 3   | 0   | 0   | $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$       |
| 双原子分子 | 3   | 2   | 1   | $\bar{\varepsilon} = \frac{7}{2}kT$       |
| 多原子分子 | 3   | 3   | $s$ | $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(6+2s)kT$ |

### 10.6.3 理想气体的内能（系统中与热现象有关的能量）

$$E = E(T)$$

- 1) 对实际气体，分子中含有各种形式的动能和分子间势能，而且满足：

**气体内能=总动能+振动势能+保守力势能**

- 2) 对理想气体，分子间作用力可以忽略，保守势能=0，而且有：

**气体的内能=所有分子能量**

对 $\nu$ mol理想气体，满足 $N = \nu N_A$ ，且：

$$E = N \frac{i}{2} kT = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \nu \frac{i}{2} RT$$

**结论：**摩尔数一定的理想气体，其内能完全取决于分子运动的自由度和气体温度，与气体的压强、体积无关。

讨论：

- 1) 用于各种气体分子后的结论：

$$E = \nu \frac{i}{2} RT = \begin{cases} \frac{3}{2} \nu RT (\text{单原子分子}) \\ \frac{5}{2} \nu RT (\text{双原子分子无振动}) \\ \frac{7}{2} \nu RT (\text{双原子分子有振动}) \end{cases}$$

- 2) 当温度变化时，气体内能增量为：

$$\Delta E = \nu \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{i}{2} \Delta(pV)$$

### 10.6.4 理想气体的热容量

1mol理想气体的内能为：

$$E = N_0 \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT \rightarrow C_V \begin{cases} \frac{3}{2} R (\text{单原子分子}) \\ \frac{5}{2} R (\text{刚性双原子分子}) \end{cases}$$

理想气体的定体摩尔热容：

$$dE = C_V dT$$



$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{i}{2}R$$

理想气体的摩尔热容仅与气体分子的自由度有关，与温度无关。

## 10.7 玻尔兹曼分布律

问题引入：

麦克斯韦速率分布律是关于无外力场时，气体分子的速率分布规律。此时，分子在空间的分布是均匀的，若有外力场存在，分子按密度如何分布？

### 10.7.1 重力场中粒子按高度的分布

已知：

$$dp = -\rho g dh \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{N}{V} \frac{m}{N} = n\mu$$

$$dp = -n\mu g dh$$

由于平衡态下，气体温度处处相同。

$$p = nkT \Rightarrow dp = kT dn$$

$$kT dn = -n\mu g dh$$

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_0^h -\frac{\mu g}{kT} dh$$

解得，重力场中处于平衡态的气体分子数密度按高度的分布规律：

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}$$

在重力场中，粒子数密度随高度增大而减小， $\mu$ 越大， $n$ 减小越迅速； $T$ 越高， $n$ 减小越缓慢。同理，重力场中处于平衡态的气体压强按高度的分布规律：（等温气压公式， $p_0$ 是高度为零处的压强）

$$p = nkT = n_0 kT e^{-\frac{\mu g h}{kT}} = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}$$

### 10.7.2 玻尔兹曼分布律

由，

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}$$

以及，

$$\varepsilon_p = \mu g h$$

得，

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}$$

上式适用于任何形式的保守力场。

平衡态下，温度为 $T$ 的气体中，位于空间某一小区间 $x \sim x + dx$   $y \sim y + dy$   $z \sim z + dz$ 中的分子数为：

$$dN = n dV = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} dx dy dz$$

(计算总数 $N$ )

$$\frac{dN}{N} = A e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} dx dy dz$$

(将上式除以算好的 $N$ ，得到分布规律)

$\varepsilon_p$ 是分子在 $(x, y, z)$ 处的势能，上式即粒子在势场中分布的规律（玻尔兹曼分布律），它表明在势场中的分子总优先占据势能较低的状态。

### 10.7.3 麦克斯韦-玻尔兹曼分布律

麦克斯韦速率分布定律：

$$\frac{dN}{N} = \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv = C e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

由 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ，麦克斯韦速度分布律：

$$\frac{dN}{N} = A e^{-\frac{\mu(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = A_1 e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z$$

又由玻尔兹曼分布律：

$$\frac{dN}{N} = A_2 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} dx dy dz$$

平衡态下，温度为 $T$ 的气体中，在 $x \sim x + dx$   $y \sim y + dy$   $z \sim z + dz$ 中，速度在 $v_x \sim v_x + dv_x$   $v_y \sim v_y + dv_y$   $v_z \sim v_z + dv_z$ 区间的分子数：

$$dN(\vec{r}, \vec{v}) = C e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

注：

- 分子总能量： $\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p$
- $C$ 是与位置坐标和速度均无关的比例系数
- 上式的物理意义：给出了分子数按能量的分布规律

## 10.8 气体分子的平均自由程

个别分子间的碰撞是偶然事件，大量分子间的碰撞遵从确定的统计规律

### 10.8.1 碰撞频率

设分子有效直径 $d$ ，分子的碰撞截面 $\sigma = \pi d^2$ ，平均碰撞频率 $\bar{Z}$

若一分子以平均相对速率 $\bar{u}$ 运动，其它分子看作静止，分子 $A$ 在单位时间内与其它分子碰撞的次数在数值上等于落入圆柱体内的分子数—— $n\pi d^2 \bar{u}$ （平均碰撞频率）；考虑到所有分子

实际上都在运动，则有  $\bar{u} = \sqrt{2}\bar{v}$ ，故

$$\bar{Z} = \sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$$

## 10.8.2 平均自由程

分子连续两次碰撞之间自由运动的平均路程（平均自由程）：

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \quad p = nkT$$
$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}n\pi d^2 p}$$

分子按自由程的分布：（自由程介于  $x \rightarrow x + dx$  区间的分子数）

$$dN = \frac{1}{\bar{\lambda}} N_0 e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}} dx$$

# 10.9 热力学第二定律的统计意义和熵的概念

## 10.9.1 分子在容器中的分布

### 1. 宏观态与微观态

- 4种分子  $abcd$ ，在容器左边的情形一共五种，即  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ，每种叫一个分布。在容器中的分布有16种可能，即有微观态数  $2^4$ 。
- 故，宏观态数为  $N + 1$  时，总微观态数为  $2^N$ 。
- 各宏观态包含一定的微观态数，用  $\Omega(n)$  表示左边有  $n$  个分子宏观态对应的微观态数。

### 2. 等几率假设

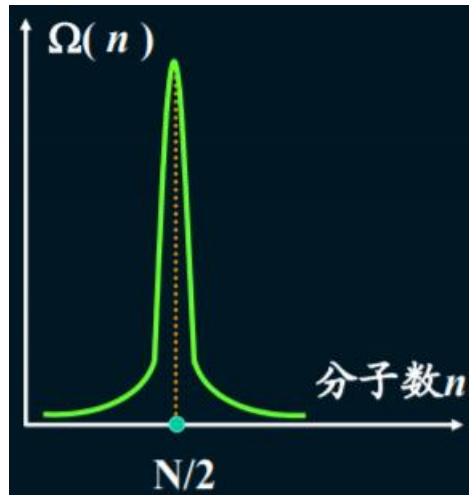
- 每个分子在左右两边概率相等  $p = 1/2$
- 每个微观态出现的概率相等，宏观态数为  $N + 1$  时，总微观态数为  $2^N$ ，各微观态出现的概率为  $\omega = 1/2^N$
- 某宏观态出现的概率与宏观态对应的微观态数成正比，一个分布（宏观态）出现的概率： $P(n) = \Omega(n)\omega$ ；出现几率最大的分布（宏观态）叫最可几分布

### 3. 系统的微观态满足相乘法则

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

结论：

- (1) 系统某宏观态出现的概率与该宏观态对应的微观态数成正比
- (2) 概率最大附近的宏观态为平衡态，其对应的微观态数目最大。其它概率的宏观态为非平衡态
- (3) 随着  $N$  的增大，平衡态的概率越接近1



## 10.9.2 第二定律的微观意义

不可逆过程总是从概率小的宏观态向概率大的宏观态自动进行。孤立系统中发生的一切实际过程，都是由概率小的宏观态向概率大的宏观态进行的。（引入过程自动进行方向的判据）

## 10.9.3 熵与熵增原理

### 1. 熵及其性质

- 系统状态的单值函数——态函数  $S$
- 是微观态数  $\Omega$  的函数  $S = f(\Omega)$
- 可加性  $S = \sum S_i$
- 为使  $S$  和  $\Omega$  同时各自满足相加与相乘法则，构建函数：

$$S = k \ln \Omega \quad (\text{玻尔兹曼熵公式, 单位: } J/K)$$

熵是系统的可能微观态量度，是系统内分子无序性运动的一种量度；  
熵是一个宏观量，对大量分子才有意义。

### 2. 熵增原理

已知孤立系统自动进行时，后一个状态的微观态增加，故熵的增量为：

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \geq 0 \quad (\text{可逆过程时取等号})$$

熵增原理只能应用于孤立系统，对于开放系统，熵是可以减少的。

### 3. 熵的宏观表示

理想气体系统由状态  $(T, V_1)$  绝热膨胀到状态  $(T, V_2)$  的熵增可用一可逆等温过程实现，此过程吸热为  $Q_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ ，而  $\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$ ，所以  $\Delta S = Q_T / T$ 。

可逆过程满足  $dS = dQ/T$ ，对有限可逆过程来说熵的增量为“

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} dS = \int_{(1)}^{(2)} dQ/T$$

说明：

- (1) 对于可逆过程可以直接使用上式计算熵变
- (2) 对于不可逆过程，计算熵变必须设计一条链接两状态的可逆过程

# 章末小结

|            |                |  |  |
|------------|----------------|--|--|
| 分子运动的基本概念  |                | 宏观物体由大量粒子所组成；物体内的分子在永不停息地作无序热运动；分子之间存在相互作用力  | 阿伏伽德罗常数 $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$  |
| 理想气体的压强公式  |                | 气体的压强是由大量分子在器壁的碰撞中不断给器壁以力的作用引起的，是一个统计平均量   | $p = \frac{2}{3} n \left( \frac{1}{2} \mu \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$ |
| 玻尔兹曼分布律    |                | 在势场中的分子总是优先占据势能较低的状态：<br>$n = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}$  | 在重力场中气体的压强随高度按指数规律减小：<br>$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}$                                       |
| 温度的微观本质    |                | 温度的本质是物体内部分子热运动剧烈程度的标志   | $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$                               |
| 能量按自由度均分定理 |                | 处于平衡态的温度为 $T$ 的理想气体，在分子的每个自由度上的平均动能都相等，并且等于 $kT/2$   | 自由度为 $i$ 的分子的平均动能为 $ikT/2$   |
| 理想气体的内能    |                | 理想气体内能是所有分子各种形式动能和分子内原子间谐振动势能的总和。对于给定的理想气体，其内能仅与温度有关   | 若不考虑振动能量，摩尔数为 $\nu$ 的理想气体的内能为：<br>$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT$          |
| 麦克斯韦速率分布定律 | 速率分布函数         | 速率分布函数 $f(v)$ 表示分布在速率 $v$ 附近单位速率间隔内的分子数比率。<br>理想气体在平衡态下分子的速率分布函数为：<br>$f(v) = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}$  |  |
|            | 分布在速率间隔内的分子数比率 | 分布在速率间隔 $v \sim v + dv$ 内的分子数比率：<br>$\frac{dN}{N} = f(v) dv = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv$<br>分布在速率间隔 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数比率：<br>$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv$ |  |
|            | 分子速率的三种统计平均值   | 分子速率的三种统计平均值：<br>$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} = 1.59 \sqrt{\frac{RT}{M}}$<br>$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$   |  |

|                   |  |   |  |
|-------------------|--|---|--|
|                   |  | $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$                   |  |
| 分子的平均碰撞频率和平均自由程   | 一个分子单位时间内与其他分子碰撞的平均次数，称为平均碰撞概率：<br>$\bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n$ | 分子在连续两次碰撞之间自由运动的平均路程称作平均自由程：<br>$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d n}$ |  |
| 热力学第二定律的统计意义和熵增原理 | 在一个不受外界影响的孤立系统中发生的一切过程，都是从概率小（微观态数少）的宏观态向概率大（微观态数大）的宏观态进行的               | 孤立系统的熵永不减少：<br>$dS \geq 0 \text{ 或 } \Delta S \geq 0$                       |  |

## 第十一章 振动

### 11.1 简谐振动

#### 11.1.1 简谐振动（以谐振子为例）

1. 受力特点：

$$\text{线性恢复力 } F = -kx$$

2. 动力学方程：

$$F = -kx = ma \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\text{圆频率: } \omega = \sqrt{k/m}$$

$$\text{周期: } T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$$\therefore x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

#### 11.1.2 描述简谐振动的特征量

1. 振幅  $A$

2. 周期  $T$  和频率  $\nu$ :  $\nu = \frac{1}{T} = \omega/2\pi$

### 3. 相位

- 1)  $t$ 时刻相位:  $\omega t + \varphi$ ;
- 2)  $\varphi$ 称作零时刻的相位, 初相;
- 3) 相位的意义在于确定了振动的状态, 相位每改变 $2\pi$ 振动重复一次, 相位在 $2\pi$ 内变化, 状态不重复;
- 4) 相位差:  $\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$ ;
- 5) 同频率振动, 当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ , 步调相同 (同相); 当 $\Delta\varphi = \pm (2k + 1)\pi$ , 步调相反 (反相);
- 6) 超前与落后。

## 11.1.3 由初始条件确定振幅和初相位

已知:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

所以:

$$x_0 = x(0) = A\cos\varphi$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

解得:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

## 11.1.4 旋转矢量法

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \omega A\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore v = A_v\cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$\therefore a = A_a\cos(\omega t + \varphi_a)$$

只需记住上述关系即可, 做题不要想几何关系

## 11.1.5 简谐振动的能量 (水平弹簧振子)

### 1. 动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T} \int_T E_k dt = \frac{1}{4} k A^2$$

2. 势能

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T} \int_T E_p dt = \frac{1}{4} k A^2$$

3. 机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$$

4. 振幅

$$A = \sqrt{2E/k}$$

## 11.1.6 常见的简谐振动

1. 单摆

由角动量定理:

$$M = -mgl \sin \theta = \frac{d(J\omega)}{dt} \stackrel{J=ml^2}{\Longrightarrow} ml^2 \ddot{\theta}$$

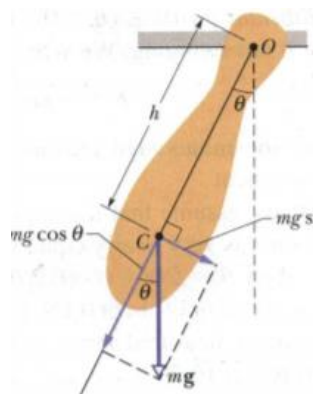
$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

当  $\theta < 5^\circ$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ , 此时有:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2. 复摆



由角动量定理:

$$M = -mgh \sin \theta = \frac{d(J\omega)}{dt} = J \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J} \sin \theta = 0$$



当 $\theta < 5^\circ$ ,  $\sin\theta \approx \theta$ , 此时有:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgh}}$$

## 11.2 简谐振动的合成

### 11.2.1 同方向同频率的简谐振动的合成

分振动:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合振动:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \end{aligned}$$

令:

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$$

故:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

$$x = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi)$$

说明:

- 1) 若两分振动同相, 有 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$ , 则 $A = A_1 + A_2$ , 振动加强;
- 2) 若两分振动反相, 有 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$ , 则 $A = |A_1 - A_2|$ , 振动减弱;

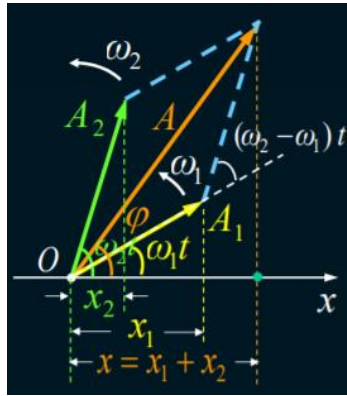
### 11.2.2 同方向不同频率的简谐振动的合成

分振动:

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

合振动:



当 $(\omega_2 - \omega_1)t = 2k\pi$ 时,  $A = A_1 + A_2$ ;

当 $(\omega_2 - \omega_1)t = (2k + 1)\pi$ 时,  $A = |A_1 - A_2|$ ;

合成频率为 $\nu = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|$

**特别地，当振幅相同时进行不同频率简谐振动的合成：**

分振动：

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

合振动（不再是简谐振动）：

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \left[ \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \cdot \cos \left[ \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right]$$

当 $|\omega_2 - \omega_1| \rightarrow 0$ 时，令 $x = A(t) \cos \bar{\omega} t$ ，其中：

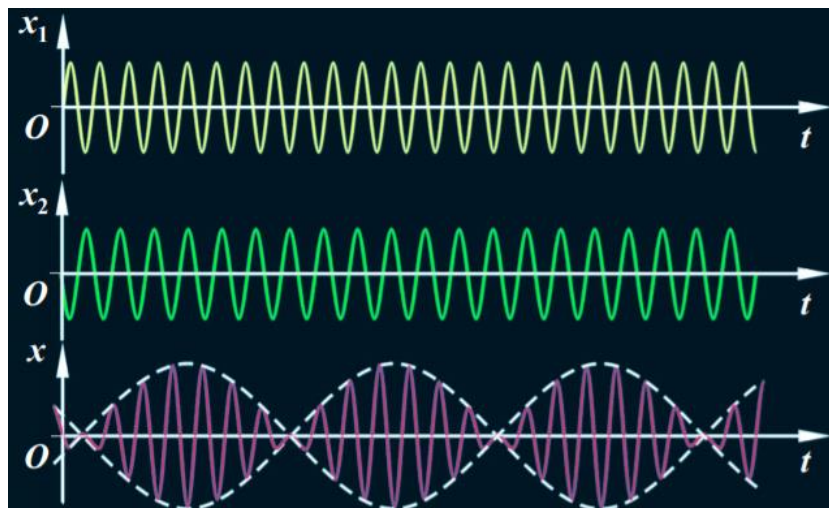
$$A(t) = 2A \cos \left[ \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right]$$

（随 $t$ 缓慢变化）

$$\cos \bar{\omega} t = \cos \left[ \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right]$$

（随 $t$ 迅速变化）

合振动可看作是振幅缓慢变化的简谐振动。



## 拍的现象

拍频：单位时间内合振动振幅强弱变化的次数，即上述的合成频率  $\nu = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|$

### 11.2.3 垂直方向同频率的简谐振动的合成

分振动：

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

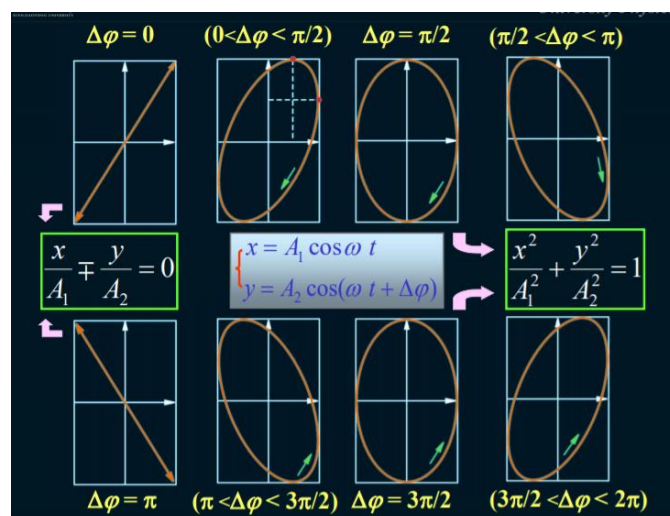
合振动：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论：

1.  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ , 则  $\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$

2.  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , 则  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ ; 若  $A_1 = A_2 = A$ , 则  $x^2 + y^2 = A^2$



### 11.2.4 垂直方向不同频率简谐振动的合成

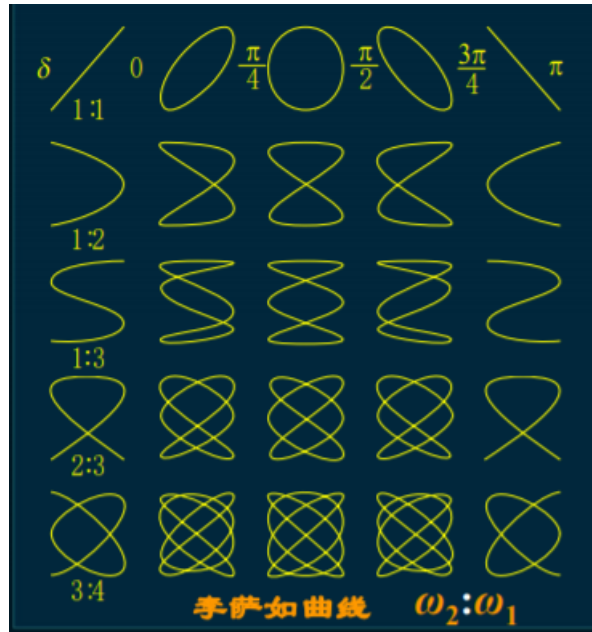
分振动：

$$x = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$

结论：

1.  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  之比为整数时，合成运动仍是周期运动，轨迹是稳定的闭合曲线。
2.  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  之比不为整数时，合成运动是非周期运动，轨迹是永不闭合的曲线。



## 11.3 阻尼振动和受迫振动

### 11.3.1 阻尼振动

阻尼振动：回复力和阻力作用下的减幅振动，简谐振动是阻尼振动的理想情况。

实验规律：当运动速度不太大时，介质对运动物体的阻力与速度成正比。

$$f = -\mu v = -\mu \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- 阻力系数： $\mu$ （由物体的形状、大小、表面状况、介质性质等决定）
- 振动系统的固有圆频率： $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- 阻尼因子（阻尼常量）： $n = \frac{\mu}{2m}$

三种典型情况：

#### 1. 欠阻尼 ( $n < \omega_0$ )

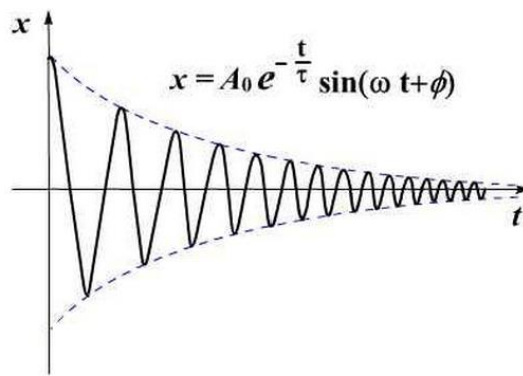
微分方程组的解表示的是准周期性运动。

$$x = A_0 e^{-nt} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

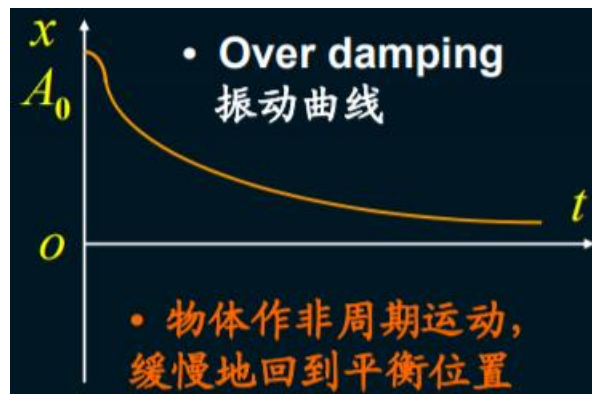
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$$

$$A = A_0 e^{-nt}$$

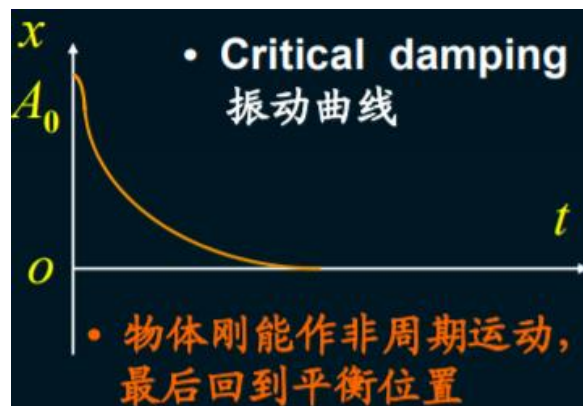
$$E = E_0 e^{-2nt}$$



2. 过阻尼 ( $n > \omega_0$ )



3. 临界阻尼 ( $n = \omega_0$ ): 回到平衡位置静止的时间最短。



## 11.3.2 受迫振动

### 周期性策动力

$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$\therefore m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\therefore \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \text{ (受迫振动动力学方程)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, n = \frac{\mu}{2m}, f = \frac{F_0}{m}$$

当  $f = 0$  时, 可求得齐次通解  $x_1$ , 即阻尼振动所得解; 此微分方程的通解:

$$x = x_1 + x_2 = x_1 + A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\therefore x = \frac{A_0 e^{-nt} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} t + \varphi_0)}{\text{减幅振动 (暂态项)}} + \frac{A \cos(\omega t + \varphi)}{\text{等幅振动 (定态项)}}$$

经过一段时间后, 受迫振动按简谐振动的规律变化, 运动方程转变为  $A \cos(\omega t + \varphi)$ , 但与自由简谐振动有本质区别!

## 共振

将定态项代入受迫振动动力学方程并化简可得:

$$A = \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

最终状态只和驱动力的频率有关而与原阻尼振动的初始条件无关  
当驱动力频率达到某一值时, 振幅  $A$  达到极大值, 此时称之为“共振”

### 1. 速度共振

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = A_v \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$A_v = \omega A = \frac{\omega f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

外力与物体运动同向, 驱动力作正功, 输入能量;

外力与物体运动反向, 驱动力作负功, 输出能量;

若  $\omega^2 = \omega_0^2 = k/m$ ,

此时, 速度振幅最大,  $A_v = \frac{f}{2n} = \frac{F_0}{\mu} = v_m$ ,

此时,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $v = v_m \cos \omega t$ , 驱动力与振动系统速度始终保持同相。

驱动力在整个周期内对振子做正功, 始终给振子提供能量, 此时速度共振等于能量共振。

### 2. 位移共振

$$A = \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

令  $\frac{dA}{d\omega} = 0$ , 得:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}$$

$$A_r = \frac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$$

当驱动力频率比系统固有频率小, 并满足上述关系时, 会产生位移共振。

# 第十二章 机械波

# 12.1 机械波的产生和传播

## 12.1.1 机械波的产生

产生条件：

- 波源：引起机械振动的物体
- 弹性媒质：承担传播振动状态的物质

结论：

- 波动仅是质点振动状态的传播，各质点并不随波前进
- 各个质点的相位依次落后，波动是相位的传播
- 在固体中，可以传播纵波和横波；在液体气体中只能传播纵波
- 波动曲线的横轴是质点的位置坐标，振动曲线的横轴是时间
- 脉冲波（只有一个周期的波）；连续波（周期连续不断）

## 12.1.2 波动的基本描述

### 1. 行波基本方程

当 $t = 0$ 时， $y = f(x)$ ，设波速为 $u$ ，

当 $t = t$ 时， $y' = f(x')$ 对应原方程变为： $y = f(x - ut)$

### 2. 波线、波面和波前

波线：当波在连续媒质中由波源向外传播时，沿波的传播方向作的有向直线。

波面：在波传播过程中，任一时刻媒质中各振动相位相同的点联接成的空间曲面。

波前：在某一时刻，波传播到的最前面的波面。

### 3. 平面波、球面波和柱面波

说明：

- 描述的相对性
- 在各向同性媒质中，波线处处与波阵面垂直

### 4. 波长、周期（频率）和波速

- 波长 ( $\lambda$ )：同一波线上相邻两个同相点间的距离或波源作一次完全振动，波前进的距离。波长反映了波的空间周期性。
- 周期 ( $T$ )：波前进一个波长距离所需的时间。周期表征了波的时间周期性。
- 频率 ( $\nu$ )：单位时间内，波前进距离中完整波的数目， $\nu = 1/T$ 。频率表征了波的时间周期性（波的周期和频率与波源的周期和频率相同，与媒质的性质无关）

- 波速 ( $u$ )：振动状态在媒质中的传播速度， $u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ ，（波速实质上是相位传播的速度，故也称作相速度；其大小主要取决于媒质性质，与波的频率无关）

➤ ( $T$ ：张力； $\mu$ ：线密度)

| 波速          | 公式                           | 说明         |
|-------------|------------------------------|------------|
| 拉紧的细绳或弦线上横波 | $u_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ | $T$ ：张力    |
|             |                              | $\mu$ ：线密度 |

|            |   |                    |
|------------|---|--------------------|
| 均匀细棒上纵波    | $u_t = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$                                     | $Y$ : 固体棒的杨氏模量     |
|            |   | $\rho$ : 固体棒的密度    |
| 固体媒质中传播的横波 | $u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$                                     | $G$ : 固体的切变弹性模量    |
|            |   | $\rho$ : 固体的密度     |
| 液体和气体中的纵波  | $u_t = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$                                     | $B$ : 流体的容变弹性模量    |
|            |   | $\rho$ : 流体的密度     |
| 稀薄大气中的纵波   | $u_t = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ | $\gamma$ : 气体摩尔热容比 |
|            |   | $M$ : 气体摩尔质量       |
|            |   | $R$ : 气体摩尔常数       |

## 12.2 平面简谐波

### 12.2.1 平面行波

已知位于坐标原点的质元振动规律:

$$y_0 = f(t)$$

设波速为 $u$ ,  $t$ 时刻,  $x$ 处质元的振动状态与 $t - x/u$ 时刻原点质元的振动状态相同。

$t$ 时刻,  $x$ 处质元的振动规律为:

$$y = f\left(t - \frac{x}{u}\right) = f(x, t)$$

### 12.2.2 平面简谐波

若传播谐振动状态, 波所到之处, 媒质中各质点都做同频率、同振幅谐振动, 则该波动称为简谐波 (余弦或正弦波), 任何复杂的波都可以分解为一系列简谐波的叠加。

平面简谐波——波面为平面的简谐波 (在无吸收、各向同性、无限大均匀媒质中传播)

#### 1. 平面简谐波的波函数

- 从传播时间分析:

$O$ 点质元的振动方程:

$$y_O = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$P$ 点质元的振动方程:

$$y_P = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$$

- 从相位变化分析:  $(\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{x})$

$$y_P = A \cos(\omega t + \varphi_0 - \Delta\varphi) = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$u = v\lambda$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$$



$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ut - x) + \varphi_0 \right]$$

## 2. 波函数的物理意义

- 振动方程即波函数，当振动质元的位置  $x$  给定，则在波传播过程中，任意两质点振动的相位关系为：

$$y_1 = A \cos[\omega(t - x_1/u) + \varphi_0]$$

$$y_2 = A \cos[\omega(t - x_2/u) + \varphi_0]$$

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{u}(x_1 - x_2)$$

若  $x_2 > x_1$ ，则  $\Delta\varphi < 0$ ， $x_2$  处质点振动相位总是落后于  $x_1$  处质点

- 波速是振动相位的传播速度，当位移  $y$  给定，若有：

$$y = A \cos[\omega(t_1 - x_1/u) + \varphi_0]$$

$$y = A \cos\left\{\omega\left[(t_1 + \Delta t) - \frac{x_1 + \Delta x}{u}\right] + \varphi_0\right\}$$

故有：

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

### 简谐振动的相位以波速传播

- 当  $t$  给定， $y = y(x)$ ，任一时刻的波形可以描述出各个质元的振动状况
- 若波沿  $x$  轴负向传播时，可得到波函数：

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

## 3. 平面简谐波的波动方程

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y_{xx} = -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y_{tt} = -A \omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

所以有：

$$y_{xx} = \frac{1}{u^2} y_{tt}$$

$$y_{tt} = u^2 y_{xx}$$

- 上式是一切平面波所满足的微分方程，无论正向反向传播
- 不仅适用于机械波，也广泛地适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程
- 一般情况下，物理量在三维空间中以波的形式传播，若媒质是线性、均匀、各向同性，且无吸收，则波动方程为：

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} = \frac{1}{u^2} \xi_{tt}$$

$$\Delta \xi = \nabla^2 \xi = \frac{1}{u^2} \xi_{tt}$$

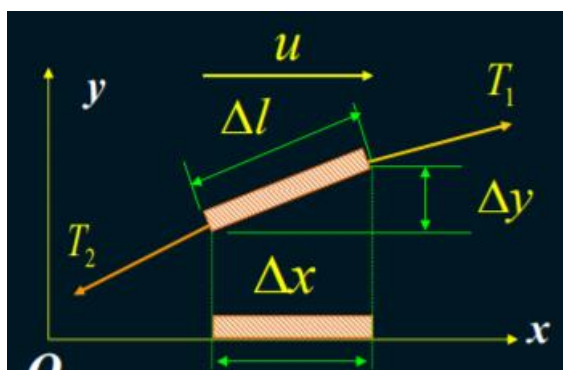
## 12.3 波的能量和强度

### 12.3.1 平面简谐波的能量、能量密度

机械波在媒质中传播时，质元由静止开始振动，传播过程中起振质点处的媒质发生形变，所以波动是能量传播过程。

以绳索上的横波为例：

设波沿 $x$ 方向传播，取线元 $\Delta m = \eta \Delta x$ ，



线元的动能为：

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

线元的势能为（原长为势能零点）：

$$\Delta E_p = T(\Delta l - \Delta x) \approx \frac{T}{2} \Delta x \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

机械能：

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p$$

已知：

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- 质元的动能： $\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$
- 质元的势能： $\Delta E_p = \frac{T}{2} \Delta x \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$
- 质元的机械能： $\Delta E = \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = \Delta E(x, t)$
- 上式说明，波传播中，质元的动能和势能同时变化，质元的机械能作时空的周期性变化，即波在传播中不断吸收和放出能量，波动是一个能量传播的过程。
- 简谐波的能量密度：  
绳子横截面为 $S$ ，体密度为 $\rho$ ，则线元单位体积中的机械能为：

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{S\Delta x} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = \varepsilon(x, t)$$

### 12.3.2 能流密度和强度

能量密度：

$$\varepsilon = \frac{W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = \varepsilon(x, t)$$

对于某一给定位置，能量密度在一个周期内的平均值（适用于所有机械波）：

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

1. 能流：单位时间内，通过一定截面的波动能量

$$P = \frac{\varepsilon u \Delta t S}{\Delta t} = \varepsilon u S$$

一个周期内的平均能流为：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \bar{\varepsilon} u S$$

2. 能流密度：通过垂直于波线截面单位面积上的能流

$$\text{大小：} J = \frac{dP}{dS} = \varepsilon u$$

方向：波动的传播方向

$$\text{矢量表示式：} \vec{J} = \varepsilon \vec{u}$$

3. 波的强度：一个周期内，能流密度大小的平均值

$$I = \bar{J} = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{u}{T} \int_0^T \varepsilon dt = u \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} u \rho A^2 \omega^2$$

- 平面波（媒质不吸收，能量不损失）

$$\frac{1}{2} u \rho A_1^2 \omega^2 S_1 T = I_1 S_1 T = I_2 S_2 T = \frac{1}{2} u \rho A_2^2 \omega^2 S_2 T$$

由  $S_1 = S_2$ ，得  $A_1 = A_2$

- 球面波（媒质不吸收）

$$\frac{1}{2} u \rho A_1^2 \omega^2 S_1 T = I_1 S_1 T = I_2 S_2 T = \frac{1}{2} u \rho A_2^2 \omega^2 S_2 T$$

故：

$$A_1^2 4\pi r_1^2 = A_2^2 4\pi r_2^2$$

$$\therefore A \propto \frac{1}{r}$$

得球面波得波函数：

$$y(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

其中， $A_0$ 为离原点（波源）单位距离处波的振幅

球面波的振幅 $A$ 在媒质不吸收的情况下也随 $r$ 增大而减小

### 12.3.3 波的吸收

对于吸收媒质，实验表明，波动振幅的变化满足：

$$-dA \propto A$$

$$-dA \propto dx$$

$$\therefore dA = -\alpha A dx \quad (\alpha \text{为吸收系数})$$

$$\therefore \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = - \int_0^x \alpha dx$$

$$\therefore A = A_0 e^{-\alpha x}$$

$$\therefore I \propto A^2$$

$$\therefore I = I_0 e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-\beta x}$$

## 12.4 惠更斯原理与波的衍射

1. 波面上任意点都可看作是新的子波源
2. 子波源各自向外发出子波
3. 各子波所形成的包络面，是原波面在一定时间内所传播的新波面
4. 说明：
  - 已知波前，可用几何方法决定下一时刻波前
  - 该方法也适用于电磁波，非均匀、各向异性媒质
  - 不足之处在于难于表征强度分布

## 12.5 波的干涉

### 12.5.1 波的叠加原理

1. 波传播的独立性  
波在传播中发生重叠时，各自的频率、波长、振幅不会相互影响，保持各自波的独立性
2. 波的叠加  
波发生叠加时，媒质中各质元按两波各自引起的振动叠加成的合振动运动，构成合成波。  
即，波的叠加等效于振动叠加。注意，波的叠加原理仅适用于线性波的问题。

### 12.5.2 波的干涉

一般情况下，各个波的振动方向和频率均不同，相位关系不确定，叠加的合成波较为复杂。  
定义：当两列（或多列）波在某区域内传播，可能使媒质中某些点上的振动始终加强，某些点上的振动始终减弱。

1. 相干条件与相干波

- 振动方向相同（注意区分，振动方向与波动方向垂直）
  - 频率相同
  - 相位差恒定
2. 干涉规律（两波源相干叠加）

$$S_1: y_{01} = A_{01} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2: y_{02} = A_{02} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

两列波在P点引起的振动：

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t - 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + \varphi_2)$$

合振动的振幅：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}]$$

波的强度：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

空间点振动的情况分析：

- 当  $\Delta \varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda} = \pm 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

- 当  $\Delta \varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

- 当  $\varphi_2 = \varphi_1$ , 有  $\Delta \varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda} = 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}$

➤  $\Delta \varphi = \pm 2k\pi$ , 即  $r_1 - r_2 = \delta = \pm k\lambda$ , 此为加强条件, 干涉相长 (加强)

➤  $\Delta \varphi = \pm (2k + 1)\pi$ , 即  $r_1 - r_2 = \delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , 此为减弱条件, 干涉相消 (减弱)

➤ 若  $A_1 = A_2 = A$ ,

$$A_{max} = 2A, I_{max} = 4I_0; A_{min} = 0, I_{min} = 0$$

从能量上看, 当两相干波叠加时, 合成波在空间各处的强度并不等于两个分波强度之和, 而是发生重新分布。这种新的强度分布是时间上稳定的、空间上强弱相间具有周期性的分布, 这就是波的干涉特征。

## 12.6 驻波

两列等振幅相干波沿相反方向传播时叠加而形成驻波

## 12.6.1 弦线上的驻波演示实验

驻波中，一些媒质点始终保持静止，一些媒质点却始终保持振动最大

## 12.6.2 驻波的定量分析

设两频率相同、振幅相同、初相相同的右行和左行波：

$$y_1 = A \cos 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left( vt + \frac{x}{\lambda} \right)$$

合成波的波函数为：

$$y = A \left[ \cos 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos 2\pi \left( vt + \frac{x}{\lambda} \right) \right] = \left( 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \omega t = A(x) \cos \omega t$$

由此可见，驻波方程是振动方程，驻波实质上是一种特殊的振动而不是行波。

分析：

1. 驻波波函数：  $y = \left( 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos(2\pi vt)$

- 当  $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$ ,  $x = k \frac{\lambda}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $A(x) = A_{\max} = 2A$ , 此位置叫做波腹；
- 当  $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0$ ,  $x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $A(x) = A_{\min} = 0$ , 此位置叫做波节。
- 相邻波腹间距离：  $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$
- 相邻波节间距离：  $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$

2. 所有波节点将媒质划分为长  $\lambda/2$  的许多段，每段中各质点振动振幅不同，但相位相同；而相邻段间各质点的振动方向相反。
3. 没有能量的定向传播。驻波能量只是在波节和波腹之间，进行动能和势能的转化。
4. 半波损失：

反射点是波节点，则入射波与反射波是反相的，相位差  $\Delta\varphi = \pi$ ，设波程差为  $\Delta r$ ，有：

$$\frac{\Delta r}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\therefore \Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

相当于入射波与反射波之间附加了半波长的波程差。

当波在折射率为  $n_1$  的介质中传播，垂直接触折射率为  $n_2$  的介质，在两者介质的界面上有：

- 若  $n_1 < n_2$ ，发生透射，此时反射波与入射波存在半波损失，反射点为波节点；
- 若  $n_1 > n_2$ ，不发生透射，此时反射波与入射波不存在半波损失，反射点为波腹点。
- 透射波与入射波不存在半波损失。

5. 简正模式：特定的振动方式称为系统的简正模式

弦线长必须满足：  $L = n\lambda/2$ ，才能形成驻波。

驻波频率为：  $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2L}$

特别地，当  $n = 1$ ，此时称驻波频率  $\frac{u}{2L}$  为基频，其余情况称为谐频。

一个驻波系统有许多个固定频率，与弹簧振子只有一个固定频率不同。

## 12.7 多普勒效应

由于观察者（接收器）或波源或二者同时相对媒质运动，使观察者接收到的频率与波源发出的频率不同的现象。

### 12.7.1 波源静止，观察者运动

设  $u$  为波相对于波源传播的速度， $u'$  以观察者为参考对象时波的传播速度，观察者相对波源的速度为  $v_o$ ，在此媒质中的波长为  $\lambda$ ，观察者与波源相对静止时观测的频率为  $f_0$ 。

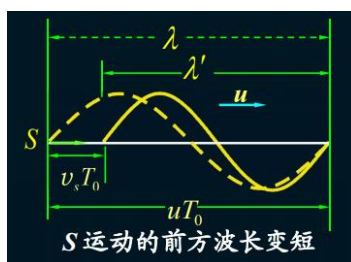
则观察者测得的频率为：

$$f = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + v_o}{\lambda} = \frac{u + v_o}{u/f_0} = \left(1 + \frac{v_o}{u}\right)f_0$$

彼此靠近：  $v_o > 0, f > f_0$

彼此远离：  $v_o < 0, f < f_0$

### 12.7.2 观察者静止，波源运动



设波源运动速度为  $v_s$ ，机械波传播周期为  $T_0$ ，故：

$$\lambda' = uT_0 - v_s T_0 = (u - v_s)/f_0$$

$$f = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v_s} f_0$$

### 12.7.3 波源与观察者同时运动

$$f = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_o}{uT_0 - v_s T_0} = \frac{u + v_o}{u - v_s} f_0$$

波源和观察者相向运动时取正，背离运动时取负。

讨论：

1. 若波源与观测者的方向不在二者连线上，此时纵向（沿连线方向分速度）产生多普勒效应，而横向（垂直于连线方向分速度）不产生多普勒效应。

$$f = \frac{u + v_{o\parallel}}{u - v_{s\parallel}} f_0 = \frac{u + v_o \cos \theta_o}{u - v_s \cos \theta_s} f_0$$

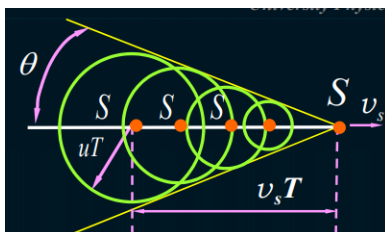
2. 电磁波的多普勒效应

$$f = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v \cos \theta / c} f_s$$

纵向效应： $f = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c \mp v} f_s$ ；横向效应： $f = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} f_s$ 。

3. 当  $v_s > u$  时，多普勒效应失去意义，此时形成冲击波

$$\text{马赫角: } \sin \theta = \frac{u}{v_s}$$



4. 多普勒效应的应用：测速、测距

## 第十三章 波动光学

### 13.1 光是电磁波

#### 13.1.1 电磁波是空间矢量波

##### 1. 真空中的电磁波

电磁波就是交变电磁状态传播。

设有一列平面简谐电磁波，由麦克斯韦电磁场理论可知：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

当电场振动沿  $x$  轴正向传播时，有反映该振动的平面简谐波：

$$E = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

利用麦克斯韦电磁场方程组可推出：

$$H = H_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 u} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$



真空中,  $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ ; 介质中,  $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n} < c$ , 其中 $n$ 为折射率。

## 2. 电磁波的性质

- (1) 电磁波是横波  
振动量 $E, H$ 与波速 $u$ 构成相互垂直的右手螺旋关系。
- (2) 电磁波的偏振性  
 $E, H$ 分别在各自的平面上振动, 产生旋光现象。
- (3) 电场与磁场同相变化

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

振幅满足:

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0$$

- (4) 电磁波的能量

$$w = w_e + w_m = \sqrt{\varepsilon\mu}EH = \frac{EH}{u}$$

$$w_e = \varepsilon E^2/2$$

$$w_m = \mu H^2/2$$

- 电磁波的能流密度

$$S = wu = EH$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

(上式也称为坡印廷矢量)

- 电磁波的强度

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{T} \int_0^T EH dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2$$

$$I \propto \frac{1}{2} E_0^2$$

## 3. 电磁波谱

电磁波按频率从小到大依次为: 无线电, 微波, 红外线, 可见光, 紫外线, X射线和 $\gamma$ 射线等。可见光频率范围: 390~760nm。

| 可见光颜色的波长和频率                |         |  |           |
|----------------------------|---------|--|-----------|
| 光色                         | 波长(nm)  | 频率(Hz)                                       | 中心波长 (nm) |
| 红                          | 760~622 | $3.9 \times 10^{14} \sim 4.8 \times 10^{14}$ | 660       |
| 橙                          | 622~597 | $4.8 \times 10^{14} \sim 5.0 \times 10^{14}$ | 610       |
| 黄                          | 597~577 | $5.0 \times 10^{14} \sim 5.4 \times 10^{14}$ | 570       |
| 绿                          | 577~492 | $5.4 \times 10^{14} \sim 6.1 \times 10^{14}$ | 540       |
| 青                          | 492~470 | $6.1 \times 10^{14} \sim 6.4 \times 10^{14}$ | 480       |
| 兰                          | 470~455 | $6.4 \times 10^{14} \sim 6.6 \times 10^{14}$ | 460       |
| 紫                          | 455~400 | $6.6 \times 10^{14} \sim 7.5 \times 10^{14}$ | 430       |
| 人眼最为敏感的光是黄绿光, 即 555 nm 附近。 |         |  |           |

## 13.2 光源与光波的叠加

### 13.2.1 光源

普通光源：热辐射、电致发光、光致发光、化学发光

新型光源：同步辐射光源、激光光源

新型光源的亮度高、强度大、方向性和偏振性好、单色性和相干性好

### 13.2.2 光波的叠加

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \frac{\omega_1 r_1}{c} + \varphi_1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \frac{\omega_2 r_2}{c} + \varphi_2)$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_p^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

光强：  $I_p = I_1 + I_2 + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$

干涉项：  $2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \begin{cases} = 0 & \text{非相干叠加} \\ \neq 0 & \text{相干叠加} \end{cases}$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left\{ \begin{aligned} & \cos \left[ (\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{c} \right] \\ & + \cos \left[ (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{c} \right] \end{aligned} \right\}$$

讨论：

#### 1. 非相干叠加

a)  $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2, \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = 0$

b)  $\omega_1 \neq \omega_2, \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dt = 0$

c)  $\omega_1 = \omega_2,$

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle &= \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \left[ (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{c} \right] dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \Delta \varphi dt \end{aligned}$$

#### 2. 相干条件

a) 频率相同

b) 相位差恒定

c) 光矢量振动方向平行

#### 3. 相干叠加

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

a) 相长干涉 (明纹)

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

当  $I_1 = I_2 = I_0$ ,  $I = 4I_0$

b) 相消干涉 (暗纹)

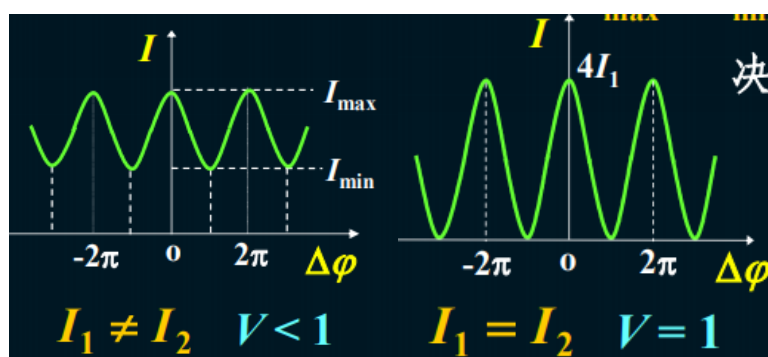
$$\Delta\varphi = \pm (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

当  $I_1 = I_2 = I_0$ ,  $I = 0$

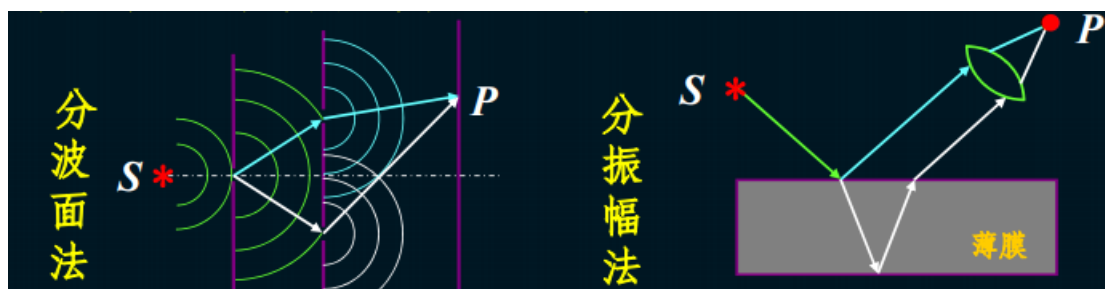
## 条纹衬比度 (对比度)

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$



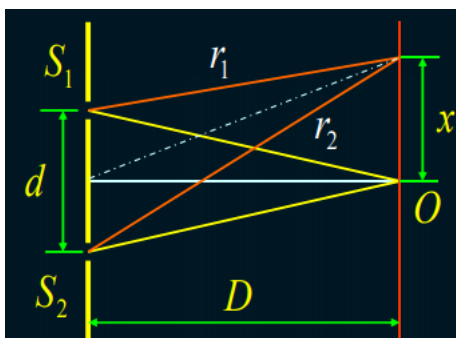
决定衬比度的因素：振幅比、光源的宽度、光源的单色性

## 13.2.3 普通光源获得相干光的途径



## 13.3 杨氏双缝干涉实验

### 13.3.1 杨氏双缝实验



$$\begin{cases} r_1^2 = D^2 + (x - \frac{d}{2})^2 \\ r_2^2 = D^2 + (x + \frac{d}{2})^2 \end{cases} \quad \delta = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{r_2 + r_1} \approx \frac{xd}{D}$$

$$\delta = \frac{xd}{D} = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{明纹: } x_k = \pm \frac{k\lambda D}{d}; \quad \text{暗纹: } x_k = \pm \frac{(2k+1)\lambda D}{2d}$$

1. 屏上相邻明（暗）条纹间距为：  $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{d}$
2. 强度分布：

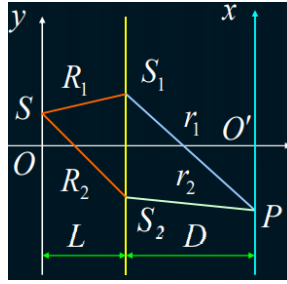
$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi, I_1 = I_2 = I_0, \Delta \varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\therefore I_P = 2I_0 + 2I_0 \cos \left( \frac{2\pi xd}{\lambda D} \right) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi xd}{\lambda D} \right) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

3. 条纹间距  $\Delta x$  正比于光波波长，故用白光作光源时，在零级白色中央条纹两边对称排列着几条彩色条纹，从内向外依次从紫光到红光
4. 双缝型的其他干涉装置
  - 洛埃镜
  - 菲涅尔双面镜

说明：

- 反射光根据具体问题具体分析
  - 由光疏介质射向光密介质 ( $n_1 < n_2$ )，有半波损失
  - 由光密介质射向光疏介质 ( $n_1 > n_2$ )，无半波损失
- 透射光无半波损失
- 光源移动对于干涉条纹的影响：



$$\delta = (R_2 + r_2) - (R_1 + r_1) = (R_2 - R_1) + (r_2 - r_1) \approx \left(\frac{y}{L} + \frac{x}{D}\right)d = 0$$

$$x = -\frac{D}{L}y$$

条纹移动与光源移动反向

- 光的单色性对条纹的影响：

$$x_k = \pm \frac{k\lambda D}{d}, \Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$

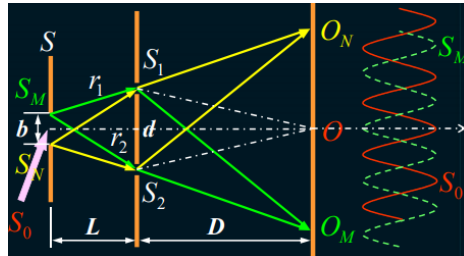
$$\Delta x_k = \frac{D}{d}\Delta\lambda \leq \Delta x$$

$$\therefore k \leq \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

能清晰看到的条纹数量有限，上限与光的单色性成反比

- 狭缝宽度对条纹的影响：

随着狭缝光源逐渐变宽，即 $b$ 增大，各次波源的条纹错开越大；当 $S_M S_N$ 所产生的第一级暗纹正好落在 $S_0$ 所产生的中央明纹 $O$ 处时，由于干涉条件已完全不能分辨。



若 $S_M$ 发出的两束光的光程差等于半波长，

$$(r_2 + S_2 O) - (r_1 + S_1 O) = r_2 - r_1 = \lambda/2$$

$$r_{1,2}^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} \mp \frac{b}{2}\right)^2$$

$$r_2 - r_1 = \frac{bd}{r_2 + r_1} \approx \frac{bd}{2L} (b, d \ll L)$$

$$\therefore b = \frac{L}{d}\lambda$$

对具有一定尺度的光源来说，它所发出的光波波阵面上，沿垂直于波线方向不是任意两处的光都能发生干涉，只有来自两点距离小于 $\frac{L}{d}\lambda$ 的光才是相干的。

## 13.4 光程与光程差

若 $t$ 内，光在介质中传播的路程 $r = ut$ ，相应光波在真空中传播路程为

$$x = ct = c \frac{r}{u} = nr$$

单色光在介质、真空中波长的关系为

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{x}{\lambda_0} = \Delta\varphi_2 = 2\pi \frac{r}{\lambda} = 2\pi \frac{nr}{\lambda_0}$$

$$\therefore x = nr$$

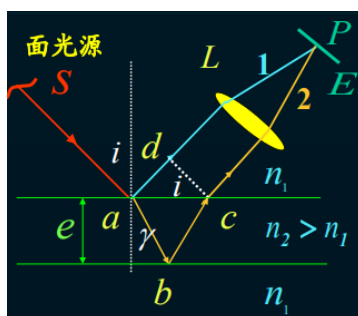
在传播相同时间或改变相同相位的条件下，光在介质中传播 $r$ 的路程折合为光在真空中传播 $nr$ 的路程。

## 13.5 薄膜干涉

当一束光射到透明薄层，光束在膜上、下表面发生多次反射和折射，分割振幅成多束光。它们频率相同，光矢量平行，相位差恒定，是相干光。

### 13.5.1 等倾干涉

薄膜厚度均匀，求两条光线的光程差



$$\delta = n_2(\overline{ab} + \overline{bc}) - n_1\overline{ad} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\because \overline{ab} = \overline{bc} = \frac{e}{\cos\gamma}, \overline{ad} = \overline{ac} \sin i = 2e \tan\gamma \cdot \sin i, n_1 \sin i = n_2 \sin\gamma$$

$$\therefore \delta = 2n_2 e \cos\gamma + \frac{\lambda}{2} = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{— 明纹} \\ \frac{(2k+1)\lambda}{2} & \text{— 暗纹} \end{cases}$$

注意：透镜不产生附加光程差，因为两个面都有半波损失

1. 等倾干涉条纹特点：凡以相同倾角入射的光，反射光束有相同的光程差，对应干涉中一条条纹，也称等倾条纹。

- a) 形状：一系列同心圆环，内疏外密
- b) 条纹级次分布：内纹级次比外纹级次高
- c) 薄膜厚度增加，圆纹从中心冒出，向外扩张，条纹间距变密
- d) 条纹变化与波长关系： $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

垂直入射时，

$$2e_k n_2 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$2e_{k+1} n_2 + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$$

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n_2}$$

冒出（淹没）一个圆纹，光程差改变一个波长，薄膜厚度 $e$ 改变 $\frac{\lambda}{2n_2}$

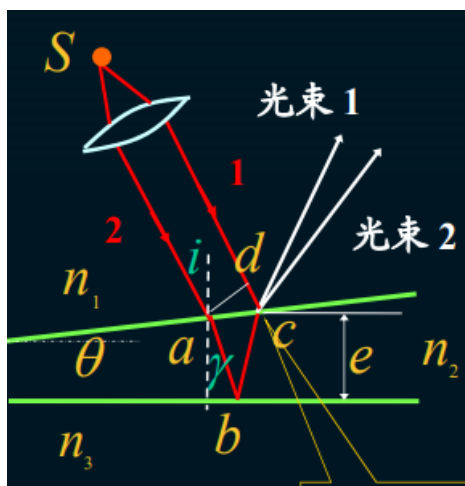
2. 反射干涉与投射干涉互补——能量守恒关系

3. 应用：增透膜，增反膜——薄膜光学

薄膜干涉的一般情况相当复杂，其干涉的特征与光源的尺寸、膜的厚薄和形状以及如何观测都有十分密切的关系。

## 13.5.2 等厚干涉

当薄膜厚度不均匀时，两条相干光线的光程差为：



$$\delta = n_2(\overline{ab} + \overline{bc}) - n_1 \overline{dc} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = 2n_2 e \cos \gamma + \frac{\lambda}{2}$$

当 $i = 0$ ，则 $\delta = 2en_2 + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \frac{2k\lambda}{2}, k = 1, 2, \dots \\ \frac{(2k+1)\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ ，厚度相同处光程差相同

说明：

1. 同一厚度处对应同一级等厚条纹，典型的等厚干涉是劈尖干涉

- 两相邻明条纹对应的空气层厚度差为：

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2}$$

- 两相邻明条纹对应的介质层厚度差为：

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n_2}$$

- 明/暗条纹间距：

$$a \sin \theta = \Delta e = \frac{\lambda}{2n_2}$$

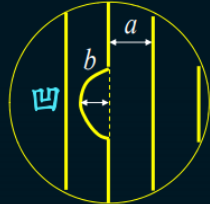
## 2. 等厚干涉的应用

- 测波长：已知 $\theta, n$ ，测出 $L$ 可得到 $\lambda$
- 测折射率：已知 $\theta, \lambda$ ，测出 $L$ 可得到 $n$
- 测细小直径 $D$ 、厚度或微小变化，表面平整度

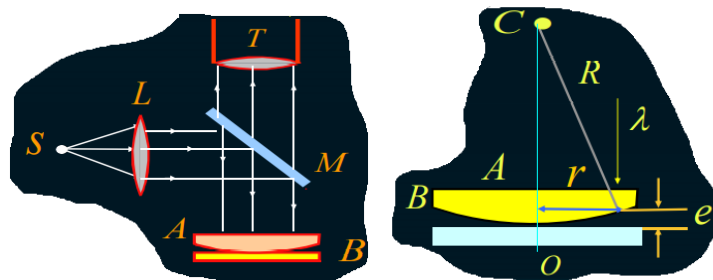
● 检测表面平整度（极小的凹凸不平）

例：如图示的等厚干涉条纹 工件表面？

$$\frac{a \sin \theta}{b \sin \theta} = \frac{\Delta e}{\Delta} = \frac{\frac{\lambda}{2n_2}}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{b}{2a n_2} \lambda$$



## 3. 牛顿环：玻璃平板与平凸透镜之间形成空气薄层。



相干光程差：

$$\delta = 2en_2 + \frac{\lambda}{2} = 2n_2 \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2}$$

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 \approx 2Re, e = \frac{r^2}{2R}$$

空气中，相干光程差： $\delta = 2 \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \frac{2k\lambda}{2}, k = 1, 2, \dots \\ \frac{(2k+1)\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$

故，干涉条纹的半径（空气层的折射率近似为 1）：

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{(2k-1) \frac{\lambda R}{2}}, k = 1, 2, \dots \text{明纹} \\ \sqrt{k\lambda R}, k = 0, 1, 2, \dots \text{暗纹} \end{cases}$$

- 牛顿环干涉条纹特征：

牛顿环与等倾条纹都是内疏外密的圆环形条纹，而牛顿环的环纹级次由环心向外递增。  
当膜层厚度增加时，牛顿环的环纹向内收缩，而等倾条纹相反

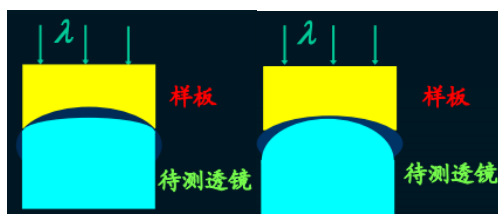
- 牛顿环的应用：



- 测球面透镜的曲率半径 $R$

$$\begin{cases} r_k^2 = kR\lambda \\ r_{k+N}^2 = (k+N)R\lambda \\ r_{k+N}^2 - r_k^2 = NR\lambda \end{cases}$$

- 测波长，已知 $R$ ，测出 $N, r_{k+N}, r_k$ ，可得 $\lambda$
- 检测透镜的表面曲率半径



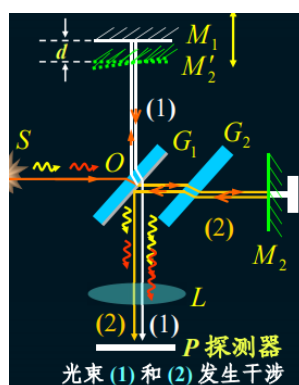
- 中央暗纹时，投射条纹与反射条纹相反

## 13.6 迈克耳孙干涉仪

1880 年，迈克尔逊创建了一种干涉仪，用分振幅法产生双光束干涉。

### 1. 仪器基本结构和原理

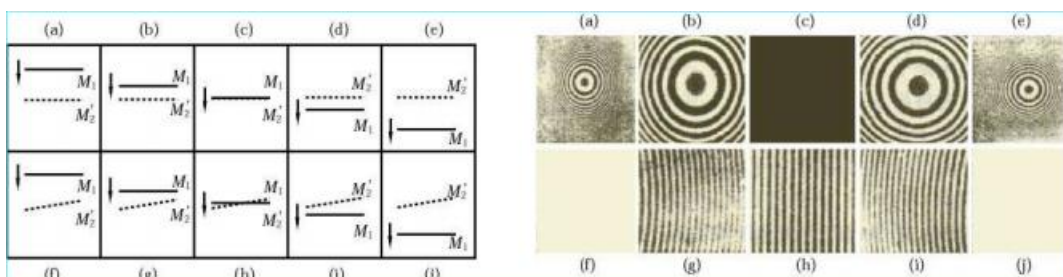
$G_1$ : 分光板;  $G_2$ : 补偿板



- (1) 当 $M_1 \perp M_2$ ，发生等倾干涉；
- (2) 当 $M_1 M_2$ 不垂直，发生等厚干涉。

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2}$$

当 $M_1$ 移动 $\Delta d$ ， $\Delta d = N \frac{\lambda}{2}$



## 2. 相干长度与光的时间相干性

$$\text{波列 } a(L = c\Delta t), \begin{matrix} a_1: r_1 \\ a_2: r_2 \end{matrix} \} \delta = r_2 - r_1 \leq L$$

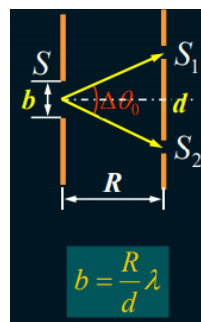
由傅里叶分析可知,  $\Delta\nu\Delta t = 1$ ,  $v = c/\lambda$ ,  $|\Delta v| = |c \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}|$

$$\therefore \text{相干长度 } L = \delta_{\max} = c\Delta t = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

白光的时间相干性最差, 激光器的时间相干性最好

讨论:

- (1) 空间相干性和时间相干性都着眼于光波场中各点(次波源)是否相干的问题。从本质上看, 空间相干性问题来源于扩展光源不同部分发光的独立性; 时间相干性问题来源于光源发光过程在时间上的不连续性。从后果上看, 空间相干性问题表现在波场的横方向(波前)上, 集中于分波前的干涉装置内; 时间相干性问题表现在波场的纵方向(波线)上, 集中于长程差的分振幅干涉装置。但并不绝对, 如薄膜干涉的定域问题实质上就是空间相干性问题。
- (2) 空间相干性用相干区域的孔径角 $\Delta\theta_0$ , 线度 $d$ 和相干面积 $d^2$ 来描述, 其与光源宽度 $b$ 的关系由空间相干性的反比公式决定:



$$b \cdot \Delta\theta_0 \approx \lambda$$

时间相干性用相干长度 $L$ (波列长度), 相干时间 $\tau_0$ (波列持续时间)来描述, 其与表征光源非单色性的量——谱线宽度 $\Delta\lambda$ (或 $\Delta\nu$ )的关系由时间相干性的反比公式决定

$$\tau_0 \Delta\nu \approx 1, L \Delta\lambda/\lambda \approx \lambda$$

- (3) 无论衡量时间相干性的相干时间, 还是衡量空间相干性的相干区大小, 都不是一个绝对的界限。实际上干涉条纹的消失过程是逐渐的, 其反衬度由大到小, 逐渐下降到零。

## 13.7 惠更斯-菲涅尔原理

### 13.7.1 光的衍射现象

衍射的共性:

- 光沿被限制的方向扩展
- 光强被重新分配

衍射现象明显取决于障碍物线度与波长的对比, 波长越大、障碍物越小, 衍射越明显

## 13.7.2 惠更斯菲涅尔原理

- 同一波前上的各点都是相位相同的相干球面子波
  - 各子波在空间某点的相干叠加（矢量和），决定了该点波的强度
- 基尔霍夫倾斜因子公式：

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta)$$

$$F(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

P点光振动的叠加（菲涅尔衍射积分公式）：

$$E_{(P)} = \iint_S \frac{C \cdot K(\theta)}{r} \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi nr}{\lambda}) \cdot dS$$

P处光强： $I_P \propto E_{0(P)}^2$

一般的衍射问题，常用半波带法和振幅矢量法分析

## 13.7.3 光的衍射分类

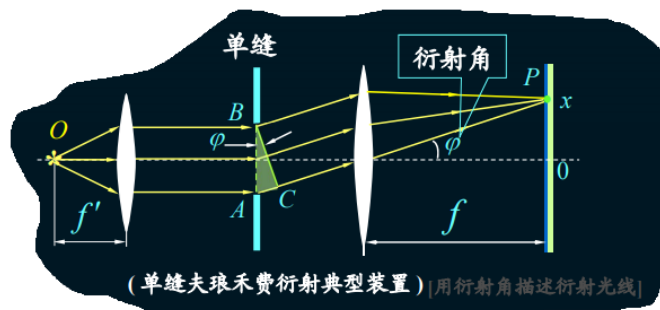
衍射系统：光源，衍射屏，接收屏

1. 菲涅尔衍射——近场衍射  
当衍射屏与光源或接收屏的距离为有限远时的衍射
2. 夫琅禾费衍射——远场衍射  
当衍射屏与光源或接收屏的距离为无限远时的衍射

## 13.8 夫琅禾费衍射

### 13.8.1 单缝的夫琅禾费衍射

1. 实验装置



$A, B \rightarrow P$ 的光程差 $\Delta = AC = a \sin\varphi$ , ( $a$ 为狭缝宽度)

2. 半波带分析法  
衍射暗纹、明纹条件

$O$ 点:  $a \sin \varphi = 0$  中央明纹

其余位置: 将 $a$ 分为一系列的窄带 $\Delta s$ (半波带), 满足 $\Delta s \cdot \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}$ , 则有:

$$a \sin \varphi = \frac{a}{\Delta s} \cdot \frac{\lambda}{2} = m \cdot \frac{\lambda}{2}$$

- (1)  $m = 2k$ , 此时为暗纹
- (2)  $m = 2k + 1$ , 此时为明纹
- (3)  $m \notin Z$ , 此时介于明纹和暗纹之间

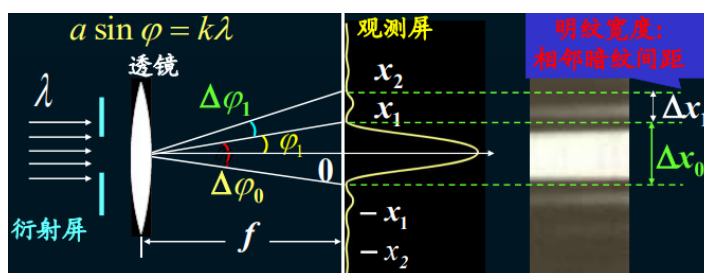
$$\begin{cases} a \sin \varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \text{--- 暗纹} \\ a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \text{--- 明纹} \\ a \sin \varphi = 0 \text{--- 中央明纹} \end{cases}$$

说明: 得到的暗纹和中央明纹位置精确, 其他明纹位置只是近似

### 3. 单缝衍射的特征分析

#### a) 条纹的宽度

##### i. 角宽度



1. 中央明纹角宽度由 $k = \pm 1$ 级暗纹位置所决定:

$$-\lambda < a \sin \varphi_1 < \lambda, \text{ 当 } a \gg \lambda \text{ 时, } \sin \varphi_1 \approx \varphi_1$$

$$\text{中央明纹的角宽度: } \Delta \varphi_0 = 2\varphi_1 \approx 2\lambda/a$$

2. 第 $k$ 级明纹 (次极大) 角宽度:

$$a(\sin \varphi_{k+1} - \sin \varphi_k) = \lambda$$

次级明纹角宽度:

$$\Delta \varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2} \Delta \varphi_0$$

##### ii. 线宽度

$$x_k = f \tan \varphi_k \approx f \varphi_k = kf \frac{\lambda}{a}$$

$$\text{中央明纹线宽度: } \Delta x_0 = 2x_1 = 2f \frac{\lambda}{a}$$

$$\text{次级明纹线宽度: } \Delta x = x_{k+1} - x_k = f \frac{\lambda}{a} = \frac{\Delta x_0}{2}$$

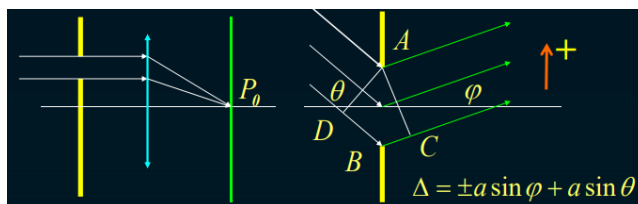
#### b) 衍射反比率

$$\Delta x_0 = 2f \frac{\lambda}{a}$$

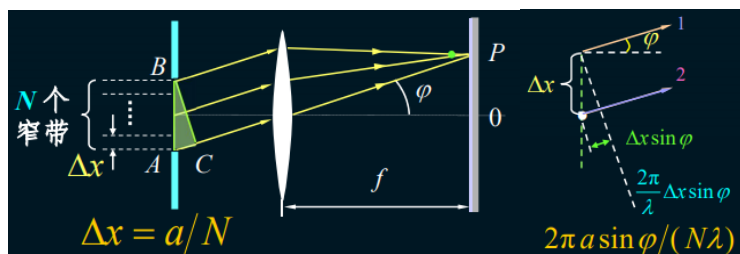
缝宽越窄, 波长越长, 条纹宽度越宽, 衍射越明显

当 $a$ 足够大, 此时 $\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , 此时只有一条明条纹, 波动光学退化为几何光学

c) 单缝的移动与斜入射对衍射条纹的影响



4. 单缝衍射强度 (振幅矢量法)



设每个窄带在 $P$ 点引起的振幅为 $\Delta E_0$ ,

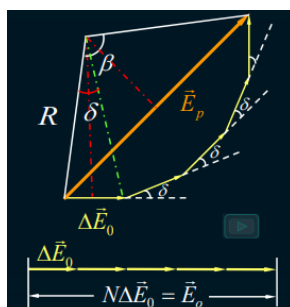
$A, B$ 点处的窄带在 $P$ 处引起振动的相位差为

$$\beta = 2\pi a \sin \varphi / \lambda$$

则相邻窄带的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta x \sin \varphi) = \beta / N$$

所以,  $P$ 点的合振动是由 $N$ 个振幅相等, 相位差依次为 $\delta$ 的同频振动的合成



$$\begin{cases} 2R \sin(\frac{\delta}{2}) = \Delta E_0 \\ 2R \sin(\frac{\beta}{2}) = E_{(P)0} \end{cases}$$

$$\therefore E_{(P)0} = \Delta E_0 \frac{\sin N\delta/2}{\delta/2} = N \Delta E_0 \frac{\sin \beta/2}{\beta/2} = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}$$

对于 $O$ 点,  $\varphi = 0, \delta = 0, \alpha = 0, I = I_0 = I_{max}$ , 显示中央明纹;

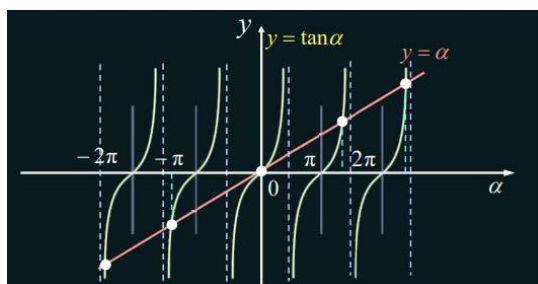
其余位置, 光强满足  $I = I_0 (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2$

暗纹条件:  $I = 0 \Rightarrow \alpha \neq 0, \sin \alpha = 0$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} = \pm k\pi$$

$$\therefore a \sin \varphi = \pm k\lambda, k = 1, 2, \dots$$

明纹条件:  $\frac{dI}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \alpha$

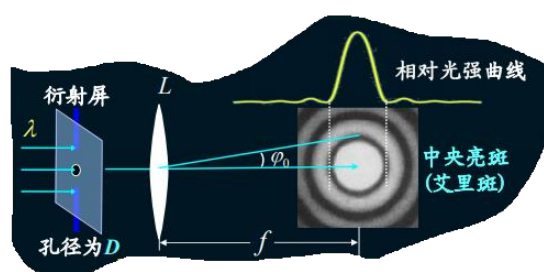


解得：  $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \dots$

对应地：  $a \sin \varphi = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \dots$

从而可知半波带法得到的明纹位置  $a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$  是较好的近似

## 13.8.2 圆孔的夫琅禾费衍射



### 1. 强度分布

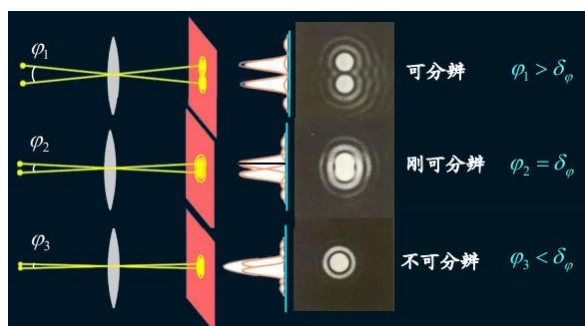
$$I = I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} \left(\frac{u}{i}\right)^2 = I_0 \frac{J_1^2(2u)}{u^2}, u = \frac{\pi R}{\lambda} \sin \varphi, J_1 \text{ 为一阶贝塞尔函数}$$

- $\varphi = 0, u = 0, I = I_0$  时为中央明纹——艾里斑(84%)
- $u = 0.61\pi, 1.12\pi, \dots, \sin \varphi = \frac{0.61\lambda}{R}, \frac{1.12\lambda}{R}, \dots$ , 此时为暗纹

### 2. 艾里光斑的半角宽度

$$\varphi_0 \approx \frac{1.22\lambda}{D}, d \approx \frac{2.44\lambda f}{D} \text{ (艾里斑直径)}$$

## 13.8.3 光学仪器的分辨本领



瑞利判据：对于两个等光强的非相干物点，如果一个像斑中心恰好落在另一像斑的边缘（第

一暗纹处)，则此两像被认为是刚好能分辨。此时两像斑中心角距离为最小分辨角。

$$\delta_{\varphi} = \varphi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} (\text{最小分辨角})$$

光学仪器的分辨本领：

$$R = \frac{1}{\delta_{\varphi}} \approx \frac{D}{1.22\lambda}$$

提高光学仪器的分辨本领的两个途径

- (1)  $\lambda \downarrow$ ：如电子显微镜中用高速运动的电子的波长( $0.004nm$ )，其可看到原子
- (2)  $D \uparrow$ ：如天文望远镜，一般 $D \sim 5m$ ，其可测出 $\delta_{\theta_{min}} \sim 1.35 \times 10^{-7} rad$

## 13.9 衍射光栅及光栅光谱

### 13.9.1 衍射光栅

#### 1. 光栅

大量等宽等间距的平行狭缝（或反射面）构成的光学元件，分为透射光栅、反射光栅两种。

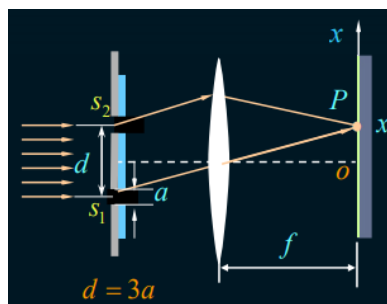
#### 2. 光栅常数 $d$

$$d = a(\text{透光宽度}) + b(\text{不透光宽度})$$

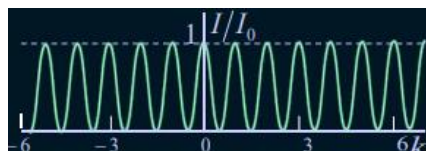
光栅宽度为 $l$ ，每毫米缝数为 $m$ ，则总缝数为 $N = m \times l$

#### 3. 光栅衍射示例

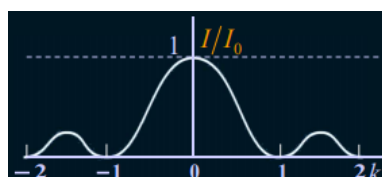
以二缝光栅为例：



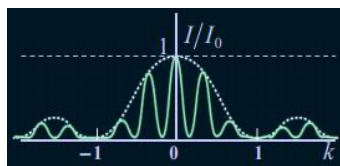
- 只考虑双缝干涉强度分布



- 只考虑单缝衍射强度分布



● 双缝光栅强度分布

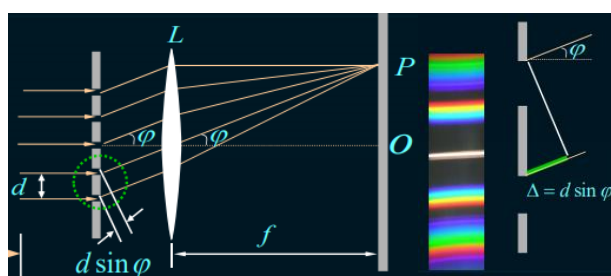


结论：屏上的强度为单缝衍射和缝间干涉的共同结果

## 13.9.2 光栅衍射条纹

### 1. 光栅方程

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

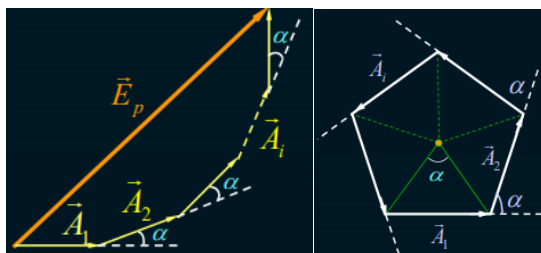


主极大条纹：  $d \sin \varphi = \pm k\lambda, I \propto N^2$

讨论：

- (1)  $\sin \varphi = \pm \frac{k\lambda}{d} = \pm \frac{k\lambda}{a+b}$ ，光栅常数越小，主极大条纹分得越开；
- (2) 使用白光将产生彩色条纹——光栅的分光特性
- (3) 最高级次  $k_{\max} = [\frac{d}{\lambda}]$

### 2. 暗纹



- a) 相邻光矢量的相位差：  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, N\alpha = \pm 2m\pi, m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots$
- b) 暗纹条件：  $Nd \sin \varphi = \pm m\lambda, m \neq kN$ ;
- c) 两个主极大之间有  $N-1$  条暗纹；
- d) 两个主极大之间有  $N-2$  条次极大；

结论：

- (1)  $N$  缝干涉，两主极大间有  $N-1$  个极小，  $N-2$  个次极大；
- (2) 主极大的强度：  $I \propto N^2$ ；
- (3) 随着  $N$  的增大，主极大变得更加尖锐，且主极大间为暗背景。

### 3. 缺级



缺级条件

$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi &= \pm k \lambda \\ a \sin \varphi &= \pm k' \lambda \end{aligned} \right\} k = \pm \frac{k' d}{a}, k' = 1, 2, \dots$$

结论:

- (1) 光栅方程只是主极大明纹的必要条件
- (2) 光栅条纹是多缝干涉和单缝干涉的综合效果
- (3) 光栅条纹随着 $N$ 的增大而变得越来越尖锐明亮 (光栅条纹的特点)

### 13.9.3 光栅衍射的强度分布

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

$$E_p = 2R \sin \frac{N\alpha}{2} \xrightarrow{E_\varphi = 2R \sin \frac{\alpha}{2}} E_\varphi \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$I' = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, I = I' \left( \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

$$\rightarrow I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

讨论:

- (1) 主极大:  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = k\pi \rightarrow d \sin \varphi = k\lambda$
- (2) 暗纹条件:  $\begin{cases} N\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} N d \sin \varphi = 2m\pi \\ \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \neq 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N d \sin \varphi = m\lambda \\ N d \sin \varphi \neq kN\lambda, m \neq kN \end{cases}$
- (3) 缺级:  $\begin{cases} \alpha = 2k\pi \\ \beta = k'\pi \end{cases} \rightarrow \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{d}{a} = \frac{k}{k'}, I = 0$

#### 光栅衍射

(1) 主极大

$$d \sin \varphi = k\lambda$$

(2) 暗纹条件

$$N d \sin \varphi = m\lambda \quad m \neq kN$$

(3) 缺级

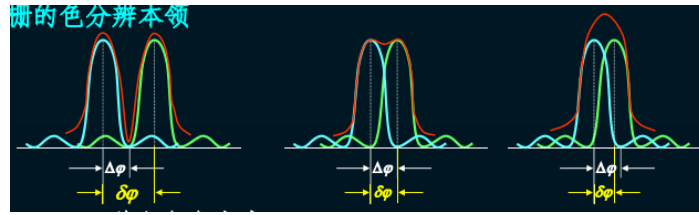
$$k' = \frac{a}{d} k$$

第 $k$ 级主极大角宽度

$$\Delta \varphi_k / 2 = \frac{\varphi_{kN+1} - \varphi_{kN-1}}{2} = \varphi_{kN+1} - \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{kN-1}$$

## 13.9.4 光栅光谱

光栅的色分辨本领



$\Delta\varphi$ ——谱线半角宽度； $\delta\varphi$ ——波长相近的两谱线的角间隔（两主极大角距离）

两波长 $\lambda_1 = \lambda$ 和 $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ 在第 $k$ 级刚好能被光栅分辨：

$$\begin{aligned} d\sin\varphi &= k\lambda \\ \therefore d\cos\varphi_k \cdot d\varphi_k &= k\Delta\lambda \\ \therefore \delta\varphi_k &= \frac{k\Delta\lambda}{d\cos\varphi_k}, \Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_k} \end{aligned}$$

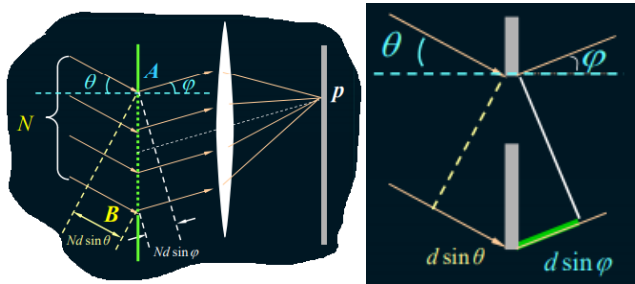
瑞利判据：

$$\delta\varphi_k = \Delta\varphi_k, \frac{k\Delta\lambda}{d\cos\varphi_k} = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_k}$$

光栅的（色）分辨本领 $R$ 定义为： $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

增大主极大级次 $k$ 和总缝数 $N$ ，可以提高光栅的分辨率

## 13.9.5 斜入射的光栅方程

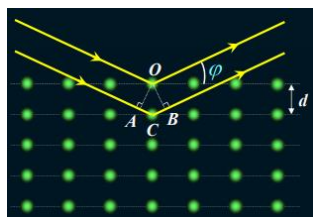


- 主极大条件： $d(\sin\varphi + \sin\theta) = \pm k\lambda, k = 0, 1, 2, \dots$
- 缺级条件： $\begin{cases} a(\sin\varphi + \sin\theta) = \pm k'\lambda \\ d(\sin\varphi + \sin\theta) = \pm k\lambda \end{cases}, k = \pm k' \frac{d}{a}$
- 明纹最大级数 $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ :  $\begin{cases} k_{+max} = [\frac{d}{\lambda}(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta)] \\ k_{-max} = [\frac{d}{\lambda}(-\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta)] \end{cases}$

说明：

- 斜入射级次分布不对称
- 斜入射时可观察到更高级次的光谱，提高分辨率
- 垂直入射和斜入射相比，完整级次数不变
- 垂直入射和斜入射相比，缺级级次相同

## \*13.9.6 X 射线在晶体上的衍射



一束平行相干的 X 射线，以掠射角入射时，相邻两层反射线的光程差为：

$$\overline{AC} + \overline{CB} = 2d \sin \varphi$$

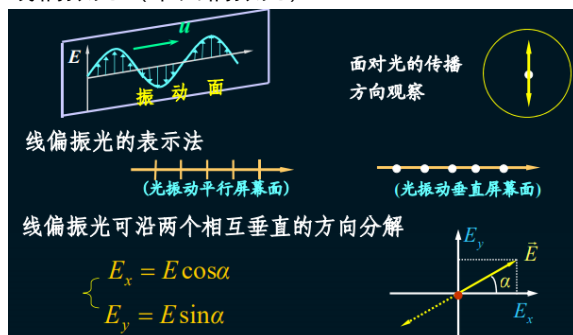
反射线加强条件（布拉格公式）：

$$2d \sin \varphi = k\lambda, k = 1, 2, \dots$$

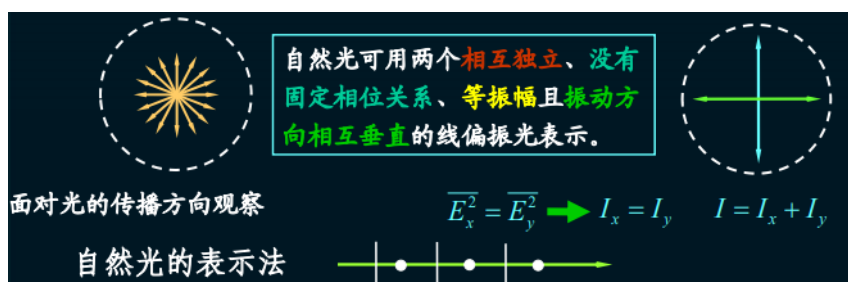
## 13.10 线偏振光与自然光

### 13.10.1 光的偏振态

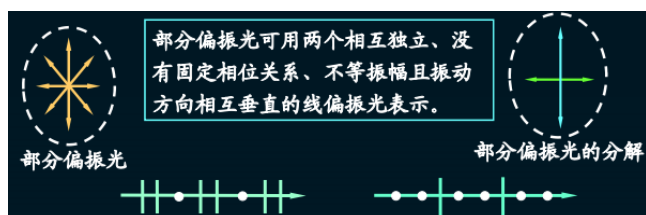
#### 1. 线偏振光（平面偏振光）



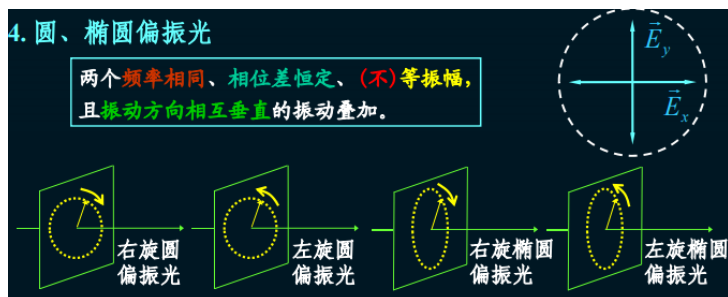
#### 2. 自然光



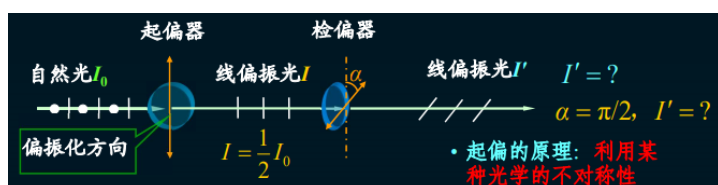
#### 3. 部分偏振光



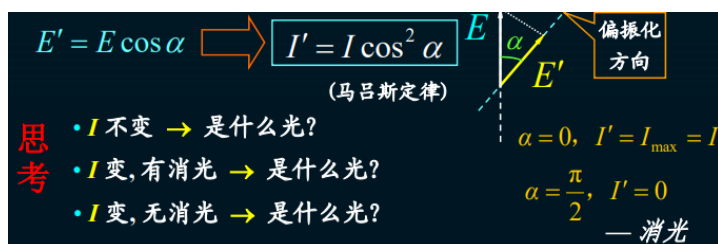
#### 4. 圆、椭圆偏振光



### 13.10.2 起偏和检偏

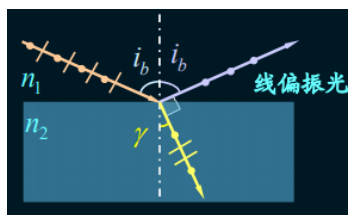


### 13.10.3 马吕斯定律



## 13.11 反射和折射产生的偏振 布儒斯特定律

布儒斯特定律



布儒斯特角 (起偏角):  $i_b$

满足:  $i_b + \gamma = 90^\circ, \tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$

## 13.12 双折射现象

### 13.12.1 双折射现象

#### 1. 双折射

一束光入射到各向异性的介质后出现两束折射光线的现象

#### 2. 寻常光和非寻常光

两折射光线中有一条始终在入射面内，并遵从折射定律，称为寻常光（*o*光）；另一条光一般不遵从折射定律，称为非常光（*e*光）。

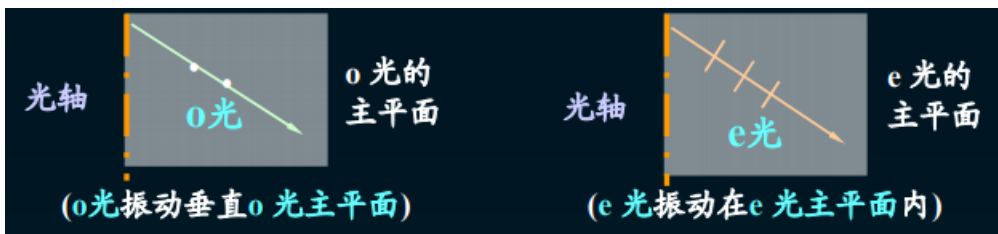
#### 3. 晶体的光轴

当光在晶体内沿某个特殊方向传播时不发生双折射，该方向称为晶体的光轴。凡平行于此方向的直线均为光轴。

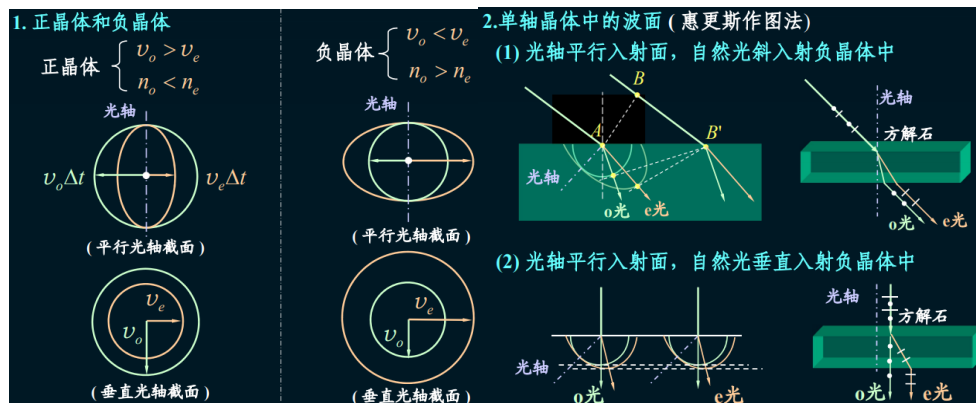
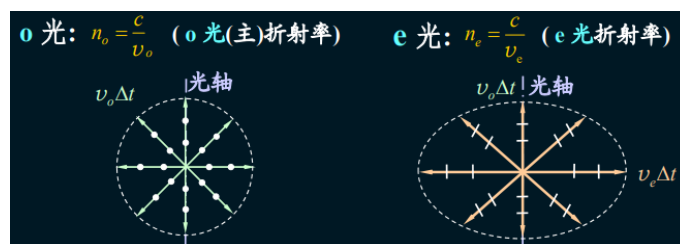
#### 4. 主平面

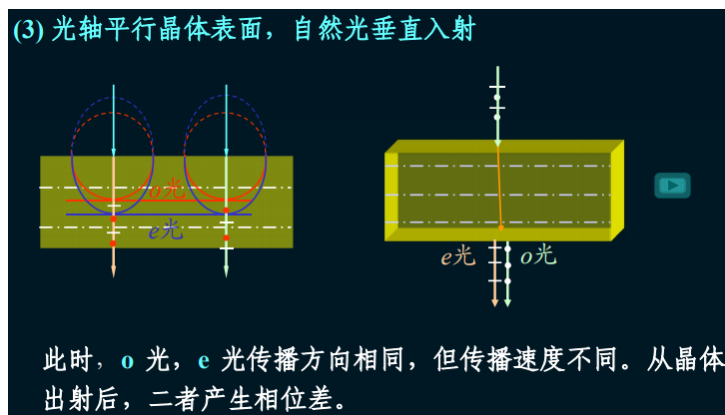
晶体中光的传播方向与晶体光轴构成的平面。

光轴在入射面时，*o*光主平面和*e*光主平面重合，一般情况下，两个主平面的夹角很小，故可认为*o*光和*e*光振动仍然相互垂直。



### 13.12.2 单轴晶体中的波面





## 第十五章——量子物理基础

### 15.1 普朗克量子假设

- 任何物体在任何温度下都在不断地向周围空间发射电磁波，其波谱是连续的，随着温度升高，单位时间内辐射的能量迅速增加，辐射能中短波部分所占比例逐渐增大，物体这种由其温度所决定的电磁辐射称为热辐射
- 物体在辐射电磁波时，也吸收投射到物体表面的电磁波，当辐射和吸收达到平衡时，物体的温度不再变化而处于热平衡状态，这时的热辐射称为平衡热辐射
- 物体的辐射本领越大，其吸收本领也越大，反之亦然
- 为描述物体热辐射能量按波长的分布规律，引入单色辐射出射度（简称单色辐出度），定义为：物体单位表面积在单位时间内发射的、波长在  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$  范围内的辐射能  $dM_\lambda$  与波长间隔  $d\lambda$  的比值，即： $M_\lambda(T) = \frac{dM_\lambda}{d\lambda}$
- 能够全部吸收各种波长的辐射能而完全不发生反射和透射的物体称为绝对黑体，简称黑体。相同温度下，黑体的吸收本领最大，辐射本领也最大；黑体的单色辐出度仅与波长和温度有关，与其材料、表面情况等无关

斯特藩——玻耳兹曼定律

$$M_B(T) = \int_0^\infty M_{B\lambda}(T) d\lambda = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

维恩位移定律（峰值波长与温度成反比）：

$$T\lambda_m = b = 2.90 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \text{K}$$

### 15.2 光电效应&爱因斯坦光子理论

最大初动能与截止电压的关系：

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_a$$

最大初动能与频率的关系：

$$U_a = K(\nu - \nu_0), \nu \geq \nu_0$$

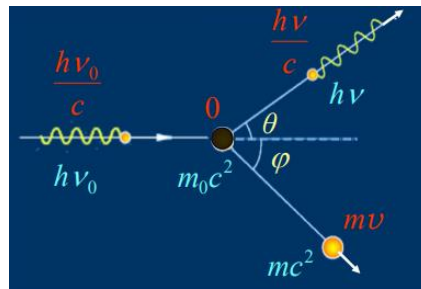
光电效应方程：

$$h\nu = A(\text{逸出功}) + \frac{1}{2}mv_m^2 = A + eU_a$$

光的波粒二象性

- 光子能量：  $E = m_\varphi c^2 = h\nu$
- 光子质量：  $m_\varphi = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$
- 光子动量：  $p = m_\varphi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

## 15.3 康普顿效应及光子理论的解释



$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

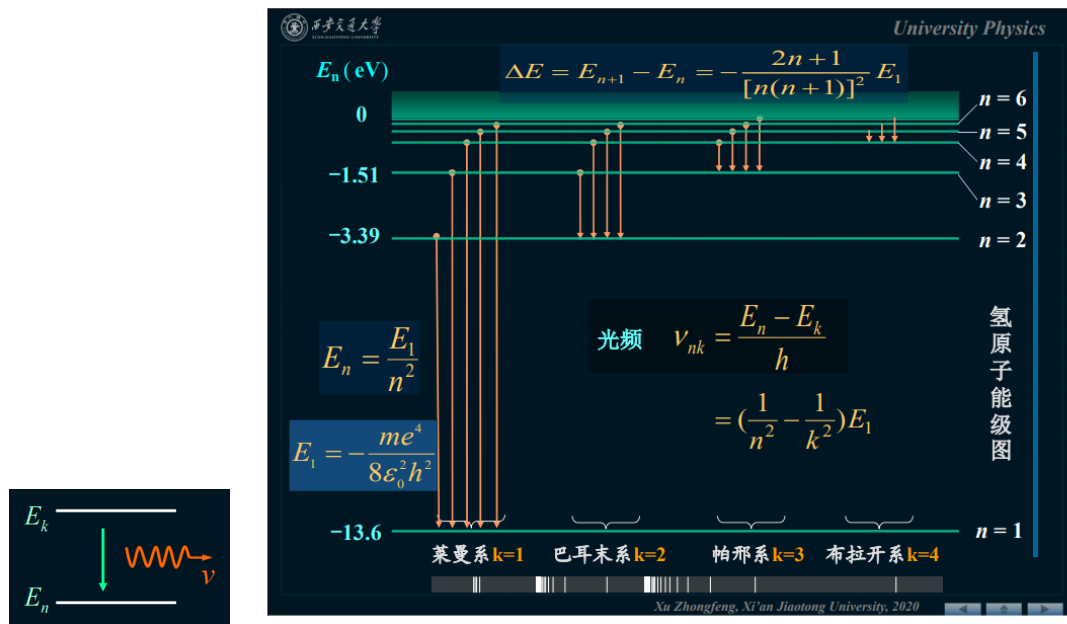
$$\begin{cases} \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos\theta + mv \cos\varphi \\ \frac{h\nu}{c} \sin\theta = mv \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 v^2 c^2 = h^2 (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0 \nu \cos\theta) \\ mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0 c^2 \end{cases}$$

$$\therefore m_0 c^2 (\nu_0 - \nu) = h\nu_0 \nu (1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = c \left( \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} \right) = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{康普顿波长: } \lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0.0024 \text{ nm}$$

## 15.4 氢原子光谱&玻尔氢原子理论



谱线的波数:  $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ ,  $R_H = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $n > k$

- 定态假设
- 跃迁假设:  $\nu = \frac{|E_k - E_n|}{h}$
- 角动量量子化假设:  $L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$

由库仑定律  $m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$ , 得第  $n$  个定态轨道半径是:  $r_n = n^2 \left( \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right) = n^2 r_1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

玻尔半径:  $r_1 = 0.0529 \text{ nm}$

能量量子化:  $E_n = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{E_1}{n^2}$ ,  $E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$

## 15.5 微观粒子的波粒二象性

由  $E = mc^2 = h\nu$ ,  $p = mv = \frac{h}{\lambda}$ ,

实物粒子满足:

- 波长:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$
- 频率:  $\nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} = \frac{m_0 c^2}{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}$
- $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} n$



不确定性关系：

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \text{ (能级宽度与平均寿命)}$$

## 15.6 波函数&一维定态薛定谔方程

波函数

- 描述了任一时刻单个粒子在空间某处体积微元内出现的概率（密度）
- 必须满足归一化条件，即粒子在整个空间出现的概率为 1
- 波函数必须单值、有限、连续，概率密度在任一处都是唯一、有限的
- 单个粒子在哪一处出现是偶然事件；大量粒子的分布具有确定的统计规律

薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \Psi_t$$

定态薛定谔方程：（ $E$ 为粒子能量， $V$ 为描述外力场的势能函数）

$$\Delta \Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi(\vec{r}) = 0$$

一维定态薛定谔方程：

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi(x) = 0$$

一维无限深势阱中的粒子：

$$\text{势能函数: } \begin{cases} V(x) = 0, 0 < x < a \\ V(x) = \infty, x < 0 \text{ or } x > a \end{cases}$$

$$\text{粒子能量: } E_n = \frac{E_1}{n^2}, E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} = -13.6 \text{ eV}$$

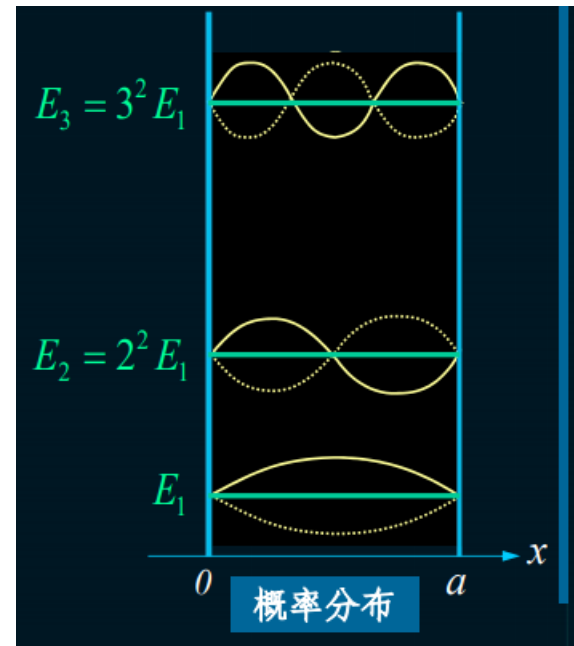
$$\text{解得波函数为: } \Psi_n(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, 0 < x < a, a = \frac{n\lambda_n}{2}$$

$$\text{粒子在 } x \text{ 处单位区间内出现的概率: } P_n(x) = |\Psi_n(x)|^2$$

$$\text{粒子在 } 0 < x < A \text{ 区间出现的概率: } P_n = \int_0^A |\Psi_n(x)|^2 dx$$

隧道效应（势垒贯穿）：

投射系数 $T$ 随势垒宽度 $a$ 、粒子质量 $m$ 和能量差 $U_0 - E$ 变化，随着势垒的加宽、加高投射系数减小。



## 15.7 氢原子的量子力学描述&电子自旋

$$\text{一维谐振子: } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6\text{eV}$$

**主量子数：** $n = 1, 2, 3, \dots$

**轨道角动量：** $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$

**角量子数：** $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$

**角动量在外磁场方向的投影：** $L_z = m_l \hbar$

**磁量子数：** $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

**自旋角动量：** $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$

**自旋量子数：** $s = 1/2$

**自旋角动量在外磁场方向的投影：** $S_z = m_s \hbar$

**自旋磁量子数：** $m_s = \pm 1/2$