Элементы вариационного исчисления

Пусть задана функция $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, такая, что для каждой функции $y(x) \in C^1[a,b]$ существует интеграл $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$. Рассмотрим ***интегральный функционал*** $J: C^1[a,b] \to \mathbf{R}$, заданный формулой

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx.$$

Определение. Классической (простейшей) задачей вариационного исчисления называется следующая задача условной оптимизации:

$$\begin{cases} J[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \to \min\ (\max), \\ y \in C^1[a,b], \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{cases}$$

При этом условия

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B$$

называются ***краевыми условиями*** в задаче, а функции $y(x)$ из пространства $C^1[a,b]$, удовлетворяющие краевым условиям, называются ***допустимыми***.

Таким образом, классическая вариационная задача – это задача минимизации интегрального функционала на множестве допустимых функций.

Определение. Говорят, что допустимая функция $y^*(x)$ доставляет в классической вариационной задаче локальный минимум (максимум), если существует $\Delta > 0$ такое, что

$$J[y^*(x)] \le (\ge)\, J[y(x)]$$

для всех $y(x) \in C^1[a,b]$, таких, что

$$\|y(x) - y^*(x)\|_1 \le \Delta.$$

Точки, являющиеся точками локального минимума или максимума, называются точками ***локального экстремума***.

Теорема. Если функция $y = y(x)$ удовлетворяет краевым условиям и доставляет функционалу экстремум, то она является решением уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

В подробной записи уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' = 0.$$

Кривые $\overset{\frown}{AB}$ $y = y^*(x), x \in [a,b]$, являющиеся графиками функций – решений уравнения Эйлера, называются ***экстремалями***.

Таким образом, решение простейшей задачи вариационного исчисления свелось к решению дифференциального уравнения Эйлера при краевых условиях.

После нахождения допустимых экстремалей остается проверить, действительно ли найденные экстремали доставляют экстремум в рассматриваемой задаче.

Достаточное условие отсутствия экстремума. Если функция $F''_{y'y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))$ меняет знак на отрезке $[a, b]$, то функция $y^*(x)$ не доставляет локального экстремума для интегрального функционала.

Достаточные условия экстремума (по Лежандру) связаны с исследованием слабой вариации функционала.

Если на экстремали $F''_{y'y'} > 0$, то на экстремали достигается минимум, если $F''_{y'y'} < 0$ – то максимум.

Пример. Найти экстремаль функционала:

$$J[y] = \int_{-1}^{0} (12xy - y'^2) dx$$

с дополнительными условиями $y(-1) = 1,\ y(0) = 0$.

Здесь $F(x, y, y') = 12xy - y'^2$, $F'_y = 12x$, $F''_{yy'} = 0$, $F'_{y'} = -2y'$, $F''_{y'y'} = -2$.

Подставляя в (9), получим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \ \Rightarrow\ 12x - 0 \cdot y' - (-2) \cdot y'' = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{y'' = -6x}.$$

Интегрируя его, получаем

$$y(x) = -x^3 + C_1 x + C_2.$$

Используя граничные условия, получим $C_1 = C_2 = 0$, $\boldsymbol{y^*(x) = -x^3}$ **– экстремаль?**

Проверим $F''_{y'y'} = -2 < 0$, следовательно, имеет место максимум при $\boldsymbol{y^*(x) = -x^3}$

Вычислим вариацию функционала

$$\Delta J[y^*(x)] = J[y^*(x) + \delta y(x)] - J[y^*(x)] = J[\boldsymbol{-x^3} + \delta y(x)] - J[\boldsymbol{-x^3}] =$$

$$= \int_{-1}^{0} (12x(\boldsymbol{-x^3} + \delta y) - (\boldsymbol{-3x^2} + (\delta y)')^2) dx - \int_{-1}^{0} (12x(\boldsymbol{-x^3}) - (\boldsymbol{-3x^2})^2) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(12x\delta y + \boldsymbol{6x^2}(\delta y)' - ((\delta y)')^2\right) dx$$

Вычислим по частям интеграл

$$\int_{-1}^{0} \mathbf{6x^2}(\delta y)'dx = \begin{vmatrix} u = \mathbf{6x^2} & \mathbf{du = 12xdx} \\ dv = (\delta y)'dx & v = \delta y \end{vmatrix} = \mathbf{6x^2}\delta y|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \mathbf{12x}(\delta y)dx.$$

Заметим, что $\delta y(-1) = \delta y(0) = 0$.

Далее вычисляем вариацию функционала

$$\Delta J[y^*(x)] = \int_{-1}^{0} 12x\delta y dx + \int_{-1}^{0} \mathbf{6x^2}(\delta y)'dx - \int_{-1}^{0} \left((\delta y)'\right)^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} 12x\delta y dx + 0 - \int_{-1}^{0} 12x\delta y dx - \int_{-1}^{0} \left((\delta y)'\right)^2 dx = -\int_{-1}^{0} \left((\delta y)'\right)^2 dx < 0.$$

Таким образом, доказано, что для всех $y(x)$

$$\Delta J[y^*(x)] = J[y(x)] - J[y^*(x)] < 0,$$

Это означает, что по определению имеет место максимум при $\boldsymbol{y^*(x) = -x^3}$.

Вычислим слабую вариацию функционала $J[y] = \int_{-1}^{0}(12xy - y'^2)dx$

$$\delta J = \left.\frac{\partial J[y^*(x) + t\delta y(x)]}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left.\int_{-1}^{0}\left(12x(-\boldsymbol{x^3} + t\delta y) - (-\mathbf{3}\boldsymbol{x^2} + t(\delta y)')^2\right)dx\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\int_{-1}^{0}\left(12x\delta y - 2(-\mathbf{3}\boldsymbol{x^2} + t(\delta y)')(\delta y)'\right)dx\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\int_{-1}^{0}\left(12x\delta y + 6\boldsymbol{x^2}(\delta y)' - 2t(\delta y)'^2\right)dx\right|_{t=0} = \int_{-1}^{0}\left(12x\delta y + 6\boldsymbol{x^2}(\delta y)'\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} 12x\delta y dx + \mathbf{6x^2}\delta y|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 12x\delta y dx = 0.$$

Таким образом, непосредственно проверено, что в точке максимума слабая вариация функционала равна нулю.