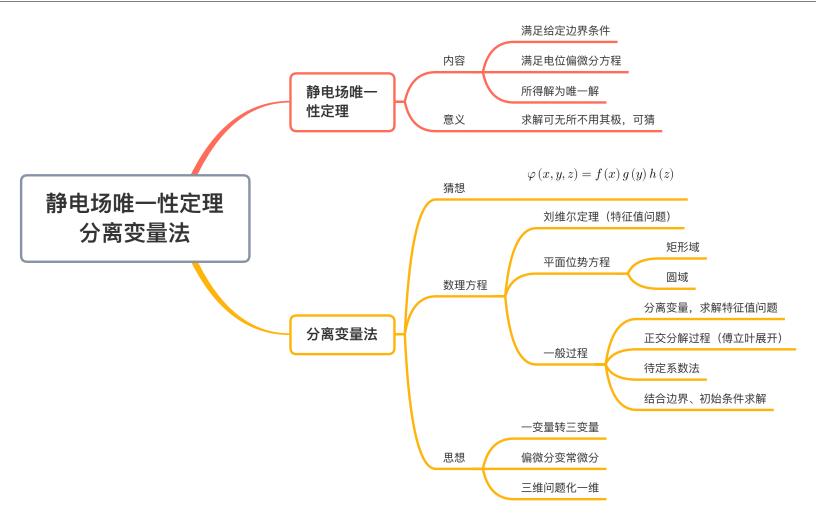
7静电场方程和求解(5)

-静电场的唯一性定理和分离变量法

邹建龙

主要内容

- > 静电场唯一性定理的内容
- ▶ 静电场唯一性定理的意义
- > 分离变量法的思想
- > 拉普拉斯方程求解的分离变量法



静电场唯一性定理的内容

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{-\varepsilon}$$
 泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = 0$$
 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

静电场唯一性定理:

在静电场中,如果一个解满足电位偏微分方程和给定的边界条件,

那么该解是唯一解!

证明过程见教材或其他参考书(数学证明过程极为复杂!)。

静电场唯一性定理的意义

- ➤ 不管白猫黑猫,逮住唯一的老鼠,就是好猫!
- ▶ 静电场的解可以猜!因为只要猜中,就是唯一解!

可提供持續動物的成

接下来将要讲到的两种求解静电场问题的方法

- ▶ 分离变量法靠猜!
- ▶ 镜像法也靠猜!

分离变量法的思想

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$
 猜想: $\varphi = f(x)g(y)h(z)$ $f(x)$ Q 是 x 的函数 $g(y)$ 仅是 y 的函数 $f(z)$ 不是 y 的函数 $g(y)$ 不是 y 的函数

$$g(y)h(z)\frac{\partial^{2}f(x)}{\partial x^{2}} + f(x)h(z)\frac{\partial^{2}g(y)}{\partial y^{2}} + f(x)g(y)\frac{\partial^{2}h(z)}{\partial z^{2}} = 0$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^{2}f(x)}{dx^{2}} = -k_{x}^{2} \qquad \frac{1}{f(x)}\frac{\partial^{2}f(x)}{\partial x^{2}} + \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^{2}g(y)}{\partial y^{2}} + \frac{1}{h(z)}\frac{\partial^{2}h(z)}{\partial z^{2}} = 0$$

$$\frac{1}{g(y)}\frac{d^{2}g(y)}{dy^{2}} = -k_{y}^{2} \qquad \text{Total position } 0$$

 $k_{r}^{2} + k_{v}^{2} + k_{z}^{2} = 0$

③ 三维问题转化为一维问题。

拉普拉斯方程求解的分离变量法

- 分离变量法是求解有解析解电磁场问题的重要方法! 在教材中会多次用到。不过考虑到分离变量法求解过程极为漫长,故此不再展开。有兴趣的同学可以自己查阅,大多数同学在需要用到时直接查结论即可。
- > 详细过程和结论看电磁场教材