МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Інститут **КНІТ**
Кафедра **ПЗ**

ЗВІТ

До лабораторної роботи № 9
На тему: “*Наближення функцій методом найменших квадратів*”
З дисципліни: “Чисельні методи”

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студент групи ПЗ-16
Коваленко Д.М.

Прийняв:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«_____» ________ 2022 р.
$\sum =$ _____................

Львів — 2022

Тема. Наближення функцій методом найменших квадратів.

Мета. Ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

Теоретичні відомості

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблицею своїх значень $y_i = f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$. Потрібно знайти поліном фіксованого m-го степеня ($m = \overline{0, n}$).

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$

для якого похибкою апроксимації є середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{1+n}\sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2}.$$

Оскільки поліном містить невизначені коефіцієнти a_i ($i = \overline{0, m}$), то необхідно їх підібрати таким чином, щоб мінімізувати функцію

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i)^2$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму $\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0$ ($k = \overline{0, m}$) функції від багатьох змінних $\Phi(a_0, a_1, a_2, ..., a_m)$, отримуємо так звану **нормальну систему** методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів a_i ($i = \overline{0, m}$) апроксимаційного полінома

$$\sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k})a_j = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, \qquad k = \overline{0, m}$$

Отримана система - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$.

Лабораторне завдання

Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

x	4.03	4.08	4.16	4.23	4.26	4.33
y	2.8	2.94	3.2	3.38	3.53	3.75

Хід роботи

Нормальна система рівнянь для визначення коефіцієнтів лінійного полінома має такий вигляд:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + (\sum_{i=0}^{n} x_i)a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ (\sum_{i=0}^{n} x_i)a_0 + (\sum_{i=0}^{n} x_i^2)a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

Підставивши значення таблично заданої функції отримаю:

$$\begin{cases} 6a_0 + 25.09a_1 = 19.6y_i \\ 25.09a_0 + 104.98a_1 = 82.16y_ix_i \end{cases}$$

Розв'язавши систему отримаю розв'язки -9.95 та 3.16.
Код програми *(файл lab_91.py):*

```
import numpy as np
from scipy.linalg import solve

def data_to_matrix(path):
    return (
        np.loadtxt(open(path, "rb"), delimiter=",")[0],
        np.loadtxt(open(path, "rb"), delimiter=",")[1],
    )

def normal_system_of_equations(x, y, m):
    return (
        np.array([[sum([x**(i+j) for x in x]) for i in range(m+1)]
   for j in range(m+1)]),
        np.array([sum(map(lambda y,x: y * x**i, y, x)) for i in
   range(m+1)])
    )

def gauss_method(A, n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i != j:
                ratio = A[j][i]/A[i][i]
                for k in range(n + 1):
                    A[j][k] -= ratio * A[i][k]
    return [A[i][n]/A[i][i] for i in range(n)]

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
x, y = data_to_matrix(path)

a, b = normal_system_of_equations(x, y, 1)
print(f"Лінійний: \t {[round(x, 4) for x in solve(a, b)]}")
a, b = normal_system_of_equations(x, y, 2)
print(f"Квадратичний: \t {[round(x, 4) for x in solve(a, b)]}")
a, b = normal_system_of_equations(x, y, 3)
print(f"Кубічний: \t {[round(x, 4) for x in solve(a, b)]}")
```

Файл даних *(data.csv):*

```
4.03, 4.08, 4.16, 4.23, 4.26, 4.33
2.8, 2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75
```

Висновок

На лабораторній роботі я засвоїв практичні навички використання методу найменших квадратів для побудови лінійного, квадратичного і кубічного апроксимаційного полінома для таблично заданої функції

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
Лінійний:        [-9.9538, 3.1615]
Квадратичний:    [11.0148, -6.8864, 1.203]
Кубічний:        [-137.0988, 99.3769, -24.2008, 2.0237]
```

Рис. 1: Робота програми

x	4.03	4.08	4.16	4.23	4.26	4.33
y	2.8	2.94	3.2	3.38	3.53	3.75

та отримав такий результат результат:

Лінійний: $P_1(x) = -9.9538 + 3.1615x$;

Квадратичний: $P_2(x) = 11.0148 - 6.8864x + 1.203x^2$;

Кубічний: $P_3(x) = -137.0988 + 99.3769x - 24.2008x^2 + 2.0237x^3$.

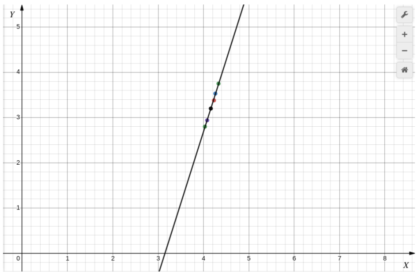

Рис. 2: Лінійний

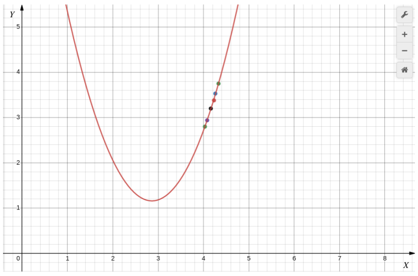

Рис. 3: Квадратичний

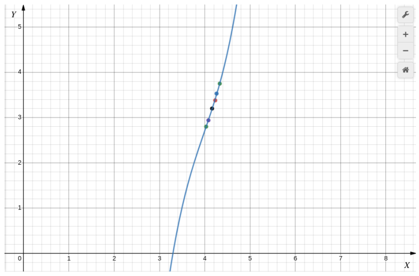

Рис. 4: Кубічний