МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Інститут **КНІТ**
Кафедра **ПЗ**

ЗВІТ

До лабораторної роботи № 3
На тему: “*Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера та методом оберненої матриці*”
З дисципліни: “Чисельні методи ПЗ”

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студент групи ПЗ-16
Коваленко Д.М.

Прийняла:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«_____» ________ 2022 р.
$\sum$ = _____...............

Львів — 2022

Тема. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера та методом оберненої матриці.

Мета. Ознайомлення на практиці з методом Крамера та методом оберненої матриці розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теоретичні відомості

Метод оберненої матриці

Цей метод ґрунтується на обчисленні оберненої матриці A^{-1} , яка існує лише при умові, коли визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} необхідно застосувати алгоритм, який складається з таких пунктів:

1. Обчислення визначника $\det A$ матриці A коефіцієнтів системи . Якщо він не дорівнює нулеві, то продовжуємо розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо $\det A = 0$, то матриця A є виродженою і для неї не існує оберненої.
2. Формування матриці $\overline{A}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці A.
3. Транспонування матриці $\overline{A}^T$.
4. Визначення оберненої матриці за формулою $\det A = \frac{\overline{A}}{\det A}$.

Метод Крамера

Для знаходження невідомихх застосовують формули Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, 3...n,$$

де $\det A$ - визначник матриці $\det A_i$ - визначник матриціі A, яку отримують з матриці A шляхом заміни її i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Лабораторне завдання

1. Ознайомитись з теоретичними відомостями.
2. Скласти програму розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці та методом Крамера.

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$$

Хід роботи

Метод оберненої матриці

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2.08 \\ 0.17 \\ 1.28 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{vmatrix} = 0.3654$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0.65 & 0.18 \\ 2.35 & 0.75 \end{vmatrix} = 0.0645$$

$$\overline{A}^T = \begin{pmatrix} 0.0645 & 0.948 & -0.2817 \\ -0.3219 & -0.4821 & 0.3861 \\ 0.908 & 0.0317 & -0.2831 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 0.1765 & 2.5942 & -0.7635 \\ -0.8809 & -1.3193 & 1.0565 \\ 2.4848 & 0.0867 & -0.7747 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.1765 & 2.5942 & -0.7635 \\ -0.8809 & -1.3193 & 1.0565 \\ 2.4848 & 0.0867 & -0.7747 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 & 0.18 \\ 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1786 \\ -0.7041 \\ 4.1915 \end{pmatrix}$$

Код програми *(файл lab_31.py):*

```
import numpy as np

def data_to_matrix(path):
    return (
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=[0,1,2]),
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=3),
    )

def inverse_matrix_method(A, B, n):
    """ Метод оберненої матриці """
    print(inverse_matrix_method.__doc__)
    A_1 = np.array(A) # Обернена матриця коефіцієнтів
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            tmp = np.delete(A, i, 0)
            tmp = np.delete(tmp, j, 1)
            A_1[i][j] = (-1)**((i) + (j)) * np.linalg.det(tmp) / np.
  linalg.det(A)
    A_1 = np.transpose(A_1)
    print(f"Обернена матриця: \n{A_1}")
    X = np.matmul(A_1, B) # Множення оберненої матриці коефіцієнтів на
  матрицю констант
    print("Відповідь: ", [round(x, 4) for x in X])

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
A, B = data_to_matrix(path)
inverse_matrix_method(A, B, np.shape(A)[0])
```

Метод Крамера

$$A = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2.08 \\ 0.17 \\ 1.28 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.08 & 0.71 & 0.63 \\ 0.17 & 0.65 & 0.18 \\ 1.28 & 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0.34 & 2.08 & 0.63 \\ 0.71 & 0.17 & 0.18 \\ 1.17 & 1.28 & 0.75 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.71 & 2.08 \\ 0.71 & 0.65 & 0.17 \\ 1.17 & 2.35 & 1.28 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{vmatrix} = 0.3654$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2.08 & 0.71 & 0.63 \\ 0.17 & 0.65 & 0.18 \\ 1.28 & 2.35 & 0.75 \end{vmatrix} = -0.0652$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -0.1786$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -0.7041$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 4.1915$$

Код програми *(файл lab_32.py):*

```python
import numpy as np

def data_to_matrix(path):
    return (
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=[0,1,2]),
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=3),
    )
def cramer_method(A, B):
    """ Метод Крамера """
    print(cramer_method.__doc__)
    d = np.linalg.det(A) # Детермінант початкової матриці коефіцієнтів
    m1 = np.array([B, A[:,1], A[:,2]])
    m2 = np.array([A[:,0], B, A[:,2]]) # Підстановка константних
    m3 = np.array([A[:,0], A[:,1], B]) # значень в матриці коефіцієнтів
    d1 = np.linalg.det(m1)
    d2 = np.linalg.det(m2) # Детермінант змінених матриць
    d3 = np.linalg.det(m3)
    print(f"d: {d:.{4}f}; d1: {d1:.{4}f}; d2: {d2:.{4}f}; d3: {d3
    :.{4}f}")
    x1 = d1 / d
    x2 = d2 / d # Результат
    x3 = d3 / d
    print("Відповідь: ", [round(x, 4) for x in [x1, x2, x3]])

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
A, B = data_to_matrix(path)
cramer_method(A, B)
```

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
 Метод оберненої матриці
Обернена матриця:
[[ 0.17650874  2.59426798 -0.77089166]
 [-0.88090175 -1.3193002   1.05658952]
 [ 2.4848052   0.08674926 -0.77472285]]
Відповідь:  [-0.1786, -0.7041, 4.1915]
```

(а)

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
 Метод Крамера
d: 0.3654; d1: -0.0653; d2: -0.2573; d3: 1.5317
Відповідь:  [-0.1786, -0.7041, 4.1915]
```

(б)

```
0.34, 0.71, 0.63, 2.08
0.71, 0.65, 0.18, 0.17
1.17, 2.35, 0.75, 1.28
```

(в)

Рис. 1: Метод оберненої матриці (а), метод Крамера (б), файл даних (в)

Висновок

На лабораторній роботі я засвоїв практичні навички використання методу оберненої матриці та методу Крамера та розробив функції для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$$

за допомогою цих методів. Корені системи рівнянь: $-1.1786; -0.7041; 4.1915$.