МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Інститут **КНІТ**
Кафедра **ПЗ**

ЗВІТ

До лабораторної роботи № 7
На тему: "*Чисельні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь*"
З дисципліни: "Чисельні методи"

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студент групи ПЗ-16
Коваленко Д.М.

Прийняв:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«_____» _______ 2022 р.
$\sum$ = _____................

Львів — 2022

Тема. Чисельні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Мета. Ознайомлення на практиці з методом ітерацій та методом Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Метод простих ітерацій

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара чисел (x_*, y_*), яка перетворює систему рівнянь в тотожність.

Припустимо, що (x_0, y_0) - наближений розв'язок системи, яку перетворимо до такого вигляду

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y). \end{cases}$$

де φ_1, φ_2 неперервно-диференційовані функції за змінними x та y.

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n). \end{cases} \qquad n=1,2,3...$$

який породжує числові послідовності $\{x_n\},\{y_n\}$

Якщо ітераційний процес збігається, тобто існують границі

$$x_*=\lim_{n\to\infty} x_n, \qquad y_*=\lim_{n\to\infty} y_n$$

то, систему рівнянь перепишемо у такому вигляді

$$\begin{cases} x_*=\varphi_1(x_*,y_*), \\ y_*=\varphi_2(x_*,y_*). \end{cases}$$

тобто x_*, y_* є розв'язком системи.

Метод Ньютона

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0, \\ f_2(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0. \end{cases}$$

Розкладемо функції f_1 і f_2 в ряд Тейлора, обмежившись лінійними членами розкладу відносно Δ_x, Δ_y

$$\begin{cases} f_1(x_0,y_0)+\frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta_x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta_y=0, \\ f_2(x_0,y_0)+\frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta_x+\frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta_y=0. \end{cases}$$

Запишемо якобіан або визначник матриці Якобі, складеної з частинних похідних функцій f_1 і f_2 в деякій точці

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

а поправких Δ_x і Δ_y визначимо за правилом Крамера із системи.

$$\Delta_x = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} f_1(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ f_2(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & f_1(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Наступне наближення розв'язку системи отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_x, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta_y. \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3...$$

Лабораторне завдання

Розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом ітерацій та методом Ньютона.

$$\begin{cases} sin(x+2) - y = 1.5, \\ x + cos(y-2) = 0.5. \end{cases}$$

Хід роботи

Метод простих ітерацій

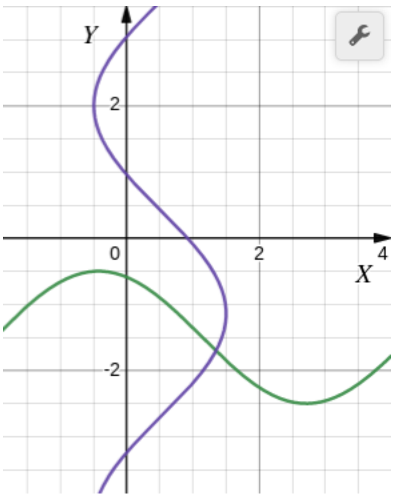

Рис. 1: Графік системи

Корінь рівняння лежить на проміжку $x \in [1, 2]$ та $y \in [-1, -2]$. За початкове наближення виберу $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

Перетворю систему до такого вигляду

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x, y) = sin(x+2) - 1.5, \\ x = \varphi_2(x, y) = 0.5 - cos(y-2). \end{cases}$$

Перевірю збіжність

$$\frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0)}{\partial x} = cos(x+2),$$
$$\frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0)}{\partial y} = sin(y-2).$$

$$|\frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0)}{\partial x}| + |\frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0)}{\partial y}| = 0 + |cos(x+2)| < 1,$$
$$|\frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0)}{\partial x}| + |\frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0)}{\partial y}| = 0 + |sin(y-2)| < 1.$$

Отже, процес збіжний.
Код програми *(файл lab_71.py):*

```
from math import sin, cos

def phi(x, y):
    phi1 = 0.5 - cos(y-2)
    phi2 = sin(x+2) - 1.5
    return (phi1, phi2)

eps = 0.001
i = 0

def iteration_method(x, y):
    """Метод простих ітерацій"""
    (x_new, y_new) = phi(x, y)
    global i
    i += 1
    print(f"i:{i}  X:[{round(x_new, 3)}, {round(y_new, 3)}]")
    if abs(x_new - x) + abs(y_new - y) < eps:
        return
    else:
        return iteration_method(x_new, y_new)

print(iteration_method.__doc__)
iteration_method(1, -1)
```

```
Метод простих ітерацій
i:1  X:[1.49, -1.359]
i:2  X:[1.476, -1.841]
i:3  X:[1.265, -1.829]
i:4  X:[1.273, -1.623]
i:5  X:[1.386, -1.631]
i:6  X:[1.383, -1.742]
i:7  X:[1.325, -1.739]
i:8  X:[1.327, -1.682]
i:9  X:[1.357, -1.684]
i:10  X:[1.356, -1.714]
i:11  X:[1.341, -1.713]
i:12  X:[1.341, -1.698]
i:13  X:[1.349, -1.698]
i:14  X:[1.349, -1.706]
i:15  X:[1.345, -1.706]
i:16  X:[1.345, -1.702]
i:17  X:[1.347, -1.702]
i:18  X:[1.347, -1.704]
i:19  X:[1.346, -1.704]
i:20  X:[1.346, -1.703]
i:21  X:[1.347, -1.703]
```

Рис. 2: Робота програми

Метод Ньютона

Якобіан системи

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -cos(x+2) & 1 \\ -1 & -sin(2-y) \end{vmatrix}$$

Код програми *(файл lab_72.py):*

```python
from numpy import array, linalg
from numpy.linalg import norm, inv as invert
from math import sin, cos

def newton_method(X, f, j, eps):
    """Метод Ньютона"""
    print(newton_method.__doc__)
    for i in range(int(1e6)):
        deltaX = invert(j(X)) @ f(X)
        X -= deltaX
        print(f"i:{i}  X:[{round(X[0], 3)}, {round(X[1], 3)}]")
        if norm(deltaX) < eps:
            break
    return X

def f(args):
```

```
    x, y = args
    return array((1.5 - sin(x+2) + y, 0.5 - cos(y-2) - x))

def j(args):
    x, y = args
    return array((
        (-cos(x+2), 1),
        (-1, -sin(2-y)),
    ))

newton_method([1,-1], f, j, 10e-3)
```

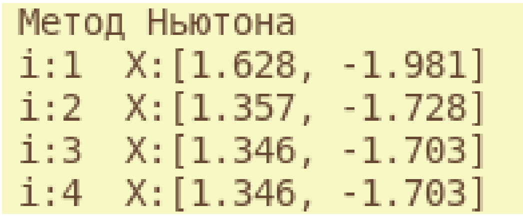

Рис. 3: Робота програми

Висновок

На лабораторній роботі я засвоїв практичні навички використання методу простих ітерацій та методу Ньютона та розробив функції для розв'язку системи нелінійних рівнянь з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Розв'язки системи рівнянь: 1.346; -1.703.

$$\begin{cases} sin(x+2) - y = 1.5, \\ x + cos(y-2) = 0.5. \end{cases}$$