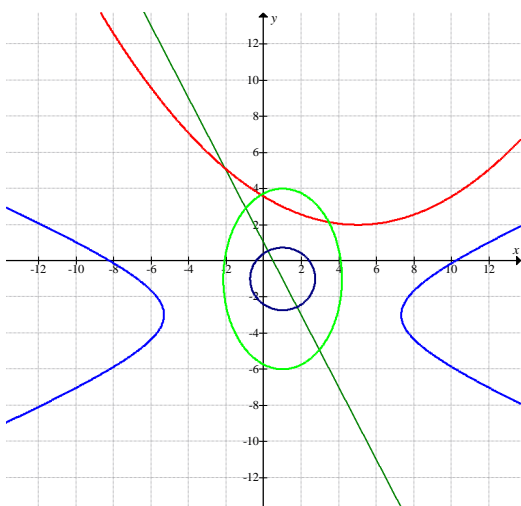


Introducción a la Matemática Universitaria

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}, \quad 3x^2 - 1 \geq 0$$



Desigualdades e Inecuaciones

Funciones

Plano Cartesiano y rectas

Circunferencia

Elipse

Hipérbola

Nora Scoppetta
Profesor Asociado

José Sarabía
Profesor Titular

UNEXPO



En honor a la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre"
en su quincuagésimo aniversario

2012

INDICE GENERAL

CAPÍTULO I

Desigualdades e Inecuaciones

1.	Propiedades de orden en \mathbb{R}	1
2.	Inecuaciones de grado uno	2
3.	Inecuaciones Algebraicas	8
	Ejercicios propuestos	14
4.	Valor absoluto	15
	Ejercicios propuestos	22

CAPÍTULO II

FUNCIONES

1.	Introducción y definición de función.....	25
	Ejercicios propuestos	29
2.	Funciones definidas seccionalmente	30
3.	Funciones pares e impares.....	31
	Ejercicios propuestos.....	32
4.	Funciones monótonas (crecientes y decrecientes).....	33
5.	Tipos de funciones	34
	Ejercicios propuestos	38
6.	Transformación de funciones	40
7.	Combinación de funciones	43
	Ejercicios propuestos	46
8.	Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva	48
9.	Funciones trigonométricas inversas	52
	Ejercicios propuestos	57

CAPÍTULO III

1.	Plano Cartesiano. Distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^2 . Fórmula de punto medio.....	60
	Ejercicios propuestos.....	64
2.	Recta.....	66
	Ejercicios propuestos.....	79
3.	Circunferencia.....	80
	Ejercicios propuestos.....	86

4.	Elipse.....	91
	Ejercicios propuestos.....	111
5.	Hipérbola.....	117
	Ejercicios propuestos.....	136
6.	Parábola.....	140
	Ejercicios propuestos.....	158
	Bibliografía.....	161

INTRODUCCIÓN

El presente texto de **Introducción a la Matemática Universitaria**, tiene dos objetivos fundamentales: uno, el de reforzar algunos contenidos de Educación Secundaria, y el otro, el de introducir algunos conceptos manejados como cosa conocida, en los cursos de Cálculo I. Es bien conocido entre los profesores y alumnos de las Universidades del país, que un alto porcentaje de las causas del fracaso de un buen número de estudiantes de primer semestre, en la asignatura denominada Cálculo I, o Análisis I, se debe a graves fallas en los conceptos de matemática elemental, al hecho de no tener buenos métodos de estudio, y muchas veces a no tener práctica con ejercicios de razonamiento.

En este texto, contemplamos el estudio de algunas propiedades del conjunto \mathbb{R} , así como la resolución de inecuaciones de diferentes tipos. Luego pasamos al estudio de funciones, donde aprovechamos para repasar algunas propiedades de funciones muy conocidas, insistiendo sobre todo con las funciones trigonométricas. Como tercera y última parte, damos algunos tópicos de Geometría Analítica, como: sistemas de coordenadas, punto medio, recta, circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. En todos los capítulos intentamos entrenar al alumno en la lectura y comprensión, bien razonada de las demostraciones. Esto con el objeto de remediar la casi inexistencia de estos procesos mentales, sobre todo por la ausencia del estudio de los diferentes temas de Geometría en el bachillerato. Ciencia esta que desde hace siglos es bien conocida, por tener esta virtud.

La idea que nos impulsa para publicar el texto en INTERNET, es sobre todo económica, ya que de esta manera consideramos que se abaratan los costos de adquisición de libros para nuestros estudiantes. Asimismo, aspiramos que nuestros colegas, así como los estudiantes nos hagan llegar los errores advertidos, problemas y contenidos interesantes, que ellos consideren puedan enriquecer el libro. Esto lo pueden hacer, enviándolos a nuestros correos electrónicos: **no2003ra@hotmail.com** y **jsarabia197@hotmail.com**

Gustosamente, daremos respuestas a las inquietudes mostradas por nuestros lectores.

Los autores

Barquisimeto, 2012

CAPÍTULO I

DESIGUALDADES E INECUACIONES EN R

1. Propiedades de orden en R

Definición. Sean $a, b \in R$ diremos que $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$. O sea, $a - b \in R_0^+$. Asimismo $a \leq b$ sii $b \geq a$ (se lee menor o igual).

Finalmente escribimos $a > b$ sii $a - b > 0$. O sea, sii $a - b \in R^+$.

Propiedades. Sean $a, b \in R$.

- a) $a \geq a$ (Reflexiva)
- b) $a \geq b$ y $b \geq a \Rightarrow a = b$ (Antisimétrica)
- c) $(a \geq b \text{ y } b \geq c) \Rightarrow a \geq c$ (Transitiva)
- d) $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c \quad \forall c \in R$
- e) $(a \geq b \wedge c \geq d) \Rightarrow a + c \geq b + d$
- f) Sea $c > 0$, $a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$
- g) Sea $c < 0$, $a \geq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Nota: ">" cumple con todas las propiedades anteriores (cambiando \geq por $>$), excepto la a).

Demostración:

a) $a \geq a$ pues $a - a \geq 0 \quad \forall a \in R$. Ya que $a - a = 0$ (\geq significa $>$ ó $=$) ■

b) $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$ y $b \geq a \Leftrightarrow b - a \geq 0$.

En R un número puede ser: $x > 0$ ó $x < 0$ ó $x = 0$.

Luego si $a - b > 0$, entonces: $(-1)(a - b) = b - a < 0$ (!), pues $b - a \geq 0$ (¡lo contrario!), luego $a - b = 0 \Rightarrow a = b$. ■

c) De acuerdo a la definición de \geq , tenemos:

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ (La suma de dos números no negativos
 $b \geq c \Rightarrow b - c \geq 0$ es siempre un número no negativo).

$$(a - b) + (b - c) = a - c \geq 0$$

$$\Rightarrow a \geq c$$

Entonces:

$$a \geq b \wedge b \geq c \Rightarrow a \geq c$$

d) $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) \geq 0 \Leftrightarrow a + c \geq b + c$ ■

Aplicación de la propiedad anterior:

Resolver la inecuación: $x + 8 \geq 5$

Le sumo $c = -8$ ¡en ambos miembros!

$(x + 8) + (-8) \geq 5 + (-8) \Leftrightarrow x \geq -3$. Es decir los valores de x forman el conjunto:
 $\{x \in R: x \geq -3\} = [-3, \infty)$. (¡En un momento recordamos esto!) ■

e) Ejercicio

f) Sea $c > 0$, $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \Leftrightarrow c(a - b) \geq 0$. ((+).(no negativo)=(no negativo))
 $c(a - b) = c \cdot a - c \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow c \cdot a \geq c \cdot b$ (o lo que es lo mismo)

$$\Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$$
 ■

g) Ejercicio

Intervalos:

Antes de seguir recordemos la notación de intervalos

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$$



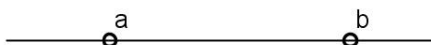
$$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$$



$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in R: x \geq a\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in R: x > a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in R: x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in R: x < a\}$$



$$(-\infty, +\infty) = R$$



2. Inecuaciones de grado uno

Las propiedades de " \geq " y " $>$ " (también de " \leq " y " $<$ "), se pueden usar para resolver inecuaciones de grado uno, es decir inecuaciones de la forma $Ax + B \geq Cx + D$ (o también con $>$, \leq o $<$).

Ejemplo:

Resolver: $3x + 2 \geq 5x - 1$

Solución:

Sumamos en ambos miembros $(-3x + 1)$, o sea:

$$3x + 2 + (-3x + 1) \geq 5x - 1 + (-3x + 1)$$

$$3x + 2 - 3x + 1 \geq 5x - 1 - 3x + 1 \quad (\text{Reducimos términos semejantes})$$

$$3 \geq 2x$$

Multiplicamos por $1/2$ (Es importante observar que $1/2 > 0$). Y obtenemos:

$$3 \cdot \frac{1}{2} \geq 2x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

O sea, el conjunto solución es: $S = (-\infty, \frac{3}{2}]$.

Reglas prácticas

1) Observe que si A está en un miembro de la inecuación (digamos construida con \leq), o sea:

$$x + A \leq B \quad \text{sumamos } (-A) \text{ y tenemos:}$$

$$x \leq B + (-A) = B - A. \quad \text{O sea, ¡pasa al segundo miembro con el signo cambiado!}$$

$$x + A \geq B \Leftrightarrow x \geq B - A$$

Aplicamos la regla práctica a: $x + 8 > 3$

$$x + 8 > 3 \Leftrightarrow x > 3 - 8 \Leftrightarrow x > -5$$

2) Si $A > 0$, en la inecuación: $Ax < B$. Multiplicamos por $\frac{1}{A}$ (positivo), y tenemos:

$$\frac{1}{A}(Ax) < \frac{1}{A} \cdot B \Leftrightarrow x < \frac{B}{A}$$

O sea, el $A > 0$, pasa dividiendo y conserva el sentido de la desigualdad.

Por ejemplo:

$$3x + 2 > x - 8 \Leftrightarrow 3x + (-x) > -8 - 2 \Leftrightarrow 2x > -10 \Leftrightarrow x > \frac{-10}{2} = -5$$

O sea: $S = \{x \in R: x > -5\} = (-5, +\infty)$.

Ejemplo. Resolver:

$$\frac{5}{3}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{6}x - \frac{3}{8}$$

Solución:

$$\frac{5}{3}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{6}x - \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x > -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{6}x > -\frac{7}{8} \Leftrightarrow x > \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \frac{6}{9}$$

$$x > -\frac{42}{72} = -\frac{7}{12} \quad \text{o sea:} \quad S = \left(-\frac{7}{12}, +\infty\right)$$

Nota: en el ejemplo usamos la consecuencia de la regla práctica 2, es decir si $\frac{x}{a} \leq B$, multiplicamos por $a > 0$, en ambos miembros, y tenemos:

$$a \cdot \frac{x}{a} \leq a \cdot B \Leftrightarrow x \leq a \cdot B$$

Es decir si un número divide a la incógnita (x en este caso), pasa multiplicando, conservando el sentido de la desigualdad si $a > 0$, o cambiando el sentido de ésta, si $a < 0$:

$$\frac{9}{6}x > -\frac{7}{8} \Leftrightarrow x > \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \frac{6}{9}$$

El 9 pasa dividiendo y el 6, multiplicando.

3) Si $A < 0$, en la inecuación tenemos:

$$Ax < B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \cdot (Ax) > \frac{1}{A} \cdot B \Leftrightarrow x > \frac{B}{A} \quad (\text{¡Cambia por } >!)$$

Por ejemplo: $-\frac{3}{2}x < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{12}$

O sea: $x > -\frac{5}{6}$, de manera que: $S = \left(-\frac{5}{6}, +\infty\right)$

Ejercicio resuelto

En la especificación de una receta dice que el plato que se está preparando debe hornearse entre 60°C y 75°C . ¿Cuál es el intervalo correspondiente para $^{\circ}\text{F}$?, sabiendo que $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Donde C es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ que corresponde a F grados Fahrenheit.

Solución

El planteamiento es: $60 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 75$

Se trata de dos inecuaciones, las cuales podemos resolver al mismo tiempo.

$$60 \leq \frac{5}{9}F - \frac{160}{9} \leq 75$$

Sumamos $\frac{160}{9}$ en todos los miembros:

$$60 + \frac{160}{9} \leq \frac{5}{9}F \leq 75 + \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{700}{9} \leq \frac{5}{9}F \leq 75 + \frac{835}{9}$$

Multiplicamos por: $\frac{9}{5}$ y tenemos:

$$\frac{700}{5} \leq F \leq \frac{835}{5}$$

Finalmente, resulta: $140 \leq F \leq 167$

O sea el intervalo en $^{\circ}\text{F}$ es: $[40^{\circ}\text{F}, 167^{\circ}\text{F}]$.

Ejercicio resuelto

Resuelva el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 5x + 4 \\ 6x + 8 < 4x - 3 \end{cases}$$

Solución

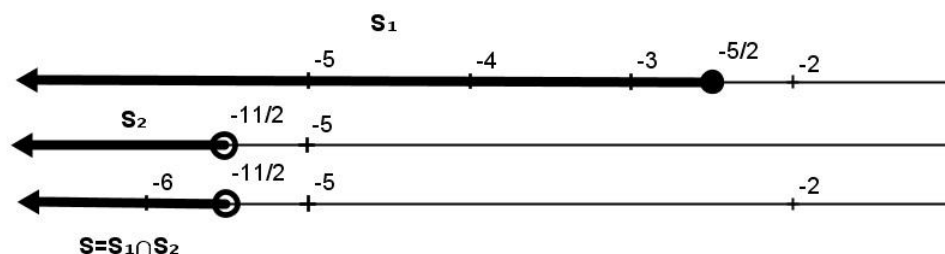
Debemos resolver cada inecuación e intersectar las soluciones.

$$3x - 1 \geq 5x + 4 \Leftrightarrow -2x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow S_1 = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$$

$$6x + 8 < 4x - 3 \Leftrightarrow 2x < -11 \Leftrightarrow x < -\frac{11}{2} \Rightarrow S_2 = \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cap \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right) = \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right)$$

Hallems la solución total mediante un gráfico.



Ejercicio resuelto

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x + 3 \geq 2x - \frac{1}{2} \\ 3x + 5 > x + 8 \\ (x + 1)^2 \leq (x + 5)^2 \end{cases}$$

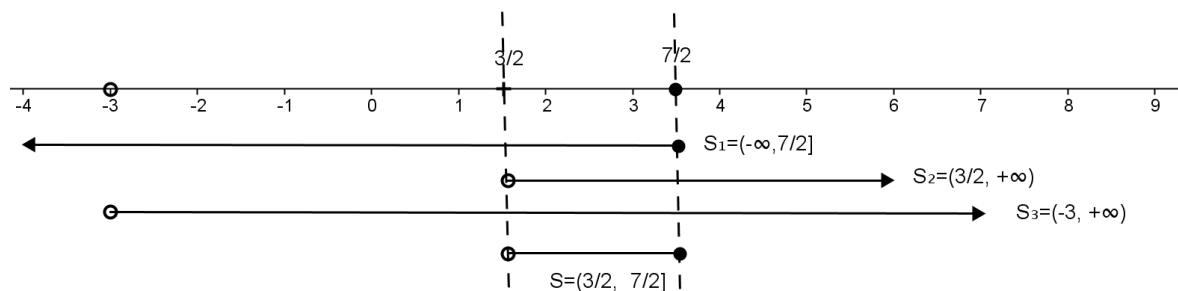
Solución

$$x + 3 \geq 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x \geq -3 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x \geq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}; \quad S_1 = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$$

$$3x + 5 > x + 8 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}; \quad S_2 = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$(x + 1)^2 \leq (x + 5)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow -8x \leq 24 \Leftrightarrow x \geq -3; \quad S_3 = [-3, +\infty)$$

Hacemos una representación gráfica de las soluciones particulares para encontrar la solución del sistema.



De la gráfica anterior vemos fácilmente que la solución es: $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$

Nota: Un sistema de ecuaciones puede no tener solución, o sea puede ser incompatible. Por

ejemplo:
$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 8 \end{cases}$$

$$S_1 = (-\infty, 3); \quad S_2 = [8, +\infty).$$

Claramente: $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (Haga el gráfico de S_1 y S_2)

Ejercicios Propuestos

1) En los literales de esta pregunta, resuelve la inecuación y representa gráficamente el conjunto solución.

a) $x - 2 \leq 3x + 5$; b) $3x + 7 > x - 9$; c) $1 - 4x < 2 + 5x$; d) $\frac{3}{2}x - 5 \geq x + \frac{1}{5}$

Resp. a) $\left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$; b) $(-8, +\infty)$; c) $\left(-\frac{1}{9}, +\infty\right)$; d) $[-26, +\infty)$

2) Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones:

- a) $-5 \leq 2 - 3x \leq 14$
 b) $-1 < x + 5 \leq 1$
 c) $5 - x \leq x + 2 < 3x - 1$
 d) $x + 7 < 2x - 5 < x + 11$
 e) $\begin{cases} 2x + 3 > \frac{x-4}{2} \\ 5x - \frac{1}{2} < 2x \end{cases}$
 f) $\begin{cases} 2x - 5 > \frac{x-4}{2} \\ -5 < x + 1 < 5 \end{cases}$
 g) $\begin{cases} \frac{2(x-1)}{3} < 3 + \frac{x-2}{3} \\ x + \frac{(x-2)^2}{2} < \frac{5+x^2}{2} \\ x^2 + 3x - 4 > (x-3)^2 \end{cases}$
 h) $\begin{cases} -3 < x - 5 < 3 \\ 2x - 8 > 2 \text{ ó } 2x - 8 < -2 \end{cases}$

Resp. a) $[-4, 7/3]$; b) $(-6, -4]$; c) $(3/2, +\infty)$; d) $(12, 16)$; e) $(-10, 1/6)$; f) $(2, 4)$; g) $(13/9, 9)$; h) $(5, 8)$

3) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < b$. Demuestre que $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. ¿Es verdadero el recíproco?

Resp. Si, multiplique por $a \cdot b$ y use la propiedad (f) de $>$.

4) Sean $a, b \geq 0$. Demuestre que $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. ¿Es cierta la propiedad si a, b no son necesariamente positivos?

Resp. No; pruebe con -1 y -2

5) Demuestre que si $b > 0$ y $a < b$, entonces: $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$.

6) Demuestre que:

- a) $a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
 b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
 (*)c) $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$
 d) $a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 1$
 e) Para $a, b > 0$ se tiene que: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
 f) $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)
 g) $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b \quad M = \frac{a+b}{2}$ (media aritmética)
 h) $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b \quad G = \sqrt{ab}$ (media geométrica)

7) Si se conectan las resistencias eléctricas R_1 y R_2 , en paralelo, la resistencia total R cumple con la ley $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si $R < 5\Omega$ y $R_1 = 10\Omega$, ¿cuál será el rango de los valores de R_2 ? **Resp.** $0 < R_2 < 10\Omega$

8) Una empresa quiere comprar una grúa. Se le presentan 2 opciones. La primera cuesta 5 millones de Bs y su mantenimiento anual cuesta Bs. 400.000 al año. La otra cuesta 3.5 millones, pero su mantenimiento anual cuesta Bs. 550.000. Si se va a usar no más 8 años, ¿cuál grúa conviene comprar?

Resp. La primera cuesta en total menos que la segunda, durante los 10 primeros años.

9) Demuestre, usando inducción, que si $a, b \geq 0$, entonces: $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Inecuaciones Algebraicas

Factorización de polinomios de una variable

Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in R$, $i = 0, 1, \dots, n$.

El teorema fundamental del Álgebra garantiza que $P(x)$ tiene exactamente n raíces en \mathbb{C} (complejos).

Además como corolario de lo anterior tenemos que $P(x)$ se factoriza en la forma:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) . \text{ Donde las } \alpha_i \text{ son las raíces del polinomio.}$$

Por ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Para hallar sus raíces aplicamos la fórmula para: $Ax^2 + Bx + C = 0$

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

En nuestro caso:

$$\alpha_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Luego: $2x^2 + 5x - 3 = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$

Ejemplo

Factorice $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Por simple inspección trataremos de hallar α_1 tal que $P(\alpha_1) = 0$.

Criterio 1: Para $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, si α es una raíz entera de $P(x)$, entonces $\alpha | a_0$. O sea si $P(x)$ tiene una raíz entera α , ésta debe ser divisor de a_0 .

En nuestro caso: $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, luego si tiene raíz entera, esta debe ser divisor de -2, o sea: $\pm 1, \pm 2$ son los candidatos a raíz.

$$\alpha = 1, P(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \text{ es raíz!}$$

Para encontrar las otras raíces, dividimos $P(x)$ entre $x - 1$, lo que haremos usando Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Luego: } P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

Halleemos las raíces de $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -2$$

Finalmente tenemos:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

Ejemplo

Factorice: $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Criterio 2: Para $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in Z(\text{enteros})$ si $\alpha = \frac{p}{q}$ es una raíz racional o fraccionaria de $P(x)$, entonces: $p|a_0 \wedge q|a_n$.

En nuestro caso: $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$, luego si tiene raíz fraccionaria $\alpha = \frac{p}{q}$ debe tenerse:

$$a = \pm 1 \text{ (divisores de 1);} \quad b = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \text{ (divisores de 12)}$$

$$\text{Luego:} \quad \frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12} \right\}$$

$$P(1) = 6 \neq 0 \quad \quad \quad 1 \text{ no es raíz}$$

$$P(-1) = 14 \neq 0 \quad \quad \quad -1 \text{ no es raíz}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ es raíz!}$$

Dividimos $P(x)$ entre $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & -4 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 6 & 1 & -1 \\ \hline & 12 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{Luego } 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 2x - 2)$$

Halleemos las raíces de $12x^2 + 2x - 2 = 0$, o sea de: $6x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} ; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Finalmente tenemos:

$$12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 2x - 2) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Nota:

La factorización de polinomios es particularmente útil para la resolución de inecuaciones algebraicas, es decir, inecuaciones de la forma:

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, ya que el método que usaremos, que es el Método de Sturm, se basa en esta factorización.

Finalmente, antes de explicar el método de Sturm, procederemos a recordar dos propiedades importantes de polinomios,

Signo del trinomio $y = Ax^2 + Bx + C$; con $A, B, C \in R$.

Supongamos que la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ no tiene raíces reales, lo cual ocurre si $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ (Discriminante).

Veremos que si $A > 0$, entonces $Ax^2 + Bx + C > 0 \quad \forall x \in R$

Mientras que si $A < 0$, entonces $Ax^2 + Bx + C < 0 \quad \forall x \in R$

Probaremos el caso $(A > 0, \Delta < 0) \Rightarrow Ax^2 + Bx + C > 0 \quad \forall x \in R$

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}\right) + C - \frac{B^2}{4A} \quad (\text{¡Explique!})$$

$Ax^2 + Bx + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} > 0$, pues el primer sumando es no negativo, $\forall x \in R$; y el segundo es positivo.

¡Haz el caso $A < 0$, como ejercicio!

Por ejemplo:

$$y = 4x^2 - 3x + 9 > 0, \quad \forall x \in R; \text{ pues: } A = 4 > 0; \quad \Delta = -135 < 0$$

$$y = -x^2 + x - 2 < 0, \quad \forall x \in R; \text{ pues: } A = -1 < 0; \quad \Delta = -7 < 0$$

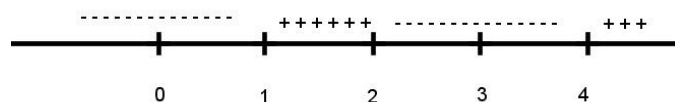
Alternancia de signos para un polinomio con raíces reales.

Consideremos un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con raíces reales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, además supongamos que éstas son distintas y que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Entonces $P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ (Suponemos que $a_n = 1$).

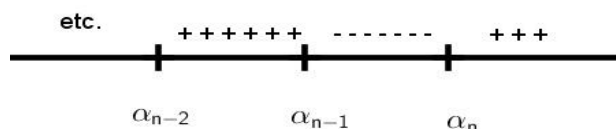
Es claro que $\forall x > \alpha_n$, también $x > \alpha_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Luego en $(\alpha_n, +\infty)$, $P(x) > 0$.

Ahora si $x \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, entonces $(x - \alpha_n) < 0$ y los demás $(x - \alpha_i) > 0$, luego $P(x) < 0$, y así sucesivamente, se van alternando los signos.

Por ejemplo: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$, entonces los signos de $P(x)$ en R , se distribuyen así:



En resumen, para determinar el signo de un polinomio, con raíces reales distintas, basta ordenar en forma creciente, y tendremos



Nota.

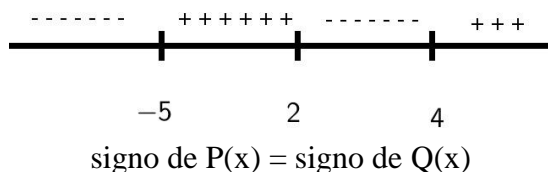
Si al factorizar un polinomio hay además de raíces simples, raíces múltiples y raíces complejas, por ejemplo:

$P(x) = (x - \alpha_1)^3(x - \alpha_2)^2(x^2 + Bx + C)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ con $B^2 - 4C < 0$
 el signo de $P(x)$ es igual al signo de $Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$.

Ejemplo.

Estudiar el signo de $P(x) = (x^2 + x + 1)(x - 2)^5(x + 1)^2(x - 4)(x + 5)^3$.

En virtud de lo anterior, tenemos que el signo de $P(x)$ coincide con el signo de $Q(x) = (x - 2)(x - 4)(x + 5)$, donde $\alpha_1 = -5$ $\alpha_2 = 2$ $\alpha_3 = 4$



Observe que $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; pues: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

La diferencia entre $P(x)$ y $Q(x)$, está en que las raíces de $P(x)$ son:

2 (quíntuple), -1 (doble), 4 (simple) y 5 (triple). En cambio las raíces de $Q(x)$ son 2, 4, y 5, todas simples.

Método de Sturm.

El método de Sturm para resolver inecuaciones algebraicas consiste fundamentalmente en lo siguiente:

1) Se realizan los pasos algebraicos para transformar la inecuación algebraica dada en una de las siguientes inecuaciones:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios mónicos¹

2) Se factorizan ambos polinomios.

3) Se eliminan los trinomios $x^2 + Bx + C$ con $\Delta < 0$.

Las raíces reales de orden par se eliminan, y las de orden impar, es decir aquellas de la forma $(x - \alpha)^{2m+1}$ se reemplazan por $(x - \alpha)$.

¹ $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ es mónico si $a_n = 1$

- 4) Al dar el conjunto solución deben eliminarse los elementos o raíces que anulen al denominador, o a ambos (numerador y denominador).
 5) Se ordenan las raíces del numerador y denominador en forma creciente, y se aplica la regla de la alterabilidad del signo.

Ejemplo

Resolver la inecuación: $3x^2 + 14x - 5 \geq 0$.

Factorizamos el polinomio, hallando sus raíces:

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{6} = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-14 \pm 16}{6}$$

$$x_1 = \frac{-14+16}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{-14-16}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

Luego: $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 5) \geq 0$ (Pues $3 > 0$)

$$\alpha_1 = -5 < \alpha_2 = \frac{1}{3}$$



Luego: $S = (-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Observamos que -5 y $1/3$ están en S , porque la inecuación es \geq , o sea tomamos los valores de x que hacen a:

$$3x^2 + 14x - 5 > 0$$

y también los que satisfacen: $3x^2 + 14x - 5 = 0$.

Si la inecuación fuera: $3x^2 + 14x - 5 > 0$, entonces: $S = (-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

¿Cuál sería S si la inecuación fuera: $3x^2 + 14x - 5 \leq 0$? ¿y si fuera: $3x^2 + 14x - 5 < 0$?

Ejemplo

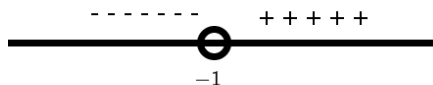
Resolver la inecuación: $\frac{3x-3}{x+1} < x - \frac{x}{x+1}$

Llevamos todos los términos al primer miembro y resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{3x-3}{x+1} - x + \frac{x}{x+1} < 0 &\Leftrightarrow \frac{3x-3-x^2-x+x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-x^2+3x-3}{x+1} < 0 &\text{ Multiplicamos ambos miembros por } (-1). \text{ ¿Para qué?} \\ \frac{x^2-3x+3}{x+1} > 0 & (*) \end{aligned}$$

El signo del trinomio $x^2 - 3x + 3 > 0$ pues $\Delta = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$ y $A = 1 > 0$

Dividiendo ambos miembros de (*) por $x^2 - 3x + 3 > 0$ ($\forall x \in R$), tenemos: $\frac{1}{x+1} > 0$



Luego: $S = (-1, +\infty)$

Ejercicio resuelto

Resuelva la inecuación:

$$\frac{5(x-1)^{100}(x+2)^{301}(-3x^2+5x-9)(x-3)}{x(x+3)^4(x-4)^3(x^2+x+1)} \geq 0$$

Solución

Los valores: 1, -2, 3 deben ser elementos del conjunto solución S, pero: 0, -3, 4 no pertenecen a S, pues anulan el denominador (¡ No se puede dividir entre 0!).

Además:

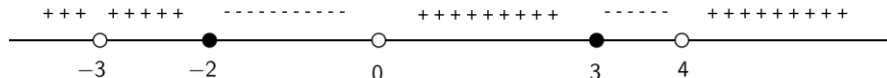
$$-3x^2 + 5x - 9 < 0 \quad \forall x \in R, \quad \text{pues } \Delta = 5^2 - 4(-3)(-9) = -83 \text{ y } A = -3 < 0$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in R, \quad \text{ya que } \Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 \text{ y } A = 1 > 0$$

Además $5 > 0$. Por lo tanto aplicando la regla de Sturm, tenemos la inecuación:

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x(x-4)} \leq 0 \quad (\text{¿Por qué cambió el sentido de la desigualdad?})$$

Las raíces del numerador y denominador son: -2, 3, 0, 4. Las ordenamos en forma creciente: -2, 0, 3, 4 y hacemos el gráfico para el estudio de los signos:



Luego: $S = [-2, 0) \cup [3, 4)$

(¡Revise los pasos de la Regla de Sturm !)

Ejercicio resuelto

Un móvil tiene un movimiento cuya posición $x(t)$ viene dada por:

$$x(t) = \frac{t^2 - 4}{t^3 - 10t^2 + 29t - 20}$$

Donde t viene en segundos y $x(t)$ en cm. ¿En qué intervalo de tiempo, el móvil se encuentra a la izquierda del origen?

Solución.

$$t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2)$$

Factorizamos: $P(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$

Divisores de 20: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$$P(1) = 1 - 10 + 29 - 20 = 0 \quad (\text{¡Suerte!})$$

Dividimos P(t) entre $t - 1$, tenemos:

	1	-10	29	-20
1		1	-9	20
	1	-9	20	0

Luego: $P(t) = (t - 1)(t^2 - 9t + 20)$

Halle las raíces de $t^2 - 9t + 20 = 0$

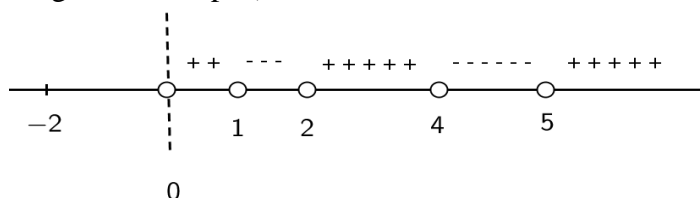
$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{9 + 1}{2} = 5 \\ t_2 = \frac{9 - 1}{2} = 4 \end{cases}$$

En resumen: $P(t) = (t - 1)(t - 4)(t - 5)$

La inecuación es entonces:

$$\frac{(t - 2)(t + 2)}{(t - 1)(t - 4)(t - 5)} < 0$$

Ordenamos las raíces del numerador y denominador, tenemos: -2, 1, 2, 4, 5. Luego, como $t \geq 0$ (Se trata de la magnitud "tiempo")



$S = (1, 2) \cup (4, 5)$. O sea el móvil se encuentra al lado izquierdo del origen entre 1s y 2s, y, entre 4s y 5s.

Ejercicios propuesto.

1) Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x} < \frac{2-x}{3+x};$

b) $x^2 \leq 4;$

c) $\frac{6}{x} - \frac{9}{2} > \frac{3}{x} - \frac{21}{2};$

d) $x^2 + 3x + 1 \leq 0;$

e) $2x^2 - 6x + 3 < 0;$

f) $x^3 - x^2 > x - 1$

Resp.

a) $(-3, 0);$

b) $[-2, 2];$

c) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$

d) $[\alpha, \beta],$ donde $\alpha = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}),$ $\beta = -\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$

e) $(\alpha, \beta),$ donde $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$ $\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{2};$

f) $(-1, +\infty)$

2) Resuelva la inecuación: $2x^2 - 3x + 7 \leq 0$

Resp. $S = \emptyset$

3) Resuelva:

a) $\frac{x-2}{x-4} < \frac{2+x}{x};$

b) $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 \geq 0$

c) $\frac{x^4}{x^2+5x+6} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} > 0;$

d) $\frac{2x^4+5x^3+5x^2+5x+3}{2x^2+7x+3} \leq 0$

Resp.

a) $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty);$

b) $(-\infty, -3] \cup [1, 2] \cup [3, +\infty)$

c) $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty);$

d) $(-3, -\frac{3}{2}] \cup [-1, -\frac{1}{2})$

4) Sabiendo que $\varepsilon \in (0,3)$. Resuelva la inecuación: $3 - \varepsilon < \frac{1}{x+2} < 3 + \varepsilon$.

Resp. $S = \left(\frac{1-2(3+\varepsilon)}{3+\varepsilon}, \frac{1-2(3-\varepsilon)}{3-\varepsilon} \right)$.

5) Resuelva la inecuación: $\sum_{i=0}^{99} x^i \leq 0$

Resp. $(-\infty, -1]$.

6) Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x + 6 > x^2 - 4x + 21 \\ 5x - \frac{1}{2} < 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 10 \geq x - 4 \\ -5 < x + 1 < 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 - (x-1)^2 < x \\ \frac{2x+1}{x} - 2x^2 > \frac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases}$

Resp. a) \emptyset ; b) $(-6, \alpha] \cup (\beta, 4)$ donde $\alpha = \frac{1-\sqrt{97}}{8} \approx -1.11$; $\beta = \frac{1+\sqrt{97}}{8} \approx 1.36$
c) $(0, 0.62)$

7) Para una población particular de Salmón, la relación entre el número H de hembras adultas y el C de crías que sobreviven hasta la edad adulta, viene dada por la fórmula:

$$C = \frac{4500H}{H+500}. \quad \text{¿En qué condiciones es } C < H \text{ ?}$$

Resp. Cuando el número de hembras es mayor que 4000. (Por problema de competencia por la comida).

8) Para que un medicamento tenga un efecto benéfico su concentración en la sangre debe exceder el nivel terapéutico mínimo (n.t.m). Si para un antibiótico la concentración c en mg/litro al transcurrir t horas después de haber sido ingerido viene dada por: $c = \frac{20t}{t^2+4}$.

Si el nivel (n.t.m) es de $4 \frac{mg}{l}$, determine el intervalo de acción del antibiótico.

Resp. La acción terapéutica comienza a la hora y termina a las cuatro horas.

4. Valor absoluto

Sea $x \in R$, denominamos valor absoluto de x , y lo denotamos por $|x|$ al número real: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Observe que: $|-x| = |x|$ (¡Explique!)

Ejemplo.

a) $|5| = 5$ pues $5 > 0$; $|0| = 0$ ya que $0 \geq 0$; $|-3| = -(-3) = 3$.
 $|-1,3| = -(-1,3) = 1,3$; $|8,2| = 8,2$;
 $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, pues $1 - \sqrt{2} < 0$, ya que $\sqrt{2} \approx 1,42$.

b) Si a es un número negativo, $|a| = -a > 0$; si a es positivo, $|a| = a > 0$ y $|0| = 0$, luego $|a| \geq 0 \quad \forall a \in R$.

c) Si $a \geq b$, entonces: $|a - b| = a - b$; y si $a < b$, entonces $|a - b| = -(a - b) = b - a$

d) Si $|x| = 7$, entonces $x = 7$ ó $x = -7$ (Dos respuestas).

Ecuaciones con valor absoluto

En lo que sigue daremos algunos ejemplos para explicar cómo resolvemos algunas ecuaciones conteniendo valores absolutos.

Para ello usaremos el hecho simple que la expresión

$$|A| = A \text{ si } A \geq 0, \quad |A| = -A \text{ si } A < 0,$$

en otras palabras, usaremos sólo la definición de valor absoluto.

Ejemplos

a) Resolver: $|3x - 5| = 4$

Observamos que: $3x - 5 \geq 0$ ó $3x - 5 < 0$, o sea que hay dos posibilidades:

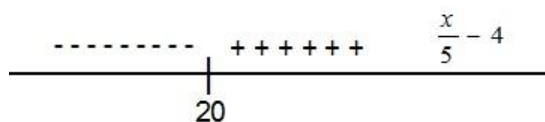
$$|3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5 = 4 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \\ -(3x - 5) = 4 \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}.$$

Para ecuaciones más complicadas lo que haremos será dividir a la recta real en tantas regiones como nos indiquen los puntos donde cambie de signo la expresión que aparece en cada valor absoluto.

b) Resolver: $\left|\frac{1}{5}x - 4\right| = 2x - 3$

La expresión $\frac{1}{5}x - 4$ cambia de signo en $x = 20$. Por tanto, en $(20, +\infty)$,

$$\left|\frac{1}{5}x - 4\right| = \frac{1}{5}x - 4 \text{ y la ecuación a resolver es: } \frac{1}{5}x - 4 = 2x - 3$$



Cuya solución es: $x = -\frac{5}{9}$, pero que no pertenece a $(20, +\infty)$, por tanto la rechazamos (¡Comprueba que no satisface la ecuación: $\left|\frac{1}{5}x - 4\right| = 2x - 3$!)

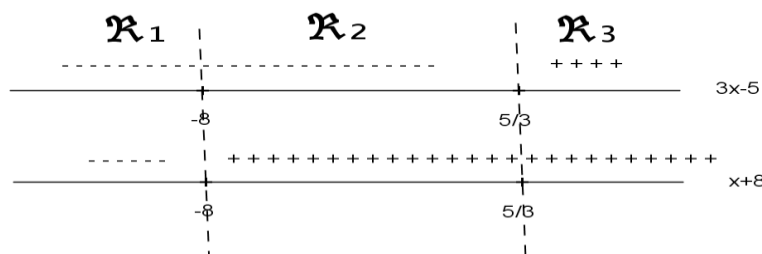
La otra región es $(-\infty, 20]$. En este caso $\frac{1}{5}x - 4 \leq 0$, y por tanto:

$$\left|\frac{1}{5}x - 4\right| = -\frac{1}{5}x + 4 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{35}{11} \in (-\infty, 20],$$

luego hay una sola solución: $x = \frac{35}{11}$

c) Resolver: $|3x - 5| = |x + 8|$

$$\begin{array}{ll}
 3x - 5 \geq 0 \text{ a la derecha de } \frac{5}{3}; & 3x - 5 < 0 \text{ a la izquierda de } \frac{5}{3} \\
 x + 8 \geq 0 \text{ a la derecha de } -8; & x + 8 < 0 \text{ a la izquierda de } -8
 \end{array}$$



De manera que tenemos 3 regiones:

$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, -8); \quad \mathcal{R}_2 = \left[-8, \frac{5}{3}\right); \quad \mathcal{R}_3 = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

Solución en $\mathcal{R}_1 = (-\infty, -8)$

$$-(3x - 5) = -(x + 8) \Rightarrow -3x + 5 = -x - 8 \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \notin \mathcal{R}_1$$

¡No es solución en \mathcal{R}_1 !, pero puede ser solución en otra región.

Solución en $\mathcal{R}_2 = [-8, 5/3)$

$$-(3x - 5) = x + 8 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \in \mathcal{R}_2 \quad \text{¡ Es solución!}$$

Solución en $\mathcal{R}_3 = [5/3, +\infty)$

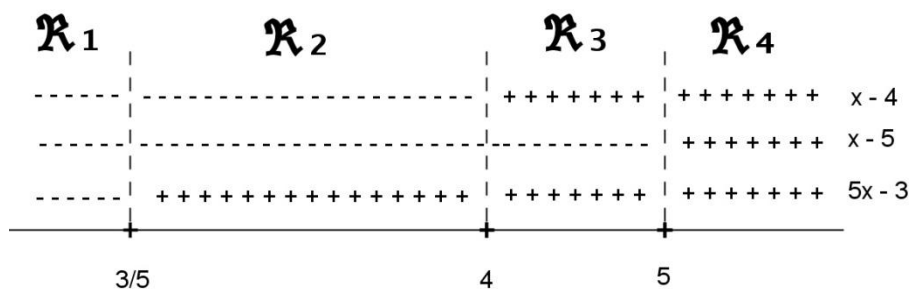
$$3x - 5 = x + 8 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \in \mathcal{R}_3 \quad \text{¡ Es solución!}$$

Entonces las soluciones son: $x = -\frac{3}{4}, \quad x = \frac{13}{2}$

d) Resuelva: $|x - 4| + |x - 5| = |5x - 3|$

Los puntos donde hay cambio de signo son: 4, 5 y $\frac{3}{5}$.

Luego las regiones son: $\mathcal{R}_1 = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right); \quad \mathcal{R}_2 = \left[\frac{3}{5}, 4\right); \quad \mathcal{R}_3 = [4, 5) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_4 = [5, +\infty)$



Región $\mathcal{R}_1 = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

$$-(x - 4) - (x - 5) = -(5x - 3) \Rightarrow x = -2 \in \mathcal{R}_1. \text{ Luego } x = -2 \text{ es solución.}$$

Región $\mathcal{R}_2 = \left[\frac{3}{5}, 4\right)$

$$-(x-4)-(x-5)=5x-3 \Rightarrow x=\frac{12}{7} \in \mathfrak{R}_2. \quad ; \text{ Es solución !}$$

Región $\mathfrak{R}_3 = [4,5)$

$$x-4-(x-5)=5x-3 \Rightarrow x=\frac{4}{5} \notin \mathfrak{R}_3. \quad ; \text{ No es solución !}$$

Región $\mathfrak{R}_4 = [5, +\infty)$

$$x-4+x-5=5x-3 \Rightarrow x=-2 \notin \mathfrak{R}_4. \quad \text{Es solución en } \mathfrak{R}_1,$$

Por tanto las soluciones son: $x = -2, \quad x = \frac{12}{7}$.

Nota: para rechazar un valor de x como solución de la ecuación, éste no debe pertenecer a región alguna. Pero si una supuesta solución no está en una región, pero está en otra, ¡es solución!. Como sucedió en el ejemplo anterior con -2 .

Propiedades del valor absoluto

En lo que sigue mencionaremos las propiedades más importantes de valor absoluto. Algunas las demostraremos, mientras que otras serán dejadas como ejercicio al lector.

- a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \text{ con } a > 0$
- b) $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \text{ ó } x \leq -a); \text{ con } a > 0$
- c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in R$
- d) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a \in R, \forall b \in R - \{0\}$
- e) $|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in R \quad (\text{Desigualdad triangular})$
- f) $|a - b| \geq |a| - |b| \quad \forall a, b \in R$
- g) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Nota: en las propiedades: a y b , respectivamente, se puede reemplazar \leq por $<$, y \geq por $>$, es decir:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad \text{y} \quad |x| > a \Leftrightarrow (x > a \text{ ó } x < -a).$$

Demostración

Demostraremos: a, b^*, c y e . Donde b^* es b con $>$.

a) Supongamos que: $|x| \leq a, \text{ con } a > 0$.

Si $x \geq 0$, entonces: $|x| = x \leq a$ y $-a < x$, pues $-a < 0$. Luego: $-a < x \leq a$.

Si $x < 0$, entonces: $|x| = -x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ y $x < a$, pues $x < 0$ y $a > 0$.

Luego: $-a \leq x < a$.

Por lo tanto: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \quad (1)$

Supongamos ahora que: $-a \leq x \leq a$.

Si $x \geq 0$ entonces $x = |x|$, luego $x = |x| \leq a$

Si $x < 0$, resulta que $-x = |x|$ y de $x \geq -a$, tenemos: $-x \leq a$. Por lo tanto:

$$|x| = -x \leq a. \text{ Luego: } -a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a \quad (2)$$

De (1) y (2), tenemos: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

b) Supongamos que: $|x| > a$

Si $x \geq 0$, $|x| = x > a \Rightarrow x > a$

Si $x < 0$, $|x| = -x > a \Rightarrow x < -a$

Luego: $|x| > a \Rightarrow x > a \text{ ó } x < -a$ (3)

Supongamos ahora que : $x > a \text{ ó } x < -a$

Si $x > a > 0$, entonces: $|x| = x > a \Rightarrow |x| > a$

Si $x < -a < 0$, entonces: $|x| = -x > a \Rightarrow |x| > a$

O sea: $(x > a \text{ ó } x < -a) \Rightarrow |x| > a$ (4)

Por (3) y (4), tenemos: $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \text{ ó } x < -a)$

c) Para demostrar c) y d), es útil la siguiente propiedad: $\sqrt{x^2} = |x|$

En efecto, si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x = |x|$ y si $x < 0$, entonces $-x > 0$, por tanto $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$.

Procedemos entonces a demostrar la propiedad c).

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|.$$

d) Ejercicio

e) Observamos que:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (\text{¡ Ejercicio!})$$

$$\underline{-|b| \leq b \leq |b|}$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|, \text{ por la prop. (e), pág. 1}$$

Luego, por la propiedad a), pág. 17, tenemos:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

f) y g) Ejercicios.

Ejemplos

a) Resuelva: $|2x - 3| \leq 2$

Por a), tenemos que: $|2x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 3 \leq 2$. Por tanto es lo mismo resolver la inecuación con valor absoluto, que el sistema de la derecha.

En efecto: $-2 \leq 2x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

O sea: $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

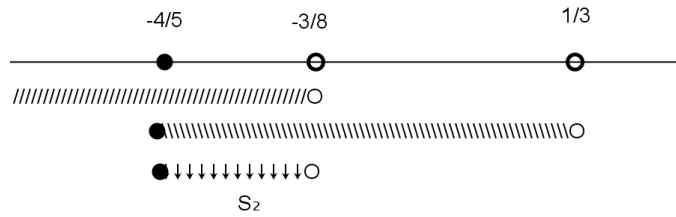
b) Resuelva: $\left|\frac{1}{3} - 4x\right| > 5$

Por prop. b), tenemos $\left|\frac{1}{3} - 4x\right| > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 4x > 5 \text{ ó } \frac{1}{3} - 4x < -5$

Resolviendo la primera inecuación, tenemos: $x < -\frac{7}{6}$, o sea: $S_1 = \left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$

Resolviendo la segunda inecuación, resulta: $x > \frac{4}{3}$, o sea: $S_2 = \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Por tanto: $S = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, -\frac{7}{6}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$



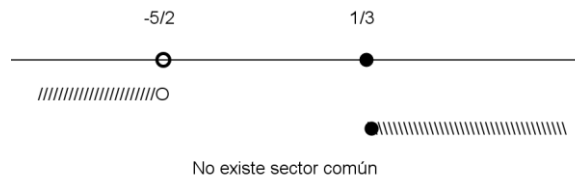
$$S_2 = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{8} \right)$$

$$\mathfrak{R}_3 = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right)$$

$$3x - 1 > 5x + 4 \Rightarrow -2x > 5 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$$

$$\text{Luego: } S_3 = \left(-\infty, -\frac{5}{2} \right) \cap \left[\frac{1}{3}, +\infty \right) = \emptyset$$

Veamos la gráfica:



$$\text{Luego, la solución: } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{4}{5} \right) \cup \left[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{8} \right) \cup \emptyset = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{8} \right)$$

Segunda forma

$$|3x - 1| > |5x + 4| \Leftrightarrow \left| \frac{5x+4}{3x-1} \right| < 1, \text{ excepto para } x = \frac{1}{3}.$$

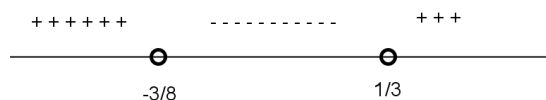
Reemplazando $\frac{1}{3}$ en la inecuación original, tenemos: $0 > 4$ (esto es falso) pues $0 < 4$, o sea $\frac{1}{3} \notin S$.

Por otra parte:

$$\left| \frac{5x+4}{3x-1} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{5x+4}{3x-1} < 1$$

Resolviendo, tenemos:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{5x+4}{3x-1} &\Leftrightarrow 0 < \frac{5x+4}{3x-1} + 1 = \frac{5x+4+3x-1}{3x-1} = \frac{8x+3}{3x-1} = \frac{8(x+\frac{3}{8})}{3(x-\frac{1}{3})} \\ \frac{8(x+\frac{3}{8})}{3(x-\frac{1}{3})} &> 0 &\Leftrightarrow \frac{x+\frac{3}{8}}{x-\frac{1}{3}} > 0 \end{aligned}$$



$$S_1 = \left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Asimismo:

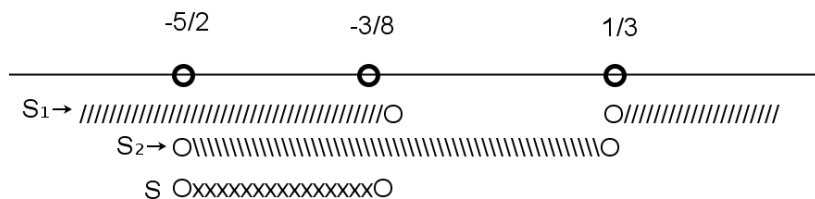
$$\frac{5x+4}{3x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{3x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{3}} < 0$$

Luego, en este caso, tenemos:

$$S_2 = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Luego:

$$S = S_1 \cap S_2 = \left[\left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)\right] \cap \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{8}\right)$$



Ejemplo

Veamos que ciertas inecuaciones se pueden reducir usando las propiedades de las páginas 17 y 18.

Transforme el sistema en una inecuación con valor absoluto:

a) $-3 < x < 3$; b) $1 \leq x \leq 9$; c) $x > 4$ ó $x < -4$; d) $x \geq 2$ ó $x \leq -1$.

En efecto:

a) $-3 < x < 3 \Leftrightarrow |x| < 3$ (por la prop. (a), pág. 17)

b) Sumemos a todos los miembros de $1 \leq x \leq 9$ el número "a" de tal manera que en:

$1 + a \leq x + a \leq 9 + a$ se cumpla que: $1 + a = -(9 + a)$ (¿Por qué?).

Luego: $1 + a = -9 - a \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$

Entonces: $-4 \leq x - 5 \leq 4$, por lo tanto: $|x - 5| \leq 4$, o sea:

$$1 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow |x - 5| \leq 4.$$

c) $x > 4$ ó $x < -4 \Leftrightarrow |x| > 4$, (por la prop. (b), pág. 18)

d) $(x \geq 2 \text{ ó } x \leq -1) \Leftrightarrow (x + a \geq 2 + a \text{ ó } x + a \leq -1 + a)$ con $-1 + a = -(2 + a)$
o sea: $2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Luego:

$$(x \geq 2 \text{ ó } x \leq -1) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ ó } x - \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{3}{2}.$$

Ejercicios propuestos.

1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|2x - 1| = 4$; b) $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| = |3 - x|$; c) $|x - 5| = |x + 1|$
d) $\frac{1}{|x + 2|} = x + 3$; d) $\left|\frac{3x - 1}{x + 4}\right| = \left|\frac{x - 5}{x + 2}\right|$; e) $|3x + 2| + |x| = |-x + 8|$

Resp. a) $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}, 4$; c) $\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$; d) $\frac{-2 \pm \sqrt{92}}{4}$; e) $\frac{-1 \pm \sqrt{23}}{2}$ f) $-\frac{10}{3}, \frac{6}{5}$

2) Demuestre que: $\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

Sugerencia: use inducción

3) ¿En qué casos $|a + b| = |a| + |b|$?

Resp. Cuando a y b tienen el mismo signo o alguno de los dos es 0.

4) Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x + 4| \leq 7$; b) $|3x + 2| \geq 1$; c) $|3 + 2x| \leq |4 - x|$;
d) $\left|\frac{6 - 5x}{x + 3}\right| \leq \frac{1}{2}$; e) $|\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2}$; f) $|x| + |x + 1| < |x + 2|$;
g) $2x \leq \left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}\right| - 1$; h) $||x| - 2| \leq 1$; i) $||x| + 1| \leq |x - 2|$;
j) $|3x - 1| > |x + 8| + |x - 1|$

Resp. a) $S = [1, 4]$; b) $(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$; c) $\left[-7, \frac{1}{3}\right]$; d) $\left[\frac{9}{11}, \frac{5}{3}\right]$
e) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$; f) $(-1, 1)$; g) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$; h) $[-3, -1] \cup [1, 3]$;
i) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty)$; j) $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right) \cup (8, +\infty)$

5) En un aparato de medida se establece que la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ no debe alejarse de 60°C en más de 5°C , ni de 40°C en menos de 10°C . ¿Cuál es el rango de variación de T en $^{\circ}\text{C}$?

Resp. $[55^{\circ}\text{C}, 65^{\circ}\text{C}]$

6) Escriba en forma de valor absoluto las siguientes dobles desigualdades.

a) $-3 \leq x \leq 3$; b) $-3 < x < 8$; c) $-6 \leq x \leq -1$; d) $x \leq 0$ ó $x \geq 4$

Resp. a) $|x| \leq 3$; b) $\left|x - \frac{5}{2}\right| < \frac{11}{2}$; c) $\left|x + \frac{7}{2}\right| < \frac{5}{2}$; d) $|x - 2| \geq 2$

7) Resuelva la siguiente inecuación y escriba la respuesta usando valor absoluto:

$$\frac{x+5}{x+3} > \frac{x+1}{x-1}$$

Resp. $|x+1| < 2$

8) Demuestre que $|x-a| < b \Leftrightarrow a-b < x < a+b$.

9) Demuestre que:

a) Si $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces: $|(x \pm y) - (x_0 \pm y_0)| < \varepsilon$.

b) Si $|x-x_0| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right\}$ y $|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$

10) Demuestre que:

a) Si $|2x-11| \leq 7$, entonces: $|3x-7| \leq 20$

b) Si $|x+3| < 4$, entonces: $|2x-5| > 3$

c) Si $|x-2| < 1$, entonces: $|x^2+3x-10| < 8$

d) Si $|x+6| < 2$, entonces: $\left|\frac{3x+10}{x-3}\right| < 2$

11) Dado el número $b > 0$, halla un valor $a > 0$ tal que: $|x-3| < a \Rightarrow |6x-18| < b$

Resp. $a = \frac{b}{6}$

12) Demuestre que:

a) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

b) $\left|\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{|x|+2}\right| \leq \frac{5}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\left|\frac{x-2}{x^2+9}\right| \leq \frac{|x|+2}{9}$

d) Si $|x| \leq 2$, entonces $\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 11$

CAPÍTULO II

FUNCIONES

1. Introducción

Definición

Una función es una regla o relación que asigna *a cada elemento* de un conjunto A un *único elemento* de un conjunto B.

Si la función se designa: f , entonces podemos escribir:

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow f(x) \quad x \in A, \quad f(x) \in B$$

El conjunto A se denomina **Dominio** de la función y escribimos: $Dom(f) = A$

El rango de la función se denota y define así:

$$Rg(f) = \{f(x) \in B \mid x \in Dom(f)\}^{(1)}$$

Las funciones que revisten especial importancia para nosotros y que constituirán la base para nuestra asignatura son las *funciones reales de variable real*, o sea, aquellas cuyo dominio y rango son subconjuntos de los números reales: $(Dom(f) \subseteq R) \quad (Rg(f) \subseteq R)$.⁽²⁾

Si f es una función real de variable real podemos escribir:

$$Dom(f) = \{x \in R \mid f(x) \in R\} \text{ y } Rg(f) = \{f(x) \in R \mid x \in Dom(f)\}$$

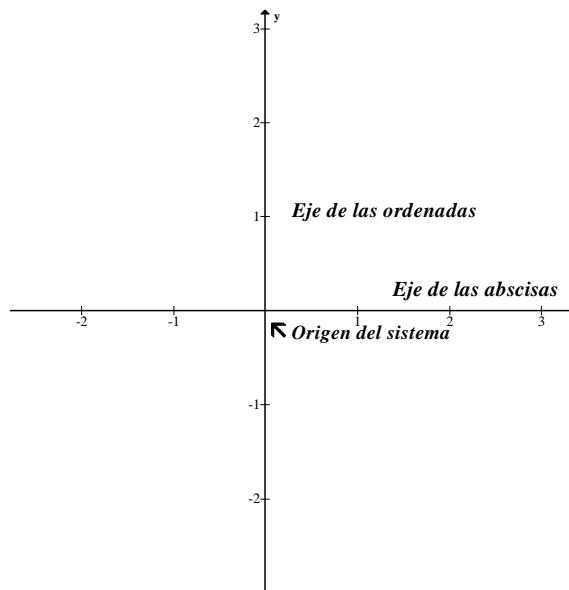
Sistema de coordenadas Cartesiano

La representación más usual de una función real de variable real es en un sistema de coordenadas cartesiano (sistema rectangular XY) como el que muestra la figura y el cual debes conocer bien (más adelante estudiaremos con mayor profundidad este punto).

Se trata de dos rectas perpendiculares, la recta horizontal la llamamos eje de las abscisas o eje de las x, y el vertical, lo llamamos, eje de las ordenadas o eje de la y. En cada eje, usamos un segmento unidad, y en ellos representamos al conjunto R. A cada punto P, del plano. Le hacemos corresponder un par de coordenadas (x, y) , que se obtienen así: por P trazamos una paralela al eje y, y leemos el valor que corresponde en el eje x, al punto de corte. Ese valor será la abscisa x del punto P. Luego, trazamos una paralela al eje x, por P. Leemos el valor que marca el punto de corte con el eje y, y esa será la ordenada y del punto P. Entonces identificamos el punto P con el par (x, y) , y escribimos: $P(x, y)$ o $P = (x, y)$.

⁽¹⁾ El símbolo \in se lee: PERTENECE A

⁽²⁾ El símbolo \subseteq se lee: SUBCONJUNTO O IGUAL



2. Gráfica de una función

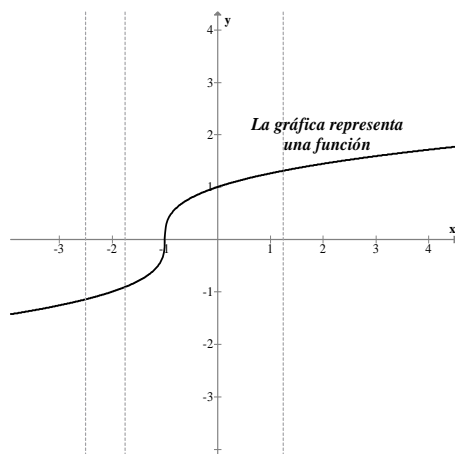
Definición

La **gráfica** de una función f es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ tal que $x \in \text{Dom}(f)$. A su representación en el plano se le denomina curva o lugar geométrico.

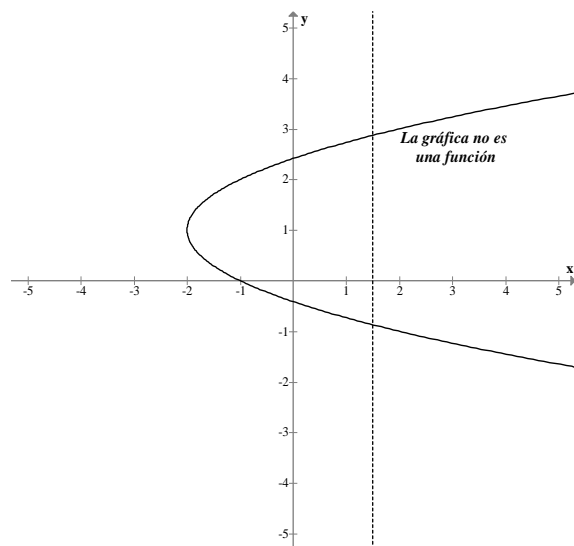
Escribimos:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) | x \in \text{Dom}(f)\}$$

Al representar una función f en el sistema cartesiano, los pares ordenados $(x, f(x))$ se representan como puntos en el plano, de manera que podemos concluir que la gráfica de una función es un subconjunto del plano cartesiano. No toda curva en un plano cartesiano representa una función por lo tanto, tiene sentido preguntarse ¿Cuándo una curva en un plano cartesiano representa una función?



Las rectas verticales (realmente, toda recta vertical) si INTERSECA a la curva lo hace a lo sumo una vez



La recta vertical (realmente, si alguna recta vertical) INTERSECA a la curva más de una vez.

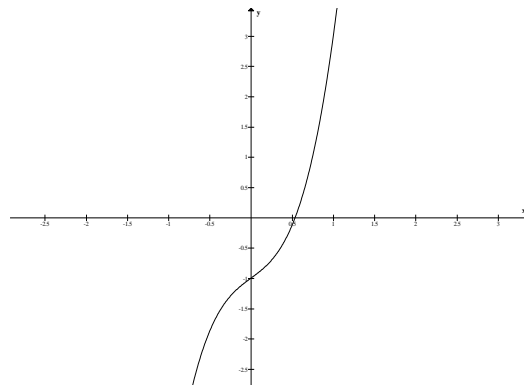
El reconocimiento gráfico de una función se hace aplicando el siguiente criterio:

- Si toda recta vertical que interseca a la curva lo hace a lo sumo una vez, dicha curva representa una función.
- Si al menos una recta vertical interseca a la curva en más de un punto, dicha curva no representa una función.

Ejemplo 1

La función $f(x) = 3x^3 + x - 1$ está definida en forma explícita. El $Dom(f)$ es claro que son todos los números reales, o sea, $Dom(f) = \mathbb{R}$. Observe además que, para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ las imágenes $f(x)$ también pertenecen a \mathbb{R} . Esta es una función real de variable real, y de la gráfica observamos que $Rg(f) = \mathbb{R}$.

La figura de la derecha muestra la gráfica de la función



Ejemplo 2

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{x+2}$, es claro observar que el dominio de esta función no admite el valor de $x = -2$, pues este valor genera una expresión no definida (ocurriría un denominador igual a “cero”).

El dominio de esta función lo podemos escribir:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \quad (3)$$

La figura de la derecha muestra la gráfica.

Para hallar el rango, despejamos x en $y = \frac{4}{x+2}$ obteniendo: $x = \frac{4-2y}{y}$, luego: $Rg(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = \sqrt{2x+5}$, encuentre el dominio y el rango de ella.

Para que f sea una función real, debe ocurrir que $f(x) = \sqrt{2x+5} \in \mathbb{R}$. O sea:

$$f(x) = \sqrt{2x+5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x+5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -5 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

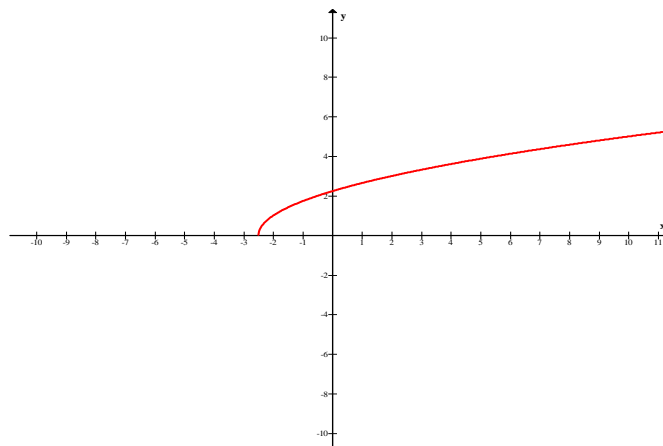
Luego: $Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2}\right\} = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Hallemos ahora el $Rg(f)$.

Sea $y \in [0, \infty)$, entonces, despejando x nos queda: $x = \frac{y^2 - 5}{2}$. O sea: $[0, \infty) \subset Rg(f)$ (1).

⁽⁴⁾ El símbolo \Leftrightarrow se lee: SI Y SÓLO SI

Asimismo, $y \in Rg(f) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{2x+5} \geq 0$, luego $y \in [0, \infty)$, y de aquí tenemos que: $Rg(f) \subset [0, \infty)$, (2). Por (1) y (2), concluimos que: $Rg(f) = [0, \infty)$. La gráfica de la función se muestra a continuación.



Ejemplo 4

Para la función dada a continuación, determine el dominio de $g(x) = \frac{3}{\sqrt{2-x^2}}$.

A fin de determinar el dominio debemos garantizar la condición básica de una función real, o sea:

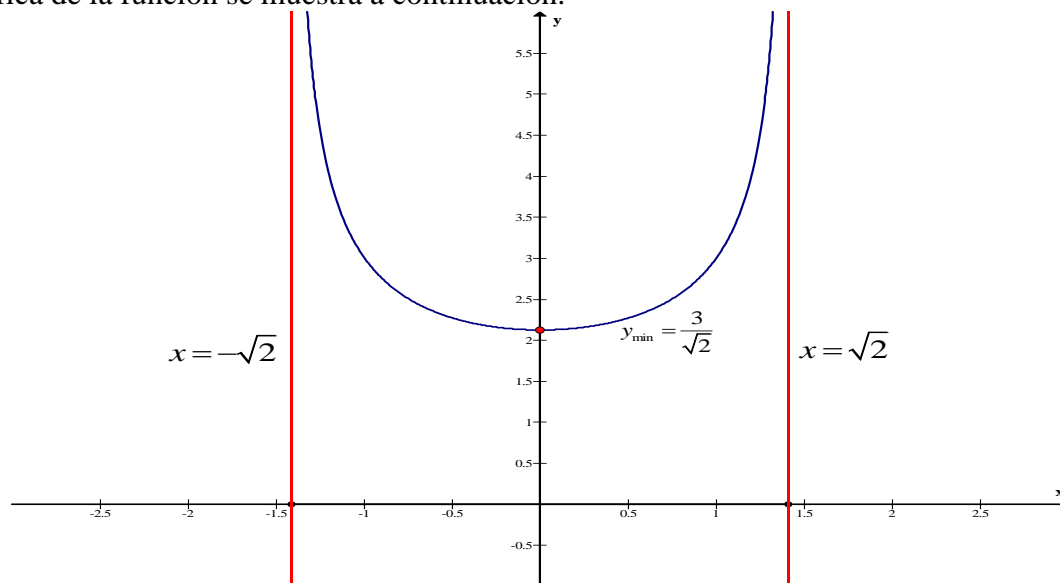
$$g(x) = \frac{3}{\sqrt{2-x^2}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x^2 > 0$$

Resolvemos la inecuación planteada anteriormente

$$2-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Luego $Dom(g) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. El rango es: $Rg(f) = \left[\frac{3}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ (¡Demuéstralo!)

La gráfica de la función se muestra a continuación.



Ejercicios propuestos

1) Para cada una de las funciones que se dan a continuación determina el dominio y rango.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 6}$

d) $j(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

e) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$

Resp.

a) $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $Rg(f) = R_0^+$; b) $Dom(g) = R$, $Rg(g) = [-\sqrt[3]{4}, +\infty)$

c) $Dom(h) = (-\infty, -1 - \sqrt{7}] \cup [-1 + \sqrt{7}, +\infty)$, $Rg(h) = [0, +\infty)$;

d) $Dom(j) = R$, $Rg(j) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$; e) $Dom(k) = (1, +\infty)$, $Rg(k) = (0, +\infty)$.

2) Sea f una función de R en R , dada por: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Calcule: $f(1)$, $f(-2)$; b) ¿Existe $f(-3)$?; c) Halle dominio y rango de f ;

d) Resuelva la ecuación: $f(x+1) = 1$;

e) Halle: $f(f(x))$ y $Dom(f \circ f)$; f) Halle $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

g) Demuestre que: $f(f(f(x))) = f(x) \quad \forall x \in [-2, 2]$

Resp.

a) $\sqrt{3}$, 0; b) $-3 \notin Dom(f)$; c) $Dom(f) = [-2, 2] = Rg(f)$

d) $x_1 = \sqrt{3} - 1$ y $x_2 = -\sqrt{3} - 1$; e) $|x|$; $Dom(f \circ f) = [-2, 2]$; f) $\frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 3}}{|x-1|}$

3) Halle dominio y rango para $g(x) = 2x^2 - 4x - 3$. Grafique g .

Resp. $Dom(g) = R$, $Rg(g) = [-5, +\infty)$

4) Despeje y en $y^2 + y + 2x = 0$. La expresión obtenida de la forma $y = f(x)$, ¿es función?

Resp. No, pues a valores de x , corresponden dos valores distintos de y .

5)(*) Halle el dominio, rango y gráfica de: $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 16}}$

Resp. $Dom(h) = (-\infty, -4) \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$; $Rg(h) = [0, 0.134] \cup [0.926, +\infty]$

6) Una editorial produce libros a Bs. 120 c/u. Si venden cada ejemplar a Bs. x , y se prevee vender $500 - x$ libros al mes. ¿Entre qué valores se deben vender los libros para dar ganancias mayores a Bs. 100 000?. ¿Qué pasaría si intentan venderlos a Bs. 600?

Resp. Entre 149 y 471 bolívares. Perderían Bs. 48 000 al mes (¡ la ambición rompe el saco!)

7) Dada $F(x) = |x-2| - |x| + 2$, exprese la como función definida seccionalmente (Vea la próxima sección). Dibuje su gráfica.

Resp. $F(x) = 4$ en $(-\infty, 0)$, $F(x) = -2x + 4$ en $[0, 2)$ y $F(x) = 0$ en $[2, +\infty)$

8) Halle el dominio, el rango y la gráfica de:

a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; b) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$; c) $(*)s(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x}$

Resp. a) $\text{Dom}(f) = \text{Rg}(f) = [-2, 2]$; b) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $\text{Rg}(g) = \mathbb{R}$;

c) $\text{Dom}(s) = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$; $\text{Rg}(s) = \left[-\sqrt{\frac{17}{8}}, 1\right)$

3. Funciones definidas seccionalmente

Consideremos las funciones $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ y los dominios respectivos los denominamos: $\text{Dom}(f_i)$, $i = 1, \dots, n$. Sea la función F definida así:

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x), & x \in \text{Dom}(f_2) \\ f_3(x), & x \in \text{Dom}(f_3) \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in \text{Dom}(f_n) \end{cases}$$

En este caso, se dice que F está seccionalmente definida.

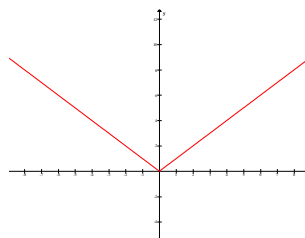
En cuyo caso es necesario que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. $\text{Dom}(F) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_n)$
2. $\text{Dom}(f_i) \cap \text{Dom}(f_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.⁽⁵⁾

Ejemplo 5

La función **valor absoluto** es una función seccionalmente definida cuyo dominio es \mathbb{R} y el rango es $[0, +\infty)$. En efecto:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



$$\text{Dom}(| \cdot |) = \mathbb{R}, \quad \text{Rg}(| \cdot |) = [0, +\infty).$$

La gráfica de la función se muestra a la derecha.

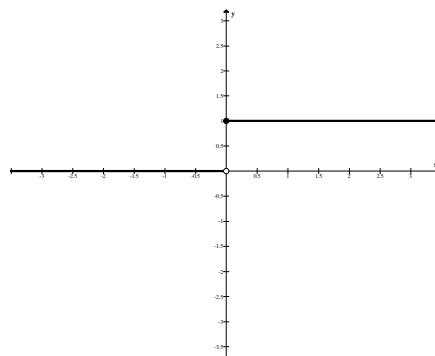
⁽⁵⁾ El símbolo \cap se lee: INTERSECCIÓN

Ejemplo 6

La función *escalón unidad* es otra de este tipo. En efecto:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$Dom(U) = \mathbb{R}$; $Rg(U) = \{0,1\}$. La gráfica se muestra a continuación.

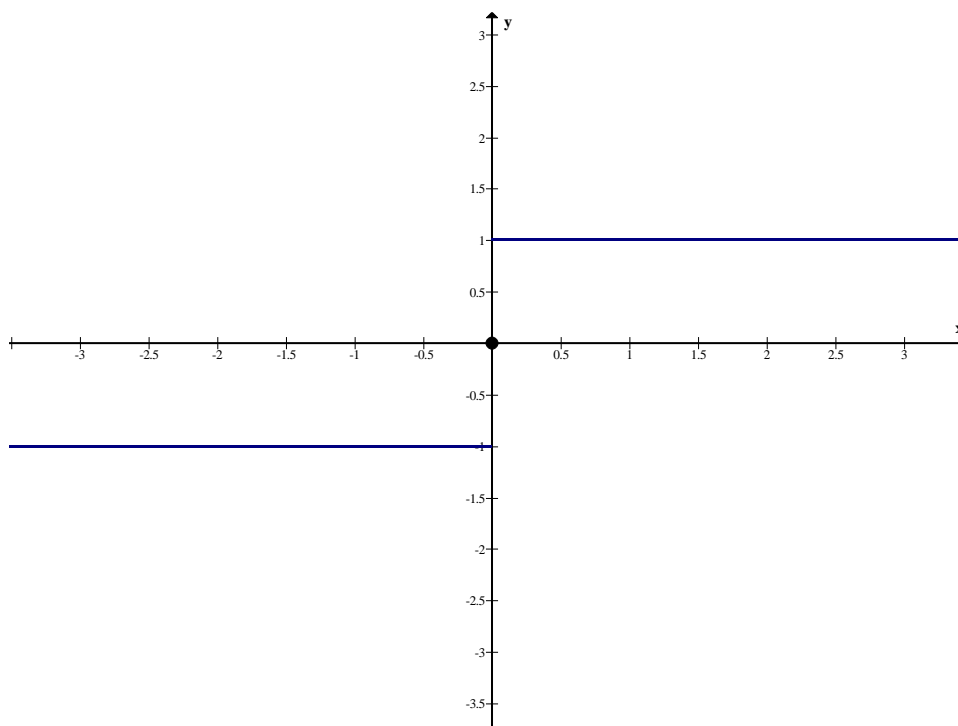


Ejemplo 7

La función *signo* es otro ejemplo de función seccionalmente definida.

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$Dom(sgn) = \mathbb{R}$; $Rg(f) = \{-1,0,1\}$. La gráfica está representada en la figura que sigue:



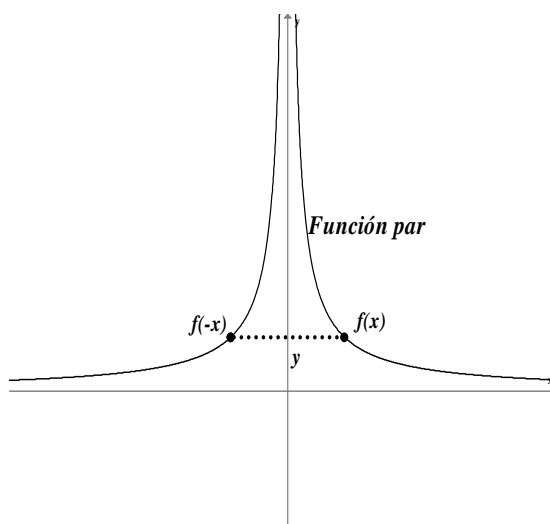
4. Funciones pares e impares

Definición

Una función f se dice que es **par** si $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y .

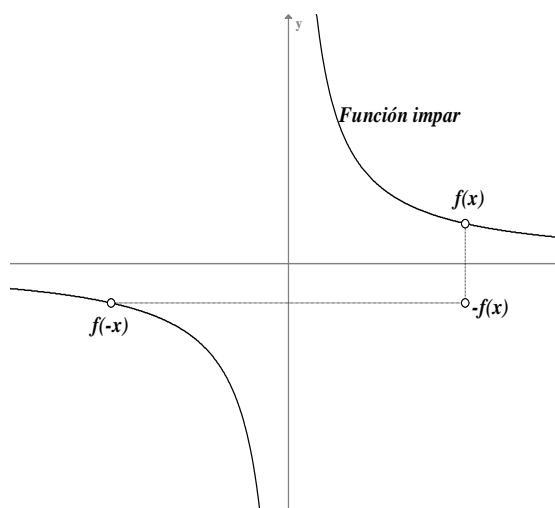
La gráfica siguiente corresponde a una función par.



Una función f se dice que es **impar** si $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen del sistema.

La gráfica siguiente corresponde a una función impar.



Ejemplo 8

La función $f(x) = |x|$ (valor absoluto) es una función par, y la gráfica de ella es simétrica respecto del eje y . En efecto: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

La función $f(x) = \text{sen } x$ es una función impar, ya que: $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$.

Por tanto, su gráfica es simétrica respecto del origen.

La función I_A de A en A definida por $I_A(x) = x, \forall x \in A$ recibe el nombre de **función identidad** sobre A . ¿Es par, impar o ninguna de las dos?

Ejercicios propuestos

1) De acuerdo a la definición de función par e impar, ¿cómo clasifica a la función signo?, ¿y a la función I_A ?

Resp. es impar, par.

2) Conteste brevemente lo siguiente:

a) Puede dar un ejemplo de una función que no sea ni par ni impar.

b) ¿Existe alguna función que sea par e impar simultáneamente?

c) Demuestre que la única función que es par e impar es la función constante nula.

d) La función $f(x) = x^3$ (cúbica), ¿es una función par o impar? Razone su respuesta.

Resp. a) $f(x) = x + 1$; b) $f(x) = 0$; d) impar.

3) Dibuje una gráfica que sea simétrica al eje X, y analice si la relación que define esa gráfica es ó no una función.

4) Determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos:

a) $f(x) = |x|$; b) $g(x) = 5x^3 - 7x$; c) $h(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$; d) $f(x) = \sin 2x$;

e) $g(x) = \sin(x^3)$; f) $h(x) = x + 1$

Resp. a) par; b) impar; c) par; d) impar; e) impar; f) no es par ni impar

5) Si f es par (impar), en su dominio, ¿cómo es $-f$?

Resp. par (impar).

6) ¿Qué condición debe cumplir el dominio de una función par (impar)?

Resp. $x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow -x \in \text{Dom}(f) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$

5. Funciones monótonas (crecientes y decrecientes)

Definición

Una función f se dice que es **creciente** en un intervalo I , si para $x_1 < x_2$ en dicho intervalo ocurre que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f se dice que es **decreciente** en un intervalo I , si para $x_1 < x_2$ en dicho intervalo ocurre que $f(x_1) > f(x_2)$.

Es claro que f es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente, como se ve en el ejemplo 9

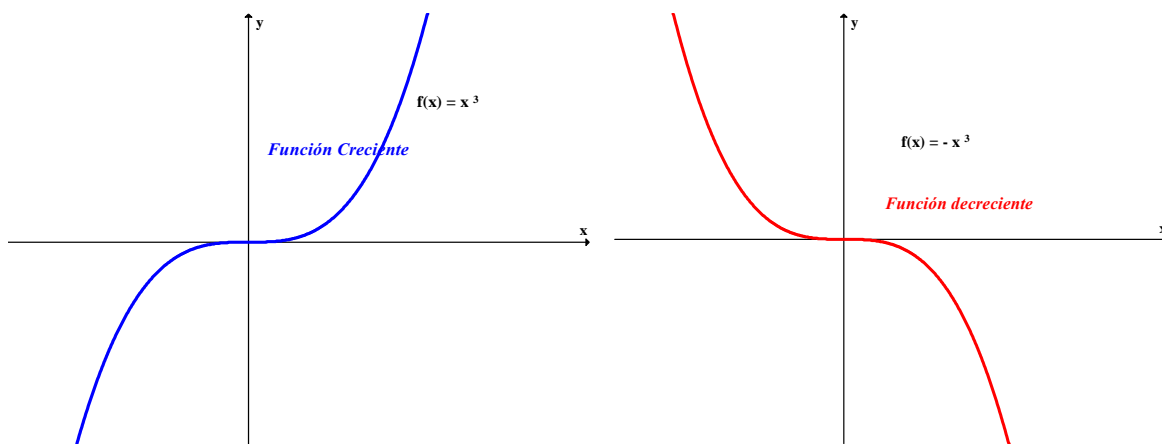
Ejemplo 9

a) $f(x) = x^3$ es una función creciente en \mathbb{R} .

b) $g(x) = -x^3$ es una función decreciente en el intervalo en \mathbb{R} .

c) $h(x) = x^2$ es creciente en $[0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

La suma de dos funciones crecientes en dominio A , también es creciente.



Ejercicios propuestos

1) Para la función $f(x) = x^4$, determine en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente. (Usa la definición de función creciente y decreciente).

Resp. crece en $[0, \infty)$, decrece en $(-\infty, 0)$.

2) Para la función $g(x) = \sin x$, determine los intervalos donde crece y aquellos donde decrece. (Use la gráfica de la función seno y tome como dominio a $[0, 2\pi]$).

Resp. crece en $[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, decrece en $(\pi/2, 3\pi/2)$.

3) Para la función $h(x) = \sqrt{1-x}$, determine los intervalos donde crece y aquellos donde decrece. (Usa la definición de función creciente y decreciente).

Resp. $\text{Dom}(h) = (-\infty, 1]$, decreciente en su dominio

6. Tipos de funciones

a) La función $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$ se denomina **función constante**.⁽⁶⁾

Ejemplo 10

Las funciones $f(x) = 5$; $g(x) = -42$; $N(x) = 0$, son constantes. (Dibuje estas funciones en el sistema cartesiano, indicando adecuadamente los ejes).

b) La función $f(x) = x^a$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $a \geq 0$; se denomina **función potencia**. Observe que cuando $a = 0$, la función f es la función constante: $f(x) = 1$

Ejemplo 11

⁽⁶⁾ \mathbb{R} :CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Las funciones: $P(x) = x^3$; $g(t) = t^{10}$; $N(z) = z^4$ son ejemplos de funciones potencia. (Grafique estas funciones en el sistema cartesiano, indicando adecuadamente los ejes).

c) La función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ se denomina función **polinomio de grado n**. Los elementos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son números reales y se denominan **coeficientes del polinomio**. Cuando $n = 0$, el polinomio es de grado cero, y es una función constante, o sea: $P(x) = a_0$. Claramente, tenemos que el dominio de una función polinomio es \mathbb{R} .

Ejemplo 12

1) $L(x) = ax + b$ es la función lineal o afín (polinomio de primer grado);

Ejemplo: $M(x) = 2x + 5$, $L(x) = -x - \pi$

2) $P(x) = ax^2 + bx + c$ función cuadrática (polinomio de segundo grado);

Ejemplo: $P(x) = \sqrt{2}x^2 - x + 5$, $Q(x) = 3 - 10x^2$.

3) $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, es una función cúbica (polinomio de tercer grado).

Ejemplo: $C(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - \frac{1}{4}$

d) La función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios, se denomina **función racional**.

Observamos que el dominio de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$$

Ejemplo 13

Las siguientes funciones son funciones racionales:

$$f(x) = \frac{5x^3 - 2}{x^2 - 2x + 1}; \quad g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$$

Observemos que: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

e) Una **función algebraica** es aquella que se obtiene mediante un número finito de operaciones algebraicas, a partir de polinomios.

Ejemplo 14. Las funciones $f(x) = \frac{\sqrt{3x^3 + 2x}}{(x^2 - 1)^3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{-x^2 + x - 2}$ son algebraicas, pues

según la definición, ellas se han obtenido mediante un número finito de operaciones algebraicas sobre el conjunto de polinomios. Para la función algebraica el dominio debe calcularse de manera tal que todas las funciones que intervienen, estén definidas. (¡Halle el dominio de las dos funciones que se dan como ejemplo!)

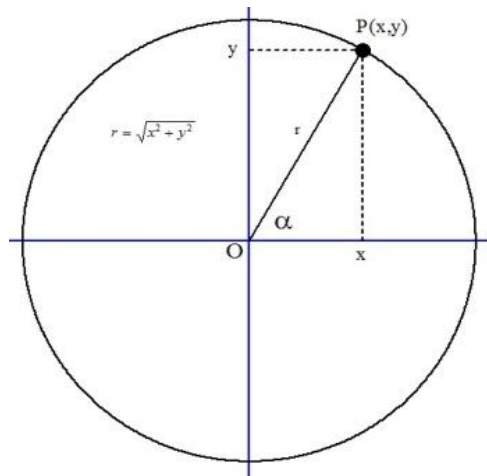
f) Funciones trigonométricas

Estudiaremos las siguientes funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Función seno

Sea un punto $P = (x, y)$, y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y llamemos α al ángulo que forma el segmento OP con el semieje ox. Definimos como **seno de α** , y lo denotamos por $\text{sen } \alpha$, a la función:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$$



Observe que si α da **vueltas completas** en un sentido o en otro, las coordenadas de P son las mismas, por lo tanto tenemos:

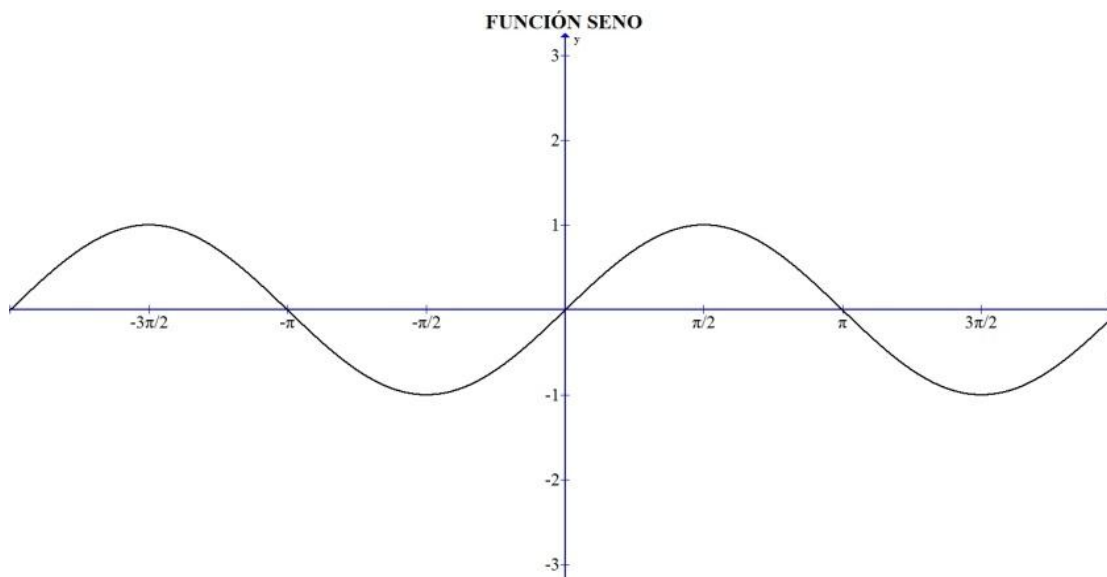
$\text{sen}(\alpha + k2\pi) = \text{sen } \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Ahora como $|y| \leq r$, entonces: $-r \leq y \leq r$, luego:
 $-1 \leq \text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \leq 1$. De manera que $\text{Dom}(\text{sen}) = \mathbb{R}$ y $\text{Rg}(\text{sen}) = [-1, 1]$.

Observe de la definición, que: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$, o sea que *sen* es una función impar.

A continuación mostramos una pequeña tabla de valores del seno.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\text{sen } \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0

Gráfica de la función seno



Función coseno

De nuevo sea $P = (x, y)$ y sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces definimos como coseno de un ángulo alfa, y lo denotamos por $\cos \alpha$, a la siguiente función:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

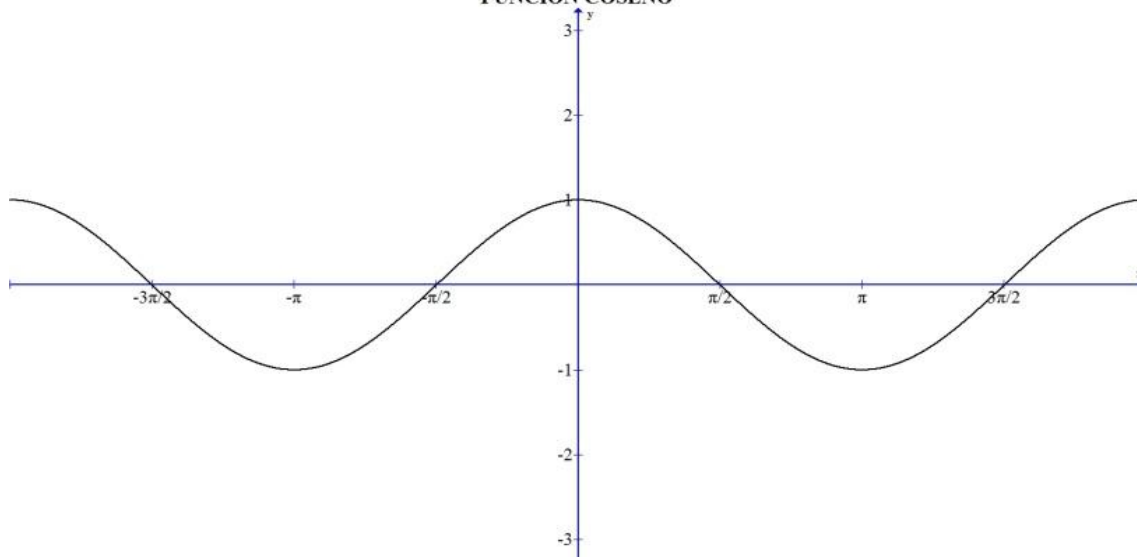
Entre otras propiedades, tenemos:

- a) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$; b) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (función par);
c) $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$, $\text{Rg}(\cos) = [-1, 1]$

Una pequeña tabla de valores de $\cos \alpha$ es la siguiente:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	1

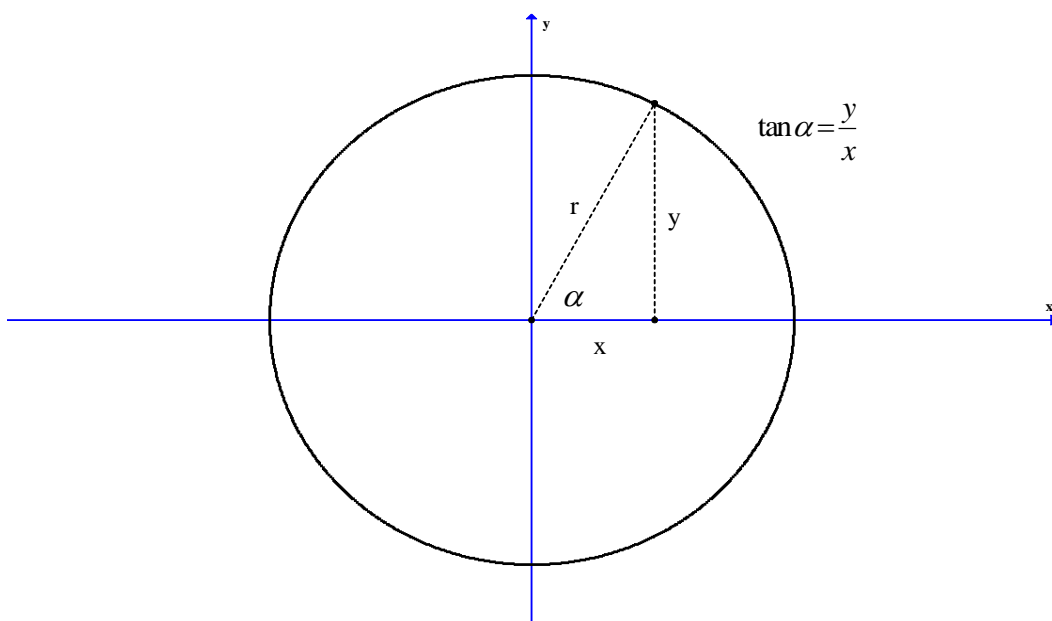
FUNCIÓN COSENO



Función tangente

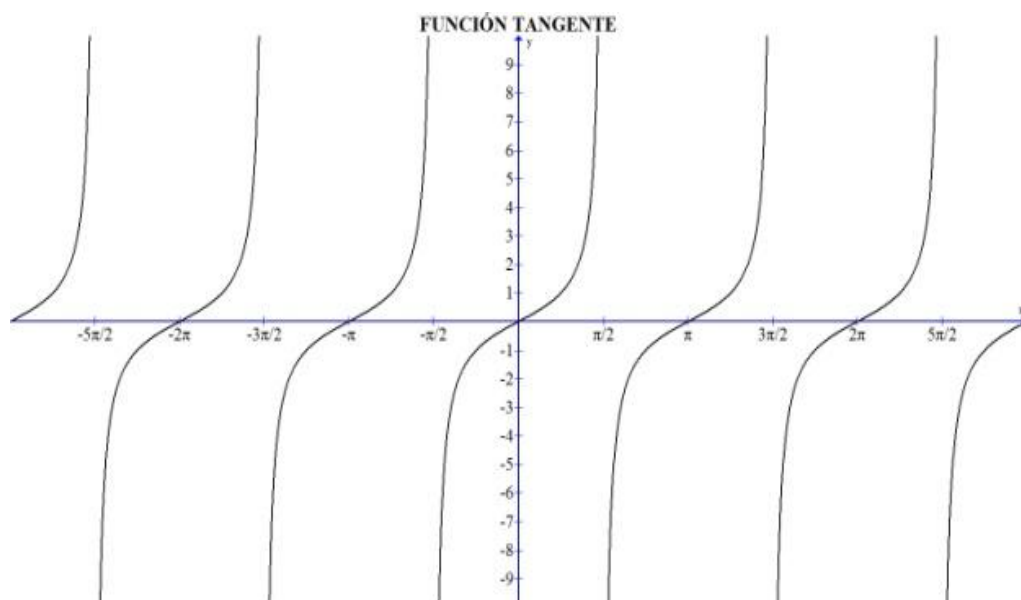
La función tangente se denota por \tan , y se define como sigue. Sea $P = (x, y)$, uniendo P con el origen tenemos un triángulo rectángulo, cuyo cateto opuesto al ángulo α es y , mientras que el cateto adyacente es x , entonces definimos como tangente del ángulo α , al cociente:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$



Observemos que: $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Por lo tanto \tan no está definida para aquellos valores de α tales que $\cos \alpha = 0$. Siendo estos: $\alpha = (2k+1)\pi/2$, por tanto, el dominio y rango de \tan son: $\text{Dom}(\tan) = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$, $\text{Rg}(\tan) = \mathbb{R}$.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE



Algunas identidades trigonométricas fundamentales

a) (cotangente) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; (secante) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$; (cosecante) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (**Teorema fundamental de la Trigonometría**)

c) $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$

d) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

e) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

f) $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$; $\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$

g) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

h) $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

i) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

Ejercicios propuestos

1) Halle dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2$; b) $g(x) = x^2 + 4$; c) $h(x) = x^3 + 1$; d) $s(x) = \frac{x-1}{x+3}$; e) $l(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

f) $(*)f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4x+3}}$; g) $f(x) = |x-1| + |3x+2|$

Resp.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rg}(f) = \{-2\}$

b) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\text{Rg}(g) = [4, +\infty)$

c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$, $\text{Rg}(h) = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom}(s) = \mathbb{R} - \{-3\}$, $\text{Rg}(s) = \mathbb{R} - \{1\}$

e) $\text{Dom}(l) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\text{Rg}(l) = [0, 1)$

f) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup [-2, -1) \cup [2, +\infty)$, $\text{Rg}(f) = [0, +\infty) - \{1\}$

g) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; $\text{Rg}(f) = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

2) Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos. En cada caso, halle su dominio.

a) $f(x) = [x]$ (función parte entera); b) $g(x) = \text{sgn}(x)$ (signo de x);

c) $h(x) = |x|$; d) $f(x) = \text{sgn}(x^2)$; e) $h(x) = |x+1|$

f) $l(x) = \frac{|x|+1}{[x]^2}$; g) $s(x) = \sin 3x$

Resp. a) no es par ni impar, Dom=R; b) idem; c) par, Dom=R; d) par, Dom=R;
e) no es par ni impar, Dom = R; f) par, Dom = $R - [0,1)$; g) impar, Dom = R.

3) Hallar $\cos(\alpha - \beta)$ (Sin hallar α y β), sabiendo que $\sin \alpha = 2/3$ con α perteneciente al primer cuadrante; y $\cos \beta = -1/5$, con β en el segundo cuadrante.

Resp. $\frac{-\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{15}$

4) Un terreno con forma rectangular se cerca con 240 m de alambre, en tres hileras. Si el ancho del terreno es x, halle el rango de valores de x (Suponemos que el largo y ancho del terreno deben ser mayores o iguales que 1 m). Haz la gráfica de la función que representa el área y determina en forma aproximada el valor del ancho que hace el área máxima.

Resp. Rango de la x = $[1, 39]$; Área máxima si x = 20 m.

5) Demuestre que: $\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$. ¿En qué casos se toma raíz positiva?

Resp. Si α está en el I o II cuadrante, se toma positivo. En III y IV, negativo.

6) La función: $s(x) = x - [x]$, recibe el nombre de función “**parte decimal**”:

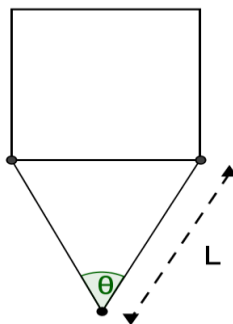
a) Halle $s(1)$, $s(2,3)$, $s(-4,3)$, $s(0)$; b) Encuentre dominio y rango de s; c) Haz su gráfica.

Resp. a) 0; 0,3; 0,7; 0; b) Dom(s) = R; Rg(s) = $[0,1)$

7) Halle la función afín $f(x) = ax + b$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $\forall x, y \in R$ y $f(-1) = 4$.

Resp. $f(x) = -4x$.

8) Calcule el área de la figura dada a continuación, en función de L y de θ .



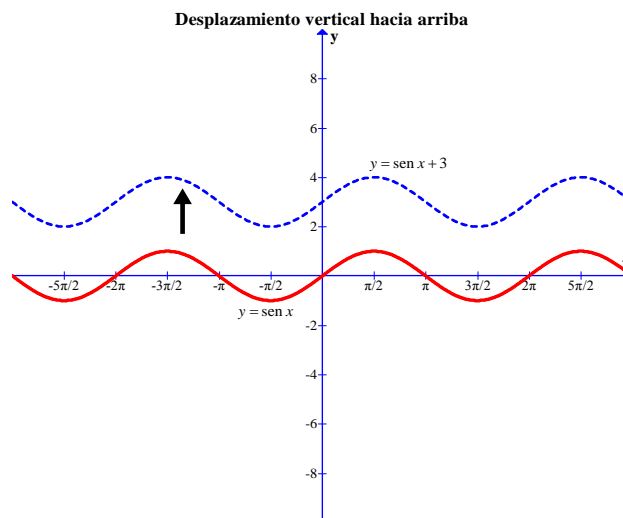
Resp. $A = L^2(2 - \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta)$

7. Transformación de funciones

Desplazamiento vertical hacia arriba

Sea f una función. La gráfica de $y = f(x) + C$, ($C > 0$) es la misma gráfica de $y = f(x)$ desplazada C unidades hacia arriba.

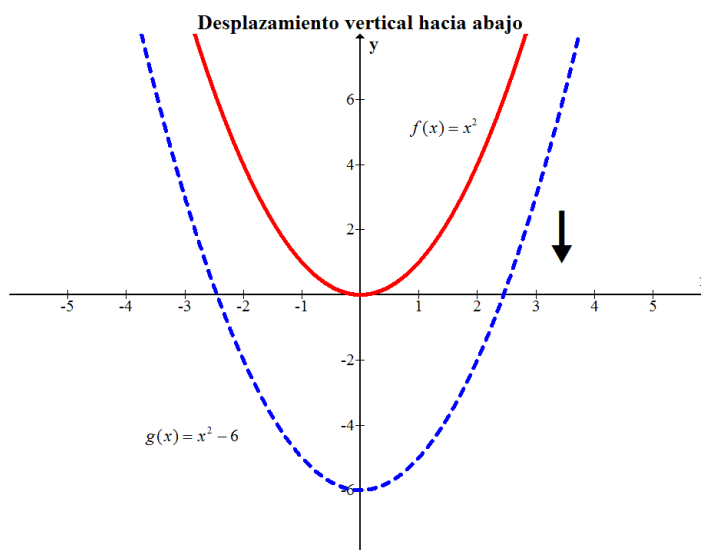
La gráfica $y = \operatorname{sen} x + 3$ es un desplazamiento vertical, hacia arriba, de 3 unidades de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.



Desplazamiento vertical hacia abajo

Sea f es un función. La gráfica de $y = f(x) - C$, ($C > 0$) es la misma gráfica de $y = f(x)$ desplazada C unidades hacia abajo.

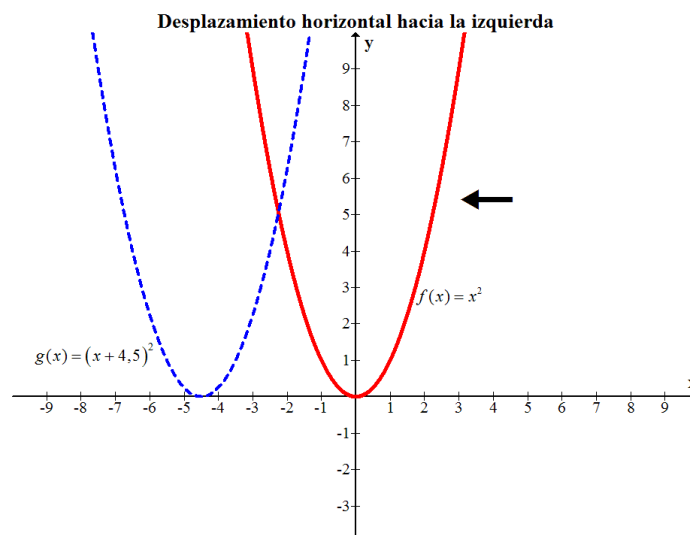
La gráfica de $g(x) = x^2 - 6$ obtiene con un desplazamiento vertical hacia abajo de 6 unidades de la gráfica de $f(x) = x^2$.



Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

Sea f es un función. La gráfica de $y = f(x + C)$, ($C > 0$) es la misma gráfica de $y = f(x)$ desplazada C unidades a la izquierda.

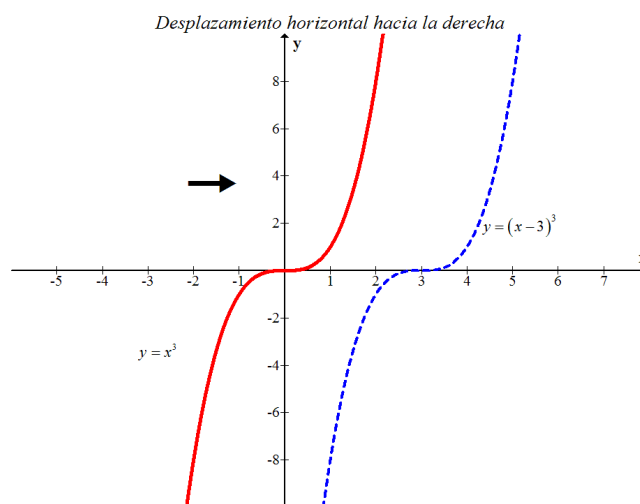
La gráfica de $g(x) = (x + 4,5)^2$ es un desplazamiento horizontal hacia la izquierda de 4,5 unidades de la gráfica de $f(x) = x^2$.



Desplazamiento horizontal hacia la derecha

Sea f es un función. La gráfica de $y = f(x - C)$, ($C > 0$) es la misma gráfica de $y = f(x)$ desplazada C unidades a la derecha.

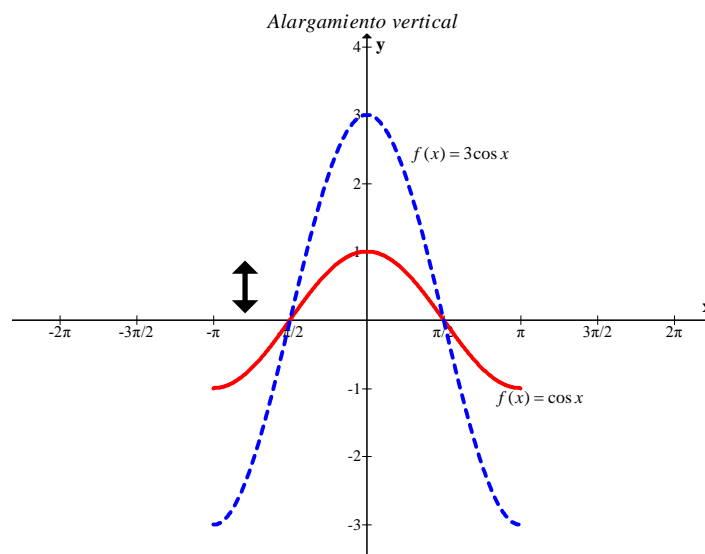
La gráfica de $y = (x - 3)^3$ se obtiene con un desplazamiento horizontal hacia la derecha de 3 unidades de la gráfica de $y = x^3$.



Alargamiento vertical

Sea f es un función. La gráfica de $y = Cf(x)$, ($C > 1$) es un alargamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$ afectada por el factor C .

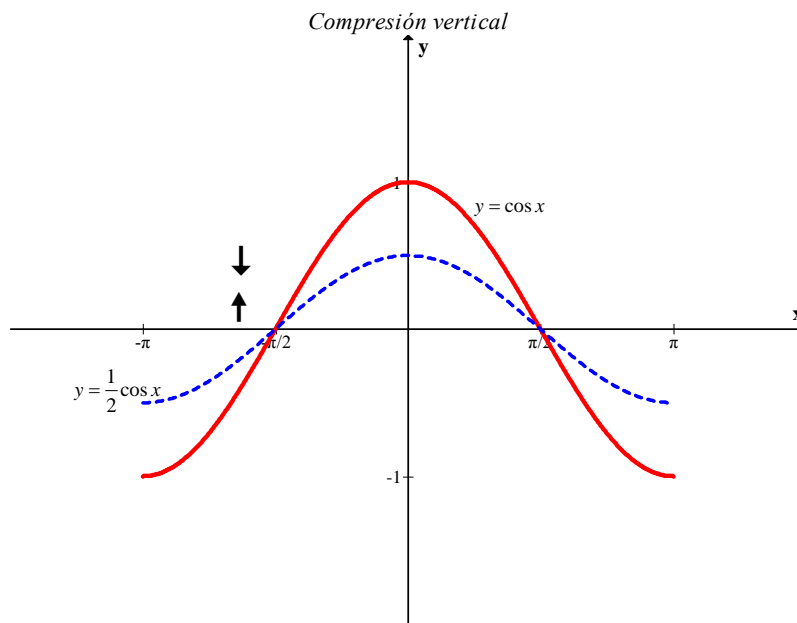
La gráfica de $g(x) = 3 \cos x$ es un alargamiento vertical de factor 3 de la gráfica de $f(x) = \cos x$.



Compresión vertical

Sea f es un función. La gráfica de $y = Cf(x)$, ($0 < C < 1$) es una compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$ afectada por el factor C .

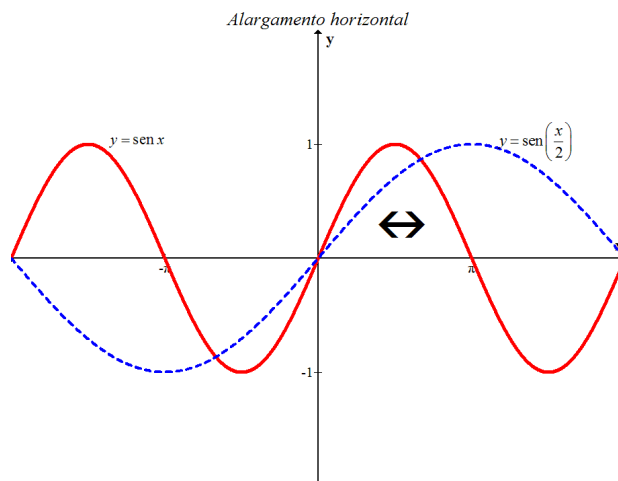
La gráfica de $y = \frac{1}{2} \cos x$ es una compresión vertical de factor $\frac{1}{2}$ de la gráfica de $y = \cos x$.



Alargamiento horizontal

Sea f es un función. La gráfica de $y = f(Cx)$, ($0 < C < 1$) es un alargamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ afectada por el factor C .

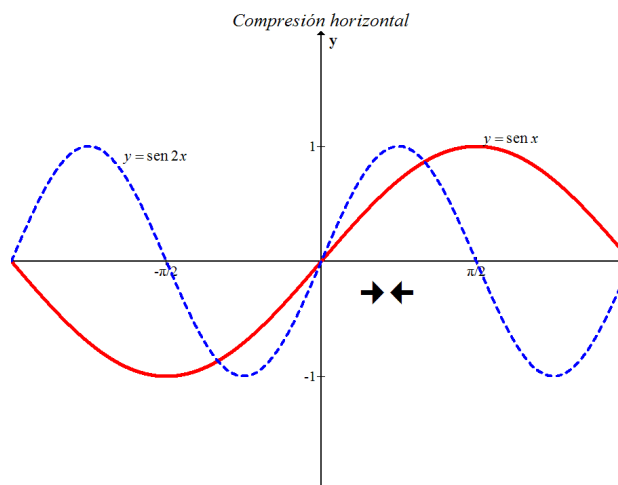
La gráfica de $y = \text{sen} \left(\frac{1}{2}x \right)$ es un alargamiento horizontal de factor $\frac{1}{2}$ de la gráfica de $y = \text{sen } x$



Compresión horizontal

Sea f es un función. La gráfica de $y = f(Cx)$, ($C > 1$) es una compresión horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ afectada por el factor C .

La gráfica de $y = \text{sen } 2x$ es una compresión horizontal de factor 2 de la gráfica de $y = \text{sen } x$.



¿Qué representan las funciones que se dan a continuación relacionadas con la gráfica de $y = f(x)$?

$$y = f(-x) \quad \text{e} \quad y = -f(x)$$

8. Combinación de funciones

Sean f y g funciones y $Dom(f), Dom(g)$ sus respectivos dominios.

La **suma de funciones** es otra función que se denota $f + g$ y se define así:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

La **diferencia de funciones** es otra función que se denota $f - g$ y define así:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ y } Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

El **producto de funciones** es otra función que se denota $f \cdot g$ y se define así:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ y } Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

El **cociente de funciones** es otra función que se denota $\frac{f}{g}$ y se define así:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y } Dom(f/g) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$$

Ejemplo 15

Dadas las funciones $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$, $h(x) = x + 3$, hallemos cada una de las funciones siguientes y determinemos sus respectivos dominios, aplicando la definición dada para estos:

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) $f \cdot g$; 4) f/g

Veamos, entonces:

$$1) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 3 + \sqrt{x - 1}$$
$$Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g).$$

El $Dom(f) = \mathbb{R}$, y para hallar $Dom(g)$, procedemos así:

$$g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow Dom(g) = [1, +\infty)$$

Luego,

$$\boxed{Dom(f + g) = \mathbb{R} \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)}$$

$$2) (f - h)(x) = f(x) - h(x) = x - 3 - (x + 3) = -6$$

$$Dom(f - h) = Dom(f) \cap Dom(h) \text{ y } Dom(f) = Dom(h) = \mathbb{R}$$

Lu ego:

$$\boxed{Dom(f - h) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}}$$

$$3) (f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x) = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

$$\boxed{Dom(f \cdot h) = Dom(f) \cap Dom(h) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}}$$

$$4) \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}}$$

$$Dom(f/g) = Dom(f) \cap (Dom(g) - \{x \in R \mid g(x) = 0\}) = R \cap ([1, +\infty) - \{1\}) = R \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$$

9. Composición de funciones

Sean f y g funciones, siendo $Dom(f)$ y $Dom(g)$ sus respectivos dominios.

La **función compuesta** $f \circ g$ es otra función que se define así:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

siendo su dominio:

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f)\}$$

La **función compuesta** $g \circ f$ es otra función que se define así:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

siendo su dominio:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \mid f(x) \in Dom(g)\}$$

En general $f \circ g \neq g \circ f$, sin embargo existen funciones tales que $f \circ g = g \circ f$.

Más adelante veremos algunas funciones que cumplen con esta condición.

Ejemplo 16

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{1 - x}$. Determine $g \circ f$ y $Dom(g \circ f)$.
Hallemos primero $g \circ f$ y luego $Dom(g \circ f)$.

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Por lo tanto:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Determinemos el $Dom(g \circ f)$

Por definición sabemos que $Dom(g \circ f) = \left\{ \underbrace{x \in Dom(f)}_{(1)} \mid \underbrace{f(x) \in Dom(g)}_{(2)} \right\}$

Para encontrar la condición (1) basta determinar el $Dom(f)$

Como $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, Luego: $Dom(f) = S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (Ejercicio)

Para que se satisfaga la condición (2) debemos determinar $Dom(g)$, el cual es $Dom(g) = (-\infty, 1]$ (Ejercicio).

La condición (2) impone que $f(x) \in Dom(g)$, así que procedemos como sigue:

$$f(x) \in \text{Dom}(g) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} \in (-\infty, 1] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] = S_2 \quad (\text{Ejercicio})$$

Pero: $x \in \text{Dom}(f) = S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Luego:

$$\text{Dom}(g \circ f) = S_1 \cap S_2 = ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \cap ([-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

(Grafique S_1 y S_2 , e intersecte).

Ejemplo 17

Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ y $g(x) = x^2 - 2$ encuentre la fórmula para $f \circ g$ y el $\text{Dom}(f \circ g)$.

Solución:

Por definición $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = \frac{1}{(x^2 - 2)^2 - 1} = \frac{1}{x^4 - 4x^2 + 3}$

Determinemos el dominio. Así, por definición tenemos:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \left\{ \underbrace{x \in \text{Dom}(g)}_{(1)} \mid \underbrace{g(x) \in \text{Dom}(f)}_{(2)} \right\}$$

Para la condición (1) debemos determinar el $\text{Dom}(g)$

$g(x) = x^2 - 2$ es una función polinómica, por lo tanto, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} = S_1$.

Para la condición (2) necesitamos el $\text{Dom}(f)$

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ es una función racional, por lo tanto, el dominio debe excluir todos los valores que anulan el denominador, o sea, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Para que se satisfaga la condición (2) debe cumplirse que $g(x) \in \text{Dom}(f)$, o sea,

$$g(x) \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x^2 - 2 \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \neq -1 \quad \text{y} \quad x^2 - 2 \neq 1$$

Si resolvemos las ecuaciones $x^2 - 2 = -1$ y $x^2 - 2 = 1$ encontraremos los valores que debemos excluir.

$$x^2 - 2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

Por lo tanto, para que se satisfaga la condición (2) deben excluirse los valores $x = 1$, $x = -1$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$.

De manera que $S_2 = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$.

$$\text{Así } \text{Dom}(f \circ g) = \left\{ \underbrace{x \in \text{Dom}(g)}_{(1)} \mid \underbrace{g(x) \in \text{Dom}(f)}_{(2)} \right\} = S_1 \cap S_2$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = R \cap \left[R - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\} \right] = R - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$$

Ejercicios propuestos

1) Demuestre que:

a) Si f y g son pares, entonces $f \pm g$, $f \cdot g$ y f / g son funciones pares.

b) ¿Qué se cumple de lo anterior, si f y g son impares?;

c) ¿Y si f es par y g impar?

Resp.

a) todas son pares en su dominio;

b) $f \pm g$ es impar, pero $f \cdot g$ y f / g son pares;

c) No se puede concluir que $f \pm g$ sea par o impar; $f \cdot g$ y f / g son impares.

2) Halle $f + g$, $f \cdot g$ y f / g , así como su dominio para:

a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = \frac{1}{x-4}$

Resp.

a) $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f \cdot g) = [-4, -2] \cup [2, +\infty)$, $\text{Dom}(f / g) = [-4, -2] \cup (2, +\infty]$

b) $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f / g) = [0, +\infty)$

c) $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f / g) = [3, +\infty) - \{4\}$

3) ¿Cómo es $f \circ g$, si : a) f y g son pares; b) f y g son impares; c) Si una es par y la otra impar?;

d) Y si f es una función cualquiera y g es par, ¿qué sucede con $g \circ f$?

Resp. a) par; b) impar; c) par; d) par.

4) Con las funciones dadas en el ejemplo 18, calcula $g \circ f$ y $\text{Dom}(g \circ f)$.

Resp. $\text{Dom}(g \circ f) = R - \{-1, 1\}$

5) Idem Para el ejemplo 17 con $f \circ g$.

Resp. $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 0]$

6) Sean $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 2$. Halle $g \circ f$ y su dominio.

Resp. $(g \circ f)(x) = x - 4$; $\text{Dom} = [2, +\infty)$

7) Halle $f \circ f$ y su dominio, en los siguientes casos: a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $f(x) = \sqrt{1-x}$; c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Resp. a) $\sqrt{x^2-2}$, $Dom = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$; b) $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$,
 $Dom = [0,1]$; c) $|x|$, $Dom = [-2,2]$.

8) Demuestre que: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (Asociatividad de la composición)

*9) Denotamos a $f \circ f$ por $f^{(2)}$, y a f por $f^{(1)}$. Y definimos: $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f$. Demuestre que:
 $f^{(n)} \circ f^{(m)} = f^{(n+m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Sugerencia: haga inducción sobre m.

*10) Halle $f^{(n)}$, para $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Resp. Si n es par: $f^{(n)}(x) = |x|$; si n es impar: $f^{(n)}(x) = f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

10. Función Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Una función f se dice **inyectiva** sii para $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene que $x_1 = x_2$, con $x_1, x_2 \in Dom(f)$. (También podemos decir que f es inyectiva sii $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Es claro que si algunos elementos distintos del dominio tienen iguales imágenes, la función en cuestión no es inyectiva.

Reconocimiento gráfico de una función inyectiva

De lo anterior concluimos que una función inyectiva se puede reconocer a través de su gráfica, por cuanto toda recta horizontal si la interseca lo hace a lo sumo una vez. Por el contrario, si al menos una recta horizontal interseca la curva más de una vez la función en cuestión no es inyectiva.

Asimismo, diremos que una función f de A en B es **sobreyectiva** sii $Rg(f) = B$.

De lo anterior se deduce que toda función que se defina del $Dom(f)$ en el $Rg(f)$, es claramente sobreyectiva.

Por último tenemos que una función f de A en B es **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva. Luego, de acuerdo a la consideración anterior, toda función inyectiva es biyectiva si se toma el $Rg(f)$ como conjunto de llegada B .

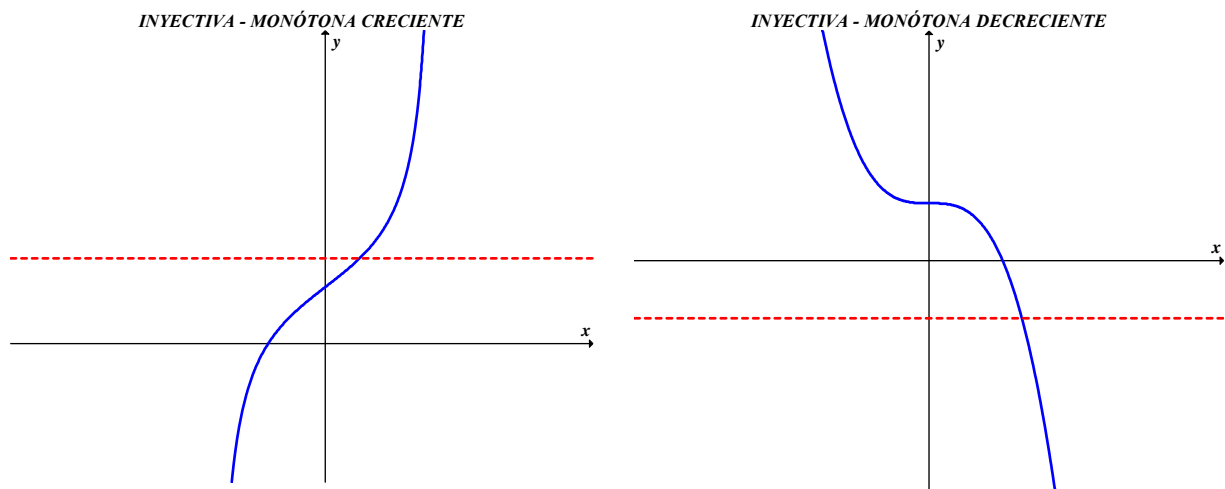
Relación entre la inyectividad y la monotonía

Teorema 1.

Toda función monótona creciente f (decreciente) en un intervalo, es inyectiva en dicho intervalo.

Demostración

Sea f una función creciente, y sean a y b en el $Dom(f)$ tales que $a \neq b$, luego $a < b$ ó $a > b$. Si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$; y si $a > b$, se tiene que: $f(a) > f(b)$. O sea en cualquier caso, si $a \neq b$, entonces: $f(a) \neq f(b)$. De manera que f es inyectiva. (¡Demuestre el teorema si f es decreciente!).



11. Función inversa

Sea f una función con $Dom = A$, y $Rg = B$. Llamamos relación inversa de f , y lo denotamos por f^{-1} , a una relación que cumple con: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Nos planteamos el hecho siguiente, si f es función, ¿lo será también f^{-1} ? Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, y sea f una función definida así: $f(1) = f(2) = a$ y $f(3) = b$, entonces f^{-1} no es función, porque al elemento a , le corresponden dos valores: el 1 y el 2.

Observando lo anterior es lógico preguntarse, ¿cuándo una función f es tal que f^{-1} también es función?. Esta pregunta, es respondida en el siguiente teorema.

Teorema 2

Sea f una función con dominio A y rango B . Entonces f es inyectiva de A sobre B , si y sólo si f^{-1} es función de B en A . Además si f es inyectiva de A sobre B , entonces f^{-1} también es inyectiva de B sobre A .

Demostración

Supongamos primero que f es una función inyectiva de A sobre su rango B , y supongamos que existan y en B y x_1, x_2 en A tales que $f^{-1}(y) = x_1$ y $f^{-1}(y) = x_2$, entonces por definición de relación inversa, tenemos: $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$, o sea: $f(x_1) = f(x_2)$. Pero f es inyectiva, luego: $x_1 = x_2$, de manera que f^{-1} es función.

Recíprocamente, si f^{-1} es función, y $x_1, x_2 \in A$ son tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$, entonces: $f^{-1}(y) = x_1$ y $f^{-1}(y) = x_2$, pero como f^{-1} es función, debe tenerse que $x_1 = x_2$, o sea f es inyectiva.

Dejamos como **ejercicio** el probar la segunda parte del teorema.

Nota importante

La notación f^{-1} la usamos exclusivamente para función inversa.

Relación entre f y f^{-1}

Por la definición sabemos $Dom(f^{-1}) = Rg(f)$, $Rg(f^{-1}) = Dom(f)$

Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$, luego aplicando f en ambos miembros de $y = f^{-1}(x)$ tenemos:

$$f(y) = f(f^{-1}(x))$$

$$x = f(f^{-1}(x)), \forall x \in Dom(f^{-1})$$

$$x = (f \circ f^{-1})(x) = I_B(x), \forall x \in Dom(f^{-1})$$

Luego: $f \circ f^{-1} = I_B$ (Función identidad sobre B)

Si $x = f(y)$ entonces aplicando f^{-1} en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(f(y))$$

$$y = f^{-1}(f(y)), \text{ con } y \in Dom(f)$$

$$y = (f^{-1} \circ f)(y), \text{ con } y \in Dom(f)$$

$$y = I_A(y)$$

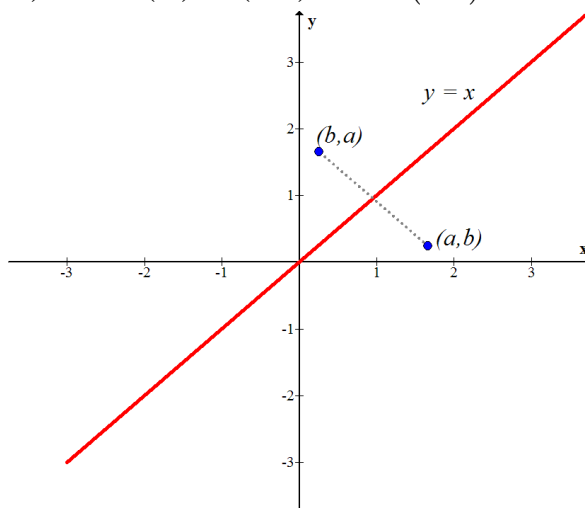
Luego: $f^{-1} \circ f = I_A$

Simetría de la gráfica de f y la de f^{-1}

De acuerdo a la definición de función inversa, tenemos que:

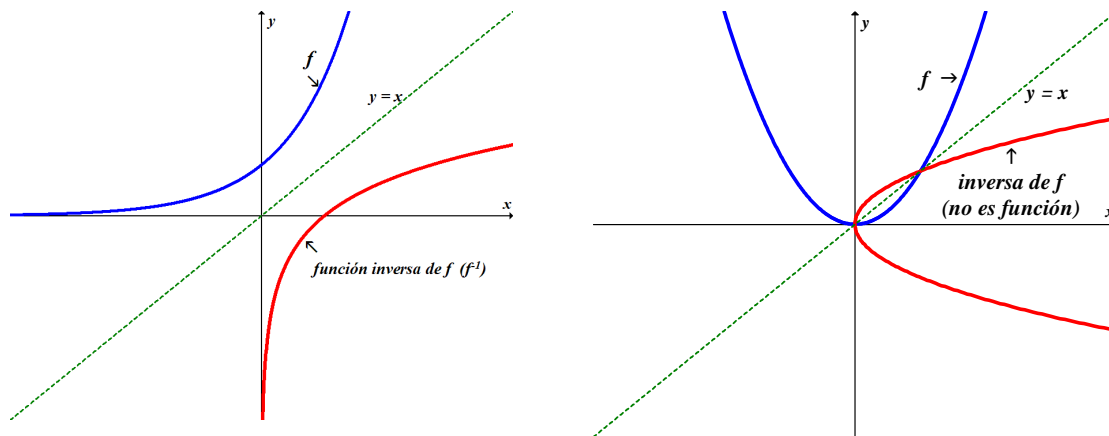
$$Dom(f^{-1}) = Rg(f) \quad y \quad Rg(f^{-1}) = Dom(f)$$

Este intercambio de dominio y rango de la función y su inversa permite utilizar un recurso para comparar las gráficas: $(a, b) \in Graf(f) \Leftrightarrow (b, a) \in Graf(f^{-1})$



Los puntos $(a, b), (b, a)$ son simétricos respecto a la recta $x = y$.

Por lo tanto, la gráfica de f y la de f^{-1} guardan simetría respecto a la recta $x = y$. Esto se observa en la siguiente representación



La gráfica superior muestra una función f inyectiva y su función inversa f^{-1} . Se observa con claridad la simetría respecto a la recta $x = y$

La gráfica superior muestra una función f no inyectiva y su inversa no es función. Sin embargo las gráficas son simétricas respecto a la recta $x = y$

Procedimiento para calcular la función inversa de una función dada a través de la ecuación cartesiana.

En primer lugar es importante recordar que la inversa de una función biyectiva es función. O sea, f de A en B, es función biyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}$ es función de B en A.

Pasos para encontrar la forma de f^{-1}

- 1) Dada f , escribimos la ecuación $y = f(x)$ (esta es una ecuación cartesiana).
- 2) Resolvemos la ecuación anterior para la variable x (significa despejar x)
- 3) En la expresión obtenida del paso anterior intercambiamos los papeles de x e y .
- 4) La nueva expresión define a f^{-1} .

Ejemplo 19

Dada la función $f(x) = x^3 - 1$ encontremos la forma de la función inversa, si es que existe.

La existencia de la función inversa f^{-1} , está garantizada pues la función f es inyectiva, esto puedes constatarlo pues si haces la gráfica, notarás que la función es creciente en todo su dominio (¡Pruébalo!).

Con la función creamos la ecuación : $y = x^3 - 1$

Resolvemos esta ecuación para x

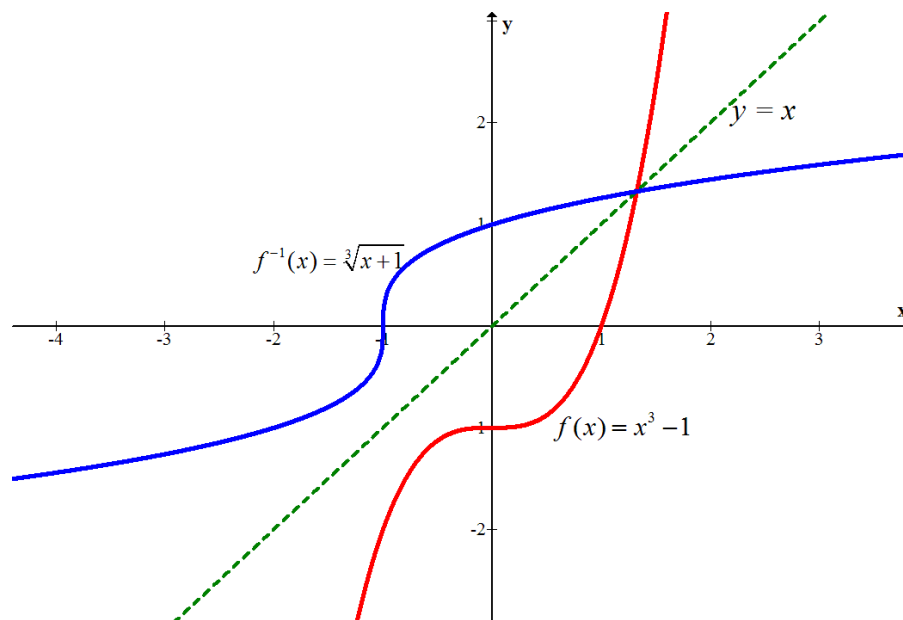
$$y = x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y + 1}$$

Intercambiamos los papeles de las variables, o sea, escribimos

$$y = \sqrt[3]{x+1}$$

De esta manera podemos definir: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$, la cual es la función inversa de f .

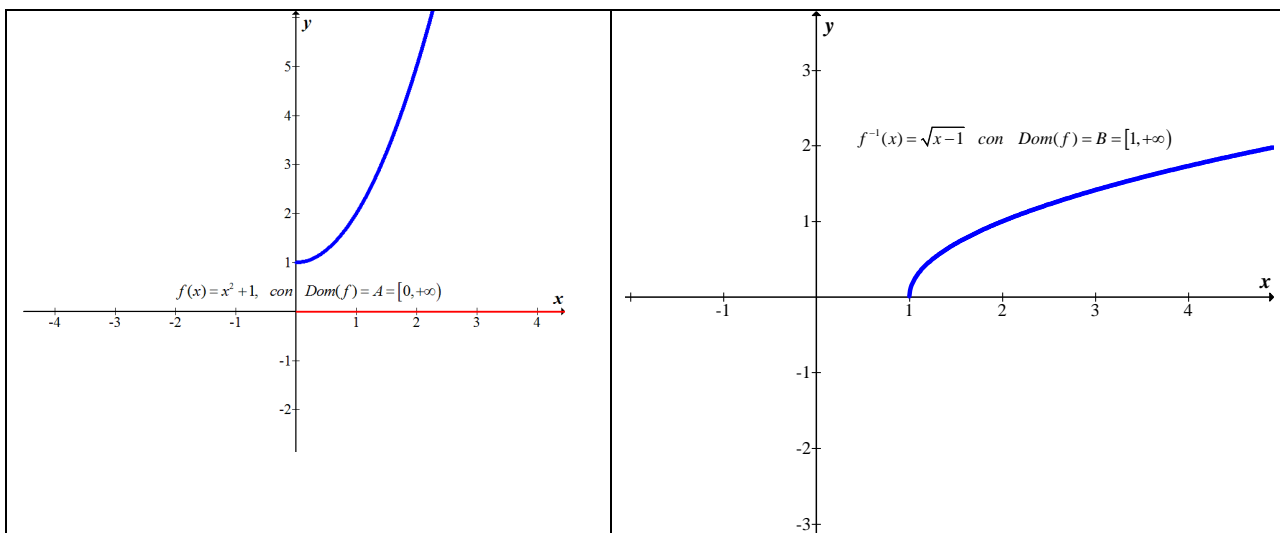
Observa la gráfica de $f(x) = x^3 - 1$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Es fácil notar la simetría respecto a la recta $x = y$



Ejemplo 20

Sea $f(x) = x^2 + 1$, con $\text{Dom}(f) = A = [0, +\infty)$; $\text{Rg}(f) = [1, +\infty)$. Demostremos que $f(x) = x^2 + 1$ es inyectiva, y luego hallaremos la función inversa.

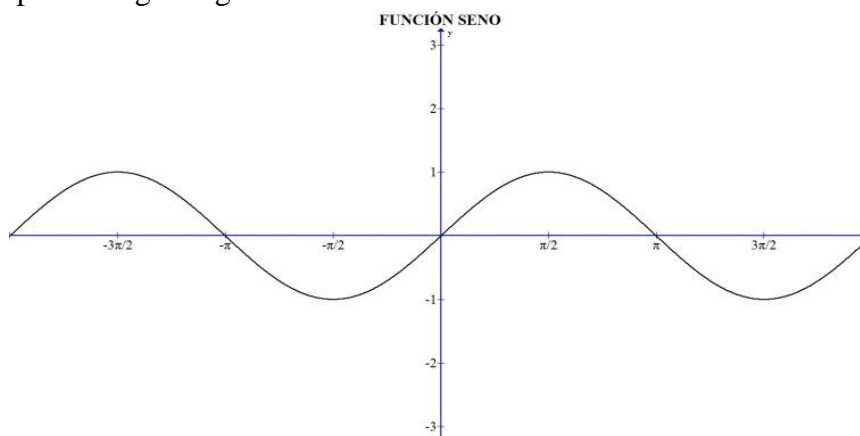
Sean $x_1, x_2 \in A$ con $f(x_1) = f(x_2)$, entonces: $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ y como $x_1, x_2 \geq 0$, entonces: $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva, y como $B = \text{Rg}(f)$, tenemos que f es sobreyectiva y en consecuencia, f es biyectiva, luego f^{-1} es función. Para hallar su expresión despejamos x de $y = x^2 + 1$, recordando que $x \geq 0$. Luego: $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$. O sea: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ (Vea la gráfica)



Funciones trigonométricas inversas

a) Función Arcoseno

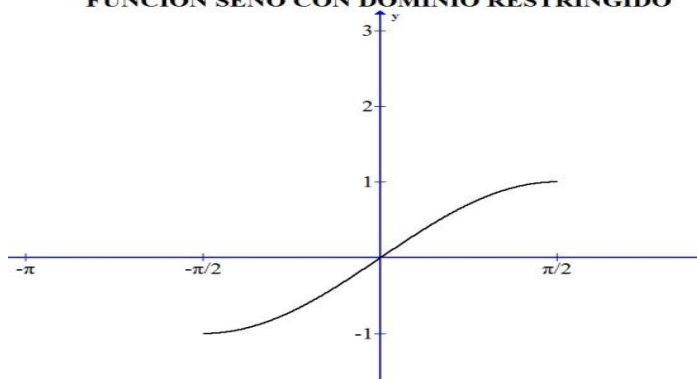
Recordemos en primer lugar la gráfica de la función seno



Para definir la función inversa de la función seno necesitamos que ella sea inyectiva (obviamente no lo es en todo el dominio). Sin embargo, recordemos que si una función es creciente (decreciente) en un intervalo, entonces será inyectiva. (Vea la gráfica); Por esta razón, haciendo una adecuada restricción del dominio, sin alterar el rango, podemos obtener un intervalo donde ella sea inyectiva. Por ejemplo:

$Dom_{res}(sen) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; así en este intervalo la función seno es creciente, por consiguiente será inyectiva. Además con este dominio restringido, todavía el rango sigue siendo $[-1, 1]$.

FUNCIÓN SENO CON DOMINIO RESTRINGIDO



Entonces a la función inversa de la función seno, la denominamos: arcoseno y se denota \arcsen o sen^{-1} y se define como sigue:

$$y = \arcsen(x) \Leftrightarrow x = \text{sen } y$$

Transfiriendo todas las propiedades vistas en la función inversa tenemos:

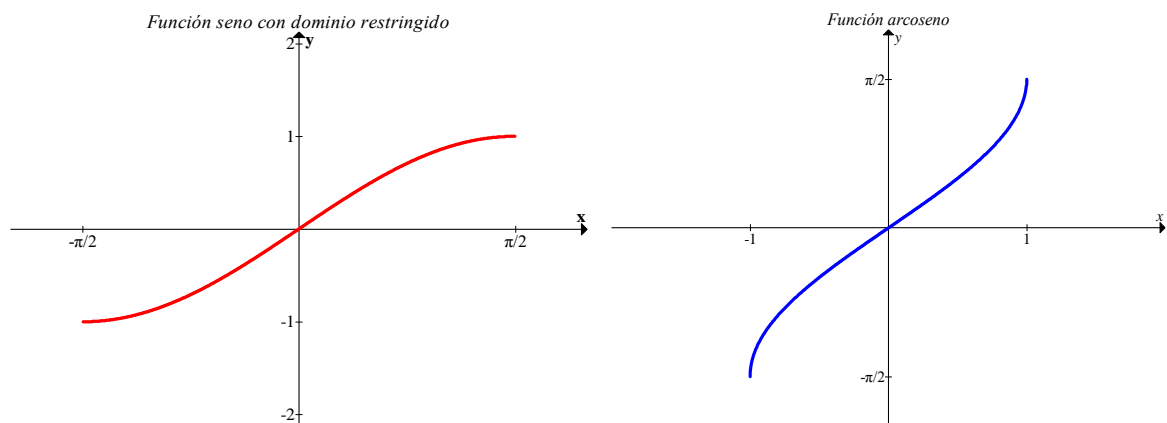
1.
$$\begin{cases} \text{Dom}(\text{sen}) = \text{Rg}(\arcsen) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{Rg}(\text{sen}) = \text{Dom}(\arcsen) = [-1, 1] \end{cases}$$
2. Algunos puntos de la gráfica de arcoseno los podemos obtener conociendo puntos de la gráfica de la función seno, intercambiando las componentes. En efecto, a modo de ejemplo, tenemos:

$$\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2} \text{ pues } \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\arcsen(0) = 0 \text{ ya que } \text{sen}(0) = 0$$

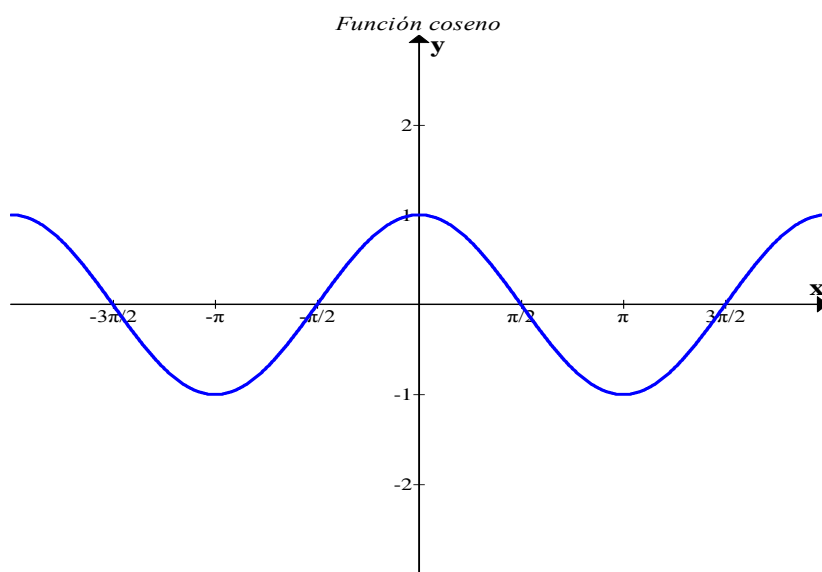
$$\arcsen(1) = \frac{\pi}{2} \text{ pues } \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ pues } \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$
3. Luego:
$$\begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \in \text{Graf}(\text{sen}) \Rightarrow \left(-1, -\frac{\pi}{2}\right) \in \text{Graf}(\arcsen) \\ (0, 0) \in \text{Graf}(\text{sen}) \Rightarrow (0, 0) \in \text{Graf}(\arcsen) \\ \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \in \text{Graf}(\text{sen}) \Rightarrow \left(1, \frac{\pi}{2}\right) \in \text{Graf}(\arcsen) \end{cases}$$
4. Las gráficas de sen y \arcsen son simétricas respecto a la recta $y = x$.
5.
$$\begin{cases} (\text{sen} \circ \text{sen}^{-1})(x) = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x, & x \in [-1, 1] \\ (\text{sen}^{-1} \circ \text{sen})(x) = \text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
6. Las funciones seno y arcoseno son creciente en sus respectivos dominios (Vea la gráficas)



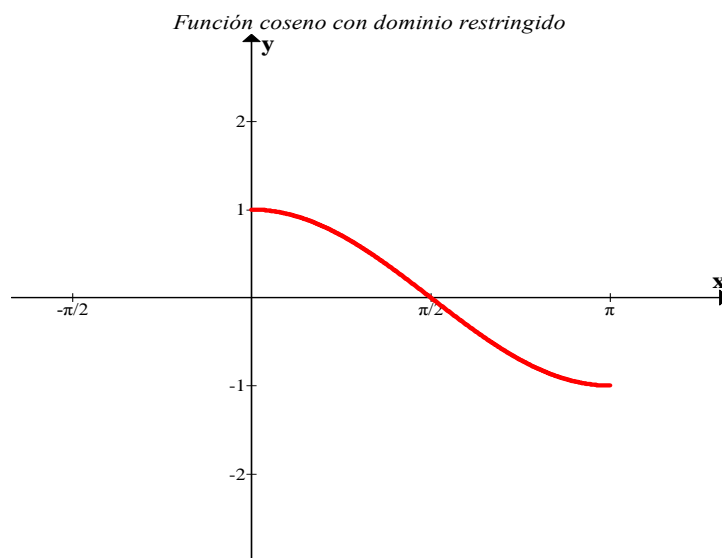
b) Función arcoseno

Observamos de la gráfica de la función coseno, que en su dominio, ella no es inyectiva.



Hagamos una restricción del dominio, garantizando que en él, la función coseno es inyectiva y que no se modifique el rango. (En este dominio el coseno es monótono decreciente)

$$\text{Dom}_{\text{res}}(\cos) = [0, \pi] \text{ y } \text{Rg}(\cos) = [-1, 1]$$



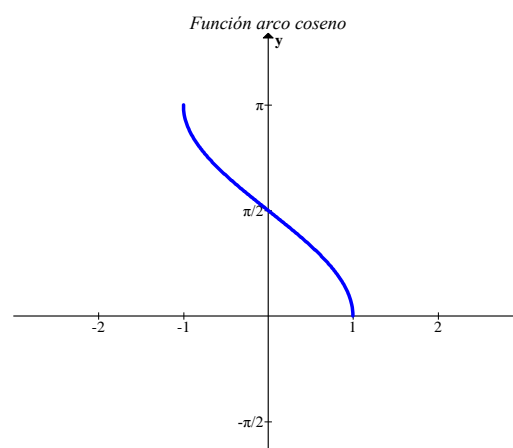
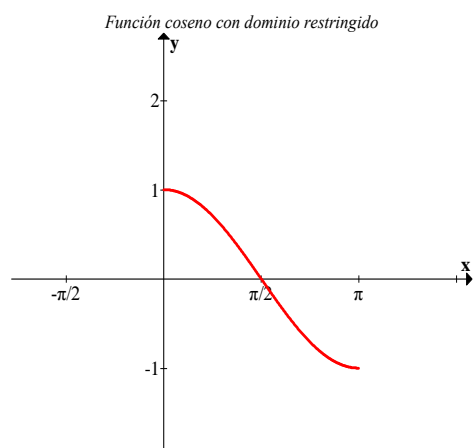
La función inversa de la función coseno se denomina función arco coseno, se denota: \arccos o \cos^{-1} y se define como sigue:

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos y$$

Para coseno y arco coseno tenemos las siguientes propiedades

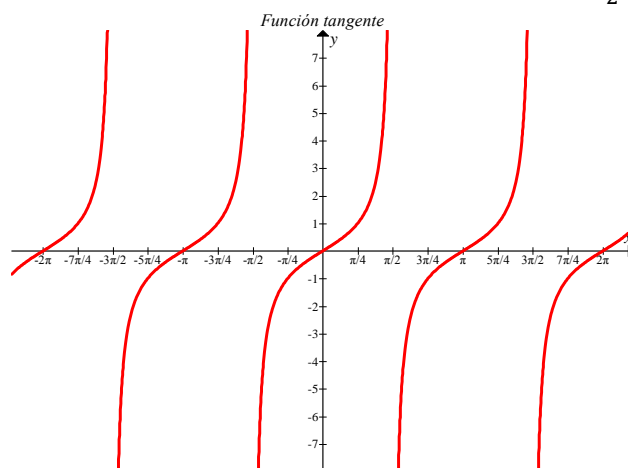
1. $\begin{cases} \text{Dom}(\cos) = \text{Rg}(\arccos) = [0, \pi] \\ \text{Rg}(\cos) = \text{Dom}(\arccos) = [-1, 1] \end{cases}$
2. Algunos puntos de la gráfica de \arccos los podemos obtener conociendo puntos de la gráfica de \cos e intercambiando las componentes.

$$\begin{cases} (0, 1) \in \text{Graf}(\cos) & \Leftrightarrow & (1, 0) \in \text{Graf}(\arccos) \\ (\pi/2, 0) \in \text{Graf}(\cos) & \Leftrightarrow & (0, \pi/2) \in \text{Graf}(\arccos) \\ (\pi, -1) \in \text{Graf}(\cos) & \Leftrightarrow & (-1, \pi) \in \text{Graf}(\arccos) \end{cases}$$
3. Las gráficas de coseno y arco coseno son simétricas respecto a la recta $x = y$.
4. $\begin{cases} (\cos \circ \cos^{-1})(x) = \cos(\cos^{-1}x) = x, & x \in [-1, 1] \\ (\cos^{-1} \circ \cos)(x) = \cos^{-1}(\cos x) = x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$
5. La funciones coseno y arco coseno son decrecientes en sus respectivos dominio. (Vea las gráficas)



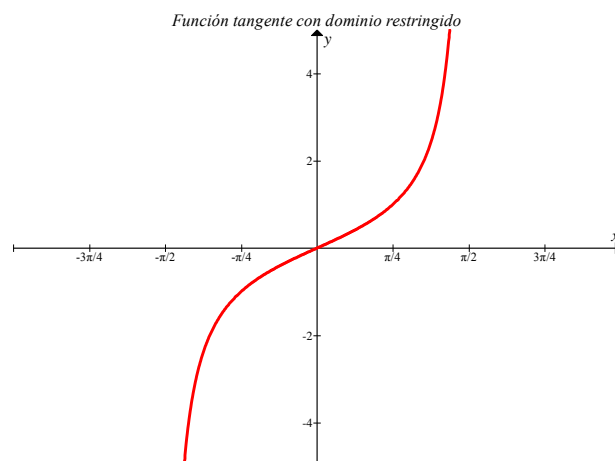
c) Función arco tangente

La gráfica de la función tangente muestra claramente que ella no es inyectiva y además presenta problemas pues existen valores para los cuales no está definida, como $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, etc.$



Hacemos una restricción del dominio, manteniendo el rango, de manera que en él la función sea inyectiva (en este dominio la función tangente es monótona creciente).

$$\text{Dom}_{\text{res}}(\tan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \text{Rg}(\tan) = (-\infty, +\infty)$$



La función inversa denominada arco tangente se denota \arctan o \tan^{-1} y se define así:

$$y = \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tan y$$

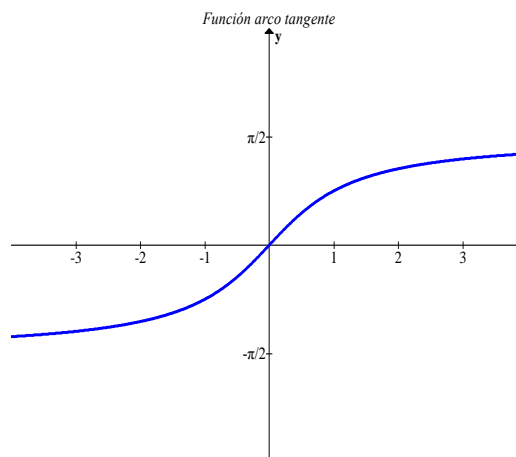
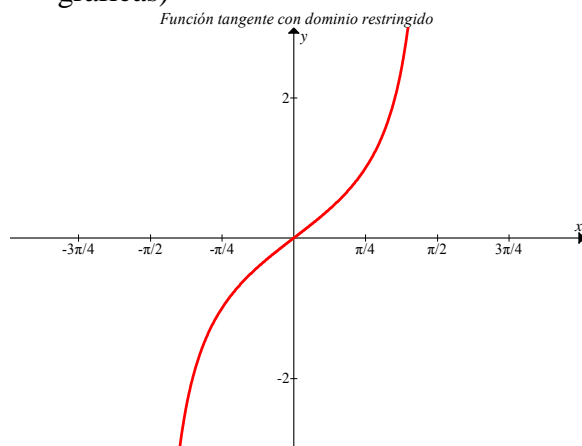
Para tangente y arco tangente tenemos las siguientes propiedades

1. $\begin{cases} \text{Dom}(\tan) = \text{Rg}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{Rg}(\tan) = \text{Dom}(\arctan) = (-\infty, +\infty) \end{cases}$
2. Algunos puntos de la gráfica de \tan^{-1} los podemos obtener conociendo puntos de la gráfica de \tan e intercambiando las componentes.

$$\begin{cases} \tan(0) = 0 \Leftrightarrow \arctan(0) = 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} (0,0) \in \text{Graf}(\tan) \Leftrightarrow (0,0) \in \text{Graf}(\tan^{-1}) \\ \left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \in \text{Graf}(\tan) \Leftrightarrow \left(1, \frac{\pi}{4}\right) \in \text{Graf}(\tan^{-1}) \end{cases}$$

4. Las gráficas de \tan y \tan^{-1} son simétricas a la recta $x = y$, La figura que sigue muestra esta simetría.
5. $\begin{cases} (\tan \circ \tan^{-1})(x) = \tan(\tan^{-1}x) = x, & x \in (-\infty, +\infty) \\ (\tan^{-1} \circ \tan)(x) = \tan^{-1}(\tan x) = x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$
6. Las funciones tangente y arco tangente son crecientes en sus respectivos dominios(vea las gráficas)



Ejercicios propuestos

1) Lea en un texto de bachillerato, lo correspondiente al resto de las funciones trigonométricas inversas y haga un estudio de ellas siguiendo como modelo las que se estudiaron en clase.

2) Dada la función $f(x) = x^2 + 2$, definida de $A = [0, +\infty)$ en \mathbb{R} :

a) halle su rango; b) pruebe que f es inyectiva en A .

Resp. a) $Rg(f) = [2, +\infty)$; d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$

3) a) Sea f una función creciente de A sobre B , demuestre que f^{-1} es creciente. b) Demuestre la misma afirmación, en el caso f decreciente. Ilustre con gráficos, sus resultados. c) Demuestre que f es creciente sii $-f$ es decreciente. d) Si f es creciente, ¿qué sucede con $f \circ f$? e) Haga algunas consideraciones acerca de f^{-1} , con f decreciente.

4) Sea $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

a) Halle su dominio A y su rango B

b) Demuestre que f es inyectiva de A sobre B

c) Halle f^{-1} .

d) Compruebe que $f \circ f^{-1} = I_B$ y que $f^{-1} \circ f = I_A$

Resp. a) $A = \mathbb{R} - \{1\}$; $B = \mathbb{R} - \{2\}$; $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

5) Demuestre que:

a) $\arcsen(-x) = -\arcsen(x)$;

b) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$;

c) $\arcsen(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

6) Calcule:

a) $\arcsen(\tan \frac{\pi}{4})$; b) $\sen\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; c) $\cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

d) $\tan(\arcsen(x))$; e) $\sen(\arccos(x))$; f) $\arccos(\sen(x))$

Resp. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\pm \frac{3}{\sqrt{10}}$; d) $\frac{\pm x}{\sqrt{1-x^2}}$; e) $\pm \sqrt{1-x^2}$; f) $\frac{\pi}{2} - x$

7) Demuestre que:

a) $\arcsen a + \arcsen b = \arcsen(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$ ($0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2}$)

b) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

c) $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ (use (b)).

d) $\operatorname{arcosec} x + \operatorname{arcosec} y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{xy}{1 - \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - y^2}}\right)$

CAPÍTULO III

1. Plano Cartesiano. Distancia entre dos puntos en R^2 . Fórmula de punto medio.
2. Recta
3. Circunferencia
4. Elipse
5. Hipérbola
6. Parábola

1. Plano Cartesiano. Distancia entre dos puntos en R^2 .

Fórmula de punto medio.

1.1 Introducción

Se denomina **Plano Cartesiano** al conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) de números reales, y lo denotamos así: R^2 o $R \times R$, esto es:

$$R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}.$$

Algunos elementos de R^2 son: $(0,0)$; $(3,1)$; $(-5,-2)$; $(-\frac{1}{2}, 3)$; $(0, \sqrt{2})$; ... etc.

Podemos hacer una representación del Plano Cartesiano, para ello consideramos un plano geométrico cualquiera, dibujamos en él un par de rectas que se intersecten en forma perpendicular (formando un ángulo de 90°). Estas rectas las ubicamos convencionalmente, una horizontal y la otra vertical, así como muestra la *fig.1*. El punto de intersección de dichas rectas lo denominamos origen y le asociamos el par $(0,0)$. De esta manera, el plano queda dividido en cuatro regiones denominadas cuadrantes y nombradas: I, II, III y IV, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Las rectas en cuestión son rectas reales, y en ellas han sido representados los números reales.

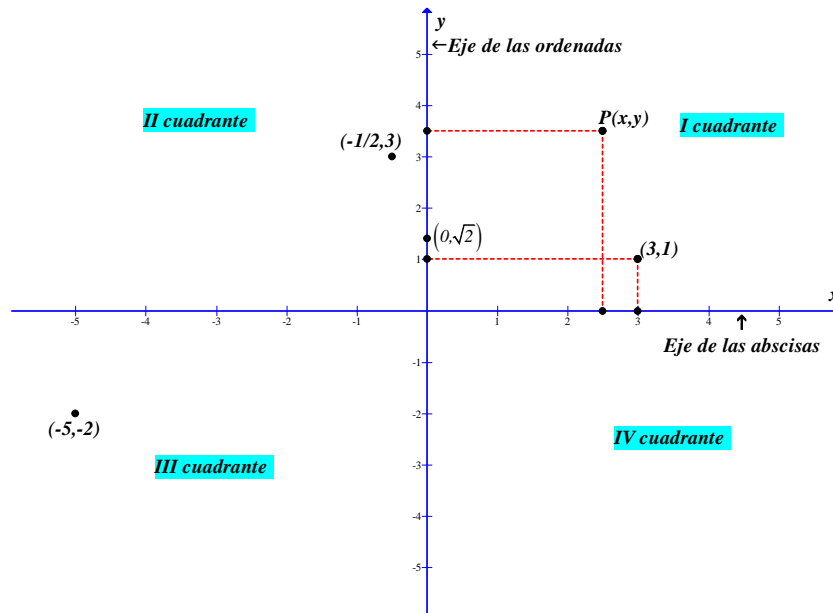


fig. 1

La recta horizontal denominada eje x o eje de las abscisas corresponde siempre a los valores que toma la primera componente del par ordenado (x, y) , mientras que la recta vertical denominada eje y o eje de las ordenadas corresponde a los valores que toma la segunda componente del par ordenado. La manera de representar un par ordenado en un plano cartesiano, es bastante sencilla, por ejemplo: el par $(3, 1)$ aparece representado con un punto en el plano al cual le podemos asignar una letra para identificarlo (cuando sea necesario), por ejemplo hablamos del punto A que representa al par $(3, 1)$. Observa que a dicho punto llega un segmento vertical desde el valor 3 de abscisa y un segmento horizontal desde la ordenada 1, el punto geométrico donde dichos segmentos se intersectan es la representación del par.

Cuando nos referimos a los puntos del plano usaremos cualquiera de las siguientes notaciones: $P = (x, y)$, $P(x, y)$ o simplemente (x, y) .

1.2 Distancia entre dos puntos en R^2 .

La **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de R^2 , denotada $d(P_1, P_2)$, viene dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (\text{I})$$

En efecto, sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \in R^2$. Estos puntos los ubicamos en cualquier región del plano, por conveniencia para la demostración los colocamos en el primer cuadrante, así como lo muestra la fig.2.

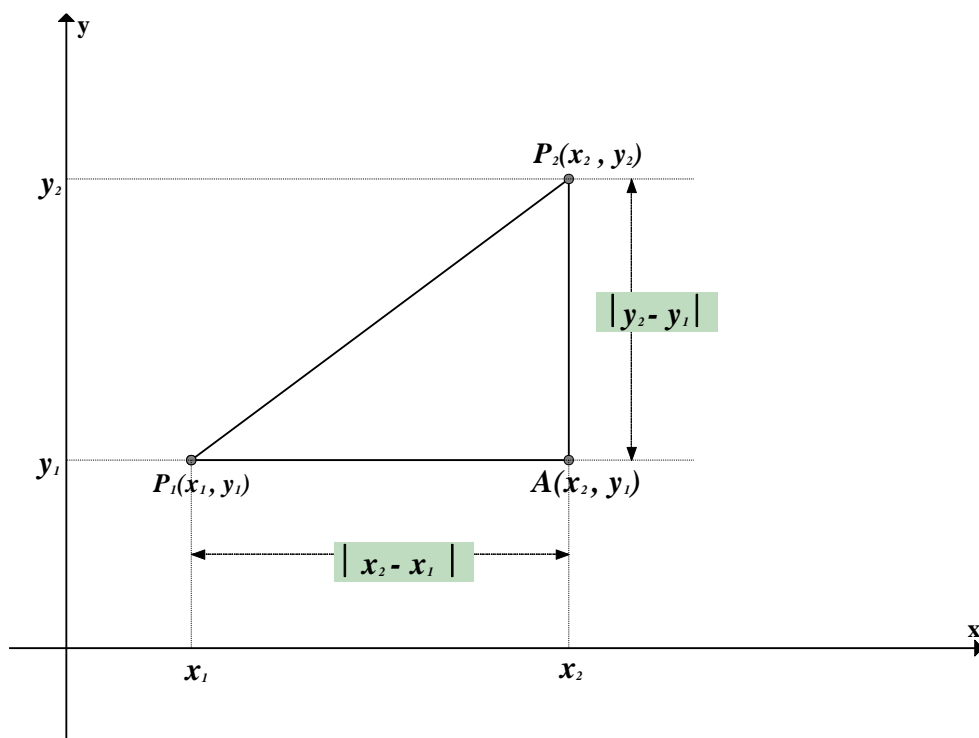


fig. 2

Por otra parte, se construye el triángulo rectángulo P_1AP_2 ($\angle P_1AP_2$ mide 90°). El punto A tiene coordenadas: (x_2, y_1) , los segmentos $\overline{P_1A}$ y $\overline{AP_2}$ son los catetos y $\overline{P_1P_2}$ es la hipotenusa. La distancia que se desea determinar corresponde a la longitud de la hipotenusa del triángulo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras y tenemos:

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, A)]^2 + [d(A, P_2)]^2$$

pero, $d(P_1, A) = |x_2 - x_1|$ (longitud de un segmento horizontal) **(II)**

$d(A, P_2) = |y_2 - y_1|$ (longitud de un segmento vertical) **(III)**

Así tenemos: $[d(P_1, P_2)]^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Por lo tanto, $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejercicio resuelto 1

Dados los puntos $A = (2, 3)$, $B = (2, -5)$, $C = (4, -5)$, $D = (\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, hallar las siguientes distancias:

$d(A, B)$, $d(B, C)$, $d(C, D)$, $d(D, A)$.

Solución

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{(-5 - 3)^2} = |-5 - 3| = |-8| = 8$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-5 - (-5))^2} = \sqrt{(4 - 2)^2} = |4 - 2| = |2| = 2.$$

$$d(A, C) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} .$$

$$d(D, A) = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2 + (-\sqrt{2} - 3)^2} = \sqrt{18 + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} .$$

Ejercicio resuelto 2

Dados los puntos $A = (2, y)$ y $B = (5, -10)$, encontrar la ordenada del punto A sabiendo que $d(A, B) = 2\sqrt{3}$.

Solución

Por la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$d(A, B) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-10 - y)^2}$$

Por lo tanto:
$$\sqrt{(5 - 2)^2 + (-10 - y)^2} = 2\sqrt{3},$$

elevando al cuadrado en ambos miembros y simplificando, obtenemos

$$9 + (-10 - y)^2 = 12 \Rightarrow (-10 - y)^2 = 3$$

Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros y tenemos

$$\sqrt{(-10 - y)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |-10 - y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow -10 - y = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow y = -10 \pm \sqrt{3},$$

o sea, $y_1 = -10 + \sqrt{3}$ y $y_2 = -10 - \sqrt{3}$;

Concluimos que existen dos puntos que satisfacen la condición dada, estos son:

$$A_1 = (2, -10 + \sqrt{3}) \text{ y } A_2 = (2, -10 - \sqrt{3}) \quad (\text{Ver fig. 3})$$

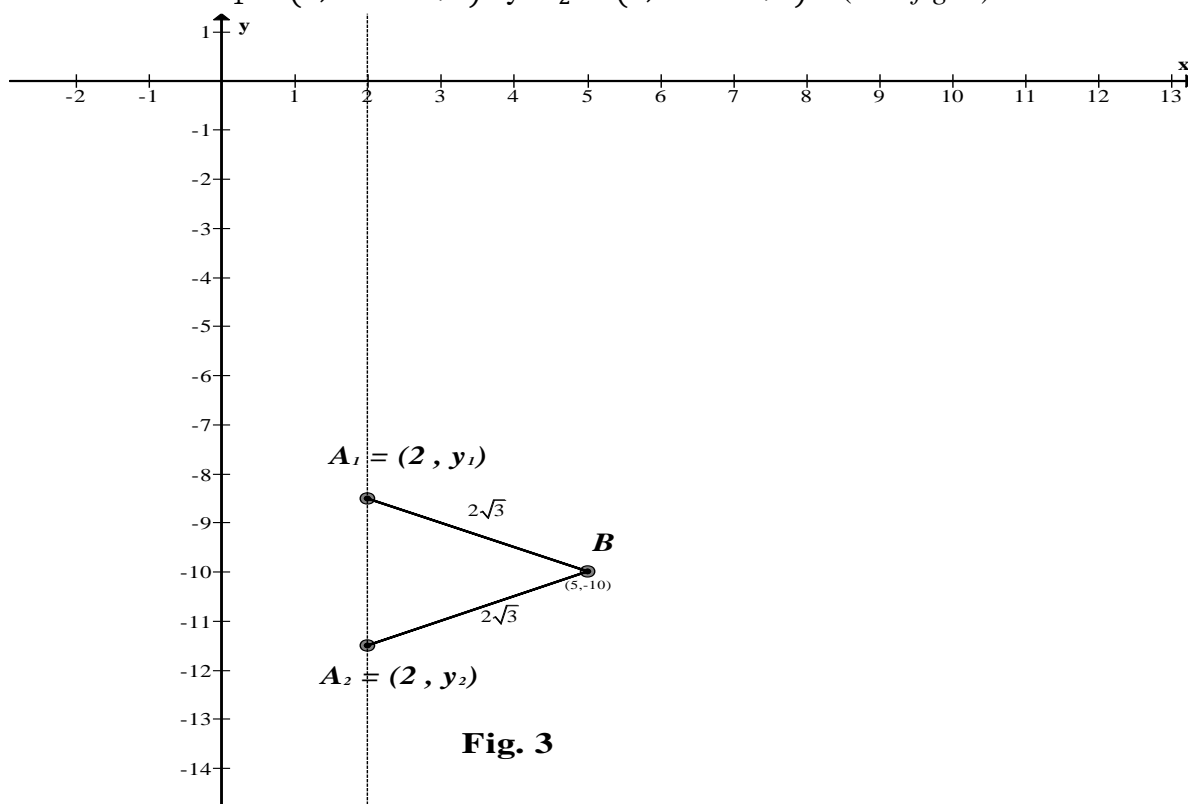


Fig. 3

1.3 Fórmula del punto medio de un segmento.

Las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ vienen dadas por:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Demostración

Consideremos los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ (distintos) y el segmento que se construye teniéndolos a ellos por extremos. Los puntos se ubican en el primer cuadrante de un sistema cartesiano sin perder generalidad como se muestra en la *fig.4*

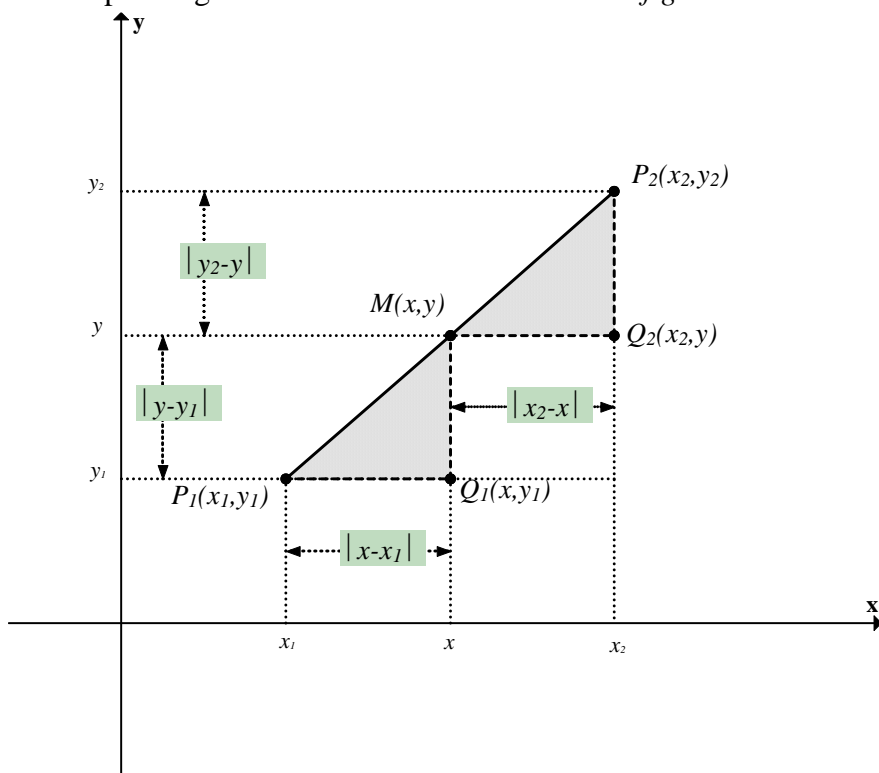


fig. 4

El punto $M = (x, y)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, en consecuencia los segmentos $\overline{P_1M}$ y $\overline{MP_2}$ tienen la misma medida.

Además, los triángulos $\triangle P_1Q_1M$ y $\triangle MQ_2P_2$ son congruentes (Si se superpone uno al otro, coinciden en todas sus partes); entonces tenemos que:

$$d(P_1, Q_1) = d(M, Q_2) \text{ y } d(M, Q_1) = d(P_2, Q_2),$$

$$\text{Luego: } |x - x_1| = |x_2 - x| \text{ y } |y - y_1| = |y_2 - y|.$$

Supongamos que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$

De $|x - x_1| = |x_2 - x|$, al elevar al cuadrado, obtenemos:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2.$$

Simplificando y factorizando, nos queda:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 2x(x_1 - x_2) \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ pues } x_1 \neq x_2.$$

Similarmente, $y_1 \neq y_2 \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2}$. Luego:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

¿Qué sucede si $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$?

Ejercicios Propuestos

1) Halle las coordenadas del punto $P = (x, y)$ situado entre $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ tal que $d(P, A) = \frac{1}{5}d(A, B)$.

2) Consideremos un rectángulo tal como se indica en la figura, y sea $P = (x, y)$ un punto exterior al rectángulo. Demuestre que la suma de los cuadrados de las distancias de P a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices.

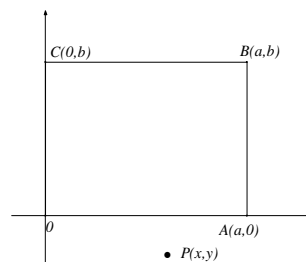


fig. 5

3) En el problema anterior, ¿podríamos colocar P en: a) el interior de rectángulo; b) ¿Y sobre un lado?

4) El segmento que une los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera y el segmento que une los puntos medios de las diagonales se bisecan.

(Vea la fig. 6).

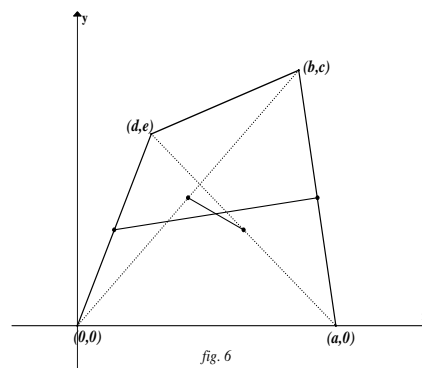


fig. 6

5) Demuestre que el triángulo de vértices $A = (8, 5)$, $B = (1, -2)$, $C = (-3, 2)$ es rectángulo y halle su área.

6) Dados los puntos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (1, 1)$, encontrar un tercer punto P tal que el triángulo P_1P_2P sea equilátero.

7) La mediana de un triángulo es el segmento que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Calcular la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son: $A = (2, 3)$, $B = (3, -3)$ y $C = (-1, -1)$.

8) Demuestre que los siguientes puntos son los vértices de un paralelogramo: $A = (-4, -1)$; $B = (0, -2)$; $C = (6, 1)$ y $D = (2, 2)$. Grafique el paralelogramo.

9) Dado $A = (-3, 8)$, encuentre las coordenadas de B de manera que $M = (5, -10)$ sea el punto medio de \overline{AB} .

10) Sea $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Encuentre un punto de S en el tercer cuadrante y a una distancia de 5 unidades del punto $(1, 3)$.

11) Halle todos los números reales a tales que la distancia entre $(a, 3)$ y $(5, 2a)$ sea mayor que $\sqrt{26}$.

12) Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

13) Muestre que los puntos $A = (-1, 2)$; $B = (3, -1)$; $C = (6, 3)$ y $D = (2, 6)$ son los vértices de un rombo (paralelogramo de lados iguales). Demuestre también que las diagonales son perpendiculares entre sí.

Sugerencia: para la segunda demostración, prueba primeramente que las diagonales se cortan en su punto medio.

Respuestas

1) $x = \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$; $y = \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2$

3) Si en ambos casos

5) 28

6) Existen dos puntos que cumplen la condición: $P = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ y $P^* = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

7) $M_A = \sqrt{26}$, $M_B = \frac{\sqrt{89}}{2}$, $M_C = \frac{\sqrt{53}}{2}$

10) $(-2, -1)$

11) $S = \left(-\infty, \frac{2}{5}\right) \cup (4, +\infty)$

2. La recta

2.1 La pendiente de la recta

Es bueno recordar que por dos puntos del plano pasa una y sólo una recta, esto nos proporciona una base para definir un concepto asociado a la ecuación de una recta como es la pendiente.

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera de una recta L no vertical (fig. 7), la pendiente de L se denota y define de la siguiente forma:

$$m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

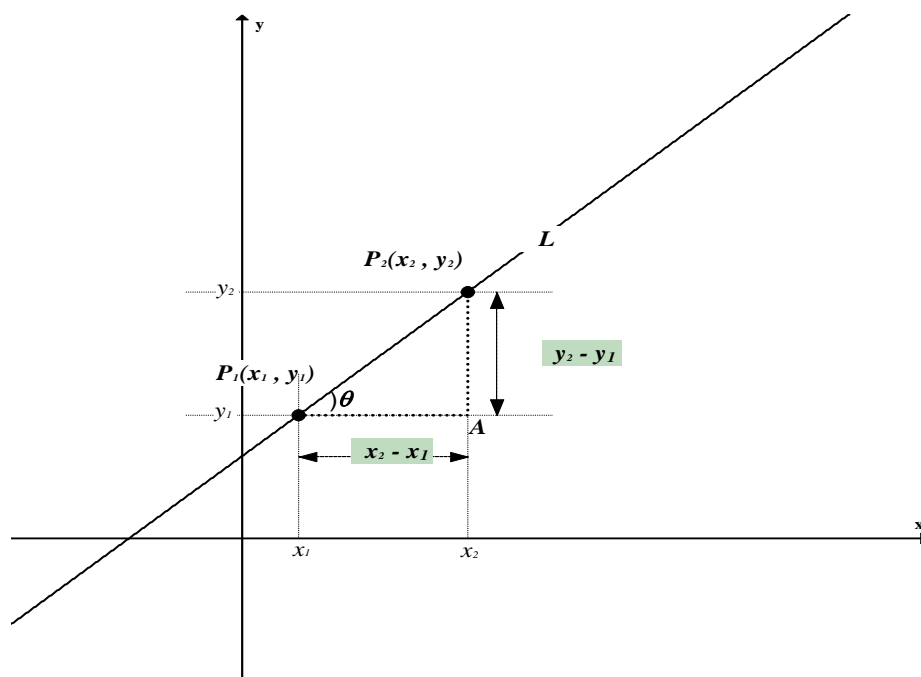


Fig. 7

El ángulo θ que muestra la fig. 7 se denomina **ángulo de inclinación** de la recta L (ángulo que forma la recta L con el semieje positivo x , medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

A continuación probaremos que la pendiente de una recta es independiente de los puntos seleccionados para calcularla, veamos:

La fig. 8 muestra una recta L , no vertical y tres puntos distintos de ella: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$.

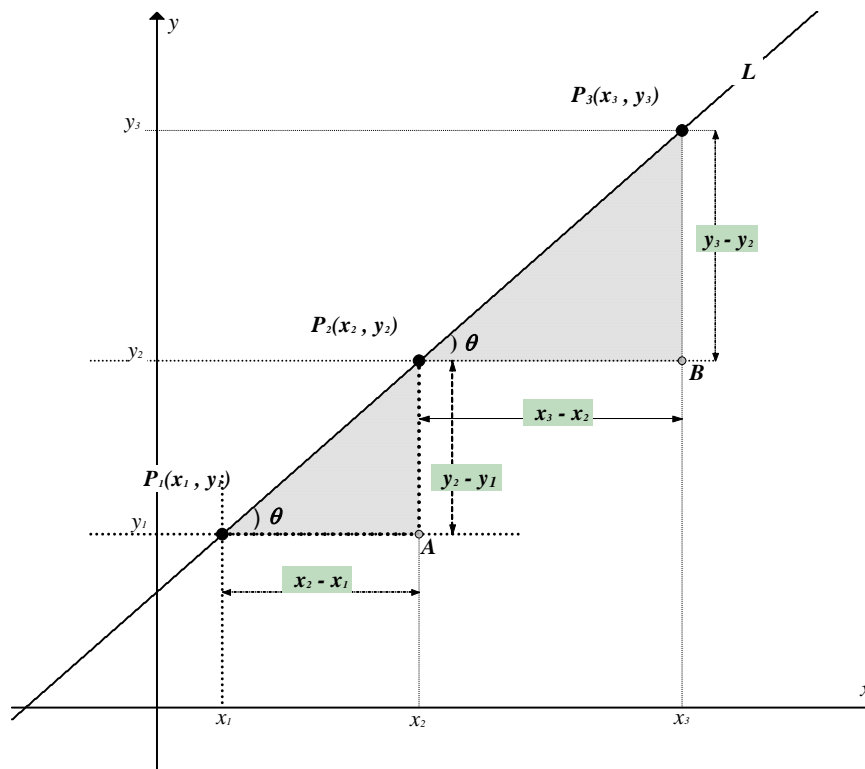


Fig. 8

Los triángulos rectángulos $\triangle P_1AP_2$ y $\triangle P_2BP_3$ son semejantes pues sus ángulos correspondientes (homólogos) tienen igual medida. De esta manera tenemos en $\triangle P_1AP_2$, $\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y en el $\triangle P_2BP_3$, $\tan \theta = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

Como $m_L = \tan \theta$ podemos concluir que: $m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, o sea, la pendiente de la recta no depende del par de puntos que se usan para calcularla.

Ejercicio resuelto 1

Los puntos que se encuentran sobre la misma recta se denominan **colineales**. Indique cuáles conjuntos de puntos son colineales.

- a) $\{(3,2), (0,3)\}$; b) $\{(1,2), (\frac{1}{2}, 1), (2,4)\}$; c) $\{(-1,1), (1,-1), (2,2)\}$
- d) $\{(1,-3), (-1,3), (\frac{1}{3}, -1), (-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})\}$

Solución

En cada ejercicio planteado calcularemos las pendientes necesarias usando puntos distintos, si ellas resulta iguales, entonces los puntos están sobre la misma recta.

a) Los puntos son colineales (¿por qué?)

b) $B_1 = (1,2)$, $B_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, $B_3 = (2,4)$

Halleemos las pendientes de las rectas que pasan por B_1 y B_2 ; y por B_1 y B_3 .

$$m_{B_1B_2} = \frac{1-2}{\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{-1/2} = 2; \quad m_{B_1B_3} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Las **dos** pendientes son iguales por lo tanto, los puntos están alineados.

c) Los puntos no son colineales pues para los puntos: $\{(-1,1), (1,-1)\}$, $m_1 = \frac{1+1}{-1-1} = -1$; mientras que para los puntos $(1,-1)$ y $(2,2)$ tenemos: $m_2 = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$.

d) Los puntos son colineales (¡Explique!)

2.2 Ecuación de la recta (no vertical)

Todo lo que planteamos en las líneas anteriores nos permite hacer la deducción de la ecuación de una recta no vertical teniendo como elementos básicos un punto y la pendiente, veamos cómo.

Sean los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P = (x, y)$ pertenecientes a la recta L (no vertical), donde P_0 es un punto fijo (conocido) y P es un punto genérico (fig. 9).

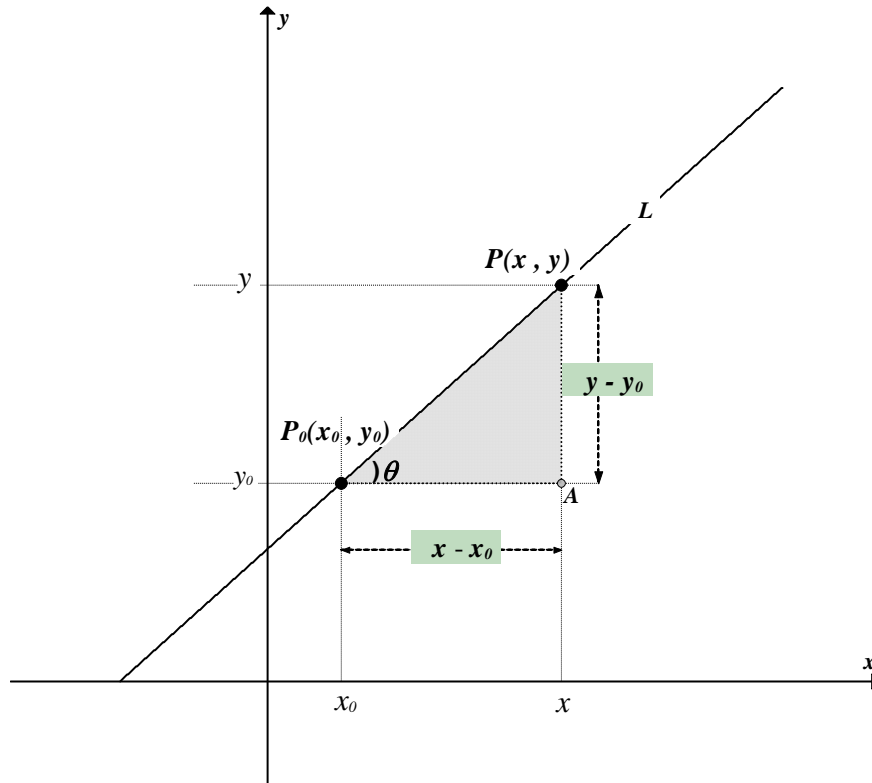


Fig.9

Calculemos la pendiente de L , (m_L), involucrando a P y P_0

$$m_L = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Despejando y , obtenemos:

$$m_L(x - x_0) = y - y_0 \Leftrightarrow y - y_0 = m_L(x - x_0) \quad (\text{IV})$$

La expresión resaltada (IV) se denomina **ecuación punto-pendiente** de la recta L , donde m_L es la pendiente de la recta y $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de la recta. En lo que sigue usaremos la letra m para la pendiente, a menos que sea necesario señalar la recta de la cual es pendiente.

Ejemplo 1

Encontremos la ecuación de la recta que pasa por el punto:

a) $P_0 = (1, -5)$ y cuya pendiente es 2; b) $P_0 = (0, 0)$ y cuya pendiente es -3; c) $P_0 = (-1, -2)$ y cuya pendiente es 0.

a) En este caso, $x_0 = 1$; $y_0 = -5$ y $m = 2$. Aplicamos la expresión (IV) y tenemos:

$$y - (-5) = 2(x - 1) \Leftrightarrow y + 5 = 2x - 2 \Leftrightarrow \boxed{2x - y - 7 = 0}$$

b) Aquí tenemos, $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ y $m = -3$. Aplicando la expresión *punto-pendiente* obtenemos:

$$y - 0 = -3(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x \Leftrightarrow \boxed{3x + y = 0}$$

c) Y aquí, $x_0 = -1$; $y_0 = -2$ y $m = 0$. Aplicamos (IV) y tenemos:

$$y - (-2) = 0(x - (-2)) \Leftrightarrow y + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y + 2 = 0}$$

La última expresión en cada ejemplo se conoce con el nombre de *ecuación general* de la recta. Vea la representación gráfica de las rectas anteriores (fig. 10)

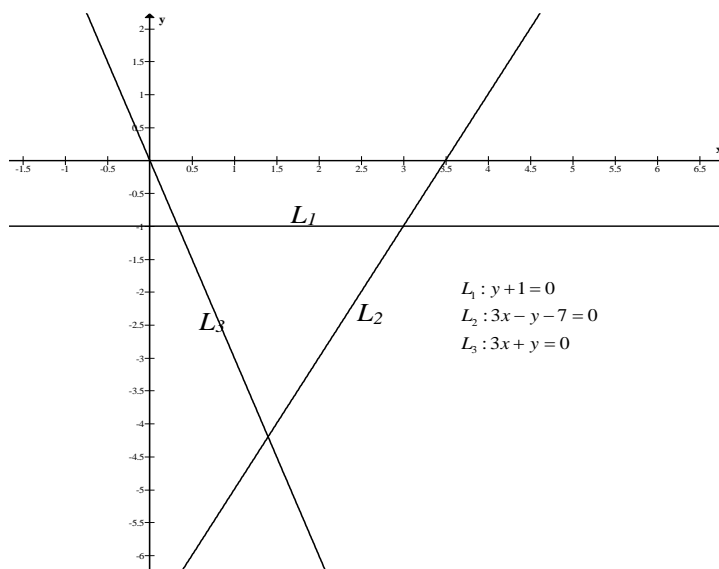


Fig.10

Ejemplo 2

Hallemos la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $A = (1, -2)$, $B = \left(3, -\frac{1}{3}\right)$ y hagamos su gráfica.

Con los puntos dados podemos calcular la pendiente de la recta que pasa por A y B.

En efecto:

$$m = \frac{-2 + \frac{1}{3}}{1 - 3} = \frac{-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{5}{6}$$

Con uno de los puntos y la pendiente podemos aplicar la fórmula *punto-pendiente*:

$$y - (-2) = \frac{5}{6}(x - 1) \Leftrightarrow 5x - 6y - 17 = 0$$

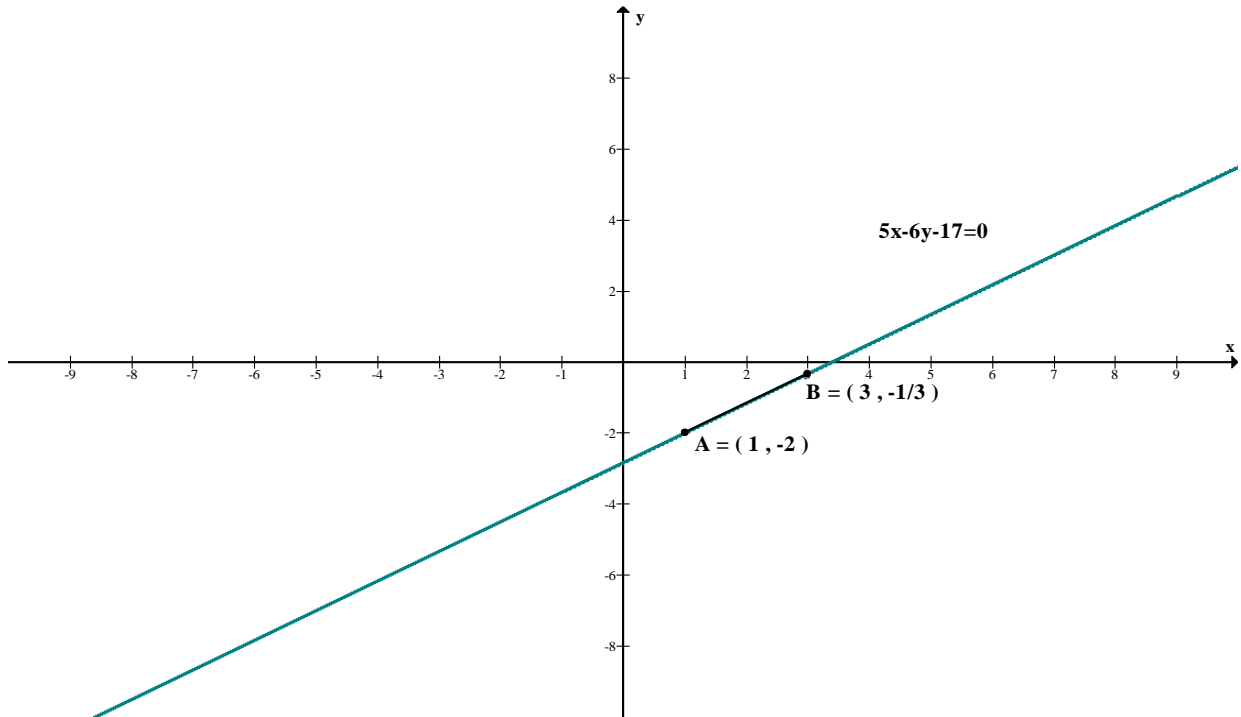


Fig. 11

Ejercicio resuelto 1

Sea la ecuación $Ax + By + C = 0$. Encuentre la *ecuación punto-pendiente* y establece las condiciones para que $Ax + By + C = 0$ represente la *ecuación general* de una recta no vertical.

Solución

Recordemos la ecuación punto pendiente de una recta:

$$y - y_0 = m_L(x - x_0)$$

Tomemos la ecuación $Ax + By + C = 0$ y hagamos lo necesario para transformarla al esquema anterior.

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \overbrace{By = -Ax - C}^{(i)}$$

En el segundo miembro de la expresión (i) factorizamos por $-A$ y así tenemos:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow \overbrace{By = -A\left(x + \frac{C}{A}\right)}^{(ii)}$$

En la expresión (ii) despejamos y , para ello necesitamos imponer la condición $B \neq 0$.

Así obtenemos:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-A}{B} \left(x + \frac{C}{A} \right)$$

En conclusión :

$$\begin{array}{c} \text{RECTA NO VERTICAL} \\ \hline \begin{array}{ccc} \text{Ecuación general} & & \text{Ecuación punto-pendiente} \\ \hline Ax + By + C = 0 & \Leftrightarrow & y - 0 = \frac{-A}{B} \left(x + \frac{C}{A} \right) \end{array} \\ \hline \text{Condición: } B \neq 0; \quad m_L = -\frac{A}{B}, \quad P_0 = \left(-\frac{C}{A}, 0 \right) \end{array}$$

2.3 Ecuación de una recta vertical

En los párrafos anteriores siempre hemos hecho la observación de que la recta no es vertical, entonces cabe hacer la pregunta, ¿qué ocurre en el caso de una recta vertical?, ¿cómo es su ecuación y la pendiente?

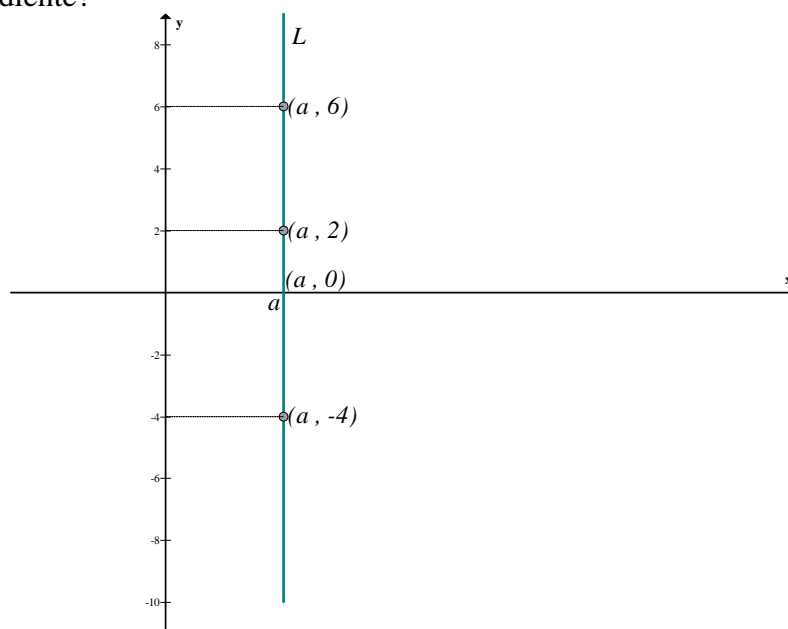


Fig. 12

Para responder esta inquietud veamos la fig. 12. En ella hemos dibujado una recta en posición vertical. En este caso, si queremos aplicar la definición de pendiente nos encontramos con el problema que la diferencia de abscisas del denominador es igual cero, generando un problema para su aplicación. Sin embargo, se observa que para los puntos de la recta en cuestión, aún cuando ellos tienen diferentes ordenadas, siempre mantienen la misma abscisa, o sea: la característica importante para una recta en posición vertical es que *todos sus puntos tienen la misma abscisa*. De aquí podemos escribir la ecuación para este tipo de recta, manteniendo esa característica:

$$L : \quad \underbrace{x = a}_{\text{ecuación de recta vertical que pasa por el punto } (a,0)}$$

Por ejemplo:

La recta $M: x = 1$, es una recta vertical que pasa por la abscisa de valor 1.

La recta $R: x = -4$, es una recta vertical que pasa por la abscisa de valor -4.

En relación a la pendiente simplemente afirmamos que una recta vertical no tiene pendiente definida, observa que la recta vertical tiene un ángulo de inclinación respecto al eje X que mide 90° y $\tan 90^\circ$ no está definida.

Recordemos la ecuación general de una recta: $Ax + By + C = 0$.

Podemos hacer 2 preguntas:

La primera: ¿qué debe ocurrir en dicha ecuación para que ella corresponda a una recta vertical?.

La respuesta no es difícil de intuir según lo expuesto anteriormente; debemos tener la condición:

$B = 0$ y $A \neq 0$, o sea, $x = -\frac{C}{A}$.

La segunda: ¿qué situación se presenta si, $B \neq 0$ y $A = 0$?. Pues que, $y = -\frac{C}{B}$, esta ecuación es satisfecha por todas las coordenadas de los puntos de la forma $P = \left(x, -\frac{C}{B}\right)$ con $x \in R$, o sea, $y = -\frac{C}{B}$ representa una recta horizontal.

Como conclusión podemos enunciar lo siguiente:

La ecuación $Ax + By + C = 0$ representa una recta:

horizontal	si	$A = 0$ y $B \neq 0$	$y = -\frac{C}{B}$
vertical	si	$A \neq 0$ y $B = 0$	$x = -\frac{C}{A}$
ni vertical ni horizontal	si	$A \neq 0$ y $B \neq 0$	$y = \frac{-A}{B} \left(x + \frac{C}{A}\right)$

Ejercicio resuelto 2

Dada la ecuación general de la recta $L: 2x - 3y - 6 = 0$, halle la ecuación *punto pendiente*, indica la pendiente y un punto de ella. ¿Se puede obtener otro punto para esta recta?, ¿cómo queda la ecuación *punto pendiente* usando el nuevo punto y la *ecuación general*, ¿qué cambio sufre?

Solución

Debemos modificar la forma de la ecuación hasta lograr llevarla a la forma (IV).

En efecto:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 6 = 0 &\Leftrightarrow -3y = -2x + 6 \\ &\Leftrightarrow -3y = -2(x - 3) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-2}{-3}(x - 3) \end{aligned}$$

O sea:

$$y = \frac{2}{3}(x - 3)$$

De ella obtenemos: $m = \frac{2}{3}$ y $P_0 = (3, 0)$. (¿Sabes por qué la ordenada de P_0 es 0?)

Otro punto de la recta lo encontramos simplemente dando algún valor a la variable x , por ejemplo:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = -2 \Rightarrow P_1 = (0, -2) \\ x = 1 &\Rightarrow y = -\frac{4}{3} \Rightarrow P_2 = \left(1, -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

La ecuación punto-pendiente para el punto $P_1 = (0, -2)$ es:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y + 2 = \frac{2}{3}x} \quad (A)$$

(¡Sólo visualmente es diferente a $y = \frac{2}{3}(x - 3)$!)

Sin embargo, al calcular la ecuación general a partir de esta última se obtiene exactamente la misma.

$$2x - 3y - 6 = 0$$

En la ecuación denominada (A) reescrita como sigue, pueden distinguirse dos elementos importantes, estos son: la pendiente (m) y el punto intersección con el eje Y , que es $P_0 = (0, -2)$.

$$y = \underbrace{\frac{2}{3}}_m x \quad \underbrace{-2}_{\text{ordenada del punto } (0, -2)}$$

Esta forma se conoce con el nombre **pendiente intersección con Y** , en general la escribimos así:

$$y = mx + n$$

Donde m es la pendiente de la recta, y n es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje de las y .

2.4 Posición relativa de dos rectas en el plano

En la *fig. 13* aparecen las rectas L_1 y L_2 paralelas. En ellas es importante observar que el ángulo de inclinación de ambas, respecto al eje x , es el mismo, por ser ángulos correspondientes.

Definición

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas. Diremos que L_1 es *paralela* a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$, donde m_1 y m_2 corresponden a las pendientes de L_1 y L_2 , respectivamente.

Simbólicamente escribimos:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad (V)$$

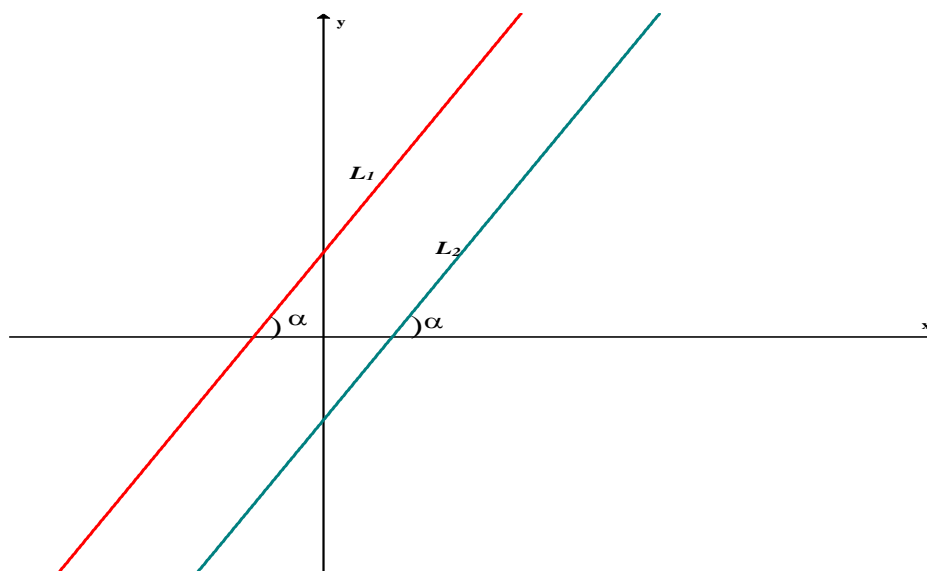


Fig. 13

Por otra parte, la *fig. 14* muestra otra posición relativa de rectas en el plano, como es la perpendicularidad. Observa que estas rectas distintas, se intersectan pero de una manera muy particular, lo hacen formando un ángulo de 90°

En lo que sigue, deduciremos un criterio de perpendicularidad para dos rectas.

En la *fig. 14*, tenemos que: $\alpha_1 + (180 - \alpha_2) + 90 = 180 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + 90$

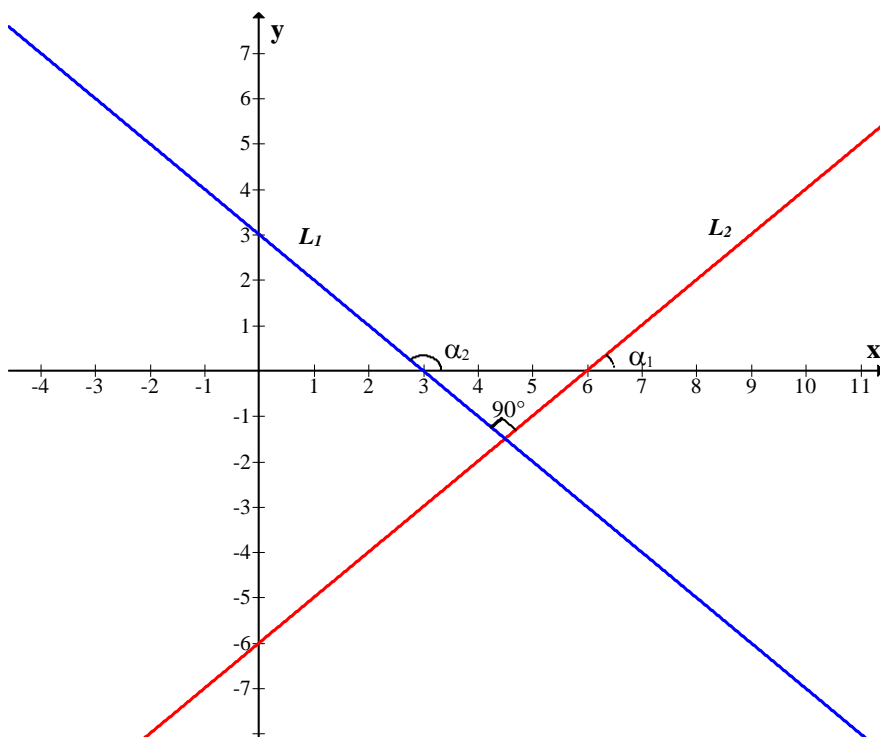


Fig.14

(Suponemos que $0 \neq \alpha_1, \alpha_2 \neq 90^\circ$)

Como:

$$m_2 = \tan \alpha_2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{cosa}_2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 + 90)}{\cos(\alpha_1 + 90)} = \frac{\operatorname{cosa}_1}{-\operatorname{sen} \alpha_1} = -\frac{1}{-\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Diremos que L_1 es *perpendicular* a L_2 si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Simbólicamente escribimos:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \quad (\text{VI})$$

Nota: el criterio anterior no se puede usar para el caso que una de las rectas sea paralela al eje de las x , pues $\tan 90^\circ$ no está definida.

A continuación demostraremos el criterio de paralelismo, o sea, $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

Probemos primero el teorema directo, o sea: $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

Sean L_1 y L_2 dos rectas tales que $L_1 \parallel L_2$ y además que ellas están definidas por las ecuaciones:

$$L_1: y = m_1x + y_1 \quad \text{y} \quad L_2: y = m_2x + y_2.$$

Supongamos también que sus pendientes son diferentes (haremos la demostración por reducción al absurdo).

Resolvemos el sistema generado por las ecuaciones de las rectas dadas $\begin{cases} y = m_1x + y_1 \\ y = m_2x + y_2 \end{cases}$

Iguando tenemos: $m_1x + y_1 = m_2x + y_2$

Resolvemos para x y obtenemos: $x = \frac{y_2 - y_1}{m_1 - m_2}$, ya que supusimos que las pendientes son

diferentes, luego: $m_1 - m_2 \neq 0$. Permitiendo concluir que existe un valor $x \in R$, y en consecuencia existe un punto común a L_1 y L_2 : esta última afirmación contradice la definición de rectas paralelas; y esta contradicción viene del suponer que las pendientes son diferentes, entonces: $m_1 = m_2$.

Demostremos el teorema recíproco, es decir: $m_1 = m_2 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas que por hipótesis tienen la misma pendiente: m .

Nuevamente por método de reducción al absurdo, negaremos la tesis a probar, o sea, diremos que $L_1 \nparallel L_2$. Si es así, tienen un punto en común: $P_0 = (x_0, y_0)$.

O sea $P_0 = (x_0, y_0)$ satisface las ecuaciones de cada recta, por lo tanto:

$$y_0 = mx_0 + y_1 \quad \text{y} \quad y_0 = mx_0 + y_2.$$

Luego: $y_1 = y_2$. Y estamos en presencia de la misma recta (¿Por qué?).

Pero esto contradice el hecho de que son rectas distintas. Luego $L_1 \parallel L_2$.

Ejercicio resuelto 3

Sean las rectas $L_1: 3x - 4y - 5 = 0$ y $L_2: -3x + 4y + 1 = 0$. Compruebe que ellas son paralelas.

Solución

Recordemos que para una recta de ecuación general: $Ax + By + C = 0$, la pendiente viene dada por $m = -\frac{A}{B}$, de manera que:

$$m_1 = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}; \quad m_2 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

Se cumple la condición (V), o sea, $m_1 = m_2$; por lo tanto $L_1 \parallel L_2$.

Ejercicio resuelto 4

Encuentre la ecuación general de la recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas y es perpendicular a la recta $L: 2x + y - 1 = 0$.

Solución

Sea R la recta buscada, como $R \perp L$ entonces $m_R = -\frac{1}{m_L}$. Pero $m_L = -\frac{2}{1} = -2$

Luego: $m_R = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Además $(0,0) \in R$. Ya podemos encontrar la ecuación de la recta R , aplicando la fórmula punto-pendiente: $(y - y_0) = m(x - x_0)$

$$R: (y - 0) = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow R: x - 2y = 0 \Rightarrow R: y = \frac{1}{2}x$$

Ejercicio resuelto 5

Encuentre la ecuación general de la recta L que es perpendicular a la recta $T: 2x - 3y = 6$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $M: x + y - 2 = 0$ y $N: 2x - y = 0$

Solución

$T: y = \frac{2}{3}x - 2$. Luego: $m_T = \frac{2}{3}$. Como $L \perp T$ entonces, $m_L = -\frac{1}{m_T} = -\frac{3}{2}$.

Determinemos el punto de intersección de las rectas M y N para ello resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas;

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2/3, \quad y = 4/3$$

Luego, como $P = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ pertenece a la recta L , y la pendiente de ésta es: $m_L = -\frac{3}{2}$, entonces, la ecuación es:

$$L: y - \frac{4}{3} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 9x + 6y - 14 = 0$$

2.4 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a una recta L es la longitud del segmento perpendicular a la recta, desde el punto P_0 .

De esta forma, para hallar la distancia de P_0 a L , encontramos la ecuación de la recta perpendicular a L , pasando por P_0 . Intersectamos ambas rectas, obteniendo el punto S .

Luego, la distancia de P_0 a S , será la distancia de P_0 a la recta L .

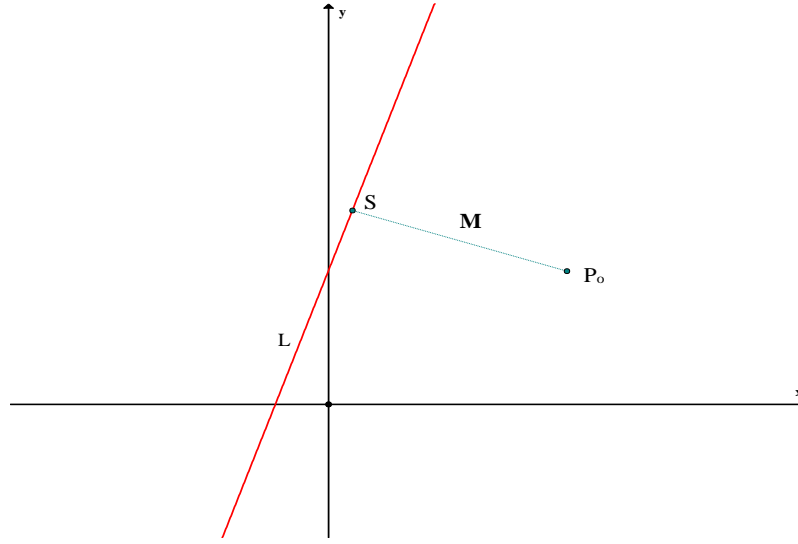


Fig. 15

Teorema

La distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a una recta $L: Ax + By + C = 0$ viene dada por:

$$d(P_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (VII)$$

Demostración

La ecuación de la recta M , perpendicular a L , pasando por P_0 es: $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$, ya que la pendiente de L es: $m_L = -\frac{A}{B}$

Por tanto la ecuación general de M es: $Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0$

Halleemos el punto S , intersección de L y M .

Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que:

$$x = -\frac{AB y_0 - B^2 x_0 + AC}{A^2 + B^2}; \quad y = \frac{A^2 y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2}$$

Así $L \cap M = \{S\}$. Donde:

$$S = \left(-\frac{AB y_0 - B^2 x_0 + AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$$

Como $d(P_0, L) = d(P_0, S)$, al elevar al cuadrado tenemos:

$$d(P_0, L)^2 = \left(x_0 + \frac{AB y_0 - B^2 x_0 + AC}{A^2 + B^2} \right)^2 + \left(y_0 + \frac{AB x_0 - A^2 y_0 + BC}{A^2 + B^2} \right)^2$$

Desarrollando, simplificando y factorizando, se tiene:

$$d(P_0, L)^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

Luego:

$$d(P_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (VII)$$

Ejercicio resuelto 6

Dadas las rectas paralelas $L_1: Ax + By + C = 0$ y $L_2: Ax + By + D = 0$. Demuestre que la distancia entre ellas viene dada por:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (VIII)$$

Solución

Para la demostración nos auxiliamos de la *fig. 16*, donde se muestran las rectas y un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in L_1$, de esta manera el problema se transforma en el caso distancia de un punto a una recta, o sea:

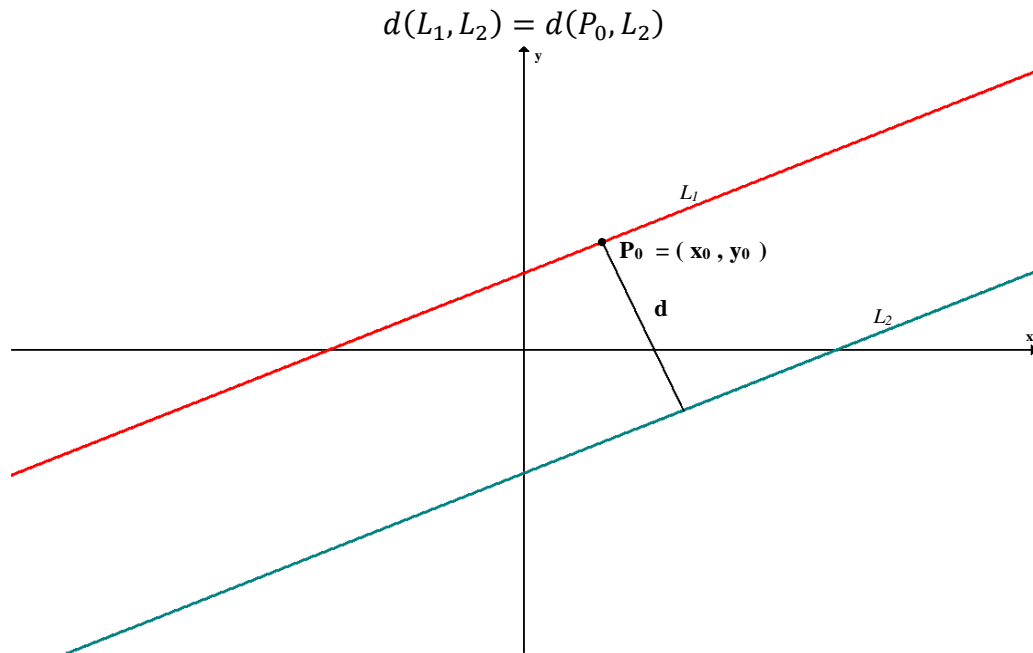


Fig. 16

Ahora bien, como $P_0 = (x_0, y_0) \in L_1$, tenemos: $(x_0, y_0) = \left(x_0, -\frac{Ax_0 + C}{B}\right)$

Entonces:

$$d(P_0, L_2) = \frac{\left|Ax_0 + B\left(-\frac{Ax_0 + C}{B}\right) + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Desarrollando y simplificando se tiene:

$$d(P_0, L_2) = \frac{|D - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Concluimos:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|D - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (VIII)$$

Ejercicio resuelto 7

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0 = (-3, 2)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área $3/2$, en el tercer cuadrante. Halle las coordenadas de los puntos de corte con los ejes y la distancia del punto $Q = (3, 7)$ a la recta obtenida.

Solución

La recta L pasa por P_0 , y debe cortar al eje x en un punto $A = (a, 0)$, situado a la izquierda de O , y al eje y en un punto $B = (0, b)$, por debajo de O (Vea la Fig. 17).

Como la recta que pasa por A y B tiene pendiente: $m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$, y ya que pasa por $(-3, 2)$, entonces la ecuación de L tiene la forma:

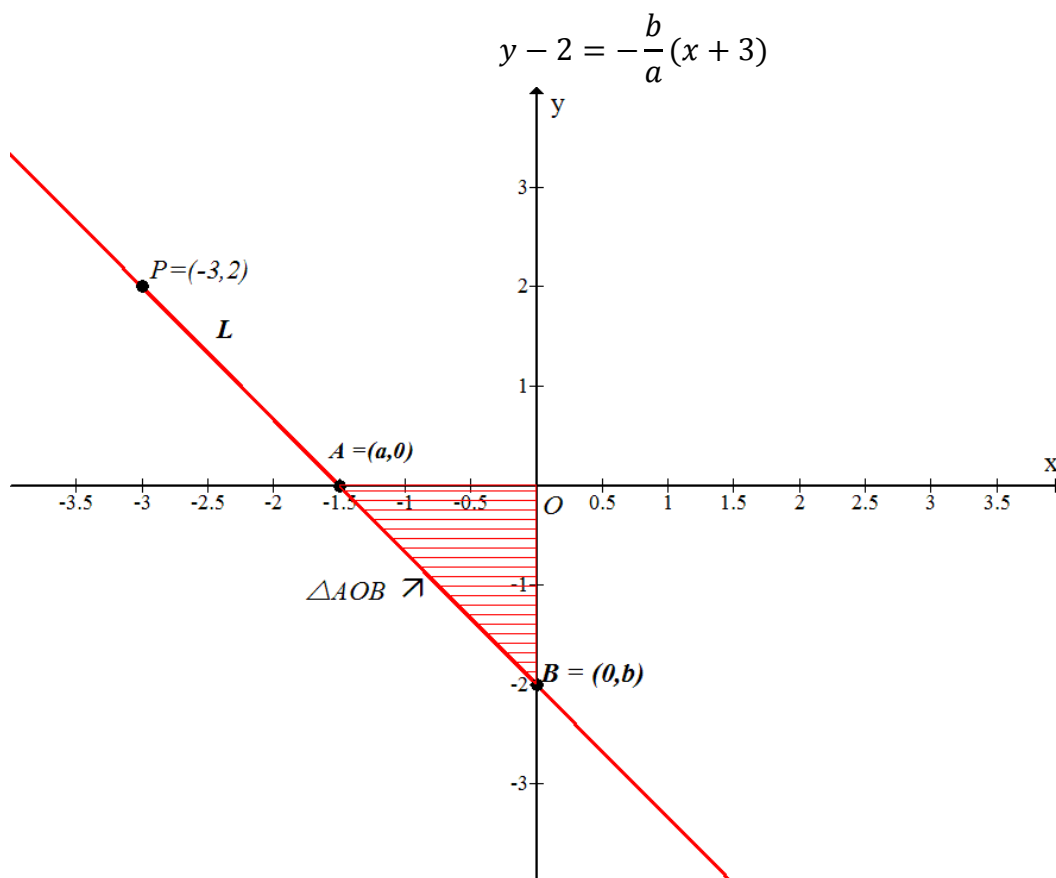


Fig. 17

La recta L intersecta al eje y en el punto $B = (0,b)$, es decir al hacer $x = 0$ en $y - 2 = -\frac{b}{a}(x + 3)$, nos queda: $b - 2 = -\frac{b}{a}(0 + 3) \Rightarrow ab - 2a = -3b$ (1)

Como:

$$A_{\Delta} = \frac{|a| \cdot |b|}{2} = \frac{(-a)(-b)}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot b = 3 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), nos queda, al eliminar denominadores y pasar todos los sumandos al primer miembro:

$$2a^2 - 3a - 9 = 0$$

Resolviendo, resulta: $a_1 = -\frac{3}{2}$ y $a_2 = 3$. Como $a < 0$, tomamos: $a = -\frac{3}{2}$, y por tanto:

$$b = \frac{3}{a} = \frac{3}{-\frac{3}{2}} = -2 \Rightarrow m = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

Luego la ecuación de la recta es:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 3) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - 2 \Leftrightarrow 4x + 3y + 6 = 0.$$

Los puntos de intersección son: $A = (-3/2, 0)$ y $B = (0, -2)$.

La distancia de Q a la recta L es:

$$d = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{39}{5}$$

Ejercicios propuestos

- 1) Halle la ecuación de la recta de inclinación 30° y que pasa por $(1,3)$.
- 2) Obtenga el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos $A = (-3,2)$ y $B = (1,5)$. Demuestre que este lugar geométrico es la mediatriz del segmento \overline{AB} .
- 3) Halle la ecuación de la recta perpendicular a $5x - y = 1$, y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 5.
- 4) Obtenga la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y = 15$.
- 5) Dado el triángulo de vértices $A = (-2,1)$, $B = (4,7)$ y $C = (6,-3)$. Halle las ecuaciones que pasan por B y trisecan el lado opuesto \overline{AC} .
- 6) La relación entre la temperatura T del aire en $^\circ\text{C}$ y la altitud h sobre el nivel del mar es aproximadamente lineal. Si la temperatura a nivel del mar es de 20°C , y a 4000m es de 8°C . a) Halle T en función de h ; b) ¿A qué altura la temperatura es de 0°C ?

7) Obtenga las ecuaciones de la altura de un triángulo de vértices $A = (-3,2)$, $B = (5,4)$ y $C = (3,-8)$. Halle el punto común de las tres alturas.

8) Resuelva el problema anterior para las medianas.

9) Halle todos los valores de a tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $(a, 4)$ y $(1, 3 - 2a)$, sea menor que 5.

10) La relación empírica entre el peso de una ballena T (en toneladas) y su largo L (en pies) viene dada por: $T = 1,70L - 42,8$.

a) Un científico de un centro oceanográfico observa una ballena de 30 pies, cuál será aproximadamente su peso; b) Si al estimar la longitud se comete un error de hasta 2 pies, ¿cuál será el error correspondiente en el peso?.

11) Halle el valor de a que hace que las rectas:

$$L_1: 3ax + 8y - 5 = 0 \quad \text{y} \quad L_2: -4ax + 6y + 1 = 0, \text{ sean perpendiculares.}$$

12) Hallar el cuarto vértice de un paralelogramo, sabiendo que tres vértices consecutivos son $(-4,1)$, $(2,3)$ y $(8,9)$.

13) Demuestre que los puntos $A = (-4,-1)$, $B = \left(3, \frac{8}{3}\right)$, $C = (8,-4)$ y $D = (2,-9)$ son vértices de un trapecio.

14) Considere un triángulo de vértices ABC. Demuestre que:

a) Las medianas del triángulo se intersectan en un punto, que denominamos: **baricentro**.

b) Las alturas se intersectan en un punto, que denominamos **ortocentro**.

c)(*) Las bisectrices se intersectan en un punto, que denominamos: **incentro**.

d) Las mediatrices se intersectan en un punto, que denominamos: **circuncentro**.

Sugerencia: tome un sistema de coordenadas, de manera que $A = (-a,0)$, $B = (a,0)$ y $C = (b,c)$.

Respuestas:

1) $y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$;

2) $8x + 6y - 13 = 0$

3) Dos respuestas: $x + 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$;

4) $3x - 5y + 8 = 0$;

5) $11x - 5y - 9 = 0$, $13x - y - 45 = 0$;

6) $T = -\frac{3}{1000}h + 20$; *aprox. 6.667m*

7) $x + 6y - 9 = 0$; $3x - 5y + 5 = 0$; $4x + y - 4 = 0$; $P = \left(\frac{15}{23}, \frac{32}{23}\right)$

9) $a < 1$ o $a > 2$

10) a) 8,2 TON; b) $|T - T^*| \leq 3,4 \text{ TON}$. (T^* peso aparente, T peso verdadero); 11) $a = \pm 2$; 12) (2,7)

3. Circunferencia

3.1 Introducción

Se denomina **circunferencia** al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo C . El punto fijo C se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se denomina **radio** (R).

En la **Fig.18** podemos observar la representación de la circunferencia. Los puntos A_1, A_2, A_3, \dots pertenecen a la circunferencia; el centro no es un punto de la circunferencia. En la **Fig.19**, se hace referencia al círculo que es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran en el interior de la circunferencia. Nuestro objetivo de estudio es la circunferencia.

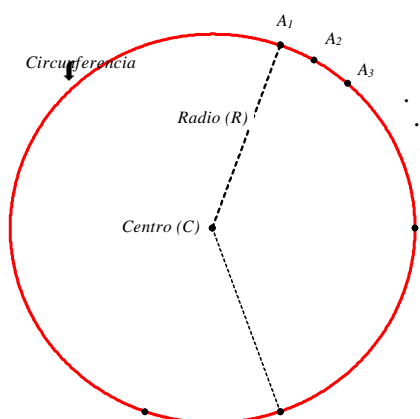


Fig. 18

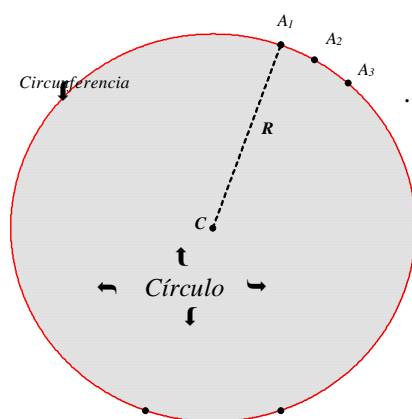


Fig. 19

Lo próximo en nuestro estudio corresponde a la búsqueda de la ecuación que identifique una circunferencia, para ello nos basaremos en la definición y ubicaremos nuestra circunferencia en un sistema cartesiano.

La **Fig. 20** muestra una circunferencia con el centro en el punto $C = (h, k)$, el radio (R) y el punto genérico $P = (x, y)$ que pertenece a la circunferencia.

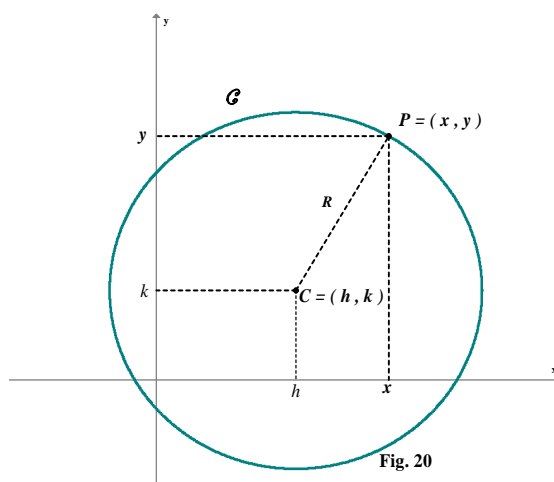


Fig. 20

Como $P = (x, y)$ pertenece a la circunferencia, P se encuentra a R unidades del centro, o sea: $d(P, C) = R$. Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos y tenemos:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = R$$

Elevando al cuadrado en ambos miembros llegamos a la ecuación buscada:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 \quad (1)$$

Esta se denomina ecuación **centro radio** o **cartesiana** de la circunferencia de centro $C = (h, k)$ y radio R .

Ejemplo

La ecuación $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$ corresponde a una circunferencia de centro $C = (1, 2)$ y radio $R = 5$.

3.2 Ecuación general de una circunferencia

Consideremos la ecuación (1); en ella desarrollamos los productos notables y así tenemos:

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

Hacemos $-2h = A$; $-2k = B$ y $h^2 + k^2 - R^2 = C$, de esta manera la ecuación queda:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

La expresión (2) se denomina **ecuación general de la circunferencia**. (Sin duda alguna, pues ella se generó a partir de la ecuación *centro radio*).

Ahora bien, ¿y toda ecuación de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ representa una circunferencia?. Para responder esta pregunta debemos saber qué condiciones deben cumplir las constantes A, B y C . Procedamos a determinar estas condiciones.

Lo que haremos a continuación es tomar la ecuación de la forma (2) y modificarla de tal manera que adquiera la forma *centro radio*.

La primera condición importante es que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales y de igual signo. Agrupemos adecuadamente los términos de la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow (x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$$

Completamos cuadrado tanto para x como para y , tenemos:

$$\left(x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2\right) = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

De esta manera hemos obtenido en el primer miembro dos trinomios cuadrados perfectos que una vez factorizados, nos da la siguiente expresión::

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Observa que el primer miembro ya tiene la forma para obtener un posible centro de circunferencia, sólo falta condicionar el segundo miembro que debe representar R^2 .

Bajo esa premisa y recordando que para todo número real x sólo existen tres posibilidades, a saber; $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$; tenemos que:

<p>i) $\frac{A^2+B^2-4C}{4} > 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 4C > 0$. Luego, la ecuación (3) representa una circunferencia de centro $C = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y radio $R = \sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}$.</p> <p>ii) $\frac{A^2+B^2-4C}{4} < 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 4C < 0$. Luego, la ecuación (3) no representa ningún lugar geométrico pues el primer miembro siempre es no negativo, mientras que el segundo es negativo.</p> <p>iii) $\frac{A^2+B^2-4C}{4} = 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 4C = 0$. Entonces, (3) representa un punto, siendo éste: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. (En este caso podríamos decir que representa una circunferencia de centro $C = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y radio $R = 0$).</p>

Nota: Lo anterior ilustra el procedimiento a seguir para llevar una *ecuación general* a la forma *centro radio*, el cual consiste en la completación de cuadrados.

Ejercicio Resuelto 1

Encuentre la ecuación general de la circunferencia de centro $C = (-1,1)$ y radio $R = 3$.

Solución

Recordamos la ecuación *centro radio*: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$; donde: $(h, k) = (-1,1)$

Entonces la ecuación de la circunferencia, en nuestro caso, es:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Desarrollando los productos notables, tenemos:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \text{ (ecuación general)}$$

Ejercicio resuelto 2

Determine el lugar geométrico que representa cada ecuación dada a continuación y dibuja ese lugar geométrico, cuando sea posible.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 6 = 0$; d) $x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{17}{4} = 0$

e) $x^2 - y^2 + 5x + 4y - 2 = 0$

Solución

a) Agrupamos las variables y completamos cuadrado:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x) + (y^2 + 10y) + 19 &= 0 \\(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 10y + 25) &= 1 + 25 - 19 \\ \underbrace{(x - 1)^2 + (y + 5)^2}_{h=1; \quad k=-5} &= \underbrace{7}_{R^2=7}\end{aligned}$$

La ecuación dada representa una circunferencia de centro $C = (1, -5)$ y radio $R = \sqrt{7}$ (Vea la Fig. 21).

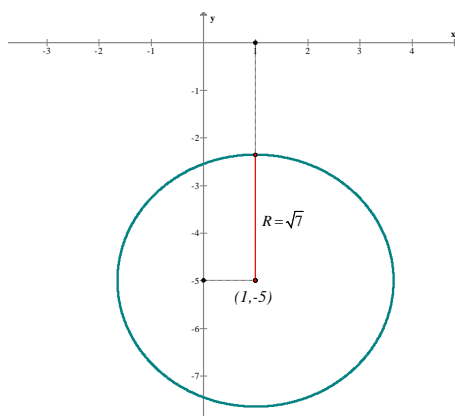


Fig.21

b) Agrupando, completando cuadrado y factorizando adecuadamente obtenemos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 &= 0 \\(x - 5)^2 + (y + 9)^2 &= 25 + 9 - 36 = -1\end{aligned}$$

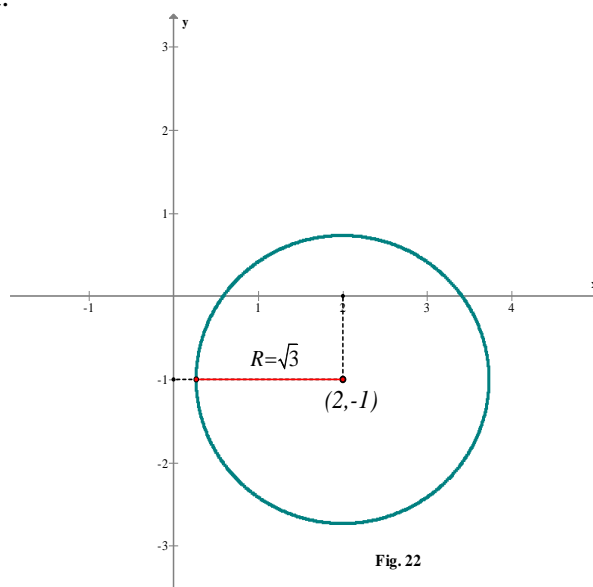
Aplicando la segunda conclusión del cuadro resumen podemos afirmar que: no existe lugar geométrico cuyos puntos satisfagan la ecuación obtenida, pues el primer miembro nunca es negativo y el segundo miembro siempre es negativo.

c) En este caso vemos que la ecuación: $3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 6 = 0$ presenta como característica que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales y positivos (pero $\neq 1$)

Para corregir esto agrupamos adecuadamente, factorizamos, completamos cuadrado y nuevamente factorizamos:

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 6 &= 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 12x) + (3y^2 + 6y) = -6 \\3(x^2 - 4x) + 3(y^2 + 2y) &= -6 \quad (\text{factor común}) \\3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) &= -6 + 12 + 3 \quad (\text{completamos cuadrados}) \\3(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 &= 9 \quad (\text{factorizamos}) \\(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 3 \quad (\text{simplificamos la ecuación por 3})\end{aligned}$$

Obtuvimos la ecuación de una circunferencia de centro $C = (2, -1)$ y radio $R = \sqrt{3}$. La **Fig.22** muestra la circunferencia.



- d) Sigue la orientación de los ejercicios anteriores y resuelve.
e) En este ejercicio, con una simple inspección, puedes responder.

Ejercicio resuelto 3

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $A = (1,1)$, $B = (1, -1)$ y $C = (2,0)$. Hacer un dibujo de esta circunferencia.

Solución

Para la solución de este ejercicio podemos partir, bien de la *ecuación centro radio*, o bien de la *ecuación general*. Trabajaremos con la *ecuación general*.

Como los puntos dados pertenecen a la circunferencia sus coordenadas satisfacen la ecuación general: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Generándose el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0 & \text{para } (1,1) \\ 1^2 + (-1)^2 + A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C = 0 & \text{para } (1, -1) \\ 2^2 + 0^2 + A \cdot 2 + B \cdot 0 + C = 0 & \text{para } (2,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 + A + B + C = 0 \\ 1 + 1 + A - B + C = 0 \\ 4 + 2A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = -2 & (1) \\ A - B + C = -2 & (2) \\ 2A + C = -4 & (3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\boxed{A = -2}; \boxed{B = 0} \text{ y } \boxed{C = 0}.$$

Entonces la ecuación general de la circunferencia es:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x = 0}$$

Haciendo el procedimiento usual para obtener la ecuación centro-radio, nos queda:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

La **Fig. 23** muestra la gráfica de la circunferencia.

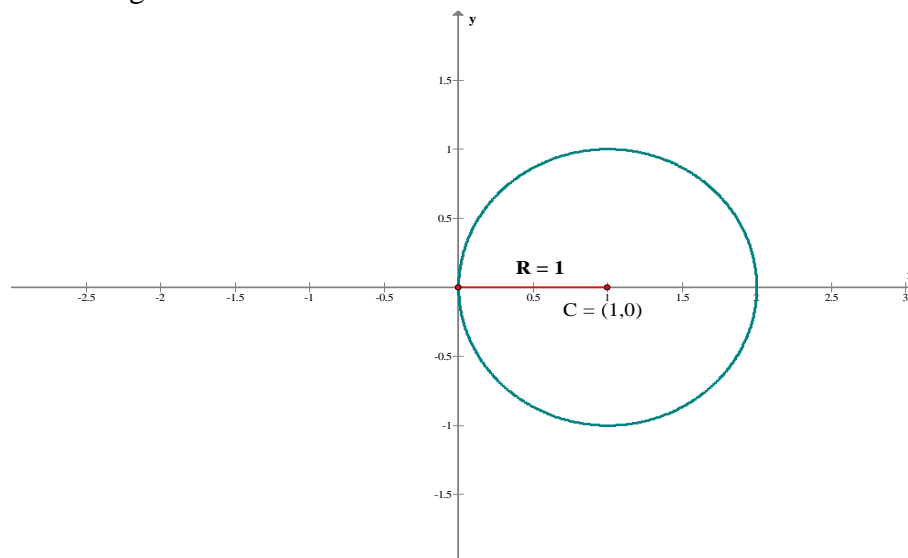


Fig. 23

Ejercicio resuelto 4

Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ y que pasa por el punto $P_0 = (3, 3)$.

Solución

Sea T la tangente a la circunferencia, trazada desde P_0 , y sea $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto de contacto de la recta tangente T con la circunferencia.

Como P_1 está en la circunferencia, sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$$(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = 5 \quad (a)$$

Asimismo, la recta T es perpendicular al radio que pasa por P_1 , entonces $m_r \cdot m_T = -1$.

Y como:

$$m_r = \frac{y_1 - 3}{x_1 + 2} \quad \text{y} \quad m_T = \frac{y_1 - 3}{x_1 - 3}$$

Entonces:

$$\frac{y_1 - 3}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_1 - 3}{x_1 - 3} = -1 \Leftrightarrow (y_1 - 3)^2 + (x_1 + 2)(x_1 - 3) = 0 \quad (b)$$

Las ecuaciones (a) y (b) permiten construir el sistema:

$$\begin{cases} (x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = 5 \\ (y_1 - 3)^2 + (x_1 + 2)(x_1 - 3) = 0 \end{cases}$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones del sistema y obtenemos:

$$(x_1 + 2)^2 - (x_1 + 2)(x_1 - 3) = 5$$

Resolvemos productos notables y reducimos términos semejantes para obtener: $x_1 = -1$ (c)

Sustituimos (c) en (a) y tenemos:

$$(-1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow 1 + (y_1 - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow (y_1 - 3)^2 = 4$$

$$y_1 - 3 = \pm 2 \Leftrightarrow y_1 = 3 \pm 2$$

De aquí obtenemos los dos puntos de tangencia como se muestra en la **Fig.24**, $P_1 = (-1,1)$ y $P_2 = (-1,5)$, por lo tanto, hay dos rectas tangentes a la circunferencia, desde P_0 . La recta tangente T_1 , con punto de tangencia $P_1 = (-1,1)$; y la recta tangente T_2 , con punto de tangencia en $P_2 = (-1,5)$.

$$T_1: \text{ con } m_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_1: y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$$

$$T_2: \text{ con } m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow T_2: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow x + 2y - 9 = 0$$

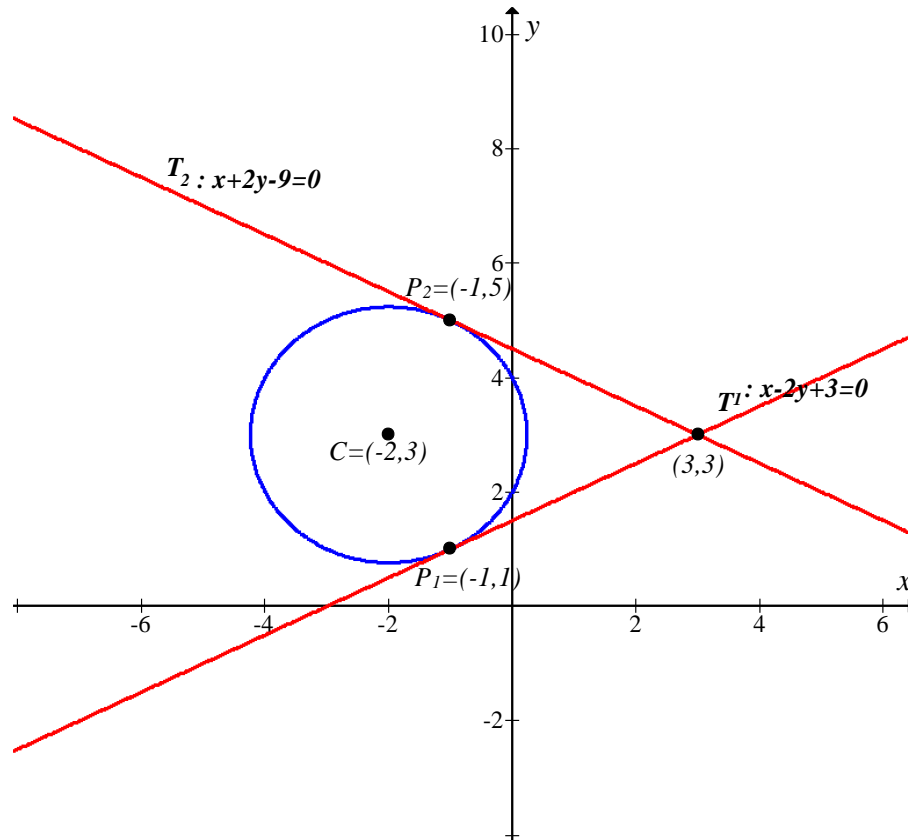


Fig. 24

Ejercicio resuelto 5

Dada la recta $y = mx + n$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Encuentre la relación entre m, n y r para que la recta sea: a) tangente, b) secante, c) exterior, a la circunferencia.

Solución

En cualquiera de las tres situaciones debemos plantear el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la circunferencia, o sea $\begin{cases} y = mx + n & (1) \\ x^2 + y^2 = r^2 & (2) \end{cases}$ y analizar cada caso. Esto es para la posición de tangencia el sistema debe tener solo una solución (un punto); en caso de ser la recta secante, el sistema debe tener dos soluciones (dos puntos) y para la situación de ser exterior, el sistema debe ser incompatible(no debe tener solución).

Sustituimos (1) en (2): $x^2 + (mx + n)^2 = r^2$.

Resolvemos el producto indicado y agrupamos adecuadamente, así tenemos:

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

Las tres situaciones planteadas en el problema están relacionadas con el discriminante de la ecuación, o sea, $\Delta = B^2 - 4AC$ (3) , donde:

$$A = 1 + m^2; \quad B = 2mn \quad \text{y} \quad C = n^2 - r^2$$

Sustituimos estos valores en (3): $\Delta = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2)$.

Efectuamos operaciones y reducimos: $\Delta = 4(r^2 + mr^2 - n^2)$

Ahora bien, para que la recta sea *tangente*, debe haber un solo punto de contacto, o sea $\Delta = 0$; de esta manera:

$$r^2(1 + m^2) - n^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (4)$$

Si la recta es *secante* entonces: $\Delta > 0$; así tenemos:

$$r^2(1 + m^2) > n^2 \Rightarrow r^2 > \frac{n^2}{(1 + m^2)} \Rightarrow r > \frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (5)$$

Por último si la recta es *exterior*, debe tenerse que: $\Delta < 0$, luego:

$$r^2(1 + m^2) < n^2 \Rightarrow 0 < r < \frac{|n|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (6)$$

Ejercicios propuestos

1) Para cada ecuación de la circunferencia que se da a continuación, encuentra los elementos que se piden y grafique la circunferencia:

- a) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$, encuentre centro y radio;
- b) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$, halle centro, radio e intersecciones con los ejes coordenados;
- c) $x^2 + y^2 = 49$, encuentre centro, radio y puntos de intersección con la recta $x - y = 0$

2) Con los elementos dados, en cada caso, encuentre la ecuación general de la circunferencia y haga la gráfica en un sistema cartesiano.

- a) $C = (4, -3)$, $r = 5$; b) $C = (-5, -12)$ y pasa por el punto $P = (3, -1)$.

-
- 3) Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, desde el punto $(6, 0)$.
- 4) Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro, el segmento que une $(1, 3)$ con $(7, 11)$.
- 5) Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $6x + 7y - 1 = 0$; y es tangente a las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$ (*).
- 6) Halle la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y tangente a $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ (*).
- 7) Los pares de circunferencias siguientes: ¿son secantes, tangentes o exteriores?.
- a) $x^2 + y^2 = 5$; $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- b) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$
- c) $x^2 - 2x + y^2 = 0$; $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
- 8) Demuestre que el centro de una circunferencia dada por: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ tiene su centro en la recta $y = x$ si y sólo si $a = b$. (Suponemos que $a^2 + b^2 - 4c > 0$)
- 9) Demuestre que la circunferencia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - 4c > 0$) pasa por el origen si y sólo si $c = 0$.
- 10) Halle la ecuación de la circunferencia de centro $(-3, -5)$ y es tangente a la recta $12x + 5y = 4$
- 11) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ desde el punto $(4, 2)$.
- 12) La recta M es paralela a la recta que pasa por $(-6, 2)$ y $(6, 7)$, y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Halle la ecuación de la recta M .
- 13) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(-2, 0)$ es dos veces la distancia al punto $(3, 1)$.
- 14) Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-1, 0)$, $(1, -2)$ y $(2, 3)$.
- 15) Halle los vértices B y C del triángulo equilátero ΔABC , inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, sabiendo que $A = (0, 3)$.
- 16) El techo de un ático forma un ángulo de 30° con el piso. Un tubo de 2 dm de radio se coloca como se indica en el dibujo de la **Fig. 25**. ¿Cuál es la distancia del borde del ático al punto donde el tubo toca el piso.
-

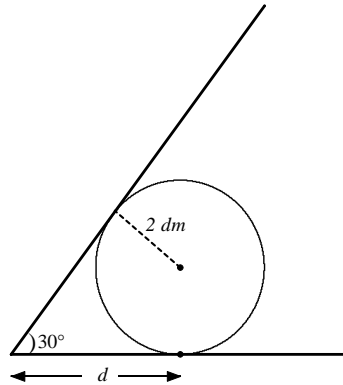


Fig. 25

17) Encuentre la longitud de la banda que une las poleas de ecuaciones, respectivamente:
 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ y $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 9$. (Ver **Fig. 26**)

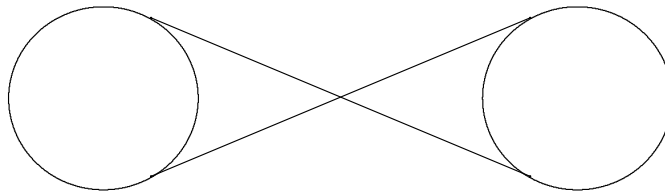


Fig. 26

18) Demuestra el Teorema de Pitágoras para las semicircunferencias (**Fig. 27**)
 $Area(A_1) + Area(A_2) = Area(A_3)$

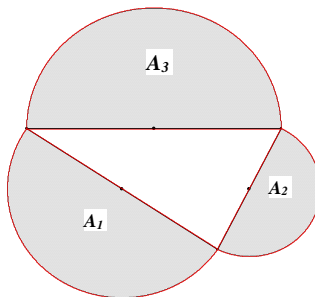


Fig. 27

19) Sea C una circunferencia y P un punto exterior a ella. Sea Q el punto de contacto de la recta tangente a C desde P . Sean N y M , los puntos de corte de la recta que une P con el centro O de la circunferencia C . Demuestre que: $d(P, M) \cdot d(P, N) = (d(P, Q))^2$ (Ver Fig. 28)

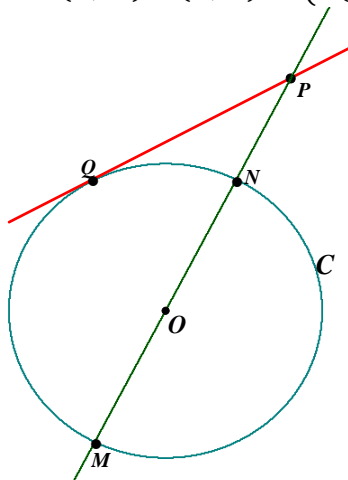


Fig. 28

20) Encuentre la ecuación de una circunferencia concéntrica con:

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y - 69 = 0 \text{ y que pasa por } (0, 8).$$

21) Halle los puntos de corte de $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ con la recta $y = x - 2$.

22) Determina el valor de b para que la recta: $y = x + b$, sea con respecto a $x^2 + y^2 = 25$:

a) tangente; b) secante; c) exterior.

23) Halle el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de los cuadrados de las distancias a $(-5, 2)$ y $(1, 4)$ vale 52.

24) Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$, desde el punto $(3, 2)$.

25) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$, que pasa por el punto de tangencia $P_o = (x_o, y_o)$ es $xx_o + yy_o = R^2$.

Respuestas

1) a) $C(5,5)$, $r = 5$; b) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $r = 2$, inters. con eje x : $(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, 0)$, inters. con eje y : $(0, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2})$; c) $C(0,0)$, $r = 7$, puntos de intersección: $P_1 = (\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}})$ y $P_2 = (-\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}})$. 2) a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$, b) $x^2 + y^2 + 10x + 24y - 16 = 0$. 3) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 6)$; 4) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$. (*)5) $C(5, -2)$, $R = 1$. (*)6) $x^2 + y^2 = R^2$; $R^2 = 12 \pm 8\sqrt{2}$. 7) a) Secantes; $P_1 = (1, 2)$; $P_2 = (-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$; b) Tangentes; $P = (2, 0)$; c) Exteriores. 10) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$. 11) $y = 2,6x - 8,24$; $y = -0,28x +$

3,12 $\left\{ \frac{8+3\sqrt{11}}{7} \approx 2,6 ; \frac{8-3\sqrt{11}}{7} \approx -0.28 \right\}$. **12)** Dos respuestas: $y = \frac{5}{12}x \pm \frac{65}{12}$. **13)** $\left(x - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{176}{9}$.
14) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$. **15)** $B = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; $C = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **16)** $d = (2\sqrt{3} + 4)dm$. **17)** $D = 42,6$.
20) $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 72$. **21)** (3,1) y (2,0). **22)** a) $b = \pm 5\sqrt{2}$; b) $-5\sqrt{2} < b < 5\sqrt{2}$; c) $b < -5\sqrt{2}$ ó $b > 5\sqrt{2}$. **23)** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; **24)** $y - 2 = \frac{4-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}(x - 3)$; $y - 2 = \frac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}(x - 3)$

4. La elipse

4.1. Introducción

En las secciones siguientes estudiaremos tres lugares geométricos que tienen como gráficas las curvas denominadas **cónicas**, como son: la elipse, la hipérbola y la parábola; todas ellas con muchísimas aplicaciones en Ingeniería, Arquitectura, Física, Matemática, etc.

Definición 1.

Sean F_1 y F_2 , dos puntos fijos del plano. Denominamos **elipse** al lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a F_1 y F_2 , es constante. O sea:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k \quad (1)$$

A los puntos F_1 y F_2 , los denominamos **focos** de la elipse.

Antes de hacer consideraciones analíticas, veamos una manera práctica para tener una idea de la forma de la elipse. En efecto, si clavamos dos tachuelas en F_1 y F_2 , y se amarra en cada tachuela los extremos de un hilo de longitud mayor que $d(F_1, F_2)$, y se tensa el hilo con la punta de un lápiz. Al mover el lápiz, siempre con el hilo tenso, la curva que resulta es una elipse de focos F_1 y F_2 , pues todo el tiempo la $d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{longitud del hilo}$ (Vea fig.1).

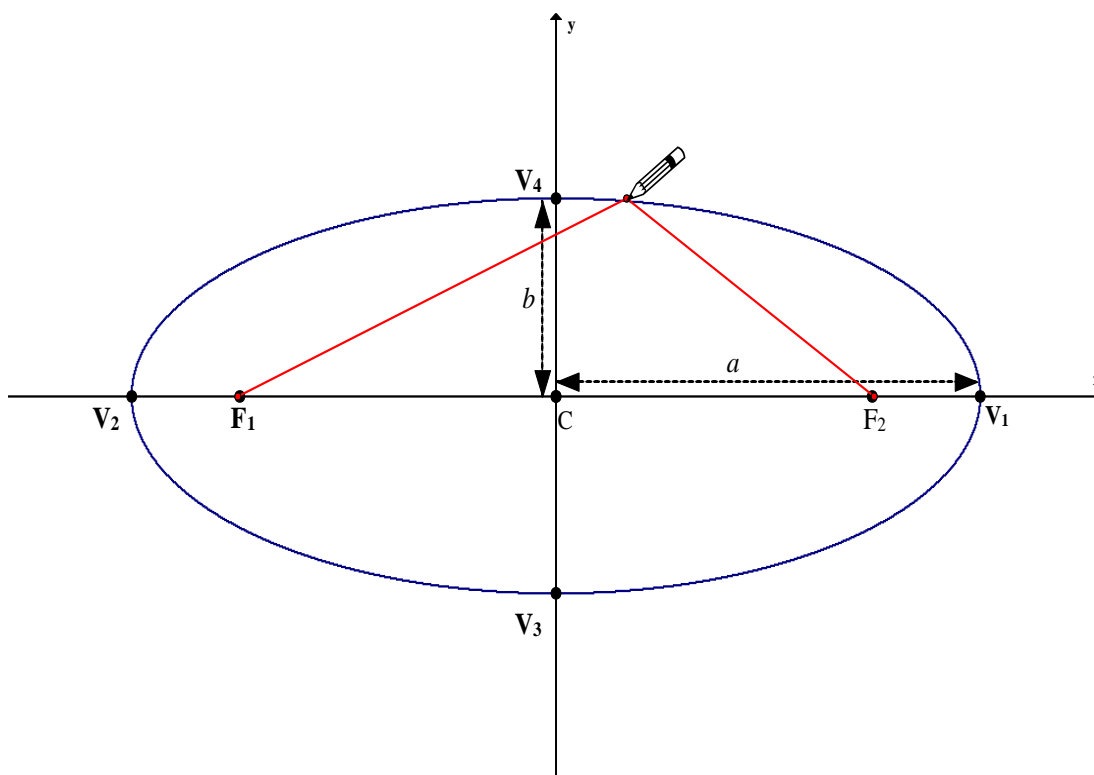


Fig. 1

4.2. La ecuación de la elipse y sus principales elementos

En lo que sigue deduciremos la fórmula que se obtiene de la definición de elipse.

Sea $P = (x, y)$ un punto de la elipse de focos F_1 y F_2 . Sea C el punto medio de $\overline{F_1F_2}$, el cual llamaremos **centro** de la elipse. Supongamos que las coordenadas de C son (h, k) .

Sea c la distancia de F_1 o F_2 , a C , la cual llamaremos **distancia focal** de la elipse, o sea: $d(F_1, C) = d(F_2, C) = c$.

Si tomamos el eje que contiene a los focos (**eje focal**), paralelo al eje de las x , entonces:

$$F_1 = (h - c, k) \quad y \quad F_2 = (h + c, k).$$

Por lo tanto para $P = (x, y)$ en la elipse se cumplirá: (Haremos en (1), $k=2a$, donde $a > 0$)

$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

Para mayor sencillez, haremos: $X = x - h$ e $Y = y - k$.

De esta forma tenemos: $\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = 2a$.

Pasando la primera raíz al segundo miembro y elevando al cuadrado, resulta:

$$(X - c)^2 + Y^2 = (X + c)^2 + Y^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2}$$

Simplificando y dejando la raíz sola en el segundo miembro, obtenemos:

$$(X - c)^2 - (X + c)^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{(X + c)^2 + Y^2}$$

Factorizando los dos primeros sumandos del primer miembro, simplificando por -4 y elevando al cuadrado, se tiene:

$$c^2X^2 + a^4 + 2ca^2X = a^2(X + c)^2 + a^2Y^2$$

Desarrollando, simplificando y pasando los sumandos constantes a la izquierda, y los demás a la derecha, resulta:

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)X^2 + a^2Y^2$$

Dividiendo entre $a^2(a^2 - c^2)$, nos queda:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Recordando que: $X = x - h$ e $Y = y - k$, tenemos:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (\text{A})$$

De acuerdo a la Figura 2: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a > d(F_1, C) + d(C, F_2) = 2c$ (En el triángulo PF_1F_2 : $\overline{F_1F_2} < \overline{PF_1} + \overline{F_2P}$). Luego: $a > c$, y por lo tanto existe $b > 0$ tal que $b^2 = a^2 - c^2$. De esta forma (A) queda así:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B})$$

A la ecuación (B) se le denomina **ecuación general de la elipse** de centro $C = (h, k)$, y radios: a (mayor) y b (menor), pues $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a > b$.

De inmediato justificaremos el nombre de radio que le hemos dado a los parámetros a y b .

Intersectemos la elipse con la recta $y = k$, y obtenemos: $(x - h)^2 = a^2 \Rightarrow x = h \pm a$.

Luego, $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ son los puntos obtenidos al intersectar la elipse con el **eje focal** $y = k$, y los llamaremos **vértices principales**. Observe que $d(C, V_1) = d(C, V_2) = a$, de manera que a es la distancia del centro a cada uno de los vértices principales, de ahí que sea natural el llamar al parámetro a , **radio mayor**. Asimismo, intersectando la elipse con el **eje menor** $x = h$, obtenemos dos puntos: $V_3 = (h, k - b)$ y $V_4 = (h, k + b)$, que reciben el nombre de **vértices secundarios**. (¡Prueba que éstas son sus coordenadas!). Además:

$d(C, V_3) = d(C, V_4) = b$. Por esta razón a, b , se le llama **radio menor**.

Vea la Figura 2.

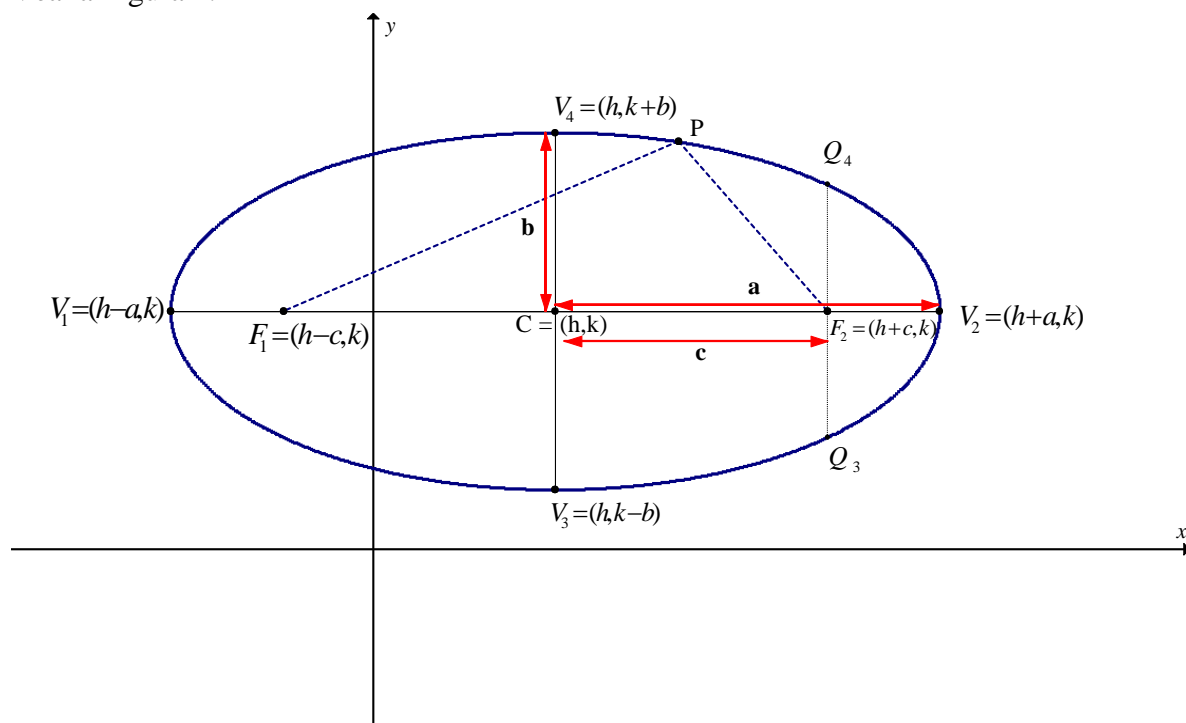


Fig. 2

Un caso muy importante, ocurre cuando $C = (0, 0)$, o sea que el centro de la elipse coincide con el origen de coordenadas. En este caso, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{C})$$

Si intersectamos la elipse con una recta perpendicular al eje focal, que pase por F_1 , se obtienen dos puntos: Q_1 y Q_2 . Al segmento: $\overline{Q_1 Q_2}$ lo llamamos **lado recto** del foco F_1 . Asimismo, si intersectamos la elipse con otra recta perpendicular al eje focal, que pase por el foco F_2 , obtenemos otros dos puntos: Q_3 y Q_4 . Y al segmento: $\overline{Q_3 Q_4}$ lo llamamos **lado recto** del foco F_2 .

De manera que una elipse tiene dos lados rectos: $\overline{Q_1Q_2}$ y $\overline{Q_3Q_4}$ (Vea las fig. 2 y 3). A la longitud de estas cuerdas se le llama **longitud del lado recto**. Observemos que usamos el singular porque la longitud de $\overline{Q_1Q_2}$ y $\overline{Q_3Q_4}$ es la misma, como demostraremos a continuación. Para hallar las coordenadas de Q_1 y Q_2 , resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ x = h - c \end{cases}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2b^2 - b^4 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

$$(y-k)^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = k \pm \frac{b^2}{a} \Rightarrow Q_1 = \left(h - c, k - \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } Q_2 = \left(h - c, k + \frac{b^2}{a}\right).$$

$$d(Q_1, Q_2) = \left(k + \frac{b^2}{a}\right) - \left(k - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}$$

Para hallar las coordenadas de Q_3 y Q_4 , resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ x = h + c \end{cases}$$

Vea la Fig. 2 y 3. (¡Proponemos los detalles al lector!). Resolviendo, obtenemos:

$$Q_3 = \left(h + c, k - \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } Q_4 = \left(h + c, k + \frac{b^2}{a}\right)$$

$$d(Q_3, Q_4) = \left(k + \frac{b^2}{a}\right) - \left(k - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}$$

De manera que:

$$d(Q_1, Q_2) = d(Q_3, Q_4) = L = \frac{2b^2}{a}$$

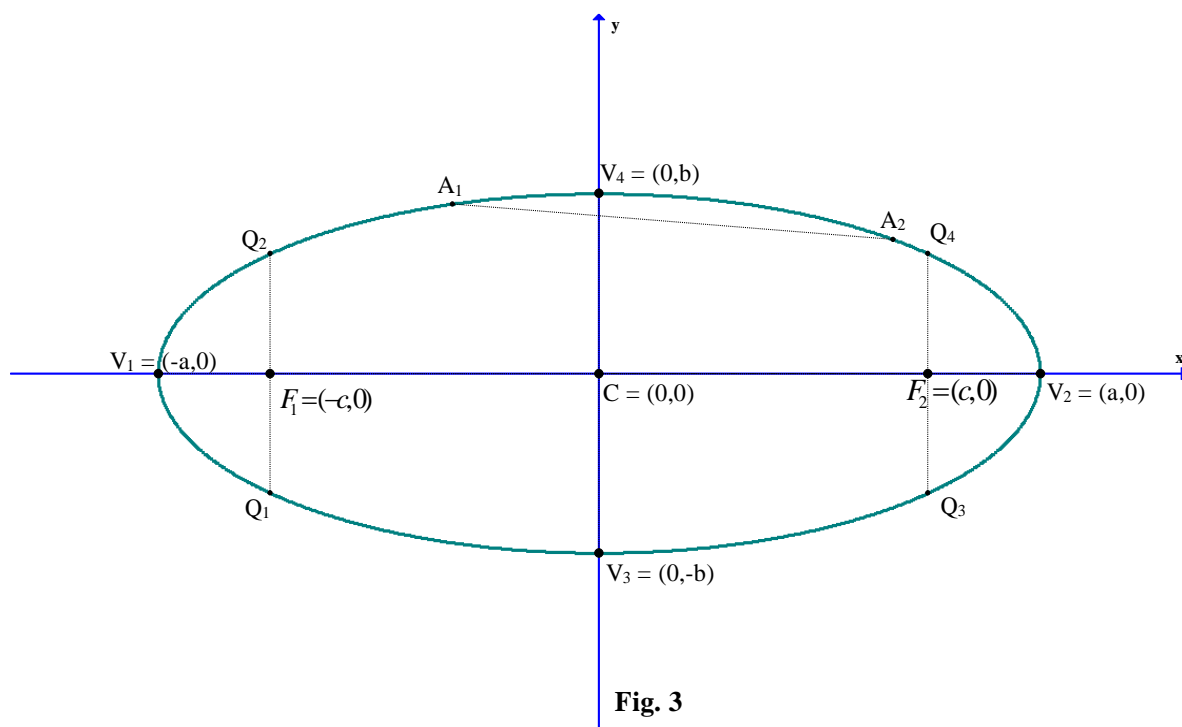
Luego la **longitud del lado recto** es:

$$L = \frac{2b^2}{a}$$

En las figuras 2 y 3, mostramos todos estos elementos.

En ella, los segmentos:

$\overline{A_1A_2}$; $\overline{V_1V_2}$ (diámetro mayor); $\overline{V_3V_4}$ (diámetro menor); $\overline{Q_1Q_2}$, $\overline{Q_3Q_4}$ (lados rectos); son cuerdas de la elipse. ¿Cuál es el tamaño de las cuatro últimas cuerdas?.



Finalmente denominamos **excentricidad** de la elipse a:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Observemos que si una elipse tiene como radios a y b ; y otra elipse tiene radios a y B , con $b > B$, entonces tenemos que la segunda es más achatada que la primera (Vea la fig.4). En efecto:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < \frac{\sqrt{a^2 - B^2}}{a} = E$$

Luego la excentricidad de la elipse mide hasta cierto punto su “achataamiento”, o sea: $E > e$ indica que la segunda elipse es más achatada que la primera. Así en la figura 4, tenemos las elipses:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ y } \frac{x^2}{4} + y^2 \text{ con } e = \frac{1}{2} < E = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

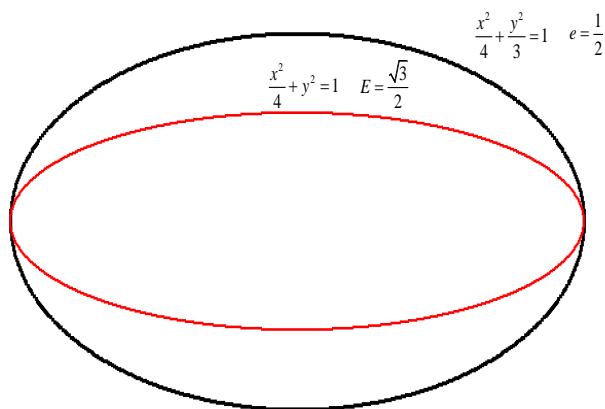


Fig. 4

Ejemplo 1

Hallemos los elementos principales de la elipse: $2x^2 + 9y^2 = 18$.

Primero la escribiremos en la forma acostumbrada, o sea en la forma:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

De la ecuación de la elipse tenemos que $C = (0,0)$; $a = 3$; $b = \sqrt{2}$; $c = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$. Luego:

Radio mayor = $a = 3$; radio menor = $b = \sqrt{2}$; diámetro mayor = 6; diámetro menor = $2\sqrt{2}$

$$e = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,88.$$

Para hallar los vértices, resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow V_1 = (-3,0) \text{ y } V_2 = (3,0), \text{ son los vértices}$$

principales.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow V_3 = (0, -\sqrt{2}) \text{ y } V_4 = (0, \sqrt{2}), \text{ son los vértices}$$

secundarios.

Para calcular la longitud del lado recto, hallamos las coordenadas de Q_3 y Q_4 , resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}$$

Luego: $Q_3 = \left(\sqrt{7}, -\frac{2}{3}\right)$ y $Q_4 = \left(\sqrt{7}, \frac{2}{3}\right)$, y por lo tanto: $L = \left|\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$.

¡ Halla Q_1 y Q_2 , y comprueba que $d(Q_1, Q_2) = \frac{4}{3}$!.

Finalmente hallemos la intersección de la elipse con la recta: $y = x + 3$; para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(x+3)^2}{2} = 1 \Rightarrow 11x^2 + 54x + 63 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, tenemos: $x_1 = -3$ y $x_2 = -\frac{21}{11}$

Por lo tanto: $y_1 = -3 + 3 = 0$ y $y_2 = -\frac{21}{11} + 3 = \frac{12}{11}$.

Luego: $P_1 = (-3, 0)$ y $P_2 = \left(-\frac{21}{11}, \frac{12}{11}\right)$.

Estos son los elementos más importantes de la elipse, no obstante después introduciremos el concepto de directriz, el cual es muy importante ya que en algunos textos se utiliza para introducir el concepto de elipse desde otro punto de vista equivalente al expresado en este texto (Vea la fig. 5)

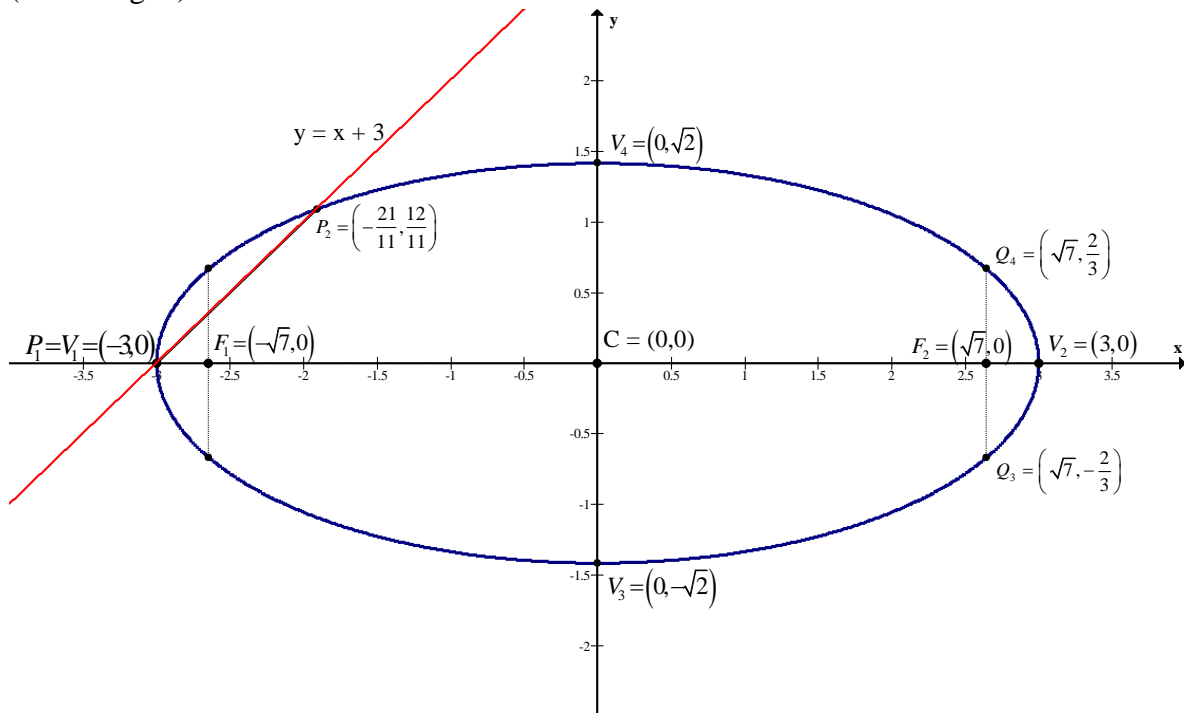


Fig.5

Observación

Si hacemos $c = 0$, o sea que ambos focos se superponen y coinciden con el centro, entonces $a = b$, y la elipse es en este caso muy especial, una circunferencia de centro $C = (h, k)$ y radio a .

O sea:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

Ejercicio resuelto 1

Halle la ecuación de la elipse a partir de los datos, y encuentre el resto de los elementos, en los siguientes casos:

a) $C = (2, 4)$, $F_2 = (5, 4)$ y diámetro menor 6; b) $F_1 = (-3, 1)$, $F_2 = (5, 1)$ y $V_4 = (1, 6)$.

Solución

a) $d(C, F_2) = c = \sqrt{(5-2)^2 + (4-4)^2} = 3$ y $2b = 6 \Rightarrow b = 3$;

Luego: $a^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$.

Por lo tanto la ecuación de la elipse es: (Vea la fig. 6):

$$\frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

$$F_1 = (h-c, k) = (2-3, 4) = (-1, 4); \quad F_2 = (h+c, k) = (5, 4)$$

$$V_1 = (h-a, k) = (2-3\sqrt{2}, 4); \quad V_2 = (h+a, k) = (2+3\sqrt{2}, 4);$$

$$V_3 = (h, k-b) = (2, 4-3) = (2, 1); \quad V_4 = (h, k+b) = (2, 4+3) = (2, 7)$$

La longitud del lado recto es: $L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 9}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$; Y la excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

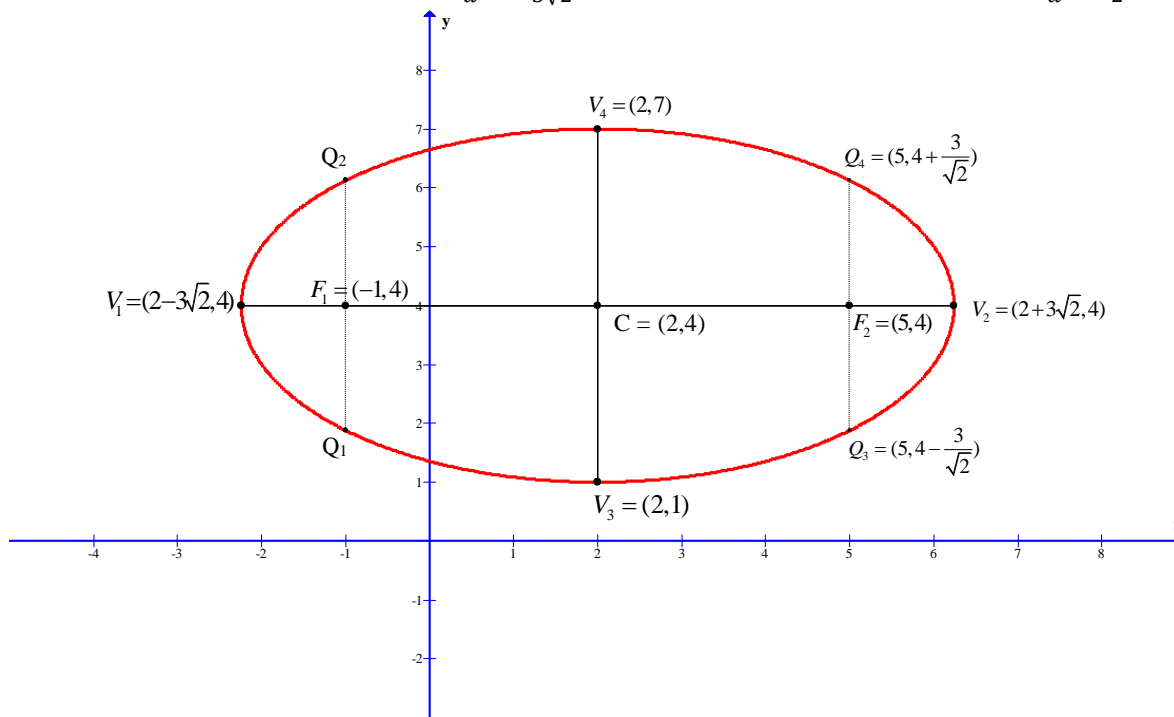


Fig.6

b) Como $F_1 = (-3,1)$ y $F_2 = (5,1)$, entonces:

$$d(F_1, F_2) = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (1 - 1)^2} = 8 = 2c \Rightarrow c = 4 \text{ (distancia focal)}$$

Ya que C es el punto medio de $\overline{F_1 F_2}$, entonces: $C = (1, 1)$.

Por otra parte: $d(C, V_4) = b = \sqrt{(1 - 1)^2 + (6 - 1)^2} = 5$, y como: $a^2 = b^2 + c^2$

entonces: $a^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$.

De manera que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x - 1)^2}{41} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$$

$$V_1 = (h - a, k) = (1 - \sqrt{41}, 1); V_2 = (h + a, k) = (1 + \sqrt{41}, 1)$$

$$V_3 = (h, k - b) = (1, 1 - 5) = (1, -4); V_4 = (h, k + b) = (1, 1 + 5) = (1, 6)$$

$$L = \frac{2b^2}{a} = \frac{50}{\sqrt{41}} \approx 7,8 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{41}} \approx 0,62$$

Vea la figura 7.

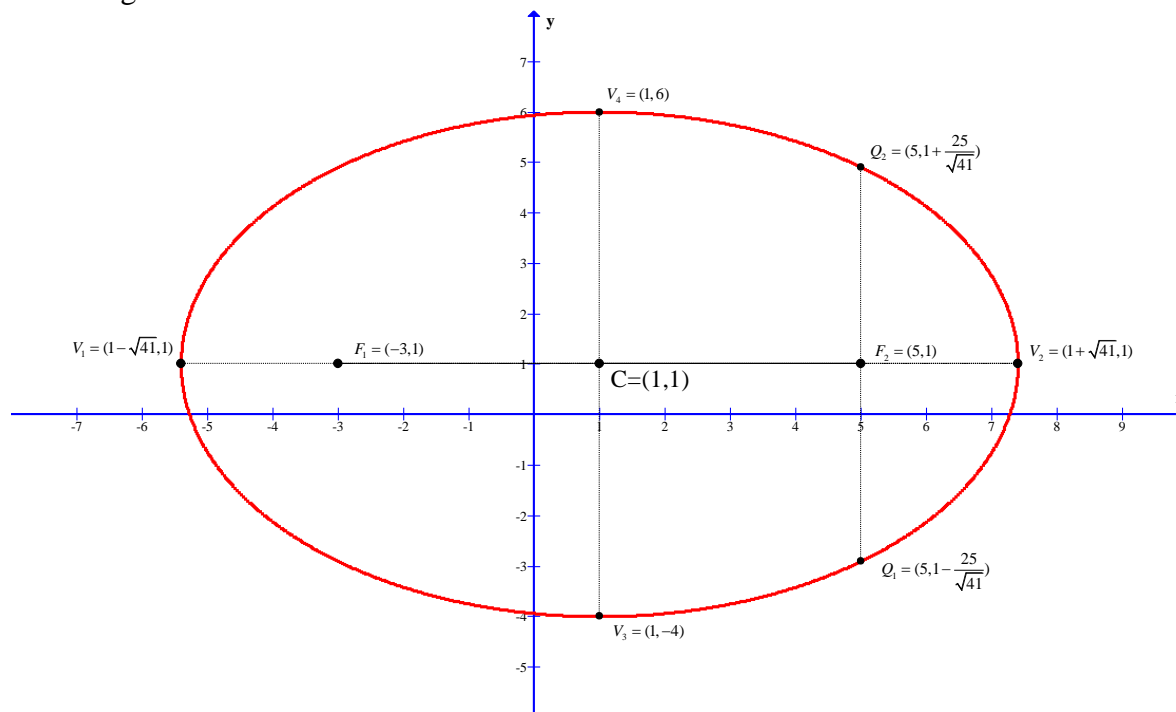


Fig. 7

4.3. Elipse de eje focal vertical

Si el eje focal, es decir la recta que pasa por los focos, es paralela al eje de las y, siendo el centro $C = (h, k)$, entonces los focos serán: $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, por estar en la recta focal $x = h$. En este caso, simplemente, intercambiamos los papeles de la **a** y de la **b** en la ecuación (B) de la elipse, quedando:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (\text{C})$$

Donde: $a^2 = b^2 + c^2$.

Asimismo:

$$V_1 = (h, k - a); \quad V_2 = (h, k + a); \quad V_3 = (h - b, k); \quad V_4 = (h + b, k)$$

Radio mayor = $2a$; radio menor = $2b$; eje mayor o focal: $x = h$; eje menor: $y = k$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; Longitud del lado recto: $L = \frac{2b^2}{a}$.

Le proponemos la deducción de toda la información anterior, para ello se puede guiar por la sección 4.2 (Vea la fig.8).

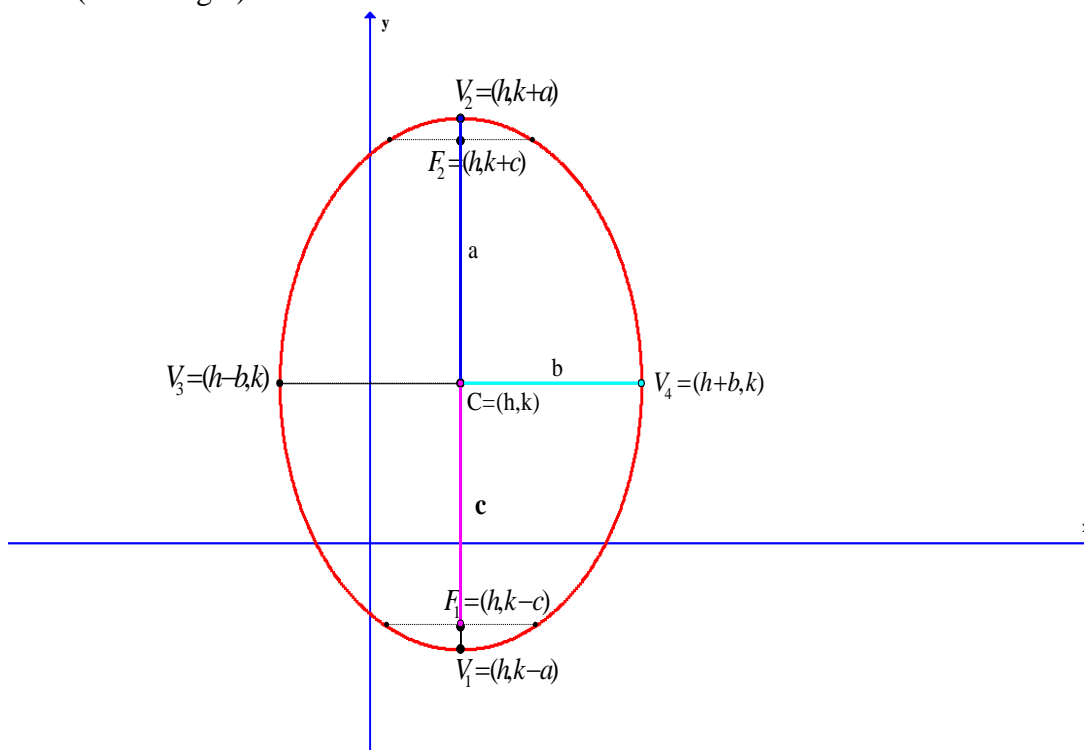


Fig. 8

Ejemplo 2

Hallemos la ecuación de la elipse de centro $C = (-4, 2)$, $F_2 = (-4, 6)$ y $V_1 = (-4, -4)$, y los demás elementos de ésta.

$$c = d(C, F_2) = |6 - 2| = 4; \quad h = -4; \quad k = 2; \quad a = d(C, V_1) = |-4 - 2| = 6$$

Luego: $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$ $2b = 6 \Rightarrow b = 3$ $c = 2\sqrt{5}$. Por lo tanto la elipse es:

$$\frac{(x+4)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

Asimismo: $F_1 = (h, k - c) = (-4, 2 - 4) = (-4, -2)$; $F_2 = (-4, 6)$

$$V_1 = (-4, -4); \quad V_2 = (h, k + a) = (-4, 2 + 6) = (-4, 8)$$

$$V_3 = (h - b, k) = (-4 - 2\sqrt{5}, 2); \quad V_4 = (h + b, k) = (-4 + 2\sqrt{5}, 2)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad L = \frac{2b^2}{a} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

(Vea la fig.9)

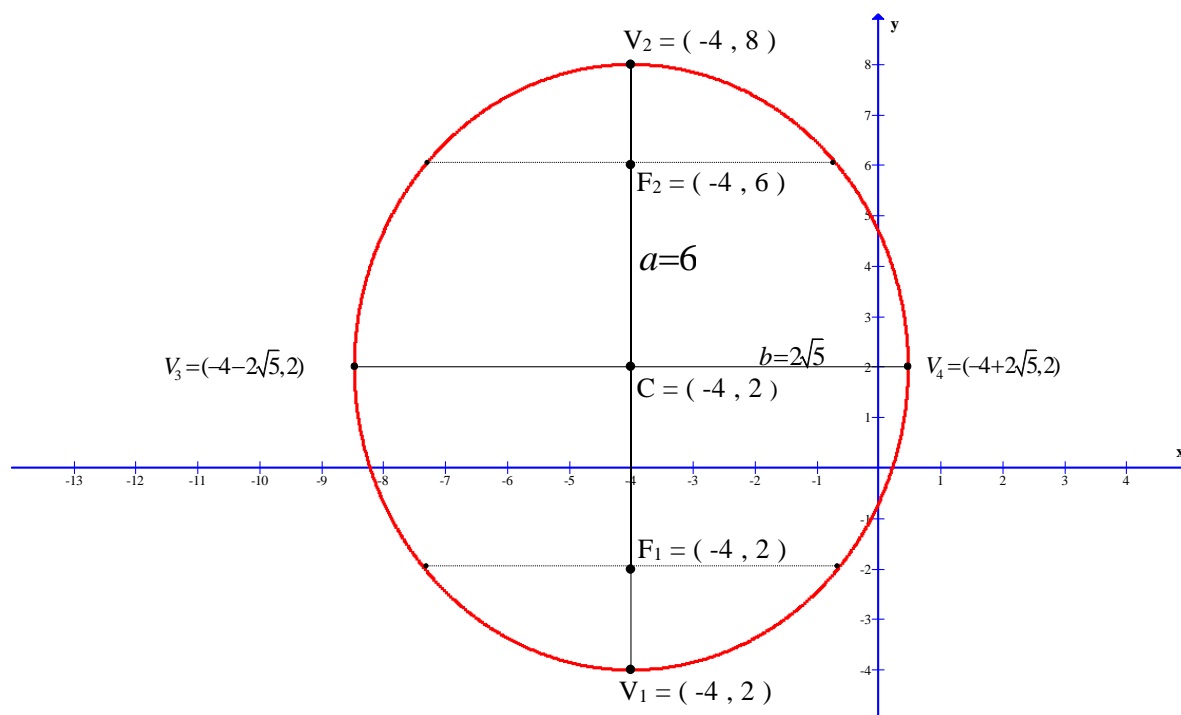


Fig. 9

Ejercicio resuelto 3

a) Halle la ecuación de la elipse sabiendo que $F_2 = (2, 4)$, $V_1 = (2, -6)$ y $e = 0,2$; b) Determine el resto de los elementos de la elipse; c) Encuentre los posibles puntos de intersección de la elipse con los ejes de coordenadas.

Solución

a) Como F_2 y V_1 tienen la misma abscisa, el eje focal es paralelo al eje de las y, luego la elipse debe tener como ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad (C)$$

Ahora como: $F_2 = (h, k + c) = (2, 4) \Rightarrow h = 2$ y $k + c = 4$ (1)

$V_1 = (h, k - a) = (2, -6) \Rightarrow k - a = -6$ (2)

Por otra parte: $e = \frac{c}{a} = 0,2 \Rightarrow c = 0,2a$ (3). Formamos el sistema:

$$\begin{cases} k + c = 4 \\ k - a = -6 \\ c - 0,2a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{25}{3}; \quad c = \frac{5}{3}; \quad k = \frac{7}{3}$$

$$\text{Luego: } b^2 = a^2 - c^2 = \frac{625}{9} - \frac{25}{9} = \frac{600}{9} = \frac{200}{3} \Rightarrow b = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{En resumen, tenemos: } C = \left(2, \frac{7}{3}\right); a^2 = \frac{625}{9}; b^2 = \frac{200}{3}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{200}{3}} + \frac{(y-\frac{7}{3})^2}{\frac{625}{9}} = 1$$

$$F_1 = (h, k - c) = \left(2, \frac{7}{3} - \frac{5}{3}\right) = \left(2, \frac{2}{3}\right); F_2 = (2, 4); e = 0,2$$

$$V_1 = (2, -6); V_2 = (h, k + a) = \left(2, \frac{7}{3} + \frac{25}{3}\right) = \left(2, \frac{32}{3}\right)$$

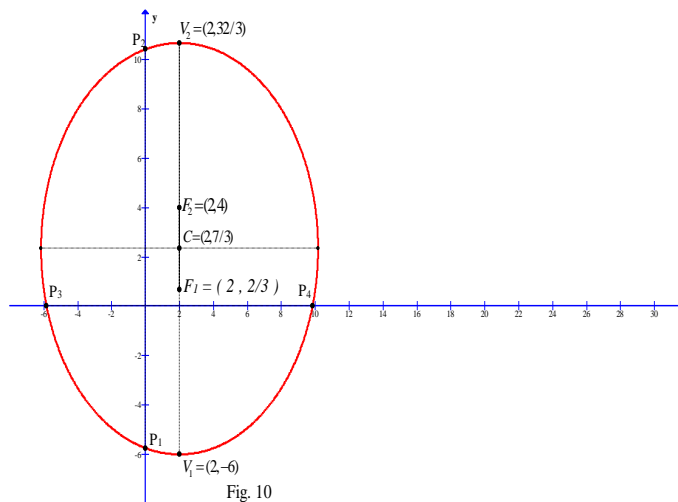
$$V_3 = (h - b, k) = \left(2 - 10\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{7}{3}\right); V_4 = (h + b, k) = \left(2 + 10\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\text{Longitud del lado recto: } L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot \frac{200}{3}}{\frac{25}{3}} = 16$$

c) Para hallar las posibles intersecciones con los ejes, resolvemos estos sistemas:

$$\begin{cases} \frac{3(x-2)^2}{200} + \frac{9(y-\frac{7}{3})^2}{625} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \frac{3(x-2)^2}{200} + \frac{9(y-\frac{7}{3})^2}{625} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Resultando: $P_1 = (0, -5.75)$, $P_2 = (0, 10.41)$; $P_3 = (-5.84, 0)$, $P_4 = (9.84, 0)$.
(Vea la fig.10)



Ejercicio resuelto 4

Halle las rectas tangentes a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$, desde el punto $(0,5)$.

Solución

Escribiendo la ecuación en la forma (B), tenemos:

$$\frac{y^2}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2; \quad b^2 = 1 \Rightarrow b = 1; \quad c^2 = 4 - 1 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$C = (0,0); \quad V_1 = (0,-2); \quad V_2 = (0,2); \quad F_1 = (-\sqrt{3},0); \quad F_2 = (\sqrt{3},0)$$

La recta tangente M desde $(0,5)$ tiene la forma: $y = mx + 5$.

Debemos hallar el valor de m que hace que la recta M corte a la elipse en un solo punto, o sea que M sea recta tangente a la elipse.

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ y = mx + 5 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + (mx + 5)^2 = 4 \Rightarrow (4 + m^2)x^2 + 10mx + 21 = 0$$

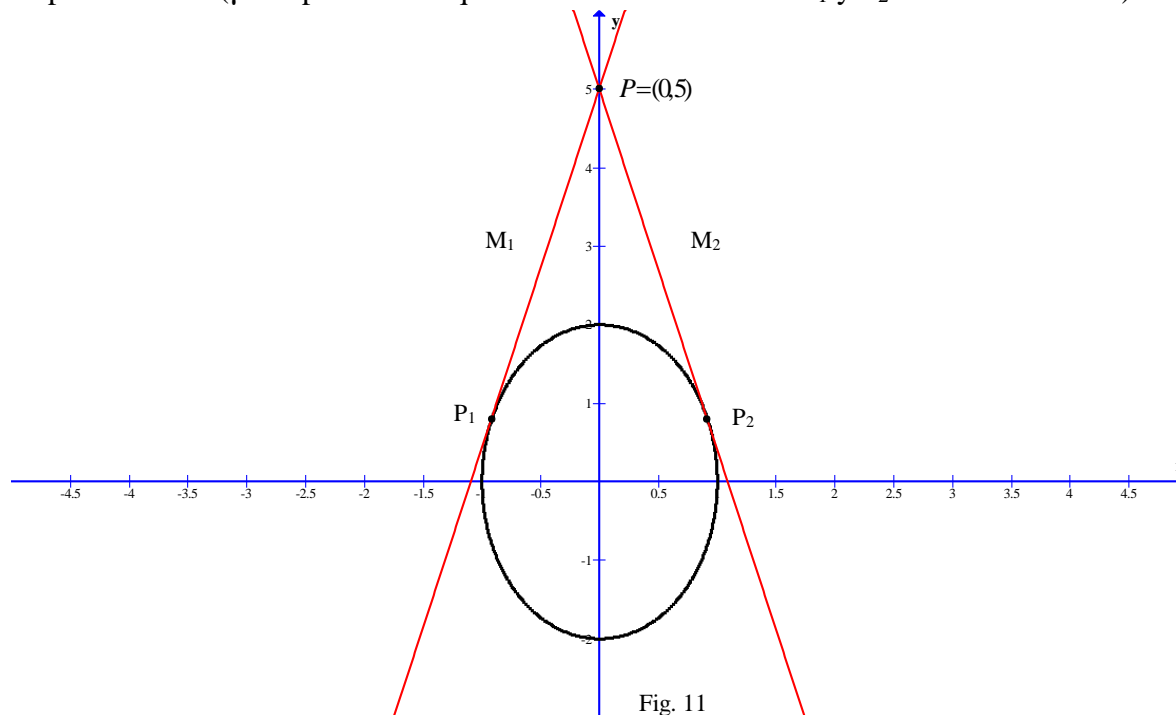
Para que la ecuación de segundo grado tenga una sola raíz (doble), debe tenerse que:

$$\Delta = B^2 - 4AC = (10m)^2 - 4(4 + m^2) \cdot 21 = 16m^2 - 336 = 0$$

Luego: $m = \pm\sqrt{21}$. Es decir, hay dos rectas tangentes a la elipse, desde el punto $(0,5)$:

$$M_1: y = \sqrt{21}x + 5; \quad M_2: y = -\sqrt{21}x + 5 \quad (\text{Vea la fig.11})$$

Los puntos de tangencia, son: $P_1 = \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $P_2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{5}, \frac{4}{5}\right)$, para M_1 y M_2 , respectivamente (¡Compruebe Ud. que las las coordenadas de P_1 y P_2 son las indicadas!).



Nota: la obtención de rectas tangentes a una elipse, desde un punto exterior puede llevar a ecuaciones de grado mayor que dos, y que por tanto, la mayoría de las veces, tendrá que usarse algunos métodos aproximados, como Newton-Raphson, secante, etc. Estos métodos se suelen estudiar en el tema de derivadas de la mayoría de los programas de Cálculo I, por lo que en este tema podremos resolver solo algunos de estos problemas de tangencia.

4.4 La ecuación general de la elipse

Sea la elipse de centro $C=(h,k)$ y eje focal paralelo al eje de las x :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (B)$$

Si eliminamos denominadores, desarrollamos los productos notables y agrupamos, nos resulta:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2hb^2x - 2ka^2y + (a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2) = 0$$

De manera que la ecuación (B) toma la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (D)$$

Donde: $A = b^2$, $B = a^2$, $C = -2hb^2$, $D = -2ka^2$ y $E = a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2$.

Observe que de (C) llegamos a (D), siendo $B > A > 0$, por ser $a > b$. A la ecuación (D) la llamamos la **ecuación general de la elipse**.

Recíprocamente, la ecuación (D) con $B > A > 0$, representa a una elipse de eje focal paralelo al eje de las x . Demostremos esto.

Completando cuadrados, resulta:

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2}\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B} + \frac{D^2}{4B^2}\right) = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = F$$

O sea:

$$\frac{\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2}{\frac{F}{A}} + \frac{\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2}{\frac{F}{B}} = 1$$

Si $F > 0$ y ya que $B > A > 0$, entonces: $\frac{F}{A} > \frac{F}{B} > 0$. Por lo tanto (B) representa una elipse de eje focal paralelo al eje de las x .

En resumen las dos condiciones para que la ecuación (B) represente una **elipse con eje focal paralelo al eje de las x** , son:

$$1) 0 < A < B \quad 2) F = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$$

Similarmente el lector puede demostrar como **ejercicio**, que la ecuación (D) representa a una **elipse con eje focal paralelo al eje de las y** , si:

$$1) 0 < B < A; \quad 2) F = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$$

Ejemplo 3

Determine si la ecuación: $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$ una elipse. En caso afirmativo halle sus principales elementos.

$A = 4$; $B = 9$; $C = -8$; $D = 18$; $E = -23$

$0 < A = 4 < B = 9$ y $F = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = 36 > 0$. Luego, de acuerdo a las consideraciones anteriores, la ecuación representa una elipse de eje focal paralelo al eje de las x .

Sin embargo, recomendamos al lector, proceder siempre a completar cuadrados, pues al fin al cabo, se necesita la forma con centro y radios (Forma cartesiana).

En efecto, tenemos:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 2y + 1) = 23 + 4 + 9 = 36 \Rightarrow 4(x - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$$

Luego:

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

De manera que es una elipse de centro $C = (1, -1)$; $c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$$F_1 = (1 - \sqrt{5}, -1); F_2 = (1 + \sqrt{5}, -1); V_1 = (-2, -1); V_2 = (4, -1)$$

$$V_3 = (1, -3); V_4 = (1, 1); e = \frac{\sqrt{5}}{3}; L = \frac{8}{3}$$

Ejercicio resuelto 5

¿Representa una elipse la ecuación: $4x^2+5y^2+2x+6y+9=0$?

Solución

Completando cuadrados nos queda:

$$4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + 5\left(y^2 + \frac{6}{5}y + \frac{9}{25}\right) = \frac{4}{16} + \frac{45}{25} - 9 = -\frac{2780}{400}$$
$$4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = -\frac{2780}{400} \quad (!)$$

Como el primer miembro es no negativo y el segundo, es negativo, no hay puntos del plano que satisfagan lo anterior. Por tanto no representa ningún lugar geométrico.

Observe que aunque $A = 4 > 0$ y $B = 5 > 0$, sin embargo no se cumple la segunda condición, pues $F = -\frac{17}{2} < 0$.

4.5 La elipse como cónica

Sea L una recta y F un punto fijo no perteneciente a la recta L . Al conjunto de puntos P del plano para los cuales se cumple que:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, L)} = \text{constante} = \gamma$$

La denominamos **cónica de directriz L , foco F y parámetro γ** .

A continuación demostraremos que una cónica de foco $F = (\alpha, \beta)$, directriz $L: x = \omega$ y parámetro $\gamma \in (0,1)$ es una elipse, siendo F uno de sus focos.

Teorema 1

Sea G una cónica de foco $F = (\alpha, \beta)$, directriz $L: x = \omega$ y parámetro $\gamma \in (0,1)$. Entonces G es una elipse, siendo uno de sus focos, el foco F de la cónica.

Demostración:

$\forall P \in G$, se cumple:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, L)} = \gamma \Rightarrow d(P, F)^2 = \gamma^2 d(P, L)^2$$

$$d(P, F)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = X^2 + Y^2; \quad d(P, L)^2 = (x - \omega)^2 = (X + \alpha - \omega)^2$$

Donde: $X = x - \alpha$ e $Y = y - \beta$ (Vea fig. 12).

Entonces: $X^2 + Y^2 = \gamma^2 (X + \alpha - \omega)^2$.

Desarrollando, agrupando los sumandos con variables y pasando los sumandos constantes a la derecha, resulta:

$$(1 - \gamma^2)X^2 - 2\gamma^2(\alpha - \omega)X + Y^2 = \gamma^2(\alpha - \omega)^2$$

Completando cuadrados, tenemos:

$$(1 - \gamma^2) \left(X^2 + \frac{2\gamma^2(\omega - \alpha)X}{1 - \gamma^2} + \frac{\gamma^4(\omega - \alpha)^2}{(1 - \gamma^2)^2} \right) + Y^2 = \gamma^2(\omega - \alpha)^2 + \frac{\gamma^4(\omega - \alpha)^2}{1 - \gamma^2}$$

$$(1 - \gamma^2) \left(X + \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)}{1 - \gamma^2} \right)^2 + Y^2 = \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{1 - \gamma^2}$$

Recordando que: $X = x - \alpha$ e $Y = y - \beta$, y haciendo operaciones, queda finalmente:

$$(1 - \gamma^2) \left(x - \frac{\alpha - \gamma^2\omega}{1 - \gamma^2} \right)^2 + (y - \beta)^2 = \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{1 - \gamma^2}$$

O sea:

$$\frac{\left(x - \frac{\alpha - \gamma^2\omega}{1 - \gamma^2} \right)^2}{\frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{(1 - \gamma^2)^2}} + \frac{(y - \beta)^2}{\frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{1 - \gamma^2}} = 1 \quad (1)$$

Ciertamente, (1) tiene la forma de la ecuación (B), o sea:

$$h = \frac{\alpha - \gamma^2\omega}{1 - \gamma^2}, \quad k = \beta, \quad a^2 = \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{(1 - \gamma^2)^2}, \quad b^2 = \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{1 - \gamma^2}$$

Como $\gamma \in (0,1)$, entonces: $0 < (1 - \gamma^2)^2 < 1 - \gamma^2 < 1$, y por tanto: $a^2 > b^2$ (¡Explique!)

Si hacemos: $c^2 = a^2 - b^2$, entonces:

$$c^2 = \frac{\gamma^4(\omega - \alpha)^2}{(1 - \gamma^2)^2} \Rightarrow c = \frac{\gamma^2|\omega - \alpha|}{1 - \gamma^2}$$

Observe que entonces:

$$\frac{c^2}{a^2} = \gamma^2 \Rightarrow \gamma = \frac{c}{a} = e$$

Además si $\omega < \alpha$, entonces: $c = \frac{\gamma^2(\alpha - \omega)}{1 - \gamma^2}$, y haciendo operaciones, nos queda:

$F_1 = (h - c, k) = (\alpha, \beta) = F$. Si $\omega > \alpha$, se puede probar que $F_2 = (h + c, k) = (\alpha, \beta) = F$.

Además podemos obtener las ecuaciones de las directrices en función de los parámetros de la elipse (O sea: h, k, a, b y c).

En efecto:

$$\text{De: } a^2 = \frac{\gamma^2(\omega - \alpha)^2}{(1 - \gamma^2)^2} \text{ y } h = \frac{\alpha - \gamma^2\omega}{1 - \gamma^2}$$

Despejando α en ambas e igualando, tenemos después de ciertas operaciones: $a + \gamma h = \gamma\omega$.

Luego, recordando que: $\gamma = \frac{c}{a}$, entonces resulta:

$$\omega = h + \frac{a^2}{c}$$

De manera que la directriz para el foco $F = (h + c, k)$ es la recta: $x = h + \frac{a^2}{c}$.

Similarmente, la directriz para el foco $(h - c, k)$ es la recta: $x = h - \frac{a^2}{c}$.

Esto es lo que nos permitirá enunciar el teorema 2, en la forma en que aparece en este texto.

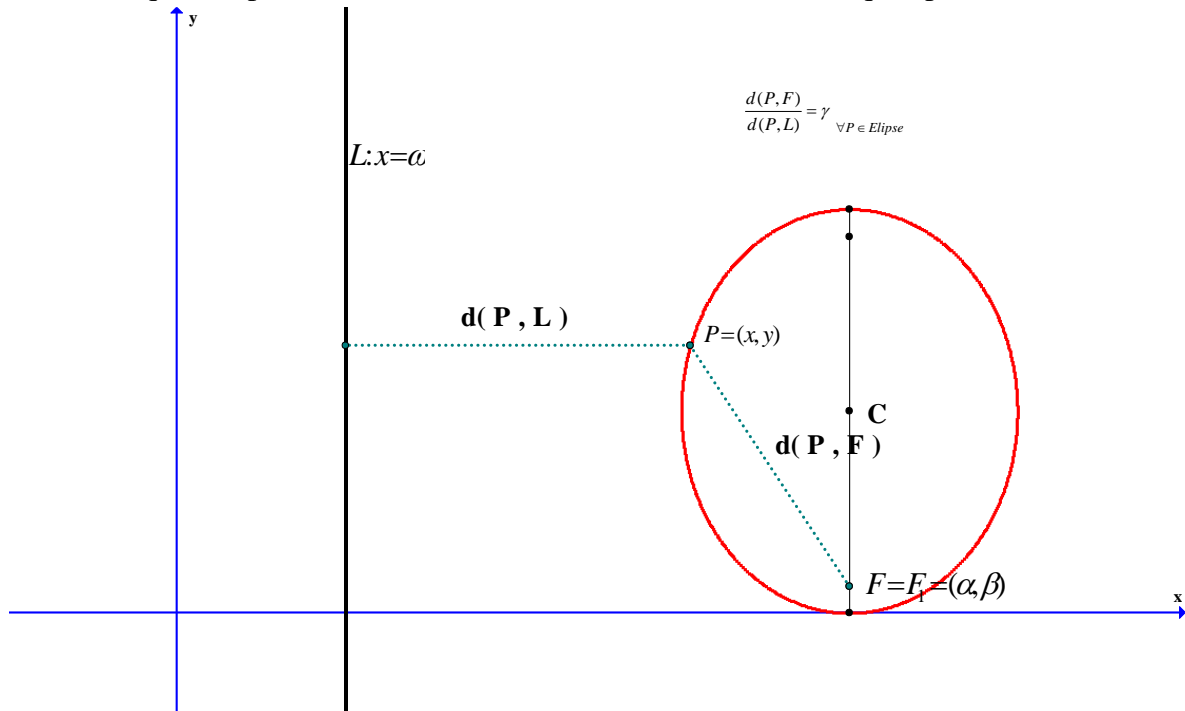


Fig.12

En lo que sigue, demostraremos que a su vez, una elipse de eje focal paralelo al eje de las x es una cónica con $\gamma = e$ (excentricidad) < 1 , foco $F = (h+c, k)$ (ó $(h-c, k)$) y directriz $L: x = h + \frac{a^2}{c}$. (ó $x = h - \frac{a^2}{c}$).

Teorema 2

La elipse :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (B), \quad \text{con } c^2 = a^2 - b^2$$

Es una cónica de directriz $L_1: x = h - \frac{a^2}{c}$, foco $F_1 = (h-c, k)$ y parámetro $\gamma = e = \frac{c}{a}$ y también, de directriz: $L_2: x = h + \frac{a^2}{c}$, foco $F_2 = (h+c, k)$ y parámetro $\gamma = e = \frac{c}{a}$. O sea, que esta cónica tiene dos directrices y dos focos.

Demostración:

Debemos demostrar que para cada punto $P = (x, y)$ de la elipse (B), se cumple:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = \gamma = e \quad y \quad \frac{d(P, F_2)}{d(P, L_2)} = \gamma = e$$

(Vea la fig.12)

$$d(P, F_1)^2 = (x - h + c)^2 + (y - k)^2 = (X + c)^2 + Y^2 \quad (1), \quad \text{con } X = x - h \text{ e } Y = y - k$$

$$d(P, L_1)^2 = \left(x - h + \frac{a^2}{c} \right)^2 = \left(X + \frac{a^2}{c} \right)^2 \quad (2)$$

Como $P = (x, y)$ es un punto de la elipse, tenemos:

$$(y - k)^2 = b^2 \left(1 - \frac{(x - h)^2}{a^2} \right) Y^2 = b^2 \left(1 - \frac{X^2}{a^2} \right)$$

Luego reemplazando en (1), tenemos:

$$d(P, F_1)^2 = X^2 + c^2 + 2cX + b^2 \left(1 - \frac{X^2}{a^2} \right) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) X^2 + 2cX + c^2 + b^2 \quad (3)$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, entonces (3) queda así:

$$\begin{aligned} d(P, F_1)^2 &= \frac{c^2}{a^2} X^2 + 2cX + a^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(X^2 + \frac{2a^2}{c} X + \frac{a^4}{c^2} \right) + a^2 - a^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(X + \frac{a^2}{c} \right)^2 \\ d(P, F_1)^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(X + \frac{a^2}{c} \right)^2 = \frac{c^2}{a^2} d(P, L_1)^2 \Rightarrow \frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

O sea: $\forall P \in \text{Elipse (B)}$ se cumple:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = \frac{c}{a} = e = \gamma$$

De manera que la elipse (B) es una cónica de:

$$\text{Foco } F = (h - c, k), \quad \text{directriz } L_1: x = h - \frac{a^2}{c} \text{ y parámetro } \gamma = e = \frac{c}{a}$$

Siguiendo los mismos pasos, **el lector** puede demostrar que la misma elipse (B), también es la cónica de foco $F_2 = (h + c, k)$, directriz $L_2: x = h + \frac{a^2}{c}$, y parámetro $\gamma = e = \frac{c}{a}$.

También se puede demostrar que la elipse de eje focal paralelo al eje y, es decir:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad (C)$$

Es una cónica de foco $F_1 = (h, k - c)$, directriz $L_1: y = k - \frac{a^2}{c}$ y de parámetro: $\gamma = e = \frac{c}{a}$ y también de foco: $F_2 = (h, k + c)$, directriz $L_2: y = k + \frac{a^2}{c}$ y de parámetro: $\gamma = e = \frac{c}{a}$ (Ejercicio).

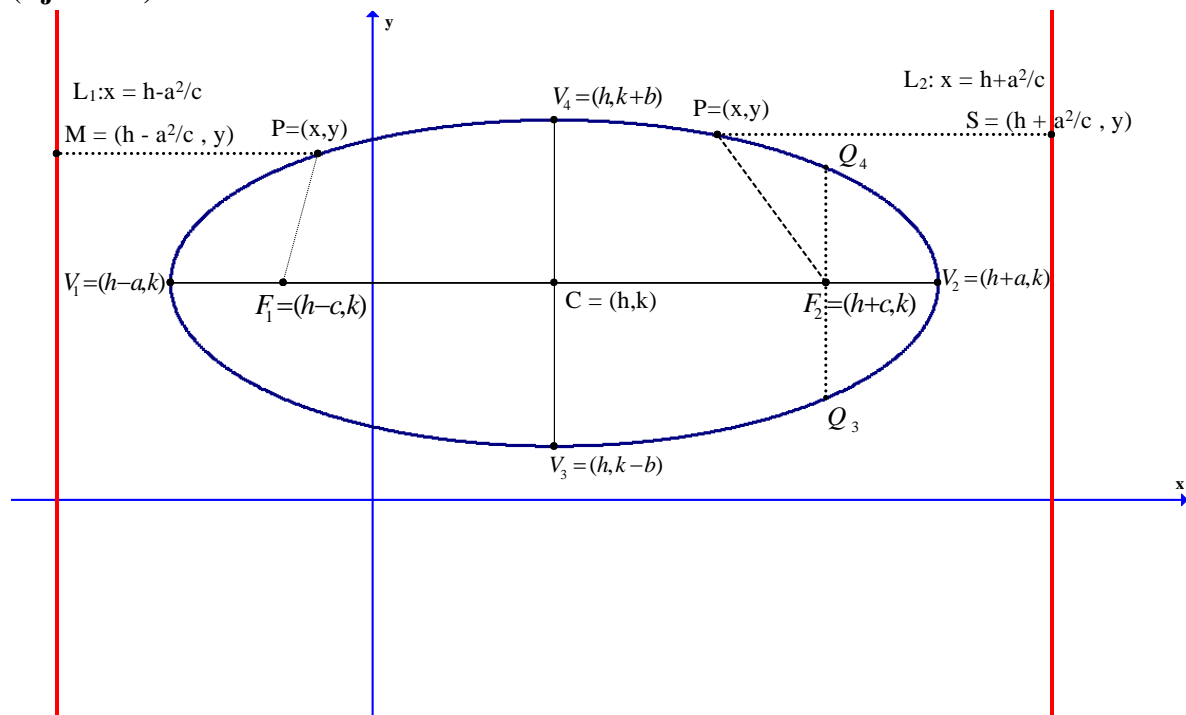


Fig.13

Ejemplo 4

Halle las directrices de la elipse que pasa por $(2,1)$, $F_1 = (-\sqrt{6}, 0)$ y $C = (0,0)$.

Como C y F_1 están en el eje x, entonces la ecuación de la elipse tiene la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además: $F_1 = (-\sqrt{6}, 0) = (-c, 0)$. Luego: $c = \sqrt{6}$. Por lo tanto: $a^2 - b^2 = 6$ (1)

Sabemos que $(2,1)$ está en la elipse, entonces:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

De (1) y (2), resulta: $b^4 + b^2 - 6 = 0$. Resolviendo, tenemos que $b = \sqrt{2}$. Las otras raíces son: $-\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}i$. Las cuales rechazamos pues $b > 0$.

Por lo tanto: $a^2 = b^2 + c^2 = 2 + 6 = 8$. Luego la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Y como $h = k = 0$, de acuerdo al teorema 2, las directrices son:

$$x = 0 \pm \frac{a^2}{c} \Rightarrow L_1: x = \frac{8}{\sqrt{6}} \text{ y } L_2: x = -\frac{8}{\sqrt{6}}$$

(¡ Haga una gráfica de la elipse y sus directrices!).

Ejercicio resuelto 6

Halle la ecuación de la elipse de directriz: $y = 6$, $F = (0,3)$ y $\gamma = 1/2$.

Solución

Como: $\gamma = e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, entonces: $a = 2c$ (1)

Finalmente: $y = k + \frac{a^2}{c} = 6$ (2).

Entonces, esto indica que el eje focal es paralelo al eje x. Por tanto, la elipse tiene la forma:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{C})$$

Por otra parte como: $F = (h, k + c) = (0, 3) \Rightarrow h = 0 \text{ y } k + c = 3$ (3).

Entonces de (1), (2) y (3), tenemos que: $c = 1$; $a = 2$ y $k = 2$. Por lo tanto: $b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

De manera que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(y-2)^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$$

Además tenemos: $C = (0,2)$; $F_1 = (0,1)$; $F_2 = (0,3)$; $V_1 = (0,0)$; $V_2 = (0,4)$

La otra directriz es: $L_1: y = k - \frac{a^2}{c} = 2 - \frac{4}{1} = -2$. Asimismo: $L_2: y = 6$

(Vea fig.14)

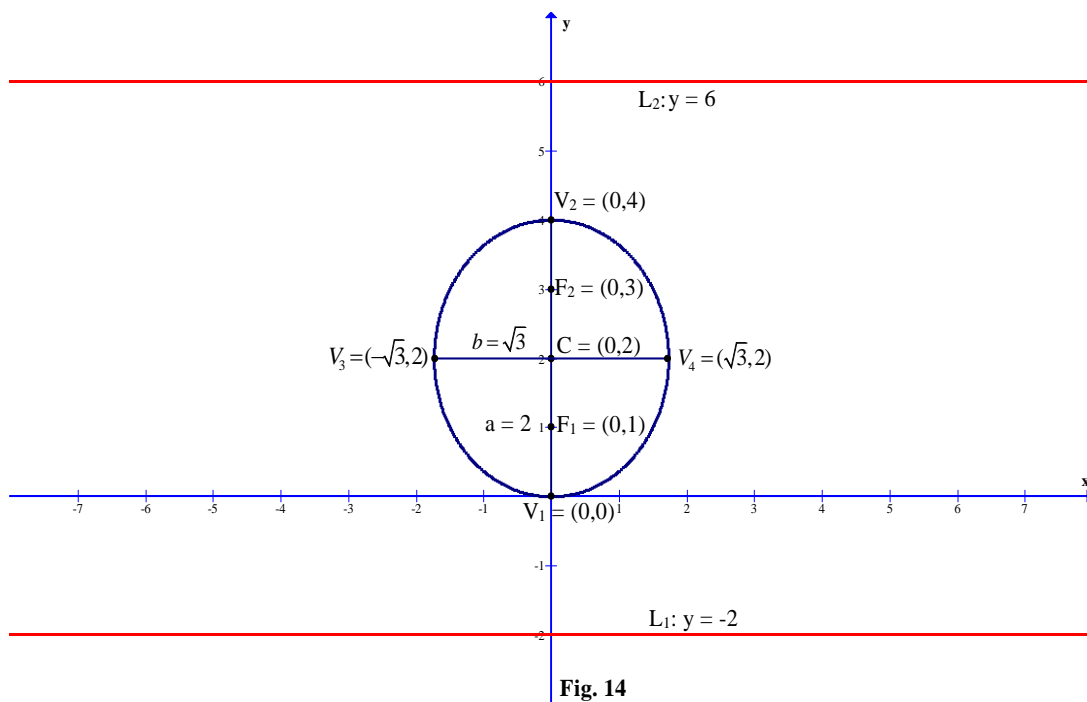


Fig. 14

4.6 Tabla resumen de los elementos de la elipse

Ecuación ($a^2 = b^2 + c^2$)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
Centro	$C = (h, k)$	$C = (h, k)$
Focos	$F_1 = (h - c, k); F_2 = (h + c, k)$	$F_1 = (h, k - c); F_2 = (h, k + c)$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Eje secundario	$x = h$	$y = k$
Vértices principales	$V_1 = (h - a, k); V_2 = (h + a, k)$	$V_1 = (h, k - a); V_2 = (h, k + a)$
Vértices secundarios	$V_3 = (h, k - b); V_4 = (h, k + b)$	$V_3 = (h - b, k); V_4 = (h + b, k)$
Diámetro mayor	$2a$	$2a$
Diámetro menor	$2b$	$2b$
Longitud del lado recto	$L = \frac{2b^2}{a}$	$L = \frac{2b^2}{a}$
Directrices	$L_1 : x = h - \frac{a^2}{c}; L_2 : x = h + \frac{a^2}{c}$	$L_1 : y = k - \frac{a^2}{c}; L_2 : y = k + \frac{a^2}{c}$
Excentricidad	$e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$

Ejercicios propuestos

Los ejercicios señalados con (*) tienen mayor dificultad.

1) Halle la ecuación de la elipse de focos: $F_1 = (-2,0)$ y $F_2 = (2,0)$, y cuyo radio mayor mide 6 unidades. Encuentre el resto de los elementos de la elipse.

2) Idem para la elipse que pasa por $P = \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}, 2\right)$, tiene centro en $(0,0)$ y $V_3 = (0,-2)$.

3) Halle las rectas tangentes a la elipse: $x^2 + 4y^2 = 100$, que sean paralelas a la recta: $3x+8y = 7$. Determine los puntos de tangencia.

4) Halle las rectas tangentes a la elipse del problema anterior, desde el punto $(4,0)$.

5) Halle los elementos de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$.

6) Idem para:

$$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

7) Halle los elementos y la gráfica de la elipse: $2(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 8$.

8) Encuentre la ecuación de la elipse de directriz $x = 9/4$, $C = (0,0)$ y excentricidad $e = 1/2$. Halle los demás elementos de la elipse y dibuje la gráfica con estos.

9) Una elipse tiene directrices $L_1: x = 1$ y $L_2: x = 5$, y $V_2 = (5,3)$. Halle la ecuación de dicha elipse y los demás elementos.

10) Encuentre los elementos de la elipse: $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$.

11) Los cuatro vértices de una elipse son: $(1,1)$, $(3,4)$, $(1,7)$ y $(-1,4)$. Halle la ecuación de la elipse, así como los demás elementos.

12) Halle las rectas tangentes a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$, desde el punto $(0, 4)$, así como los puntos de tangencia. Encuentre asimismo la intersección entre esta elipse y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Grafique el problema.

13) En cada uno de los siguientes literales, determina la ecuación de la elipse, así como sus elementos y haz un dibujo de la elipse, y sus elementos.

a) $C = (0,0)$; $F_2 = (0,2)$ y $V_1 = (0,-4)$

b) $C = (0,0)$; $F_1 = (-3,0)$ y $a = 5$

c) $C = (0,2)$; $F_1 = (0,0)$ y $a = 3$

d) $C = (-3,0)$; $F_1 = (-3,-2)$ y $b = 2\sqrt{3}$

e) $C = (2,2)$; $F_1 = (-1,2)$ y $e = 3/\sqrt{10}$

14) Determine le elipse de focos $F = (\pm 4,0)$ y diámetro mayor igual a 16.

15) En los literales siguientes calcule para cada elipse: diámetro mayor, menor, focos, vértices, excentricidad, longitud del lado recto y directrices:

a) $16x^2 + 9y^2 = 144$; b) $16x^2 + 25y^2 = 400$; c) $x^2 + y^2 = 4$

16) A partir de los elementos dados de la elipse, encuentra su ecuación:

a) $V_1 = (-3,0)$; $V_2 = (3,0)$ y $c = 2$

b) $F_1 = (0,-2)$; $C = (0,0)$ y $e = 0,4$

c) $V_1 = (0,-a)$; $V_2 = (0,a)$ y $e = 3/(2a)$ con $a > 3/2$.

17) Halle la ecuación de la elipse de focos $F = (\pm 1,1)$ y que pasa por el origen.

18) Determine la ecuación de la elipse de centro $C = (0,0)$, $e = 2/5$, focos en el eje y, y que pasa por $(2,1)$.

19) Demuestre que la ecuación de la elipse de centro $C = (h, k)$, eje focal paralelo al eje de las y, radios: a (mayor) y b (menor) es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (C)$$

20) Halle la longitud del lado recto de la elipse: $16x^2 + 9y^2 = 144$

21) Demuestre que la longitud del lado recto de cada foco de una elipse, es el mismo.

22) Halla A, B y C tales que la elipse: $4x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sea tangente al eje de las x en el origen y que pase por $(-1,2)$.

23) Determine la ecuación de la elipse y sus otros elementos, a partir de los siguientes datos:

a) $F_1 = (-2,2)$; $F_2 = (-2,10)$ y $e = 0,8$

b) $V_1 = (-4,2)$; $V_2 = (4,2)$ y $F_2 = (2,2)$

c) $C = (-2,3)$; $V_1 = (-8,3)$ y $F_1 = (-5,3)$

24) Halle los elementos de las siguientes elipses y grafique las elipses con sus elementos:

a) $9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 36$; b) $5x^2 + (y+1)^2 = 5$; c) $15(x-1)^2 + 2y^2 = 60$

d) $4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$; e) $(x+5)^2 + 16y^2 = 16$; f) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

25) Encuentre los puntos de la elipse con $e = 3/4$, centro $(0,0)$ y $a = 4$, que se encuentran a una distancia de F_1 igual a $5/2$.

26) Una escalera de 12 m de longitud está apoyada sobre una pared vertical. Si un hombre está apoyado sobre un peldaño situado a 4 m de la parte inferior de la escalera y la escalera comienza a resbalar, ¿qué trayectoria describen los pies del hombre? (*).

27) Demuestre que en dos elipses con el mismo centro y la misma excentricidad, sus radios son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

28) Denominamos **circunferencia directriz** de una elipse, a una circunferencia que tiene por centro un foco de la elipse y radio $2a$. Por supuesto como la elipse tiene dos focos, entonces hay dos circunferencias directrices. Halle estas circunferencias para las elipses:

$$a) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1; \quad b) \frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$

29) El arco de un puente es semielíptico. Si la base del arco tiene 10 m de longitud y su parte más alta, con respecto al piso, es de 3 m. ¿Podrá pasar por debajo una caja de 3 m de ancho y 2,8 m de altura?

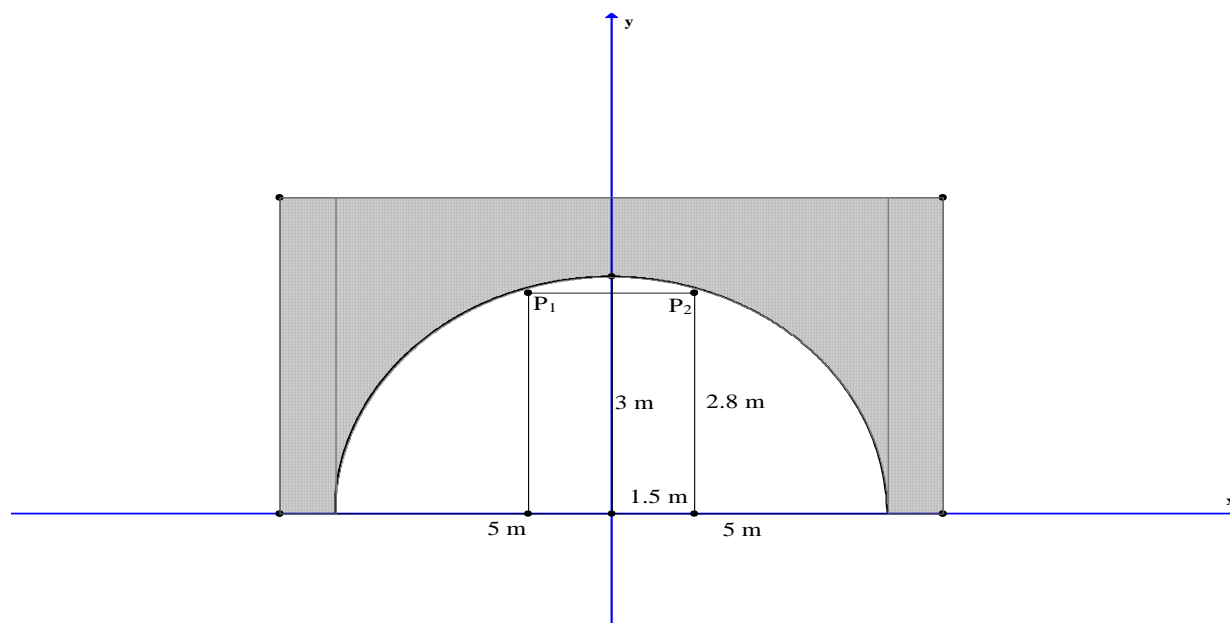


Fig.15

30) Desde un punto P de una circunferencia de centro (0,0) y radio r, se traza un segmento \overline{PQ} , perpendicular al diámetro \overline{AB} . Sea M el punto medio de \overline{PQ} . Obtenga el lugar geométrico que describe el punto M al moverse el punto P (Y en consecuencia el punto Q) (*).

31) Halle las tangentes a la elipse $4x + 9y^2 = 36$ desde el punto (5,0). Encuentre los puntos de tangencia.

32) Un elipse tiene excentricidad $e = 0,6$, eje focal horizontal, $V_1 = (0,0)$ y pasa por el punto (3,4). a) Halle la ecuación de la elipse; b) determine sus elementos; c) Halle la intersección con la recta: $y = 3x + 2$.

33) Demuestre que un punto P de la elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, equidista del foco F_2 y de la circunferencia directriz de centro F_1 y radio $2a$ (Vea problema 28) (*)

34) Demuestre que la intersección de las elipses:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{y} \quad b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2,$$

son los vértices de un cuadrado de lado:

$$l = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (*)$$

35) Sea P_o un punto de la elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, tal que **no** es vértice. Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la elipse en P_o es:

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente, si P_o es un vértice?

36) De nuevo, sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto de la elipse anterior, tal que no es vértice. Sea Q_o el otro punto de intersección de la recta $x = x_o$ con la elipse. Demuestre que la tangente en P_o y la tangente en Q_o se cortan en el punto $\left(\frac{a^2}{|x_o|}, 0\right)$.

Si la recta es $y = y_o$, y si S_o es el otro punto de intersección con la elipse, entonces la tangente en P_o y la tangente en S_o , se cortan en $\left(0, \frac{b^2}{|y_o|}\right)$. (*)

37) Determine si las siguientes expresiones representan una elipse:

$$\text{a) } 4x^2 + y^2 - 8x - 2x + 1 = 0; \quad \text{b) } 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

38) Halle los puntos de la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$ tales que la distancia a F_1 es $5/2$.

39) Sea la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y la recta $y = mx + n$. Obtenga la relación que debe existir entre a , b , m y n para que la recta sea: a) secante, b) tangente, c) exterior.

40) Aplique lo anterior a la elipse: $3x^2 + 24y^2 = 72$, y las rectas:

a) $y = x + 3$; b) $y = x + 3\sqrt{3}$; c) $y = x + 6$

41) Halle la ecuación de la recta tangente y la recta normal a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $(3, -12/5)$.

42) Sean: $x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1) e $y = b \frac{2t}{1+t^2}$ (2), donde $a > b > 0$ y $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que los puntos $P = (x, y)$, donde x e y satisfacen (1) y (2), respectivamente son los puntos de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por esto a (1) y (2) se le llama: **ecuación paramétrica de la elipse**.

43) Denominamos **radio vector** de un punto $P_o = (x_o, y_o)$ de una elipse, a la distancia de P_o a uno de los focos de la elipse. Luego cada punto P_o de la elipse tiene dos radio vectores: $\rho_1 = d(P_o, F_1)$ y $\rho_2 = d(P_o, F_2)$. Demuestre que: $\rho = a \pm ex_o$, y que: $\rho_1\rho_2 = a^2 - x_o^2e^2$, para la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

44) Demuestre que los puntos medios de las cuerdas de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que son paralelas a una recta dada L , están en una recta M que pasa por el origen.

45) Una elipse tiene una excentricidad $e = 0,5$, $F_2 = (2, 1)$ y la ecuación de su directriz L_2 es $x = 5$. Halle la ecuación de dicha elipse.

46) Halle la elipse de centro $C = (0, 0)$, excentricidad $e = 1/3$ y que pasa por el punto $(c, 4)$, siendo $F_2 = (c, 0)$.

47) Halle la ecuación de la elipse tal que $F_2 = (3, 1)$, $V_1 = (-3, 1)$ y $e = 0,8$.

Respuestas

1) $L = 10/3$, directrices: $x = \pm 9/2$; 2) $7x^2 + y^2 = 7$, $F_1 = (0, -\sqrt{6})$, $F_2 = (0, \sqrt{6})$; $V_1 = (0, -\sqrt{7})$, $V_2 = (0, \sqrt{7})$, $V_3 = (-1, 0)$, $V_4 = (1, 0)$; $e = \sqrt{\frac{6}{7}}$; $L = 2\sqrt{7}$; $L_1: y = -\frac{7}{\sqrt{6}}$, $L_2: y = \frac{7}{\sqrt{6}}$. 3) $y = -\frac{3}{8}x \pm \frac{25}{4}$; $Q_1 = (6, 4)$, $Q_2 = (-6, -4)$. 4) $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{15}}(x - 3)$. 5) Focos $(\pm 1, 0)$; Vértices $(\pm 2, 0)$; $L = 6$; Directrices: $x = \pm 4$. 6) $C = (1, -2)$; $F_1 = (1 - \sqrt{3}, -2)$, $F_2 = (1 + \sqrt{3}, -2)$; $V_1 = (-1, -2)$, $V_2 = (3, -2)$; $V_3 = (1, -3)$, $V_4 = (1, -1)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $L = 1$; $L_1: x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $L_2: x = \frac{4}{\sqrt{3}}$. 7) $C = (-2, -4)$;

$F_1 = (-2, -6), F_2 = (-2, -2); V_1 = (-2, -4 - 2\sqrt{2}), V_2 = (-2, -4 + 2\sqrt{2});$
 $V_3 = (-4, -4), V_4 = (0, -4); e = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \mathbf{8)} \quad 192x^2 + 256y^2 = 243; c = \frac{9}{16}; e = 0,5; L = \frac{27}{16}$
 $L_1: x = -\frac{9}{4}, L_2: x = \frac{9}{4}; V_1 = \left(-\frac{9}{8}, 0\right), V_2 = \left(\frac{9}{8}, 0\right); V_3 = \left(0, -\frac{9\sqrt{3}}{16}\right), V_4 = \left(0, \frac{9\sqrt{3}}{16}\right)$
 $\mathbf{9)} \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1; C = (1,3); F_1 = (1 - \sqrt{5}, 3), F_2 = (1 + \sqrt{5}, 3); V_1 = (1,3); L = \frac{8}{3}; e = \sqrt{5}/3.$
 $\mathbf{10)} \quad C = (-2,1); a = 3, b = 2; F_1 = (-2, 2 - \sqrt{5}), F_2 = (-2, 2 + \sqrt{5}); V_1 = (-2, -2), V_2 = (-2, 4);$
 $L_1: y = 1 - \frac{9}{\sqrt{5}}, L_2: y = 1 + \frac{9}{\sqrt{5}}; L = \frac{8}{3}. \quad \mathbf{11)} \quad 9(x+1)^2 + 4(y-4)^2 = 36; C = (-1,4); c = \sqrt{5};$
 $F_1 = (1, 4 - \sqrt{5}), F_2 = (1, 4 + \sqrt{5}); V_1 = (1,1), V_2 = (1,7); V_3 = (-1,4), V_4 = (3,4); e = \frac{\sqrt{5}}{3}; L = \frac{8}{3}; L_1: y = 4 -$
 $\frac{9}{\sqrt{5}}; L_2: y = 4 + \frac{9}{\sqrt{5}}$
 $\mathbf{12)} \quad y = \pm 2\sqrt{3}x + 4; Q_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), Q_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$

13)

	Ecuación	F ₁	F ₂	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	e
a	$16x^2 + 12y^2 = 192$	(0,-2)	(0,2)	(0,-4)	(0,4)	(0,-2√3)	(0,2√3)	0,5
b	$16x^2 + 25y^2 = 400$	(-3,0)	(3,0)	(-5,0)	(5,0)	(0,-4)	(0,4)	0,6
c	$9x^2 + 5(y-2)^2 = 192$	(0,-4)	(0,4)	(0,-1)	(0,5)	(-√5, 2)	(√5, 2)	2/3
d	$16(x+3)^2 + 12y^2 = 144$	(-3,-2)	(-3,2)	(-3,-4)	(-3,4)	(-3-2√3, 0)	(-3+2√3, 0)	0,5
e	$(x-2)^2 + 10(y-2)^2 = 10$	(-1,2)	(5,2)	$(2 - \sqrt{10}, 2)$	$(2 + \sqrt{10}, 2)$	(2,1)	(2,3)	$\frac{3}{\sqrt{10}}$

14) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$

15)

	2a	2b	c	F	V.Ppales	e
a	8	6	√7	$(0, \pm\sqrt{7})$	$(0, \pm 4)$	√7/4
b	10	8	3	$(\pm 3, 0)$	$(\pm 5, 0)$	0,6
c	2	2	0	(0,0)	$(\pm 2, 0)$	0

16) a) $5x^2 + 9y^2 = 45; \quad \mathbf{b)} \quad 25x^2 + 21y^2 = 525; \quad \mathbf{c)} \quad a^2x^2 + (a^2 - 9/4)y^2 = a^2(a^2 - 9/4).$

17) $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$; 18) $21x^2 + 25y^2 = 121$; 20) $9/2$; 21) $2b^2 / a$. 22) $A = C = 0$; $B = -4$.

23) a) $25(x+2)^2 + 9(y-6)^2 = 225$; b) $3x^2 + 4(y-2)^2 = 48$; c) $9(x+2)^2 + 8(y-3)^2 = 128$; d) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{39} = 1$

24)

	C	F ₁	F ₂	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	e
a	(1,1)	(1,1 - $\sqrt{5}$)	(1,1 + $\sqrt{5}$)	(1,-2)	(1,4)	(-1,1)	(3,1)	$\sqrt{5}/3$
b	(0,-1)	(0,-3)	(0,1)	(0,-1 - $\sqrt{5}$)	(0,-1 + $\sqrt{5}$)	(-1,-1)	(1,-1)	$2/\sqrt{5}$
c	(1,0)	(1,- $\sqrt{26}$)	(1, $\sqrt{26}$)	(1,- $\sqrt{30}$)	(1, $\sqrt{30}$)	(-1,0)	(3,0)	$\sqrt{13/15}$
d	(1,1)	(1,1- $\sqrt{3}$)	(1,1+ $\sqrt{3}$)	(1,-1)	(1,3)	(0,1)	(2,1)	$\sqrt{3}/2$
e	(-5,0)	(-5- $\sqrt{15}$,0)	(-5+ $\sqrt{15}$,0)	(-9,0)	(-1,0)	(-5,-1)	(-5,-1)	$\sqrt{15}/4$
f	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,1)	(1,5)	(-1,3)	(-1,3)	0

25) $p = (-2, \pm \frac{\sqrt{21}}{2})$; 26) Describe una elipse de ecuación: $x^2 + 4y^2 = 64$; 28) $(x \pm c)^2 + y^2 = 4a^2$

29) Si la caja la pasan por el medio, la altura cuando $x = \pm 1,5$ es $h = 3,05$; por lo tanto la caja puede pasar.

30) Elipse de ecuación: $x^2 + 4y^2 = r^2$. 31) $x - 2y - 5 = 0$, $17x + 9y - 45 = 0$; (9/5,-8/5), (9/5,8/5)

32) $(x \pm 8)^2 + y^2 = 400$.

35) $\frac{x_0x}{b^2} + \frac{y_0y}{a^2} = 1$. 37) a) es elipse, b) no representa lugar geométrico alguno. 38) $P = (-2, \pm \frac{\sqrt{21}}{2})$

39) a) $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$; b) $= 0$; c) < 0 . 40) a) secante, b) tangente, c) exterior.

41) $y = \frac{9}{20}x - \frac{15}{4}$; recta normal: $y = -\frac{20}{9}x + \frac{64}{15}$. 45) $\frac{(x+\frac{2}{5})^2}{\frac{324}{25}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{324}{45}} = 1$. 46) $8x^2 + 9y^2 = 162$; 47)

$$\frac{(x - \frac{1}{3})^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

5. La hipérbola

5.1 Introducción

A continuación, estudiaremos un segundo tipo de cónica, la hipérbola.

Tal como hicimos en el estudio de la elipse, demostraremos que ciertamente, la hipérbola es un tipo de cónica, pero ahora, de excentricidad $e > 1$.

Definición

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 , al lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a F_1 y F_2 es constante, lo denominamos **hipérbola** de focos F_1 y F_2 .

5.2 Ecuación de la hipérbola

Tomemos un sistema de coordenadas de tal manera que el segmento $\overline{F_1 F_2}$ es paralelo al eje de las x . Sea C el punto medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$, y supongamos que $C = (h, k)$.

Si $d(F_1, C) = c = d(F_2, C)$, entonces: $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$.

Al punto C lo llamamos **centro** de la hipérbola, a F_1 y F_2 , los llamamos **focos** de la hipérbola; asimismo a la recta que contiene a F_1 y F_2 , lo llamamos **eje focal o principal**.

Luego, $P = (x, y)$ está en la hipérbola de focos F_1 y F_2 , y parámetro k , si y sólo si:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k > 0 \quad (\text{A})$$

Hagamos $k = 2a$, y entonces (A), queda así:

$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = \pm 2a \quad (a > 0)$$

Haciendo: $X = x - h$ e $Y = y - k$, y pasando la segunda raíz al segundo miembro, tenemos:

$$\sqrt{(X + c)^2 + Y^2} = \sqrt{(X - c)^2 + Y^2} \pm 2a$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y desarrollando, resulta:

$$X^2 + c^2 + 2cX + Y^2 = X^2 + c^2 - 2cX + Y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2}$$

Simplificando y trasponiendo términos, queda:

$$cX - a^2 = \pm a\sqrt{(X - c)^2 + Y^2}$$

Elevando al cuadrado, resulta:

$$c^2 X^2 + a^4 - 2cXa^2 = a^2(X^2 + c^2 - 2cX + Y^2)$$

Simplificamos y pasamos los sumandos que tienen variables al primer miembro, y los demás al segundo miembro. De esta manera, tenemos:

$$(c^2 - a^2)X^2 - a^2 Y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (1)$$

Si consideramos el triángulo $PF_1 F_2$ en la fig. 1, tenemos que:

$$d(F_1, F_2) > |d(F_1, P) - d(F_2, P)| \quad (\text{Propiedad de triángulos})$$

Pues como es conocido, la longitud de un lado de un triángulo es mayor que el valor absoluto de la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.

Luego: $d(F_1, F_2) = 2c > |d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a \Rightarrow c > a$

Por lo tanto existe $b > 0$ tal que: $b^2 = c^2 - a^2$, y por tanto, (1) queda así:

$$b^2 X^2 - a^2 Y^2 = a^2 b^2$$

Luego:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \text{donde: } b^2 = c^2 - a^2 \quad (\mathbf{B})$$

Obviamente, si $h = k = 0$, entonces (B) queda así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\mathbf{C})$$

En (B) y (C), **a** es el **radio principal** y **b** es el **radio conjugado**. Asimismo, el eje focal o principal intersecta a la hipérbola en dos puntos, V_1 y V_2 . Los cuales reciben el nombre de **vértices** de la hipérbola. Obteniendo: $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ (**¡Explique!**).

A la recta $x = h$ la llamamos **eje focal**, mientras que a la recta $y = k$, la llamamos **eje conjugado**, esto en el caso en que el eje focal sea paralelo al eje de las x .

Observe que a diferencia de la elipse, sólo hay dos vértices, pues el sistema:

$$\begin{cases} \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ x = h \end{cases} \quad \text{¡ No tiene solución!}$$

La excentricidad se define de manera similar a la elipse, es decir: $e = \frac{c}{a}$. Sin embargo, en el caso de la hipérbola, como $c > a$, entonces: $e > 1$.

Los lados rectos de la hipérbola se definen como los segmentos: $\overline{Q_1 Q_2}$ y $\overline{Q_3 Q_4}$, donde Q_1 y Q_2 son los puntos de intersección de la recta: $x = h - c$ con la hipérbola. Asimismo, Q_3 y Q_4 , son los puntos de intersección de la recta: $x = h + c$ con la hipérbola. De esta manera obtenemos: (vea la fig. 1)

$$Q_1 = \left(h - c, k - \frac{b^2}{a} \right), \quad Q_2 = \left(h - c, k + \frac{b^2}{a} \right)$$

$$Q_3 = \left(h + c, k - \frac{b^2}{a} \right), \quad Q_4 = \left(h + c, k + \frac{b^2}{a} \right)$$

Además:

$$d(Q_1, Q_2) = d(Q_3, Q_4) = \frac{2b^2}{a}$$

(¡Pruebe todo lo anterior!).

Observe, finalmente, que en la hipérbola, **a** puede ser mayor, igual o menor que **b**, pero siempre ocurre que: $c > a$ y $c > b$. Además la rama derecha se obtiene para valores de x mayores o iguales a: $h + a$, mientras que la rama izquierda, se obtiene para valores menores o iguales que: $h - a$.

(Vea la fig.1).

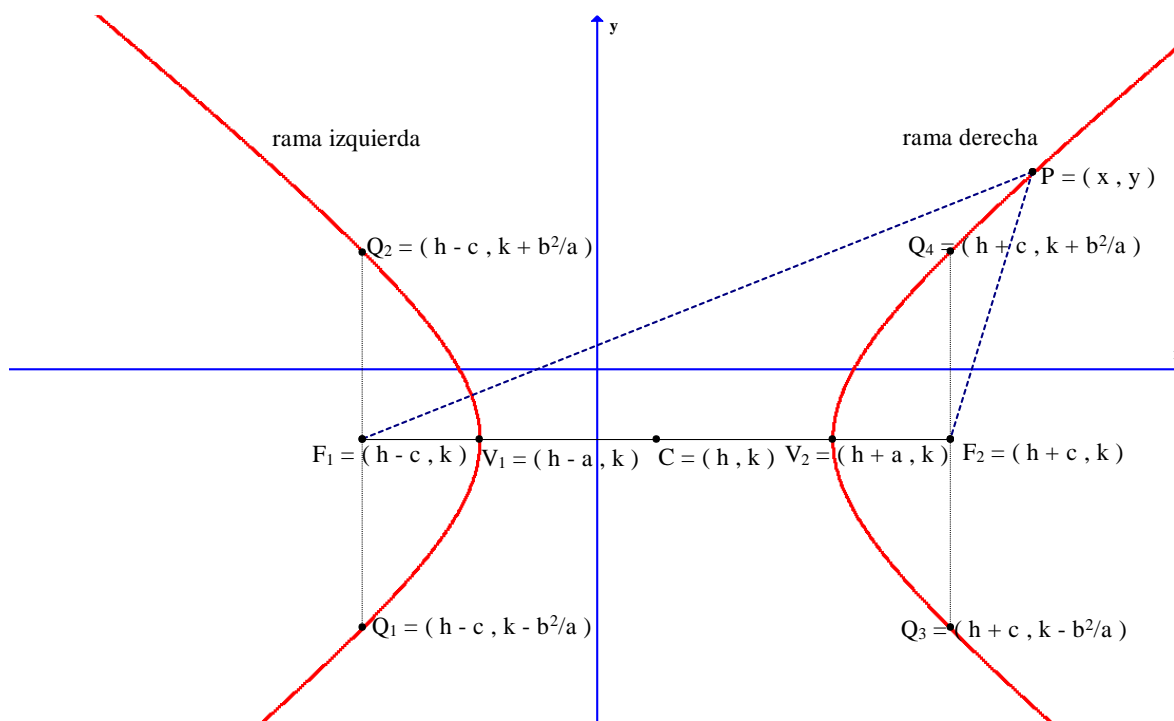


Fig. 1

Ejemplo 1

a) Hallemos los principales elementos de la hipérbola:

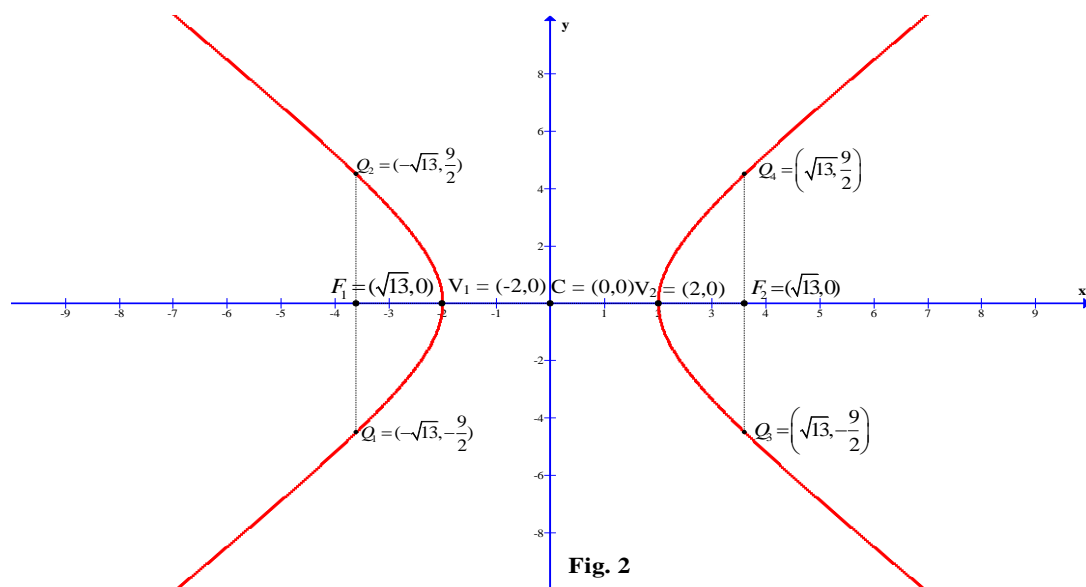
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a = 2$, $b = 3$, $c^2 = 4 + 9 = 13$, o sea: $c = \sqrt{13}$. Asimismo: $C = (0,0)$;

$F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$; $V_1 = (-2, 0)$, $V_2 = (2, 0)$;

$$e = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8; \quad L = \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 9$$

$$Q_1 = \left(-\sqrt{13}, -\frac{9}{2}\right), \quad Q_2 = \left(-\sqrt{13}, \frac{9}{2}\right); \quad Q_3 = \left(\sqrt{13}, -\frac{9}{2}\right), \quad Q_4 = \left(\sqrt{13}, \frac{9}{2}\right)$$



Ejercicio resuelto 1

Halle la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

a) $V_2 = (1,0)$, $C = (0,0)$ y $F_1 = (-2,0)$; b) $C = (-2,3)$, $e = 2$, $V_2 = (6,3)$. En ambos casos halle los demás elementos.

Solución

a) La hipérbola tiene centro en $(0,0)$, así como un foco y un vértice en el eje de las x , luego tiene la forma:

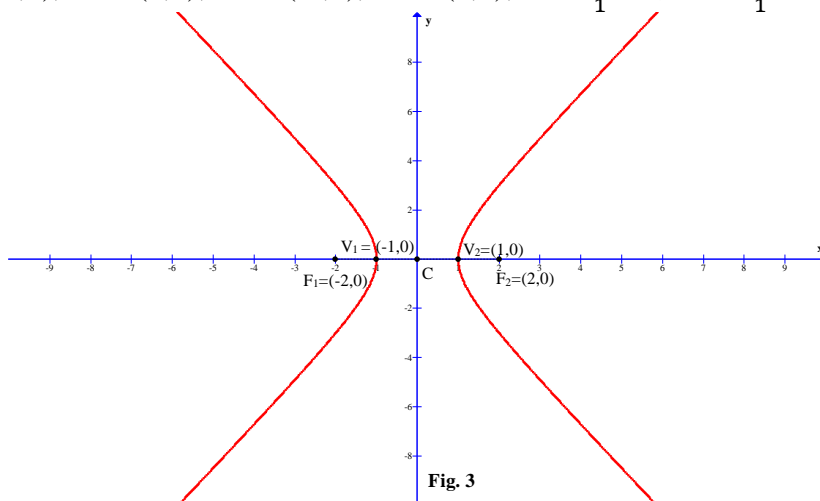
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$d(V_2, C) = a = 1$ y $d(F_1, C) = c = 2$, luego: $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$, por lo tanto: $b = \sqrt{3}$.

Luego la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Además: $V_1 = (-1,0)$, $V_2 = (1,0)$; $F_1 = (-2,0)$, $F_2 = (2,0)$; $e = \frac{2}{1} = 2$; $L = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$



b) Ahora $C = (-2,3)$ y $V_2 = (6,3)$, luego el eje focal es $y = 3$, o sea que la ecuación de la hipérbola tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde: $C = (h, k) = (-2, 3) \Rightarrow h = -2$ y $k = 3$.

Por otra parte: $d(C, V_2) = a = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (3 - 3)^2} = 8$.

Como: $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{8} = 2 \Rightarrow c = 16$. Luego: $b^2 = c^2 - a^2 = 16^2 - 8^2 = 192$

En resumen: $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$, $c = 16$.

Y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x+2)^2}{64} - \frac{(y-3)^2}{192} = 1$$

Entonces: $F_1 = (-18,3)$, $F_2 = (14,3)$; $V_1 = (-10,3)$, $V_2 = (6,3)$; $e = 2$; $L = \frac{2 \cdot 192}{8} = 48$

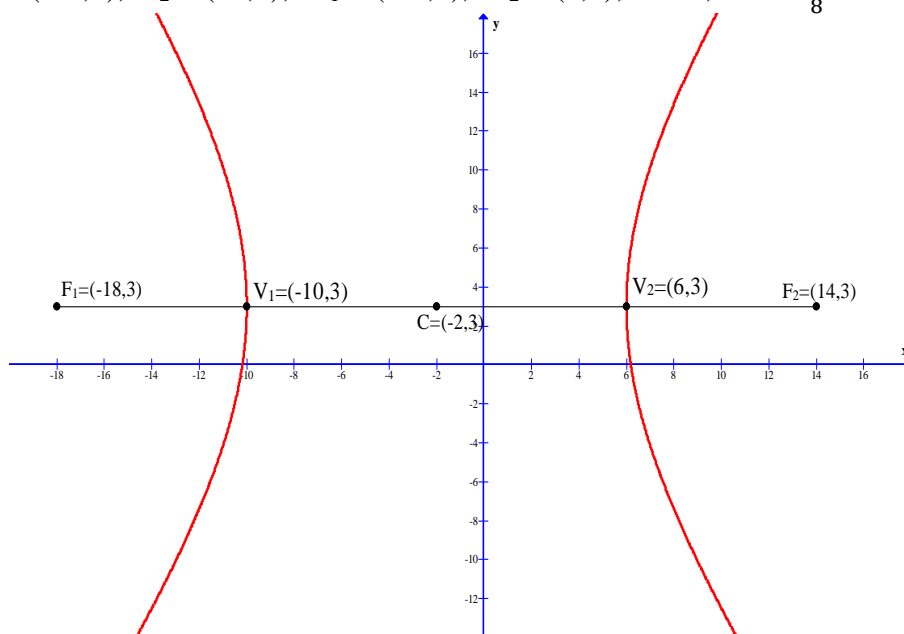


Fig.4

5.3 Otros elementos importantes de la hipérbola

Dada la hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\mathbf{B})$$

De focos: $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, a la recta $L_1: x = h - \frac{a^2}{c}$ la denominamos

directriz de la hipérbola asociada al foco F_1 . Asimismo a la recta: $L_2: x = h + \frac{a^2}{c}$ la denominamos **directriz de la hipérbola asociada al foco F_2** . De manera que tal como sucede en la elipse, en la hipérbola hay dos directrices (Vea la fig. 5).

Teorema 1

Dada la hipérbola (B), para todo punto $P = (x, y)$ de la hipérbola, se cumple que:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = e = \frac{d(P, F_2)}{d(P, L_2)}$$

Demostración

$$d(P, L_1) = \left| x - h + \frac{a^2}{c} \right| = \left| X + \frac{a^2}{c} \right|$$

Donde: $X = x - h$ y $Y = y - k$.

$$d(P, F_1)^2 = (x - h + c)^2 + (y - k)^2 = (X + c)^2 + Y^2$$

Asimismo, ya que $P = (x, y)$ es un punto de la hipérbola, y usando X e Y , nos queda al despejar Y^2 ,

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2} (X^2 - a^2)$$

Luego:

$$\begin{aligned} d(P, F_1)^2 &= (X + c)^2 + \frac{b^2}{a^2} (X^2 - a^2) = X^2 + 2cX + c^2 + \frac{b^2}{a^2} X^2 - b^2 \\ d(P, F_1)^2 &= \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) X^2 + 2cX + a^2 = \frac{c^2}{a^2} X^2 + 2cX + a^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(X^2 + \frac{2a^2}{c} X + \frac{a^4}{c^2} \right) \\ d(P, F_1)^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(X + \frac{a^2}{c} \right)^2 = \frac{c^2}{a^2} d(P, L_1)^2 \end{aligned}$$

Como a y c son positivos, entonces, extrayendo raíz cuadrada, nos queda:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = \frac{c}{a} = e$$

Similarmente se prueba que: (¡Ejercicio!)

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, L_2)} = \frac{c}{a} = e$$

Nota:

Sería interesante ver qué sucede con las F y las L , intercambiadas, es decir:

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, L_1)} \text{ y } \frac{d(P, F_1)}{d(P, L_2)}$$

Para ello, siga el mismo procedimiento anterior, o en caso que sospeche que los cocientes no son constantes, busque un contraejemplo sencillo.

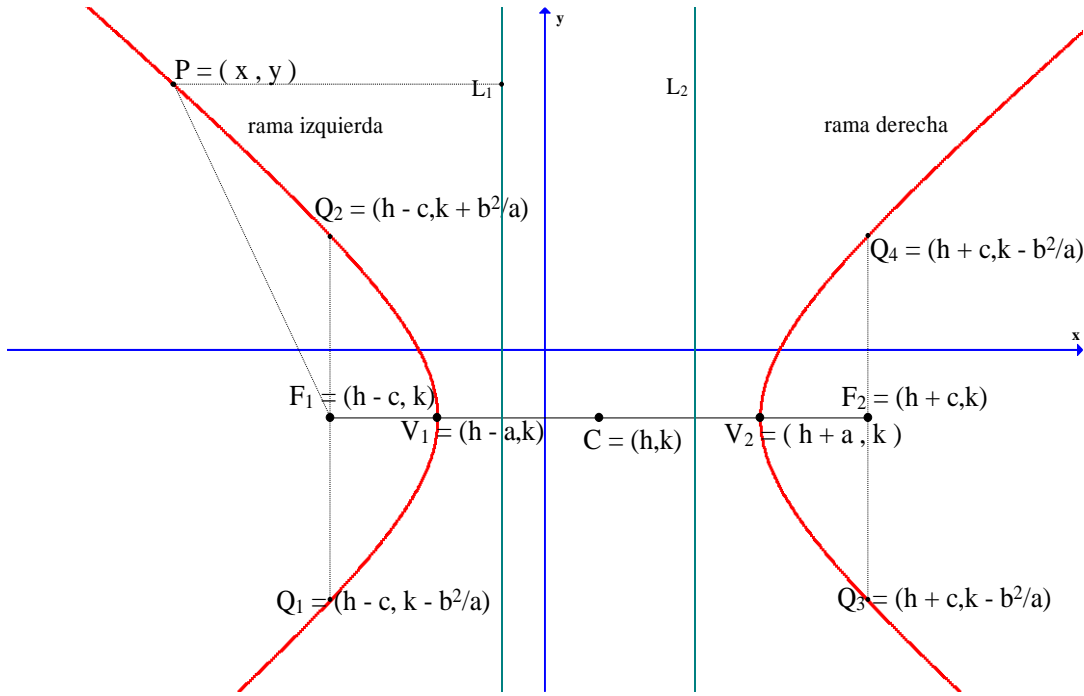


Fig. 5

Observación: en el teorema 1, hemos demostrado que una hipérbola del tipo (B) es la cónica de foco F_1 , directriz L_1 y parámetro e , y también de foco F_2 , directriz L_2 y parámetro e . Siempre con $e > 1$. Así mismo la cónica de F_1 , directriz L_1 y parámetro e es la misma cónica de foco F_2 , directriz L_2 y parámetro e .

El recíproco del teorema anterior también se cumple y dice así:

Teorema 2 (Demostración opcional)

Sea F un punto fijo de coordenadas $F = (\alpha, \beta)$ y L una recta de ecuación $x = d$, sea $\gamma > 1$.

El conjunto de puntos P tales que:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, L)} = \gamma$$

Es una hipérbola de excentricidad γ , además si $d > \alpha$, $L = L_1$ y $F = F_1$; y si $d < \alpha$, entonces: $L = L_2$ y $F = F_2$.

Demostración

$$d(P, L)^2 = (x - d)^2 ; \quad d(P, F)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

O sea:

$$d(P, F)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2 d(P, L)^2 = \gamma^2 x^2 - 2xd\gamma^2 + d^2\gamma^2$$

Luego:

$$(\gamma^2 - 1)x^2 - 2x(d\gamma^2 - \alpha) - (y - \beta)^2 = \alpha^2 - d^2\gamma^2$$

Completando cuadrados, nos queda:

$$(\gamma^2 - 1) \left(x - \frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1} \right)^2 - (y - \beta)^2 = \alpha^2 - d^2\gamma^2 + \frac{(d\gamma^2 - \alpha)^2}{\gamma^2 - 1}$$

Haciendo operaciones y simplificando en el segundo miembro, resulta:

$$(\gamma^2 - 1) \left(x - \frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1} \right)^2 - (y - \beta)^2 = \frac{\gamma^2(\alpha - d)^2}{\gamma^2 - 1}$$

Finalmente, como: $(\gamma^2 - 1 > 0$, pues $\gamma > 1$; entonces nos queda:

$$\frac{\left(x - \frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\gamma^2 - 1} \right)^2} - \frac{(y - \beta)^2}{\left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right)^2} = 1$$

O sea, nos queda una hipérbola con las siguientes características:

$$C = (h, k) = \left(\frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1}, \beta \right), \quad a^2 = \left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\gamma^2 - 1} \right)^2 \quad y \quad b^2 = \left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right)^2$$

Observe que:

$$a^2 + b^2 = \frac{\gamma^4(\alpha - d)^2}{(\gamma^2 - 1)^2} = c^2$$

Luego:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{\frac{\gamma^4(\alpha - d)^2}{(\gamma^2 - 1)^2}}{\left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\gamma^2 - 1} \right)^2} = \gamma^2 \Rightarrow e = \gamma$$

O sea, la cónica con parámetro $\gamma > 1$ es una hipérbola con excentricidad $e = \gamma$.

Veamos finalmente que la recta L: $x = d$, que es la directriz de la cónica, coincide con

$$L_2: d = h + \frac{a^2}{c} \quad \text{si } \alpha > d.$$

En efecto:

$$h + \frac{a^2}{c} = \frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1} + \frac{\left(\frac{\gamma(\alpha - d)}{\gamma^2 - 1} \right)^2}{\frac{\gamma^2(\alpha - d)}{(\gamma^2 - 1)}} = \frac{d\gamma^2 - \alpha}{\gamma^2 - 1} + \frac{\alpha - d}{\gamma^2 - 1} = d$$

De manera que si $\alpha > d$, entonces el foco $F = (\alpha, \beta) = F_2$ y la directriz L de la cónica, coincide con la directriz de la hipérbola $L_2: x = h + \frac{a^2}{c}$.

Similarmente, si $\alpha < d$, $F = (\alpha, \beta) = F_1$ y la directriz L ahora coincide con $L_1: x = h - \frac{a^2}{c}$ (Ejercicio (*))

Ejemplo 2

Hallemos los principales elementos de la hipérbola: $9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 36$ y dibujemos su gráfica. Escribiendo la ecuación en la forma cartesiana, tenemos:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Luego: $C = (-1, 1)$, o sea: $h = -1$ y $k = 1$. Asimismo: $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$;
 $c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$; Luego: $F_1 = (h - c, k) = (-1 - \sqrt{13}, 1)$

$F_2 = (-1 + \sqrt{13}, 1)$; $V_1 = (h - a, k) = (-1 - 2, 1) = (-3, 1)$, $V_2 = (h + a, k) = (1, 1)$;

$$L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 9}{2} = 9; \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8;$$

$$L_1: x = h - \frac{a^2}{c} = -1 - \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad L_2: x = h + \frac{a^2}{c} = -1 + \frac{4}{\sqrt{13}}$$

Si se quiere hallar los puntos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , intersección de L_1 y L_2 con la hipérbola, simplemente hacemos: $x = -1 - \sqrt{13}$ en (1) para obtener:

$$Q_1 = \left(-1 - \sqrt{13}, -\frac{7}{2}\right), \quad Q_2 = \left(-1 + \sqrt{13}, \frac{11}{2}\right).$$

Y si hacemos: $x = -1 + \sqrt{13}$, en (1), entonces:

$$Q_3 = \left(-1 + \sqrt{13}, -\frac{7}{2}\right) \text{ y } Q_4 = \left(-1 + \sqrt{13}, \frac{11}{2}\right)$$

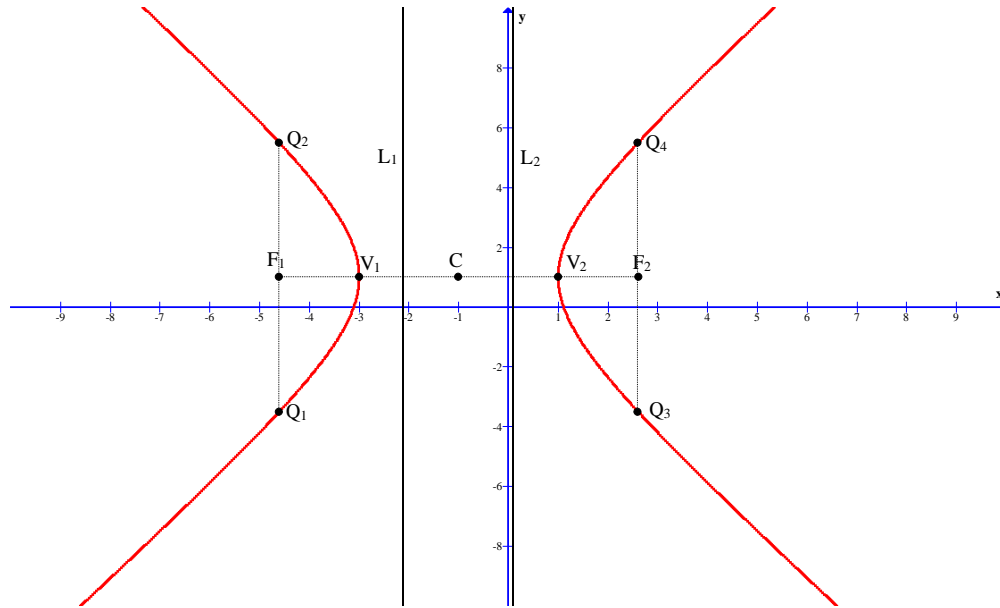


Fig. 6

Ejercicio resuelto 3

Halle la ecuación de la cónica de directriz $L: x = -\frac{11}{5}$, foco $F = (-4, 3)$ y $e = \frac{5}{4}$.

Solución

De acuerdo al teorema 2, esta cónica es una hipérbola de eje focal paralelo al eje x . Además como $F = (\alpha, \beta) = (-4, 3)$. O sea: $\alpha = -4$ y $\beta = 3$. Por otra parte $d = -\frac{11}{5}$.

Como: $\alpha = -4 < d = -\frac{11}{5}$, de acuerdo al teorema 1: $L = L_1$ y $F = F_1$, o sea:

$$x = d = -\frac{11}{5} = h - \frac{a^2}{c} \quad (1)$$

$$F = (-4, 3) = F_1 = (h - c, k) \Rightarrow h - c = -4 \quad (2), \quad y \quad k = 3$$

Finalmente, como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \quad (3)$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} h - \frac{a^2}{c} = -\frac{11}{5} & (1) \\ h - c = -4 & (2) \\ 4c - 5a = 0 & (3) \end{cases}$$

Resolviendo nos queda: $h = 1$, $a = 4$, $c = 5$ (Dejamos los detalles al lector).

Luego:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$$

De manera que: $C = (1, 3)$; $a = 4$ y $b = 3$.

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

Le proponemos al lector que una vez conocida la ecuación de la hipérbola, proceda a hallar el resto de los elementos (vea la fig. 7).

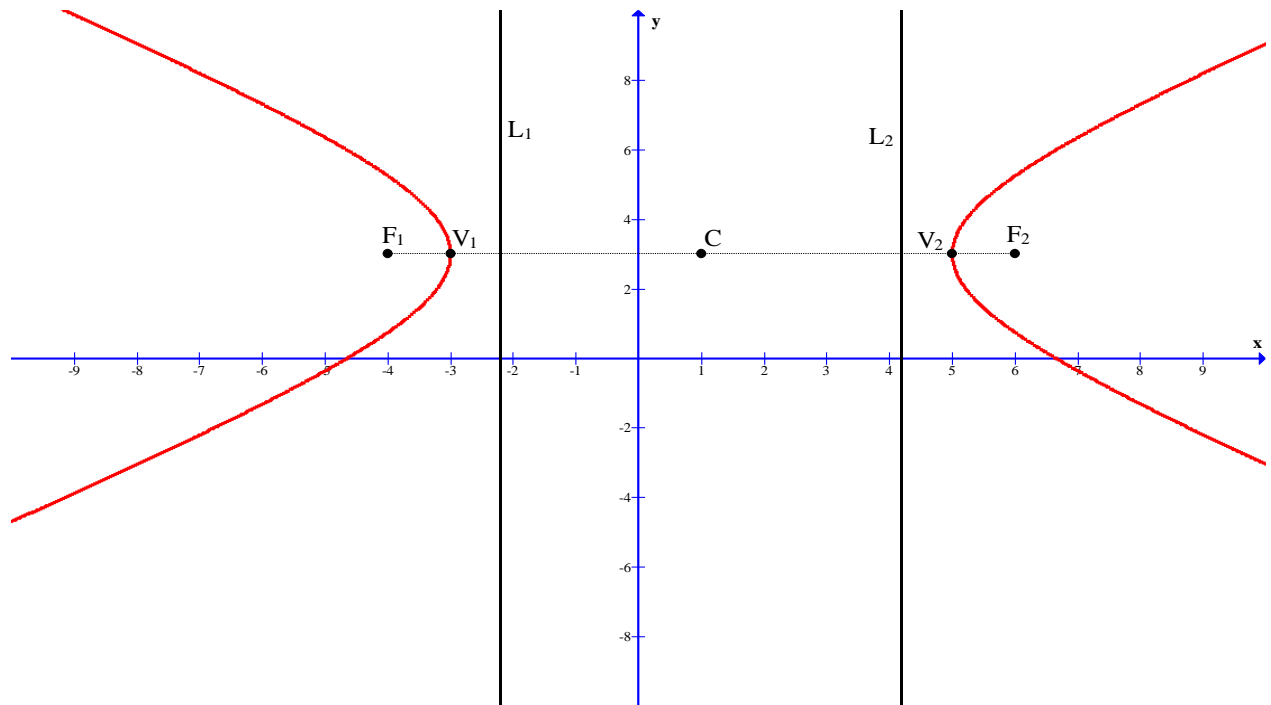


Fig. 7

Asíntotas de la hipérbola

Consideremos la hipérbola de ecuación (B):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Al rectángulo de vértices $P_1 = (h-a, k-b)$, $P_2 = (h-a, k+b)$; $P_3 = (h+a, k-b)$, $P_4 = (h+a, k+b)$ se le llama **rectángulo asintótico de la hipérbola**.

Observe que el área **Ar** de este rectángulo es: $Ar = 4ab$.

Asimismo, la recta que pasa por P_1 y P_4 , y la recta que pasa por P_2 y P_3 reciben el nombre de **asíntotas de la hipérbola**, siendo sus ecuaciones:

$$A_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h); \quad A_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

Observe que A_1 pasa por C, P_1 y P_4 , y A_2 pasa por C, P_2 y P_3 .

La razón de darle el nombre de asíntotas a las rectas A_1 y A_2 , es que al hacer $x \rightarrow \pm\infty$, el punto $P = (x, y)$ de la hipérbola se acerca cada vez más al correspondiente punto $S = (x, y_1)$ de la asíntota.

En efecto:

$$d(P, S) = \sqrt{(x-x)^2 + (y-y_1)^2} = |y - y_1|$$

Pero:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad e \quad y_1 - k = \frac{b}{a}(x - h)$$

Haciendo: $X = x - h$, $Y = y - k$, e $Y_1 = y_1 - k$; y despejando Y e Y_1 , nos queda:

$$Y = \frac{b}{a}\sqrt{X^2 - a^2} \quad e \quad Y_1 = \frac{b}{a}X$$

Luego:

$$d(P, P_1) = |y - y_1| = |Y - Y_1| = \frac{b}{a} \left| X - \sqrt{X^2 - a^2} \right| = \frac{b}{a} \frac{a^2}{|X + \sqrt{X^2 - a^2}|} \rightarrow 0$$

Cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Pues: $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow X \rightarrow \pm\infty$ (Vea la fig.8).

En resumen tenemos que las asíntotas de la hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Son:

$$A_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h) \quad (\text{Asíntota que pasa por } P_1 \text{ y } P_4)$$
$$A_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h) \quad (\text{Asíntota que pasa por } P_2 \text{ y } P_3)$$

Por supuesto, cuando $C = (0, 0)$, tenemos:

$$A_1: y = \frac{b}{a}x; \quad A_2: y = -\frac{b}{a}x$$

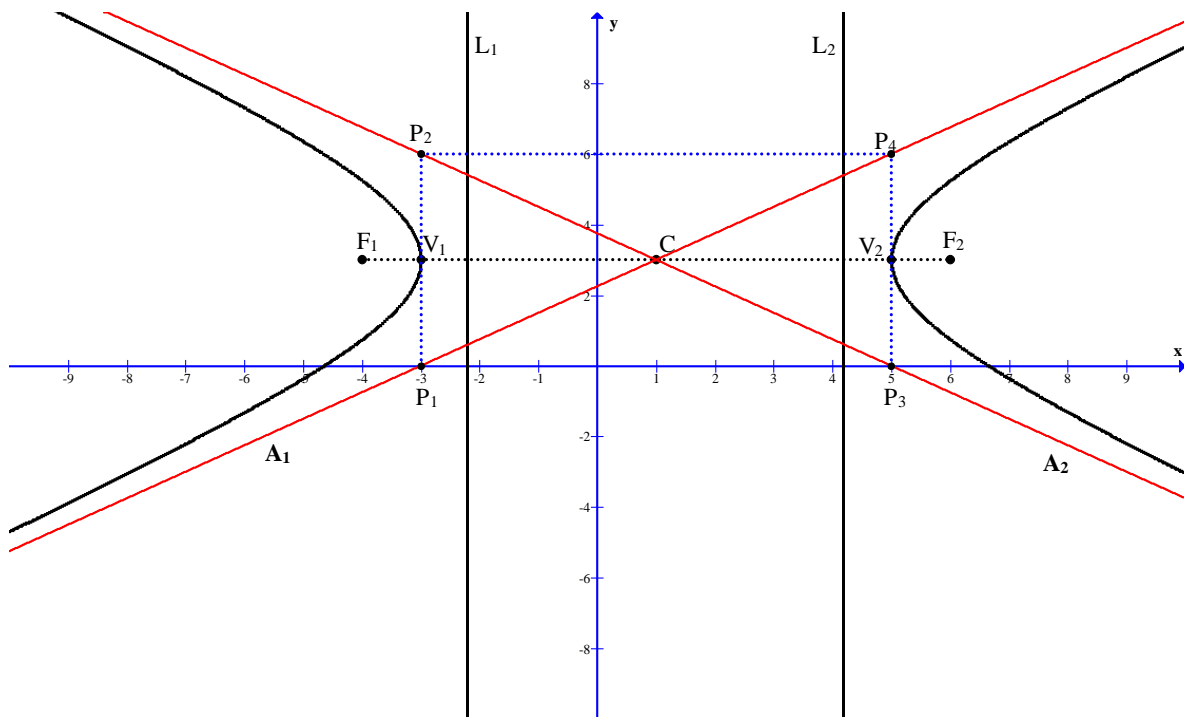


Fig. 8

Ejemplo 3

Halleemos las asíntotas de la hipérbola: $5x^2 - 4y^2 - 20x + 24y = 36$, y luego encontremos el resto de sus elementos.

Factorizando y completando cuadrados tenemos:

$$5(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 - 6x + 9) = 36 + 20 - 36 = 20 \Rightarrow 5(x - 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 20 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{5} = 1$$

Luego: $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$; $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$

Asimismo: $C = (2, 3)$; $V_1 = (0, 3)$, $V_2 = (4, 3)$; $F_1 = (-1, 3)$, $F_2 = (5, 3)$;

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}; \quad L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Directrices:

$$L_1: x = h - \frac{a^2}{c} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}; \quad L_2: x = h + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Asíntotas:

$$A_1: y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2); \quad A_2: y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$$

Las coordenadas del rectángulo asintótico son:

$$P_1' = (h - a, k - b) = (0, 3 - \sqrt{5}); \quad P_2 = (h - a, k + b) = (0, 3 + \sqrt{5})$$

$$P_3 = (h + a, k - b) = (4, 3 - \sqrt{5}); \quad P_4 = (h + a, k + b) = (4, 3 + \sqrt{5})$$

Área del rectángulo asintótico: $Ar = 4ab = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

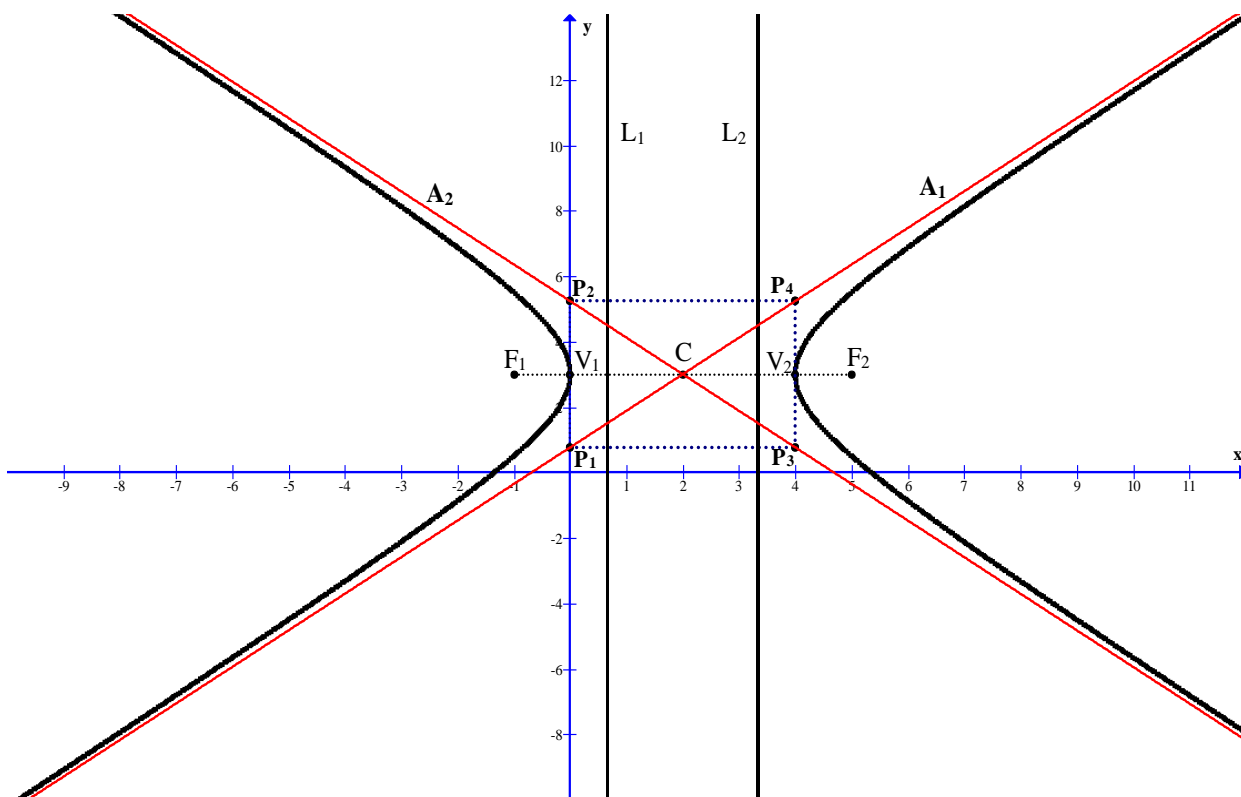


Fig. 9

Ejercicio resuelto 4

Halle la ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje de las x, con asíntotas:

$y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$; $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$, y con área del rectángulo asintótico igual a 48.

Solución

Sabemos que el área del rectángulo asintótico es:

$$Ar = 4ab = 48 \Rightarrow ab = 12 \quad (1)$$

Como:

$$A_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + \left(k - \frac{b}{a}h\right) = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4a - 3b = 0 \quad (2)$$

De (1) y (2), resulta:

$$a \cdot \left(\frac{4}{3}a\right) = 12 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 4.$$

Por otra parte, como $C = (h, k)$ está en las dos asíntotas, entonces:

$$k = \frac{4}{3}h + \frac{11}{3} \quad (3); \quad k = -\frac{4}{3}h - \frac{5}{3} \quad (4)$$

De (3) y (4), nos queda:

$$\frac{4}{3}h + \frac{11}{3} = -\frac{4}{3}h - \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{8}{3}h = -\frac{16}{3} \Rightarrow h = -2$$

Reemplazando en (3), nos queda:

$$k = \frac{4}{3}(-2) + \frac{11}{3} = 1, \text{ y por lo tanto: } C = (-2, 1)$$

Luego la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Los otros elementos, son los siguientes:

$$F_1 = (-7, 1), F_2 = (3, 1); \quad V_1 = (-5, 1), V_2 = (1, 1); \quad e = \frac{5}{3}; \quad L = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Directrices: } L_1: x = -2 - \frac{9}{5} = -\frac{19}{5}; \quad L_2: x = -2 + \frac{9}{5} = -\frac{1}{5}$$

Puntos del rectángulo asintótico:

$$P_1 = (-5, -3), P_2 = (-5, 5), P_3 = (1, -3), P_4 = (1, 5)$$

(¡Haga la gráfica de la hipérbola con sus elementos!).

5.4 Hipérbola de eje focal paralelo al eje de las y

Si la hipérbola tiene sus focos sobre una recta paralela al eje de las y, es decir que su eje focal es de la forma $x = h$ y si $C = (h, k)$, entonces los focos son:

$$F_1 = (h, k - c) \text{ y } F_2 = (h, k + c).$$

Los vértices son:

$$V_1 = (h, k - a) \text{ y } V_2 = (h, k + a).$$

Asimismo, como los papeles de la x y la y, están intercambiados con respecto al caso paralelo al eje de las x, tenemos que la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{D})$$

Si $C = (0, 0)$, entonces (D) toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (\text{E})$$

Con: $c^2 = a^2 + b^2$. Asimismo $e = \frac{c}{a}$, y la longitud del lado recto es $L = \frac{2b^2}{a}$.

Las directrices ahora son:

$$L_1: y = k - \frac{a^2}{c}, \quad L_2: y = k + \frac{a^2}{c}$$

Sugerimos que el lector haga como ejercicio, el enunciado y la demostración de los teoremas 1 y 2, para el caso de la hipérbola (D).

Finalmente, las asíntotas son:

$$A_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h), \quad A_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$

En este caso, también se puede demostrar que cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces las asíntotas se acercan a la hipérbola, o sea que para el punto $P = (x, y)$ de la hipérbola y el punto $P_1 = (x, y_1)$ de la asíntota, ocurre que $d(P, P_1) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Recomendamos al lector, guiarse por lo redactado en las secciones 5.1, 5.2 y 5.3, para demostrar lo afirmado en esta sección (Vea la figura 10).

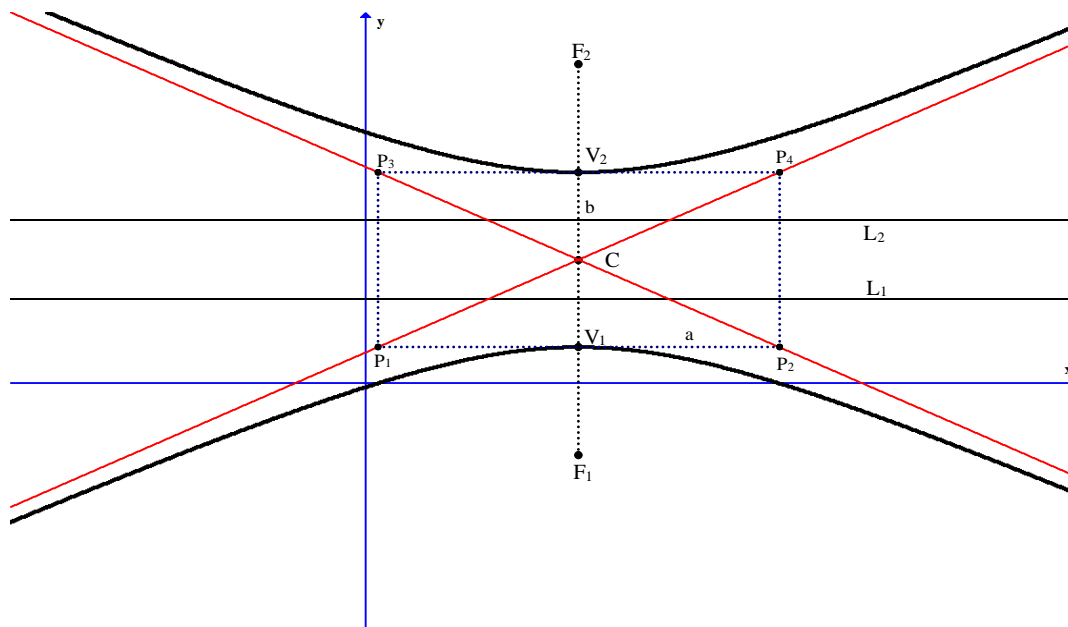


Fig.10

Ejercicio resuelto 5

Halle los elementos de la hipérbola: $4y^2 - x^2 + 6x - 16y - 1 = 0$. Determine los posibles puntos de corte con los ejes.

Solución

Completando cuadrados tenemos:

$$\frac{(y-2)^2}{2} - \frac{(x-3)^2}{8} = 1$$

Por lo tanto sus principales elementos son:

$$C = (3, 2); \quad a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}; \quad b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}; \quad c^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

$$F_1 = (3, 2 - \sqrt{10}), F_2 = (3, 2 + \sqrt{10}); \quad V_1 = (3, 2 - \sqrt{2}), V_2 = (3, 2 + \sqrt{2})$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}; \quad L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

$$L_1: y = k - \frac{a^2}{c} = 2 - \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad L_2: y = 2 + \frac{2}{\sqrt{10}};$$

$$A_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h) \Rightarrow y - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2};$$

$$A_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h)y \Rightarrow -2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Los puntos de corte con el eje y se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 + 6x - 16y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Luego nos queda la ecuación de segundo grado: $4y^2 - 8y - 1 = 0$, cuyas raíces son:

$$y_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; y_2 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Entonces los puntos de corte con el eje y son: $T_1 = \left(0, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $T_2 = \left(0, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Finalmente los puntos de corte con el eje x se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 + 6x - 16y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resultando: $M_1 = (3 - 2\sqrt{2}, 0)$; $M_2 = (3 + 2\sqrt{2}, 0)$.

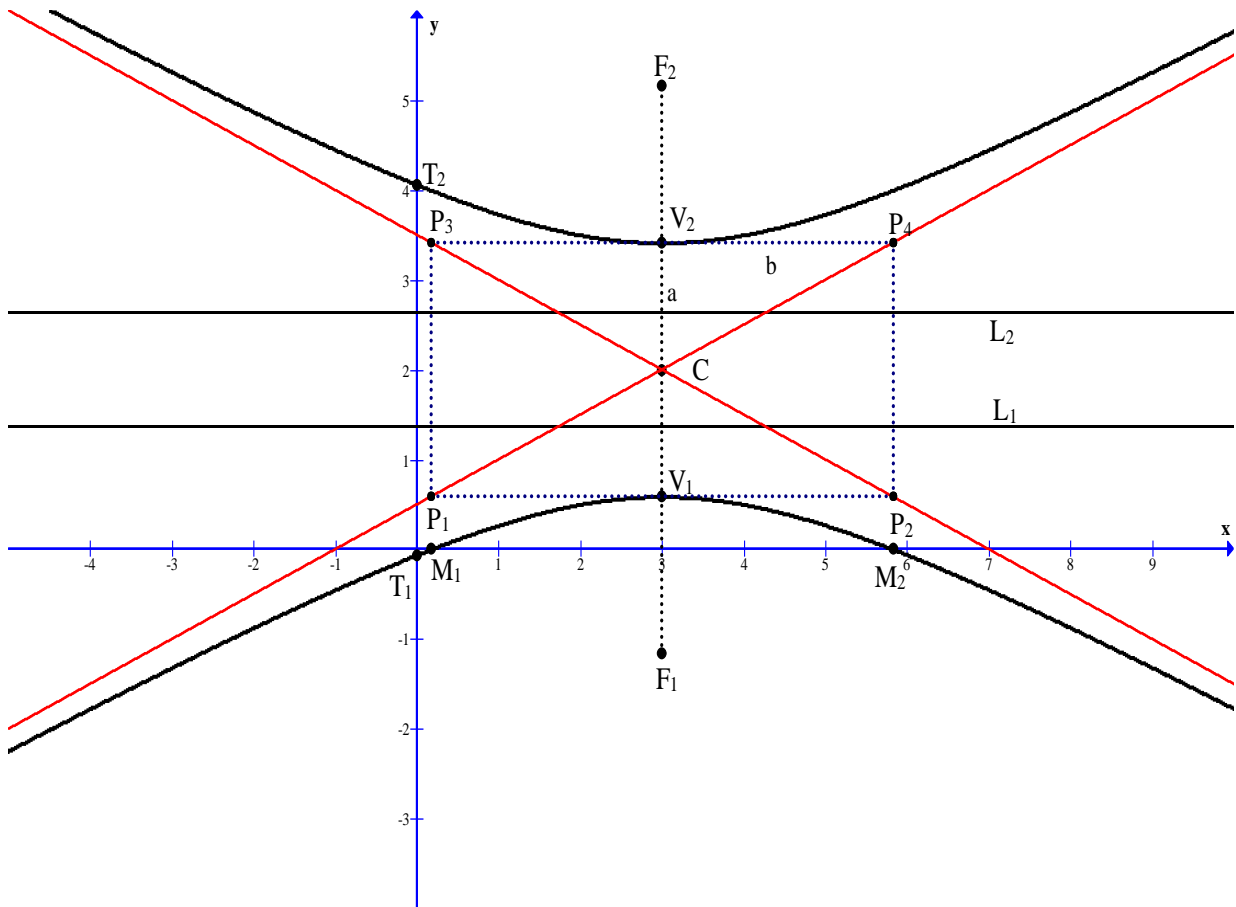


Fig. 11

5.5 La ecuación general de la hipérbola

Consideremos la ecuación de la hipérbola de centro $C = (h, k)$ y eje focal paralelo al eje x .
O sea:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B})$$

Si desarrollamos (B) nos queda una expresión de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (\text{F})$$

Donde: $A = b^2$; $B = -a^2$; $C = -2hb^2$; $D = 2ka^2$; $E = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$.

O sea de (B) llegamos a una expresión (F), donde A y B tienen **signos distintos**, de manera que: $A \cdot B < 0$.

De igual forma, de una hipérbola con ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{D})$$

llegamos a una expresión similar a (F), nuevamente con $A \cdot B < 0$ (**Ejercicio**).

Recíprocamente, de (F) con $A \cdot B < 0$ se puede llegar a una hipérbola tipo (B) o (D), bajo una condición extra que veremos en un momento.

Supongamos que $A > 0$ y $B < 0$ (Dejamos como ejercicio el caso: $A < 0$ y $B > 0$).

Factorizando y completando cuadrados en (F), tenemos:

$$A \left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2} \right) + B \left(y^2 + \frac{D}{B}y + \frac{D^2}{4B^2} \right) = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = G \quad (\text{I})$$

Si $G > 0$, llegamos a una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\left(x + \frac{C}{2A} \right)^2}{\frac{G}{A}} + \frac{\left(y + \frac{D}{2B} \right)^2}{\frac{G}{B}} = 1$$

Que es una hipérbola de eje focal paralelo al eje de las x , pues: $A > 0$, $G > 0$ y $B < 0$, y por tanto:

$$\frac{G}{A} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{G}{B} < 0$$

Mientras que si $G < 0$, entonces de (I), pasamos a :

$$\frac{\left(y + \frac{D}{2B} \right)^2}{\frac{G}{B}} + \frac{\left(x + \frac{C}{2A} \right)^2}{\frac{G}{A}} = 1$$

Que es una hipérbola de eje focal paralelo al eje de las y, pues $G < 0$, $B < 0$ y $A > 0$, y por tanto:

$$\frac{G}{A} < 0 \quad y \quad \frac{G}{B} > 0$$

Cuando $G = 0$, entonces (I) nos queda así:

$$A \left(x + \frac{C}{2A} \right)^2 + B \left(y + \frac{D}{2B} \right)^2 = 0$$

Que representa a dos rectas: (¡ Recuerde que $A > 0$ y $B < 0$!)

$$y + \frac{D}{2B} = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}} \left(x + \frac{C}{2A} \right)$$

Ejemplo 4

Veamos qué representan las siguientes ecuaciones:

- a) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 19 = 0$; b) $4x^2 + 9y^2 - 6x + 18y - 8 = 0$
 c) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y + 199 = 0$; d) $x^2 - 2y^2 - 4y + 4x + 2 = 0$.

Por lo pronto, a), c) y d) son candidatos a ser hipérbola, pues $A \cdot B < 0$. Para confirmarlo o no, procedemos a completar cuadrados.

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 19 + 1 - 4 = 16 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 16 \Rightarrow \\ \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 1)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Que es una hipérbola de centro $C = (1, -1)$, y eje focal paralelo al eje de las x.

$$\begin{aligned} \text{b) } 4 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \right) + 9(y^2 + 2y + 1) &= 8 + \frac{9}{4} + 9 = \frac{77}{4} \Rightarrow \\ \frac{(x - \frac{3}{4})^2}{\frac{77}{16}} + \frac{(y + 1)^2}{\frac{77}{36}} &= 1 \end{aligned}$$

De manera que (b) es una elipse de centro $C = (\frac{3}{4}, -1)$ y eje focal paralelo al eje x.

$$\text{c) } 16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = -199 + 64 - 9 = -144. \text{ Luego:}$$

$$\frac{(y - 1)^2}{16} - \frac{(x - 2)^2}{9} = 1$$

Entonces tenemos que (c) es una hipérbola de centro $C = (2, 1)$ y eje focal paralelo al eje y.

d) Completando cuadrados, tenemos:

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 4) - 2(y^2 + 2y + 1) &= -2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 2(y + 1)^2 \Rightarrow \\ y + 1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2) \quad \text{ó} \quad y + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2) \end{aligned}$$

O sea, (d) representa a la unión de dos rectas.

Ejercicio resuelto 6

Halle la recta tangente a la hipérbola: $x^2 - y^2 + 2x = 0$, desde el punto $P_0 = (0, 2)$.

Solución

Completemos cuadrados para identificar el tipo de hipérbola que es $x^2 - y^2 + 2x = 0$.

$$(x^2 + 2x + 1) - y^2 = 1 \Rightarrow (x + 1)^2 - y^2 = 1.$$

O sea, se trata de una hipérbola de centro $C = (-1, 0)$, y eje focal paralelo al eje de las x ; concretamente el eje focal es: $y = -1$.

La recta: $Ax + By + C = 0$, si pasa por el punto $P_0 = (0, 2)$, entonces: $A \cdot 0 + B \cdot 2 + C = 0$, luego: $C = -2B$, por lo tanto la ecuación de la recta queda: $Ax + By - 2B = 0$.

Si $B \neq 0$, entonces: $y = mx + 2$, donde $m = -\frac{A}{B}$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 & (1) \\ y = mx + 2 & (2) \end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera y agrupando, nos queda:

$$(1 - m^2)x^2 + 2(1 - 2m)x - 4 = 0 \quad (3)$$

Como la recta (2) debe ser tangente a (1), entonces (3) debe tener raíz doble, para ello debe cumplirse que:

$$\Delta = 4(1 - 2m)^2 - 4(1 - m^2)(-4) = 0.$$

Desarrollando y simplificando, resulta: $4m - 5 = 0$, o sea: $m = \frac{5}{4}$.

Por tanto, una recta tangente es: $T_1: y = \frac{5}{4}x + 2$

Reemplazando el valor de m en (3), resulta:

$$\left(1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)x^2 + 2\left(1 - 2\left(\frac{5}{4}\right)\right)x - 4 = 0.$$

Efectuando y simplificando, queda:

$$(3x + 8)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{4}\left(-\frac{8}{3}\right) + 2 = -\frac{4}{3}$$

Luego el punto de tangencia es:

$$P_1 = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Ahora, si $B = 0$, entonces en $Ax + By - 2B = 0$ nos queda: $Ax = 0$, luego $x = 0$, es la otra posible recta tangente.

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 & (1) \\ x = 0 & (3) \end{cases}$$

Nos queda: $y^2 = 0$, luego el punto de tangencia es $P_2 = (0, 0) = V_2$

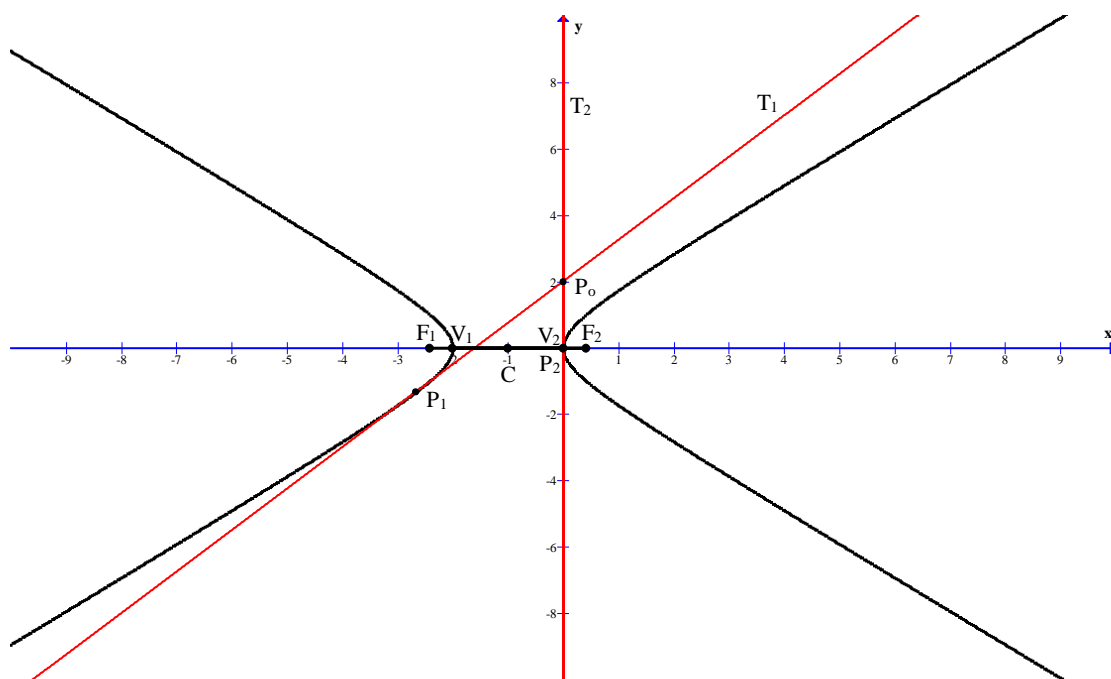


Fig.12

5.6 Tabla con los principales elementos de la hipérbola

Ecuación ($c^2 = a^2 + b^2$)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Centro	$C = (h, k)$	$C = (h, k)$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Eje conjugado	$x = h$	$y = k$
Focos	$F_1 = (h - c, k); F_2 = (h + c, k)$	$F_1 = (h, k - c); F_2 = (h, k + c)$
Vértices	$V_1 = (h - a, k); V_2 = (h + a, k)$	$V_1 = (h, k - a); V_2 = (h, k + a)$
Diámetro principal	$2a$	$2a$
Diámetro conjugado	$2b$	$2b$
Longitud del lado recto	$L = \frac{2b^2}{a}$	$L = \frac{2b^2}{a}$
Excentricidad	$e = \frac{c}{a} > 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$
Directrices	$L_1: x = h - \frac{a^2}{c}; L_2: x = h + \frac{a^2}{c}$	$L_1: y = k - \frac{a^2}{c}; L_2: y = k + \frac{a^2}{c}$
Área del rectángulo asintótico	$Ar = 4 \cdot a \cdot b$	$Ar = 4 \cdot a \cdot b$
Asíntotas	$A_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ $A_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$	$A_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h)$ $A_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$
Ecuación de la tangente	$\frac{(x_o - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_o - k)(y - k)}{b^2} = 1$	$\frac{(y_o - k)(y - k)}{a^2} - \frac{(x_o - h)(x - h)}{b^2} = 1$

Ejercicios propuestos

1) Halla la ecuación de la hipérbola a partir de los datos que se dan, en cada caso:

a) $V_2 = (1,0)$, $F_2 = (2,0)$ y $C = (0,0)$

b) $C = (0,0)$, $F_1 = (0,-7)$ y diámetro conjugado igual a 10

c) $F_1 = (-2,0)$, $F_2 = (2,0)$ y $e = 5/3$

d) $C = (-2,3)$, diámetro focal igual a 5, diámetro conjugado igual a 3 y eje focal paralelo al eje de las y .

2) Encuentre los elementos de las siguientes hipérbolas y haga su gráfica:

a) $5y^2 - 16x^2 = 80$;

b) $7x^2 - 9y^2 = 63$;

c) $x^2 - y^2 = 8$

d) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$; e) $3x^2 - y^2 = 3k^2$ ($k > 0$)

3) Una hipérbola es equilátera si $a = b$. Encuentre la hipérbola equilátera que pasa por $(3,-1)$ y de focos $(\pm c, 0)$.

4) Demuestre que las siguientes hipérbolas tienen la misma excentricidad:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = k \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{A^2} - \frac{x^2}{B^2} = k \quad (k > 0)$$

5) Halle la ecuación de la hipérbola de focos: $F_1 = (0,0)$ y $F_2 = (0,4)$ que pasa por $(12,9)$. Encuentre también sus asíntotas.

6) ¿Para qué valores de s representa la ecuación:

$$\frac{x^2}{9-s} - \frac{y^2}{s-5} = 1,$$

a) una elipse; b) una hipérbola; c) ninguna curva real; d) halle los focos en los casos a y b.

7) Sea P un punto de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Por P trazamos una paralela B al eje focal (eje x), y sean Q y S , los puntos de intersección de B con cada asíntota de la hipérbola. Demuestre que: $\overline{QP} \cdot \overline{SP} = a^2$. (*)

8) Determine la ecuación de una hipérbola cuyo centro es $(0,0)$; su eje focal está sobre el eje y , un foco es $(0,5)$ y la excentricidad es 3.

9) Sea $k \neq 0$, demuestre que la familia de hipérbolas: $3x^2 - 4y^2 = k$, tienen la misma excentricidad.

10) Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal en el eje y , y que pasa por los puntos: $(4,6)$ y $(1,-3)$.

11) Un punto $P = (x, y)$ se mueve de tal manera que su distancia al punto $A = (0, 4)$ es tres veces la distancia a la recta $x = 5$. Sin calcular diga Ud. ¿Qué tipo de cónica es?. Luego demuestre su afirmación analíticamente.

12) Halle el valor de α tal que la recta: $3x - 2y = \alpha$, sea tangente a la hipérbola: $x^2 - 3y^2 = 1$.

13) Sea la hipérbola equilátera: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Demuestre que si hacemos los cambios de variable: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y)$, entonces la hipérbola toma la forma: $X \cdot Y = k$.

Donde $k = \frac{a^2}{2}$.

14) Halle los puntos de la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ cuya distancia a F_1 es 7.

15) Halle la hipérbola de focos $(\pm 3, 0)$ y para la cual la recta: $y = 2x - 4$ es tangente a ella.

16) ¿Qué lugar geométrico representa el conjunto:

$$G = \{(x, y): x = a \cdot \sec t, y = b \cdot \operatorname{tg} t \text{ con } t \in [0, 2\pi) - \{\pi/2, 3\pi/2\}\}?$$

17) La base de un triángulo tiene vértices: $(\pm 3, 0)$. Halle el lugar geométrico del vértice opuesto del triángulo, sabiendo que el producto de las pendientes de los lados variables es 4.

18) ¿Qué ángulo forman las asíntotas de una hipérbola de excentricidad e ? Use lo anterior para el caso $e = 2$. (*)

19) Halle los puntos de intersección de la hipérbola $2x^2 - y^2 = 4$ con la circunferencia: $x^2 + y^2 = 8$.

20) En cada una de las siguientes hipérbolas halle el centro, vértices, focos y asíntotas:

a) $9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$;

b) $4x^2 = y^2 - 4y + 8$;

c) $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$; d) $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 4$;

e) $\frac{(4y+1)^2}{9} - \frac{(3y+2)^2}{16} = 1$.

21) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias a los puntos $(2, 1)$ y $(2, 9)$ es 4.

22) Halle la hipérbola con un foco en $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, la intersección de los dos asíntotas es $(-3, 1)$ y una de las asíntotas pasa por $(1, 7)$.

23) Calcule el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola: $9x^2 - 4y^2 = 36$, y la recta: $9x + 2y = 24$.

24) Determine los puntos de la hipérbola: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, cuya distancia a F_2 es $9/2$.

25) Demuestre que el producto de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \text{ a sus dos asíntotas es constante e igual a: } \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

26) Encuentre las tangentes a: $x^2 - y^2 = 16$ desde: $(-1, -7)$.

27) La recta: $y = 2x - 4$ es tangente a una hipérbola de focos: $(\pm 3, 0)$. Halle la ecuación de la hipérbola.

28) Determina la ecuación de la hipérbola de vértices $(0, \pm 3)$ y asíntotas: $y = \pm 2x$.

29) Halle el centro, diámetro principal o transversal, excentricidad, focos, vértices y asíntotas de la hipérbola: $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 64 = 0$.

30) Una partícula se mueve de tal forma que su distancia al punto $Q = (0, 4)$ es $4/3$ de su distancia a la recta $4y - 9 = 0$. Determine la ecuación de su trayectoria.

31) Un observador se encuentra en un punto $P = (x, y)$ de una curva que se caracteriza porque desde cualquier punto de ella el estampido de un rifle y el golpe al pegar en el objetivo, se oyen a unísono. Halle la ecuación de este lugar geométrico en función de la distancia L entre el rifle y el objetivo, la velocidad del sonido v_s y la velocidad de la bala v_B (*).

32) Demuestre que el diámetro conjugado es igual a la media geométrica del diámetro principal y la longitud de su lado recto.

33) Una partícula α se dispara hacia el núcleo de un átomo, describiendo al principio una trayectoria recta $y = x/2$ (Suponemos que el núcleo está en el origen de coordenadas). Luego debido a la fuerza de repulsión del núcleo, la trayectoria de la partícula α sigue una trayectoria hipérbolica, acercándose a 3 unidades de distancia del núcleo. Encuentre la ecuación de la hipérbola.

34) En la pantalla de dos estaciones sísmicas separadas por 1,6 km de distancia, se registra una explosión subterránea. La primera recibe la señal 2 segundos antes que la segunda estación. A todos los puntos de la superficie terrestre donde esta diferencia es de 2 s, se le da el nombre de “**línea de explosión de nivel 2 s**”. Halle la ecuación de esta línea. Tomemos como rapidez del sonido: 330 m/s (*).

35) Sean A_1 y A_2 las asíntotas de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Y sea T una tangente a la hipérbola en algún punto (x_0, y_0) de ella. Sean: $\{(x_1, y_1)\} = A_1 \cap T$ y $\{(x_2, y_2)\} = A_2 \cap T$. Demuestre que: $x_1x_2 = a^2$ e $y_1y_2 = -b^2$.

36) Demuestre que para los puntos $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la x cumple con la inecuación: $|x| \geq a$, y las y toman cualquier valor real.

37) Denominamos **circunferencia directriz de una hipérbola** a una circunferencia de centro uno de los focos, y radio igual al diámetro focal, o sea: $2a$. Como la hipérbola tiene dos focos, entonces cada hipérbola tiene dos circunferencias directrices. Halle las circunferencias directrices de la hipérbola: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

38) Demuestre que la excentricidad de una hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$.

39) Halle la ecuación de la tangente y la normal de la hipérbola: $4x^2 - y^2 = 28$ en un punto de la hipérbola de abscisa positiva y con $y = 6$.

40) Halle la ecuación de la recta tangente a $x^2 - 2y^2 = 8$, tal que su pendiente sea 1.

41) Demuestre que las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Se pueden hallar despejando y en la igualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

42) Idem para la hipérbola:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

43) Halle la intersección entre la hipérbola: $9x^2 - 16y^2 = 144$ y la elipse: $9x^2 + 64y^2 = 576$. Haga una gráfica del problema.

44) Encuentre las tangentes a la hipérbola del ejercicio anterior desde el punto $Q = (6,5)$.

Respuestas

1) a) $3x^2 - y^2 = 3$; b) $\frac{y^2}{24} - \frac{x^2}{25} = 1$; c) $225x^2 - 400y^2 = 576$; d) $\frac{(y-3)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}} = 1$.

2)

	a)	b)	c)	d)	e)
Centro	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2, -3)	(0,0)
a	4	3	$2\sqrt{2}$	2	k
b	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$	3	$\sqrt{3}k$
c	$\sqrt{21}$	4	4	$\sqrt{13}$	2k
e	$\frac{\sqrt{21}}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	2
F₁, F₂	$(0, -\sqrt{21}), (0, \sqrt{21})$	(-4,0), (4,0)	(-4,0), (4,0)	$(2 - \sqrt{13}, -3), (2 + \sqrt{13}, -3)$	$(-2k, 0), (2k, 0)$
V₁, V₂	(0, -4), (0,4)	(-3,0), (3,0)	$(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0)$	(0, -3), (0,3)	$(-k, 0), (k, 0)$
L	$\frac{5}{2}$	$\frac{14}{3}$	$4\sqrt{2}$	9	3k
Directriz	$y = -\frac{16}{21}; y = \frac{16}{21}$	$x = -\frac{9}{4}; x = \frac{9}{4}$	$y = -2; y = 2$	$y = 2 - \frac{4}{\sqrt{13}}; y = 2 + \frac{4}{\sqrt{13}}$	$y = -\frac{\sqrt{3}k}{3}; y = \frac{\sqrt{3}k}{3}$
Ar	$16\sqrt{5}$	$12\sqrt{7}$	32	24	$4\sqrt{3}k^2$
Asíntotas	$y = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}x$	$y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x$	$y = \pm x$	$y = \frac{3}{2}x - 6; y = -\frac{3}{2}x$	$y = \pm \sqrt{3}x$

3) $x^2 - y^2 = 8$. 5) $3(y-2)^2 - x^2 = 3$; A₁: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$, A₂: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$;

6) a) $s \in (5,7) \cup (7,9)$. Cuando $s = 7$, tenemos una circunferencia de radio $\sqrt{2}$.

b) $s \in (-\infty, 5) \cup (9, \infty)$; c) $s = 5$ ó $s = 9$;

Intervalo de s	F ₁	F ₂	Cónica
$(-\infty, 5)$	$(-\sqrt{14-2s}, 0)$	$(\sqrt{14-2s}, 0)$	hipérbola
5	---	---	no es lugar geométr.
(5,7)	$(-\sqrt{14-2s}, 0)$	$(\sqrt{14-2s}, 0)$	elipse
7	(0,0)	(0,0)	circunferencia
(7,9)	$(0, -\sqrt{2s-14})$	$(0, \sqrt{2s-14})$	elipse
9	---	---	no es lugar geométr.
$(9, \infty)$	$(0, -\sqrt{2s-14})$	$(0, \sqrt{2s-14})$	hipérbola

8) $72y^2 - 9x^2 = 200$; 10) $5y^2 - 9x^2 = 36$; 11) Es la hipérbola: $8(x-45/2)^2 - (y-4)^2 = 4050$;

12) $\alpha = \pm \sqrt{\frac{23}{3}}$; 14) $(-6, \pm 4\sqrt{3})$; 15) $4x^2 - 5y^2 = 20$; 16) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 17) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$;

18) $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{e^2-1}}{-e^2+2}$; $\alpha = 120^\circ$; 19) $(\pm 2, \pm 2)$; 19) $(\pm 2, \pm 2)$ (Cuatro puntos)

20)

literal	Centro	Focos	Vértices	Asíntotas
a)	(2, -3)	$(2 \pm \sqrt{13}, -3)$	(0, -3), (4, -3)	$y + 3 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$
b)	(0,2)	$(\pm\sqrt{5}, 2)$	$(\pm 1, 2)$	$y - 2 = \pm 2x$
c)	(2,1)	(2, -2), (2,4)	(2, -1), (2,3)	$y - 1 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}(x - 2)$
d)	(-2,1)	(-5,1), (1,1)	(-4,1), (0,1)	$y - 1 = \pm \frac{5}{2}(x + 2)$
e)	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{337}}{12}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, -1\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$y + \frac{1}{4} = \pm \frac{9}{16}\left(x + \frac{2}{3}\right)$

21) $3(y-2)^2 - (x-2)^2 = 1$; 22) $9(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 324$; 23) 12; 24) $(10, \pm 9/2)$;

26) $3y = 5x - 16$, $5y = -13x - 48$; 27) $4x^2 - 5y^2 = 20$; 28) $y^2 - 4x^2 = 9$;

29) $C = (2, -3)$; $2a = 16/3$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $F = (2 \pm \frac{4\sqrt{13}}{3}, -3)$; $V = (2 \pm \frac{8}{3}, -3)$; Asíntotas:

$y + 3 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$. 30) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$. 31) $(v_B^2 - v_S^2)y^2 - v_S^2x^2 = \frac{L^2(v_S^2 - v_B^2)v_S^2}{4v_B^2}$.

33) $x^2 - 4y^2 = 9$. 34) $\frac{x^2}{108900} - \frac{y^2}{518364} = 1$. 37) $(x \pm 5)^2 + y^2 = 64$. 39) tangente: $8x - 3y = 14$; normal: $3x + 8y = 60$; 40) $y = x \pm 2$. 43) $\left(\pm 8\sqrt{\frac{2}{5}}, \pm \sqrt{\frac{123}{5}}\right)$

6. La parábola

6.1 Introducción

Consideremos un punto fijo F del plano y una recta L . Al conjunto de puntos del plano que equidistan del punto F y de la recta L se denomina **parábola de foco F y directriz L** .

Así, para cualquier punto de la parábola se cumple que: $d(P, F) = d(P, L)$. O sea que una parábola es una cónica de foco F , directriz L y parámetro $\gamma = 1$ (excentricidad).

A la recta perpendicular a L que pasa por F , se le denomina **eje focal**.

Para deducir la ecuación de la parábola esta vez seguiremos un camino diferente al realizado en las deducciones de las ecuaciones de la elipse y la hipérbola. Esta vez tomaremos un sistema de coordenadas que nos permita obtener la forma más sencilla o canónica de la ecuación de la parábola. Sugerimos al docente que siga estas notas, que puede asignar como proyecto para los alumnos el estudiar la elipse y la hipérbola, siguiendo este camino, o bien que estudie la parábola en forma parecida a lo hecho en las secciones 4 y 5.

6.2 La ecuación canónica de la parábola

Tomemos un sistema de coordenadas de tal forma que el eje x sea la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a L , o sea el eje x es el eje focal de la parábola. El eje y , lo tomamos equidistante del foco y de la directriz L . De esta forma tenemos que el punto $V = (0,0)$, intersección de el eje focal (eje x) y el eje y , queda equidistante de L y de F , por la forma como se tomó el eje y , por lo tanto V pertenece a la parábola. Luego si $d(V, F) = a$, entonces $d(V, L) = a$.

Al parámetro a se le llama **distancia focal**. Observemos que si F queda a la derecha de V , entonces: $F = (a, 0)$ y $L: x = -a$. Al punto V lo llamamos **vértice** de la parábola. Si F queda a la izquierda de V , entonces: $F = (-a, 0)$ y $L: x = a$.

Analicemos el primer caso, o sea: $F = (a, 0)$, con $d(F, V) = a$ (Vea la fig. 1).

Para un punto cualquiera $P = (x, y)$ de la parábola tenemos: $d(P, F) = d(P, L)$, luego:

$$[d(P, F)]^2 = [d(P, L)]^2 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \Rightarrow x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

Simplificando nos queda:

$$y^2 = 4ax \quad (\text{A})$$

Si sucede que F está a la izquierda de V , entonces llegamos a: $y^2 = -4ax$ (B). (Vea la figura 2).

Sugerimos al lector que deduzca la fórmula (B).

Consideremos ahora, la recta M que pasa por F y es perpendicular al eje focal. Sean Q_1 y Q_2 los puntos de intersección de M con la parábola, a la distancia Lr entre Q_1 y Q_2 , la llamamos **longitud del lado recto**. Para calcular esta distancia debemos tener las coordenadas de Q_1 y Q_2 , las cuales se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ x = a \end{cases}$$

Obteniendo: $y = \pm 2a$.

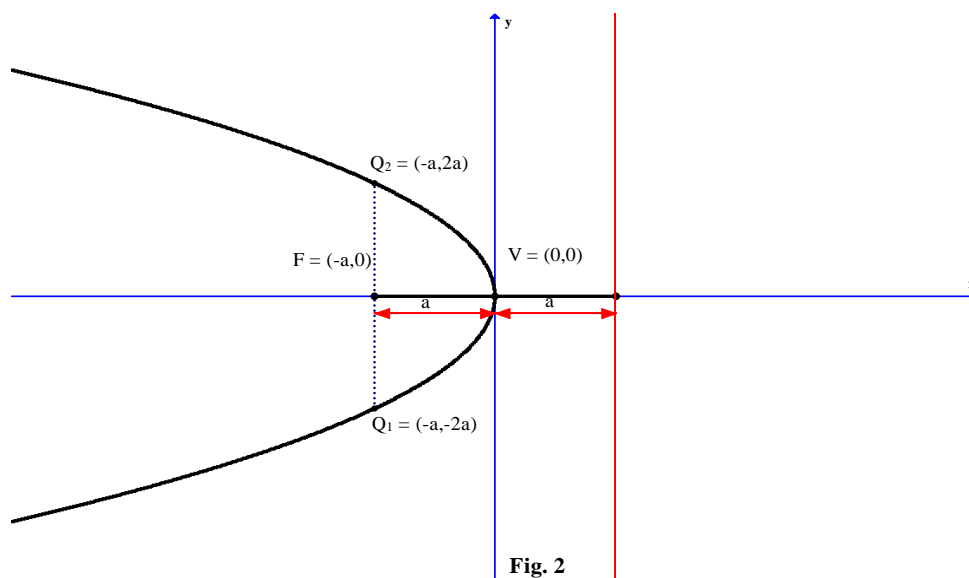
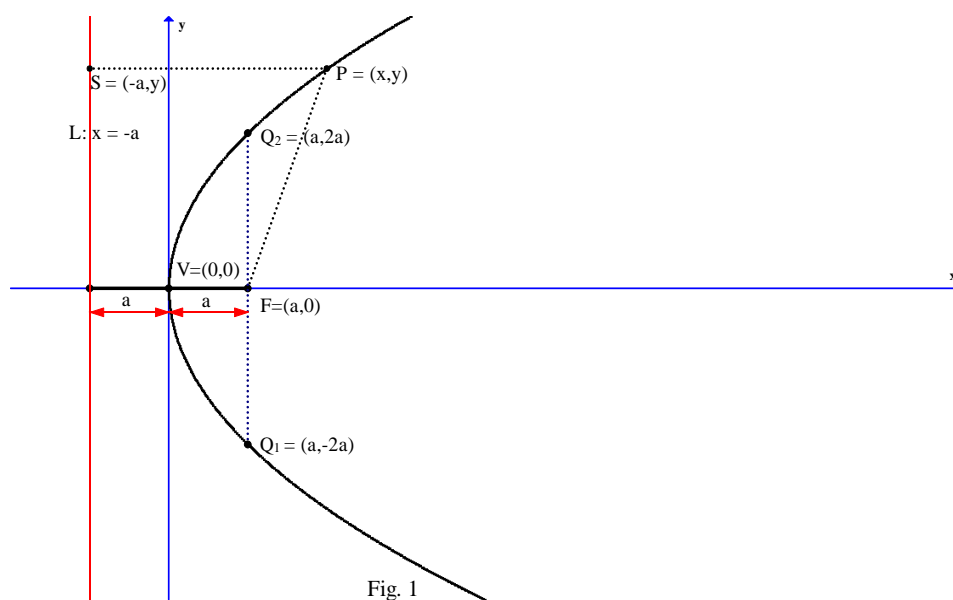
Luego: $Q_1 = (a, -2a)$ y $Q_2 = (a, 2a)$. Por lo tanto: $Lr = d(Q_1, Q_2) = 4a$ (Vea fig. 1 y 2).

Si la parábola tiene la forma $y^2 = -4a$, entonces: $Q_1 = (-a, -2a)$ y $Q_2 = (-a, 2a)$, y por lo tanto: $Lr = 4a$.

Ejemplo 1

Halle los elementos de la parábola $y^2 = 4x$.

Por comparación tenemos que $4 = 4a$, luego: $a = 1$ (distancia focal). Por lo tanto: $F = (1,0)$, $L: x = -1$, $V = (0,0)$ y $Lr = 4$.



Si tomamos como eje de las y , a la recta perpendicular a L , que pasa por el foco F y como eje de las x , la recta equidistante del foco F y la directriz L , entonces la ecuación de la parábola es: $x^2 = 4ay$, si el foco está por encima de la directriz. Mientras que si el foco está por debajo de la directriz, entonces la ecuación de la parábola es: $x^2 = -4ay$ (¡Pruebe estas afirmaciones!). Ahora tenemos: $F = (0, a)$ y $L: y = -a$, en el primer caso. Mientras que si estamos en el segundo caso, entonces $F = (0, -a)$ y $L: y = a$. Además $Lr = 4a$, en ambos casos (Vea figura 3 y 4).

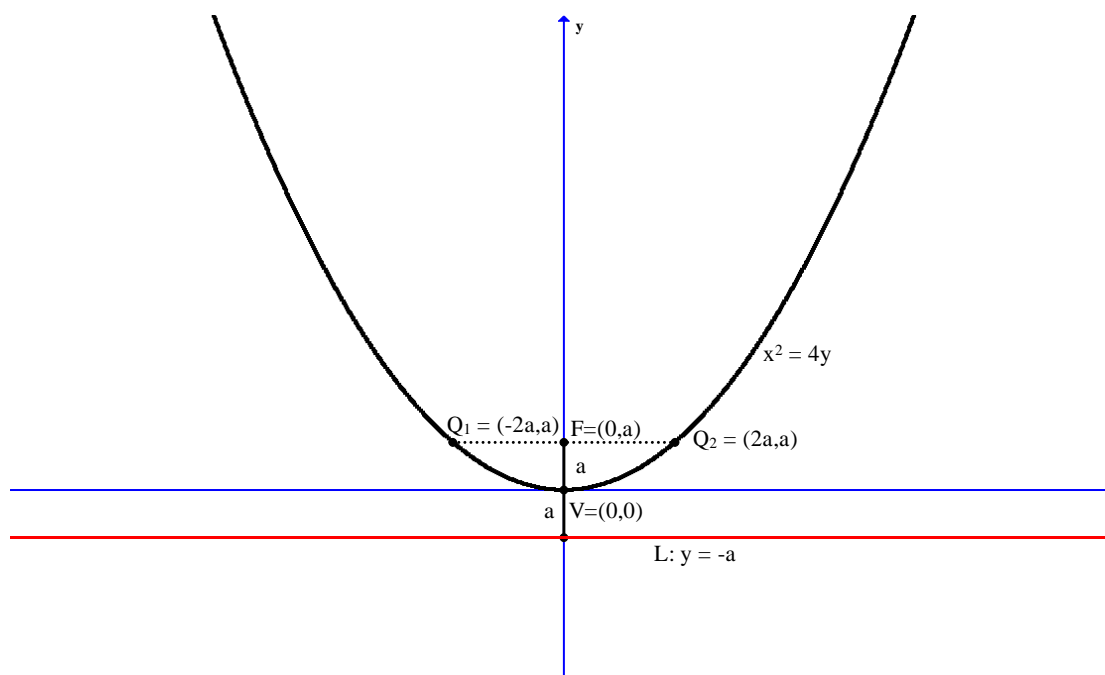


Fig.3

Ejemplo 2

Hallemos la ecuación de la parábola de foco $F = (0, 3/4)$ y directriz $L: y = -3/4$.

Como el foco está por encima de la directriz, la ecuación de la parábola tiene la forma:

$x^2 = 4ay$. Donde el foco es: $F = (0, a) = (0, 3/4)$, o sea: $a = \frac{3}{4}$. De manera que la ecuación queda: $x^2 = 4 \cdot \frac{3}{4}y = 3y$. Luego: $V = (0,0)$ y $Lr = 4a = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

Observe que al ser siempre $Lr = 4a$, entonces las ecuaciones de la parábola se pueden escribir en la forma: $y^2 = Lr \cdot x$, $x^2 = Lr \cdot y$, etc.

Ejercicio resuelto 1

Encuentre los elementos de la parábola $x^2 = -12y$. ¿Pertenece el punto $(144,12)$ a la parábola?

Solución

Comparando con $x^2 = -4ay = -12y$, tenemos: $4a = 12$, luego: $a = 3$. Por tanto:

$V = (0,0)$, $F = (0,-3)$, $L: y = 3$, $Lr = 4a = 12$ (Vea la figura 4)

Haciendo $y = 12$ en $x^2 = -12y$, resulta: $x^2 = -144$, lo cual es imposible en los reales. Luego, el punto **no** pertenece a la parábola.

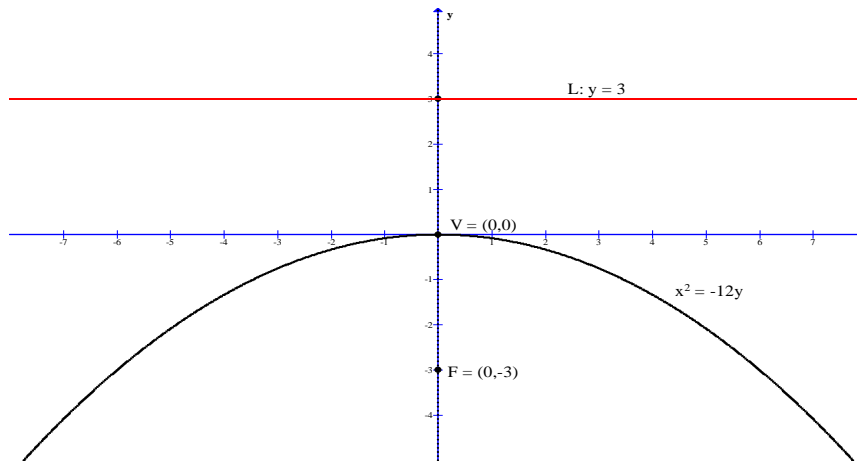


Fig.4

6.3 Traslación de un sistema de coordenadas

Consideremos dos sistemas de coordenadas rectangulares con sus ejes paralelos, es decir el eje x paralelo al eje X , y el eje y paralelo al eje Y (Vea la figura 5).

Las coordenadas del origen O' del sistema de coordenadas XY con respecto al sistema xy son: $O' = (h, k)_{xy}$. Consideremos un punto P del plano, y supongamos que las coordenadas de P con respecto al sistema xy son: $P = (x, y)_{xy}$, y con respecto al sistema XY , son: $P = (X, Y)_{XY}$.

Veamos qué relación hay entre x y X , y entre y y Y .

De la figura 5 tenemos: $x = X + h$; $y = Y + k$. Luego: $X = x - h$, $Y = y - k$.

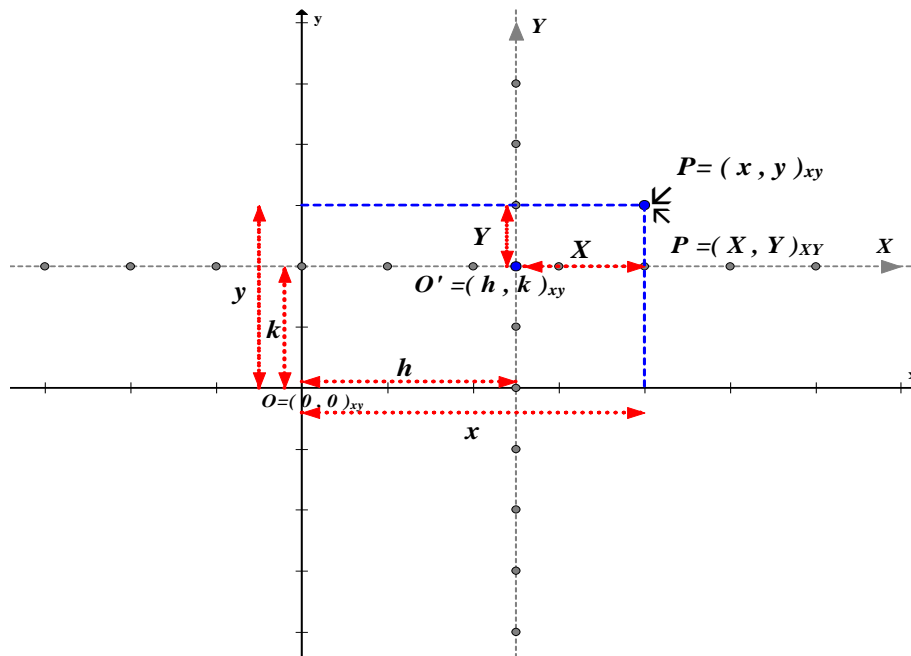


Fig. 5

Ejemplo 3

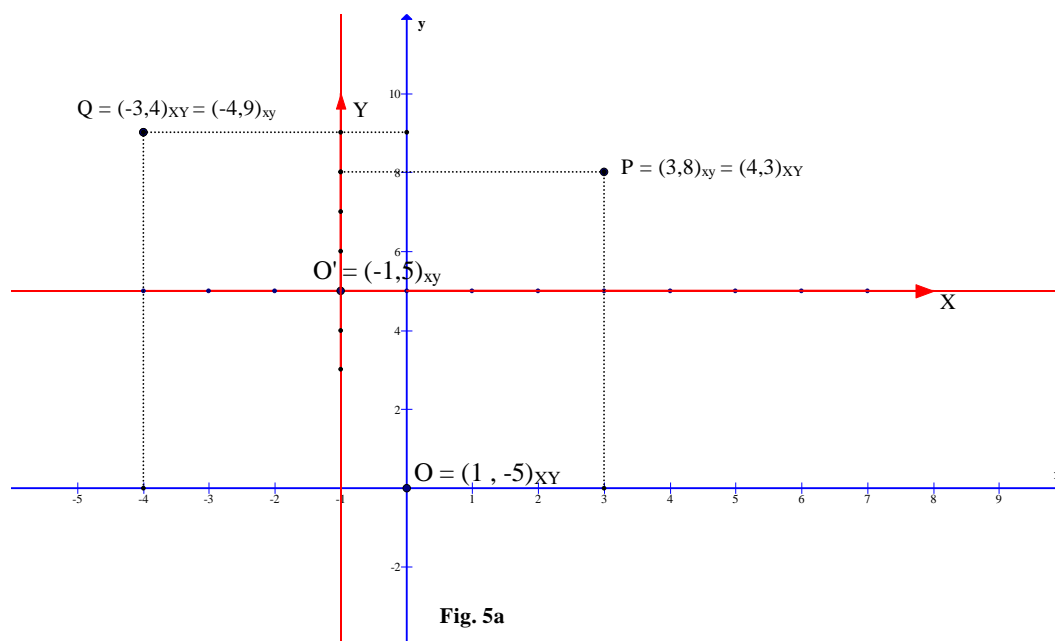
Supongamos que $O' = (-1, 5)_{xy}$, o sea: $h = -1$ y $k = 5$. Y sea P un punto tal que $P = (3, 8)_{xy}$ respecto al sistema xy . Por tanto: $x = 3$ e $y = 8$. Luego las coordenadas de P respecto al sistema XY serán:

$$P = (3 - (-1), 8 - 5)_{XY} = (4, 3)_{XY}.$$

Asimismo si $Q = (4, 5)_{XY}$, entonces: $X = 4$ e $Y = 5$. De manera que:

$$Q = (4 + (-1), 5 + 5)_{xy} = (3, 10)_{xy}$$

Además: $O' = (0, 0)_{XY} = (-1, 5)_{xy}$ y $0 = (0, 0)_{xy} = (1, -5)_{XY}$ (Vea la fig. 5a)



6.4 La parábola de vértice $V = (h, k)$

Supongamos ahora que el eje focal de una parábola es paralelo al eje x , y por tanto su directriz es paralela al eje de las y . Supongamos que el vértice V de la parábola ahora tiene coordenadas $V = (h, k)$ (Vea la figura 6).

Como $d(F, V) = d(V, L) = a$, entonces: $F = (h + a, k)$ y $L: x = h - a$.

Si tomamos un sistema de coordenadas XY , con el eje X paralelo al eje x , y el eje Y paralelo al eje y , teniendo como origen $O' = (h, k)_{xy} = (0, 0)_{XY}$. Entonces la ecuación de la parábola, con respecto al sistema XY , es: $Y^2 = 4aX$ (1).

(Suponiendo que el foco queda a la **derecha** de la directriz L),

Ahora de acuerdo a lo visto en la sección anterior, tenemos que: $X = x - h$, $Y = y - k$.

Reemplazando en (1), resulta:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad (C)$$

Como $V = (h, k)$, entonces: $F = (h + a, k)$, pues $d(V, F) = a$ y F está a la derecha de V .

Además, la directriz $L: x = h - a$, ya que $d(L, V) = a$, y V está a la derecha de L .

Si el foco F está a la **izquierda** de la directriz L , entonces:

$$(y - k)^2 = -4a(x - h) \quad (C')$$

En este caso: $V = (h, k)$; $F = (h - a, k)$; $L: x = h + a$ (¡ Explique!)

Asimismo si el eje focal es ahora paralelo al eje x , y la directriz L es por tanto, paralela al eje y .

Entonces, si el foco F está por encima de la directriz L , nos queda:

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \quad (D)$$

Ahora tenemos: $V = (h, k)$; $F = (h, k + a)$; $L: y = k - a$, pues F está por encima de L .

Mientras que si el foco F está por debajo de la directriz L , tenemos:

$$(x - h)^2 = -4a(y - k) \quad (D')$$

Luego: $V = (h, k)$; $F = (h, k - a)$; $L: y = k + a$.

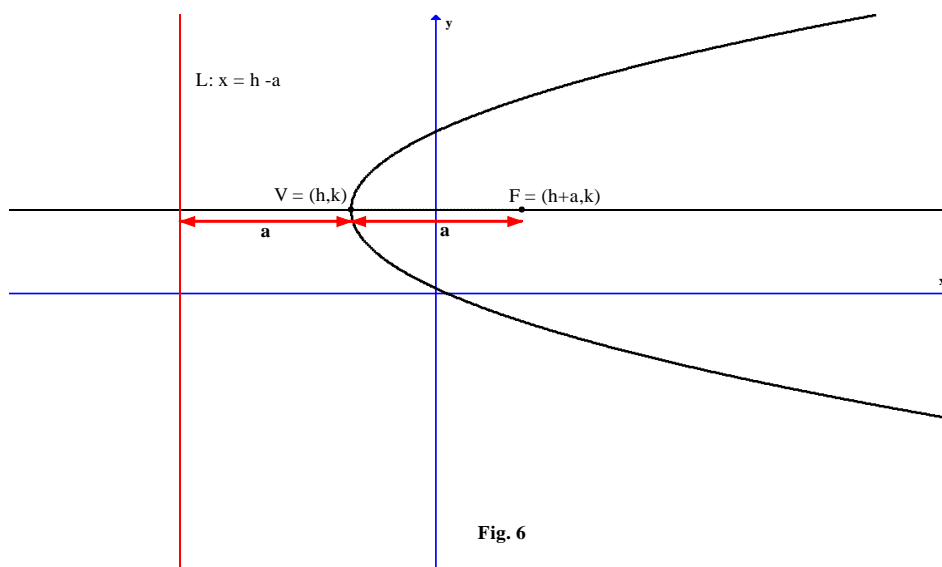


Fig. 6

Ejemplo 4

Encontremos los elementos de la parábola $(y - 3)^2 = 8(x + 1)$.

Comparando con $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ (B), tenemos que: $h = -1$, $k = 3$; $a = 2$.

Luego:

$$V = (-1, 3); \quad F = (h + a, k) = (-1 + 2, 3) = (1, 3); \quad L: x = h - a = -1 - 2 = -3.$$

Además: $Lr = 4a = 8$.

Otros elementos, podían ser la intersección con los ejes. Para hallarlos, resolvemos los sistemas:

$$(I) \begin{cases} (y - 3)^2 = 8(x + 1) \\ y = 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} (y - 3)^2 = 8(x + 1) \\ x = 0 \end{cases}$$

Luego en (I), tenemos: $9 = 8(x + 1) \Rightarrow x = \frac{1}{8}$. Por lo tanto la intersección de la parábola con el eje x , es el punto $P_1 = (\frac{1}{8}, 0)$.

De (II), resulta: $(y - 3)^2 = 8 \Rightarrow y = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Por lo tanto la intersección con el eje de las y son los puntos:

$$P_2 = (0, 3 - 2\sqrt{2}) \text{ y } P_3 = (0, 3 + 2\sqrt{2}).$$

Finalmente, los extremos del lado recto son: $Q_1 = (1, -1)$ y $Q_2 = (1, 7)$ (¡Explique!)

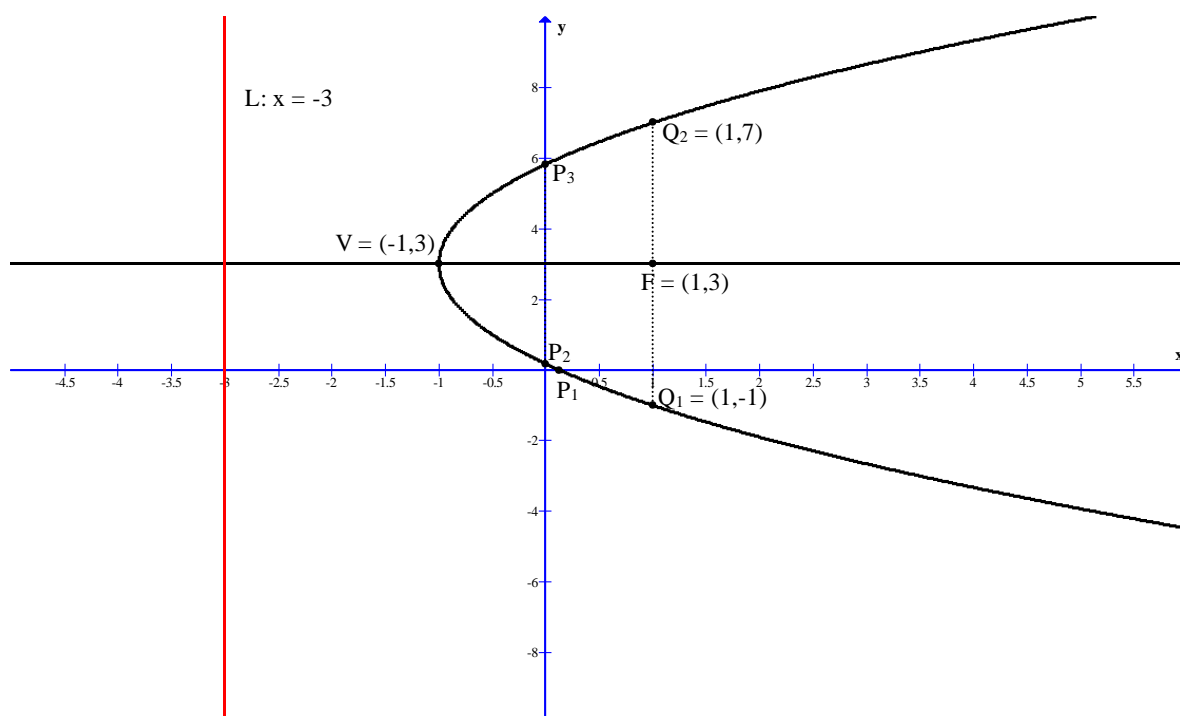


Fig.7

Ejercicio resuelto 2

Halle la parábola de foco $F = (5, 6)$ y directriz $L: y = -2$. Determine el resto de los elementos de la parábola.

Solución

La ecuación de la parábola debe ser de la forma: $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ (D), pues la directriz es paralela al eje x , luego el eje focal es paralelo al eje y . Además el foco está por encima de la directriz.

Como: $F = (h, k + a) = (5, 6)$, tenemos que: $h = 5$, $k + a = 6$ (1).

Además, la directriz es $L: y = k - a = -2$ (2).

De (1) y (2), tenemos el sistema:

$$\begin{cases} k + a = 6 & (1) \\ k - a = -2 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo, nos queda: $k = 2$ y $a = 4$.

Luego la ecuación de la parábola es: $(x - 5)^2 = 16(y - 2)$ (Vea la fig.8)

Finalmente tenemos: $V = (5, 2)$; $F = (5, 6)$; $L: y = -2$; $Lr = 4a = 16$.

Ejercicio resuelto 3

Halle la recta tangente a la parábola del ejercicio resuelto 2, desde el punto (0,0).

Solución

Una recta que pasa por (0 , 0) es: $y = mx$ (1)

Si queremos que la recta sea tangente a $(x - 5)^2 = 16(y - 2)$ (2), entonces al despejar y en (1) y (2), e igualando, resulta una ecuación de segundo grado, que debe tener una solución doble (única), o sea que su discriminante debe anularse, es decir:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0.$$

En efecto:

$$mx = \frac{(x - 5)^2}{16} + 2$$

Desarrollando, simplificando y agrupando los sumandos del mismo grado, tenemos:

$$x^2 - (10 + 16m)x + 57 = 0.$$

Luego:

$$\Delta = B^2 - 4AC = (10 + 16m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 57 = 256m^2 + 320m - 128 = 0$$

Resolviendo nos queda:

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{8}; \quad T_1: y = \frac{-5 + \sqrt{57}}{8}x; \quad T_2: y = \frac{-5 - \sqrt{57}}{8}x$$

Como $\Delta = 0$, entonces:

$$x = -\frac{B}{2A} = -\frac{-(10 + 16m)}{2} = 5 + 8m = 5 + 8 \cdot \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{8} = 4 \pm 2\sqrt{7}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{57}; \quad x_2 = -\sqrt{57}; \\ y_1 &= \frac{-5 + \sqrt{57}}{8} \cdot \sqrt{57} = \frac{57 - 5\sqrt{57}}{8}; \quad y_2 = \frac{57 + 5\sqrt{57}}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos de tangencia son:

$$P_1 = \left(\sqrt{57}, \frac{57 - 5\sqrt{57}}{8} \right); \quad P_2 = \left(-\sqrt{57}, \frac{57 + 5\sqrt{57}}{8} \right)$$

Vea la figura 8.

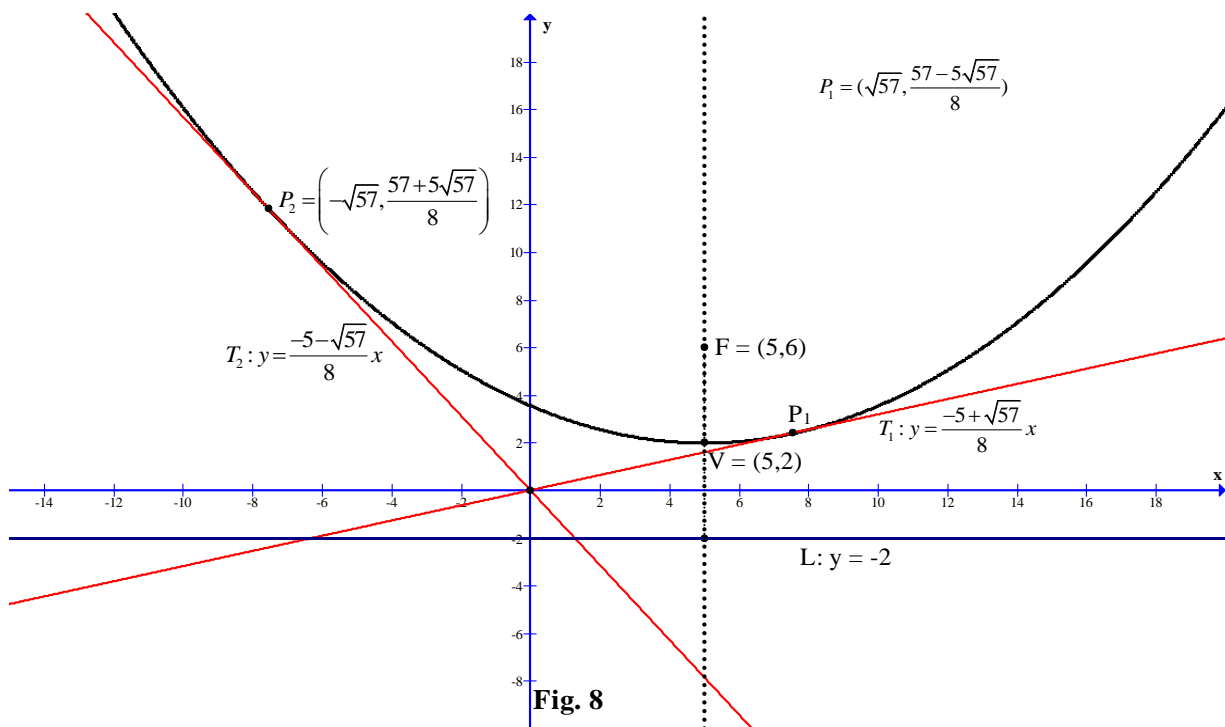


Fig. 8

6.5 La ecuación general de la parábola

Observemos que una parábola de eje focal paralelo al eje de las y , directriz $L: x = -a$, y vértice $V = (h, k)$, es decir de ecuación: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, al desarrollarla queda en la forma: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ **(E)**

Donde: $A = 0$, $B = 1 \neq 0$, $C = -4a$, $D = -2k$, y $E = k^2 + 4ah$.

Si la parábola tiene la forma: $(y - k)^2 = -4a(x - h)$, entonces tenemos:

$$A = 0, \quad B = 1 \neq 0, \quad C = 4a, \quad D = -2k, \quad \text{y} \quad E = k^2 - 4ah.$$

En el caso de eje focal paralelo al eje de las x , o sea cuando la ecuación de la parábola es:

$(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$, al desarrollarla volvemos a tener: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, pero esta vez, resulta: $A = 1 \neq 0$, $B = 0$, $C = -2h$, $D = \mp 4a$, $E = h^2 \pm 4ak$.

Observemos que en los cuatro casos, nos queda una expresión de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

La cual representa una parábola si:

$(A \neq 0 \text{ y } D \neq 0)$ ó $(B \neq 0 \text{ y } C \neq 0)$. (¡Explique!)

Veamos que el recíproco se cumple también, por lo que entonces diremos que **(E)** con

$(A \neq 0, B = 0 \text{ y } D \neq 0)$ ó $(A = 0, B \neq 0 \text{ y } C \neq 0)$ es la **ecuación general de la parábola**.

En efecto, si tenemos: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ **(E)** con $(A \neq 0, B = 0 \text{ y } D \neq 0)$ ó $(A = 0, B \neq 0 \text{ y } C \neq 0)$, entonces en ambos casos la curva es una parábola.

Supongamos que ($A \neq 0$, $B = 0$, y $D \neq 0$)

Agrupando convenientemente, factorizando por A y completando cuadrados, tenemos:

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2}\right) + Dy + E - \frac{C^2}{4A} = 0 \Rightarrow A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 = -Dy + \frac{C^2 - 4AE}{4A}$$

O sea:

$$\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 = -\frac{D}{A}\left(y - \frac{C^2 - 4AE}{4AD}\right)$$

De manera que tenemos una parábola de vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h, k - a)$ y directriz $L: y = k + a$. Donde:

$$h = -\frac{C}{2A}, \quad k = \frac{C^2 - 4AE}{4AD}, \quad a = -\frac{D}{4A}$$

Similar resultado se obtiene en el otro caso (**Ejercicio!**).

Ejemplo 5

Identifiquemos la curva de ecuación: $3y^2 + 16x + 36y + 92 = 0$ y hallemos los principales elementos de ella.

Como el coeficiente de y^2 es $B = 3 \neq 0$, el de x^2 es $A = 0$, y el de x es $C = 16 \neq 0$, entonces de acuerdo a lo anterior, se trata de una parábola.

Completemos cuadrados (en realidad completando cuadrados, de una vez, veríamos que lo es):

$$3(y^2 + 12y + 36) + 16x + 92 = 108 \Rightarrow 3(y + 6)^2 = -16x + 16 \Rightarrow$$

$$(y + 6)^2 = -\frac{16}{3}(x - 1)$$

Luego, se trata de una parábola de eje focal paralelo al eje x , con el foco a la izquierda de la directriz, además: $h = 1$; $k = -6$; $-4a = -\frac{16}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$.

Luego: $F = (h - a, k) = \left(-\frac{1}{3}, -6\right)$; $L: x = h + a = \frac{7}{3}$; $V = (h, k) = (1, -6)$; $Lr = \frac{16}{3}$ (Vea la fig. 9).

Para hallar los extremos del lado recto: $\overline{Q_1Q_2}$, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} (y + 6)^2 = -\frac{16}{3}(x - 1) \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

De esta manera obtenemos:

$$Q_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{26}{3}\right), \quad Q_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}\right)$$

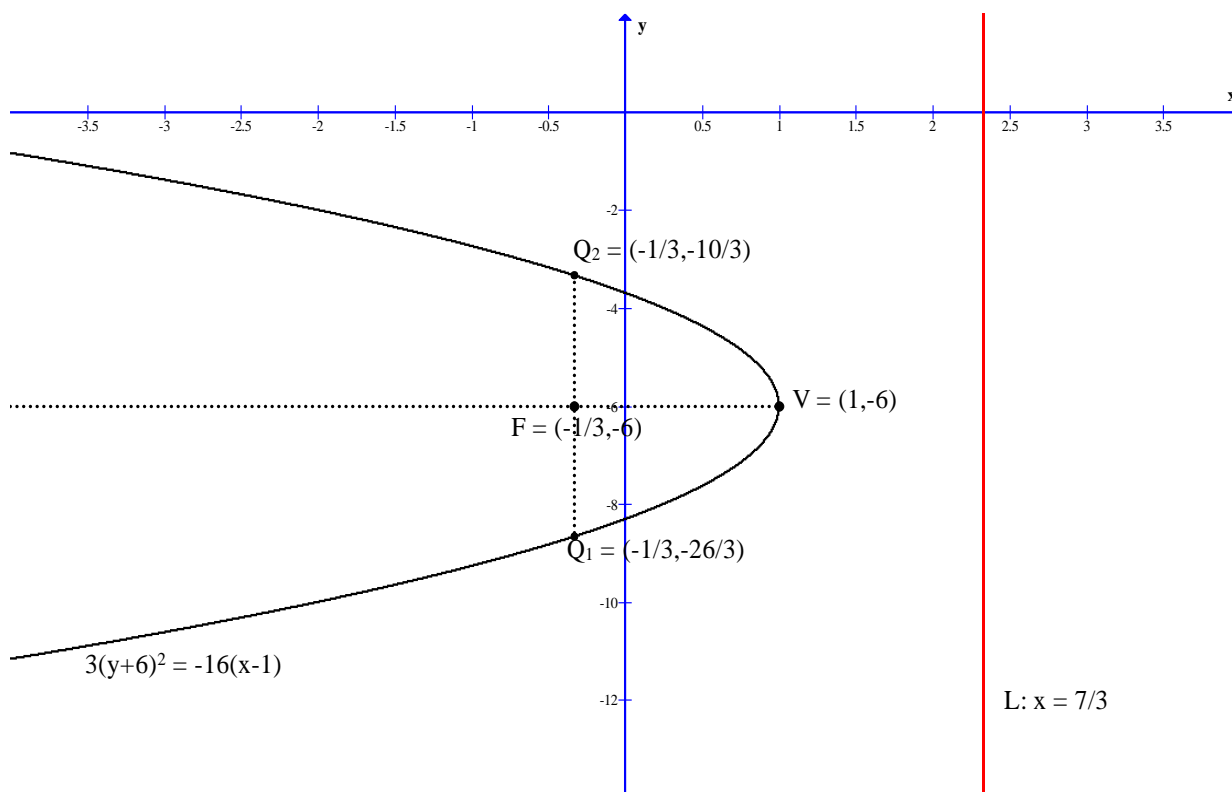


Fig.9

Ejercicio resuelto 4

Determine el tipo de cónica que representan las siguientes ecuaciones. En caso de representar una parábola, halle sus elementos importantes y la(s) tangente(s), desde el punto $P_o = (1/2, 6)$. Finalmente, si hay dos tangentes desde P_o , halle el ángulo entre ellas.

- a) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 64 = 0$; b) $4x^2 - 4x + 5y - 24 = 0$; c) $9x^2 - 180x + 100 = 0$
d) $6x^2 + 9y^2 - 4x + 18y - 80 = 0$; e) $4y^2 - 4y + 5x - 24 = 0$; f) $y^2 - 4y + 2 = 0$

Solución

a) Como $A = 9$ y $B = -4$, entonces $A \cdot B < 0$, luego se trata de una hipérbola.

b) $A = 4$, $B = 0$ y $D = 5$, entonces: $4x^2 - 4x + 5y - 24 = 0$ **(1)**, es una parábola.

Completemos cuadrados: $4(x^2 - x + \frac{1}{4}) = -5y + 24 + 1 \Rightarrow 4(x - 1/2)^2 = -5(y - 5)$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = -\frac{5}{4}(y - 5)$$

Por tanto es una parábola de eje focal paralelo al eje y, y sus principales elementos son:

$$a = \frac{5}{16}; \quad h = \frac{1}{2}; \quad k = 5; \quad V = \left(\frac{1}{2}, 5\right); \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{75}{16}\right); \quad L: y = \frac{85}{16}; \quad Lr = \frac{5}{4}$$

Para hallar la(s) tangente(s) a la parábola desde $(1/2, 6)$, intersectamos la parábola con la recta: $y - 6 = m\left(x - \frac{1}{2}\right)$ (2), y a la ecuación de segundo grado que se obtiene, se le obliga a que tenga raíz doble.

En efecto al reemplazar (2) en (1), obtenemos:

$$4x^2 + (5m - 4)x + \left(6m - \frac{5m}{2}\right) = 0$$

Para que tenga raíz doble es necesario que:

$$(5m - 4)^2 - 16\left(6 - \frac{5m}{2}\right) = 0$$

Desarrollando y simplificando, tenemos que:

$$m = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow T_1: y = \frac{4}{\sqrt{5}}x + 6 - \frac{2}{\sqrt{5}}; T_2: y = -\frac{4}{\sqrt{5}}x + 6 + \frac{2}{\sqrt{5}};$$

Para hallar el ángulo que forman las rectas tangentes, tenemos que:

$$m_1 = \tan\alpha_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}; m_2 = \tan\alpha_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Luego:

$$\alpha = \text{ángulo entre } T_1 \text{ y } T_2 = \left| \arctan\left(\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}\right) \right| = 58,41^\circ (\text{aprox})$$

(¡Explique en detalle lo anterior!)

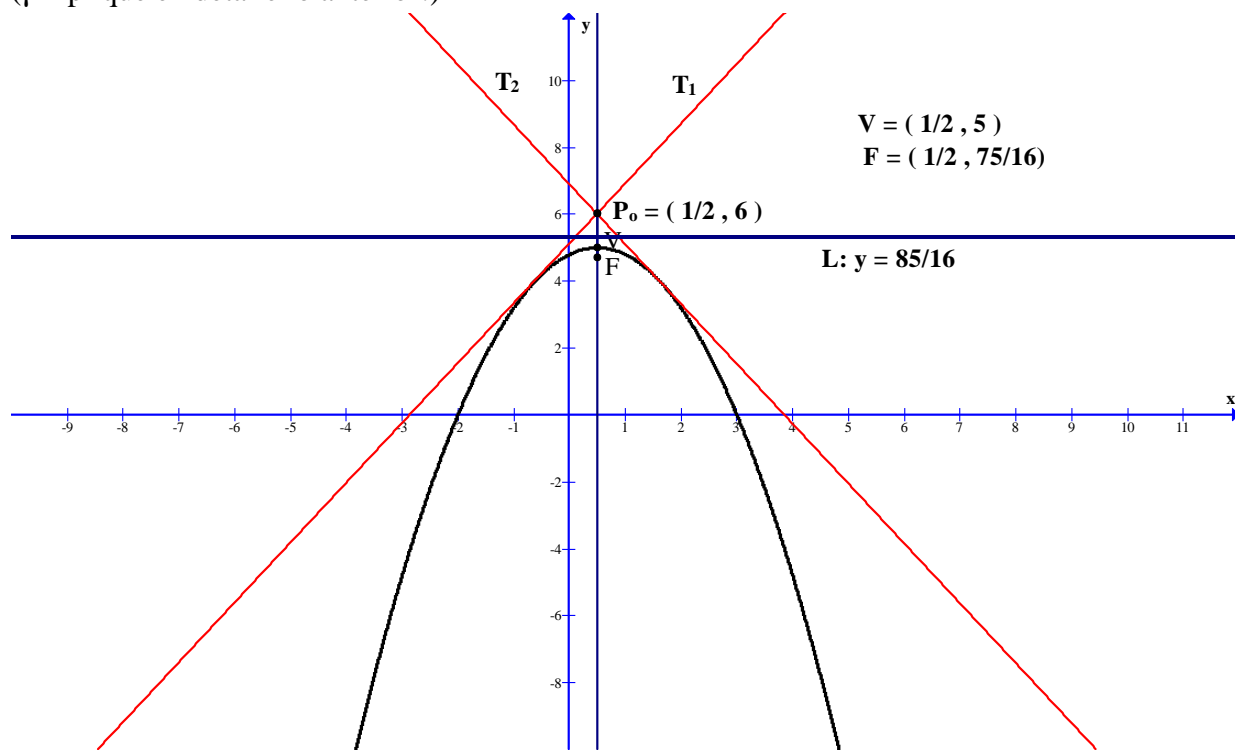


Fig. 9a

c) $A = 9$ y $B = 0$, pudiera pensarse que es parábola, pero $D = 0$, luego no representa una curva.

d) Tiene posibilidad de ser una elipse, porque $A.B = 6.9 = 54 > 0$, pero también pudiera reducirse a uno o dos puntos. Por eso, completemos cuadrados para estar seguros:

$$6\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 9(y^2 + 2y + 1) = 80 + \frac{2}{3} + 9 = \frac{269}{3}$$

$$\frac{(x - \frac{1}{3})^2}{\frac{269}{18}} + \frac{(y + 1)^2}{\frac{269}{27}} = 1$$

Entonces tenemos que la curva es una elipse con:

$$C = \left(\frac{1}{3}, -1\right); \quad a^2 = \frac{269}{18} \quad y \quad b^2 = \frac{269}{27}$$

e) Como $A = 4$, $B = 0$ y $C = 5$; entonces se trata de una parábola. Completemos cuadrados:

$$4y^2 - 4y + 5x - 24 = 4\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + 5x - 24 = 0.$$

Luego, nos resulta:

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4}\left(x + \frac{24}{5}\right)$$

O sea, es una parábola de eje focal paralelo al eje de las x , con su foco a la izquierda de la directriz. Y sus principales elementos son:

$$a = \frac{5}{16}; \quad V = \left(-\frac{24}{5}, \frac{1}{2}\right); \quad F = \left(-\frac{409}{80}, \frac{1}{2}\right); \quad L: x = -\frac{359}{80}$$

Dejamos al lector la obtención de las tangentes desde P_o (*)

f) $y^2 - 4y + 2 = 0$, luego $A = 0$, $B = 1$; $C = 0$. Luego no representa una parábola.

6.6 La función cuadrática

Recordemos del bachillerato que una **función cuadrática** es una función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que:

$$y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\mathbf{F}), \quad \text{con } \alpha \neq 0.$$

Escribiéndola en la forma: $\alpha x^2 + \beta x - y + \gamma = 0$, como $A = \alpha \neq 0$, $B = 0$ y $D = -1 \neq 0$, tenemos que (E) es una parábola de eje focal paralelo al eje de las y .

Completemos cuadrados para tener más información de ella:

$$\alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) = y - \gamma + \frac{\beta^2}{4\alpha} \Rightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left(y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$$

Entonces:

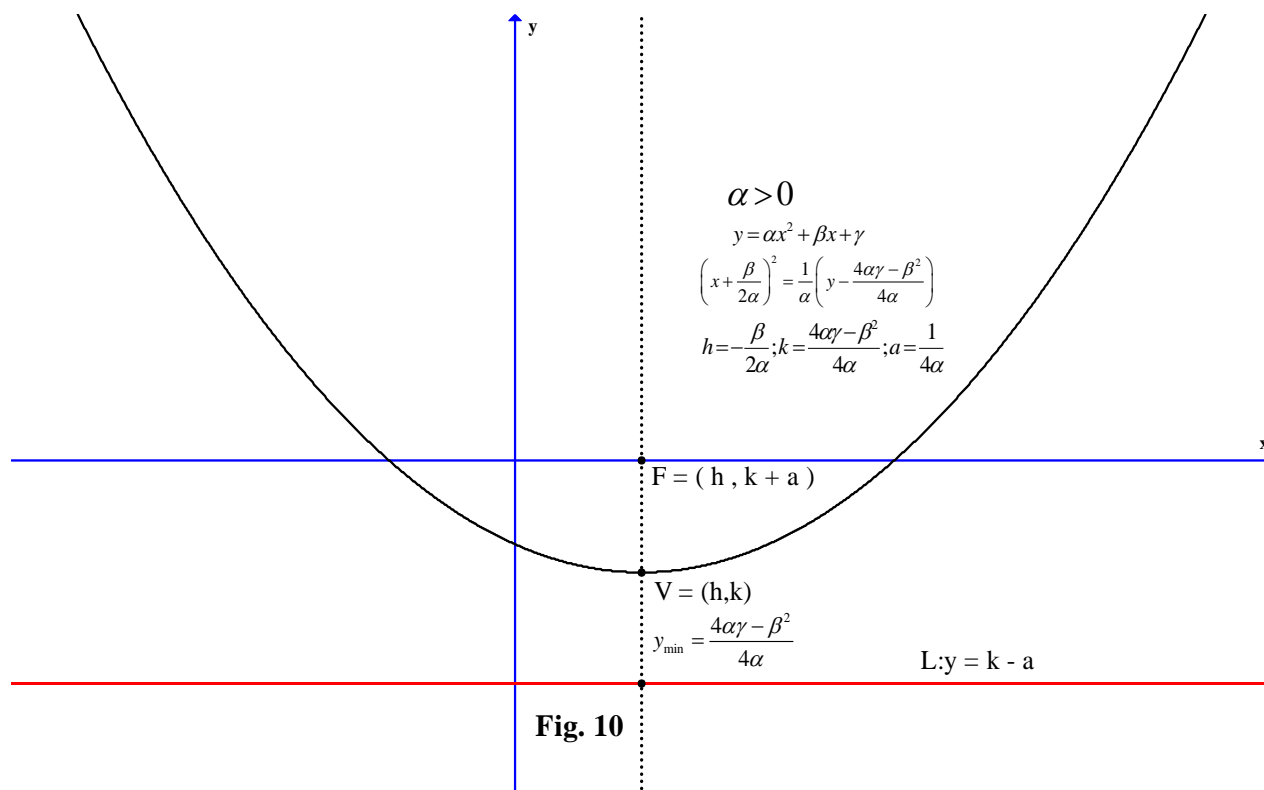
$$a = \frac{1}{4\alpha}; \quad h = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad k = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}; \quad V = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right).$$

Si $\alpha > 0$, entonces $\frac{1}{4\alpha} > 0$, y por tanto, el foco queda por encima de la directriz, o como se acostumbra decir, “**la parábola se abre hacia arriba**”, por tanto tenemos:

$$F = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} + \frac{1}{4\alpha} \right) = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 1}{4\alpha} \right); \quad L: y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 - 1}{4\alpha}$$

En este caso, el **valor mínimo** de $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ se obtiene de la ordenada del vértice V, o sea: (Vea la figura 10).

$$y_{\min} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \quad \text{para } x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$



Si $\alpha < 0$, entonces el foco queda por debajo de la directriz, o sea “**la parábola se abre hacia abajo**”, pues $\frac{1}{4\alpha} < 0$. En este caso, el **valor máximo** de $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es la ordenada de V, o sea:

$$y_{\max} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \quad \text{para } x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

(Vea la fig. 11).

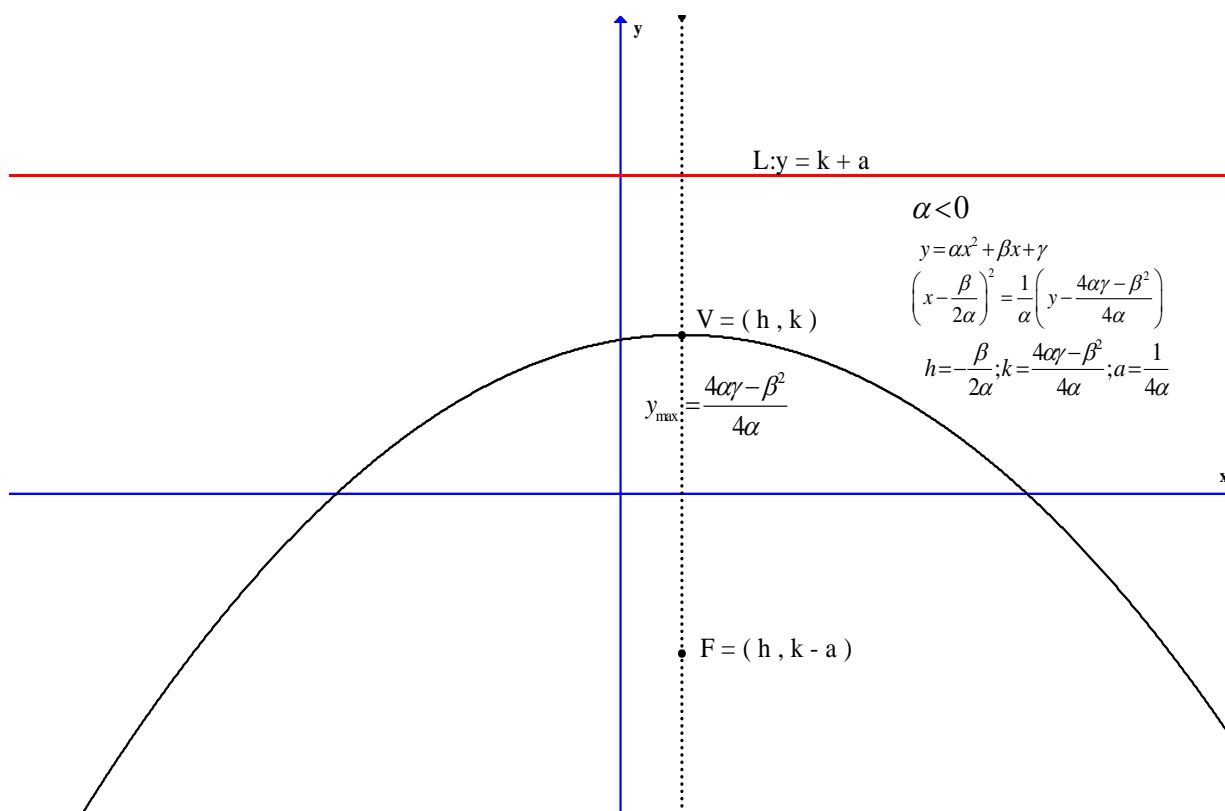


Fig.11

Ejercicio resuelto 5

Halle el vértice, foco y directriz de la parábola: $y = -4x^2 + 6x + 8$. Calcule y_{\max} .

Solución

Completando cuadrados resulta:

$$-4\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) = y - \frac{9}{4} - 8 = y - \frac{41}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(y - \frac{41}{4}\right)$$

Luego:

$$V = \left(\frac{3}{4}, \frac{41}{4}\right); a = \frac{1}{16}; F = \left(\frac{3}{4}, \frac{163}{16}\right); L: y = \frac{165}{16}; y_{\max} = \frac{41}{4}$$

(Vea la gráfica 10 y ¡grafique la parábola de este problema!)

Signo de la función cuadrática

Sabemos del bachillerato que la función cuadrática: $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de las x en dos puntos distintos, si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Siendo estos puntos:

$$P_1 = (x_1, 0) \text{ y } P_2 = (x_2, 0)$$

Donde:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}; \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Asimismo, cuando $\Delta = 0$, la parábola corta en un solo punto al eje x, o sea es tangente al eje de las x. Es decir la parábola es tangente al eje x en $P_1 = (x_1, 0)$ sii $\Delta = 0$, donde:

$$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

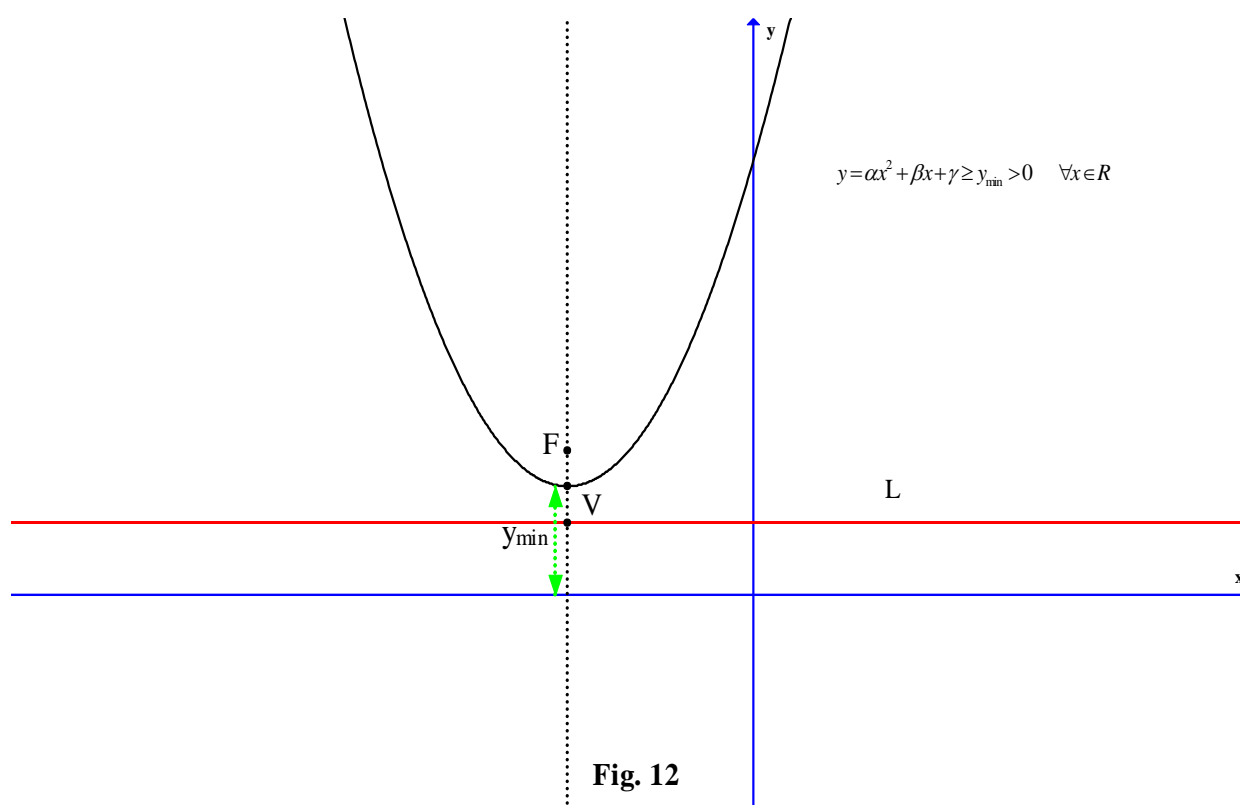
Finalmente, si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, entonces la parábola no corta al eje de las x, pues la ecuación: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ no tiene soluciones reales.

Es más vamos a demostrar que si $\alpha > 0$ y $\Delta < 0$, entonces $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, completando cuadrados nos queda:

$$y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

Como: $\alpha > 0$ y $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, entonces: $y = f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (Vea la figura 12).

Similarmente se demuestra que si $\alpha < 0$ y $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, entonces: $y = f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (**Ejercicio**) (Vea la figura 13).



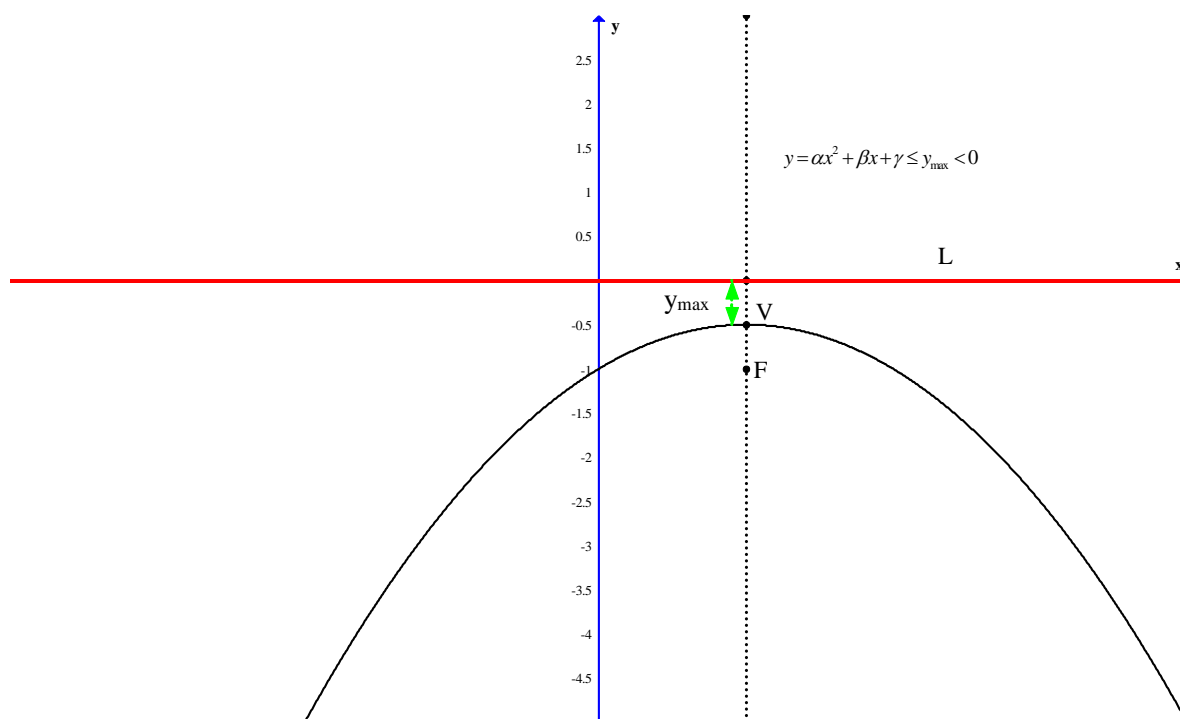


Fig. 13

Ejercicio resuelto 6

La altura h que alcanza un móvil cuando se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial V_o al transcurrir t segundos es: (Suponemos no hay resistencia del aire)

$$h(t) = V_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Si $V_o = 30 \frac{m}{s}$ y $g = 10 \frac{m}{s^2}$. a) Halle la altura máxima a la que llegará el móvil y el tiempo de vuelo. b) En Física se demuestra que la pendiente de la recta tangente en un punto de la parábola es igual a la velocidad del móvil en ese instante. Halle mediante este método la velocidad en el instante $t = 2$ s.

Solución

a) Escribiendo la ecuación en la forma: $h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_o t$. Tenemos: $\alpha = -\frac{1}{2} g$; $\beta = V_o$; $\gamma = 0$. De manera que la curva que rige la altura h con respecto al tiempo t es una parábola que abre hacia abajo, y por tanto tiene sentido hablar de h_{\max} .

Completando cuadrados tenemos:

$$y = h(t) = -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2V_o}{g} t + \frac{V_o^2}{g^2} \right) + \frac{V_o^2}{2g} = -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{V_o}{g} \right)^2 + \frac{V_o^2}{2g}$$

Se trata entonces de la parábola:

$$\left(t - \frac{V_o}{g} \right)^2 = -\frac{2}{g} \left(y - \frac{V_o^2}{2g} \right)$$

Por lo tanto:

$$V = \left(\frac{V_o}{g}, \frac{V_o^2}{2g} \right); \quad y_{max} = h_{max} = \frac{V_o^2}{2g}$$

El **tiempo de vuelo**, es el tiempo que transcurre entre el momento que se lanza el móvil y el momento que regresa a tierra, o sea el valor de $t^* > 0$ tal que $h(t^*) = 0$ (Vea la fig.14).

Es claro que $t = 0$, aunque $h(0) = 0$ no es el tiempo de vuelo. Luego:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + V_o t = 0 \Rightarrow t \left(-\frac{1}{2}gt + V_o \right) = 0 \Rightarrow t^* = t_{vuelo} = \frac{2V_o}{g}$$

Entonces:

$$V_o = 30 \frac{m}{s}, g = 10 \frac{m}{s^2} \Rightarrow h_{max} = \frac{900 \frac{m^2}{s^2}}{20 \frac{m}{s^2}} = 45m \quad y \quad t^* = t_{vuelo} = \frac{60 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} = 6 s.$$

b) De acuerdo al método, debemos hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el instante $t = 2$ s. Como: $h(2) = 40$ m. Entonces se trata de hallar la tangente a $y = h(t) = 30t - 5t^2$ en el punto $P_o = (2, 40)$. La recta que pasa por P_o es: $y - 40 = m(t - 2)$. De manera que resolviendo el sistema por igualación y agrupando nos queda:

$$\begin{cases} y = 30t - 5t^2 \\ y = m(t - 2) + 40 \end{cases}$$

Resolviendo por igualación de las y , tenemos:

$$-5t^2 + (30 - m)t + 2m - 40 = 0.$$

Como el discriminante debe ser cero (¿Por qué?), entonces nos queda la siguiente ecuación: $m^2 - 20m + 100 = 0$, cuya única solución es $m = 10$.

Como se trata de una velocidad, entonces: $v(2) = m = 10 \frac{m}{s}$

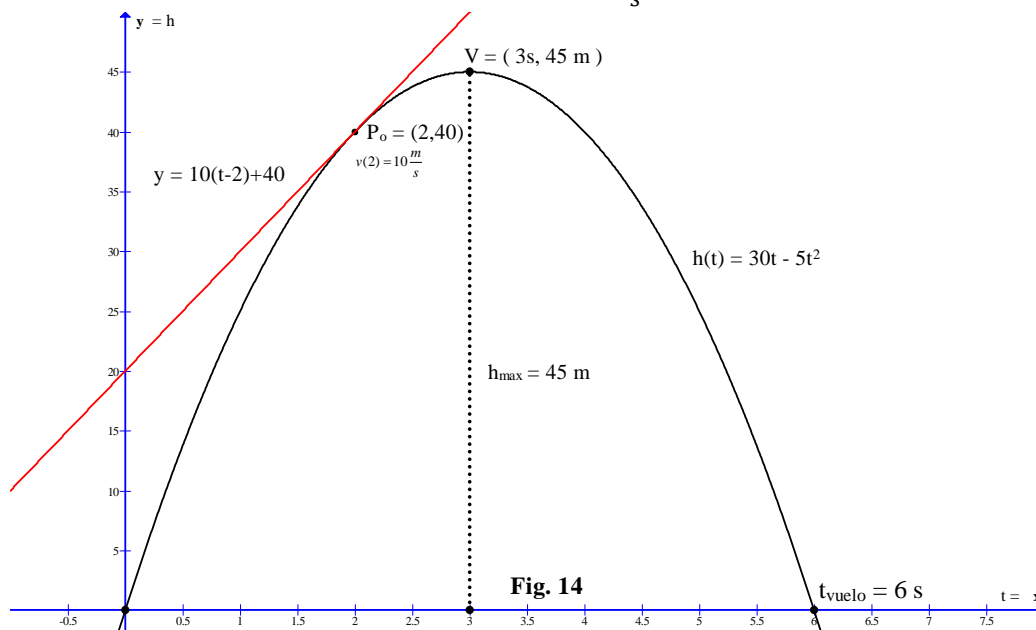


TABLA CON LOS ELEMENTOS IMPORTANTES DE LA PARÁBOLA

Ecuación	Vértice	Eje focal	Foco	Longitud lado recto	Extremos lado recto	Directriz
$y^2 = 4ax$	$V = (0,0)$	$x = 0$	$F = (a, 0)$	$L = 4a$	$Q_1 = (a, -2a);$ $Q_2 = (a, 2a)$	$L: x = -a$
$y^2 = -4ax$	$V = (0,0)$	$x = 0$	$F = (-a, 0)$	$L = 4a$	$Q_1 = (-a, -2a);$ $Q_2 = (-a, 2a)$	$L: x = a$
$x^2 = 4ay$	$V = (0,0)$	$y = 0$	$F = (0, a)$	$L = 4a$	$Q_1 = (-2a, a);$ $Q_2 = (2a, a)$	$L: y = -a$
$x^2 = -4ay$	$V = (0,0)$	$y = 0$	$F = (0, -a)$	$L = 4a$	$Q_1 = (-2a, -a);$ $Q_2 = (2a, -a)$	$L: y = a$
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$V = (h, k)$	$x = h$	$F = (h + a, 0)$	$L = 4a$	$Q_1 = (h + a, k - 2a);$ $Q_2 = (h + a, k + 2a)$	$L: x = h - a$
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	$V = (h, k)$	$x = h$	$F = (h - a, 0)$	$L = 4a$	$Q_1 = (h - a, k - 2a);$ $Q_2 = (h - a, k + 2a)$	$L: x = h + a$
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$V = (h, k)$	$y = k$	$F = (h, k + a)$	$L = 4a$	$Q_1 = (h + 2a, k + a);$ $Q_2 = (h - 2a, k + a)$	$L: y = k + a$
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	$V = (h, k)$	$y = k$	$F = (h, k - a)$	$L = 4a$	$Q_1 = (h + 2a, k - a);$ $Q_2 = (h - 2a, k - a)$	$L: y = k - a$

Problemas propuestos

- 1) Halle los elementos principales de la parábola $y^2 = 4x$
- 2) Encuentre la ecuación de la parábola de vértice $(0,0)$ y foco $(\frac{1}{4}, 0)$. Halle su directriz, sabiendo que está a la izquierda del foco.
- 3) A partir de los datos que se dan, encuentre la ecuación de la parábola:
 - a) $F = (0, \frac{3}{4})$ y $L: y = -3/4$; b) Se abre hacia la derecha, $F = (0, 9/8)$ y $V = (0, 0)$;
 - c) $V = (0, 0)$, pasa por $(4, 2)$ y tiene directriz paralela al eje x. d) Pasa por $(0, 0)$, $(12, -12)$ y $(-6, -3)$.
- 4) Halle la ecuación de la parábola a partir de estos datos:
 - a) $F = (-1, 3)$ y $L: x = -3$; b) $V = (5/2, 6)$ y $F = (4, 6)$; c) $V = (5, -2)$ y $F = (5, -5)$;
 - d) $V = (5, 2)$, pasa por $(1, 3)$ y abre hacia arriba; e) $L: y = 4$, pasa por $(8, -4)$ y no pasa por $(8, 4)$.
- 5) Encuentre vértice, foco y directriz de las siguientes parábolas:
 - a) $x^2 = 20y$; b) $y^2 = -12x$; c) $y^2 = 8x$;
 - d) $(y - 3)^2 = 10(x + 1/2)$; e) $(x - 2)^2 = -8(y - 1)$; f) $(x + 2)^2 = -7(y + 2)$.
- 6) Halle la ecuación de la parábola a partir de los datos que se proporcionan:
 - a) $V = (0, 0)$ y $F = (0, -2)$; b) $F = (9/16, 0)$ y $L: x = -9/16$; c) $V = (0, 0)$ y $L: y = -4$;

d) $V = (0, 0)$ y pasa por $(-4, 2)$; e) $V = (-3, 7)$ y $L: x = -4$; f) $F = (0, 5/2)$ y $V = (0, -1/2)$; g) $F = (-7/3, -6)$ y $L: x = 1/3$; h) $V = (1/2, -5)$ y pasa por $(3/2, -29/5)$.

7) Determine la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje de las y , pasa por $(2, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 6)$. Halla V , F , L y la ecuación de su eje focal.

8) Escriba la ecuación de la parábola en cada uno de los siguientes casos:

a) $F = (e, 0)$ y $V = (d, 0)$ con $d < e$; b) idem con $d > e$; c) $F = (0, e)$ y $V = (0, d)$ con $d < e$; d) idem con $d > e$.

9) Halle V , F y L , para las siguientes parábolas:

a) $(y - 7)^2 = 20(x + 3)$; b) $3y^2 + 16x + 36y + 92 = 0$; c) $x^2 - x - y + 6 = 0$.

10) Demuestre que la recta: $y = mx + \frac{a}{m}$ es tangente a la parábola: $y^2 = 4x$. Además halle el punto de contacto.

11) Denominamos **radio focal** de un punto $P = (x, y)$ de la parábola, a la distancia de P al foco F de la parábola.

a) Demuestre que el radio focal de $P = (x, y)$ para la parábola: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ es:

$r(P) = |x - h + a|$; b) Halle los puntos de radio focal igual a 30 de la parábola: $y^2 = 64x$;

c) Halle el radio focal de $P = (x, y)$, punto de la parábola: $(x - h)^2 = 4a(y - k)$;

d) Aplique lo anterior para hallar los puntos de radio focal igual a 20 en la parábola:

$(x - 2)^2 = 8(y - 3)$.

12) ¿ Para qué valores de m es $y = mx + 2$: a) secante, b) tangente, c) exterior a la parábola $y^2 = 4x$?

13) Halle los puntos de intersección de la parábola: $y^2 = 24x$ con la elipse: $10x^2 + 4y^2 = 1000$.

14) Se dan los puntos: $(-1, 2)$, $(1, -1)$ y $(2, 1)$. Obtenga una parábola que pase por estos puntos y su eje focal sea paralelo al: a) eje x ; b) eje y .

15) Demuestre que la circunferencia de centro (h, k) que pasa por el foco de la parábola:

$(x - h)^2 = 4a(y - k)$, es tangente a la directriz de la parábola.

16) Halle la ecuación de la parábola de eje focal paralelo al eje x y que pasa por los puntos:

$(3/2, -1)$, $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

17) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a $x^2 = 4ay$ en $P_o = (x_o, y_o)$ es:

$$y - y_o = \frac{x_o}{2a}(x - x_o)$$

18) Un móvil se lanza desde el suelo con una velocidad inicial V_o y con un ángulo de inclinación α . Si se supone despreciable el roce el aire, demuestre que la altura del móvil en el instante t después de haber sido lanzado es:

$$y(t) = V_o \text{sen} \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Asimismo la distancia horizontal recorrida en t segundos es: $x(t) = V_o \cos \alpha \cdot t$.

Halle y en función de x . ¿Qué tipo de curva se tiene?. ¿Cuál es la fórmula de h_{\max} ?

19) Un chorro de agua al salir del extremo de un tubo horizontal ubicado a 7,5 m por encima del suelo, describe una curva parabólica, estando el vértice en el extremo del tubo. Si en un punto a 2,4 m por debajo del nivel del tubo, el flujo de agua se ha curvado hacia fuera 3 m del eje focal. ¿A qué distancia del eje focal llegara el agua, cuando toca el suelo?

20) La ganancia diaria G de una empresa, en miles de bolívares, está dada por la función cuadrática: $G(x) = -2x^2 + 120x - 800$, donde x es el número de artículos producidos diariamente.

a) ¿Cuál es el número de artículos que se deben producir al día, para que la ganancia sea máxima?; b) Si se producen 20 artículos, ¿cuál es la ganancia?; c) estudie el intervalo de ganancia y pérdida.

21) Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre sí 300 m. y se extienden 80 m. por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m. y también a 100 m. del centro del puente. (Asumir que la pista es horizontal).

22) Una recta que pasa por el foco de una parábola con el vértice en el origen y con el eje horizontal, corta a la directriz de la parábola en el punto $A = (-3, 8)$. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta.

23) Demuestre que la ecuación tangente en $P_o = (x_o, y_o)$ de la parábola:

a) $x^2 = 4ay$ es: $y - y_o = \frac{x_o}{2a}(x - x_o)$; b) $y^2 = 4ax$ es: $y - y_o = \frac{2a}{y_o}(x - x_o)$.

24) Dada la parábola $x^2 = 4y$, demuestre que las tangentes en los extremos del lado recto, son perpendiculares entre si. (Sugerencia: vea (a) del problema anterior).

25) Demuestre que las rectas tangentes en los extremos del lado recto de la parábola $x^2 = 4ay$, se cortan en un punto que está en el eje y , y calcule el ángulo que forman entre si.

26) Dada una parábola (de eje focal paralelo al eje x o al eje y), y vértice $V = (h, k)$. Sea M una recta perpendicular al eje focal que corta a la parábola en dos puntos: P y Q , respectivamente.

Demuestre que las tangentes a la parábola en P y Q, se cortan en un punto S del eje de la parábola, tal que $d(V,S) = d(V,M)$. ¿Qué sucede en el caso en que M pase por el foco F?

27) Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical y que pasa por los puntos: (6, 1), B(-2, 3), C(16, 6).

28) Calcular la posición relativa de la recta $r \equiv x + y - 5 = 0$ respecto a la parábola $y^2 = 16x$.

29) Demuestre que la perpendicular desde el foco a la tangente trazada por un punto cualquiera de la parábola corta a ésta en un punto localizado sobre el eje y.

30) Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

Respuestas

- 1) $V = (0,0)$; $F = (6,0)$; $L: x = -6$. 2) $y^2 = x$; $L: x = -1/4$. 3) a) $x^2 = 3y$; b) $2x^2 = 9y$; c) $x^2 = -8y$; d) $x^2 = -12y$.
4) a) $(y-3)^2 = 8(x+1)$; b) $(y-6)^2 = 6(x-5/2)$; c) $(x-5)^2 = -6(y+2)$; d) $(x-5)^2 = 16(y-2)$; e) $x^2 = 16y$.
5)

Literal	Vértice	Foco	Directriz
a)	(0,0)	(0,5)	$y = -5$
b)	(0,0)	(-3,0)	$x = 3$
c)	(0,0)	(2,0)	$x = -2$
d)	$(-\frac{1}{2}, 3)$	(2,3)	$x = -\frac{7}{2}$
e)	(2,1)	(2,-1)	$y = 3$
f)	(-2,-2)	(-2,-15/4)	$y = -1/4$

6)

a	b	c	d
$x^2 = -8y$	$4y^2 = 9x$	$x^2 = 16y$	$y^2 = -x$
e	f	g	h
$(y-7)^2 = 4(x+3)$	$x^2 = 12(y + \frac{1}{2})$	$3y^2 + 16x + 36y + 92 = 0$	$4x^2 - 4x + 5y - 24 = 0$

- 7) $2y = x^2 - 8x + 12$; $V = (4,-2)$; $F = (4,-3/2)$; $L: y = -5/2$; eje focal: $x = 4$. 8) a) $y^2 = 4e(x-d)$;
b) $y^2 = -4e(x-d)$; c) $x^2 = 4e(y-d)$; d) $x^2 = -4e(y-d)$. 9) a) $V = (-3,7)$; $F = (2,7)$; $L: x = -8$; b) $V = (1,-6)$; $F = (-1/3,-6)$; $L: x = 7/3$; c) $V = (1/2, 23/4)$; $F = (1/2,6)$; $L: y = 11/2$. 10) $T_0 = (a/m^2, 2a/m)$.
11) a) $r = |x - h + a|$; b) $P = (14, \pm 8\sqrt{14})$; c) $r = |y - k + a|$; d) $(-10,21)$ y $(14,21)$. 12) a) $m < 1/2$;
b) $m = 1/2$; c) $m > 1/2$. 13) $(6, \pm 12)$. 14) a) $(y - \frac{3}{14})^2 = -\frac{6}{7}(x - \frac{41}{8})$; b) $(x - \frac{9}{14})^2 = \frac{6}{7}(y + \frac{193}{168})$.
16) $(y-1)^2 = -8(x-2)$; 18) $y = (tg\alpha)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$; $y = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. 19) 5,3 m. 20) a) 30 artículos, $G(30) = 1000$
000 bolívaes; b) 800 000 bolívaes; c) De 0 a 7, y de 53 en adelante, pierde. De 8 a 52, gana. 25) $\alpha = \pi/2$;
27) $(y - \frac{73}{4}) = \frac{1}{24}(x - 5)^2$; 28) secantes con ptos. de intersección: (25,-20) y (1, 4);

Bibliografía

- [1] Barragán, F. y Sarabia, J. Problemas de Cálculo Diferencial
Ediciones Elipse, Barquisimeto, 1992.
- [2] Jiménez, D. Cálculo I (En preparación)
- [3] Leithold, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica.
Octava Edición, Harla S.A. de C.V., México(2 003).
- [4] Purcell, E. et al. Cálculo. Octava Edición,
Prentice Hall, México (2001)
- [5] Sarabia, J. et al. Matemática, II año E.M.D.P
Ediciones CO-BO, Caracas, 1991.
- [6] Sarabia, J. et al. Problemario de Matemática.
Ediciones CO-BO, Caracas, 1993
- [7] Scoppetta, N. Apuntes de Cálculo I (En preparación)
- [8] Swokowski, E. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Segunda edición. Grupo Ibero-América, México, 1997.
- [9] Zill, D. et al. Algebra and Trigonometry. Mc. Graw-Hill, New York (1990)