МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Інститут **КНІТ**
Кафедра **ПЗ**

ЗВІТ

До лабораторної роботи № 6
На тему: “*Розв’язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь*”
З дисципліни: “Чисельні методи”

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студент групи ПЗ-16
Коваленко Д.М.

Прийняв:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«_____» ________ 2022 р.
$\sum =$ _____................

Львів — 2022

Тема. Розв'язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета. Ознайомлення на практиці з методами розв'язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теоретичні відомості

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у якій кількість рівнянь є більшою за кількість невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

де $n > m$. У загальному випадку система рівнянь є несумісною. Якщо із даної системи вибрати m рівнянь та розв'язати їх, то отриманий розв'язок не буде задовольняти всі рівняння системи. Тому поступимо інакше: знайдемо розв'язок системим $x_1, x_2, ..., x_m$ наближено, але щоб він задовольняв усі рівняння системи.

Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

де A – матриця коефіцієнтів системи розмірності n×m, X – матриця-стовпець невідомих розмірності 1×m, B – матриця-стовпець вільних членів системи розмірності 1×m. Матричне рівняння помножимо на транспоновану матрицю A^T до матриці A. У результаті отримаємо матричне рівняння

$$NX = C$$

де N – матриця коефіцієнтів нормальної системи

$$N = A^T A$$

C – стовпець вільних членів

$$C = A^T B$$

Розв'язавши нормальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо її точний розв'язок (якщо використано прямі методи) або наближений розв'язок (якщо використано ітераційні методи). Отриманий розв'язок буде наближеним для початкової системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Лабораторне завдання

Розв'язати перевизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом найменших квадратів. Отриману відповідну нормальну систему розв'язати методом квадратного кореня.

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Хід роботи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 12 \\ 3 & 43 & -12 \\ 12 & 43 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 39 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Код програми *(файл lab_6.py):*

```
from numpy import transpose, linalg, loadtxt

def data_to_matrix(path):
    return (
        loadtxt(open(path, "rb"), delimiter=",", usecols=[0,1,2]),
        loadtxt(open(path, "rb"), delimiter=",", usecols=3),
    )

def square_root_method(A, B):
    """ Метод квадратного кореня """
    print(square_root_method.__doc__)
    L = linalg.cholesky(A)
    L_T = transpose(L)
    Y = linalg.inv(L) @ B
    print(f" L: \n {L} \n Y: \n {Y}")
    X = linalg.inv(L_T) @ Y

print("Відповідь:", [round(x, 4) for x in X])

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
A, B = data_to_matrix(path)

N = transpose(A) @ A
C = transpose(A) @ B

print(f" N: \n {N} \n C: \n {C}")

square_root_method(N, C)
```

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
 N:
 [[  5.   3.  12.]
 [  3.  43. -12.]
 [ 12. -12.  42.]]
 C:
 [10. 39. 11.]
 Метод квадратного кореня
 L:
 [[ 2.23606798  0.          0.        ]
 [ 1.34164079  6.41872261  0.        ]
 [ 5.36656315 -2.99124937  2.06214141]]
 Y:
 [4.47213595 5.14120986 1.15348092]
Відповідь: [0.0205, 1.0616, 0.5594]
```

Рис. 1: Робота програми

```
-1.0, -5.0, 0.0, -6.0,
1.0, -1.0, 2.0, -3.0,
-1.0, 2.0, -5.0, 0.0,
1.0, -2.0, 3.0, 3.0,
1.0, 3.0, 2.0, 4.0,
```

Рис. 2: Файл даних

Висновок

На лабораторній роботі я засвоїв практичні навички використання методу найменших квадратів та методу квадратного кореня та розробив функції для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Наближені розв'язки системи рівнянь: $0.02; 1.06; 0.55$.

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5.28 = -6, \\ 0.06 = -3, \\ -4.89 = 0, \\ -0.45 = 3, \\ 4.3 = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = 0.72 \\ \varepsilon_2 = 3.06 \\ \varepsilon_3 = 4.89 \\ \varepsilon_4 = 3.45 \\ \varepsilon_5 = 0.3 \end{cases}$$