

Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung

Von L. SCHILLER und A. NAUMANN, Leipzig

Aus der Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik
am Physikalischen Institut der Universität Leipzig

Für die Berechnungen der Schwerkraftaufbereitung, also z. B. für die Windsichtung, für Trocken- und Schwimmaufbereitung, für Setzmaschinen u. a., benutzte man bisher für kleine Korngrößen und kleine Geschwindigkeiten (kleine Reynoldssche Zahlen) meist die Stokessche Formel (neuerdings auch die Oseensche Formel vorgeschlagen) und für größere Korngrößen und Geschwindigkeiten verschiedene andere empirische Gesetze (meist quadratischen Charakters). Da die praktischen Fälle häufig im Übergangsgebiet zwischen den genannten Gesetzen liegen, können bei Anwendung des einen oder anderen beträchtliche Fehler entstehen. Wir sind aber auf Grund neuerer systematischer Versuche von den kleinsten bis zu den größten Reynoldsschen Zahlen in der Lage, für kugelförmige Körper in allen Fällen genau richtige Werte anzugeben.

Die Verfasser bringen im nachstehenden Schaubilder und eine Zahlentafel für die graphische oder rechnerische Bestimmung der Größe oder der Endgeschwindigkeit der Teilchen und zeigen die Größe der Abweichungen der Formeln vom Versuch und untereinander. Auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze lassen sich die Ergebnisse leicht auf beliebige feste Stoffe und beliebige Flüssigkeiten oder Gase übertragen.

Das physikalische Gesetz, das bei allen Fragen der Schwerkraftaufbereitung, wie z. B. Windsichtung, Trocken- und Schwimmaufbereitung, die wesentlichste Rolle spielt, ist das Widerstandsgesetz für kugelförmige Körper, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem reibenden Mittel bewegen¹⁾. Nach den Lehren der Ähnlichkeitsmechanik²⁾ faßt man dieses Gesetz für den Widerstand W zweckmäßig, wie folgt:

$$W = \psi \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{\rho}{2} u^2.$$

Darin bedeutet d den Durchmesser der Kugel, u ihre Fallgeschwindigkeit, ρ die Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases. Mißt man alle diese Größen in einem einheitlichen Maßsystem, so wird der Widerstandsbeiwert ψ eine dimensionslose Zahl, deren Betrag unabhängig vom Maßsystem ist. Dieser dimensionslose Widerstandsbeiwert ψ ergibt sich als eine Funktion einer zweiten, ebenfalls dimensionslosen Größe, der Reynoldsschen Zahl $Re = \frac{u d}{\nu}$, worin ν die kinematische Zähigkeit des Mediums = absolute Zähigkeit μ bedeutet. Hiernach kann man das Widerstandsgesetz kurz schreiben: $\psi = f(Re)$.

Ein Grenzgesetz für sehr kleine Abmessungen und Geschwindigkeiten ist das Stokessche Gesetz³⁾:

$$W = 3 \pi \mu d u,$$

oder dimensionslos

$$\psi = 24/Re.$$

Eine neuere verfeinerte Theorie von Oseen⁴⁾ lieferte aus einer Näherungsrechnung eine Erweiterung des Stokes'schen Gesetzes in der Form:

$$\psi = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right).$$

Schließlich hat in neuerer Zeit Goldstein⁵⁾ als exakte Lösung folgendes Gesetz angegeben:

$$\psi = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} (Re)^2 + \frac{71}{20480} (Re)^3 - \dots\right).$$

In Abb. 1 sind die drei Gesetze von Stokes, Oseen und Goldstein in logarithmischer Darstellung eingetragen; sie läßt erkennen, daß für sehr kleine Reynoldssche Zahlen die drei Gesetze ineinander übergehen.

Für die Fragen der Windsichtung hat Gonell kürzlich an dieser Stelle⁶⁾ gewisse Bereiche (nach Korngröße und spezifischem Gewicht) angegeben, denen er das Stokessche bzw. Oseensche Gesetz zuweist. Für den vor-

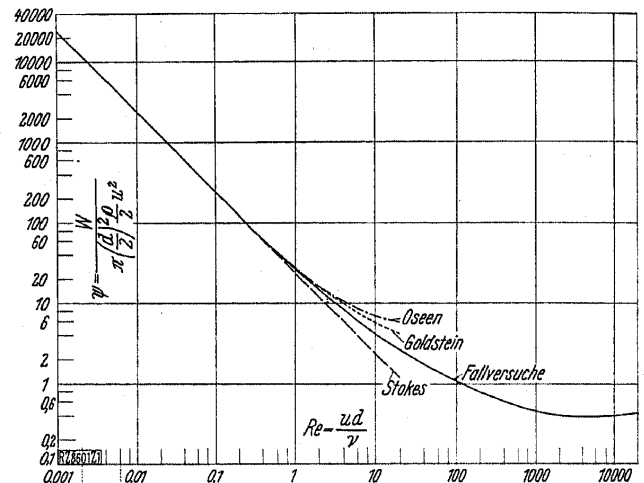


Abb. 1. Widerstandsgesetz für Kugeln in dimensionslosen Koordinaten.

Für die Kurve der Fallversuche vergl. Fußanm. 7).

liegenden Zweck scheint es wichtig, den theoretischen Kurven die heute sehr sicher begründeten Versuchsergebnisse gegenüberzustellen. In Abb. 1 sind diese (durchweg aus Fallversuchen abgeleitet) in einer vierten Kurve zusammengestellt⁷⁾. Man erkennt, daß bis $Re = 0,1$ die Versuche praktisch mit dem Stokesschen Gesetz übereinstimmen. Von hier ab spalten sich die vier Kurven allmählich auf, derart daß sich die Fallversuchskurve zwischen der von Stokes und von Goldstein hält, während die Oseensche am höchsten verläuft; ψ weicht vom Versuchsergebnis ab

für $Re = 1$ nach Stokes etwa um -13% , nach Oseen um $+3\%$,

für $Re = 10$ bereits um -44% und $+64\%$.

Die Abweichungen sind also beträchtlich, und es scheint geboten, sich für Reynoldssche Zahlen größer als $0,1$ an die Fallversuchskurve zu halten.

Im folgenden soll für die zwei hauptsächlichen Fragestellungen der Schwerkraftaufbereitung je ein Weg zur Lösung angegeben werden, der an Hand von je einer Kurve oder einer Zahlentafel für jeden beliebigen festen Stoff in jeder beliebigen Flüssigkeit (oder Gas) in einfacher Weise das gesuchte Ergebnis in völliger Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert.

¹⁾ Vergl. L. Schiller, Fallversuche mit Kugeln und Scheiben, Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4, 2. Teil, Leipzig 1932, S. 337.

²⁾ Vergl. W. Herrmann, Z. Bd. 75 (1931) S. 611.

³⁾ G. Stokes, Cambr. Trans. Bd. 9 (1851) S. 8.

⁴⁾ C. W. Oseen, Arch. f. mat., astr. o. fys. Bd. 6 (1910) S. 75, Bd. 9 (1913) S. 1.

⁵⁾ S. Goldstein, Proc. Roy. Soc. London (A) Bd. 123 (1929) S. 225.

⁶⁾ H. W. Gonell, Z. Bd. 76 (1932) S. 664.

⁷⁾ Die Kurve ist aufgebaut aus den Versuchsergebnissen von H. D. Arnold (Philos. Mag. (6) Bd. 22 (1911) S. 755); H. Liebster [Ann. Physik (4) Bd. 82 (1927) S. 541]; J. Schmiedel [Physik. Z. Bd. 29 (1928) S. 598]. Da alle diese Versuche in Trögen von endlichem Durchmesser ausgeführt worden sind, wobei ein Wandeneinfluß auftritt, mußten sie erst auf unendliches Medium umgerechnet werden. Übereinstimmende Ergebnisse erhält man, wenn man hierzu eine von H. Faxén [Dissertation Uppsala 1921] angegebene Gleichung benutzt.

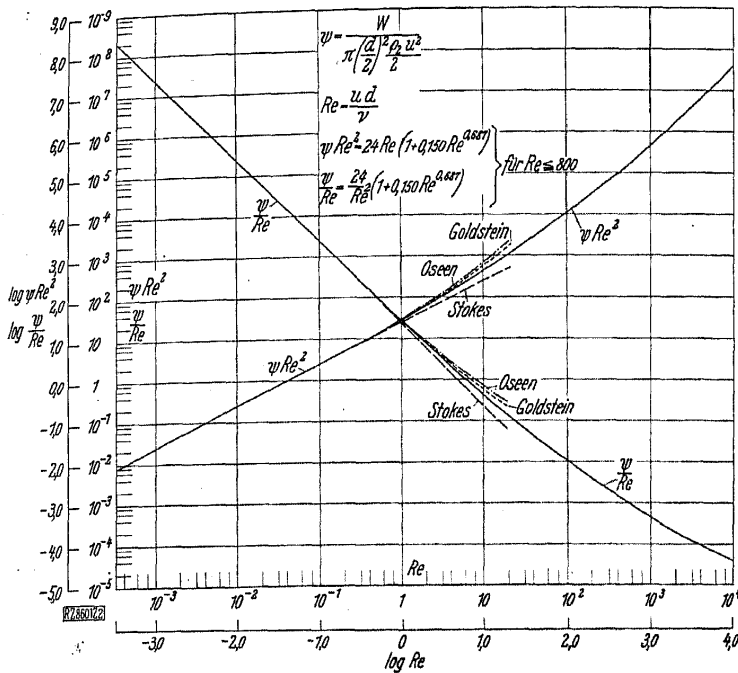


Abb. 2. ψ/Re und ψRe^2 in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zur Ermittlung der Korngröße oder der Endgeschwindigkeit.

Ermittlung der Korngröße

Gegeben sei ein in einer Flüssigkeit oder in einem Gas (Dichte ρ_2) mit konstanter Geschwindigkeit (Endfallgeschwindigkeit) u fallendes Kugelchen der Dichte ρ_1 . Gesucht ist die Korngröße oder der Durchmesser d der Kugel.

Zur Beantwortung dient die Kurve ψ/Re in Abb. 2. Sie kann bis zu beliebigen Reynoldsschen Zahlen aus Abb. 1 oder bis zu $Re = 800$ aus der folgenden Gleichung gewonnen werden, die als eine ausreichende Näherung für den experimentellen Verlauf gelten darf:

$$\psi = \frac{24}{Re} (1 + 0,150 Re^{0,687}) \quad \left. \begin{array}{l} \psi \\ Re \end{array} \right\} \text{gültig für } Re \leq 800.$$

Die Bedeutung der Darstellung von ψ/Re abhängig von Re nach Abb. 2 ergibt sich aus folgendem: Für den Fall gleichförmiger Endgeschwindigkeit gilt:

Gewicht — Auftrieb = Widerstand,

$$\text{also } \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 (\rho_1 - \rho_2) g = \psi \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 u^2 \dots (1).$$

Durch Multiplikation mit u/ν ergibt sich

$$\frac{4}{3} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{\nu}{u^3} = \frac{\psi}{Re} \dots (2).$$

Gl. (2) gestattet, da alle Größen der linken Seite bekannt sind, den zugehörigen Wert von ψ/Re zu ermitteln, von dem aus man mit Hilfe von Kurve ψ/Re in Abb. 2 zu der Reynoldsschen Zahl Re gelangt. Hieraus ergibt sich schließlich der gesuchte Wert der Korngröße oder des Kugeldurchmessers nach der Formel $d = Re \nu / u$.

Ermittlung der Endgeschwindigkeit

Gegeben sei ein in einer Flüssigkeit oder in einem Gas (Dichte ρ_2) fallendes Kugelchen der Dichte ρ_1 vom Durchmesser d . Gesucht ist die Endgeschwindigkeit u .

Hierfür dient die Kurve für ψRe^2 in Abb. 2, die entsprechend Kurve ψ/Re ermittelt ist. Durch Multiplikation von Gl. (1) mit d^2/ν^2 erhält man die Gleichung

$$\frac{4}{3} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{d^3}{\nu^2} = \psi Re^2 \dots (3),$$

deren linke Seite lauter bekannte Größen enthält, und die somit ψRe^2 zu berechnen gestattet. Mittels der Kurve ψRe^2 in Abb. 2 erhält man Re und daraus die gesuchte Endgeschwindigkeit aus $u = Re \nu / d$.

Zahlentafel 1. Werte für Re und $\log Re$ zur Ermittlung der Durchmesser und Endgeschwindigkeiten von Kugeln.

ψ/Re	ψRe^2	Re	$\log(\psi/Re)$	$\log(\psi Re^2)$	$\log Re$
2410	2,410	0,1	3,383	0,383	0,000—1
630	5,038	0,2	2,799	0,702	0,301—1
162	10,37	0,4	2,209	1,016	0,602—1
73,7	15,92	0,6	1,867	1,202	0,778—1
42,3	21,67	0,8	1,626	1,336	0,903—1
27,6	27,6	1,0	1,441	1,441	0,000
7,45	59,6	2,0	0,872	1,775	0,301
2,08	133,3	4,0	0,319	2,125	0,602
1,009	218	6,0	0,004	2,338	0,778
0,611	313	8,0	0,786—1	2,495	0,903
0,415	415	10,0	0,618—1	2,618	1,000
0,131	1 044	20,0	0,116—1	3,019	1,301
0,0681	1 840	30,0	0,833—2	3,264	1,477
0 0434	2 776	40,0	0,637—2	3,443	1,602
0,0308	3 840	50,0	0,488—2	3,585	1,699
0,0233	5 040	60,0	0,368—2	3,702	1,778
0,0185	6 345	70,0	0,267—2	3,803	1,845
0,015 17	7 765	80,0	0,181—2	3,890	1,903
0,012 74	9 290	90,0	0,105—2	3,968	1,954
0,010 92	10 920	100	0,038—2	4,038	2,000
0,004 03	32 200	200	0,605—3	4,508	2,301
0,002 28	61 550	300	0,358—3	4,789	2,477
0,001 53	97 900	400	0,185—3	4,991	2,602
0,001 125	140 700	500	0,051—3	5,148	2,699
0,000 877	189 400	600	0,943—4	5,277	2,778
0,000 711	243 800	700	0,852—4	5,387	2,845
0,000 610	310 000	800	0,783—4	5,494	2,903
0,000 462	462 000	1000	0,665—4	5,665	3,000
0,000 205	1 644 000	2000	0,312—4	6,216	3,301

Zahlentafel für genauere Berechnungen

Höhere Ansprüche an Genauigkeit erfordern eine Darstellung der Kurven von Abb. 2 in größerem Maßstab als es hier möglich ist. Man erhält jedoch für die Praxis ausreichende Genauigkeit auch aus Zahlentafel 1, die gestattet, aus den gegebenen Werten von ψ/Re und ψRe^2 die Reynoldsschen Zahlen und damit die Korngrößen oder Endgeschwindigkeiten zu ermitteln. Da die Krümmung der logarithmischen Kurven verhältnismäßig gering ist, empfiehlt sich, zur linearen Interpolation die ebenfalls in Zahlentafel 1 angeführten logarithmischen Werte zu benutzen. Noch besser wird man nach Zahlentafel 1 eine Kurve in vergrößertem Maßstab zeichnen.

Beispiel: Gegeben seien Quarkkörner [$\rho_1 = 2,6$], die in Wasser von 20°C [$\rho_2 = 1$] sinken. Gefragt werde nach der Korngröße d für die Endfallgeschwindigkeit $u = 20 \text{ cm/s}$. Mit $\rho_1 - \rho_2 = 1,6$; $\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$; $g = 981 \text{ cm/s}^2$; $u^3 = 8000 \text{ (cm/s)}^3$ ergibt sich nach Gl. (2)

$$\log \frac{\psi}{Re} = \log \left(\frac{4}{3} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{\nu}{u^3} \right) = 0,4176 - 3 \text{ und}$$

aus Zahlentafel 1 mittels linearer Interpolation $\log Re = 2,436$ sowie $Re = 273$. Hieraus erhält man schließlich mit den gegebenen Werten $u = 20 \text{ cm/s}$ und $\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$,

$$d = \frac{273 \cdot 0,01}{20} = 0,136 \text{ cm}.$$

Abweichungen der bisherigen Formeln

von den neueren Versuchsergebnissen

Zur Veranschaulichung der Abweichungen, die zwischen den Gleichungen von Stokes, Oseen und Goldstein und dem tatsächlichen Verhalten bestehen, ist in Abb. 3 in vergrößertem Maßstab ψRe^2 abhängig von Re für $Re \leq 20$ aufgetragen. Da man nach Gl. (3) von den gegebenen Werten zunächst zu ψRe^2 kommt, so ergibt sich der Fehler, den man bei Verwendung der einen oder anderen der theoretischen Gleichungen macht, durch die horizontale Abweichung zwischen den Re -Werten für den gegebenen Wert von ψRe^2 . Z. B. macht man bei Verwendung der Oseenschen Gleichung für $\psi Re^2 = 800$ bei $Re = 16$ einen Fehler von rd. 30 %.

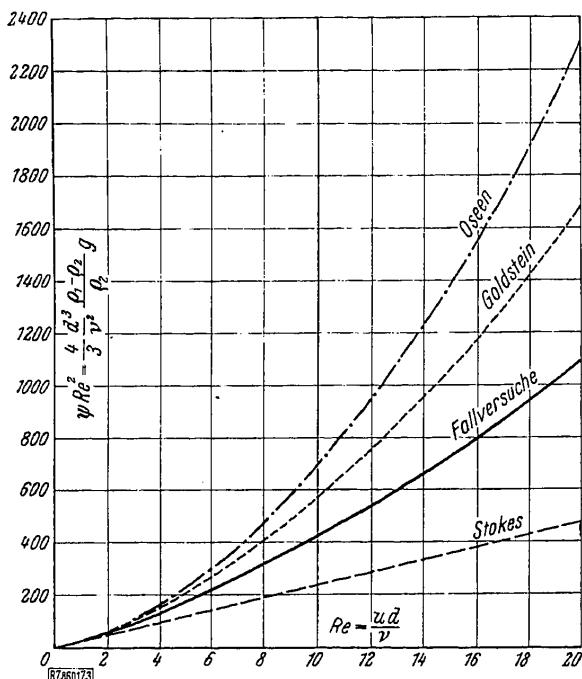
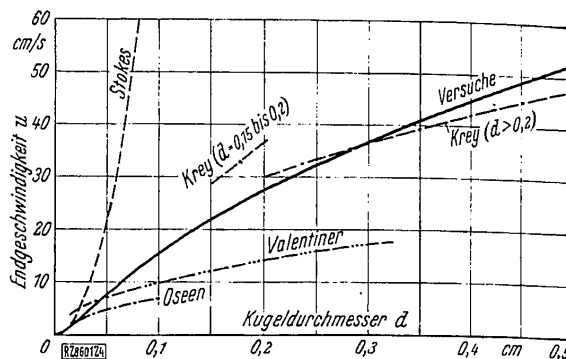


Abb. 3 (links)
 ψRe^2 für Reynolds-
sche Zahlen bis zu 20.

Abb. 4 (rechts)
Endgeschwindigkeit
fallender Quarzkugeln
in Wasser von 20 °C
nach verschiedenen
theoretischen Formeln
und nach den neueren
Versuchen.



Für die beiden wichtigsten Flüssigkeiten, Wasser und Luft, sind in den Abb. 5 und 6 die Werte für die Dichte ρ_2 und die kinematische Zähigkeit ν zusammengestellt. Abb. 5 zeigt die kinematische Zähigkeit für Wasser im Bereich von 0 ° bis 30 °C, Abb. 6 die Werte für Luft¹⁰⁾ von 0 ° bis 1000 °C bei 760 mm QS. Für andere Drücke können bei Luft die Dichten verhältnismäßig dem Druck, die Zähigkeit bis 10 at unabhängig vom Druck und die von uns allein benutzte kinematische Zähigkeit umgekehrt verhältnismäßig dem Druck gesetzt werden.

B 8601

¹⁰⁾ Die ν -Werte für Luft hat Hr. Dr. R. Hermann nach den neuesten Messungen zusammengestellt und uns freundlicherweise überlassen.

Schaubild für bestimmte Stoffe

In der Praxis wird es häufig vorkommen, daß durchweg nur mit einem bestimmten festen Stoff und einer bestimmten Flüssigkeit gearbeitet wird. In diesem Fall ist es nicht nötig, mit den doch etwas verwickelten dimensionslosen Koordinaten zu arbeiten, sondern man arbeitet bequemer nach einem u - d -Schaubild, das man auf folgende Weise erhält: Für zwei gegebene Stoffe, z. B. Quarz in Wasser ($\rho_1/\rho_2 = 2,6$) ist auf der linken Seite von Gl. (2) der Ausdruck $\frac{4}{3} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \nu$ konstant. Zu beliebigen Werten von u erhält man nach Gl. (2) zunächst zugehörige Werte von ψ/Re und damit aus Abb. 2 die zugehörigen Werte $Re = \frac{u d}{\nu}$, die, da hierin alles außer d bekannt ist, schließlich die gesuchten Durchmesser $d = \frac{Re \nu}{u}$ liefern. Eben dieses Beispiel von Quarz in Wasser ist in Abb. 4 für eine Wassertemperatur von 20 °C ($\nu = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$) aufgetragen. Außer den Kurven nach den Versuchen, nach Stokes und Oseen enthält Abb. 4 noch drei weitere Kurven nach empirischen Formeln, und zwar eine bei Valentiner⁸⁾ angegebene:

$$u = 24,4 \sqrt{d \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)},$$

und zwei von Krey⁹⁾:

$$d \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) = 0,0043 u^{1,2} \quad \text{für } 0,15 < d < 0,2 \text{ cm}$$

und

$$d \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) = 0,00036 u^2 \quad \text{für } d > 0,2 \text{ cm}.$$

Auch Abb. 4 läßt wieder die Bedeutung des von uns empfohlenen Zurückgehens auf die Versuchskurve deutlich erkennen.

⁸⁾ S. Valentiner, Physikalische Probleme im Aufbereitungswesen des Bergbaus, Braunschweig 1929.

⁹⁾ H. Krey, Mitt. Vers.-A. Wasserbau und Schiffbau, Berlin 1921, Heft 1

Abb. 6. Dichte in g/cm^3
und kinematische Zähigkeit der Luft
in cm^2/s für 0° bis 1000 °C
bei 760 mm QS.

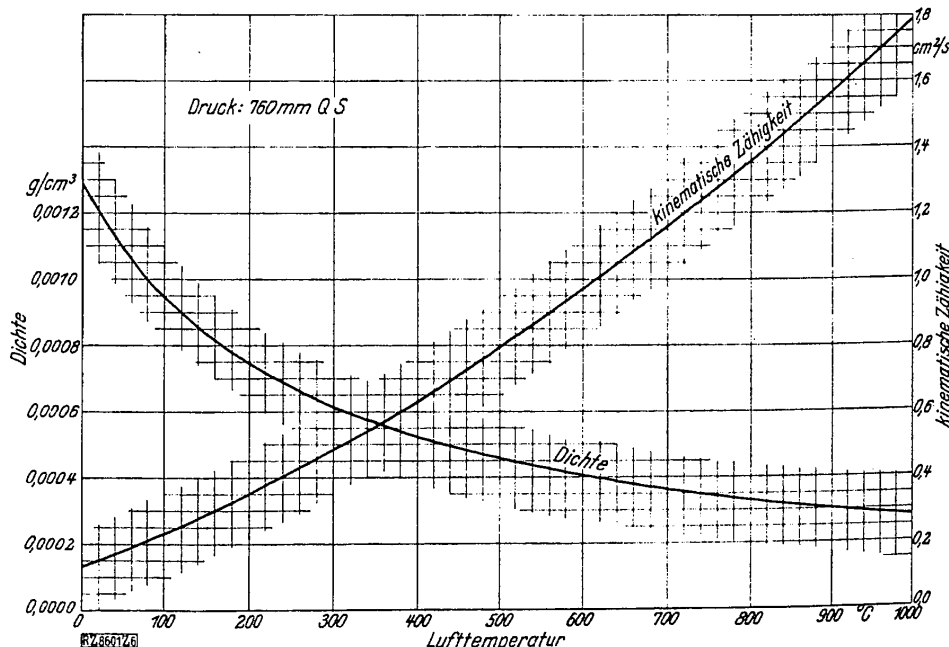


Abb. 5. Kinematische Zähigkeit $\nu = \mu/\rho$ des Wassers
von 0 ° bis 30 °C.