Явный метод простой итерации

Рассмотрим систему ЛАУ

$$Ax = f,\ \det(A) \neq 0. \tag{7.1}$$

Преобразуем исходное уравнение (7.1), для этого домножим обе части (7.1) на невырожденную матрицу $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}$: $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$. К левой части добавим и вычтем x:

$$x - x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f \quad \Rightarrow \ x = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f.$$

Обозначим $H_k = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)$, $\varphi_k = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$ и получим так называемый явный нестационарный двухслойный метод простой итерации: $x^{(k+1)} = H_k x^{(k)} + \varphi_k$. Если $B_{k+1} = B$ и $\tau_{k+1} = \tau$, то получим явный стационарный двухслойный метод простой итерации, который имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + \varphi. \tag{7.2}$$

Далее будем рассматривать явный стационарный метод простой итерации. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации* (7.2) *при любом начальном векторе* $x^{(0)}$ *к решению* x^* *системы* $x = Hx + \varphi$ *является требование, чтобы все собственные значения матрицы* H *были по модулю меньше единицы*: $|\lambda(H)| < 1$.

Теорема .2. *Для сходимости явного метода простой итерации достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы* H *была меньше единицы*.

Теорема 3. *Пусть* $\|H\| \le q < 1$, *тогда для метода простой итерации* (7.2) *верны следующие оценки погрешности*:

1) $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \dfrac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ (*апостериорная*);

2) $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \dfrac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$ (*априорная*).

Априорная оценка из теоремы 7.3 позволяет заранее подсчитать число итераций k, достаточное для получения решения x^* с заданной точностью при выбранном начальном приближении $x^{(0)}$. Для этого необходимо найти наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \le \varepsilon$ относительно переменной k. Апостериорной же оценкой удобно пользоваться непосредственно в процессе вычислений и останавливать вычислительный процесс, как только выполнится неравенство $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \dfrac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$.

Отметим, что из выполнения неравенства $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le\varepsilon$ будет гарантированно следовать выполнение неравенства $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\varepsilon$ только в том случае, когда $\|H\|\le q\le 0{,}5.$ На практике вычисления по формуле (7.2) прекращают, когда $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|<\varepsilon$ (для $\|H\|\le 0{,}5$) или когда $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|<\varepsilon_1,$ где $\varepsilon_1=\dfrac{1-\|H\|}{\|H\|}\cdot\varepsilon$ (для $\|H\|\approx 1$).

Запишем алгоритм явного метода простой итерации решения системы ЛАУ $x=Hx+\varphi$ в виде, удобном для компьютерной реализации:

1) $q:=\|H\|;$

2) $xs:=\varphi;$

3) $xn:=H\cdot xs+\varphi;$

4) пока $\dfrac{q}{1-q}\cdot\|xn-xs\|\ge\varepsilon;$

 5) $xs:=xn;$

 6) $xn:=H\cdot xs+\varphi;$

7) Вернуть $xn.$

Достоинства явного метода простой итерации: самоисправляемость; простота реализации на компьютере; возможность применения для систем ЛАУ больших размерностей с разреженными матрицами.

Расчётное задание

Рассмотрим систему ЛАУ $Ax=f,$ где матрица A имеет вид

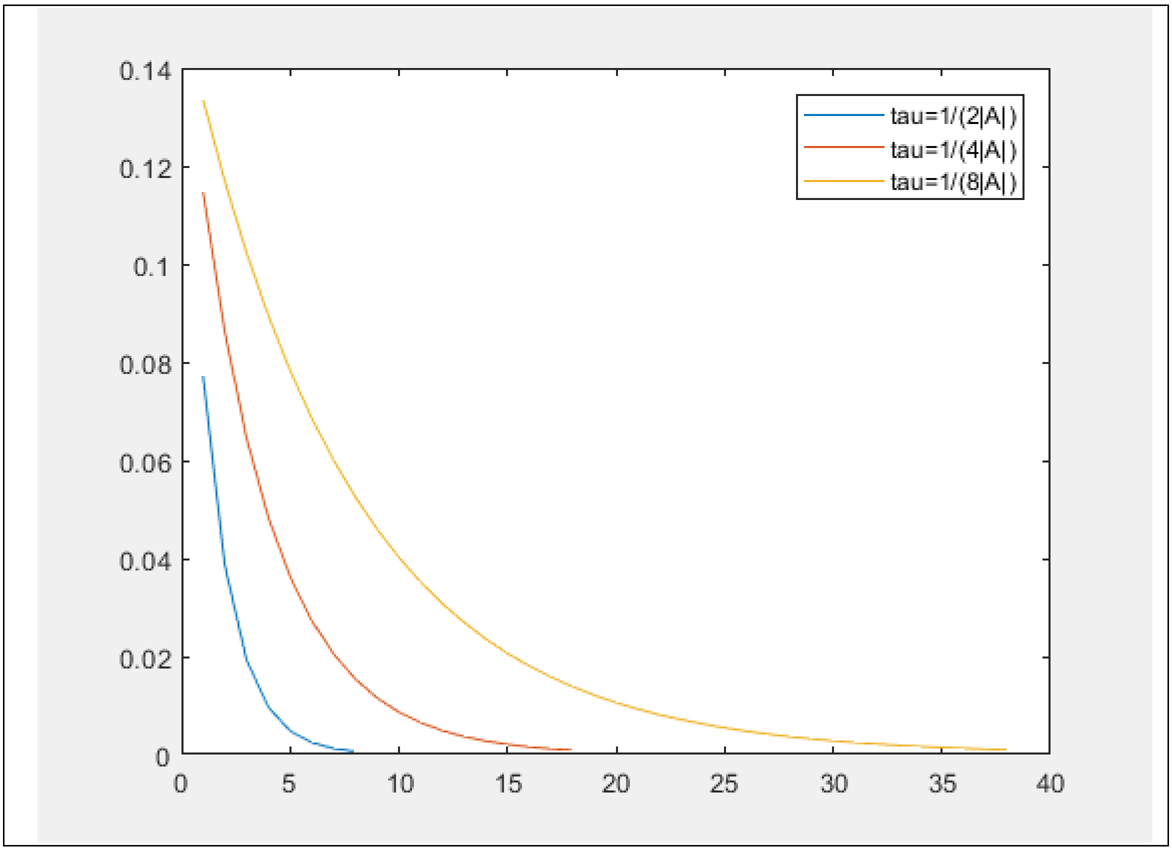
$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{i+j+v}, & i\ne j\\ 100+v, & i=j\end{cases},\quad i,j=\overline{1,n}$$

v – номер варианта, $n=10$, а правая часть f определяется вектором случайных значений между a и b (значения чисел a и b определяются преподавателем при проверке работы программы).

Написать программу решения системы ЛАУ $Ax=f$ методом простой итерации вида $x^{(k+1)}=H\cdot x^{(k)}+\varphi,\quad H=E-\tau A.$

Нарисовать график убывания погрешности $\dfrac{q}{1-q}\|xn-xs\|$ на каждой итерации для различных параметров $\tau\in\{\dfrac{1}{2\|A\|},\dfrac{1}{4\|A\|},\dfrac{1}{8\|A\|}\}.$

Точность взять равной $\varepsilon=10^{-3}$.



tau=1/(2|A|)
tau=1/(4|A|)
tau=1/(8|A|)
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40