**Лабораторная работа 3. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

Суть задачи сводится к поиску оптимального (кратчайшего, быстрейшего или самого дешевого) пути, проходящего через промежуточные пункты по одному разу и возвращающегося в исходную точку. К примеру, нахождение наиболее выгодного маршрута, позволяющего коммивояжеру посетить со своим товаром определенные города по одному разу и вернуться обратно. Мерой выгодности маршрута может быть минимальное время поездки, минимальные расходы на дорогу или минимальная длина пути.

Метод ветвей и границ — один из методов дискретной оптимизации, являющийся развитием метода полного перебора (заключается в последовательном рассмотрении всех возможных маршрутов и выборе из них оптимального), но отличающийся от него отсевом в процессе вычисления подмножеств неэффективных решений.

Сначала необходимо расстояния между городами (Cij) представить в виде матрицы (таблицы).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 8 | 25 | INF | 4 |
| 2 | 4 | INF | 19 | 64 | 80 |
| 3 | 6 | 12 | INF | 86 | 53 |
| 4 | 21 | 54 | 16 | INF | 12 |
| 5 | 89 | 70 | 52 | 17 | INF |

Находим минимальное значение в каждой строке (di) и выписываем его в отдельный столбец. Найденные значение di называются константами приведения для строк.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Di |
| 1 | INF | 8 | 25 | INF | 4 | 4 |
| 2 | 4 | INF | 19 | 64 | 80 | 4 |
| 3 | 6 | 12 | INF | 86 | 53 | 6 |
| 4 | 21 | 54 | 16 | INF | 12 | 12 |
| 5 | 89 | 70 | 52 | 17 | INF | 17 |

Производим редукцию строк – из каждого элемента в каждой строке вычитаем соответствующее ей значение минимума (Cij = Cij — di).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 4 | 21 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 15 | 60 | 76 |
| 3 | 0 | 6 | INF | 80 | 47 |
| 4 | 9 | 42 | 4 | INF | 0 |
| 5 | 72 | 53 | 35 | 0 | INF |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 4 | 21 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 15 | 60 | 76 |
| 3 | 0 | 6 | INF | 80 | 47 |
| 4 | 9 | 42 | 4 | INF | 0 |
| 5 | 72 | 53 | 35 | 0 | INF |
| Dj | 0 | 4 | 4 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 0 | 17 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 11 | 60 | 76 |
| 3 | 0 | 2 | INF | 80 | 47 |
| 4 | 9 | 38 | 0 | INF | 0 |
| 5 | 72 | 49 | 31 | 0 | INF |

На этом этапе следует провести небольшое, но крайне важное вычисление, а именно определить корневую локальную нижнюю границу (Hk) длины (стоимости, длительности) маршрута. Для этого нужно суммировать константы приведения di и dj.  
H = ∑Di + ∑Dj  
H = 4+4+6+12+17+0+4+4+0+0 = 51(локальная нижняя граница).

То есть короче, чем H длина маршрута быть не может.

Длина маршрута определяется выражением:  
F(Mk) = ∑ Dij  
Элементы матрицы Dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.

**Шаг №1**.

Нахождение оценки для нулевой клетки (5,4)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | min |
| 1 | INF | 0 | 17 | INF | 0 |  |
| 2 | 0 | INF | 11 | 60 | 76 |  |
| 3 | 0 | 2 | INF | 80 | 47 |  |
| 4 | 9 | 38 | 0 | INF | 0 |  |
| 5 | 72 | 49 | 31 | INF | INF | 31 |
| min |  |  |  | 60 |  | 91 |

Для каждой нулевой клетки преобразованной матрицы находим «оценку» (pij). Ею будет сумма минимума по строке и минимума по столбцу, на пересечении которых находится данная клетка с нулем.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Город | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | INF | 0(2) | 17 | INF | 0(0) |
| 2 | 0(11) | INF | 11 | 60 | 76 |
| 3 | 0(2) | 2 | INF | 80 | 47 |
| 4 | 9 | 38 | 0(11) | INF | 0(0) |
| 5 | 72 | 49 | 31 | 0(91) | INF |

Следующий важный шаг — выбор среди нулевых клеток матрицы той, что имеет наибольшую оценку. Это делается для того, чтобы избежать максимального удлинения маршрута, которое появится если НЕ выбрать такую ячейку. В нашем случае максимальную оценку имеет клетку 5-4.  
**Исключение ребра** (5,4) проводим путем замены элемента D54 = 0 на INF, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ij | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Di |
| 1 | INF | 0(2) | 17 | INF | 0(0) | 0 |
| 2 | 0(11) | INF | 11 | 60 | 76 | 0 |
| 3 | 0(2) | 2 | INF | 80 | 47 | 0 |
| 4 | 9 | 38 | 0(11) | INF | 0(0) | 0 |
| 5 | 72 | 49 | 31 | INF | INF | 31 |
| Dj | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 91 |

Нижняя граница этого подмножества(сумма предыдущей локальной границы и максимальной оценки):  
H(5\*,4\*) = 51 + 91 = 142

**Включение ребра** (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d54 заменяем на INF, для исключения образования цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая

подлежит операции приведения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ij | 1 | 2 | 3 | 5 | Di |
| 1 | INF | 0 | 17 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | INF | 11 | 76 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | INF | 47 | 0 |
| 4 | 9 | 38 | 0 | INF | 0 |
| Dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑Di + ∑ Dj = 0  
Нижняя граница подмножества (5,4) равна:  
H(5,1) = 51 + 0 = 51  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,4) меньше, чем подмножества (5\*,4\*), то ребро (5,4) включаем в маршрут с новой границей H = 51.

**Шаг №2**.  
**Определяем ребро ветвления**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ij | 1 | 2 | 3 | 5 | Di |
| 1 | INF | 0(2) | 17 | 0(47) | 0 |
| 2 | 0(11) | INF | 11 | 76 | 0 |
| 3 | 0(2) | 2 | INF | 47 | 0 |
| 4 | 9 | 38 | 0(20) | INF | 0 |
| Dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

max: D(5,1)=47.

**Исключение ребра** (5,1): D51=INF.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ij | 1 | 2 | 3 | 5 | Di |
| 1 | INF | 0 | 17 | INF | 0 |
| 2 | 0 | INF | 11 | 76 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | INF | 47 | 0 |
| 4 | 9 | 38 | 0 | INF | 0 |
| Dj | 0 | 0 | 0 | 47 | 47 |

H(5\*,1\*) = 51 + 47 = 98.

**Включение ребра** (5,1): d51=INF.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ij | 1 | 2 | 3 | Di |
| 2 | 0 | INF | 11 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | INF | 0 |
| 4 | 9 | 38 | 0 | 0 |
| Dj | 0 | 2 | 0 | 2 |

∑Di + ∑ Dj = 0  
H(5,1) = 51 + 2 = 53.  
Чтобы исключить подциклы, запретим следующие переходы: (5,1).  
Ребро (5,1) включаем в маршрут с новой границей H=53.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ij | 1 | 2 | 3 | Di |
| 2 | 0 | INF | 11 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | INF | 0 |
| 4 | 9 | 36 | 0 | 0 |
| Dj | 0 | 0 | 0 | 0 |

max: D(4,3)=20.

**Исключение ребра** (4,3): D43=INF.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ij | 1 | 2 | 3 | Di |
| 2 | 0 | INF | 11 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | INF | 0 |
| 4 | 9 | 36 | INF | 9 |
| Dj | 0 | 0 | 11 | 20 |

H(4\*,3\*) = 53 + 20 = 73.

**Включение ребра** (4,3): D43=INF.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ij | 1 | 2 | Di |
| 2 | 0 | INF | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| Dj | 0 | 0 | 0 |

∑Di + ∑ Dj = 0  
H(4,3) = 53 + 0 = 53  
Ребро (4,3) включаем в маршрут с новой границей H=51.  
В соответствии с этой матрицей включаем в маршрут оставшиеся ребра (2,1) и (3,2) .  
В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:  
(5,4), (4,3), (3,2), (2,1), (1,5),  
Длина маршрута равна F(Mk) = 53

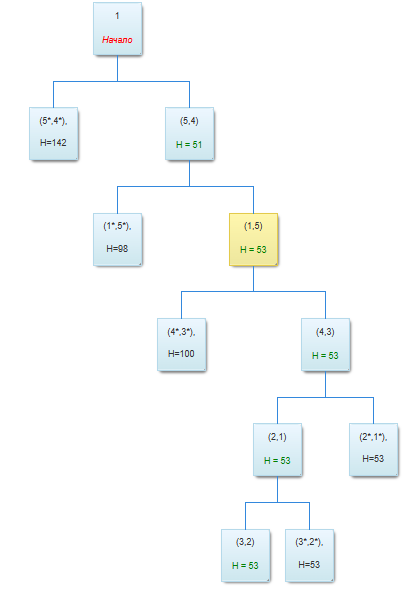


Рисунок 1 – граф

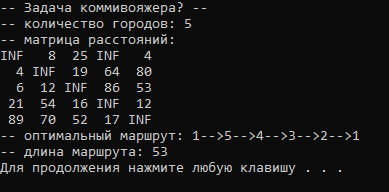


Рисунок 2 – результат решения задачи

**Вывод:** при выполнении лабораторной работы были освоены общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решена задача о коммивояжере этим методом.