Вариационные методы.

Рассмотрим итерационные методы вида:

$$B\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_{k+1}}=-(Ax^{(k)}-f), \qquad (1)$$

в которых параметр τ_{k+1} выбирается исходя из условия минимизации погрешности $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D=(D\varepsilon^{(k+1)},\ \varepsilon^{(k+1)})$, где вектор погрешности $\varepsilon^{(k)}=x^*-x^{(k)}$, а x^* – точное решение системы $Ax=f$. Здесь D – заданная симметричная, положительно определенная матрица. В зависимости от выбора матриц B и D можно получить различные итерационные методы. Преимуществом таких методов является то, что они не требуют знания границ спектра матрицы $B^{-1}A$.

Вычисления по формуле (1) выполняются в следующей последовательности:

1. Вычисляем вектор невязки $r^{(k)}=f-Ax^{(k)}$.

2. Решая систему ЛАУ $B\omega^{(k)}=r^{(k)}$, вычисляем вектор поправки $\omega^{(k)}$.

3. Вычисляем параметр τ_{k+1}, исходя из условия минимизации энергетической нормы погрешности $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D=(D\varepsilon^{(k+1)},\ \varepsilon^{(k+1)})$.

4. Вычисляем очередное приближение x_{k+1} по формуле $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\tau_k\omega^{(k)}$.

5. Вычисления продолжаем до тех пор, пока относительная норма невязки $\left\|r^{(k)}\right\|/\left\|f\right\|$ не превосходит заданную точность δ .

Параметр τ_{k+1} выбирают исходя из условия минимизации нормы вектора погрешности и полагают равным:

$$\tau_{k+1}=\frac{\left(D\omega^{(k)},\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(D\omega^{(k)},\omega^{(k)}\right)}. \qquad (2)$$

Дальнейшее упрощение формулы (2) возможно за счет выбора матрицы *D*. Рассмотрим мотивы выбора матрицы *D*:

1. Пусть $A=A^T>0$. Можно взять $D=A$, тогда (2) примет вид:

$$\tau_{k+1}=\frac{\left(A\omega^{(k)},\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)},\omega^{(k)}\right)}=\frac{\left(\omega^{(k)},A^T\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)},\omega^{(k)}\right)}=\frac{\left(\omega^{(k)},A\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)},\omega^{(k)}\right)}=\frac{\left(\omega^{(k)},r^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)},\omega^{(k)}\right)}. \qquad (3)$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (3), называют **методом скорейшего спуска**.

2. Пусть $\det A\neq 0$. Тогда можно взять $D=A^TA$ и уравнение (2) примет вид:

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(A^T A\omega^{(k)}, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A^T A\omega^{(k)}, \omega^{(k)}\right)} = \frac{\left(A\omega^{(k)}, \left(A^T\right)^T \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)}, \left(A^T\right)^T \omega^{(k)}\right)} = \frac{\left(A\omega^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(A\omega^{(k)}, A\omega^{(k)}\right)}. \qquad (4)$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (4), называют **методом минимальных невязок**.

3. Пусть $A > 0,\ B = B^T > 0$. Тогда в качестве D можно выбрать $D = A^T B^{-1} A$. Очевидно, что $D = D^T > 0$. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(A^T B^{-1} A\omega^{(k)}, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A^T B^{-1} A\omega^{(k)}, \omega^{(k)}\right)} = \frac{\left(A\omega^{(k)}, B^{-1} A\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(B^{-1} A\omega^{(k)}, A\omega^{(k)}\right)} = \frac{\left(A\omega^{(k)}, \omega^{(k)}\right)}{\left(B^{-1} A\omega^{(k)}, A\omega^{(k)}\right)}. \qquad (5)$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (5), называют **методом минимальных поправок.**

Задание

Решить систему ЛАУ $Ax = f$, используя метод скорейшего спуска, метод минимальных невязок и минимальных поправок. В качестве матрицы A взять матрицу из предыдущей лабораторной (матрицу Пуассона), $n = 10$. Правая часть f определяется вектором случайных значений между a и b (значения чисел a и b определяются преподавателем при проверке работы программы). Точность взять равной $\delta = 10^{-6}$. Матрицу B взять равной матрице Якоби (диагональ матрицы A). Нарисовать графики убывания относительной нормы невязки $\left\| r^{(k)} \right\| / \left\| f^{(k)} \right\|$ для трех методов.