МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Інститут **КНІТ**
Кафедра **ПЗ**

ЗВІТ

До лабораторної роботи № 4
На тему: “*Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса та методом LU-розкладу*”
З дисципліни: “Чисельні методи ПЗ”

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студент групи ПЗ-16
Коваленко Д.М.

Прийняла:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю.

«_____» ________ 2022 р.
$\sum$ = _____...............

Львів — 2022

Тема. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса та методом LU-розкладу.

Мета. Ознайомлення на практиці з методом Гауса та методом LU- розкладу розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теоретичні відомості

Метод Гауса

Суть методу Гауса полягає в тому, що систему лінійних алгебраїчних рівнянь зводять до еквівалентної системи з верхньою (або нижньою) трикутною матрицею. Невідомі знаходять послідовними підстановками, починаючи з останнього рівняння перетвореної системи.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ 0x_1 + 0x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Метод LU-розкладу

Метод LU-розкладу полягає в розкладі матриці A коефіцієнтів системи на добуток двох матриць – нижньої трикутної матриці L, елементи головної діагоналі якої не дорівнюють нулеві та верхньої трикутної U, на головній діагоналі якої містяться одиниці, тобто

$$A = LU,$$

де

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & ... & u_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Увівши допоміжний вектор Y, такий, що $UX = Y$. Тоді матричне рівняння подамо у вигляді $LY = B$.

Отримуємо компоненти вектора Y

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}(b_i - \sum_{m=1}^{i-1} l_{im}y_m), \qquad i = \overline{2, n}$$

Далі послідовно знаходимо компоненти вектора X

$$x_n = y_n \qquad x_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{n} u_{im}x_m, \qquad i < n$$

Лабораторне завдання

1. Ознайомитись з теоретичними відомостями.
2. Скласти програму розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса та методом LU-розкладу.

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$$

Хід роботи

Метод Гауса

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 2.08x_2 + 1.85x_3 = 6.11 \\ \qquad -0.83x_2 - 1.13x_3 = -4.17 \\ \qquad -0.09x_2 - 1.41x_3 = -5.87 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.34x_1 \qquad - 0.33x_3 = -1.47 \\ \qquad -0.83x_2 - 1.13x_3 = -4.17 \\ \qquad\qquad -1.29x_3 = -5.41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.34x_1 \qquad\qquad = -1.47 \\ \qquad -0.83x_2 \qquad = -4.17 \\ \qquad\qquad -1.29x_3 = -5.41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1.17 \\ x_2 = -0.70 \\ x_3 = 4.19 \end{cases}$$

Код програми *(файл lab_41.py):*

```
import numpy as np

def gauss_method(A, n):
    """ Метод Гауса """
    print(gauss_method.__doc__)
    for i in range(n):
        if A[i][i] == 0.0:
            exit("Помилка: елемент головної діагоналі = 0")
        for j in range(n):
            if i != j:
                ratio = A[j][i]/A[i][i]
                for k in range(n + 1):
                    A[j][k] -= ratio * A[i][k]
    print("Відповідь: ",[round(A[i][n]/A[i][i],4) for i in range(n)])

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
A = np.loadtxt(open(path, "rb"), delimiter=",")
gauss_method(A, np.shape(A)[0])
```

Метод LU-розкладу

$$A = LU$$

$$\begin{pmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.34 & 0.71 & 0.63 \\ 0.71 & 0.65 & 0.18 \\ 1.17 & 2.35 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

$$ll_{11} = 0.34$$

$$l_{11}u_{12} = 0.71 \Rightarrow 0.34u_{12} = 0.71 \Rightarrow u_{12} = 2.08$$

$$l_{11}u_{13} = 0.63 \Rightarrow 0.34u_{13} = 0.63 \Rightarrow u_{13} = 1.85$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.34 & 0 & 0 \\ 0.71 & -0.83 & 0 \\ 1.17 & -0.09 & -1.29 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2.08 & 1.85 \\ 0 & 1 & 1.36 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LY = B, \qquad Y = L^{-1}B$$

$$Y = \begin{pmatrix} 6.11 & 5.01 & 4.19 \end{pmatrix}$$

$$UX = Y, \qquad X = U^{-1}Y$$

$$X = \begin{pmatrix} -1.17 & -0.70 & 4.19 \end{pmatrix}$$

Код програми *(файл lab_42.py):*

```
import numpy as np

def data_to_matrix(path):
    return (
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=[0,1,2]),
        np.loadtxt(open(path,"rb"), delimiter=",", usecols=3),
    )

def invert_matrix(A, n):
    A_1 = np.array(A)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            tmp = np.delete(A, i, 0)
            tmp = np.delete(tmp, j, 1)
            A_1[i][j] = (-1)**((i) + (j)) * np.linalg.det(tmp) / np.
  linalg.det(A)
    return np.transpose(A_1)

def lu_decomposition_method(A, B, n):
    """ Метод LUрозкладу- """
    print(lu_decomposition_method.__doc__)
    L = [[0] * n for i in range(n)]
    U = [[0] * n for i in range(n)]
    for j in range(n):
```

```
        U[j][j] = 1
        for i in range(j, n):
            alpha = A[i][j]
            for k in range(j):
                alpha -= L[i][k]*U[k][j]
            L[i][j] = alpha
        for i in range(j+1, n):
            tempU = A[j][i]
            for k in range(j):
                tempU -= L[j][k]*U[k][i]
            U[j][i] = tempU/L[j][j]
    Y = np.matmul(invert_matrix(L, n), B) # Обчислюємо Y
    X = np.matmul(invert_matrix(U, n), Y) # Обчислюємо X
    print("Відповідь:", [round(x, 4) for x in X])

path = input("Введіть шлях до файлу з даними: ") or "data.csv"
A, B = data_to_matrix(path)
lu_decomposition_method(A, B, np.shape(A)[0])
```

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
 Метод Гауса
[[0.34 0.71 0.63 2.08]
 [0.71 0.65 0.18 0.17]
 [1.17 2.35 0.75 1.28]]
[[ 0.34        0.71        0.63        2.08      ]
 [ 0.         -0.83264706 -1.13558824 -4.17352941]
 [ 0.         -0.09323529 -1.41794118 -5.87764706]]
[[ 0.34        0.         -0.33831862 -1.47877782]
 [ 0.         -0.83264706 -1.13558824 -4.17352941]
 [ 0.          0.         -1.29078418 -5.41031791]]
[[ 0.34        0.          0.         -0.06071638]
 [ 0.         -0.83264706  0.          0.58628519]
 [ 0.          0.         -1.29078418 -5.41031791]]
Відповідь:  [-0.1786, -0.7041, 4.1915]
```

(а)

```
Введіть шлях до файлу з даними: data.csv
 Метод LU-розкладу
L:
[[ 0.34        0.          0.        ]
 [ 0.71       -0.83264706  0.        ]
 [ 1.17       -0.09323529 -1.29078418]]
U:
[[1.         2.08823529 1.85294118]
 [0.         1.         1.36382904]
 [0.         0.         1.        ]]
Y:
[6.11764706 5.01236312 4.19149693]
Відповідь: [-0.1786, -0.7041, 4.1915]
```

(б)

```
0.34, 0.71, 0.63, 2.08
0.71, 0.65, 0.18, 0.17
1.17, 2.35, 0.75, 1.28
```

(в)

Рис. 1: Метод Гауса (а), метод LU-розкладу (б), файл даних (в)

Висновок

На лабораторній роботі я засвоїв практичні навички використання методу Гауса та методу LU-розкладу та розробив функції для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08 \\ 0.71x_1 - 0.65x_2 - 0.18x_3 = 0.17 \\ 1.17x_1 - 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28 \end{cases}$$

за допомогою цих методів. Корені системи рівнянь: $-1.1786; -0.7041; 4.1915$.