MÓDULO

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

(Segunda Edición)

Jorge Eliécer Rondón Duran

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD –
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Bogotá D. C, 2011

PRESENTACIÓN DEL CURSO

$$\left(a+b\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

Estimados Estudiantes Bienvenidos al curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. La matemática como ciencia a través de la historia ha buscado fundamentos sólidos que garanticen su validez y rigurosidad, así el espectro de ésta ciencia es muy amplio, pero muy interesante, basta con repasar un poco el camino que inicia con la Aritmética, la Geometría, el Álgebra, siguiendo con el Cálculo, hasta áreas más avanzadas como la Teoría de conjuntos, Geometría Diferencial y otros. Todo con el fin de dar a la sociedad una *Herramienta Formal* que permita demostrar principios y definiciones para el buen uso en las áreas del saber.

En este orden de ideas, el curso que nos ocupa en este material, presenta diversas temáticas que hacen parte de esa gran herramienta formal. Las temáticas que se exponen son muy útiles para cualquier estudiante de un programa universitario, están desarrolladas en un lenguaje sencillo, pero con gran rigor matemático, ya que el propósito fundamental es que los estudiantes adquieran conocimientos sólidos en las áreas de **Álgebra**, **Trigonometría**, **Geometría Analítica**, **Sumatorias** y **Productorias,** que les permita transitar de manera muy dinámica por áreas más avanzadas de matemáticas o afines.

El curso está estructurado por unidades que a su vez esta conformadas por capítulos y éstos por lecciones. La primera unidad es de Álgebra, cuyos capítulos son las Ecuaciones y las Inecuaciones, dos temáticas muy interesantes y de gran uso en campos de la Ingeniería, Administración y demás. La segunda unidad contempla lo referente a funciones, además del análisis de la trigonometría analítica y la Hipernometría; término que acuñamos para hacer referencia a las funciones hiperbólicas. Es pertinente resaltar que el núcleo de las Matemáticas es el análisis de las funciones, también la gran aplicación de la trigonometría en estudios de Ciencias Experimentales, Ingeniería, Ciencias Agrarias y otros. La tercera unidad contempla los capítulos de Geometría Analítica, Sumatorias y Productorias, temáticas muy particulares y de gran importancia en diversas áreas, como la Astronomía, Física, Ingeniería, Estadística, Cálculo y otras.

El proceso de análisis, comprensión e interiorización de las temáticas propuestas, son fundamentales para poder transitar en posteriores áreas del conocimiento propias de un programa académico universitario. Pero también son una buena herramienta para resolver un gran número de problemas que se pueden solucionar con modelos matemáticos, de los cuales se analizarán algunos en detalle.

El curso requiere algunos conocimientos previos de Aritmética, Álgebra Elemental y elementos de geometría plana y espacial, los cuales son fundamentales para poder avanzar adecuadamente a través del curso. Pero si por alguna circunstancia dichos conocimientos son requeridos, se pueden consultar en el curso de Matemáticas Básicas.

Cada temática esta soportada en principios matemáticos, sus propiedades, sus teoremas, axiomas, que soportan su fundamento. También se exponen ejemplos modelos con su respectivo desarrollo que ilustran la profundización de las mismas, finalizando con ejercicios propuestos, que presentan su respuesta, para que los estudiantes puedan confrontar lo realizado con lo requerido.

Para buscar una buena comprensión de los conocimientos, es pertinente desarrollar la metodología que la UNAD propone en su modelo académico-pedagógico, el cual describe diversos momentos desde el *trabajo independiente*, *trabajo en pequeño grupo colaborativo*, *tutorías de pequeño grupo e individuales* y los *encuentros de gran grupo*, cada uno son muy importantes y buscan que el estudiante desarrolle su proceso de formación de manera dinámica y participativa.

Al final de cada unidad se presenta una auto evaluación que es donde el estudiante demuestra hasta donde ha desarrollado sus competencias cognitivas, meta cognitivas, argumentativas, propositivas y demás, dándole transito a la profundización y transferencia de los conocimientos en el área que nos ocupa.

No sobra hacer énfasis que para aprender matemáticas, es fundamental la motivación intrínseca, querer hacerlo, tener paciencia, algo de perspicacia, sentido lógico y muchas ganas de enfrentarse a más y más retos.

Es claro que aprender matemáticas no es fácil, pero desarrollando un buen trabajo académico, utilizando los lineamientos que se han presentado, el grado de comprensión e interiorización de los conocimientos en dicha área será muy alto.

¡***Animo y muchos éxitos en tan interesantes mundo matemático***!

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 5. TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 6. HIPERNOMETRIA

UNIDAD TRES*:* **GEOMETRIA ANALITICA, SUMATORIAS Y PRODUCTORIAS**

CAPÍTULO 7. GEOMETRIA ANALITICA

CAPÍTULO 8. SUMATORIAS Y PRODUCTORIAS

UNIDAD UNO

ECUACIONES E INECUACIONES

CAPÍTULO UNO: LAS ECUACIONES

$$\alpha x + \beta = \delta$$

INTRODUCCIÓN

A través de la historia, las ecuaciones han sido de gran importancia en las Matemáticas y otras ciencias, desde los babilonios, pasando por los egipcios y los griegos, hasta nuestra época, las ecuaciones han sido el pan de cada día para resolver problemas donde se requiere saber el valor de una "incógnita".

Las ecuaciones son igualdades que se hacen verdaderas para valores específicos, por ejemplo: Si tenemos: $2x + 5 = 9$, se debe buscar el valor de x que al multiplicarlo por 2 y sumado con 5 nos resulte nueve. Es así que para x = 2, si lo reemplazamos en la igualdad 2(2) + 5 = 9, ésta será verdadera. Entonces, resolver una ecuación es hallar el valor o valores de la incógnita que hagan verdadera dicha igualdad. A su vez, las soluciones pueden ser *reales* o *imaginarias*, según el caso. Por ejemplo si tenemos $x^2 – 4 = 0$, se puede verificar que los valores que puede tomar la incógnita son $x = 2$ *y* $x = -2$. Pero si se tiene $x^2 + 4 = 0$, la solución no es real, ya que NO existen número real que al elevarlo al cuadrado y sumado con 4 resulte cero, luego la solución es imaginaría $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$. (Recordemos los números imaginarios del curso de Matemáticas Básicas).

Existen diferentes clases de ecuaciones, según el grado del polinomio que la describe, según el número de variables, según el tipo de coeficientes. De acuerdo al grado del polinomio, existen ecuaciones de primer grado, de segundo grado, etc. De acuerdo al número de variables, se tienen ecuaciones de una variable, ecuaciones de dos variables, etc. Según el tipo de coeficientes, se tienen ecuaciones de coeficientes enteros, de coeficientes racionales, de coeficientes reales.

Para resolver ecuaciones, existen diversas técnicas matemáticas que depende del tipo de ecuación, pero siempre se debe tener presente el principio de operaciones opuestas: Suma – Resta, Producto – Cociente, Potenciación – radicación, potenciación – Logaritmación.

Para un el buen dominio en la resolución de ecuaciones, se requiere mucho ánimo, paciencia, desarrollar diversos y un número adecuado de ejemplos modelos.

Lección Uno: Elementos Matemáticos Básicos.

$$\beta + \varphi = \varsigma$$

Entender las ecuaciones requiere conocer claramente algunos conceptos que son comunes a todo tipo de ecuación:

***Constante*:** Son términos que toman valores fijos, en álgebra se utilizan por lo general las primeras letras del alfabeto: a, b, c,… Todos los números en esencia son constantes, por ejemplo en la expresión $ax^2 + bx + c$ los términos a, b, c son constantes.

***Incógnita (Variable)*:** Se considera todo aquello que no se conoce; pero se puede identificar utilizando principios matemáticos, en Matemáticas por lo general se utilizan las últimas letras del alfabeto x, y, z w,… para el caso de $ax^2 + bx + c$, la incógnita es x, otro ejemplo: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, las incógnitas son x e y.

A manera de ejercicio identifique las incógnitas y constantes en las siguientes ecuaciones, será un ejercicio muy motivante.

$$4x^3 + 5y^2 - 7z = 0$$

$$ax^3 + by^2 + pz = 0$$

Por lo general, la solución de ecuaciones se enmarca dentro del conjunto de los reales, exceptuando los casos donde hay involucradas raíces con índice par de cantidades negativas.

Leyes Básicas:

1. Leyes de Uniformidad:

Es pertinente recordar las leyes de uniformidad, que son muy útiles a la hora de resolver ecuaciones. En su fundamento, las leyes de uniformidad definen que dados dos o más números, si se suman, la respuesta siempre es única, independiente de la naturaleza de las cantidades. De la misma manera para la multiplicación.

SUMA Y PRODUCTO:

Sean a, b, c y d números reales; tal que **a = b** y **c = d**. entonces:

1. a + c = b + d
2. a + c = b + c
3. a x c = b x d
4. a x c = b x c

Ejemplo 1:

Sea la siguiente expresión: a = 2 y c = 5, aplicar la ley de suma y producto.

Solución:

Siguiendo el orden:
a + c = 2 + 5
a*c = 2*5
Así b = 2 y d = 5.

RESTA Y COCIENTE:

Al restar dos números, la diferencia siempre es un valor único. Sean a, b, c y d números reales; tal que a = b y c = d. entonces:

5. a - c = b - d
6. a - c = b - c
7. a / c = b / d Para $c \neq 0$
8. a / c = b / c Para $c \neq 0$

Ejemplo 2:

Sea la siguiente expresión: a = 8 y c = 4, aplicar la ley de resta y cociente.

Solución:

Siguiendo el orden:
a - c = 8 - 4
a/c = 8/4
Luego b = 8 y d = 4.

POTENCIA Y RAIZ:

Sean a, b, c y d números reales; tal que a = b y c = d. Para a ≠ 0 y c ≠ 0, entonces:

9. $a^c = b^d$
10. $c^a = d^a$
11. $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$ Para $a \geq 0$ además $c \in Z^+$ y $c \geq 2$

Ejemplo 3:

Sea la siguiente expresión: a = 9 y c = 2, aplicar la ley de potencia y raíz.

Solución:

Siguiendo el orden:
$a^c = 9^2$
$c^a = 2^a$
$\sqrt[c]{a} = \sqrt[2]{9}$
Luego b = 9.

2. Ley del producto nulo:

Sean a y b números reales, entonces:

12. a x b = 0 si, y solo si, a = 0 ó b = 0

Ejemplo 4:

Dada la expresión. 4*a = 0

Solución:

Como 4 es un valor fijo, para que el producto sea cero, entonces a = 0.

Ejemplo 5:

Dada la expresión. (x – 4)*12 = 0

Solución:

Como 12 es un valor fijo, para que el producto sea cero, entonces (x – 4) = 0. Así x = 4.

3. Principio de Fracciones Equivalentes:

Dada la igualdad: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a*d = c*b$. Para b ≠ 0 y d ≠ 0.

Ejemplo 6:

Dada la expresión. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ Mostrar que la equivalencia es verdadera.

Solución:

Aplicando la ley de fracciones equivalentes: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Rightarrow 1*6 = 2*3$ Lo cual es evidentemente verdadera.

Lección Dos: Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita.

$$\boxed{\beta x + \varphi = \varsigma}$$

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma $ax + b = c$, siendo a, b y c las constantes y x la incógnita. El valor de ***a*** puede ser un número real; diferente de cero. Ejemplos de este tipo de ecuaciones: $3x - 5 = 0$ que corresponde a una ecuación de coeficiente entero y expresión entera. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$, ecuación de coeficiente racional y expresión entera. $\frac{3x-2}{5} = 8$, ecuación de coeficiente entero y expresión racional.

Las ecuaciones de primer grado se caracterizan porque la incógnita tiene como exponente la unidad; por lo cual, la solución es única, esto quiere decir que éste tipo de ecuaciones tienen “Una Sola solución”.

Para resolver ecuaciones de éste tipo, se han utilizado varias técnicas, los egipcios; por ejemplo, utilizabas la llamada “Regula Falsa”, actualmente se utiliza el método axiomático, el cual se analizará a continuación.

METODO AXIOMATICO: Es el método más utilizado en la actualizad, el cual utiliza las propiedades algebraicas y las leyes de uniformidad, todo esto derivado de los axiomas de cuerpo. Aclaremos que los axiomas epistemológicamente son “Verdades Evidentes” y a partir de éstas, se desarrolla el conocimiento matemático. Algunos axiomas que son importantes para comprender la solución de ecuaciones.

Axiomas de Cuerpo: Sean *x, y, z*, valores definidos, dentro del conjunto de los Reales

Primer Axioma: x + y = y + x (Propiedad conmutativa)

Segundo Axioma: x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z) (Propiedad Asociativa)

Tercer Axioma: x (y + z) = x*y + x*z (Propiedad Distributiva)

Cuarto Axioma: x + 0 = x y x*1 = x (Propiedad Modulativa de la suma y producto)

Quinto Axioma: x + y = 0, y + x = 0 (Propiedad del inverso. Todo número real tiene un Inverso, excepto el cero). Para *x*, su inverso es puede escribir *–x,* igual para y.

Sexto Axioma: x*y = 1, y*x = 1 Para $x \neq 0$. (Propiedad del recíproco, todo número real tiene un recíproco). Para *x*, su recíproco se puede escribir $x^{-1} = 1/x$, igual para y.

NOTA: El símbolo * indica multiplicación.

Con los argumentos anteriores, se puede comenzar el análisis del desarrollo de ecuaciones.

Los siguientes ejemplos, buscan ilustrar la resolución de ecuaciones de éste tipo, utilizando las leyes de uniformidad y los axiomas de cuerpo, explicado anteriormente.

Ejemplo 7:

Sea la ecuación $ax + b = 0$ hallar el valor de x que satisfaga la igualdad.

Solución:

Como la idea es despejar la incógnita, en este caso *x*, entonces se debe “eliminar Matemáticamente hablando” lo que rodea a dicha incógnita. Así lo primero es eliminar b, lo cual se puede hacer aplicando el inverso, ya que todo número sumado con su inverso resulta cero.

$ax + b - b = 0 - b$. Como se puede observar, el valor adicionado se hizo a los dos lados de la ecuación, esto con el fin de que ésta NO se altere. Entonces: $ax = -b$. Ahora se debe eliminar la *a*, esto se hace aplicando el recíproco, ya que todo número multiplicado con su recíproco resulta uno. Veamos:

$\frac{1}{a} ax = -b \frac{1}{a}$. Operando se obtiene: $x = -\frac{b}{a}$

Ejemplo 8:

Hallar la solución de la ecuación: $6 - x = 2x + 9$

Solución:

Como estamos utilizando el método axiomático. Por lo general, la incógnita se organiza al lado derecho y las constantes al lado izquierdo, entonces dejemos la incógnita al lado derecho, para esto se elimina del lado izquierdo, lo cual se hace adicionando -2x a los dos lados de la ecuación. $6 - x - 2x = 2x - 2x + 9$, operando se obtiene: $6 - 3x = 9$ Ahora eliminemos el -6 de la parte derecha para que solo quede la incógnita. $6 - 6 - 3x = 9 - 6$, operamos para obtener, $-3x = 3$ Finalmente aplicamos el recíproco de 3 para que la incógnita quede completamente despajada. $-3x * (-\frac{1}{3}) = 3 * (-\frac{1}{3})$, operando se obtiene:

$x = -1$. La solución de la ecuación propuesta.

Si reemplazamos el valor de x = -1, en la ecuación original, se debe obtener una igualdad. $6 - x = 2x + 9 \Rightarrow 6 - (-1) = 2(-1) + 9 \Rightarrow 7 = 7$

Ejemplo 9:

Resolver la ecuación: $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$

Solución:

Recordando las leyes de uniformidad: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a*d=c*b$ Se aplica para el caso que tenemos Esta es el camino para convertir una expresión racional en entera.

Veamos: $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow (x)*(2)=(1)*(x+2)\Rightarrow 2x=x+2$

Sumemos –x a los dos lados de la ecuación, ¿por qué?

$2x-x=x-x+2\Rightarrow x=2$. Así la solución es x = 2.

Reemplazamos la solución en la ecuación original: $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$ Operando:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Se observa que la igualdad se cumple. Este último proceso es lo que se conoce comúnmente como la *comprobación de la solución*.

Es pertinente analizar los pasos realizados, para ir aprendiendo los principios que soportan la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 10:

Hallar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuación: $\frac{6t+7}{4t-1}=\frac{3t+8}{2t-4}$

Solución:

Se va a resolver la ecuación, pero se recomienda que usted estimado estudiante, identifique qué principios fueron aplicados en cada paso.

$$\frac{6t+7}{4t-1}=\frac{3t+8}{2t-4}\Rightarrow (6t+7)(2t-4)=(3t+8)(4t-1)$$

$$(6t+7)(2t-4)=(3t+8)(4t-1)\Rightarrow (12t^2-10t-28)=(12t^2+29t-8)$$

A la última ecuación se le adiciona: $-12t^2$

$12t^2-12t^2-10t-28=12t^2-12t^2+29t-8\Rightarrow -10t-28=29t-8$ Sumamos -29t

$-10t-29t-28=29t-29t-8\Rightarrow -39t-28=-8$ Adicionamos 28 a la ecuación:

$$-39t-28+28=-8+28\Rightarrow -39t=20$$

Finalmente: $(-\frac{1}{39})-39t=20(-\frac{1}{39})\Rightarrow t=-\frac{20}{39}$. Estimado estudiante comprobar esta solución.

Ejemplo 11:

Hallar el valor de x que satisfaga la igualdad: $8(2x-6)=4(x-3)$

Solución:

$$8(2x-6)=4(x-3)\Rightarrow 16x-48=4x-12$$

$$16x-4x-48=4x-4x-12\Rightarrow 12x-48=-12$$

$$12x-48=-12\Rightarrow 12x-48+48=-12+48\Rightarrow 12x=36$$

$(\frac{1}{12})12x=(\frac{1}{12})36\Rightarrow x=\frac{36}{12}$, simplificando: x = 3:

En este ejemplo, no se dieron mayores detalles de la solución, Ya que la idea es que los estudiantes analicen y deduzcan todo el procedimiento.

Restricciones en la Solución:

Existen situaciones donde la ecuación tiene restricción en la solución. Veamos algunos casos.

a$-)\frac{1}{x-1}=\frac{1+x}{x^2}$. La restricción es que la incógnita NO puede tomar el valor de 0 ó 1, ya que si x = 0, se presenta una indeterminación, lo mismo ocurre si x = 1. g

b$-)\sqrt{x}+3=x-4$. Para este caso la solución se acepta si esta en los reales no negativos. (R^*); es decir, los reales mayores o iguales a cero.

c$-)Log(x+2)=-4$. Recordemos que los logaritmos de números negativos no existen, así la solución debe ser tal que x + 2 > 0; es decir, si la solución es superior a -2, ésta se acepta.

Ejemplo 12:

Muestre que la ecuación $\frac{3x}{x-1}+2=\frac{3}{x-1}$ No tiene solución.

Solución

Aplicando los principios estudiados anteriormente.

$$\frac{3x}{x-1}(x-1)+2(x-1)=\frac{3}{x-1}(x-1)\Rightarrow 3x+2(x-1)=3$$

$$3x+2(x-1)=3\Rightarrow 3x+2x-2=3\Rightarrow 5x-2=3$$

$$5x-2=3\Rightarrow 5x-2+2=3+2\Rightarrow 5x=5$$

Finalmente x = 1.

Si comprobamos la solución. $\frac{3x}{x-1}+2=\frac{3}{x-1}\Rightarrow\frac{3(1)}{1-1}+2=\frac{3}{1-1}$ Observamos que se presenta una indeterminación, ya que se tiene un cociente con denominador cero. Así queda demostrado que la ecuación NO tiene solución.

Ejemplo 13:

Determinar si la ecuación $Log(x+2) = -4$. tiene solución.

Solución

Aplicando los principios estudiados anteriormente y recordando las propiedades básicas de los logaritmos. $Log(x+2) = -4$. Aplicando operación inversa: $10^{Log(x+2)} = 10^{-4}$. Recordemos que la base de Log es diez, entonces: $10^{Log(x+2)} = 10^{-4} \Rightarrow x + 2 = 10^{-4}$. despejando la incógnita. $x = 10^{-4}. - 2 = -1{,}9999$
Como la solución x = -1,9999 es superior a -2, la solución es válida. Por consiguiente la ecuación planteada tiene solución.

REFLEXIÓN: En todos los ejemplos propuestos, la resolución se centra en despejar la incógnita, lo cual se hace utilizando los principios, leyes y axiomas matemáticos.

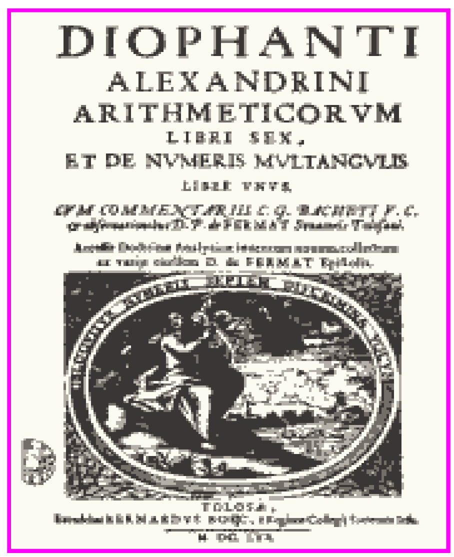
Lección Tres: Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnitas: $\boxed{\beta x + \varphi y = \varsigma}$

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son una herramienta muy importante para resolver situaciones que se presentan en todas las áreas del saber. Este tipo de ecuaciones es de dos clases: El primero es donde se tiene una ecuación con dos incógnitas; donde se hará una breve descripción. El segundo es cuando se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, lo cual se estudiará en detalle.

PRIMER CASO: **Una Ecuación Con Dos Incógnitas**:

ECUACIONES DIOFÁNTICAS: Diofanto de Alejandría, del siglo III de nuestra era, desarrolló ciertas ecuaciones que trabajan sobre el *conjunto de los enteros* y son de primer grado con dos incógnitas. En honor a su nombre se les conoce como Ecuaciones Diofánticas.

La forma general de estas ecuaciones es $ax + by = c$, donde a, b, c son constantes y pertenecen al conjunto de los enteros; además, a ≠ 0 ó b ≠ 0. Cuando *a, b* y *c* son enteros positivos, la ecuación tiene solución entera si y, solo si, el máximo común divisor de a y b, divide a c. Este tipo de ecuaciones puede tener soluciones infinitas o no puede tener solución. Entonces la solución consiste en hallar ecuaciones generadoras (paramétrica) del par (x, y) que satisfagan la ecuación propuesta. Este tipo de ecuaciones no son el objetivo principal de este curso, solo se deseaba hacer una breve descripción.



FUENTE: http://suanzes.iespana.es/diofanto.htm

Ejemplo 14:

Para la ecuación 2x + 3y = 8 ¿cuál será el par (x, y) que satisfaga dicha ecuación?

Solución:

Por simple inspección se puede ver que $x = 1$ y $y = 2$, satisfacen la igualdad.
2(1) + 3(2) = 8.
Entonces la solución (x, y) = (1, 2)

Pero se puede encontrar más soluciones, por ejemplo (4, 0), (-2, 4), (-5, 6),… como se dijo al principio, pueden existir infinitas soluciones.

SEGUNDO CASO: **Dos Ecuación Con Dos Incógnitas**.

El interés central de este apartado es el análisis de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 x_1 & + & b_1 y_1 & = & c_1 \\ a_2 x_2 & + & b_2 y_2 & = & c_2 \end{array}$$

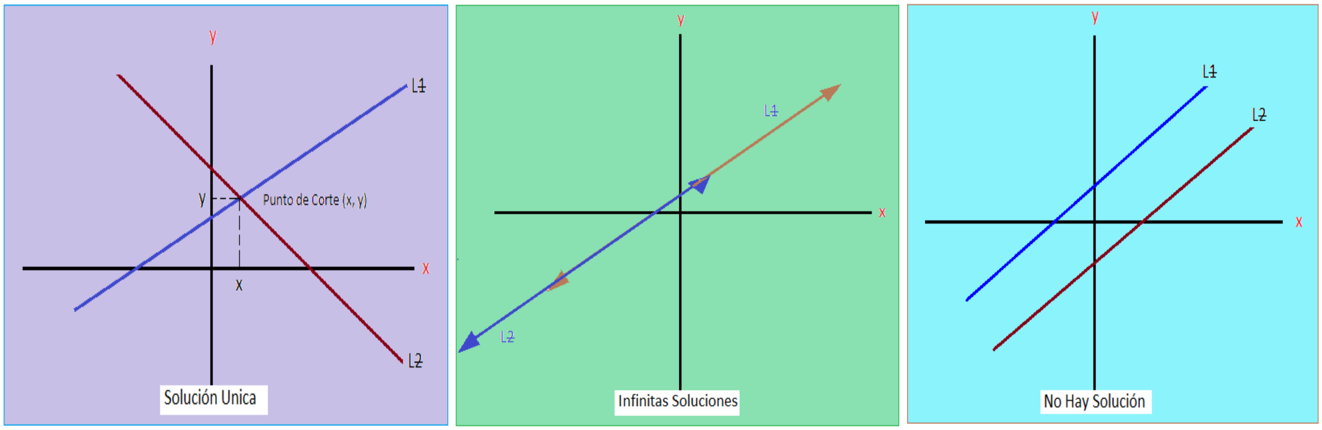
Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 son constantes; además $a_1 \neq 0$ ó $b_1 \neq 0$ Al igual que $a_2 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$, se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x* e *y*, debe satisfacer simultáneamente las dos ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es hallar un par (x, y) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Sistema Consistente: Un sistema de ecuaciones es consistente, cuando tiene al menos una solución para cada incógnita.
Sistema Inconsistente: ocurre cuando el sistema NO tiene solución alguna.
Es obvio que el trabajo es analizar sistemas consistentes.

Existen diversos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso vamos a analizar tres.

1. METODO GRAFICO.

El método se basa en que en el plano de coordenadas rectangulares, una ecuación de la forma $ax + by = c$, está representada por una recta cuyos puntos son parejas ordenadas de números reales, donde la primera componente corresponde a *x* y la segunda componente a *y*. Como se tiene dos ecuaciones, entonces se deben tener graficadas dos rectas. De esta manera se pueden tener tres situaciones: *Primero*, que las rectas se corten en un punto, lo que indica que la solución es única y será el punto de corte. *Segundo*, que las dos rectas coincidan, luego hay infinitas soluciones. *Tercero*, que las rectas sean paralelas, lo que indica es que NO hay solución.



L_1 y L_2, corresponden a las ecuaciones uno y dos del sistema.

El método es adecuado cuando hay soluciones enteras, ya que los puntos de corte son bien definidos. El procedimiento básico consisten en despejar *y* en las dos ecuaciones y, darle valores arbitrarios a *x* para obtener parejas (x, y), por lo general se asignas números enteros cercanos a cero; para facilitar el proceso y hacer la gráfica. Así se obtienen dos parejas de números, que corresponde a dos puntos en el plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con lo cual se puede graficar una recta (Axioma Euclidiano)

Ejemplo 15:

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x &- 2y = 5 \\ 5x &- y = 6 \end{aligned}$$

Solución:

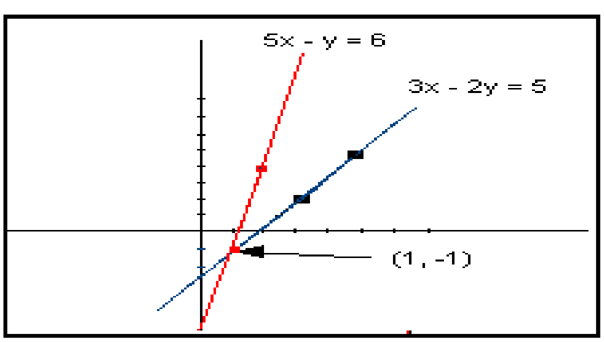
Según el procedimiento.

Para la primera ecuación: $3x - 2y = 5 \Rightarrow y = \dfrac{5-3x}{-2}$

Tomemos dos valores, por ejemplo x = 3, entonces: y = [5 – 3(3)]/-2 = 2. El punto es (3, 2)
Otro valor x = 5, entonces: y = [5 – 3(5)]/-2 = 5. El punto es (5, 5)
Los puntos para graficar la primera recta son: (3, 2) y (5, 5).

Para la segunda ecuación. $5x - y = 6 \Rightarrow y = 5x - 6$

Los valores: x = 1, entonces: y = 5(1) – 6 = -1. El punto es (1, -1) El otro valor x = 2, entonces y = 5(2) – 6 = 4, el punto es (2, 4)
Los puntos para graficar la segunda recta son: (1, -1) y (2, 4)



Graficando:

Según la gráfica, el punto de corte es (1, -1)

Luego la solución son: x = 1, y = -1.

Ejemplo 16:

Dado el sistema de ecuaciones, hallar la solución correspondiente.

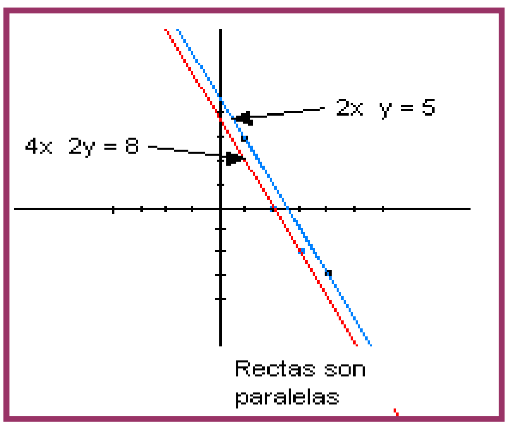
$$\begin{aligned} 2x &+ \ y &= 5 \\ 4x &+ 2y &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

Como en el caso anterior, se despeja y, dando valores arbitrarios a *x*.

Se toma la primera ecuación: $2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$
Para x = 1, entonces y = 5 – 2(1) = 3, el punto es (1, 3)
Para x = 4, entonces y = 5 – 2(4) = -3 el punto es (4, -3)
En seguida la segunda ecuación: $4x + 2y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8-4x}{2}$
Para x = 2, entonces y = [8 – 4(2)]/2 = 0, el punto es (2, 0)
Para x = 3, entonces y = [8 – 4(3)]/2 = -2, el punto es (3, -2)

Graficamos:



Como las rectas son paralelas, no hay puntos de corte, por consiguiente el sistema NO tiene solución.

NOTA: En los ejemplos estudiados, los valores dados a *x* han sido escogidos arbitrariamente, siempre y cuando no se presenten inconsistencias, luego al reemplazarlos en la ecuación se obtiene el valor de *y*.

2. METODO POR ELIMINACIÓN.

Es un método algebraico, cuyo principio es eliminar una incógnita, para obtener el valor de la otra, posteriormente con el valor obtenido, se busca el valor de la primera.

Este método se puede desarrollar por tres técnicas, a continuación analizamos cada una.

~~***REDUCCIÓN***~~: Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en igualar coeficientes de una de las dos incógnitas y que presenten signos contrarios, así se puede eliminar dicha incógnita, obteniendo una ecuación con una incógnita, cuya resolución ya hemos estudiado.

Con el valor de la incógnita obtenida, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones, para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 17:

Resolver el sistema.

$$\begin{array}{ccccc} y & - & x & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Solución:

Primer organizamos las incógnitas, para que queden las *y* en una columna y las *x* en la otra, para poder igualar coeficientes y eliminar la incógnita seleccionada para este fin.

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Como ya están organizadas, se debe igualar coeficientes con signos contrarios, pero se observa que la incógnita *x* tiene coeficientes iguales y signos contrarios, luego se puede eliminar, entonces:

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \\ \hline / & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Despejamos y, entonces: y = 4/2 = 2. Como ya se conoce el valor de *y*, se toma *cualquiera* de las dos ecuaciones originales y se reemplaza dicho valor, para obtener el valor de x, entones tomemos la primera ecuación y reemplacemos el valor de y.

$$-x+y=0 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2$$

La solución es: (x, y) = (2, 2)

Si reemplazamos dichos valores en las dos ecuaciones originales, las igualdades se deben cumplir simultáneamente.

Ejemplo 18:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 4 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Solución.

Para seleccionar la incógnita a eliminar, se puede tomar como criterio la que tenga signo contrario, pero no es una camisa de fuerza. Para este ejemplo se puede escoger cualquiera de las dos, escojamos *x,* entonces debemos igualar coeficientes en *x* y con signo contrario, para esto lo que se hace es multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 1, luego:

$$\begin{array}{ccccc} -3x & - & (-3)y & = & 4(-3) \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{array}{ccccc} -3x & + & 3y & = & -12 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Ahora:
$$\begin{array}{rcrcr} -3x & + & 3y & = & -12 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \\ \hline / & + & y & = & -17 \end{array}$$

La solución para *y* es -17. Para obtener la solución en *x*, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones originales, por ejemplo tomemos la segunda.

$$3x-2y=-5 \Rightarrow 3x-2(-17)=-5 \Rightarrow 3x+34=-5 \Rightarrow x=\frac{-5-34}{3}=-13$$

La solución es: (x, y) = (-13, -17)

Ejemplo 19:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 9y & = & 8 \\ 2x & - & 6y & = & -3 \end{array}$$

Solución:

Como se observa en el sistema, se puede eliminar *y*, ya que tiene signo contrario, solo faltaría igualar los coeficientes, lo que se consigue multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3.

$$\begin{array}{rcrcr} (4x & + & 9y & = & 8)2 \\ (2x & - & 6y & = & -3)3 \end{array}$$ Lo que equivale a: $$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 18y & = & 16 \\ 6x & - & 18y & = & -9 \end{array}$$ Operando:

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 18y & = & 16 \\ 6x & - & 18y & = & -9 \\ \hline 14x & + & / & = & 7 \end{array}$$ Despejando la incógnita tenemos: x =7/14 = ½

En seguida debemos hallar el valor de la otra incógnita, reemplazando *x* en una de las ecuaciones originales, se toma la segunda:

$$2x-6y=-3 \Rightarrow 2(1/2)-6y=-3 \Rightarrow 1-6y=-3 \Rightarrow y=\frac{-3-1}{-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Así, la solución es: (x, y) = (1/2, 2/3)

Recordemos que la verificación ó comprobación de la solución, se hace sustituyendo en las ecuaciones originales los valores obtenidos, para comprobar que la igualdad en verdadera.

$$\begin{array}{rcrcr} 4(1/2) & + & 9(2/3) & = & 8 \\ 2(1/2) & - & 6(2/3) & = & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 2 & + & 6 & = & 8 \\ 1 & - & 4 & = & -3 \end{array}$$

Se observa que las igualdades son verdaderas, luego la solución es correcta.

~~***IGUALACIÓN:***~~ Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en despejar en las dos ecuaciones la misma incógnita, quedando el sistema en términos de la otra, seguido se igualan las expresiones obtenidas. De lo anterior, se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita, que por medio de procesos matemáticos; ya analizados, se busca el valor de la incógnita presente, el cual; como en el caso de la reducción, se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 20:

Resolver el sistema dado a continuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

Se puede despajar la incógnita que se desee, para este caso vamos a despejar *x* en las dos ecuaciones.
Para la primera: $x_1 = 8 - y$
Para la segunda: $x_2 = 4 + y$

Ahora, igualamos las dos expresiones, ya que $x_1 = x_2$
¿Por qué? Analícelo con sus compañeros.

Entonces: 8 – y = 4 + y, como ya sabemos trabajar este tipo de ecuaciones, el proceso para despajar *y* será entendido.
2y = 4, luego y = 4/2 = 2.

Ahora reemplazamos el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones originales, bueno esta expresión se ha repetido varias veces, la idea es que usted estimado estudiante la asimile para que a medida que sigamos en el estudio de este tipo de ecuaciones, llegará el momento de NO repetir, pero si saber que se está haciendo.

Tomemos la primera ecuación:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$$

La solución será: (x, y) = (6, 2)

Por favor realicen la verificación de dicha solución, es un trabajo motivante.

Ejemplo 21:

Hallar el valor de las incógnitas, para el sistema dado a continuación.

$$\begin{aligned} 12x - 5y &= 37 \\ 9x - 8y &= \tfrac{57}{2} \end{aligned}$$

Solución:

Despajamos x.

Para la primera: $12x - 5y = 37 \Rightarrow 12x = 37 + 5y \Rightarrow x = \dfrac{37 + 5y}{12}$

Para la segunda: $9x - 8y = {}^{57}\!/_{2} \Rightarrow 9x = {}^{57}\!/_{2} + 8y = \dfrac{57 + 16y}{2} \Rightarrow x = \dfrac{57 + 16y}{18}$

Se igualan las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{37 + 5y}{12} = \frac{57 + 16y}{18} \Rightarrow 18(37 + 5y) = 12(57 + 16y)$$

Operando y simplificando: 666 + 90y = 684 + 192y.
Tenemos una ecuación con una incógnita. 90y – 192y = 684 – 666
Operando: -102y = 18, luego y = -18/102 = - 3 / 17

Ahora sustituimos y = - 3 / 17, tomemos la primera ecuación.

$$12x - 5y = 37 \Rightarrow 12x - 5(-3/17) = 37 \Rightarrow 12x = 37 - 15/17 \Rightarrow 12x = 614/17$$

Despejamos la incógnita: x = 614 / 204 = 307 / 102
La solución: (x, y) = (307 / 102, - 3 / 17)

SUSTITUCIÓN: Para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Dicho de otra manera, si despejamos la incógnita *x* en la primera ecuación, se debe sustituir en la segunda ecuación ó viceversa, igual si fuera la otra incógnita.

Como siempre los ejemplos modelos, permiten ilustrar claramente el método de resolución. Veamos.

Ejemplo 22:

Resolver el sistema dado en seguida:. $\begin{matrix} x & - & y & = & -4 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{matrix}$

Solución:

Según la teoría del método, debemos despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones, para este caso se elige la incógnita *y* en la primera ecuación.

$$x - y = -4 \Rightarrow -y = -4 - x \Rightarrow y = x + 4$$

Ahora reemplazamos *y* en la segunda ecuación.

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3x - 2(x + 4) = -5.$$

Aquí tenemos una ecuación con una incógnita, lo cual a estas alturas ya sabemos resolver.

$$3x - 2(x + 4) = -5 \Rightarrow 3x - 2x - 8 = -5 \Rightarrow x = 3$$

Ahora se reemplaza el valor de *x* en la segunda ecuación:

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3(3) - 2y = -5 \Rightarrow -2y = -5 - 9 \Rightarrow y = \frac{-14}{-2} = 7$$

La solución: (x, y) = (3, 7)

Ejemplo 23:

Resolver el sistema. $\begin{array}{ccccc} \frac{3x}{5} & + & \frac{5y}{3} & = & 2 \\ \frac{6x}{5} & - & \frac{5y}{3} & = & 1 \end{array}$

Solución:

Para resolver este sistema, es aconsejable primero convertir las ecuaciones a expresión enteras. Veamos:

$$\frac{3x}{5}+\frac{5y}{3}=2 \Rightarrow \frac{9x+25y}{15}=2 \Rightarrow 9x+25y=30$$

$$\frac{6x}{5}-\frac{5y}{3}=1 \Rightarrow \frac{18x-25y}{15}=1 \Rightarrow 18x-25y=15$$

Entonces, según el método, despajamos *x* en la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda, recordemos que también se puede hacer lo contrario.

$$9x+25y=30 \Rightarrow 9x=30-25y \Rightarrow x=\frac{30-25y}{9}$$

Ahora: $18x-25y=15 \Rightarrow 18\left[\frac{30-25y}{9}\right]-25y=15 \Rightarrow 60-50y-25y=15 \Rightarrow -75y=15-60$

Despajando: y = - 45 / - 75 = 3 / 5

En seguida se toma la primera ecuación para reemplazar *y*, así obtener el valor de la otra incógnita; *x*.

$$9x+25y=30 \Rightarrow 9x+25(3/5)=30 \Rightarrow 9x+15=30 \Rightarrow 9x=30-15$$

Despejando. x = 15 / 9 = 5 / 3

Solución: (x, y) = (5/3, 3/5)

Ejemplo 24:

Hallar la solución del sistema dado. $\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 4x & + & 2y & = & 3 \end{array}$

Solución:

Siguiendo la metodología para este método, tenemos:

$$2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x$$

Reemplazando:

$$4x+2y=3 \Rightarrow 4x+2(1-2x)=3 \Rightarrow 4x+2-4x=3 \Rightarrow 2=3$$

La última igualdad no es verdadera, luego NO hay solución, por consiguiente el sistema no tiene solución, es un sistema inconsistente.

3. METODO POR DETERMINANTES

Para aplicar este método, primero analicemos algunos términos propios de los determinantes.

-) *Determinante*: Un determinante es un arreglo rectangular de filas y columnas, donde los elementos de éste valores que se obtienen del sistema de ecuaciones.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Las filas son: (a_1 b_1) y (a_2 b_2)
Las columnas: (a_1 a_2) y (b_1 b_2)

El tamaño del determinante lo da el número de filas y de columnas. Así pueden haber determinantes de 2x2, 3x3, 4x4, etc.

Resolver un determinante es hallar el valor del mismo, para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se requiere trabajar con determinantes de 2x2.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

Donde **D** es el valor del determinante.

-) *Ecuaciones por Determinante:*

Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, **KRAMER** propuso una técnica que podemos resumir así:

Sea el sistema:

$$\begin{matrix} a_1x_1 & + & b_1y_1 & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y_2 & = & c_2 \end{matrix}$$

Se despeja cada incógnita de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador, se le llama *determinante de coeficientes*, que es común para todas las incógnitas.

La solución será el cociente de los dos determinantes, para cada incógnita.

Solución: $x = \dfrac{c_1 * b_2 - c_2 * b_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$ $y = \dfrac{a_1 * c_2 - a_2 * c_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$

Ejemplo 24:

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 5x - y &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Se organizan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5\,x\,(-1) - 6\,x\,(-2)}{3\,x\,(-1) - 5\,x\,(-2)} = \frac{-5 + 12}{-3 + 10} = \frac{7}{7}$$

Solución para la primera incógnita x = 1.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3\,x\,6 - 5\,x\,5}{3\,x\,(-1) - 5\,x\,(-2)} = \frac{18 - 25}{-3 + 10} = \frac{-7}{7}$$

Solución para la segunda incógnita y = -1

Solución del sistema: (x, y) = (1, -1)

Ejemplo 25:

Resolver el sistema siguiente.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6 \\ -2x + 5y &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

Como ya se conoce le procedimiento general, procedamos así.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6\,x\,5 - 4\,x\,(-3)}{4\,x\,5 - (-2)\,x\,(-3)} = \frac{30 + 12}{20 - 6} = \frac{42}{14}$$

Así x = 3

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4 \; x \; 4 - (-2) \; x \; 6}{4 \; x \; 5 - (-2) \; x \; (-3)} = \frac{16 + 12}{20 - 6} = \frac{28}{14}$$

Solución para y = 2

Solución del sistema: (x, y) = (3, 2)

Ejemplo 26:

Hallar el valor de *x* e *y* en el sistema

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 8 \\ 7x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8 \; x \; 4 - 6 \; x \; 4}{7 \; x \; 4 - 7 \; x \; 4} = \frac{32 - 24}{28 - 28} = \frac{8}{0}$$

El valor de x es indeterminado, ya que la fracción tiene como denominador cero.

Así, el sistema NO tiene solución, es inconsistente.

Lección Cuatro: Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnitas $\boxed{\beta x + \varphi y + \partial z = \varsigma}$

Con los conocimientos adquiridos en el apartado anterior, será más sencillo abordar el que sigue, ya que los principios son similares, solo que para este caso se trata de tres ecuaciones y tres incógnitas. Para los sistemas de éste tipo, se van a analizar dos métodos.

PRIMER MÉTODO: **SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN.**

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Donde a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 son constantes.

Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x, y*, *z* debe satisfacer simultáneamente las tres ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es hallar valores específicos para (x, y, z) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las tres ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Un esquema sencillo que nos ayuda a comprender el método.

Primero:

Tres ecuaciones con tres incógnitas → Reduce a Dos ecuaciones con dos incógnitas → Reduce a Una ecuación con una incógnita

Segundo:

Con la primera solución → Se reemplaza en una de las ecuaciones de dos incógnitas, obteniendo la segunda solución → Con las dos soluciones, se reemplaza en una de las ecuaciones con tres incógnitas, para obtener la tercera solución.

La mejor forma de comprender el método es con ejemplos modelos.

Ejemplo 27:

Resolver el sistema dado, por Eliminación.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Solución:

Primero enumeremos las ecuaciones para hacer más fácil su identificación.

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & - & z & = & 0 & (2) \\ x & - & y & + & z & = & 2 & (3) \end{array}$$

Según el esquema, a partir de las tres ecuaciones, obtener dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que se hace de la siguiente manera.

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y eliminemos la incógnita *z*, pero puede ser una de las otras incógnitas. .

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & - & z & = & 0 & (2) \\ \hline 2x & + & 2y & & / & = & 4 & (4) \end{array}$$

Observemos que se obtiene una nueva ecuación (4) que es de dos incógnitas.

Ahora se toman las ecuaciones (1) y (3), [pero puede ser también (2) y (3)] y eliminamos la misma incógnita que se eliminó anteriormente; es decir, *z,* para lo cual se multiplica la ecuación (39 por -1.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & - & y & + & z & = & 2 & (3) \end{array}$$ Entonces: $$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ -x & + & y & - & z & = & -2 & (3) \\ \hline / & + & 2y & & / & = & 2 & (5) \end{array}$$

Las ecuaciones (4) y (5) tendrán a lo más dos incógnitas. En este caso la ecuación (5) solo tiene una incógnita, luego despejamos *y* se puede obtener su valor.
2y =2, entonces: **y = 1**. Primera solución.

Para la segunda solución, reemplazamos *y* en la ecuación (4), ya que esta solo tiene dos incógnitas y se conoce el valor de una de ellas. Entonces:

$$2x+2y=4 \Rightarrow 2x+2(1)=4 \Rightarrow 2x=4-2=2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

La segunda solución es **x = 1**.

Para la última solución; es decir, la incógnita *z,* se reemplaza en cualquiera de la ecuaciones originales el valor de *x* e *y*, así queda resuelto el sistema.

Tomemos la ecuación (1), (pero puede ser una de las otras, no lo olvidemos)

$$x+y+z=4 \Rightarrow (1)+(1)+z=4 \Rightarrow 2+z=4 \Rightarrow z=4-2=2$$

La tercera solución **z = 2**.

La solución total: (x, y, z) = (1, 1, 2)

Ejemplo 28:

Resolver por eliminación el sistema dado a continuación.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 12 \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 \end{array}$$

Solución:

Recordemos que para facilitar el proceso debemos enumerarlas.

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 12 & (1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \end{array}$$

Tomemos (1) y (2) y eliminemos la incógnita *y*, ya que tiene signos contrarios y esto facilita su eliminación, pero no olvidemos que se puede eliminar cualquiera de las otras incógnitas.

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 12 & (1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ \hline 3x & & / & + & 2z & = & 19 & (4) \end{array}$$

Ahora se toma (2) y (3), pero como se ha venido comentando, puede ser (1) y (3). Se debe eliminar la misma incógnita; es decir, *y*. Entonces como tienen signos contrarios solo se debe igualar coeficientes, lo que se hace multiplicando la ecuación (2) por 2 y la ecuación (3) se deja igual.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & - & 2y & + & 2z & = & 14 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \\ \hline 5x & & / & + & z & = & 20 & (5) \end{array}$$

Como se puede ver, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas (4) y (5). La solución se puede hacer por cualquiera de los métodos estudiados. Usemos igualación:

Para la ecuación (4): 3x + 2z = 19, despejamos z, luego: $z = \frac{19 - 3x}{2}$

Para la ecuación (5): 5x + z = 20, también despajamos z, luego: $z = 20 - 5x$

Ahora se igualan las expresiones y operamos: $\frac{19 - 3x}{2} = 20 - 5x \Rightarrow 19 - 3x = 40 - 10x$

Como se tiene una ecuación con una incógnita, se resuelve como se ha aprendido.

10x – 3x = 40 – 19 entonces: 7x = 21, así **x = 3**

Ahora reemplazamos el valor de *x* en una de las ecuaciones (4) ó (5), así se puede obtener el valor de la otra incógnita. Tomemos la ecuación (5).
5x + z = 20, entonces: 5(3) + z = 20, luego: z = 20 – 15 = 5. Por consiguiente **z = 5**

Finalmente, reemplazamos el valor se *x* y *z* en cualquiera de las ecuaciones originales. Tomemos la ecuación (3), pero ustedes pueden tomar cualquiera de las otras ecuaciones.
x + 2y – z = 6, reemplazando tenemos: (3) + 2y – (5) = 6, luego: 2y - 2 = 6, despejamos la incógnita: $y = \frac{6 + 2}{2} = 4$ Luego **y = 4**
Solución: (x, y, z) = (3, 4, 5)

SEGUNDO METODO: SOLUCIÓN POR DETERMINANTES.

Cuando se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se presentan determinantes de 3x3, conocidos como determinantes de tercer orden. Esto nos induce a analizar dichos determinantes, antes de su respectiva aplicación.

Determinantes de tercer orden: Son arreglos de 3 filas y 3 columnas.

$$\boxed{A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Para resolver un determinante de tercer orden hay tres formas diferentes, veamos:

1. ***Productos Cruzados***: Se puede ver esquemáticamente el procedimiento.

Sea el determinante: $A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Solución: $A=[a]-[b]$

Donde:

$$a=(x_1y_2z_3)+(y_1z_2x_3)+(x_2y_3z_1)$$
$$b=(x_3y_2z_1)+(x_2y_1z_3)+(y_3z_2x_1)$$

2. ***Método de Sarrus***: Consiste en aumentar las dos primeras filas a continuación del determinante original y hacer productos cruzados. Para el determinante A definido anteriormente, el nuevo determinante, propuesto por sarrus es:

$$A'=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Solución del determinante: $A'=[\alpha]-[\beta]$

$$\alpha=(x_1y_2z_3)+(x_2y_3z_1)+(x_3y_1z_2)$$
$$\beta=(x_3y_2z_1)+(x_1y_3z_2)+(x_2y_1z_3)$$

Este método sólo es adecuado para determinantes de 3x3.

3. ***Método de Cofactor*****:** La esencia del método es convertir un determinante de 3x3 en tres determinantes de 2x2. La siguiente ilustración explica el procedimiento.

$$\boxed{A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$

La última parte se resuelve como determinante de 2x2:

$$A=x_1(y_2z_3-y_3z_2)-y_1(x_2z_3-x_3z_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)$$

El método de cofactor tiene la ventaja que se puede utilizar para determinantes de mayor tamaño.

Ejemplo 29:

Resolver por productos cruzados y por Sarrus el siguiente determinante.

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

a-) *Por productos cruzados.*

D = [a] – [b]

[a] = [(-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (3)(4)(2)] = 6 – 6 + 24 = 24

[b] = [(2)(-1)(1) + (3)(3)(3) + (-2)(4)(-2)] = -2 + 27 +16 = 41

D = 24 – 41 = -17

b-) *Por Sarrus.*

$$D' = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (2)(3)(4) = 6 - 6 + 24 = 24$$
$$[\beta] = (2)(-1)(1) + (-2)(-2)(4) + (3)(3)(3) = -2 + 16 + 27 = 41$$

D' = 24 – 41 = -17

Ejemplo 30:

Desarrollar el siguiente determinante por Sarrus y por cofactor.

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

a-) *Por Sarrus.*

$$P' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow P' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-4)(2)(2) + (1)(4)(0) + (-2)(3)(3) = -16 + 0 - 18 = -34$$
$$[\beta] = (-2)(2)(0) + (-4)(4)(3) + (1)(3)(2) = 0 - 48 + 6 = -42$$

P = -34 – (-42) = -34 + 42 = 8

b-) *Por Cofactor:*

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4)[2x2-(4)x3]-3[1x2-(-2)x3]+0$$

P = (-4)(4 - 12) - 3(2 + 6) + 0 = 32 – 24 = 8

Solución de Ecuaciones por Determinantes: Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes, ***KRAMER***, propuso una metodología que ilustramos a continuación.

Sea el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}}$$

Primero se calcula el determinante de coeficientes.

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Aclarando que $\Delta \neq 0$

En seguida se calculan los determinantes para cada incógnita.

$$\boxed{\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \boxed{\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \boxed{\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

Finalmente la solución para cada incógnita.

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta}} \quad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta}} \quad \boxed{z = \frac{\Delta z}{\Delta}}$$

Los determinantes se pueden resolver por cualquiera de los métodos explicados.

Ejemplo 31:

Resolver el siguiente sistema por determinantes.

$$x + y + z = 5$$
$$3x + 2y + z = 8$$
$$2x + 3y + 3z = 14$$

Solución:

Usando la técnica de Kramer: primero calculamos el determinante de coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Lo resolvemos por cofactor.

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2x3 - 3x1) - 1(3x3 - 2x1) + 1(3x3 - 2x2) = 3 - 7 + 5 = 1$$

Ahora los determinantes de las incógnitas. *Δx* Se resuelve por productos cruzados, *Δy* por sarrus y *Δz* por cofactor.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (30 + 24 + 14) - (28 + 24 + 15) = 68 - 67 = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (1x8x3 + 3x14x1 + 2x5x1) - (2x8x1 + 1x14x1 + 3x5x3) = 76 - 75 = 1$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2x14 - 3x8) - 1(3x14 - 2x8) + 5(3x3 - 2x2) = 4 - 26 + 25 = 3$$

Finalmente hallamos el valor de cada incógnita.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

Solución: (x, y, z) = (1, 1, 3)

Ejemplo 32:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x - y + 2z = 0$$
$$3x + 2y = 0$$
$$-2x + 2y - 4z = 0$$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-8+12+0)-(-8+12+0) = 0$$

Como el determinante de coeficientes es cero, el sistema no se puede resolver, recordemos que este determinante no puede ser cero. La única que puede ser cierta es: x = y = z = 0, ya que éste tipo de sistema se le conoce como sistema homogéneo.

Lección Cinco: Ecuaciones de Primer Grado: problemas de Aplicación

Con el estudio de las ecuaciones de primer grado, ahora estamos en capacidad de resolver problemas diversos, utilizando ecuaciones de este tipo. Lo nuevo aquí es que a partir del contexto y descripción del fenómeno, se debe *Plantear una Ecuación o Ecuaciones* para resolver la situación.

Es importante tener en cuenta para resolver problemas con ecuaciones, los siguientes aspectos, los cuales permitirán obtener resultados claros y verdaderos.

1. *Se debe leer muy bien el problema hasta que quede completamente entendido. Si es necesario, leerlo las veces que sean requieran.*
2. *Identificar las incógnitas y expresarlas por medio de un símbolo.*
3. *Llevar el problema a un modelo matemático, es decir, plantear las ecuaciones.*
4. *Si es necesario utilizar gráficos, tablas y otros, como ayuda para la ilustración del problema.*
5. *Realizar las operaciones necesarias para obtener el valor de las incógnitas.*
6. *Identificar la respuesta y hacer la respectiva verificación.*
7. *Establecer las conclusiones del caso.*

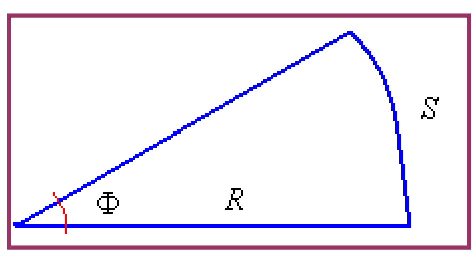
Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita

Para resolver problema de este tipo, lo más pertinente es plantear ejemplos modelos y hacer su respectiva explicación.

Ejemplo 33:

Escribir la modelación matemática de la siguiente situación*: La longitud de un arco circular, es el producto del ángulo barrido y el radio del círculo.*

Solución:

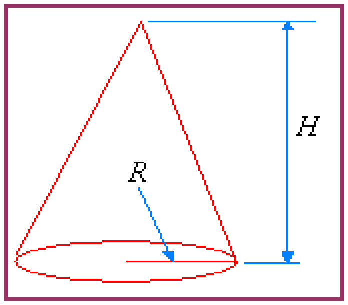


Se dan símbolos a los términos.
Longitud del arco: S
Angulo barrido: Φ
Radio del círculo: R
Según el problema, el modelo sería: **S = R x Φ**

Ejemplo 34:

Escribir matemáticamente la siguiente situación: *El volumen de un cono circular recto es un tercio del producto de una constante, el radio al cuadrado y la altura*.

Solución:



Los símbolos.
V = volumen
Π = constante
R = radio
H = altura

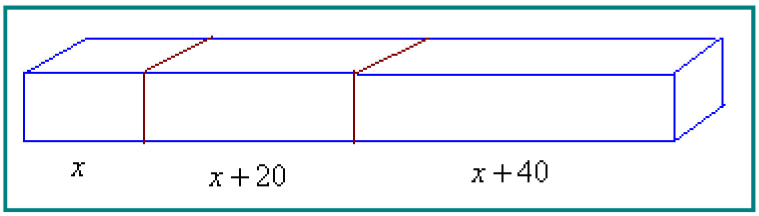
Según el contexto $V = \frac{1}{3}\Pi R^2 H$

Ejemplo 35:

Un carpintero debe cortar una tabla de 6 m. de largo en tres tramos, si cada tramo debe tener 20 cm. más que el anterior, ¿Cuál será la longitud de cada tramo?

Solución:

Sea *x* la longitud del tramo más corto, entonces el segundo tramo será x + 20 y el tercero será x + 40.



El modelamiento matemático es:
(x) + (x + 20) + (x + 40) = 600 Operando:
3x + 60 = 600 Entonces: 3x = 600 – 60 = 540
Despejando la incógnita: x = 540/3 = 180

Así:
El tramo más corto x = 180 cm.
El segundo tramo: x + 20 = 180 + 20 = 200 cm.
El tercer tramo: x + 40 = 180 + 40 = 220 cm.

Ejemplo 36:

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo mide 180^0. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es él otro aumentado en 10^0. ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos de dicho triángulo?

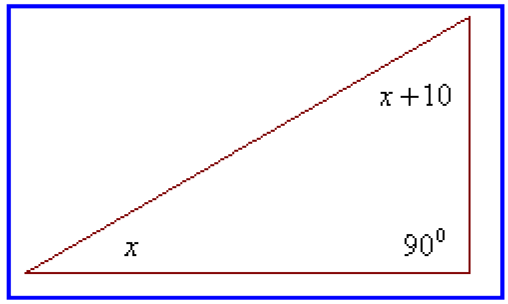
Solución:

Si *x* es el ángulo más pequeño, el otro ángulo será *x* + 10. Recordemos que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, luego:

$(x) + (x + 10) + 90 = 180$
$2x + 100 = 180$
$2x = 180 – 100 = 80$
$x = 40$

Ahora: $x + 10 = (40) + 10 = 50$

Los ángulos son: 40^0, 50^0, 90^0.



Ejemplo 37:

En una molécula de azúcar se encuentra el doble de átomos de hidrógeno que de oxigeno, también tiene un átomo más de carbono que de oxígeno. Si la molécula de azúcar tiene 45 átomos. ¿Cuántos átomos de cada elemento tienen dicha sustancia?

Solución:

x = Átomos de oxigeno
$y = 2x$. Átomos de hidrógeno según el contexto del problema.
$z = x + 1$. Átomos de carbono según el contexto del problema.
Como todo suma 45, entonces el modelo matemático será: $x + y + z = 45$. Expresando el modelo en términos de una sola incógnita: $(x) + (2x) + (x + 1) = 45$
Operando: $4x +1 = 45$; $4x = 44$; entonces: $x = 11$ átomos de oxigeno.
Átomos de hidrogeno: $2x = 11x2 = 22$
Átomos de carbono: $x + 1 = 11 + 1 = 12$
Solución: La molécula de azúcar tiene 11 átomos de oxigeno, 22 átomos de hidrógeno y 12 átomos de carbono. $C_{12}H_{22}0_{11}$

Ejemplo 38:

Un Ingeniero desea desarrollar un equipo hidráulico compuesto por dos cilindros. El primer cilindro está a 120 cm. del punto de apoyo y ejerce una fuerza de 500 Kg.-f, el sistema debe soportar una fuerza de 1.200 Kg.-f ubicada a 90 cm. del punto de apoyo y al lado opuesto de los cilindros. Si el segundo cilindro ejerce una fuerza de 700 Kg-f, ¿En donde se debe colocar dicho cilindro para que el sistema quede en equilibrio?

Solución:

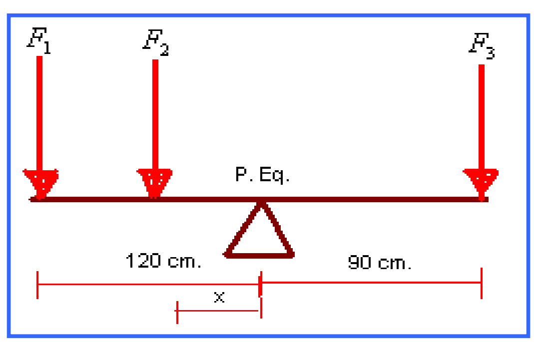
Para que el sistema este en equilibrio, la suma de las fuerzas debe ser cero.
F_1 = Fuerza uno, ubicada a x_1 distancia del punto de equilibrio.
F_2 = Fuerza dos, ubicada a x_2 distancia del punto de equilibrio.
F_3 = Fuerza tres, ubicada a 90 cm. del punto de equilibrio.

Según las condiciones del problema:

$F_1X_1 + F_2X_2 = F_3X_3$

Reemplazando:
$500*120 + 700* X = 1.200*90$

Resolviendo:
$60.000 + 700X = 108.000$



700 X = 48.000, entonces: X = 68,57 cm.

Solución: El cilindro dos se debe colocar a 68,57 cm. del punto de equilibrio

Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnita

En el desarrollo de ecuaciones de primer grado con una incógnita, se han adquirido destrezas en el planteamiento y resolución de problemas. Sin olvidar los cinco pasos que se recomiendan para este tipo de situaciones, entramos en el análisis y resolución de problemas donde se involucran dos ecuaciones con dos incógnitas.

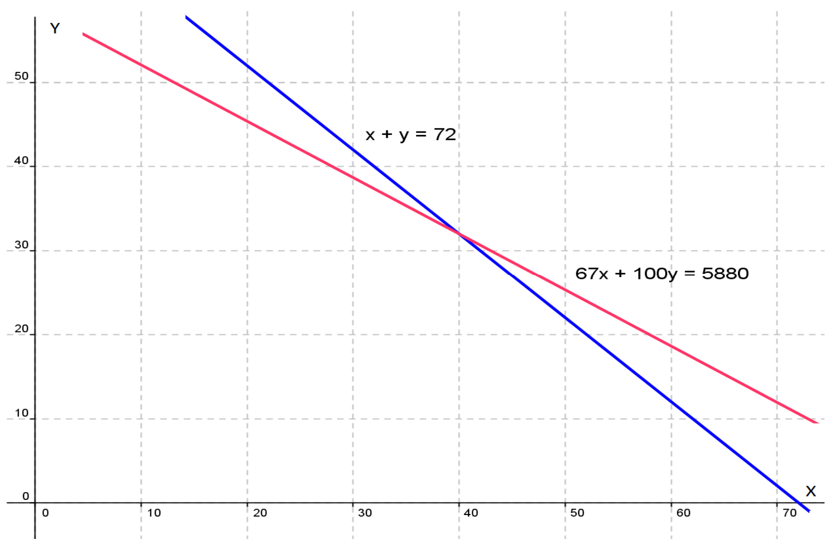
Ejemplo 39:

Una industria tiene dos clases de equipos para comunicación, la clase A cuesta \$67.000 y la clase B cuesta \$100.000, si fueron vendidos 72 equipos con un costo total de \$5'880.000, ¿Cuántos equipos de cada clase fueron vendidos?

Solución:

Como se tiene dos incógnitas: Costo y cantidad, se debe plantear dos ecuaciones.
x = Equipos de clase A
y = Equipos de clase B
Ecuación para cantidad: x + y = 72
Ecuación para costo: 67.000 x + 100.000 y = 5'880.000
Como se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, se puede utilizar para su solución: Grafico, eliminación o determinantes.

Solución grafica:



El punto de corte esta en *x* = 40 y en *y* por encima de 30, aproximadamente 32

Solución analítica:

El sistema planteado a partir de la situación planteada es:
x + y = 72
67.000 x + 100.000 y = 5’880.000

Para este caso utilicemos la eliminación por reducción. Se elimina la incógnita *x*. Luego la primera ecuación se multiplica por -67.000 y la segunda queda igual.

-67.000 x – 67.000 y = - 4’824.000
67.000 x + 100.000 y = 5’880.000

33.000 y = 1’056.000

Despejando y = 32

Reemplacemos *y* en la primera ecuación:
x + *y* = 72; x + (32) = 72, entonces: x = 40.

Solución: Se vendieron 40 equipos de clase A y 32 equipos de clase B.

Ejemplo 40:

Se desea preparar una sustancia a partir de dos soluciones base. La solución N tiene el 5% y la solución M tiene el 20%. La cantidad resultante R debe ser de 200 ml, con una concentración del 15%. ¿Cuántos mililitros de solución N y M se deben mezclar?

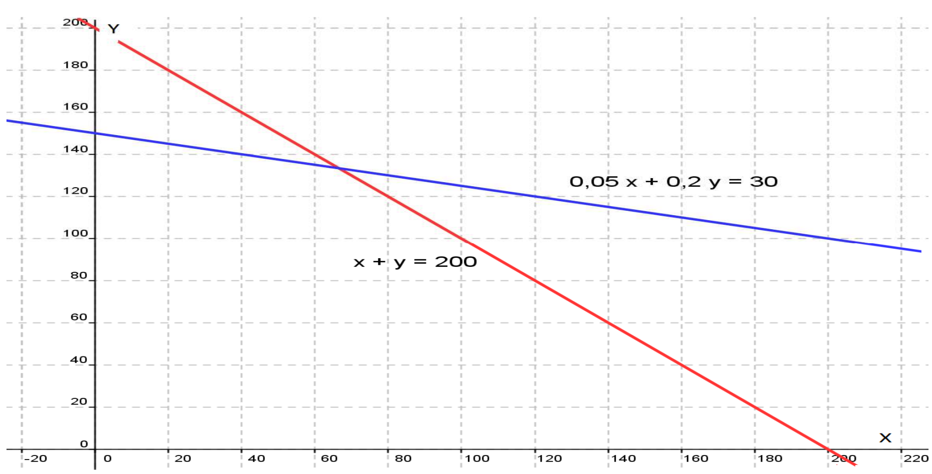
Solución:

x = Mililitros de la Solución N al 5% … y = Mililitros de la Solución M al 20%

Se tiene dos ecuaciones, una para el volumen y otra para la concentración.
- Ecuación para el volumen: x + y = 200 (mililitros)
- Ecuación para la concentración: 0,05x + 0,20y = 200(0,15) entonces: 0,05 x + 0,20 y = 30

El sistema obtenido será:
x + y = 200 … 0,05 x + 0,20 y = 30

Solución Grafica:



Se observa que la incógnita *x* esta cerca a 60 y la incógnita *y* por encima de 120. Con el método analítico se puede obtener la solución precisa.

Solución Analítica:

Vamos a resolverlo por sustitución, el sistema:
x + y = 200
0,05 x + 0,20 y = 30

Despejemos *x* en la primera ecuación: *x* = 200 – *y*. Reemplazamos dicha incógnita en la segunda ecuación: 0,05(200 – y) + 0,20 y = 30. Operando el paréntesis: 10 – 0,05y + 0,20y = 30. Simplificando: 0,15y = 20. Así: **y = 133,33**

Ahora, reemplazamos el valor de *y* en la primera ecuación, recordemos que puede ser también en la segunda: x + y = 200, entonces: x + (133,33) = 200, operando: **x = 67,67**
Solución: Se deben mezclar 66,67 ml de solución N y 133,33 ml. De solución M.

Ejemplo 41:

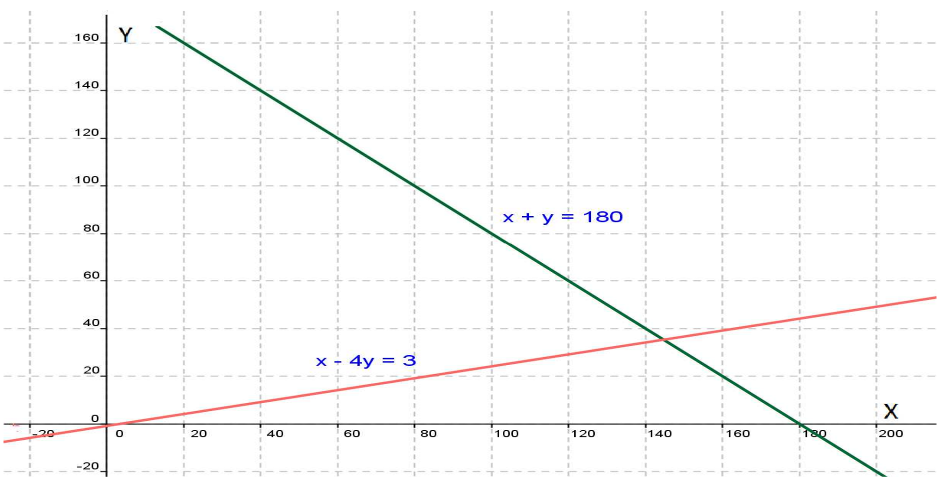
Los ángulos α y β son suplementarios, de tal manera que uno de ellos es 4 veces y 3 grados mayor que el otro. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos α y β?

Solución:

Sea α ángulo mayor
Sea β ángulo menor.

La ecuación de ángulos suplementarios: α + β = 180
La ecuación, dada la condición del problema: α = 4β + 3
Organizando:
α + β = 180
α - 4β = 3

Solución Grafica:



El punto muestra que α (X) está por encima de 140 y el punto β (Y) está cercano a 40. Con el método analítico, se puede obtener la solución precisa.

Solución Analítica:
α + β = 180
α - 4β = 3

Por reducción:
4α + 4β = 720
  α - 4β = 3
----
5 α = 723, entonces: **α = 144,6**

Para hallar el ángulo β, reemplazamos en la segunda ecuación:
(144,6) - 4β = 3. Desarrollando: -4β = 3 – 144,6 = -141,6. Por consiguiente: **β = 35,4**

Solución: El ángulo α mide $144{,}6^0$ y el ángulo β mide $35{,}4^0$

Ejemplo 42:

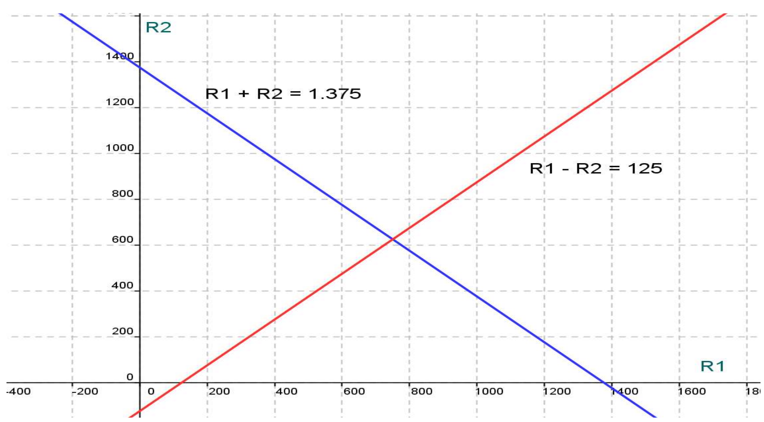
En un circuito en serie la resistencia total es la suma de las resistencias componentes. Un circuito en serie es compuesto por dos resistencias R_1 y R_2, la resistencia total es de 1.375 ohmios, para suministrar el voltaje requerido, R_1 debe tener 125 ohmios más que R_2. ¿Cuál es el valor de las resistencias?

Solución:

Se plantean las ecuaciones.

Ecuación de resistencia total: $R_1 + R_2 = 1.375$
Según las condiciones del problema: $R_1 = R_2 + 125$
Entonces: $R_1 + R_2 = 1.375$ y $R_1 - R_2 = 125$
Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

Solución Gráfica:



Como se observa en la gráfica, el punto de corte no es muy claro, R1 se acerca a 800 y R2 supera a 600.

Solución Analítica:

Tomando las dos ecuaciones.
$R_1 + R_2 = 1.375$ y $R_1 - R_2 = 125$
Despejamos R_1 en la segunda: $R_1 = R_2 + 125$
Reemplazamos en la primera: $(R_2 + 125) + R_2 = 1.375$
Operando y simplificando: $2R_2 = 1.375 – 125 = 1.250$, luego: $\mathbf{R_2 = 1250/2 = 625}$

Ahora se busca el valor de R_1 reemplazando el valor de R_2 en cualquiera de las ecuaciones, utilicemos la ecuación dos: $R_1 - R_2 = 125$, entonces: $R_1 = R_2 + 125 = (625) + 125 = 750$. $\mathbf{R_1 = 750}$
Por consiguiente: las resistencias tienen el valor de 625 y 750 ohmios.

Ejemplo 43:

Jorge y Alberto pertenecen a un Club Ejecutivo, quienes debieron pagar una afiliación y cuotas mensuales. Jorge por 7 meses pagó por adelantado un total de $605.000 y Alberto por 18 meses pago por adelantado $770.000. ¿Cuánto vale la afiliación y la mensualidad en dicho Club?

Solución:

x = Cuota inicial
y = mensualidad
Se plantea una ecuación para Jorge y una para Alberto.
Jorge: $x + 7y = 605.000$
Alberto: $x + 18y = 770.000$

Se resuelve reducción: Multiplicamos la primera ecuación por -1, luego:
$-x - 7y = - 605.000$
$x + 18y = 770.000$
$11 y = 165.000$, despejando la incógnita: $\mathbf{y = 15.000}$
Para hallar *x*, reemplazamos el valor de *y* en la primera ecuación:
$x + 7(15.000) = 605.000$, donde: $x = 500.000$, despejando la incógnita: $\mathbf{x = 500.000}$
Solución: La afiliación cuesta $500.000 y la mensualidad cuesta $15.000

Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnita

Existen problemas donde están involucradas tres incógnitas, la solución de este tipo de problemas son similares a los casos anteriores. Veamos algunos ejemplos modelos, que nos permitirán comprender situaciones de este tipo.

Ejemplo 44:

La suma de tres números es cuatro, el primero, dos veces el segundo y el tercero suma uno. Por otro lado tres veces el primero mas el segundo, menos el tercero equivale a -2. ¿Cuáles son los números?

Solución

El planteamiento.
x = Primer número
y = Segundo número
z = tercer número

Según las condiciones.
$x + 2y + z = 1$ (1)
$3x + y - z = -2$ (2)
$x + y + z = 4$ (3)

Tomamos (1) y (2) y eliminamos z.
$x + 2y + z = 1$ (1)
$3x + y - z = -2$ (2)

$4x + 3y = -1$ (4)

Ahora tomamos (2) y (3), eliminando la misma incógnita z.
$3x + y - z = -2$ (2)
$x + y + z = 4$ (3)

$4x + 2y = 2$ (5)

Se han obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas, la forma de resolverlas ya se han estudiado.
$4x + 3y = -1$ (4)
$4x + 2y = 2$ (5)

Eliminemos x.
$- 4x - 3y = 1$
$4x + 2y = 2$

$- y = 3$. Primera solución: **$y = - 3$**

Reemplazamos el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones (4) o (5). Tomemos la ecuación 4.
$4x + 3y = -1$, entonces: $4x + 3(-3) = -1$. Operando y simplificando: $4x = -1 + 9 = 8$
$x = 8/4 = 2$. Segunda solución: **$x = 2$.**

Para hallar el valor de la tercera incógnita se reemplaza los valores de *y* y *x* en cualquiera de las ecuaciones originales (1), (2), (3). Tomemos la ecuación tres.
$x + y + z = 4$. Reemplazando: $(2) + (-3) + z = 4$, luego: $z = 4 + 3 - 2 = 5$. Así: **$z = 5$**
Solución: $(x, y, z) = (2, -3, 5)$

Ejemplo 45:

El ángulo más grande de un triángulo es 70^0 mayor que el ángulo más pequeño y el ángulo restante es 10^0 más grande que tres veces el ángulo más pequeño ¿Cuáles son las mediciones de los ángulos?

Solución:

x = Angulo más pequeño
y = Angulo intermedio
z = Angulo más grande

Por las condiciones del problema:
$x + y + z = 180$ (1)   ¿porqué?
$x - z = -70$ (2)
$3x - y = -10$ (3)

Se elimina la incógnita y, entonces:

x + y + z = 180
x – z = -70

2x + y = 110 (4)

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
3x – y = -10
2x + y = 110

Eliminamos *y*: 5x = 100, así: **x = 20**

Calculemos ahora *y* de la ecuación (3): 3x – y = -10, entonces: 3(20) – y = -10, operando se obtiene:
y = 10 + 60 = 70, así: **y = 70**

Finalmente para hallar z, tomaos la ecuación (1)
x + y + z = 180, reemplazando: (20) + (70) + z = 180. Por consiguiente **z = 90**.

Así se tiene la solución: (x, y, z) = (20, 70, 90)

Ejemplo 46:

Una Heladería tiene tres sucursales: La sucursal A vendió 75 helados, 75 paletas y 32 conos, recibiendo $84.500. La sucursal B vendió 80 helados, 69 paletas y 27 conos, recibiendo $77.500 y la sucursal C vendió 62 helados, 40 paletas y 30 conos, recibiendo $62.400. ¿Cuánto cuesta la unidad de cada producto?

Solución:

Sea *x* = Helado, *y* = paleta, *z* = Cono. Según las condiciones del problema, se tiene:
Sucursal A: 75x + 75y + 32z = 84.500
Sucursal B: 80x + 69y + 27z = 77.500
Sucursal C: 62x + 40y + 30z = 62.400

Como tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se resuelve por determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 84.500 & 75 & 32 \\ 77.500 & 69 & 27 \\ 62.400 & 40 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} \quad \text{Resolviendo por cofactor:}$$

$$x = \frac{84.500\begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75\begin{vmatrix} 77.500 & 27 \\ 62.400 & 30 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 77.500 & 69 \\ 62.400 & 40 \end{vmatrix}}{75\begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75\begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}} = \frac{84.500 * 990 - 75 * 640.200 + 32 * (-1'205.600)}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1.078)}$$

$$x = \frac{-2'939.200}{-14.696} = 200 \quad \mathbf{x = 200}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 84.500 & 32 \\ 80 & 77.500 & 27 \\ 62 & 62.400 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{75\begin{vmatrix} 77.500 & 27 \\ 62.400 & 30 \end{vmatrix} - 84.500\begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 80 & 77.500 \\ 62 & 62.400 \end{vmatrix}}{75\begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75\begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{75 * 640.200 - 84.500 * 726 + 32 * 187.000}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1078)} = \frac{-7'348.000}{-14.696} = 500 \quad \mathbf{y = 500}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 84.500 \\ 80 & 69 & 77.500 \\ 62 & 40 & 62.400 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{75\begin{vmatrix} 69 & 77.500 \\ 40 & 62.400 \end{vmatrix} - 75\begin{vmatrix} 80 & 77.500 \\ 62 & 62.400 \end{vmatrix} + 84.500\begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}{75\begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75\begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{75 * 1'205.600 - 75 * 187.000 + 84.500 * (-1078)}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1078)} = \frac{-14'696.000}{-14.696} = 1.000 \quad \mathbf{z = 1.000}$$

Solución: El helado cuesta $200, la paleta cuesta $500 y el cono cuesta $1.000.

EJERCICIOS

En los ejercicios propuestos, resolver la ecuación paso a paso identificando el axioma, propiedad o ley matemática utilizada.

1. $3(2-x)=2x-1$ Rta: x = 7/5
2. $\frac{1}{2}x-6=\frac{3}{4}x+1$ Rta: x = -28
3. $\frac{6}{x}+\frac{4}{x}=\frac{1}{2}$ Rta: x = 20
4. $x^2+6x-7=(x+1)^2$ Rta: x = 2
5. $\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x+5}+\frac{10}{(x+5)(x-2)}$ Rta: x = 6
6. $5-\frac{x+2}{3}=7-x$ Rta: x = 4

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción.

7. $\begin{array}{rcrcr} x & - & 5y & = & -13 \\ 3x & + & 2y & = & 12 \end{array}$ Rta: x = 2, y = 3

8. $\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & -10 \end{array}$ Rta: x = -2, y = 4

Resolver los siguientes sistemas por el método de Igualación.

9. $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & -2 \\ 3x & + & 2y & = & 3 \end{array}$ Rta: x = ½, y = ¾

Resolver los siguientes sistemas por el método de Sustitución

10. $\begin{array}{rcrcr} x & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \\ 2x & - & y & = & -6 \end{array}$ Rta: NO hay solución

Identificar el valor de φ en cada determinante, de tal manera que la igualdad se cumpla.

11. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \varphi \end{vmatrix} = 12$ Rta: φ = 12

Resolver los sistemas de ecuaciones propuestos por el método de **Kramer**; es decir, utilizando determinantes.

12. $\begin{matrix} 5x & - & y & = & 13 \\ 2x & + & 3y & = & 12 \end{matrix}$ Rta: x = 3, y = 2

13. $\begin{matrix} 3x & - & 6y & = & 24 \\ 5x & + & 4y & = & 12 \end{matrix}$ Rta: x = 4, y = -2

14. $\begin{matrix} y & = & \dfrac{-2x+1}{3} \\ 3x & = & 8+2y \end{matrix}$ Rta: x = 2, y = -1

Resolver los determinantes dados a continuación por el método de productos cruzados.

15. $A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Rta. A = 2

16. $B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$ Rta: B = 9/2

Resolver por Sarrus los determinantes dados.

17. $C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Rta: C = 58

18. $E = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix}$ Rta: E = -3/4

Resolver por Cofactor:

19. $F = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ Rta: F = -49

Resolver por eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

20. $\begin{matrix} x-2y+3z=7 \\ 2x+y+z=4 \\ -3x+2y-2z=-10 \end{matrix}$ Rta: x = 2, y = -1, z = 1

Solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Kramer.

21. $$\begin{aligned} x-2y+3z&=7\\ 2x+y+z&=4\\ -3x+2y-2z&=-10 \end{aligned}$$ Rta: x = 2, y = -1, z = 1

Hacer el planteamiento de los problemas propuestos y resolverlos adecuadamente.

22. La suma de dos números enteros positivos es igual a 12, uno de ellos es el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

Rta: 4 y 8

23. Un voceador reparte el periódico en 1800 seg., su compañero lo hace en 120 seg., si lo hacen simultáneamente, ¿Cuánto tardarán en hacer la entrega?

Rta: 720 seg.

24. Un ángulo mide 46^0 más que su complementario. ¿Cuál será la medida de los ángulos?

Rta: 22^0 y 68^0

25. En una distribuidora de dulces, 4 paquetes de dulces y 4 paquetes de galletas valen $7.900. Dos paquetes de galletas cuestas $20 más que un paquete de dulces. ¿Cuánto cuestan un paquete de galletas y un paquete de dulces?

Rta: Galletas: $665, -dulces $1.310

26. Un automóvil recorre 50 Km. En el mismo tiempo que un avión viaja 180 Km. La velocidad del avión es de 143 Km/hr más que el del automóvil. ¿Cuál es la velocidad del automóvil?

Rta: 55 Km/hr

27. Un Biólogo desea probar un fertilizante a partir de tres clases existentes referenciados F_1, F_2, F_3, cuyos contendido de nitrógeno son: 30%, 20% y 15% respectivamente. El Biólogo quiere trabajar con 600 Kg. de mezcla con un contenido de nitrógeno de 25%, pero la mezcla debe tener 100 Kg. más de F_3 que de F_2. ¿Cuánto requiere el Biólogo de cada tipo de fertilizante?

Rta: F_1 = 380 Kg, F_2 = 60 Kg, F_3 = 160 Kg.

28. En la caja de un Banco hay $880 en billetes de $5, $10, $50. La cantidad de billetes es $10 es el doble de la de $50, si hay en total 44 billetes. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene el Banco?

Rta: 8 billetes de $5, 24 de $10 y 12 de $50

Lección Seis: Ecuaciones de Segundo Grado

$$\boxed{\varphi x^2 + \mu x + \varepsilon = 0}$$

Las ecuaciones de segundo grado han sido motivadas desde tiempos inmemorables, inicialmente la necesidad de resolver problemas de área y volumen, condujeron a manipular ecuaciones de este tipo. Como los números negativos se formalizaron tarde en la historia de las Matemáticas, en sus inicios el manejo de las ecuaciones de segundo grado fue con números positivos.

Se reconocen 5 tipos de ecuaciones de segundo grado.

$x^2 = bx$, $x^2 = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$, $x^2 + bx = c$

Para resolver este tipo de ecuaciones se han utilizado diversos métodos, desde épocas de Herón, pasando por Euclides hasta el método axiomático, han permitido solucionar problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, por el interés que despierta, se analizará el método axiomático.

MÉTODO AXIOMÁTICO: Es el método más utilizado; por no decir que el único, en la actualidad, se soporta en los axiomas, propiedades y definiciones, establecidos a través de toda la historia de las matemáticas.
Sea la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con a, b y c constantes y a ≠ 0. Este tipo de ecuaciones se puede resolver de las siguientes maneras:

1. **FACTORIZACIÓN:**

Se sabe que toda ecuación de segundo grado se puede expresar como producto de dos factores.
$ax^2 + bx + c = (x+\delta)(x+\beta) = 0$
A los factores obtenidos se les aplica la "Regla del Producto Nulo" la cual dice:
Si $(x+\delta)(x+\beta) = 0 \Rightarrow\Rightarrow (x+\delta) = 0, v, (x+\beta) = 0$
De esta manera se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. Se debe aclarar que las ecuaciones de tipo $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones, las cuales pueden ser: Reales iguales, Reales diferentes ó Imaginarias.

Ejemplo 47:

Resolver la siguiente ecuación. $3x^2 - 3x - 18 = 0$

Solución:

Primero factorizamos el trinomio, a esta altura debemos conocer las técnicas de factorización, en caso de dudas por favor consultar el modulo de Matemáticas Básicas para aclarar dudas al respecto.

$$\frac{3(3x^2 - 3x - 18)}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = 0$$

La última expresión se puede factorizar como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$

$$\frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = \frac{(3x-9)(3x+6)}{3} = (3x-9)(x+2) = 0$$

Tenemos dos términos a los cuales le podemos aplicar la regla del producto nulo.

(3x – 9) = 0, despejando x = 3

(x + 2) = 0, despenando x = -2
Se observa que se obtienen dos soluciones -2 y 3, así se comprueba que toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Ejemplo 48:

Hallar la solución de la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solución:

Se factoriza como trinomio cuadrado de la forma $x^2 + bx + c = 0$.
$x^2 - 10x + 25 = (x-5)(x-5) = 0$

Por la regla del producto nulo:
x – 5 = 0, luego x = 5
x – 5 = 0, luego x = 5

Se observa que la solución es doble, pero la misma.

Ejemplo 49:

Determinar el valor de *x* para la ecuación $x^2 + 16 = 0$

Solución:

Despejamos la incógnita.
$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$

Se observa que se tiene una raíz par de número negativo, cuya solución esta en el campo de los números imaginarios.
Así: **x = +4i** y **x = -4i**

NOTA: recordemos los números imaginarios, el tema esta explicitado en el modulo de matemáticas Básicas. Por otro lado, en los ejemplos anteriores se puede verificar que la solución puede ser real diferente, real igual ó imaginaria.

Ejemplo 50:

Hallar la solución de la ecuación $9x^2 - 25 = 0$

Solución:

La idea es despajar la incógnita, en este caso *x*.

$$9x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$$

La solución es: x = 5/3 y x = -5/3

Ejemplo 51:

Resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$

Solución:

Para este caso, NO es fácil identificar dos números que multiplicados sea - 4 y sumados sea -2, esto conlleva a buscar otras técnicas para resolver este tipo de ecuaciones. Una de ellas es la que se analiza a continuación.

2. **FÓRMULA CUADRÁTICA**: En muchas ocasiones el trinomio propuesto en la ecuación no se puede resolver directamente por factorización o extracción de raíz, entonces lo que se hace para resolver la ecuación propuesta es utilizar la fórmula cuadrática, es un camino más rápido para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c, reales y a ≠ 0. La solución para la incógnita es:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Demostración:

Para demostrar la fórmula cuadrática, aplicamos el principio de completar cuadrados. Veamos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

Se debe hacer que el coeficiente de la incógnita al cuadrado sea uno, para esto se divide todo por a.

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completa cuadrados en la parte izquierda de la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

El primer término es un trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se extrae raíz cuadrado a la última ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Desarrollando la raíz del denominador y operando las dos fracciones:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones por medio de la fórmula cuadrática serán:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se le conoce como el ***discriminarte***, debido a que su signo indica el tipo de solución obtenida.
Si $\Delta > 0$: Hay dos soluciones reales diferentes.
Si $\Delta = 0$: Hay dos soluciones reales iguales
Si $\Delta < 0$: Hay dos soluciones imaginarias.

Ejemplo 52:

A partir del ejemplo 50, resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$

Solución:

Para el trinomio dado, a = 1, b = -2 y c = -4. Aplicando la fórmula.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} \cong 3{,}23606 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{20}}{2} \cong -1{,}23606$$

Como se puede observar, las soluciones son reales y diferentes.

Ejemplo 53:

Resolver la siguiente ecuación utilizando la fórmula cuadrática. $x^2 - 6x + 8 = 0$

Solución:

Para el trinomio dado, a = 1, b = -6 y c = 8. Aplicando la fórmula.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Como las soluciones son enteras, este trinomio se puede resolver también por factorización.

Ejemplo 54:

Resolver $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Solución:

Identificamos las constantes. a = 3, b = - 4, c = 2, entonces:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{6}$$

Simplificamos el radicar.

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{2}i}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{2}i}{2}$$

Se observa que las soluciones son imaginarias, a propósito, cuando una ecuación tiene solución imaginaria, su conjugada también es solución.

Ejemplo 55:

Resolver la ecuación: $2x^2 + 6x = -4$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es igualar la ecuación a cero:

$$2x^2 + 6x = -4 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$$

Así a = 2, b = 6 y c = 4. Se aplica la fórmula.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{-6+2}{4} = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-6-2}{4} = -2$$

En los ejemplos realizados, donde las soluciones han sido reales, los valores son enteros, pero no siempre es así, en muchas ocasiones las soluciones son fraccionarias.

Ecuaciones de Grado n (n par)

$$\boxed{\varphi x^n + \mu x^{n/m} + \varepsilon = 0}$$

A veces se pueden presentar ecuaciones de la forma $ax^n + bx^m + c = 0$, donde m = n / 2, la idea es reducir el grado del trinomio hasta que n = 2. Para resolverlo como un trinomio cuadrado.

Algunos ejemplos nos aclaran el proceso.

Ejemplo 56:

Resolver: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Solución:

Se hace un "cambio de variable" digamos $u = x^2$ luego $u^2 = x^4$ Reemplazamos:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

Ahora se puede resolver el último trinomio, se utiliza la factorización.

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (u-4)(u-1) = 0$$

Por la regla del producto nulo:
u – 4 = 0, u = 4
u – 1 = 0, u = 1

Ahora se reemplaza el valor de u por x^2
$x^2 = 4$, x = +2 y -2
$x^2 = 1$, x = +1 y -1

Se observa que se obtienen 4 soluciones, ya que la ecuación original es de grado cuarto.

Ejemplo 57:

Resolver la siguiente ecuación $y^{10} + 6y^5 - 16 = 0$

Solución:

Hacemos el "cambio de variable" $w = y^5$, luego $w^2 = y^{10}$ entonces:

$$y^{10} + 6y^5 - 16 = 0 \Rightarrow\Rightarrow w^2 + 6w - 16 = 0$$

La última expresión se puede resolver por factorización o por la cuadrática, resolvámosla por los dos métodos.

Por Factorización:

$$w^2 + 6w - 16 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (w+8)(w-2) = 0$$

Por la regla del producto nulo:
w + 8 = 0, luego: **w = -8**
w -2 = 0, luego **w = 2**

Por la Cuadrática:

$$w = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

Las soluciones:

$w_1 = \frac{-6+10}{2} = 2$ y $w_2 = \frac{-6-10}{2} = -8$

Pero la solución final se debe dar en la incógnita y. Como w = y^5 Se hace el reemplazo:
Para w_1: $y^5 = 2 \Rightarrow\Rightarrow y = \sqrt[5]{2}$
Para w_2: $y^5 = -8 \Rightarrow\Rightarrow y = \sqrt[5]{-8}$

Podemos ver que sólo se obtuvieron dos soluciones, pero la ecuación es de grado 10, luego hacer falta ocho soluciones, las cuales se pueden obtener por métodos matemáticos más avanzados.

Ejemplo 58:

Resolver la ecuación: $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 15 = 0$

Solución:

Como en los casos anteriores se hace “cambio de variable”.

$v = x^{1/3} \Rightarrow\Rightarrow v^2 = x^{2/3}$ Procedemos a reemplazar.

$$x^{2/3} + 2x^{1/3} - 15 = v^2 + 2v - 15 = 0$$

La última expresión al resolvemos por factorización.

$$v^2 + 2v - 15 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (v+5)(v-3)) = 0$$

Por la regla del producto nulo.
v + 5 = 0, v = -5
v – 3 = 0, v = 3

Finalmente, reemplazamos nuevamente para x.

$$v = -5 \Rightarrow\Rightarrow x^{1/3} = -5 \Rightarrow\Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3 = (-5)^3 \Rightarrow\Rightarrow x = -125$$

$$v = 3 \Rightarrow\Rightarrow x^{1/3} = 3 \Rightarrow\Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3 = (3)^3 \Rightarrow\Rightarrow x = 27$$

Solución: **x = -125** y **x = 27**

Lección Siete: Ecuaciones de Segundo Grado: Problemas de aplicación

Muchos fenómenos del mundo que nos rodea, se pueden expresar matemáticamente por medio de ecuaciones cuadráticas. Para resolver problemas de este tipo, se debe seguir la metodología propuesta en la sección de problemas con ecuaciones de primer grado, es una buena orientación. La manera más pertinente de ilustrar problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado, es por medio de ejemplos modelos.

Ejemplo 59:

La cuarta parte del producto de dos números enteros pares positivos consecutivos es 56. ¿Cuáles son los números?

Solución:

Sea *x* el entero par, luego (*x* + *2*) será el entero par consecutivo. Según las condiciones del problema. $\frac{1}{4}(x)(x+2)=56$.

Desarrollando: $\frac{1}{4}(x)(x+2)=56 \Rightarrow\Rightarrow x^2+2x-224=0$

Como se tiene una ecuación de segundo grado, se utiliza el método de la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(-224)}}{2(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{900}}{2}=\frac{-2\pm 30}{2}$$

Las soluciones:

$$x_1=\frac{-2\pm 30}{2}=\frac{-2+30}{2}=14$$

$$x_2=\frac{-2\pm 30}{2}=\frac{-2-30}{2}=-16$$

Como se trata de enteros positivos, entonces la solución válida será 14, la otra no se tiene en cuenta. Así la solución al problema es: **14** y **16**

Ejemplo 60:

La raíz cuadrada de un número más cuatro, es lo mismo que el número menos ocho. ¿Cuál será el número?

Solución:

Sea y = el número a buscar. Aplicando las condiciones dadas en el problema.

$$\sqrt{y+4}=y-8$$

Teniendo el modelo matemático, se puede resolver la ecuación, para obtener la solución al problema. lo que se puede hacer es eliminar la raíz y luego despejar la incógnita.

$$\sqrt{y+4}=y-8 \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{y+4}\right)^2=(y-8)^2 \Rightarrow\Rightarrow y+4=y^2-16y+64$$

Reorganizando la última ecuación: $y^2-17y+60=0$

Por la cuadrática:

$$y=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4(1)(60)}}{2(1)}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{49}}{2}$$

Las soluciones:

$$y_1=\frac{17\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{17+7}{2}=12$$

$$y_2=\frac{17\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1777}{2}=5$$

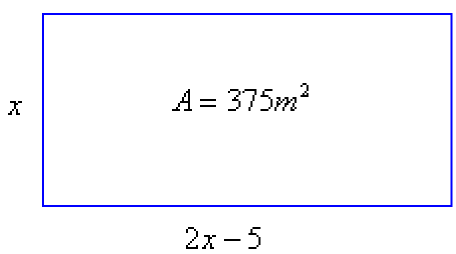
Las soluciones son 5 y 12. Pero según las condiciones dadas en el problema, el número que las cumple es 12, entonces **y = 12.**

Ejemplo 61:

Calcular las dimensiones de un rectángulo, cuya área es de 375 m^2; además, el largo es el doble del ancho menos cinco.

Solución:

Una gráfica nos ilustra la situación.



El planteamiento del modelo será: $(x)(2x-5)=375$

Multiplicando y resolviendo: $2x^2-5x=375 \Rightarrow\Rightarrow 2x^2-5x-375=0$

Se resuelve la ecuación por la fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25-4(2)(-375)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25+3000}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{3025}}{4}=\frac{5\pm 55}{4}$$

Las soluciones: $x=\frac{5+55}{4}=\frac{60}{4}=15$ y $x=\frac{5-55}{4}=\frac{-50}{4}=-12{,}5$

Como el problema es sobre longitudes, los valores negativos no son válidos, luego: x = 15.
Por consiguiente.

Largo: 2(15)-5 = 25 y Ancho: x = 15

Ejemplo 62:

Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 400 m/seg. la altura tiene como modelo matemático $y = -16t^2 + v_0 t$ Siendo t el tiempo y v_0 la velocidad inicial.
A -) En que tiempo el objeto regresa al suelo
b -) Cuanto tarda en alcanzar 2.500 metros de altura

Solución:

a-) Cuando el objeto regresa al suelo, la altura es cero (y = 0)
$y = -16t^2 + v_0 t \Rightarrow\Rightarrow -16t^2 + 400t = 0$
Recordemos que la velocidad inicial es de 400 m/seg. Se factoriza para despejar la incógnita, que en este caso es el tiempo. $-16t^2 + 400t = 0 \Rightarrow\Rightarrow t(-16t + 400) = 0$
Por la regla del producto nulo: t = 0 ó -16t + 400 = 0, luego t = 25 seg.
El objeto regresa al suelo a los 25 seg. de haber sido lanzado.

b-) Para determinar el tiempo en que la altura es de 2.500, en la ecuación se reemplaza y por 2.500 y se despeja el tiempo. $2.500 = -16t^2 + 400t \Rightarrow\Rightarrow 16t^2 - 400t + 2.500 = 0$
Aplicamos la cuadrática a la última ecuación:

$$t = \frac{-(-400) \pm \sqrt{160000 - 4(16)(2.500)}}{2(16)} = \frac{400 \pm \sqrt{0}}{32} = \frac{400}{32} = 12{,}5$$

El tiempo que utiliza para alcanzar los 2.500 metros es de 12,5 segundos.

Ejemplo 63:

En una planta manufacturera el costo mensual por producir x unidades está dada por la ecuación $C(x) = 10x^2 - 100x - 2000$ ¿Cuántas unidades se pueden producir para un costo de 10.000?

Solución:

Primero se identifica C = costo y x = unidades producidas.
Como se conoce el costo, se debe despejar la incógnita x.

$$C(x) = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow\Rightarrow 10.000 = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow\Rightarrow 10x^2 - 100x - 12.000 = 0$$

Resolvemos por la cuadrática:

$$x = \frac{-(-100) \pm \sqrt{10000 - 4(10)(-12.000)}}{2(10)} = \frac{100 \pm \sqrt{490.000}}{20} = \frac{100 \pm 700}{20}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{100 + 700}{20} = 40 \qquad x_2 = \frac{100 - 700}{20} = -30$$

Por obvias razones la solución es **40 unidades**.

Ejemplo 64:

La suma de los *n* enteros pares consecutivos está dada por la ecuación $s = n(n+1)$.
¿Cuántos enteros pares consecutivos y positivos se deben sumar para que dicha suma sea de 342?

Solución:

A partir de la ecuación se reemplaza el valor de *s* y se opera:

$$s = n(n+1) \Rightarrow\Rightarrow n^2 + n = 342 \Rightarrow\Rightarrow n^2 + n - 342 = 0$$

$$n^2 + n - 342 = (n+19)(n-18) = 0$$

Por el producto nulo:
n + 19 = 0, entonces n = -19
n – 18 = 0, entonces n = 18
Se deben sumar los primeros 18 enteros pares consecutivos positivos para que la suma de 342.

Reflexión: ¿Por qué no se toma el número -19?

Ejemplo 65:

Una tubería puede llenar un tanque en 5 hr. más rápido que otra tubería, las dos tuberías pueden llenar el tanque en 5 hr. ¿Cuánto tiempo tomará llenar el tanque cada una?

Solución:

El llenado de la tubería más lenta es $\frac{1}{x}$ Para x tiempo en segundos.

El llenado de la tubería más rápida es $\frac{1}{x+5}$

El llenado las dos tuberías simultáneamente es $\frac{1}{5}$

La suma de los llenados, permite obtener el tiempo de cada tubería.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5} \Rightarrow\Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{5} \Rightarrow\Rightarrow \frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{5}$$

Por el principio de fracciones equivalentes: $10x + 25 = x^2 + 5x \Rightarrow\Rightarrow x^2 - 5x - 25 = 0$

Por la cuadrática: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(-25)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{125}}{2}$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{125}}{2} = 8{,}09 \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{125}}{2} = -3{,}09$$

La solución será 8,09

La tubería más lenta tarda en llenar el tanque **8,09 seg**. y la tubería más rápida tardará en llenar el tanque 8,09 + 5 = **13,09 seg**.

Lección Ocho: Ecuaciones Cubicas.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Las ecuaciones de tercer grado han sido muy estudiadas, pero no se ha encontrado una solución general como la que tiene las de segundo grado. Para resolver este tipo de ecuaciones, se han realizado varios métodos, aquí vamos a referenciar la forma antigua y a analizar la forma moderna, que es la de interés en nuestro estudio.

METODO ANTIGUO:

La resolución de ecuaciones de tercer grado se remonta a los babilonios, quienes resolvieron problemas que involucraban raíces cúbicas, tenían planteamientos como el siguiente:

$$z = 12x \qquad y = x \qquad v = xyz \qquad v = 12x^3$$

Para lo cual usaron tablas de potencias cúbicas y raíces cúbicas.

Un profesor de Matemáticas de la Universidad de Bolognia, *Scipione del Ferro* (1.465 – 1.526) fue quien por primera vez resolvió algebraicamente una ecuación cúbica. de la forma $x^3 + px = q$. Posteriormente *Nicolo Tartaglia*, en una competencia con *Fior;* alumno de *Scipione del Ferro* revolvió 30 ecuaciones de este tipo.

El matemático *Girolamo Cardano* (1.501 – 1.576) se inquietó por los avances de *Tartaglia* y al reunirse con el en marzo de 1.539, éste último revela sus secretos a Cardano, después de muchos ires y venires, la formula obtenida para ecuaciones de tercer grado se le llamo “Formula de Cardano-Tartaglia”. En resumen del proceso que se realizó, se obtuvo una formula de la siguiente manera:

Sea la ecuación: $x^3 + px = q$ La solución es de la forma:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano, no acepto ni coeficientes, ni soluciones complejas para las ecuaciones de este tipo.

Vale la pena comentar que *Vietá*, quien trabajo las ecuaciones cúbicas utilizando transformaciones y sustituciones, obtuvo ecuaciones cuadráticas para resolver ecuaciones cúbicas, la característica era que solo utilizaba raíces cúbicas positivas.

METODO MODERNO:

A partir de los trabajos de Cardano y Tartaglia, se han venido buscando formas más prácticas para resolver ecuaciones de tercer grado. El primer intento llevo a plantear una fórmula parecida a la de Cardano-Tartaglia, pero era muy larga y complicada de manejar. Con el estudio de los polinomios se logró establecer algunos principios que ayudaron a buscar un camino dinámico para resolver ecuaciones cúbicas.

DEFINICIÓN: Sea P(x) un polinomio de grado *n*, sea *r* un número real o complejo, tal que P(r) = 0, entonces se dice que *r* es un cero del polinomio. Por consiguiente *r* es una solución o raíz de la ecuación Polinómica.

Con la definición anterior, se puede inferir que una ecuación de grado tres, se puede reducir a grado dos, buscando una de sus raíces, ya que: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Si P(r) = 0, entonces:

$P(x) = (x - r)(px^2 + qx + w)$

Este proceso es una forma de *linealizar* la ecuación, recordemos que linealizar es expresar un polinomio de grado *n*, en *n* factores de grado uno; o sea, factores lineales. Los matemáticos se han preocupado por determinar el tipo de soluciones que puede tener una ecuación cúbica. A partir de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, se identifica su discriminante:

$\Delta = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^3$

Según el signo del discriminante se puede identificar el tipo de solución:

Si $\Delta > 0$: La ecuación tiene tres soluciones reales diferentes.

Si $\Delta = 0$: La ecuación tiene tres soluciones reales y por lo menos dos de ellas iguales.

Si $\Delta < 0$: La ecuación tiene una solución real y dos soluciones imaginarias.

Solución para una ecuación de tercer grado:

El principio consiste en reducir la ecuación a un producto de dos factores, uno lineal y otro cuadrático, de esta manea se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. La técnica de reducción es por medio la llamada ***División Sintética***, la cual se mostrará simbolizará a continuación.

Sea la ecuación: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

La división: Se organizan los coeficientes como se observa en la gráfica.

a	b	c	d	r
	A	B	D	
a	P	Q	0	

r son los divisores de *a* y *d* positivos y negativos. Es pertinente aclara que ***a*** debe ser diferente de cero

El proceso inicia bajando el valor ***a***, luego este se multiplica por ***r*** para obtener el valor A. En seguida se suma b + A para obtener P. Seguido se multiplica P por **r** para obtener B, se suma c + B y se obtiene Q,
Luego se multiplica Q por **r** para obtener D, se suma d + D cuyo resultado debe ser cero (0).

Si la última suma (d + D) no da cero, lo que indica es que el **r** escogido no es raíz del polinomio, entonces se prueba con otro **r** hasta obtener aquel que permita que dicha suma sea cero (d + D = 0).

El proceso acepta utilizar los valores positivos y negativos de los divisores identificados.

Ejemplo 66:

Resolver la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$

Solución:

Es evidente que se deben tener tres soluciones. Para buscar la primera se identifican los **r** que para este caso son: 1, -1, 2, -2. Se inicia con 1. Como el polinomio no tiene término en x^2 se completa con cero.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Ilustremos el proceso realizado:

1x1 = 1, 0 + 1 = 1
1x1 = 1, -3 + 1 = -2
-2x1 = -2, 2 + (-2) = 0

r = 1 es cero del polinomio.

Ahora la ecuación inicial se expresa como producto de dos factores, el primero será (x – r) y el segundo será un trinomio cuadrado cuyos coeficientes son los valores del residuo de la división sintética.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right)$$

El trinomio cuadrado se puede resolver como ya se ha analizado:

$$\left(x^2 + x - 2\right) = (x+2)(x-1)$$

Las soluciones son: -2 y 1, *recordemos por qué*.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2)$$

Las soluciones de la ecuación inicial será entonces: x = 1, x = 1, x = -2
Como se observa en la solución hay dos factores lineales iguales, entonces se dice que el polinomio tiene una raíz doble; es decir, raíz con *multiplicidad* dos.

Ejemplo 67:

Hallar la solución de la siguiente ecuación: $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

Los posibles **r** son: 1, -1

Probamos con r = 1.

1 x 1 = 1, luego -3 + 1 = - 2
- 2 x 1 = -2, luego 1 + (-2) = - 1
- 1 x 1 = -1, luego 1 + (-1) = 0

r = 1 es cero del polinomio.

Entonces: $x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x - 1\right)$

El trinomio cuadrado se resuelve por la cuadrática:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4-4(1)(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

La solución de la ecuación inicial es: $x=1$ $\quad x=1+\sqrt{2}$ $\quad x=1-\sqrt{2}$ Corresponde a tres soluciones reales diferentes.

Multiplicidad: La multiplicidad de un polinomio es el número de factores lineales que se repiten. El ejemplo 65 tiene multiplicidad dos. El ejemplo 66 tiene multiplicidad uno.

Ejemplo 68:

Resolver $2x^3-3x^2+6x+40=0$

Solución:

Los posibles ceros del polinomio: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 8, -8, 10, -10, 20, -20, 40, -40. Como siempre se prueba con uno, pero para este caso la suma d + D es diferente de cero, de la misma manera para -1, 2, para el caso de -2 si se obtiene cero, veamos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & 6 & 40 & -2 \\ \cline{5-5} & -4 & 14 & -40 & \\ \hline 2 & -7 & 20 & 0 & \end{array}$$

2 x -2 = - 4, luego - 3 + (- 4) = -7
- 7 x (- 2) = 14, luego 6 + 14 = 20
20 x (-2) = - 40, luego 40 + (-40) = 0

r = -2 es cero ó raíz del polinomio.

Entonces, expresamos la ecuación inicial como producto de dos factores:

$$2x^3-3x^2+6x+40=(x+2)(2x^2-7x+20)$$

El trinomio cuadrado se resuelve por la ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{49-4(2)(20)}}{2(2)}=\frac{7\pm\sqrt{49-160}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{-111}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{111}i}{4}$$

Las soluciones:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{111}i}{4} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{7-\sqrt{111}i}{4}$$

La ecuación inicial tiene tres soluciones, una solución real x = - 2 y dos imaginarias. $x=\frac{7+\sqrt{111}i}{4}$

$$x=\frac{7-\sqrt{111}i}{4}$$

Lección Nueve: Ecuaciones Polinómicas.

$$\boxed{ax^{n} + bx^{n-1} + \ldots + d = 0}$$

Las ecuaciones que presentan un grado mayor a tres, se les conoce comúnmente como polinómicas, en este espacio se pretende hacer un análisis general a las ecuaciones polinómicas. Una ecuación de la forma $ax^{n} + bx^{n-1} + \ldots + k = 0$, con $a \neq 0$ y le conoce como ecuación Polinómica. $n \in Z^{+}$

Haciendo algo de historia, en la resolución de ecuaciones, los Babilonios formularon problemas que condujeron a ecuaciones de cuarto grado, donde la incógnita era un cuadrado, por lo que se les llamaron ecuaciones bicuadradas. Ferrari desarrolló el método de solución de ecuaciones de cuarto grado, lo que fue publicado en *Ars Magna de Cardano*. En trabajos encontrados de Cardano, Tartaglia y Ferrari, se detecto que deseaban establecer una forma general para resolver ecuaciones de cuarto grado.

La metodología actual propone para resolver ecuaciones de cuarto grado, buscar los factores lineales por división sintética, como se hizo para las ecuaciones de grado tres. Respecto a las ecuaciones de quinto grado, el gran famoso matemático noruego ***Niels Henrik Abel*** demostró que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de un número finito de operaciones algebraicas, allá por los años 1.824 Para fortalecer esta teoría un prestigioso matemático de tan solo 20 años de edad y de nacionalidad francesa ***Evariste Galois***, dedujo que bajo ciertas condiciones, una ecuación se puede resolver por radicales. Galois desarrollo la teoría de grupos para analizar métodos generales de solución de ecuaciones, basado únicamente en las operaciones fundamentales y extracción de raíces, llegando a la demostración de que NO hay un método general para resolver ecuaciones de quinto grado o mayor.

Los avances en los inicios de la edad moderna dieron buenos resultados y a partir de allí, se establecieron ciertas consideraciones para el desarrollo de ecuaciones polinómicas.

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES:

El Matemático francés René Descartes, padre de la Geometría Analítica, en 1.636 propone una técnica para identificar el número de soluciones reales positiva y negativas para un polinomio de grado *n;* para n entero positivo, con el teorema cuya prueba esta fuera del alcance de este curso dice:

> *TEOREMA: Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales cuyo término independiente es diferente de cero, tendrá un número de soluciones reales positivas de P(x) = 0, igual al número de variaciones de signo en P(x) ó es menor que el número de variaciones en cantidad par. El número de variaciones negativas de la ecuación P(x), es igual al número de variaciones de signo en P (-x) = 0, ó es menor que el número de variaciones en cantidad par.*

En resumen, el teorema permite saber cuántas soluciones reales positivas y negativas tiene el polinomio, basado en la variación de signos. Algunos ejemplos nos ilustran la aplicación del teorema.

Ejemplo 69:

Determinar las posibles soluciones reales del polinomio: $P(x) = 2x^{5} - x^{4} + 3x - 6$

Solución:

Por ser un polinomio de grado cinco, entonces debe tener cinco soluciones ó cinco raíces.

Para identificar las soluciones reales positiva:

$$P(x)=2x^5\underbrace{-}_{1}x^4\underbrace{+}_{2}3x\underbrace{-}_{3}6$$

Tomando P(x) e identificando los cambios de signo, los cuales según la grafica son tres, entonces P(x) puede tener tres ó una raíces reales positivas.

Para identificar las soluciones reales negativas, aplicamos P(-x) y observar los cambios de signo.

$$P(-x)=2(-x)^5-(-x)^4+3(-x)-6=-2x^5\underbrace{-}_{0}x^4\underbrace{-}_{0}3x\underbrace{-}_{0}6$$

P (-x) no presenta cambios de signo, luego P(x) no tiene raíces reales negativas.

El polinomio tiene 5 raíces, como puede tener 3 reales positivos y NO tiene reales negativas, por consiguiente las posibles soluciones:

Primera opción: Tres raíces reales positivas y dos imaginarias. (3 $\mathbf{R}^+$ y 2 **I**)
Segunda opción: Una raíz real positiva y 4 raíces imaginarias. (1 $\mathbf{R}^+$ y 4 **I**)

Es pertinente recordar que las raíces imaginarias, SIEMPRE se dan en pares, ya que si hay una solución imaginaria, su conjugada también es solución.

Ejemplo 70:

Dado el polinomio $Q(x)=5x^4-6x^3+x-9$ identificar las posibles soluciones.

Solución:

El polinomio debe tener 4 raíces. *Ya sabemos por qué.*

Raíces reales positivas.

$$Q(x)=5x^4\underbrace{-}_{1}6x^3\underbrace{+}_{2}x\underbrace{-}_{3}9$$

Se observa que Q(x) presenta tres variaciones de signo, luego puede tener tres ó una soluciones reales positivas.

Raíces reales negativas.

$$Q(-x)=5(-x)^4-6(-x)^3+(-x)-9=5x^4+6x^3-x-9$$

$$Q(-x)=5x^4\underbrace{+}_{0}6x^3\underbrace{-}_{1}x\underbrace{-}_{0}9$$

Para Q (-x) se observa que hay un cambio de signo, lo que nos indica que el polinomio tiene una raíz real negativa.

Según los resultados, el polinomio Q(x) puede tener las posibles soluciones:

-) Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias. . (1$\mathbf{R}^+$, 1$\mathbf{R}^-$, 2 **I**)

-) Tres soluciones reales positivas y una solución real negativa. (3 $\mathbf{R}^{+}$ y 1 $\mathbf{R}^{-}$)

Ejemplo 71:

Identificar los ceros del polinomio: $N(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

Solución:

N(x) debe tener 5 ceros, veamos cuales podrían ser:

Ceros reales positivos:

$$N(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$$

1 0 2 3

Para N(x) se observan tres cambios de signo, Luego dicho polinomio puede tener 1 ó 3 raíces reales positivas.

Ceros reales negativos:

$$N(-x) = 7(-x)^5 - 2(-x)^3 - 5(-x)^2 + 2(-x) - 1$$

$$N(-x) = -7x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 2x - 1$$

1 2 0 0

Para N (-x) se observa que presenta dos cambios de signo, luego el polinomio puede tener cero ó dos soluciones reales negativas.

Así el polinomio N(x) puede presentar las siguientes soluciones:
-) Una solución real positiva, dos soluciones reales negativas y dos imaginarias. (1$\mathbf{R}^{+}$, 2$\mathbf{R}^{-}$, 2 **I**)
-) Tres soluciones reales positivas y dos soluciones reales negativas. (3$\mathbf{R}^{+}$, 2$\mathbf{R}^{-}$)
-) Una solución real positiva y cuatro soluciones imaginarias. (1$\mathbf{R}^{+}$, 4**I**)

Acotación de las Soluciones:

El siguiente teorema permite identificar el intervalo en el que se encuentran las soluciones reales, si éstas existen.

TEOREMA: Sea P(x) un polinomio, tal que si P(x) = 0, no tiene raíz real alguna mayor al número real K, entonces K se le llama cota superior de las raíces reales. Análogamente, si P(x) = 0, no tiene raíz real menor que el numero real k, luego k se le llama cota inferior de las raíces reales.

$$k \leq Raíces\,\mathrm{Re}ales \leq K$$

Ejemplo 72:

Dado el polinomio: $P(x) = (x-1)(2x-1)(2x+1) = 0$ Determinar la acotación del mismo.

Solución:

Por la regla del producto nulo.
(x – 1) = 0, luego x = 1
(2x – 1) = 0, luego x = 1/2
(2x + 1) = 0, luego x = -1/2
Así k = -1/2. Cualquier número menor que -1/2 será cota inferior de P(x).
K = 1. Cualquier número superior a 1 será cota superior de P(x).

TEOREMA DE RAICES RACIONALES:

Para determinar las soluciones de una ecuación Polinómica con coeficientes enteros, hay un teorema que simplifica la identificación de las raíces del polinomio.

TEOREMA: *Sea* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + ax + a_o = 0$ *Un polinomio con coeficientes enteros, Si p/q es un real irreducible tal que p/q es una raíz de P(x); es decir, P (p/q) = 0, entonces p es factor de* a_o *y q es factor de* a_n.

El teorema permite obtener los ceros del polinomio en forma directa, dando una lista limitada de soluciones racionales posibles.

Veamos: Si se tiene un polinomio P(x) y suponemos que p/q es una raíz del mismo, entonces (x – p/q) es un factor de P(x); además, P(x) = (x – p/q) Q(x). Donde Q(x) es un polinomio de un grado menor que P(x). Las soluciones adicionales para P(x), se obtiene resolviendo Q(x).

Ejemplo 73:

Determinar los ceros del polinomio: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$

Solución:

Se identifica *p* y *q*. Siendo *p* los divisores del término independiente y *q* del coeficiente de x^4.
p = 1, -1, 2, -2, 4, -4.
q = 1, -1, 2, -2.
Posibles soluciones racionales: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 1/2, -1/2.

A cada uno de estas posibilidades se le aplica la división sintética para identificar las soluciones. Por la Regla de Descartes se puede inferir las posibles soluciones:
-) Tres soluciones reales positivas y una negativa. (3$\mathbf{R}^+$, 1$\mathbf{R}^-$)
-) Una solución real positiva, una negativa y dos imaginarias. (1$\mathbf{R}^+$, 1$\mathbf{R}^-$, 2 **I**)

Probando las posibles soluciones, se detecta que x = 2 es solución, veamos:

2	−3	2	−6	−4	2
	4	2	8	4	
2	1	4	2	0	

El polinomio inicial quedaría así:

$$P(x) = (x - 2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2)$$

Donde $Q(x) = (2x^3 + x^2 + 4x + 2)$

Ahora tomamos el polinomio Q(x) e identificamos los divisores de *p* y *q*:
p = 1, -1, 2, -2. y *q* = 1, -1, 2, -2.
Las posibles soluciones (p/q): 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2.

Al probar las diferentes posibilidades, se identifico que -1/2 es cero del polinomio, veamos:

2	1	4	2	$-\frac{1}{2}$
	-1	0	-2	
2	0	4	0	

Probando con todos, se observa que -1/2 es cero, luego el polinomio se puede escribir como:

$$Q(x) = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 4\right)$$

El último polinomio se resuelve por factorización o cuadrática. Si se revisa se puede determinar que los ceros son: $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$

Volviendo al polinomio inicial $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$, se puede concluir que los ceros de dicho polinomio son: 2, -1/2, $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias. (1$\mathbf{R}^+$, 1$\mathbf{R}^-$, 2 **I**)

MULTIPLICIDAD DE LAS SOLUCIONES:

En un aparte anterior se hizo referencia a la multiplicidad, pero es pertinente darle un soporte formal, a través de la siguiente definición.

DEFINICIÓN:

Sea P(x) un polinomio de grado *n*; además, $(x - r)^m$ un factor de P(x), entonces *r* es llamado cero de P(x), con multiplicidad *m*.

Ejemplo 74:

Sea el polinomio: $P(x) = 4(x-2)(x+3)^2(x-1)^3$ Identificar los ceros y su multiplicidad.

Solución:

Los ceros son: 2, -3, 1.
La multiplicidad:
Para 2: La multiplicidad es 1
Para -3: la multiplicidad es 2
Para -1: La multiplicidad es 3

Lección Diez: Ecuaciones Racionales y Radicales.

Existen una serie de ecuaciones que merecen atención, ya que la forma de resolución, conjugan aspectos de las que ya se estudiaron.

ECUACIONES RACIONALES

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = 0}$$

Las ecuaciones racionales son de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ Donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) ≠ 0.

Resolver ecuaciones de este tipo, sigue los principios matemáticos aplicados a los dados en fracciones, principalmente fracciones equivalentes.

Ejemplo 75:

Hallar la solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Solución:

Por el principio de ecuaciones equivalentes.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2(2x-4) = 1(x+2) \Rightarrow\Rightarrow 4x-8 = x+2$$

Se debe despejar la incógnita, agrupando las *x* a un lado y los términos independientes al otro lado.

$$4x - 8 = x + 2 \Rightarrow\Rightarrow 4x - x = 2 + 8 \Rightarrow\Rightarrow 3x = 10$$

Así la solución será: **x = 10/3**

Ejemplo 76:

Resolver: $\frac{6x+8}{5} - \frac{3x-4}{2} = 0$

Solución:

Con lo aprendido ya podemos trabajar consecutivamente, por favor analizar cada paso.

$$\frac{6x+8}{5} = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow\Rightarrow 12x+16 = 15x-20 \Rightarrow\Rightarrow 12x-15x = -20-16$$

Despejando: $-3x = -36 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{-36}{-3} = 12$

Ejemplo 77:

Resolver: $\frac{x}{x+2} - \frac{2}{x-1} = 0$

Solución:

Aplicando los principios sobre fracciones se tiene:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{2}{x-1}=0\Rightarrow\Rightarrow\frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)}=0\Rightarrow\Rightarrow x(x-1)-2(x+2)=0$$

Operando: $x^2-x-2x-4=0\Rightarrow\Rightarrow x^2-3x-4=0$

La última ecuación se resuelve por factorización:

$$x^2-3x-4=0\Rightarrow\Rightarrow(x-4)(x+1)=0$$

Por el producto nulo:
x – 4 = 0, entonces x = 4
x + 1 = 0, entonces x = -1
Así la solución será: **-1 y 4.**

Ejemplo 78:

Hallar los valores de la incógnita que hacen verdadero la expresión dada.

$$1-\frac{2}{y}=\frac{3}{y^2}$$

Solución:

Veamos el procedimiento.

$$1-\frac{2}{y}=\frac{3}{y^2}\Rightarrow\Rightarrow 1-\frac{2}{y}-\frac{3}{y^2}=0\Rightarrow\Rightarrow\frac{y^2-2y-3}{y^2}=0\Rightarrow\Rightarrow y^2-2y-3=0$$

Factorizando: $(y-3)(y+1)=0$
Por la regla del producto nulo:
y – 3 = 0, entonces y = 3
y + 1 = 0, entonces y = -1
Solución: **-1 y 3**

Ejemplo 79:

Resolver la ecuación $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=10$

Solución:

Como indica la expresión, se debe sumar las fracciones.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=10\Rightarrow\Rightarrow\frac{2x+3x}{6}=10\Rightarrow\Rightarrow\frac{5x}{6}=10\Rightarrow\Rightarrow 5x=60$$

Así se puede despajar la incógnita:
x = 60 / 5 = 12. Entonces: **x = 12.**

ECUACIONES RADICALES

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx} + c = 0}$$

Cuando se tiene ecuaciones con radicales, el primer paso es buscar la forma de reducir el radical por medio de operaciones opuestas y obtener ecuaciones de grado dos o múltiplos, siempre y cuando el índice de la raíz sea par. Aquí se va a analizar fundamentalmente las raíces cuadradas, pero se puede hacer extensivo a otros índices.

Recordemos que: $\sqrt{x} = y \Rightarrow\Rightarrow x^2 = y$

Ejemplo 80:

Resolver la ecuación $x + \sqrt{x-4} = 4$

Solución:

A partir de la expresión, se busca que la parte radical quede a un lado de la igualdad.

$$x + \sqrt{x-4} = 4 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{x-4} = 4 - x$$

Ahora se elimina la raíz utilizando operación opuesta y reorganizando:

$$\left(\sqrt{x-4}\right)^2 = (4-x)^2 \Rightarrow\Rightarrow x - 4 = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

La última ecuación se puede resolver por factorización o por la fórmula cuadrática.

$$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5) = 0$$

Por la regla del producto nulo:
x – 4 = 0, entonces x = 4
x – 5 = 0, entonces x = 5

Solución: **4 y 5**

Ejemplo 81:

Hallar los valores de *y* que hagan verdadera la igualdad dada. $\sqrt{2y+3} - \sqrt{y-2} = 2$

Solución:

Lo primero es pasar uno de los radicales al otro lado de la ecuación, para reducir uno de ellos.

$$\sqrt{2y+3} - \sqrt{y-2} = 2 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{2y+3} = 2 + \sqrt{y-2} \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{2y+3}\right)^2 = \left(2 + \sqrt{y-2}\right)^2$$

Desarrollando los cuadrados y reorganizando términos:

$$2y + 3 = 4 + 4\sqrt{y-2} + (y-2) \Rightarrow\Rightarrow 2y + 3 - 4 - y + 2 = 4\sqrt{y-2} \Rightarrow\Rightarrow y + 1 = 4\sqrt{y-2}$$

Para eliminar el nuevo radical, se vuelve a aplicar operación opuesta y reorganizando:

$$(y+1)^2 = \left(4\sqrt{y-2}\right)^2 \Rightarrow\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 16(y-2) \Rightarrow\Rightarrow y^2 - 14y + 33 = 0$$

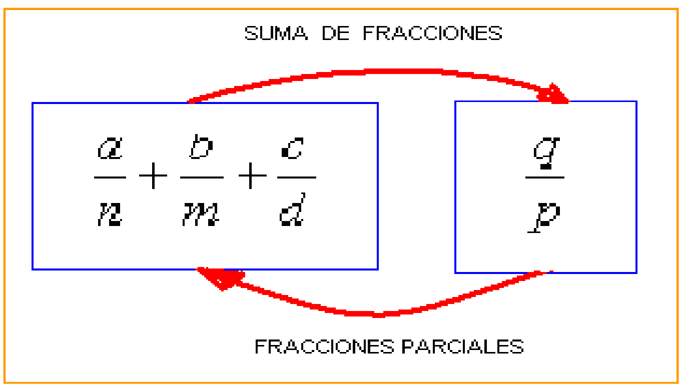
La última expresión se puede resolver por factorización o por la formula cuadrática. Apliquemos factorización. $y^2 - 14y + 33 = (y-11)(y-3) = 0$
Por la regla del producto nulo.
y – 11 = 0, luego y = 11
y – 3 = 0, luego y = 3
Solución: **3 y 11**

Lección Once: Fracciones Parciales

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Toda fracción racional de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con *p*(x) y *q*(x), polinomios y *q*(x) ≠ 0, se pueden expresar como suma o resta de fracciones racionales más simples. Para que se pueda hacer este procedimiento, el grado de *p*(x) debe ser menor que el grado de *q*(x); además, *q*(x) se puede descomponer en factores primos. Por teoría algebraica, cualquier polinomio de coeficientes reales, se puede escribir como producto de factores lineales o cuadráticos.

En los principios de álgebra, aprendimos que a partir de dos o más fracciones, se obtenía una como resultado de la suma, en este aparte lo que se va a analizar es el caso contrario, a partir de una fracción, buscar las fracciones que fueron sumadas para llegar a ésta.



De acuerdo al denominador, se pueden encontrar varios casos.

1. **q(x) es producto de factores lineales diferentes:**

Se puede generalizar este caso de la siguiente manera, se tiene la fracción $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, esta se puede descomponer en la suma de fracciones tales como: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{A}{ax+\lambda_1} + \dfrac{B}{bx+\lambda_2} + \ldots + \dfrac{N}{nx+\lambda_n}$

Siendo A, B, … , N constantes.

Ejemplo 82:

Dada la fracción siguiente, expresarla como fracciones parciales. $\dfrac{4x-5}{x^2-5x+6}$

Solución:

La idea es linealizar el denominador. Primero factorizamos el trinomio cuadrado.

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}$$

Según la teoría, la fracción obtenida se puede escribir como suma de fracciones simples, para este caso dos fracciones ya que hay dos factores lineales simples.

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

El trabajo consiste en encontrar el valor de A y B. Para esto se operan las dos fracciones así:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)}=\frac{x(A+B)-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$$

La última fracción es equivalente a la primera, luego se igualan:

$$\boxed{\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{x(A+B)-2A-3B}{(x-3)(x-2)}}$$

Esta es la parte principal del proceso, ya que se observa que los denominadores son iguales, por ende los numeradores también deben serlo. Así se comparan numeradores.

-) 4x – 5 = x(A + B) – 2A – 3B

Los coeficientes de *x* deben ser iguales: 4 = A + B
Los términos independientes también son iguales: - 5 = -2A – 3B

Se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, *que ya sabemos resolver*. Aplicando eliminación se obtiene: A = 7, B = -3

Se reemplaza los valores de A y B en la ecuación propuesta:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

Por consiguiente: $\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x-2}$

Ejemplo 83:

Escribir como fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{5}{2x^2-9x+4}$$

Solución:

Se linealiza el denominador. $\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{5}{(2x-1)(x-4)}$

Por favor confirmar la factorización que se hizo en el denominador.

Es seguida se propone descomponer la fracción como suma de fracciones parciales.

$\frac{5}{(2x-1)(x-4)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}$ Se operan las dos fracciones que se propusieron:

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(2x-1)}{(2x-1)(x-4)}=\frac{Ax-4A+2Bx-B}{(2x-1)(x-4)}=\frac{x(A+2B)-4A-B}{(2x-1)(x-4)}$$

Como la última fracción es equivalente a la primera, se hace la igualación:

$$\boxed{\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{x(A+2B)-4A-B}{(2x-1)(x-4)}}$$

Ahora, como el denominador es igual, los numeradores también deben serlo. Entonces:
5 = x(A + 2B) – 4A – B

Comparando los coeficientes en *x*, se observa que en el primer término de la igualdad el coeficiente de *x* es cero, ya que no hay término en dicha incógnita, luego: 0 = A + 2B. Para el término independiente: 5 = - 4A – B

Se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas.
A + 2B = 0
-4A – B = 5

Utilizando cualquiera de los métodos de resolución, se obtiene:
A = -10/7, B = 5/7

Finalmente se reemplaza en la suma de fracciones propuesta:

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{5}{7(x-4)}-\frac{10}{7(2x-1)}$$ Solución: $$\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{5}{7(x-4)}-\frac{10}{7(2x-1)}$$

2. q(x) es producto de factores lineales, algunos repetidos:

Hay casos donde el polinomio del denominador presenta factores lineales simples que se repiten *k* veces, cuando esto se presenta la descomposición es de la siguiente manera:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-\lambda)(x-\beta)^k}=\frac{A}{(x-\lambda)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{C}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-\beta)^k}$$

Ejemplo 84:

Descomponer en fracciones parciales. $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2}$

Solución:

El procedimiento es similar al caso anterior, solo que aquí se debe proponer tantas fracciones simples como indique el exponente del factor que se repite.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Se operan las fracciones y se organizan los términos.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}\frac{A(x+1)^2+B(x)(x+1)+C(x)}{x(x+1)^2}=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}$$

Se organizan los términos según la incógnita:

$$\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

Se iguala la última fracción con la inicial:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores, *ya sabemos por que.*

$$2x-1=x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

Para el caso de la incógnita al cuadrado (x^2): 0 = A + B
Para el caso de la incógnita (x): 2 = 2A + B + C
Para el caso del término independiente: -1 = A
Así ya se tiene una solución: A = -1
De la ecuación 0 = A + B, se puede obtener el valor de B, es decir: B = 1
Para el caso de C, en la ecuación: 2 = 2A + B + C; se reemplaza A y B: 2 = 2(-1) + (1) + C, despejando C = 3

Volviendo a la expresión propuesta:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Finalmente la fracción original queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{1}{x}$$

3. **q(x) Tiene factores Cuadráticos irreducibles:**

Cuando el polinomio del denominador tiene términos cuadráticos irreducibles, la forma de descomponer en fracciones parciales es como se muestra a continuación.

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x+n)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x+n}+\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$$

Donde $q(x)=(x+n)(ax^2+bx+c)$

Como siempre los ejemplos son la mejor forma de mostrar el método.

Ejemplo 85:

Expresar como suma de fracciones parciales: $\dfrac{x-5}{x(x^2+2)}$

Solución:

Se escribe la fracción como se presenta a continuación: $\dfrac{x-5}{x(x^2+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$

Operando y organizando: $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2} = \dfrac{A(x^2+2)+x(Bx+C)}{x(x^2+2)} = \dfrac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)}$

Agrupando términos semejantes: $\dfrac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)} = \dfrac{x^2(A+B)+x(C)+2A}{x(x^2+2)}$

Igualando las fracciones original y la última: $\dfrac{x-5}{x(x^2+2)} = \dfrac{x^2(A+B)+x(C)+2A}{x(x^2+2)}$

Comparando términos:
Para la incógnita al cuadrado: (x^2): 0 = A + B
Para la incógnita (x): 1 = C
Para los términos independientes: - 5 = 2A
Así: A = - 5/2, B = 5/2, C = 1

Reemplazando estos valores en las fracciones propuestas:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = -\frac{5}{2x} + \frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2+2}$$

Por consiguiente la fracción inicial queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{5x+2}{2x^2+4} - \frac{5}{2x}$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones, realizando el procedimiento adecuadamente y justificando las respuestas.

1. $z^2 + \sqrt{2}z - 2 = 0$ Rta: $z = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$

2. $y^6 - 10y^3 = -21$ Rta: $y = \sqrt[3]{7}$ y $y = \sqrt[3]{3}$

3. Demuestre que la solución de la ecuación $x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$ es 27 y -8.

Desarrollar el procedimiento apropiado para resolver los ejercicios propuestos.

4. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+9} = -2$ Rta: x = 0

5. $\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$ Rta: x = 64

6. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3x-5}} = \sqrt{2}$ Rta: x = 3

Desarrollar los siguientes ejercicios, verificar la respuesta.

7. $\dfrac{13+2x}{4x+1} = \dfrac{3}{4}$ Rta: x = 49 / 4

8. $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{3}{x-4} = \dfrac{3x+8}{x^2-16}$ Rta: x = 0

9. $\dfrac{x+1}{3x+2} - \dfrac{x-2}{2x-3} = 0$ Rta: $x = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Lea cuidadosamente cada problema y con los conocimientos adquiridos, resolverlos adecuadamente.

10. Dos números enteros pares consecutivos tienen como producto 168, ¿Cuáles son dichos números? Rta: 12 y 14

11. El largo de un rectángulo es de 4 metros y el ancho de 2 metros, si las dos dimensiones se aumentan en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo será el doble del área original. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo rectángulo? Rta: Largo 5,12 y ancho 3,12

12. La ecuación $P(t) = 1.000(30 + 17t - t^2)$ corresponde al crecimiento de una población de peces en t tiempo, medido en años. La primera medida se hizo en el año 1.997.
a-) Cuantos peces había en el año 1.997
b-) A los cuantos años se mueren todos los peces. Rta: a-) 30.000 y b-) 18,61 años

Para las ecuaciones dadas, identificar la cantidad y tipo de raíces posible que se tiene en cada polinomio.

13. $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ Rta: 2 reales positivas, 1 real negativa

14. $x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0$ Rta: 1 real positiva, 2 reales negativas

15. $x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{13}{3}x - 2 = 0$ Rta: 1 real positiva, 2 reales negativas

16. $x^6 - 1 = 0$ Rta: 1 real positiva, 1 real negativa y 4 imag.

Para las ecuaciones dadas, identificar la cantidad y tipo de raíces posible que se tiene en cada polinomio.

17. $2x^6 - 4x^4 + x^2 - 3 = 0$ Rta: 3 reales positivas y 3 reales negativas

18. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ Rta: 4 reales positivas

19. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$ Rta: 2 real positiva, 3 reales negativas

20. $8x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 10 = 0$ Rta: 8 raíces imaginarias

21. $x^6 - 1 = 0$ Rta: 1 real positiva, 1 real negativa y 4 imag.

Dadas las siguientes expresiones, escribirlas como suma de fracciones parciales.

22. $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ Rta: $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$

23. $\frac{5}{(x-1)(x+4)}$ Rta: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}$

24. $\frac{x+14}{x^2 - 2x - 8}$ Rta: $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2}$

CAPÍTULO DOS: LAS INECUACIONES

INTRODUCCIÓN

Las Inecuaciones son expresiones matemáticas donde se comparan dos términos, utilizando principios matemáticos bien definidos. Por esto a las inecuaciones también son conocidas como Desigualdades.

Para desarrollar el tema, inicialmente se analizarán los intervalos, ya que la solución de una desigualdad está dada por uno ó varios intervalos. También se analizarán las propiedades que gobiernan las desigualdades, demostrando algunas de ellas. Al igual que se hizo en las ecuaciones, se estudiarán las clases de inecuaciones, siendo las más importantes las inecuaciones lineales con una incógnita, las inecuaciones lineales con dos incógnitas, las cuadráticas con una incógnita y las mixtas.

Las desigualdades son muy importantes como herramientas para el análisis de temáticas como la Investigación de Operaciones, un área de las Matemáticas muy utilizadas en Ingeniería, Administración, economía y otros campos del saber.

Para abordar con éxito esta temática es pertinente recordar los símbolos de comparación entre dos expresiones algebraicas tales como: >, <, ≥, ≤. Que en su orden indican mayor, menor, mayor o igual y menor o igual, su significado se irá comprendiendo a medida que se vayan estudiando las inecuaciones.

Un trabajo juicioso y sistemático para el desarrollo de la temática De Inecuaciones, permitirá adquirir conocimientos sólidos que conlleven a resolver problemas del mundo real en donde se necesiten las desigualdades.

Lección Doce: Generalidades de las Desigualdades

$$\boxed{ax - b < c}$$

Las desigualdades son expresiones matemáticas donde dos términos p(x) y q(x) se comparan, siendo éstos polinomios ó uno de ellos término independiente. Las formas de comparación se pueden observar a continuación:

$$\boxed{p(x) < q(x)} \quad \boxed{p(x) > q(x)} \quad \boxed{p(x) \leq q(x)} \quad \boxed{p(x) \geq q(x)}$$

En el primer caso p(x) es menor que q(x), para el segundo p(x) es mayor que q(x), en el tercero p(x) es menor o igual a q(x) y en el cuarto p(x) es mayor o igual a q(x). Las dos primeras se les llaman *desigualdades estrictas*.

Por ejemplo si se dice que x > 2, está indicando que cualquier valor mayor que dos, satisface la desigualdad propuesta. Si se dice que x ≤ 5, se está indicando que cualquier valor menor que cinco es solución; pero inclusive cinco es también solución.

Propiedades de las Desigualdades:

Sean a, b, c números reales:

1. **Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$**

Demostración:

Como $a < b$, por definición $b - a$ es positivo; además, $(b + c) - (a + c) = b - a$, entonces $(b + c) - (a + c)$ es positivo, así $a + c < b + c$.

2. **Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$**

Demostración:

Con el mismo argumento del caso anterior, tenemos que $a + (-c) < b + (-c)$, así $a - c < b - c$.

3. **Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \times c < b \times c$**

Demostración:

Como $(a < b)$, luego $(b - a)$ es positivo; además, c es positivo, entonces el producto $(b - a) \times c$ es positivo, así $(b \times c - a \times c)$ es positivo, por lo tanto $(a \times c < b \times c)$.

4. **Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \times c > b \times c$**

Demostración:

Como ejercicio para hacer en el grupo colaborativo, para cualquier duda consultar con el tutor.

5. **Tricotomía:**

Si *a* y *b* son números reales, una de las siguientes expresiones se cumple.

$\boxed{a < b}$ $\boxed{a > b}$ $\boxed{a = b}$

Reflexión: ¿Qué pasa si b = 0?

6. **La NO Negatividad:**

Para cualquier número real a: $a^2 \geq 0$

7. **La Reciprocidad:**

Para cualquier número real $a \neq 0$:

Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$

Si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$

Es pertinente que usted estimado estudiante, plantee al menos dos ejemplo donde se aplique cada propiedad, esto le permitirá comprender la esencia de as mismas.

Las desigualdades pueden ser simples o compuestas.

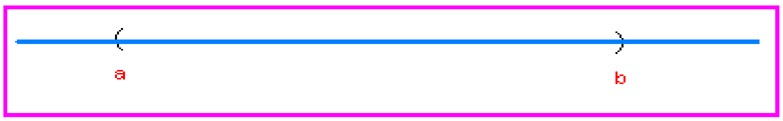
Simples: $ax < b \quad px \geq q$

Compuestas: $a < x < b \quad a \leq px < b$

Lección Trece: Intervalos.

Cuando se tienen expresiones como x > 3, x > 2, x > - 5, otros, se podría preguntar cómo se grafican, la respuesta está en los intervalos.

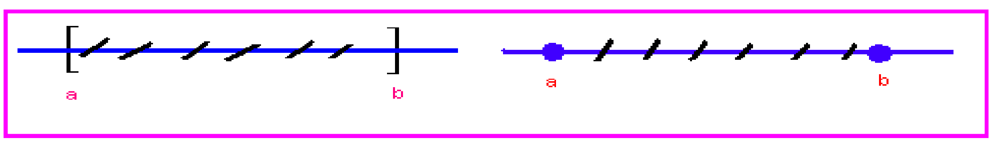
Un intervalo es un segmento de recta con extremos inferior (a) y superior (b), el cual contiene todos los valores que satisfacen la desigualdad.



Existen varias clases de intervalos.

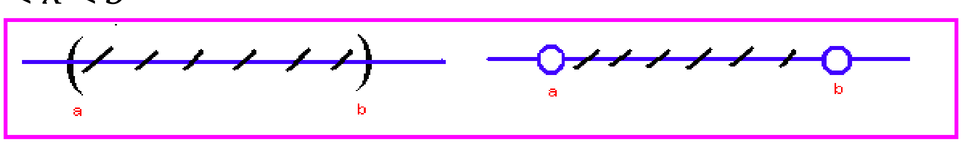
Intervalo Cerrado: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas: $[a, b]$
- Desigualdades: $a \leq x \leq b$
- Gráficamente:



Intervalo Abierto: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, NO hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

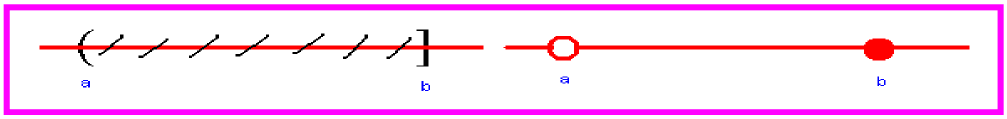
- Parejas ordenadas: (a, b)
- Desigualdades: $a < x < b$
- Gráficamente:



Intervalo Semiabierto: Son todos aquellos intervalos donde uno de los extremos NO hace parte del mismo, pueden ser abiertos a izquierda ó abiertos a derecha.

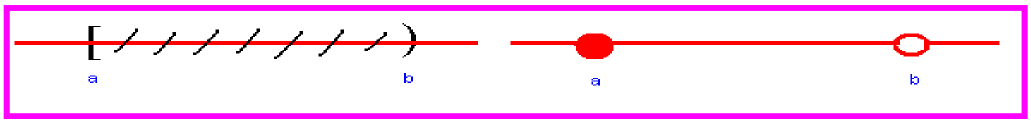
Intervalo Abierto a Derecha: Corresponde a los intervalos donde el extremo derecho es abierto. La notación es:

- parejas ordenadas: $(a,b]$
- Desigualdades: $a < x \leq b$
- Gráficamente:



Intervalo Abierto a izquierda: Corresponde a los intervalos donde el extremo izquierdo es abierto. La notación es:

- parejas ordenadas: $[a,b)$
- Desigualdades: $a \leq x < b$
- Gráficamente :

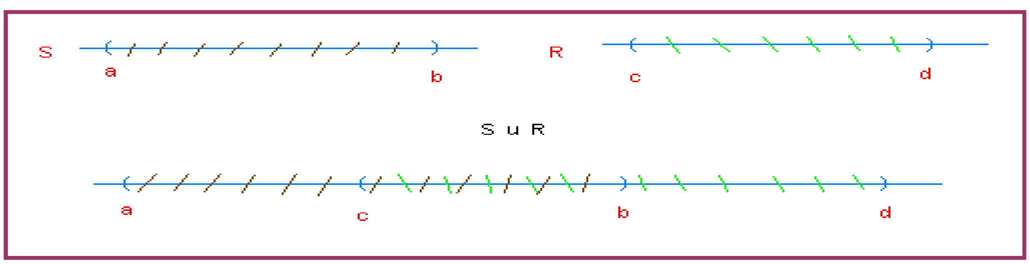


Los intervalos semiabiertos a la izquierda, serán semicerrados a la derecha y viceversa.

OPERACIONES CON INTERVALOS:

Las operaciones estudiadas en los conjuntos, como unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento, son aplicables también en intervalos.

UNION: Se sabe que la unión es la agrupación bajo un mismo conjunto de todos los elementos que hacen parte de la operación. Sea S = (a, b) y R = (c, d), entonces S ∪ R = (a, b) ∪ (c, d)
Gráficamente:



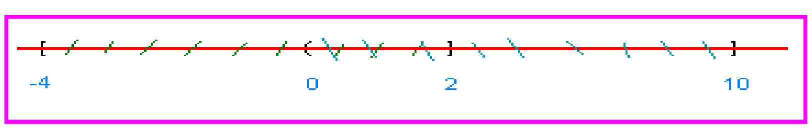
Ejemplo 86:

Sea S = [- 4, 2] y R = (0, 10]. Hallar $S \cup R$

Solución:

$S \cup R = [-4,2] \cup (0,10] = [-4,10]$

Gráficamente $S \cup R$ será:



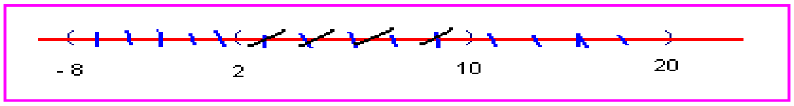
Ejemplo 87:

Dados P = (- 8, 20) y Q = (2, 10)   Hallar $P \cup Q$

Solución:

La operación es: $P \cup Q = (-8,20) \cup (2,10) = (-8,20)$

Gráficamente:



La solución nos hace ver que $Q \subseteq P$; es decir, Q está contenido en P.

INTERSECCIÓN: Se trata de identificar los *elementos comunes* de los conjuntos que participan en la operación.

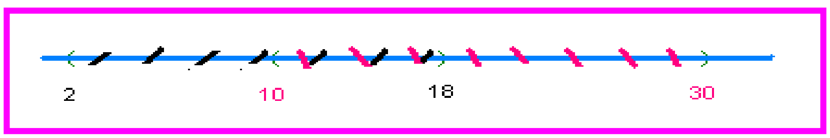
Ejemplo 88:

Dados los intervalos A = (2, 18) y B = (10, 30). Hallar la intersección de A y B.

Solución:

La intersección se expresa así: $A \cap B$ $A \cap B = (2,18) \cap (10,30) = [10,18]$

Gráficamente:



La intersección involucra los elementos que están en los dos intervalos.

Las demás operaciones son similares a como se hace en las operaciones con conjuntos, para el fin de las desigualdades, las operaciones más importantes son al unión e intersección.

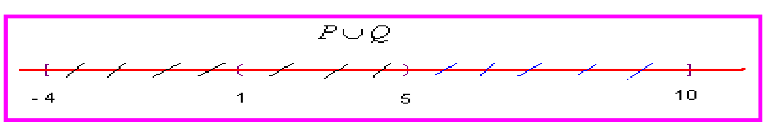
A manera de ilustración veamos el siguiente ejercicio, por favor discutir los resultados con sus compañeros de grupo colaborativo y aclararlo con el Tutor.

Ejemplo 89.

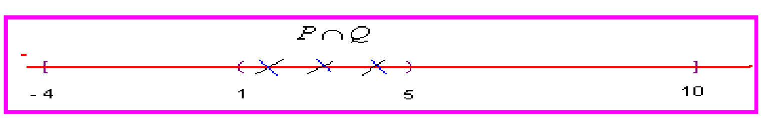
Sean los intervalos P = [- 4, 5) y Q = (1, 10]. Hallar las siguientes operaciones.
$P \cup Q$, $P \cap Q$, $P - Q$, $P \Delta Q$

Solución:

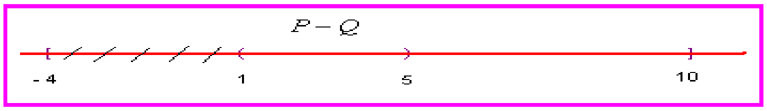
-) $P \cup Q$:   [-4, 10]



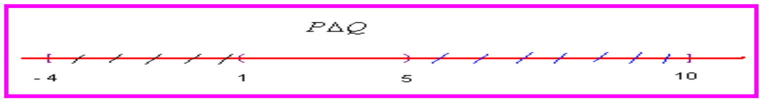
-) $P \cap Q$:   [1, 5]



-) $P - Q$: [- 4, 1]



-) $P \Delta Q$: [- 4, 1] u [5, 10]



Lección Catorce: Inecuaciones Lineales con Una Incógnita

$$\boxed{ax + b < 0}$$

Las inecuaciones lineales son aquellas donde el polinomio que la representa, tiene la incógnita cuyo grado es uno, a continuación se estudiarán las inecuaciones lineales con una incógnita.

Las inecuaciones lineales con una incógnita son de la forma $ax+b>c$, aunque puede ser con cualquiera de los signos de comparación. La resolución de inecuaciones de este tipo, requiere el uso de las propiedades analizadas en desigualdades y los principios matemáticos básicos.

Ejemplo 90:

Resolver la siguiente inecuación: $3x + 4 < 11$

Solución:

El proceso consiste en espejar la incógnita, dejándola al lado derecho de la desigualdad.

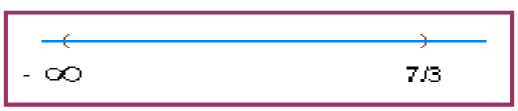
Por la propiedad 1, adicionamos – 4 a los dos lados de la expresión, para ir despejando la incógnita.

$3x + 4 - 4 < 11 - 4 \Rightarrow\Rightarrow 3x < 7$

Por la propiedad 7, sobre la reciprocidad, se divide por 3, como es un valor positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, de esta manera se despeja completamente la incógnita.

$$3x < 7 \Rightarrow\Rightarrow \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(7) \Rightarrow\Rightarrow x < \frac{7}{3}$$

Solución: x < 7/3.



Esto significa que cualquier valor menor que 7/3 satisface la desigualdad. Veamos un ejemplo x = 0, si lo reemplazamos en la desigualdad, ésta debe ser verdadera.

$3x + 4 < 11 \Rightarrow\Rightarrow 3(0) < 11 \Rightarrow\Rightarrow 3 < 11$ Lo cual es verdadero. Cuando en la solución se toma un solo valor y se cumple, significa que en los demás valores del intervalo también se cumple. Para el ejemplo analizado, la solución NO incluye el extremo ya que es una desigualdad estricta.

Ejemplo 91:

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $4(x+5) + x \geq 3(x+1)$

Solución:

Lo primero que se debe realizar es operar los paréntesis.

$$4(x+5)+x \geq 3(x+1) \Rightarrow\Rightarrow 4x+20+x \geq 3x+3 \Rightarrow\Rightarrow 5x+20 \geq 3x+3$$

Aplicando las propiedades básicas de desigualdades tenemos:

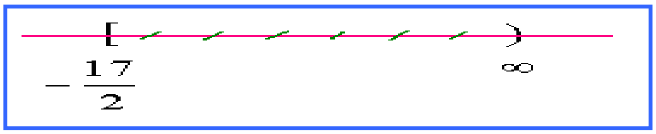
$$5x+20 \geq 3x+3 \Rightarrow\Rightarrow 5x-3x \geq 3-20 \Rightarrow\Rightarrow 2x \geq -17 \Rightarrow\Rightarrow x \geq -\frac{17}{2}$$

La solución indica que el extremo también hace parte del intervalo. Expresemos dicha solución como pareja ordenada, como desigualdad y gráficamente.

-) Pareja ordenada: $[-\frac{17}{2},\infty)$

-) desigualdad: $-\frac{17}{2} \leq x < \infty$

-) Gráficamente



Ejemplo 92:

Resolver $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$

Solución:

Se observa que se trata de una desigualdad compuesta, el procedimiento para despajar la incógnita, lo podemos ver en seguida. Primero multiplicamos toda la expresión por 2 para eliminar el dos del denominador de la parte que contiene la incógnita.

$$-5(2) \leq \frac{(4-3x)(2)}{2} < (2)1 \Rightarrow\Rightarrow -10 \leq 4-3x < 2$$

Ahora restamos – 4 a los términos para seguir despejando la incógnita

$$-10-4 \leq 4-4-3x < 2-4 \Rightarrow\Rightarrow -14 \leq -3x < -2$$

Dividimos todo por -3 para que la incógnita quede despajada, pero recordemos que si una desigualdad la dividimos por un valor negativo, el sentido cambia.

$$-14 \leq -3x < -2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{-14}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \Rightarrow\Rightarrow \frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow\Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

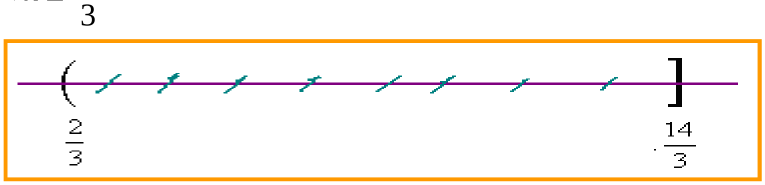
La solución indica que todo valor mayor que 2/3 y menor o igual que 14/3 satisface la desigualdad. El intervalo solución es semiabierto a derecha.

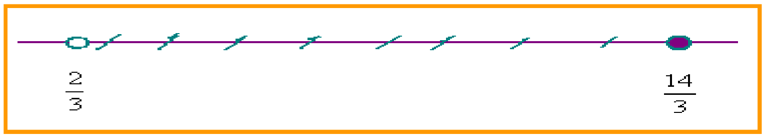
Expresemos la solución como se acostumbra.

-) Pareja Ordenada: $(\frac{2}{3},\frac{14}{3}]$

-) Desigualdad: $\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$

-) Gráficamente:





Ejemplo 93:

Hallar los valores de x que satisfagan la expresión. $\frac{1}{x-2} > 0$

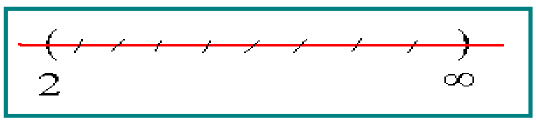
Solución:

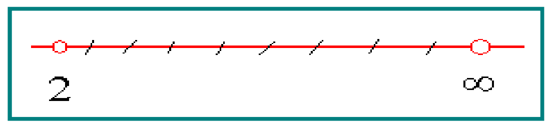
Analizando la desigualdad, se observa que el numerador siempre es positivo, entonces para que la fracción sea mayor que cero, el denominador debe ser mayor que cero. Así: x – 2 > 0, despejando la incógnita: x – 2 + 2 > 0 + 2, entonces: x > 2.

-) Pareja Ordenada: $(2, \infty)$

-) Desigualdad: $2 < x < \infty$

-) Gráficamente:





Ejemplo 94:

Resolver $\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2}$

Solución:

Por el principio de facciones equivalentes, transformamos las fracciones a expresiones enteras.

$\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2(y+1) \leq 3(y+1)$

Ahora se hacen las multiplicaciones indicadas y se simplifica.

$$2(y+1) \leq 3(y+1) \Rightarrow\Rightarrow 2y + 2 \leq 3y + 3 \Rightarrow\Rightarrow 2y - 3y \leq 3 - 2 \Rightarrow\Rightarrow -y \leq 1$$

Como la incógnita nos da negativa, entonces multiplicamos toda la expresión por -1. $-y \leq 1 \Rightarrow\Rightarrow y \geq -1$

La solución:

-) Pareja Ordenada: $[-1, \infty)$

-) Desigualdad: $-1 \leq y < \infty$

-) Gráficamente

Lección Quince: Inecuaciones Racionales.

En este apartado se van a analizar las inecuaciones racionales cuyo numerador y denominador son polinomios lineales.

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)} < c$ Siendo q(x) ≠ 0.

La resolución de este tipo de inecuaciones se puede hacer por dos métodos, por conectivos lógicos o por el diagrama de signos.

-) Conectivos Lógicos:

Consiste en comparar la fracción frente al cero.

a) Sea $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)} < 0}$

Para que la fracción sea negativa (menor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

$$\boxed{\mathbf{p(x) > 0 \;\wedge\; q(x) < 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \;\wedge\; q(x) > 0}}$$

Ya que un valor positivo y un valor negativo ó un valor negativo y un valor positivo, producen siempre negativo.

b) Sea $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0}$

Para que la fracción sea positiva (mayor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

$$\boxed{\mathbf{p(x) > 0 \;\wedge\; q(x) > 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \;\; y \;\; q(x) < 0}}$$

Ya que un valor positivo y otro positivo, ó un valor negativo y otro negativo, siempre produce positivo.

Si nos detenemos un poco a analizar este método, se puede ver que hay involucrados dos conectivos lógicos, la Conjunción (Λ) y la Disyunción (V).

Ejemplo 95:

Resolver la siguiente inecuación: $\dfrac{x+2}{x+3} > 0$

Solución:

$\dfrac{x+2}{x+3} > 0$

Llamemos p(x) = x + 2 y q(x) = x + 3, entonces:

Para que $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ Pueden ocurrir dos situaciones:

P(x) > 0 Λ q(x) > 0 , V, **p(x) < 0 Λ q(x) < 0**

Dichos en palabras: Los dos positivos o los dos negativos (*tiene lógica verdad*)

Analicemos las dos posibilidades:

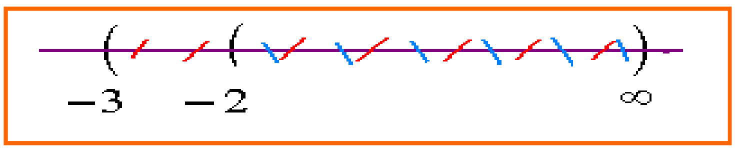
-) Primera: **P(x) > 0 Λ q(x) > 0**

x + 2 > 0, x > -2

x + 3 > 0, x > -3

Como entre p(x) y q(x) hay una conjunción (**Λ**) se debe hacer intersección entre los intervalos.

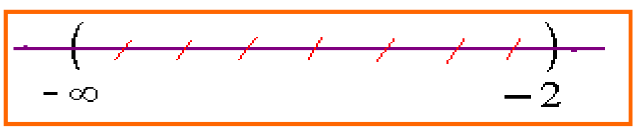
P(x) **Λ** q(x)



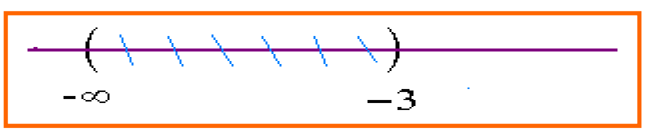
Primera solución: (-2, ∞)

-) Segunda: **p(x) < 0 Λ q(x) < 0**

x + 2 < o, x < -2

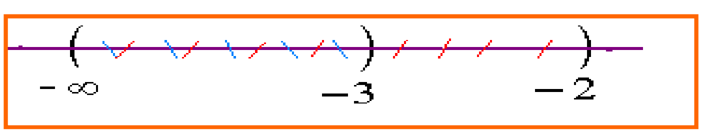


x + 3 < 0, x < -3



Igual que en el caso anterior:

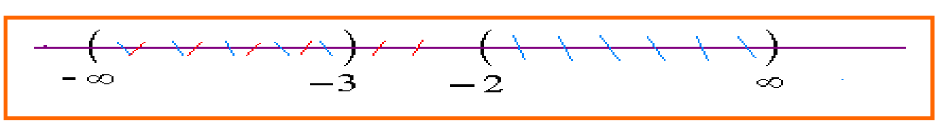
p(x) **Λ** q(x)



Segunda Solución: (-∞, -3)

Como ya se contemplaron las dos posibilidades, la solución total es la unión (V) de la primera y segunda solución. Solución Total: $(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$

Gráficamente:



-) Diagrama de Signos:

Por este método, se toma el polinomio del numerador y del denominador y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. Cada polinomio es representado por una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para cociente y se obtiene intervalos positivos y negativos para la fracción. La solución depende del tipo de comparación: Si la fracción es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si la fracción es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Por medio de los ejemplo modelos, se puede comprender mejor los métodos mencionados.

Ejemplo 96:

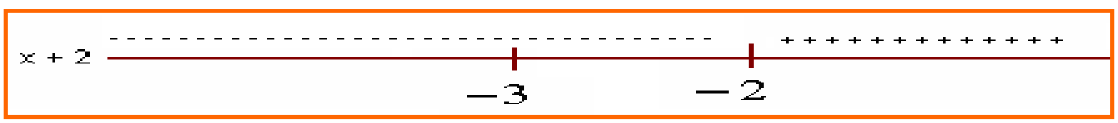
Resolver la siguiente inecuación: $\dfrac{x+2}{x+3} > 0$

Solución:

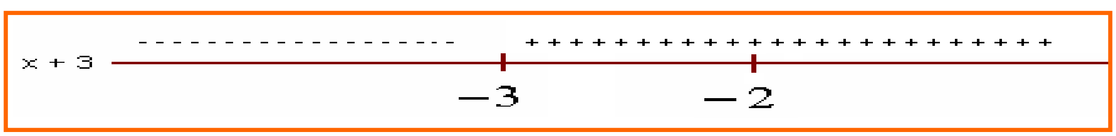
$\dfrac{x+2}{x+3} > 0$

Llamemos p(x) = x + 2 y q(x) = x + 3, entonces:

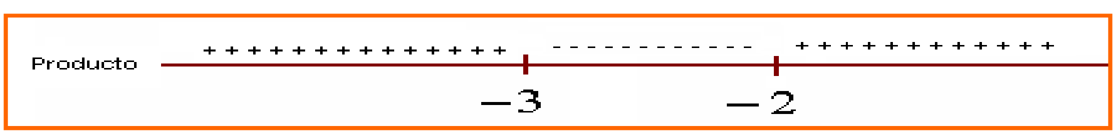
Para el numerador: x + 2 = 0, el valor de x que hace cero la expresión es - 2, punto crítico x = – 2. Cualquier valor mayor de – 2 hace positiva la expresión (x + 2) y cualquier valor menor de -2 hace negativa dicha expresión. Se hace la recta real con este análisis.



Para el polinomio del denominador: x + 3 = 0, el valor de x que hace cero la expresión es -3, punto crítico x = - 3.



Se agrupan los dos resultados y se hace producto de signos.



Como la fracción debe ser mayor que cero, la solución será los intervalos positivos del producto, es decir: $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$

Los dos métodos son interesantes, aunque el segundo es algo más corto. Se recomienda aprender los dos.

Ejemplo 97:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\dfrac{3x-12}{2x+6} < 0$

Solución:

Para que la fracción sea negativa, se requiere que uno término sea negativo y el otros positivo y viceversa.

Método de Conectivos Lógicos:

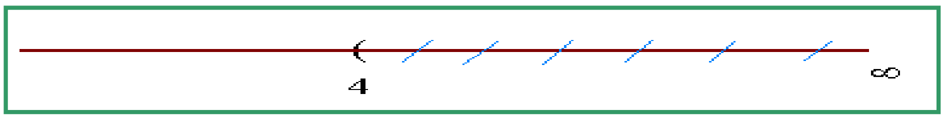
Como la fracción es menor que cero se pueden presentar dos posibilidades:

$p(x) > 0 \;\wedge\; q(x) < 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \;\wedge\; q(x) > 0$

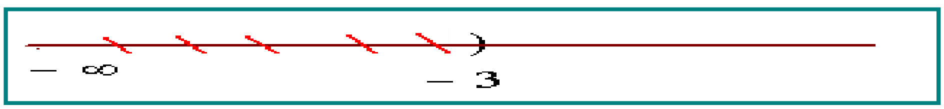
Primera posibilidad: **$p(x) > 0 \;\wedge\; q(x) < 0$**

Reemplazamos

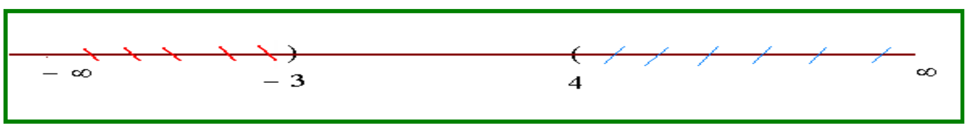
3x – 12 > 0, x > 4



2x + 6 < 0, x < -3



Como entre p(x) y q(x) hay una conjunción (**∧**) se debe hacer intersección entre los intervalos.

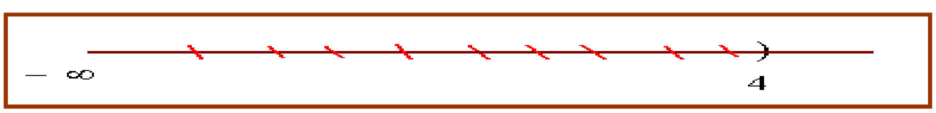


Se observa que NO hay elementos comunes, luego la solución es vacía. $\{\phi\}$

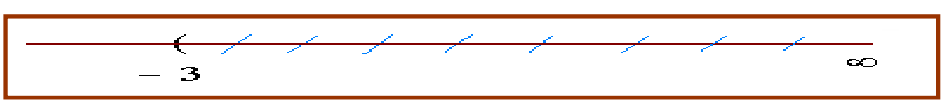
Segunda posibilidad: **$p(x) < 0 \;\wedge\; q(x) > 0$**

Reemplazando:

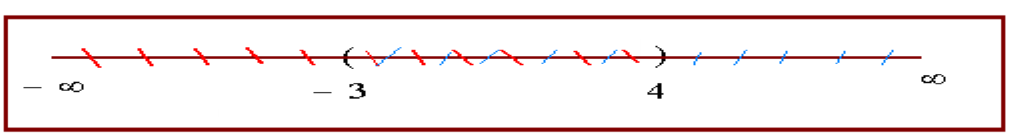
3x – 12 < 0, x < 4



2x + 6 > 0, x > -3



Hacemos la intersección de los intervalos:



La solución total será: $\{\phi\} \cup (-3,4) = (-3,4)$
Cualquier valor del intervalo (-3, 4) satisface la desigualdad propuesta. Recordemos que para este caso, los extremos NO se incluyen en la solución.

Ejemplo 98:

Resolver la inecuación: $\frac{x+4}{2x-1} < 2$

Solución:

Antes de aplicar cualquiera de los métodos descritos, se debe transformar la expresión de tal forma que el segundo término sea cero, para hacer la comparación.

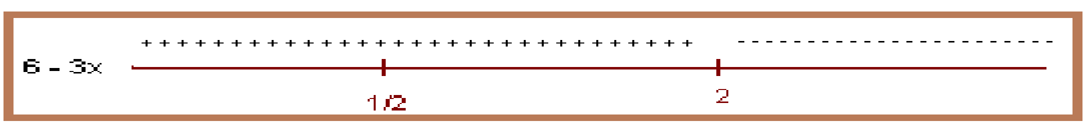
$$\frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 2 < 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{(x+4)-2(2x-1)}{2x-1} < 0$$

Operando y simplificando: $\frac{(x+4)-2(2x-1)}{2x-1} < 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{6-3x}{2x-1} < 0$

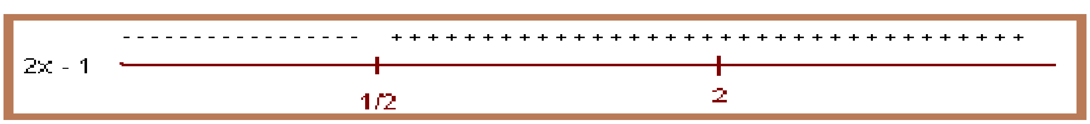
Ahora si tenemos la fracción comparada con cero, por lo que se puede aplicar cualquiera de los métodos analizados para este tipo de inecuaciones.

Método de Diagrama de Signos:

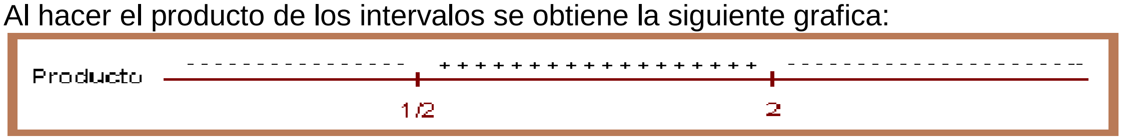
6 – 3x = 0, x = 2. Punto crítico (2). Todos los valores mayores que x = 2, hacen la expresión negativa y todos los valores menores que x = 2 la hacen positiva.



2x – 1 = 0, x = ½ Punto crítico (½). Todos los valores mayores que ½ hacen la expresión positiva y los valores menores que ½ la hacen negativa.



Al hacer el producto de los intervalos se obtiene la siguiente grafica:



Como la desigualdad inicial debe ser negativa; es decir, menor que cero, entonces la solución serán los intervalos negativos.

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$

Lección Dieciséis: Inecuaciones Cuadráticas

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$$

Las inecuaciones cuadráticas son de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, pero puede ser >, ≤, ≥. Con a ≠ 0. La resolución para este tipo de inecuaciones es similar al caso de las inecuaciones racionales lineales.

Lo primero que se debe hacer para resolver una inecuación cuadrática es llevarla a la comparación con cero y luego linealizarla; es decir, expresarla como producto de dos factores lineales, lo que se puede hacer por factorización o por la fórmula cuadrática.

Si se tiene la inecuación: $ax^2 + bx + c < 0$ se puede transformar en un producto: $\alpha \; x \; \beta \; < \; 0$
Cuando en la inecuación el segundo término es cero, se aplica uno de los métodos propuestos, ya sea conectivos lógicos o diagrama de signos.

-) Conectivos Lógicos:

Dada una inecuación cualquiera, $ax^2 + bx + c > 0$ ó $ax^2 + bx + c < 0$ se puede presenta los siguientes casos.

1. $\alpha \; x \; \beta \; > \; 0$

Para que el producto de los dos factores sea positivo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0 \;\wedge\; \beta > 0$ Un valor positivo por otro valor positivo produce un valor positivo.

V

-) $\alpha < 0 \;\wedge\; \beta < 0$ Un valor negativo por otro valor negativo produce un valor positivo

2. $\alpha \; x \; \beta \; < \; 0$

Para que el producto de los dos factores sea negativo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0 \;\wedge\; \beta < 0$ Positivo por negativo produce negativo

V

-) $\alpha < 0 \;\wedge\; \beta > 0$ Negativo por positivo produce negativo.

Se puede observar que cada posibilidad origina dos intervalos los cuales se intersecan y las dos soluciones de las dos posibilidades se unen para obtener la solución total.

Ejemplo 99:

Resolver la inecuación: $x^2 - x - 6 < 0$

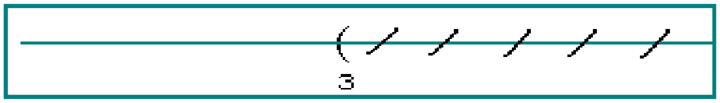
Solución:

Primero se linealiza el trinomio cuadrado. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) < 0$

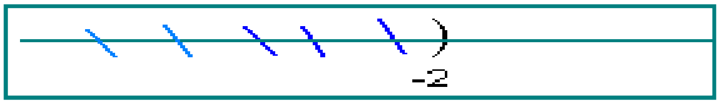
Como los factores deben ser menor que cero, las posibilidades son:

a-)

x – 3 > 0, x > 3



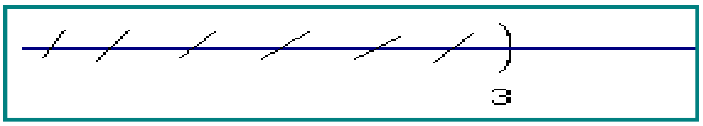
x + 2 < 0, x < -2



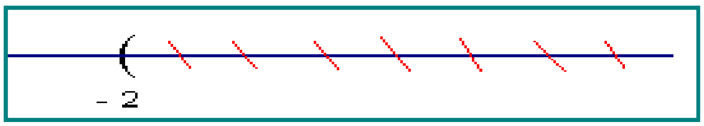
La intersección entre estos intervalos es vacío: (Φ)

b-)

x – 3 < 0, x < 3



x + 2 > 0, x > -2



La intersección para esta posibilidad es el intervalo (- 2, 3)

La solución total será la unión de las dos soluciones obtenidas, (Φ) ∪ (- 2, 3)

Solución total: (- 2, 3)

-) Diagrama de Signos:

Por este método se toman los polinomios de los dos factores y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. A cada polinomio se le hace una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para producto y se obtiene intervalos positivos y negativos para la inecuación. La solución depende del tipo de comparación: Si la inecuación cuadrática es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Ejemplo 100:

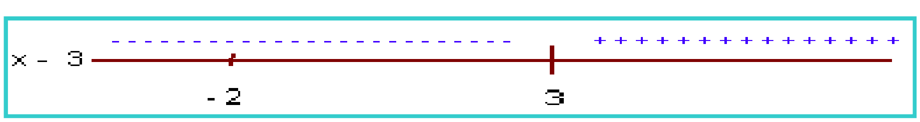
Resolver el ejemplo anterior por diagrama de signos: $x^2 - x - 6 < 0$

Solución:

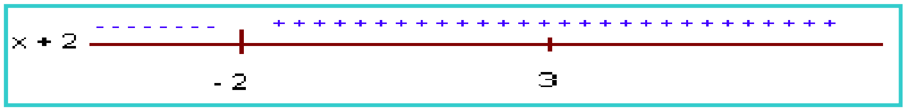
Por medio de diagrama de Signos: A partir de la inecuación dada, se linealizada, iniciamos el proceso.

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) < 0$$

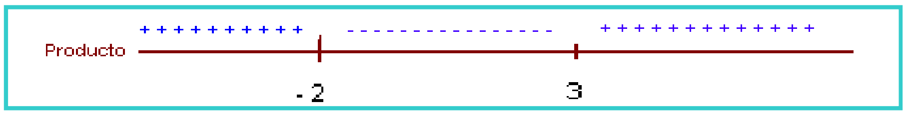
x – 3 = 0, valor critico x = 3. Cualquier valor mayor que 3 hará positiva la expresión y cualquier valor menor que 3 la hará negativa.



x + 2 = 0, valor crítico x = -2. Cualquier valor mayor que -2 hará positiva la expresión y viceversa.



Producto de signos:



Así como la inecuación debe ser menor que cero, la solución será la parte negativa del producto.
Solución: (- 2, 3)

Ejemplo 101:

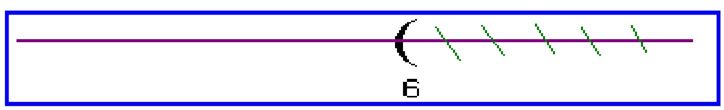
Hallar el conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 4x - 12 > 0$

Solución:

Se va a utilizar los conectivos lógicos. Entonces: $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2) > 0$

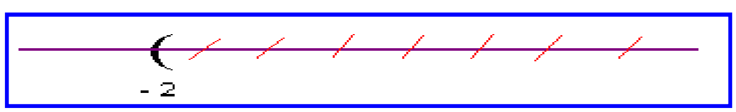
Como el producto de los factores debe ser positivo, entonces las posibilidades son:

a-)   x – 6 > 0, x > 6



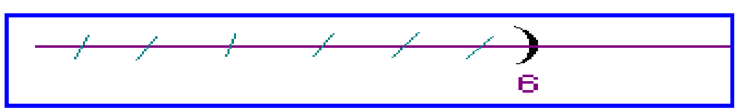
$\wedge$

x + 2 > 0, x > -2



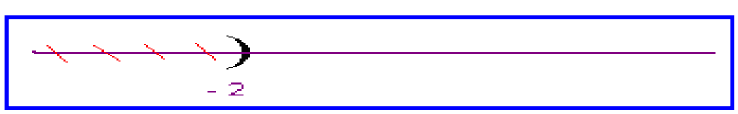
Primera solución: La intersección de los dos intervalos: $(6, \infty)$

b-)   x – 6 < 0, x < 6



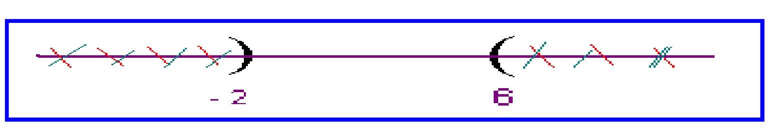
$\wedge$

x + 2 < 0, x < -2



Segunda solución: La intersección de los intervalos es: $(-\infty, -2)$

La solución total: $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$



Ejemplo 102:

Resolver la siguiente inecuación: $x^4 \leq x$

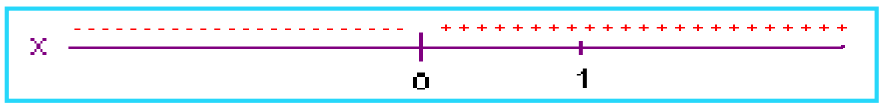
Solución:

Primero la comparamos con cero. $x^4 - x \leq 0$

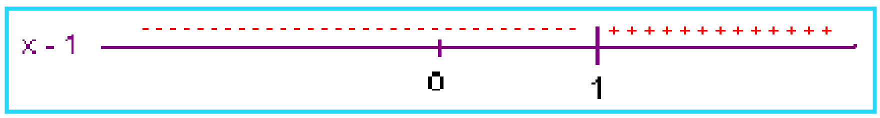
Ahora la linealizamos: $x(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

Para cada término identificamos el punto crítico y los intervalos positivos y negativos.

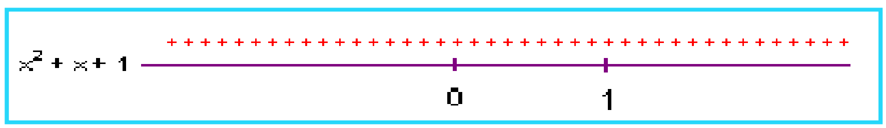
x: Valor crítico x = 0.



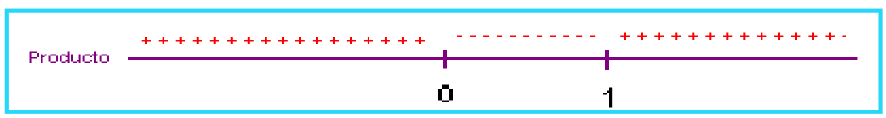
x – 1: Valor crítico x = 1



$x^2 + x + 1$: No hay valor crítico. (Por qué)



El producto:



Como la inecuación no es estricta y debe ser menor que cero, la solución incluye los extremos y será la parte negativa del intervalo obtenido. Entonces la solución:

Como pareja ordenada: [0, 1] Como desigualdad: $0 \leq x \leq 1$

OBSERVACIÓN:

Los ejemplos modelos que se han ilustrado, muestran que las inecuaciones racionales y cuadráticas (también polinómicas) se pueden resolver por el método de los conectivos lógicos y del diagrama de signos; también llamado técnica del cementerio; por aquello de las cruces. Cualquiera de los métodos es válido para desarrollar inecuaciones, pero para muchos casos es más pertinente el diagrama de signos, como es el caso de las inecuaciones mixtas o de grado tres o más.

Lección Diecisiete: Inecuaciones Mixtas

En este contexto se ha determinado que las *inecuaciones mixtas* sean aquellas que además de ser racionales, tengan en el numerador polinomios de grado dos o más, igual en el denominador. El camino de solución para este tipo de inecuaciones es el *diagrama de signos* por su facilidad y mejor manejo.

Ejemplo 103:

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} < 0$

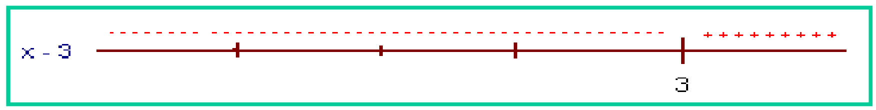
Solución:

Como se ha venido trabajando, lo primero es linealizar los términos.

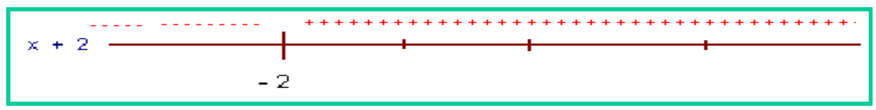
$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)} < 0$$

Como ya la tenemos linealizada, entonces se procede a tomar cada término para identificar el valor crítico.

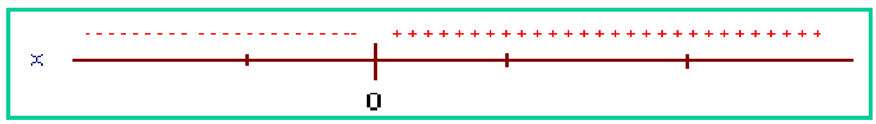
x – 3 = 0, valor critico x = 3



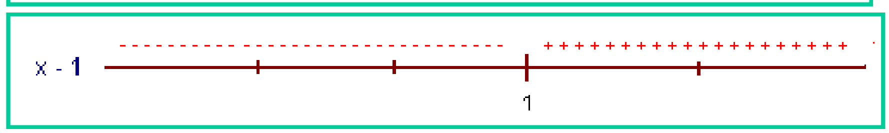
x + 2 = 0, valor crítico x = -2



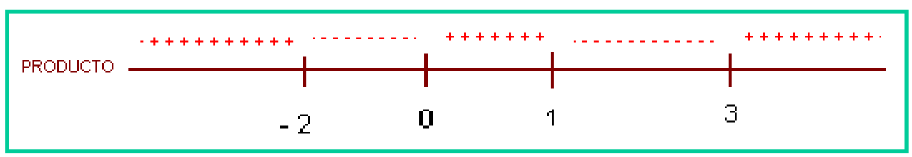
x, valor critico x = 0



x – 1 = 0, valor crítico x = 1



Por la ley de los signos para producto.



Como la fracción debe ser menor que cero, entonces la solución serán los intervalos: (- 2, 0) U (1, 3)

Ejemplo 104:

Resolver: $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2$

Solución:

Primero se lleva la fracción a compararla con cero.

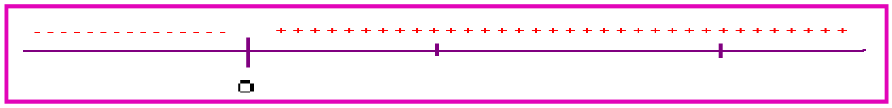
$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - 2 \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0$$

Operando y simplificando: $\dfrac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1} \leq 0$

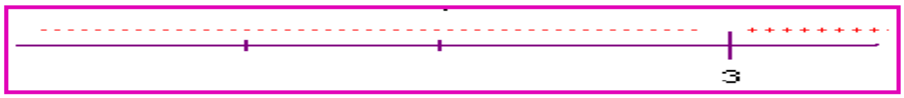
Ahora se linealiza los términos de la fracción: $\frac{x^2 - 3x}{x - 1} \le 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x(x-3)}{x-1} \le 0$

Se identifican los valores críticos.

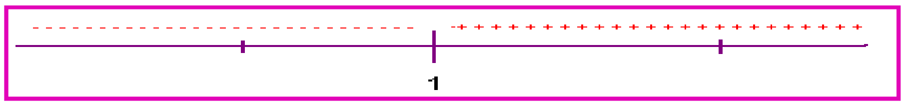
x, valor crítico x = 0



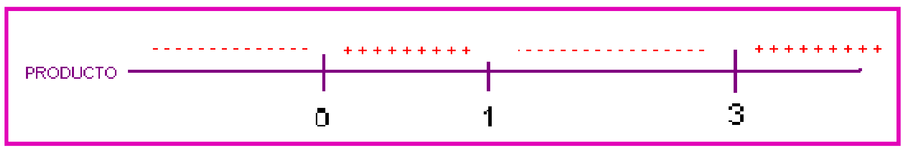
x – 3, valor crítico x = 3



x – 1, valor crítico x = 1



Por la ley de los signos para producto.



De la expresión original, se infiere que x ≠ 1, ya que cuando x = 1 la fracción se vuelve indeterminada; además, la desigualdad no es estricta, luego la solución puede incluir los extremos, teniendo en cuenta por supuesto la restricción identificada.
Se observa que la fracción debe ser menor o igual que cero, entonces la solución será los intervalos negativos del producto obtenido. Solución: $(-\infty \ ,0\,] \cup \ (1\,,3\,]$

En la medida que se estudien detalladamente los ejemplos modelos y se resuelvan los ejercicios propuestos, se podrá comprender e interiorizar las inecuaciones, así su aplicación en cualquier contexto.

Lección Dieciocho: Inecuaciones con Dos Incógnitas $\boxed{ax + by + c > 0}$

Las inecuaciones con dos incógnitas pueden ser de la forma $ax + by < k$, $ax^2 + by > k$ otras. Siendo k un real. Inicialmente se estudiarán las técnicas de resolución de este tipo de inecuaciones para luego analizar algunas aplicaciones.

Resolver una inecuación con dos incógnitas, es hallar un conjunto de puntos en el plano; llamado también semiplano, que llamaremos R, los cuales deben satisfacer la inecuación.

Se expondrá una metodología general para resolver una inecuación con dos incógnitas.

1. Dada la desigualdad $ax + by < 0$, se expresa temporalmente como igualdad $ax + by = 0$, para hacer una gráfica, que puede ser una recta, una parábola, etc. Si la desigualdad es estricta (>, <) la línea límite se hace interrumpida (- - - - -), pero si la desigualdad no es estricta (≥, ≤), la línea será continua (———).

2. La línea obtenida divide el plano en dos semiplanos, se prueba un punto (x, y) en cada semiplano, para determinar en cuál de ellos la desigualdad se hace verdadera. Esto nos indica que solo en uno de ellos, la inecuación es válida.

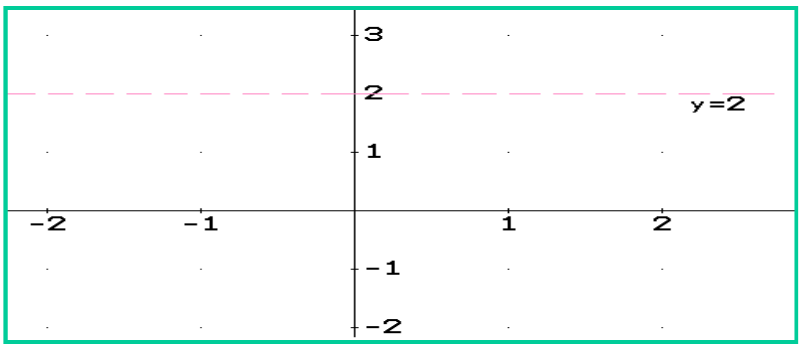
3. El punto que hace verdadera la desigualdad incluye el semiplano que lo contiene, luego dicho semiplano será la solución, generalmente se subraya o sombrea.

Ejemplo 105:

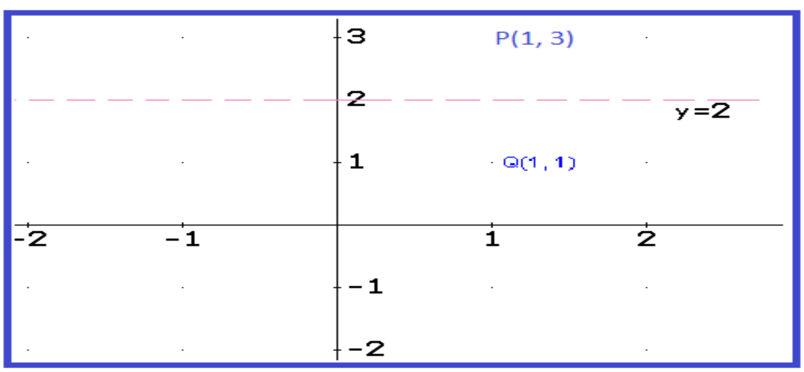
Resolver la desigualdad: $y > 2$.

Solución:

Primero hacemos $y = 2$, para graficar, se sabe que esto corresponde a una recta horizontal, se observa de color rojo en la ilustración, con líneas interrumpidas, ya que la desigualdad es estricta.

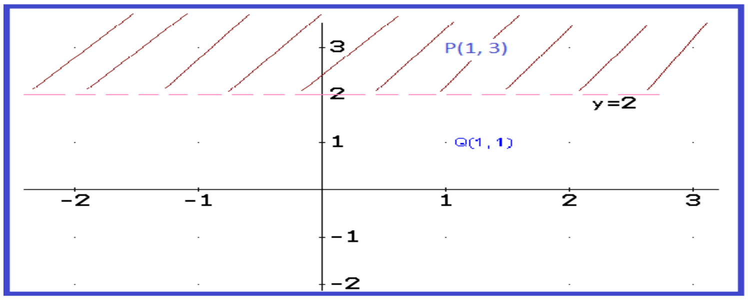


Reemplazamos dos puntos, digamos P(3, 1) y Q(1, 1). Se puede ver que P esta en el semiplano superior y Q en el semiplano inferior.



Según la desigualdad dada, $y > 0$, el semiplano superior, satisface la desigualdad; es decir, el que inicia en la recta interrumpida de color rojo hacia arriba. El punto Q no satisface la desigualdad.

El conjunto solución será el semiplano superior, lo que se expresa subrayado.



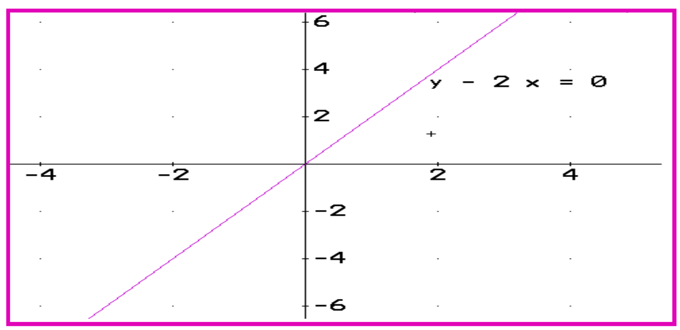
Ejemplo 106:

Dada la expresión, y ≥ 2x, hallar el conjunto de punto en el plano que satisfaga la inecuación dada.

Solución:

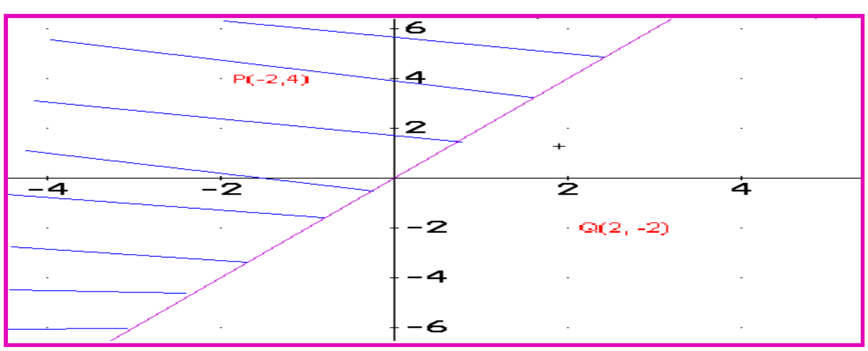
Primero ajustamos la desigualdad: y – 2x ≥ 0.   En seguida expresamos y – 2x = 0 para graficar, como corresponde a una ecuación de primer grado, la gráfica es una recta, entonces se toman dos puntos:
Para x = 0, y – 2(0) = 0, entonces y = 0.   (0, 0)
Para x = 2, y – 2(2) = 0, entonces y = 4   (2, 4)

Como se tienen dos puntos, por los axiomas euclidianos, entre los que se tiene aquel famoso que dice: "*Por dos puntos solo pasa una y solo una recta*" Esta será continua, ya que la desigualdad no es estricta.



Para identificar el semiplano de solución, reemplacemos dos puntos, digamos: P (-2, 4) y Q (2, - 2), ya que P está por encima del plano y Q está por debajo. Si se reemplaza dicho puntos en la inecuación:
Para P (-2, 4): Como y ≥ 2 x, entonces: 4 ≥ 2(-2) Verdadero.
Para Q (2, - 2): para la misma desigualdad: - 2 ≥ 2(2) Falso.

El punto P es solución de la inecuación, luego el semiplano que contiene a dicho punto es la solución de la inecuación planteada.



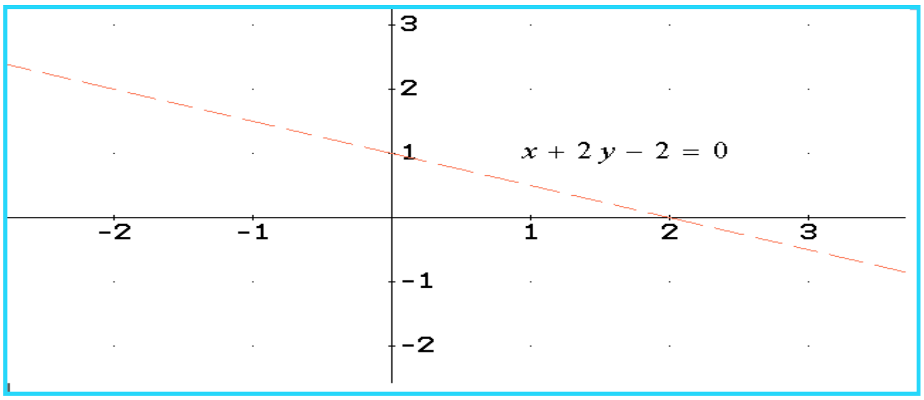
Cualquier punto de la parte rayada, es solución de la inecuación.

Ejemplo 107:

Determinar el conjunto solución de la desigualdad: $x + 2y < 2$

Solución:

Llevamos la expresión a una comparación con cero. $x + 2y - 2 < 0$ Luego planteamos la ecuación temporal: $x + 2y - 2 = 0$ Por ser una ecuación lineal, con dos puntos es suficiente para graficar. Tomemos por ejemplo x = 0 y x = 2.
x = 0, reemplazando: 0 + 2 y – 2 = 0, y = 1, luego el punto: (0, 1)
x = 2, reemplazando: 2 + 2 y - 2 = 0, y = 0, luego el punto: (2, 0)



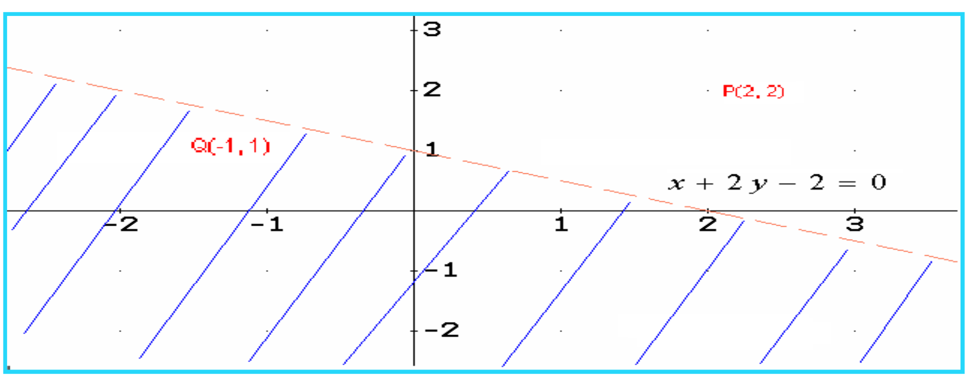
Ahora buscamos un punto por encima y por debajo del plano que esta separado por la recta, para identificar el conjunto de puntos solución.

Tomemos los puntos: P (2, 2) y Q (- 1, 1) Es de aclarar que los puntos que se toman son arbitrarios, solo se debe tener presente que estén en la parte del plano correspondiente.

Para P (2, 2): 2 + 2(2) – 2 < 0 Falso.

Para Q (- 1,1): -1 + 2(1) – 2 < 0 Verdadero

El conjunto solución contiene el punto Q.



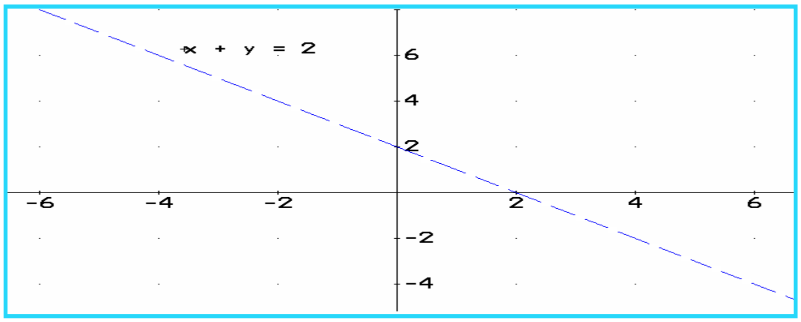
Ejemplo 108:

Resolver el sistema: x + y > 2 y 2 x – y ≤ 4

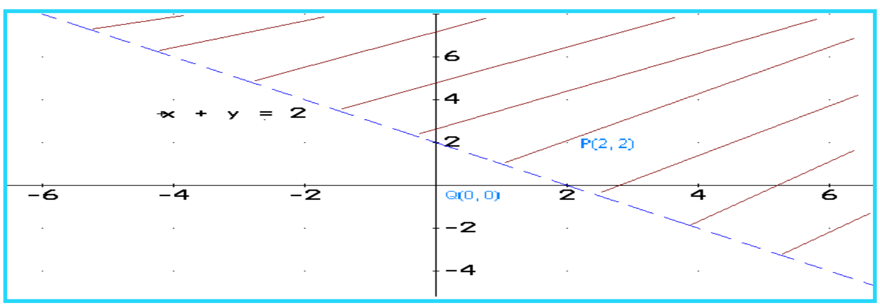
Solución:

Para este caso se debe hacer dos procesos uno para cada inecuación, la solución será la intersección de los dos casos.

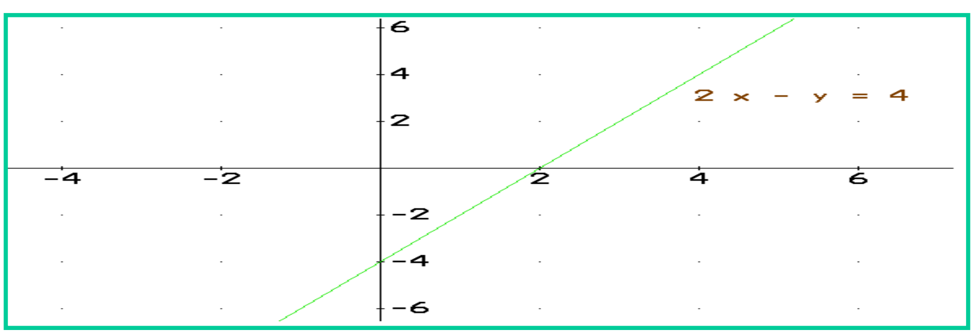
Primer Caso: **x + y > 2**. Planteamos la ecuación temporal x + y = 2, damos valores a x, veamos:
x = 0, entonces y = 2, el punto (0, 2)
x = 2, entonces y = 0, el punto (2, 0)
La gráfica será.



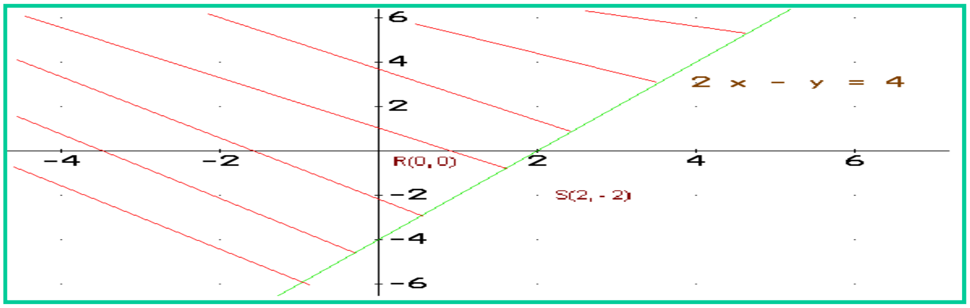
Tomemos el punto P(2, 2) y el punto Q(0, 0), los reemplazamos en la inecuación.
Para P (2, 2): x + y > 2, luego: (2) + (2) > 2. Verdadero
Para Q (0, 0): x + y > 2, luego: (0) + (0) > 2. Falso.
El semiplano solución será el que contiene el punto P (2, 2).



Segundo Caso: 2 x – y ≤ 4. La ecuación temporal 2 x – y = 4. Los puntos:
Tomemos x = 0, entonces y = -4, el punto (0, -4)
x = 2, entonces y = 0, el punto (2, 0). La gráfica:



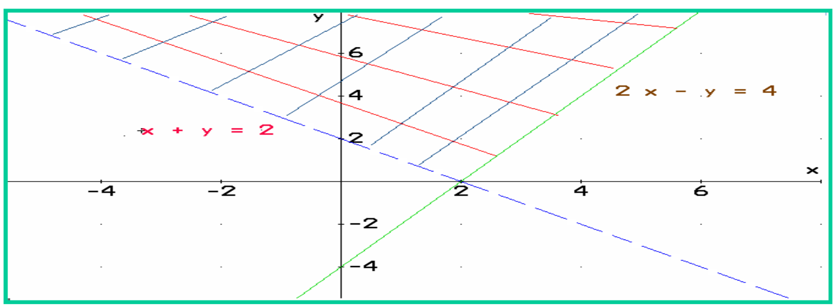
Tomemos los puntos:
R (0, 0): 2 x – y ≤ 4, luego: 2(0) – (0) ≤ 4. Verdadero
S (2, -2): 2 x – y ≤ 4, luego: 2(2) – (-2) ≤ 4. Falso
El semiplano solución debe contener al punto R (0, 0)



Como ya se tienen las dos soluciones, una para cada inecuación, en seguida se debe hallar la solución total, la cual será *la intersección* de las soluciones obtenidas.

El cruce de líneas en la siguiente gráfica, esta indicando la intersección, dicho semiplano satisface simultáneamente las dos inecuaciones planteadas en el ejemplo. Si tomamos un punto cualquiera en dicho semiplano digamos (2, 4), éste debe hacer verdaderas las dos desigualdades simultáneamente.

Para x + y > 2: (2) + (4) > 2. Lo cual es verdadero.
Para 2 x – y ≤ 4: 2(2) – (4) ≤ 4. Que también es verdadero.



La solución es la parte que presenta cuadrículas.

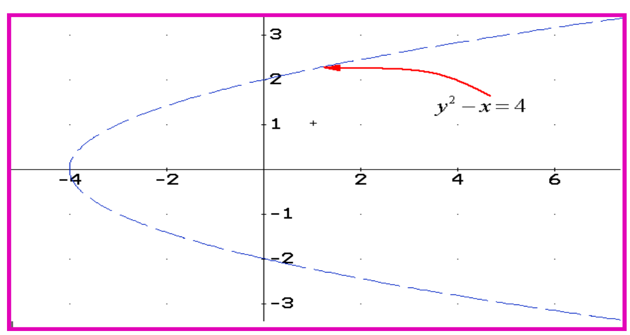
Ejemplo 109:

Identificar el conjunto solución para la inecuación:

$$x+4>y^2$$

Solución:
Se observa que corresponde a una expresión cuadrática: Entonces: $x+4=y^2$

Reorganizándolo: $y^2-x=4$ La grafica:



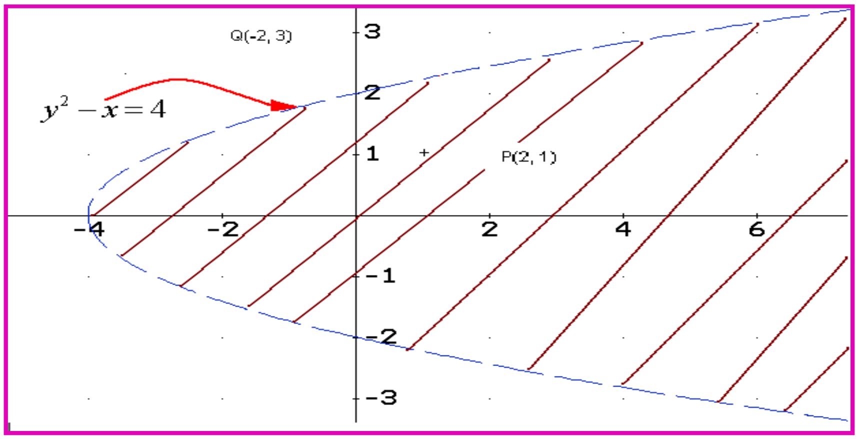
Para encontrar el semiplano solución, tomemos dos puntos un dentro y otro fuera de la curva.

Punto dentro de la curva: P(2, 1). Punto fuera de la curva Q(-2, 3)

Para P(2, 1): $x+4>y^2 \Rightarrow\Rightarrow (2)+4>(1)^2$ Verdadero.

Para Q(-2, 3): $x+4>y^2 \Rightarrow\Rightarrow (-2)+4>(3)^2$ Falso.

La solución será el semiplano que contenga a el punto P(2, 1), que en este caso es la parte interna de la curva.



Ejemplo 110:

Hallar la solución total para el sistema:

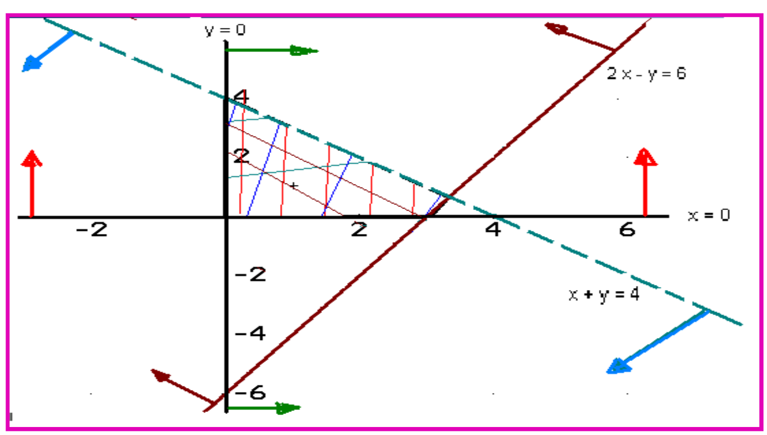
$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y<4,\ 2x-y \leq 6$$

Solución:

A continuación se dará la solución total, por favor hacer el procedimiento con el grupo colaborativo y aclarar las dudas con el Tutor.

Para $x \geq 0$ las líneas son verdes.
Para $y \geq 0$ las líneas son rojas.
Para $x + y < 4$ las líneas son azules
Para $2x - y \leq 6$ las líneas son cafés.

Solución: La parte cuadriculada



Lección Diecinueve: Inecuaciones: Problemas de Aplicación

PROBLEMAS CON INECUACIONES DE UNA INCÓGNITA:

En la vida diaria se presentan diversos problemas donde el camino adecuado para la resolución son las inecuaciones, una vez estudiados los principios y técnicas de solución de inecuaciones, ahora corresponde darle sentido de aplicabilidad a las mismas.

El primer paso para resolver problemas que involucran inecuaciones, es leer muy bien el problema hasta comprenderlo completamente. En seguida plantear el modelo matemático que expresa con simbología matemática las especificidades del mismo. Para el caso particular de las inecuaciones, es pertinente tener claro algunos términos usados para comparar, como; *A lo más, como mínimo, etc,* que son los que dan las condiciones para plantear el modelo matemático.

Ejemplo 111:

La función utilidad al vender *x* unidades está dada por el modelo: $P = x^2 + 7x - 120$, ¿cual será el mínimo de unidades vendidas para que se presente ganancia.

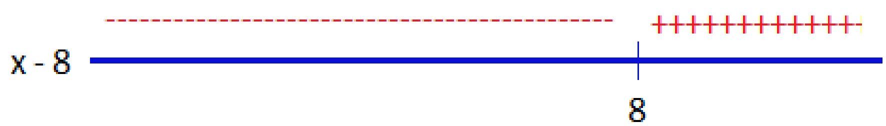
Solución:

Para que no haya perdida ni ganancia, $P = 0$, luego el mínimo de unidades para que haya ganancia debe ser tal que $P > 0$.

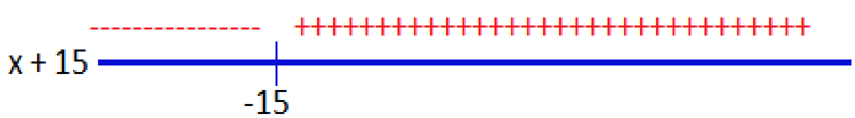
$x^2 + 7x - 120 > 0$ Linealizando: $(x-8)(x+15) > 0$

Recordemos que se puede resolver por los conectivos lógicos o por diagrama de signos. Utilicemos diagrama de signos.

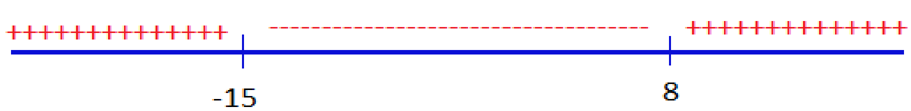
$x - 8 = 0$, valor crítico $x = 8$



$x + 15 = 0$, valor crítico $x = -15$.



Producto:



La solución: presenta un intervalo negativo y otro positivo, es obvio que por las características del problema, solo se tendrá en cuenta la parte positiva, luego la cantidad mínima para obtener ganancia será de 9 unidades.

Ejemplo 112:

En una clase de Matemáticas un estudiante obtuvo las notas en sus primeras 4 evaluaciones de 60, 80, 78, 82. Faltando el examen. Para obtener una calificación de aprobatoria el promedio de las 5 notas debe ser igual o mayor a 80 y menor que 95. ¿Cuál debe ser la nota mínima en el examen para que el estudiante apruebe el curso?

Solución:

Según las condiciones del problema, el promedio será: $\dfrac{60 + 80 + 78 + 82 + x}{5}$

El promedio debe estar entre 80 y 95. $80 \le \dfrac{60 + 80 + 78 + 82 + x}{5} < 95$

Iniciamos la resolución, eliminando el 5 del denominador de la fracción.

$80(5) \le \dfrac{5(60 + 80 + 78 + 82 + x)}{5} < (5)95$ Entonces: $400 \le 300 + x < 475$

Eliminamos 300 que acompaña a la incógnita.

$$400 - 300 \le 300 - 300 + x < 475 - 300 \Rightarrow\Rightarrow 100 \le x < 175$$

El estudiante debe obtener mínimo 100 puntos para aprobar el curso.

Ejemplo 113:

En la fabricación de equipos para calentamiento, la renta obtenida por venta de *x* unidades es de 450 *x*. El costo de producción para *x* equipos es 200*x* + 750. ¿Cuántos equipos mínimos se deben fabricar para obtener utilidad?

Solución:

La utilidad se mide así: Ingresos – Egresos > 0. Luego:

$450x - (200x + 750) > 0$. Operando:

$$250x - 750 > 0 \Rightarrow\Rightarrow 250x - 750 + 750 > 750$$

$$250x - 750 + 750 > 750 \Rightarrow\Rightarrow 250x > 750$$

Despejando la incógnita: x = 750 / 250 = 3.

El mínimo de unidades que se debe fabricar es de 3 equipos para obtener ganancia.

Ejemplo 114:

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 90 m/seg. La distancia y de la pelota al suelo después de de t segundos está dada por: $y = 80t - 16t^2$ ¿En qué intervalo de tiempo la pelota estará a más de 96 metros de altura?

Solución:

Como $y = 80t - 16t^2$ y además y > 96, entonces: $80t - 16t^2 > 96$

Organizando la expresión para compararla con cero. $80t - 16t^2 - 96 > 0$.

Cambiamos de signo para que la incógnita al cuadrado quede positiva ya sí poder linealizar más fácil.

$16t^2 - 80t + 96 < 0$

Ahora dividimos por 16 para que la expresión quede más sencilla.

$\dfrac{16t^2 - 80t + 96}{16} < \dfrac{0}{16} \Rightarrow\Rightarrow t^2 - 5t + 6 < 0$. Se linealiza la expresión, utilizando la factorización.

$t^2 - 5t + 6 < 0 \Rightarrow\Rightarrow (t-3)(t-2) < 0$

Resolver la última desigualdad, utilicemos los conectivos lógicos. Como la expresión debe ser menor que cero, entonces las dos posibilidades serán:

(t – 3 > 0 **Λ** t – 2 < 0) **V** (t – 3 < 0 **Λ** t – 2 > 0)

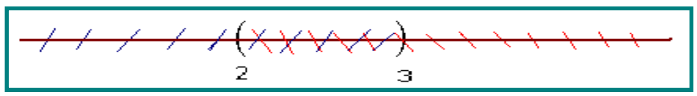
Se busca la primera posibilidad.

t – 3 > 0, t > 3 **Λ** t – 2 < 0, t < 2

Para este caso NO hay solución, ya que no se presenta elementos comunes entre los dos intervalos, así la solución: (Φ)

Segunda posibilidad:

t – 3 < 0, t < 3 **Λ** t – 2 > 0, t > 2



Para este caso la solución está en el intervalo (2, 3), que son los elementos comunes a los dos intervalos.

La solución total será la unión de las soluciones obtenidas: (Φ) U (2, 3) = (2, 3).

Volviendo al problema planteado, la pelota estará a más de 96 metros de altura entre los 2 y 3 segundos.

Ejemplo 115:

La potencia **W** (watts) de un circuito eléctrico se obtiene con la siguiente expresión: W = I*E, donde I es la corriente eléctrica (amperes) y **E** la fuerza electromotriz (voltios). La potencia de un circuito de 110 voltios, varía entre 220 y 2.310 watts. ¿En qué intervalo oscila la corriente eléctrica?

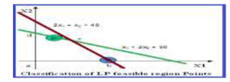
Solución:

Como W = E*I, según el problema: 220 ≤ W ≤ 2.310. Reemplazando W por su equivalencia.

220 ≤ I*E ≤ 2.310, pero E = 110 voltios, entonces: 220 ≤110***I** ≤ 2.310, dividiendo por 110 toda la desigualdad: 2 ≤ **I** ≤ 21.

Entonces la corriente eléctrica oscila entre 2 y 21 amperes.

PROBLEMAS CON INECUACIONES DE DOS INCÓGNITAS



Para resolver problemas que involucran inecuaciones, se requieren varias situaciones, primero leer muy bien el problema para comprenderlo, luego plantear el modelo matemático a través de una inecuación, en seguida resolver la inecuación planeada, finalmente analizar los resultados para dar las conclusiones al problema dado. En este aspecto, se diría que lo nuevo es el planteamiento del modelo; es decir, la inecuación que explica el fenómeno a analizar, ya que lo demás se conoce.

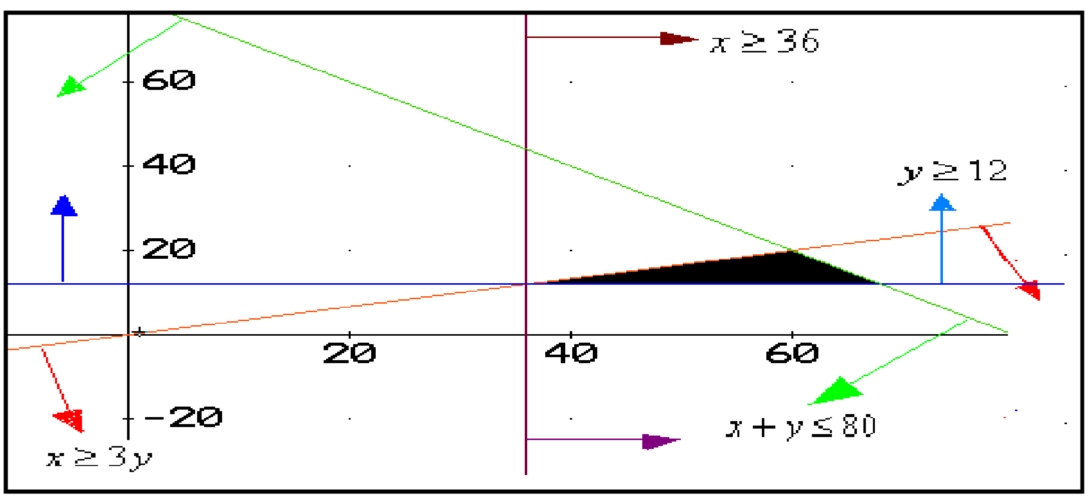
Ejemplo 116:

Un Almacén vende dos clases de artículos tipo A y tipo B, las condiciones del almacén establecen que se debe tener al menos tres veces artículos tipo A que de tipo B; además, se debe tener al menos 12 artículos tipo B, el espacio permite tener máximo 80 artículos exhibidos. Plantear el sistema que describe la situación y describir la región solución del fenómeno.

Solución:

Sea *x* cantidad de artículos tipo A y sea *y* cantidad de artículos tipo B.
$x \geq 3y$: Tres veces artículo tipo A que de B.
$y \geq 12$: Tener al menos 12 artículos tipo B
$x \geq 36$. Tener tres veces artículo tipo A.
$x + y \leq 80$. Capacidad máxima de exhibición.

Planteamos las ecuaciones temporales para graficar.
$x \geq 3y$, entonces: $x - 3y = 0$. Los puntos: (0, 0), (6, 2). Línea roja
$y \geq 12$, entonces: $y = 12$. Es una recta horizontal. Línea azul
$x \geq 36$, entonces: $x = 36$. Es una recta vertical. Línea café
$x + y \leq 80$, entonces: $x + y = 80$. Los puntos: (0, 80), (80, 0) Línea verde.



La parte sombreada será la región de solución del sistema.

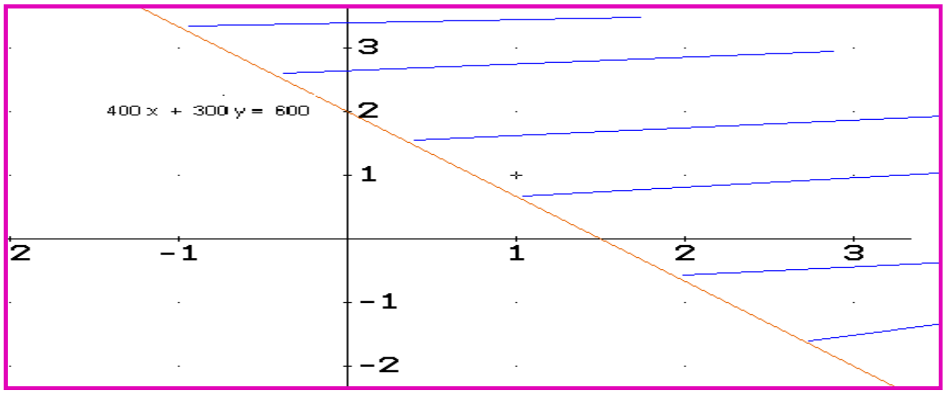
Ejemplo 117:

La compañía π desea comparar cable tipo AA y tipo BB para instalaciones telefónicas, para esto cuenta con un capital que oscila entre 600 y 1.200 millones de pesos. El valor de la unidad de cable tipo AA es de 400 mil pesos y de tipo BB de 300 mil pesos. La compañía requiere al menos 2 veces más de cable tipo BB que de tipo AA. ¿Cuál será la zona de solución del sistema e identificar al menos dos posibilidades de compra?

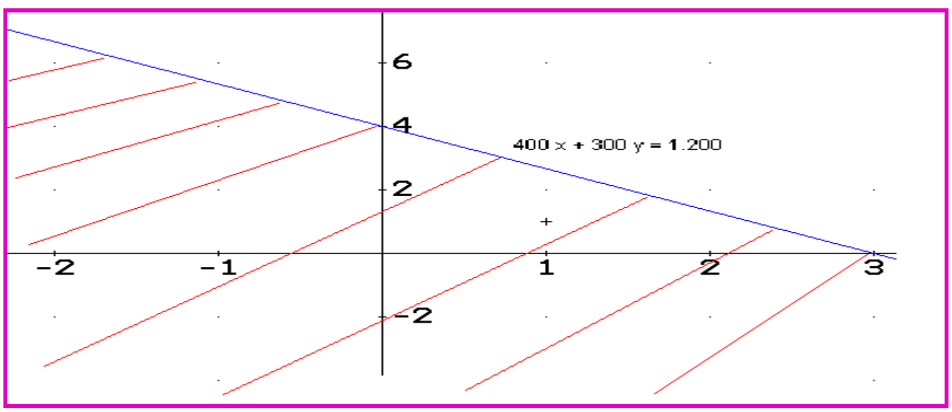
Solución:

Sea x cable tipo AA. Sea y cable tipo BB
Según el problema:
a) 400 x + 300 y ≥ 600 Valor mínimo de compra
b) 400 x + 300 y ≤ 1.200 Valor máximo de compra
c) y ≥ 2 x. Requerimientos de cable.

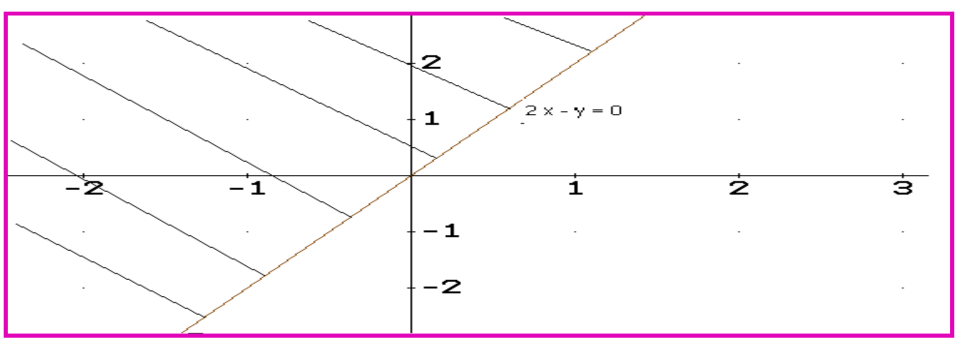
Solución para el caso a:



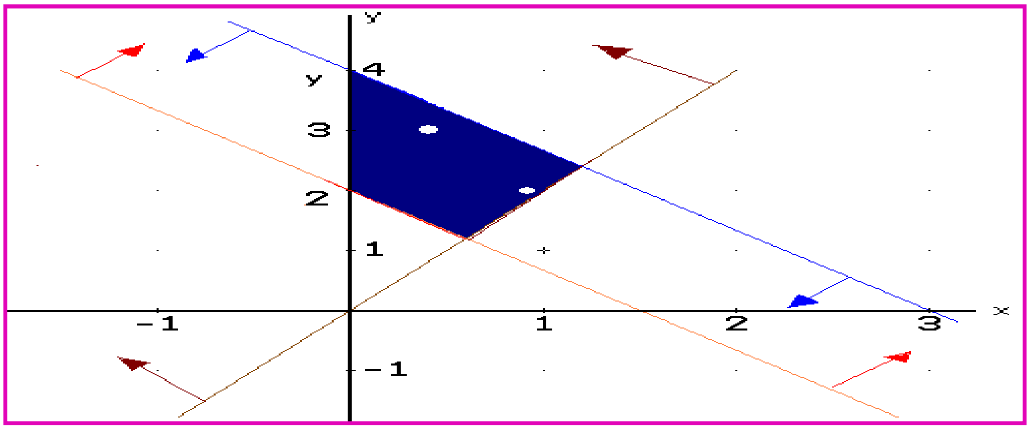
Solución para el caso b:



Solución para el caso c:



La solución al problema será la intersección de las soluciones obtenidas, mostrada en la zona sombreada.



Dos posibles soluciones:
Punto: (1, 2) puede ser una solución.
Punto: (1/2, 3) también puede ser solución.

Ejemplo 118:

Una compañía de Alimentos para animales tiene definido dos tipos: Nutrian y Pedigry, con sus respectiva composición. Por otro lado tiene identificada las necesidades mínimas que se requieren. El objetivo es establecer el área de solución para la ración con mínimo costo: además, identificar dos posibles soluciones.

ALIMENTO	**VARIABLE**	**PROTEINA (P)**	**CARBOHIDRATOS(CH)**	**FIBRA (F)**	**PRECIO($)**
UNIDAD MEDIDA		GRAMOS	GRAMOS	GRAMOS	
NUTRIAN	X	150	200	320	3.000
PEDIGRY	Y	180	500	200	2.000
NECECIDADES MÍNIMAS		1.260	2.000	800	
NECECIDADES MÁXIMAS				1.600	

Solución

Se plantean las inecuaciones.
$150X + 180Y \geq 1.260$ Proteína
$200X + 500Y \geq 2.000$ Carbohidratos
$320X + 200Y \leq 1.600$ Fibra
$110X + 200Y \geq 800$ Fibra

Se plantea cada inecuación como ecuación para identificar la recta que permite buscar la región de solución.
$150X + 180Y = 1.260$ Proteína. Dos puntos para graficar: (0, 7); (8.4, 0)
$200X + 500Y = 2.000$ Carbohidratos. Dos puntos para graficar: (0, 4); (10, 0)
$320X + 200Y = 1.600$ Fibra. Dos puntos para graficar: (0, 8); (5, 0)
$320X + 200Y = 800$ Fibra. Dos puntos para graficar: (0, 4); (2.5, 0)
Grafico de las dos primeras inecuaciones:

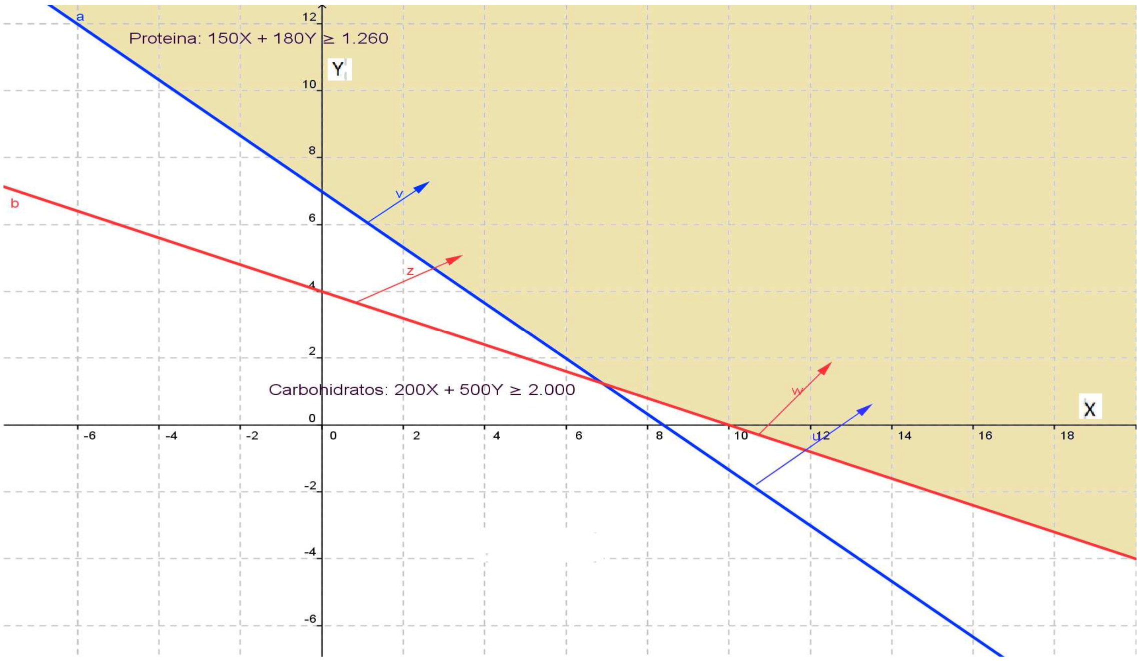
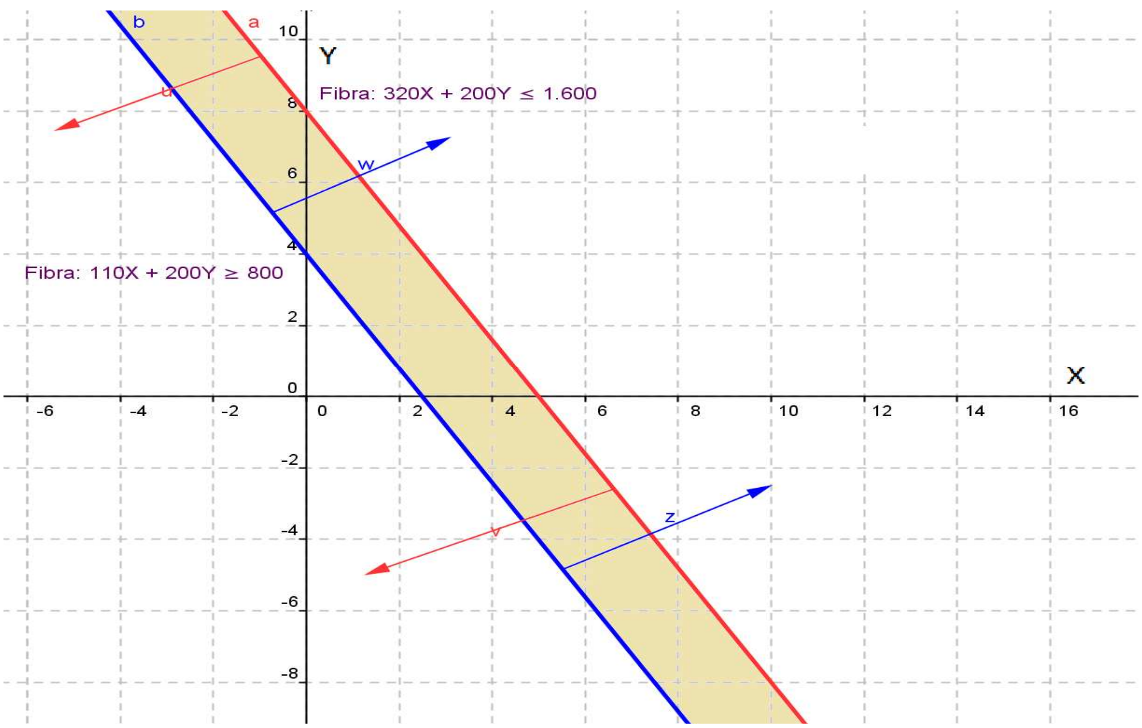
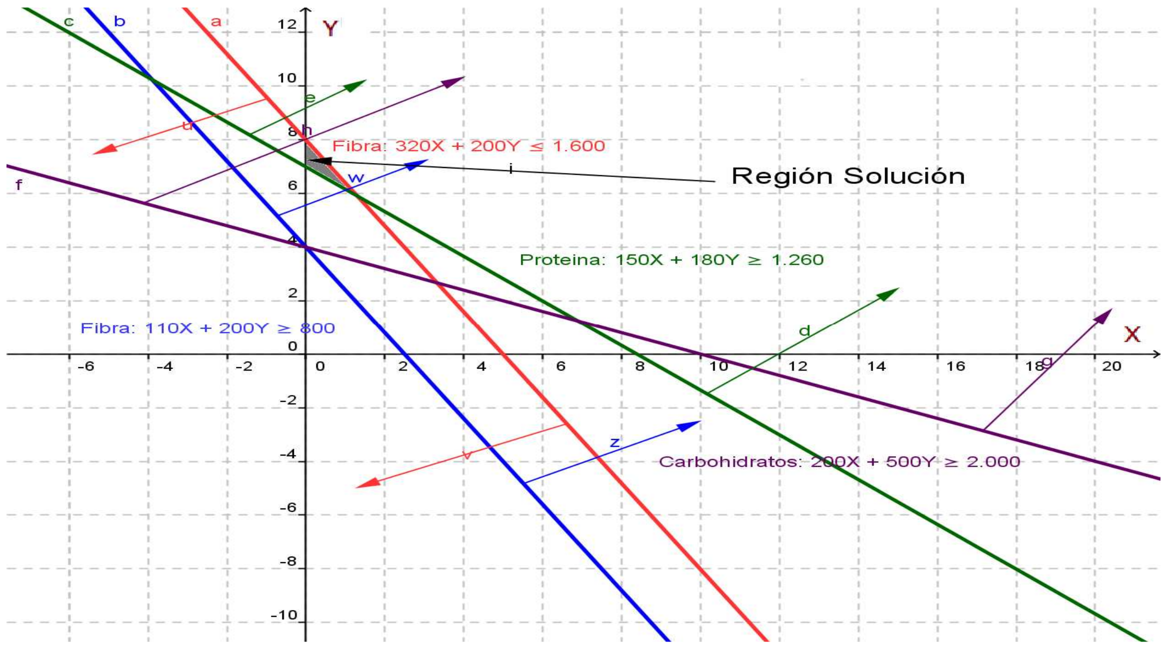


Grafico de las dos últimas inecuaciones:



Región solución:



La solución se observa así: En el eje *x* esta aproximadamente entre 0 y 1 y en el eje *y* entre 7 y 8.

Posibles soluciones: Se tomas dos puntos que estén en la región solución. Veamos dos posibles puntos que están en dicha región.

	X	Y
Punto 1	½	15/2
Punto 2	1/10	72/10

EJERCICIOS

Desarrollar los ejercicios, explicando cada paso.

1. Dada la desigualdad – 2 > - 4, cuál será la desigualdad obtenida si:
   a-) Se suma - 4   b-) Se resta 10   c-) Se multiplica por – 3

2. Expresar las siguientes desigualdades como intervalos y hacer la grafica.
   a-) x > 4   b-) x ≥ -3   c-) - 5 > x ≤ 2   d-) 0 ≤ x ≤ 8

3. Expresar los siguientes intervalos como desigualdades.
   a-) (- 3, 4]   b-) (- ∞, 6) – [-5]   c-) [-2, 4] – (0)

4. Resolver las siguientes inecuaciones.

a-) $2x+5\leq 7$ Rta: $x\leq 1 \quad (-\infty,1]$

b-) $\frac{x}{3}\geq 2+\frac{x}{6}$ Rta: $x\geq 12 \quad [12,\infty)$

5. Resolver las siguientes inecuaciones racionales.

a-) $\frac{4}{3x+2}\geq 0$ Rta: $x>-2/3$

b-) $\frac{x+1}{1-x}<0$ Rta: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Para los ejercicios propuestos, por favor resolverlos con mucho cuidado y hacer los pasos requeridos en su resolución.

6. $(x+2)(x-1)(4-x)<0$ Rta: $(-2,1)\cup(4,\infty)$

7. $2x^2-2x<12$ Rta: $(-2,3)$

8. $\frac{1}{2}(x-4)>x+8$ Rta: $(-\infty,-20)$

9. $x^3-2x^2-3x\geq 0$ Rta: $[-1,0]\cup[3,\infty)$

10. $x^3>x^2$ Rta: $1<x<\infty$

Leer cuidadosamente cada problema, para que sean resueltos adecuadamente.

11. El costo de producción de *x* unidades de un producto está dado por la expresión: $C=x^2+6x$, la utilidad por concepto de ventas está dada por $U=2x^2+x$. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener utilidad.

Rta: x > 5

12. Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya función altura está dada por la expresión: $h = -9{,}8t^2 + 147t$ donde h se da en metros y t en segundos. ¿En qué intervalo de tiempo el objeto estará por encima de 529,2 metros?

Rta: 6 < t < 9

13. Según la Ley de Boyle, para un gas específico a temperatura constante, se tiene la relación: P V = 200. Para P presión en psi y V volumen en plg^3. ¿En qué intervalo se desplaza la presión, si el volumen se encuentra entre 25 y 50 plg^3?

Rta: 4 ≤ P ≤ 8

14. El cuerpo humano tiene una temperatura normal de 37^0C, si una temperatura *x* difiere a la normal al menos en 2^0C, se considera anormal. ¿Cuál será el intervalo de temperatura que se considera anormal?

Rta: x ≤ 35^0C y x > 39^0C.

15. La función ingreso por venta de un producto está dado por la expresión $40x - \frac{1}{5}x^3$. El costo de producción de una unidad es de $28. ¿Cuántas unidades se deben vender para que la utilidad sea de $100?

Rta: 10 < x < 50

Resolver los siguientes sistemas gráficamente.

16. 3 x + y < 3 y 4 – y < 2 x

17. y – x < 0 y 2 x + 5 y < 10

18. x ≥ 1, y ≥ 2, x + 3 y ≤ 19, 3 x + 2 y ≤ 22

Leer cuidadosamente los siguientes problemas, plantear el sistema y resolverlo gráficamente.

19. Un negociante de finca raíz vende casas y apartamentos, por la demanda se debe tener al menos tres veces más casas que apartamentos. Se debe tener disponible al menos 6 casas y 2 apartamentos para su ocupación. Las casas cuestan 30 millones y los apartamentos 20 millones. El comerciante desea mantener sus costos de inventario en 600 millones o menos. Elaborar un sistema que explique el fenómeno y hallar la región solución.

20. Una refinería de petróleo puede producir hasta 5.000 barriles por día, el petróleo es de tipo A y B, del tipo A se deben producir por día al menos 1.000 y a lo más 3.500 barriles. Si hay una utilidad de 7 dólares para tipo A y 3 dólares para tipo B ¿Cuál será la utilidad máxima por día.

Rta: Tipo A 3.500 y tipo B 1.500

21. La empresa Sport fabrica dos tipos de balones para fútbol, el modelo pie duro da una utilidad de 20 mil pesos y el modelo pie blando de 13.00 pesos. Para satisfacer la demanda la empresa debe producir diariamente del modelo pie duro entre 20 y 100 inclusive, mientras que del modelo pie blando entre 10 y 70 inclusive. Por las condiciones de la fábrica el total de producción diaria debe ser máxima de 150 unidades. ¿Cuántos balones de cada tipo se deben fabricar en un día para obtener máxima utilidad?

Rta: 100 balones pie duro y 50 pie blando.

Resolver las siguientes inecuaciones.

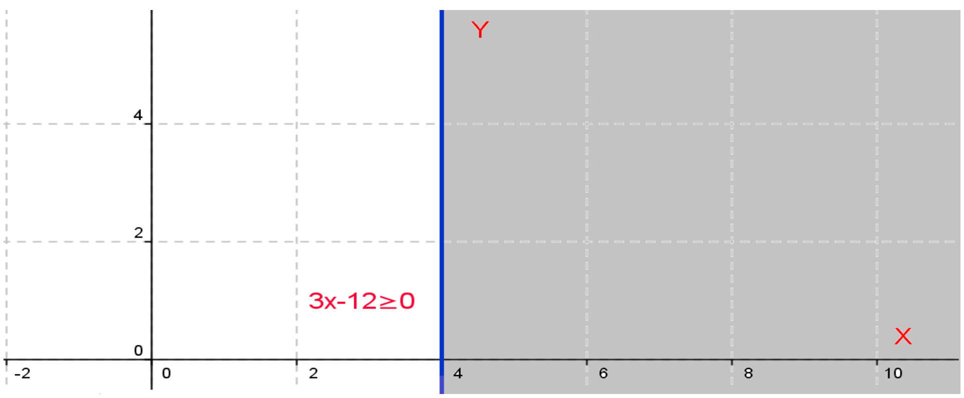
22. $\dfrac{x + 4}{x - 2} \leq 1$ Rta: $-\infty < x < 2$

23. $\dfrac{2x+5}{x+1} > \dfrac{x+1}{x-1}$ Rta: $(-\infty,-3) \cup (-1,1) \cup (2,\infty)$

Para los ejercicios propuestos, por favor resolverlos con mucho cuidado y hacer los pasos requeridos en su resolución.

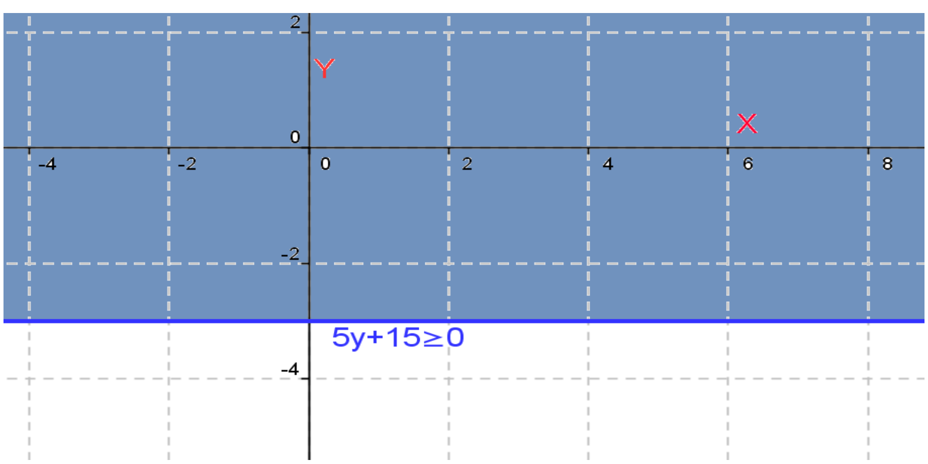
24. Hallar la solución grafica de la desigualdad: $3x - 12 \geq 0$

Solución: La parte sombreada de la grafica.



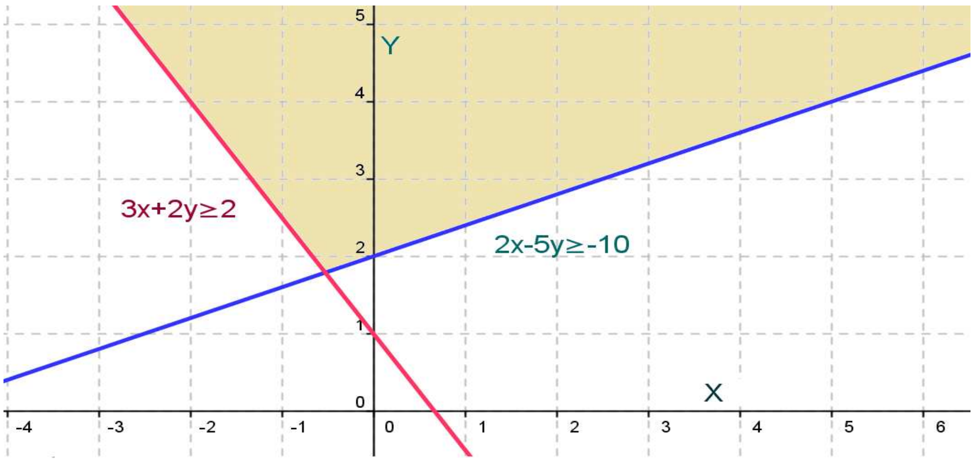
25. Hallar la solución grafica de la desigualdad: $5y + 15 \geq 0$

Solución: La parte sombreada de la grafica.



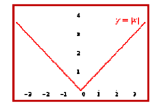
26. Hallar la solución grafica del sistema de desigualdades: $2x-5y\geq -10$ y $3x+2y\geq 2$

Solución: La parte sombreada de la grafica.



CAPÍTULO TRES: VALOR ABSOLUTO

INTRODUCCIÓN



El valor absoluto, es una figura matemática creada para relacionar un número con una distancia. Su funcionalidad es permitir que en diversas situaciones se pueda trabajar con números no negativos. En términos generales, el valor absoluto referencia la distancia entre dos números reales.

Es pertinente analizar los principios que sustentan esta figura matemática, para poder aplicarla en situaciones como son las ecuaciones e inecuaciones.

Valor Absoluto:

Sea x un número real cualquiera, el valor absoluto simbolizado $|x|$ se define así:

$$|x| = \begin{cases} x & si & x & > & 0 \\ 0 & si & x & = & 0 \\ -x & si & x & < & 0 \end{cases}$$

La definición es explicita y nos indica que el valor absoluto de un número positivo es positivo, pero si el número es negativo, su valor absoluto es negativo. Como consecuencia de esto, el valor absoluto de cualquier número siempre será positivo, excepto cero.

Algunas propiedades importantes en valor absoluto:

1. $|x| \geq 0$ No negatividad.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Positividad.
3. $-|x| = |x|$ Simetría
4. $|x * y| = |x| * |y|$ Multiplicatividad.
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ Divisibilidad Para y ≠ 0.
6. $|x^n| = |x|^n$ potencia.
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad triangular
8. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ Identidad.

Ejemplo 119:

Hallar el valor absoluto de las siguientes cantidades.

a-) $|10|$

b-) $|-5|$

c-) $|e-\pi|$

d-) $|2-\pi|$

Solución:

a-) Como el valor es positivo, luego su valor absoluto será positivo. $|10| = 10$

b-) Como el valor es negativo, luego su valor absoluto será negativo. $|-5| = -(-5) = 5$

c-) El número $e \approx 2{,}71828$ y $\pi \approx 3{,}1416$, entonces $e < \pi$, luego la cantidad será negativa, así su valor absoluto será negativo. $|e-\pi| = -(e-\pi) = \pi - e$

d-) Para este caso $2 < \pi$, así la cantidad será negativa, entonces su valor absoluto será negativo. Veamos: $|2-\pi| = -(2-\pi) = \pi - 2$

Lección Veinte: Ecuaciones e Inecuaciones con Valor Absoluto $\boxed{|ax + b| = 0}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

Conocidos los principios sobre ecuaciones y sobre valor absoluto, ahora se hará una combinación de los dos términos para analizar ecuaciones con valor absoluto.

> Sea $|x| = a$ Entonces x = a, v, x = - a. Para todo x ≠

Con este principio se pueden resolver ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo 120:

Hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$|x - 3| = 8$$

Solución:

Por la definición: x – 3 = 8, entonces: x = 8 + 3 = 11 ó x – 3 = -8, entonces: x = -8 + 3 = -5
La solución será: -5 y 11.

La comprobación puede verificar la solución, hagámoslo.

$$|-5-3| = |-8| = -(-8) = 8$$

$$|11-3| = |8| = 8$$

Ejemplo 121:

Resolver: $\left|\frac{2x-8}{4}\right| = 12$

Solución:

Aplicamos la definición: $\frac{2x-8}{4} = 12 \quad v \quad \frac{2x-8}{4} = -12$

Resolviendo: $2x-8 = 48 \quad v \quad 2x-8 = -48$

Despejando la incógnita. $2x = 48+8 \quad v \quad 2x = -48+8$

$$x = \frac{56}{2} = 28 \quad v \quad x = \frac{-40}{2} = -20$$

La solución es -20 y 28. *Por favor verificar las soluciones obtenidas*.

En los ejemplos analizados se observa que se obtienen dos soluciones, situación que ocurre con las ecuaciones de primer grado con valor absoluto.

Ejemplo 122:

Hallar la solución para la ecuación dada a continuación: $|x^2 - 8x - 18| = 2$

Solución:

Siguiendo la definición, se sabe que hay dos posibilidades:

a) $x^2 - 8x - 18 = 2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$ Se factoriza:

$x^2 - 8x - 20 = (x-10)(x+2) = 0$. Por la regla del producto nulo: x = 10 y x = -2

b) $x^2 - 8x - 18 = -2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 - 8x - 16 = 0$. Esta ecuación la resolvemos por la cuadrática:

$$x^2 - 8x - 16 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64+64}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 * 2}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

Solución: $4 + 4\sqrt{2}$ y $4 - 4\sqrt{2}$

La solución total será: $10, \quad -2, \quad 4+4\sqrt{2}, \quad 4-4\sqrt{2}$

Ejemplo 123:

Resolver: $\left|x^2 - 4\right| = 3x$

Solución:

De acuerdo con la definición hay dos posibilidades:

a) $x^2 - 4 = 3x \Rightarrow\Rightarrow \; x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) = 0$

Por la regla del producto nulo: x = 4 y x = -1

b) $x^2 - 4 = -3x \Rightarrow\Rightarrow \; x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0$

Por la regla del producto nulo: x = -4 y x = 1.

Los valores negativos NO satisfacen la ecuación, luego la solución es: 1 y 4.

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

$\boxed{|ax + b| < 0}$

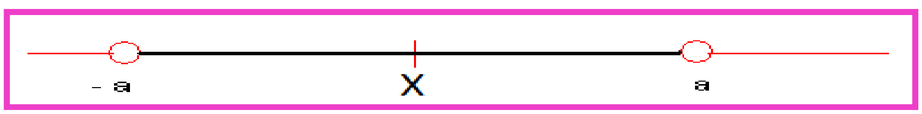
En la naturaleza existen muchos fenómenos que suceden bajo ciertos límites o mejor en un intervalo determinado. Las inecuaciones con valor absoluto son un dispositivo matemático que permiten resolver problemas de fenómenos que presentan dichas restricciones.

La resolución de inecuaciones con valor absoluto parte de las siguientes definiciones:

-Primera definición:

Sea $|x| < a$ Entonces: $-a < x < a$

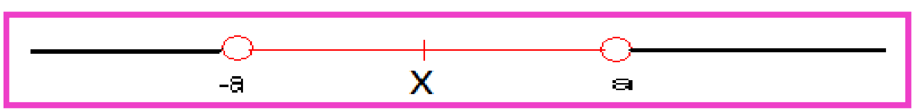
Veámoslo gráficamente:



-Segunda Definición:

Sea $|x| > a$ Entonces: $x < -a$ ó $x > a$

Veámoslo gráficamente:



Las definiciones de dieron para desigualdades estrictas, pero aplica también para las no estrictas, en la gráfica, los extremos serán cerrados, ya que los incluye.

Ejemplo 124:

Resolver: $|x| < 8$

Solución:

Por la primera definición: $|x| < 8 \Rightarrow\Rightarrow -8 < x < 8$

Lo anterior significa que cualquier valor entre -8 y 8 satisface la desigualdad.

Veamos un caso: - 5, $|-5| = -(-5) = 5$ obviamente 5 es menor que 8.

Ejemplo 125:

Hallar el conjunto solución para la siguiente expresión:

$|x| > 6$

Solución:

Por la segunda definición: $|x| > 6 \Rightarrow\Rightarrow x < -6 \quad v \quad x > 6$

La solución será: (-∞, -6) U (6, ∞)

Ejemplo 126:

Hallar la solución de la expresión: $|2x - 6| \leq 4$

Solución:

Por la definición uno: $|2x - 6| \leq 4 \Rightarrow\Rightarrow -4 \leq 2x - 6 \leq 4$

Desarrollemos el procedimiento para desigualdades compuestas, primero sumamos 6 a toda la desigualdad, (¿por qué?)

$$-4 + 6 \leq 2x - 6 + 6 \leq 4 + 6 \Rightarrow\Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10$$

Ahora se divide toda la expresión entre 2.

$$2 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow\Rightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{10}{2} \Rightarrow\Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

La solución será el intervalo [1, 5]. Notemos que es cerrado ya que la solución incluye los extremos.

Ejemplo 127:

Mostrar que la solución de la expresión: $\left|\frac{x}{x-4}\right| \geq 2$ es [8/3, 4) U (4, 8]

Solución: Resolverlo con el grupo colaborativo y cualquier duda consultar al tutor.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

1. $|2x+3|=5$ Rta: x = - 4 y x = 1

2. $|1-4y|=5$ Rta: y = - 1 y y = 3/2

3. $\left|\frac{x}{3}+\frac{2}{5}\right|=2$ Rta: x = -36 / 5 y x = 24 / 5

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

4. $|z| < 7$ Rta: -7 < z < 7 (-7, 7)

5. $\left|\frac{y+7}{3}\right| > 3$ Rta: (-∞, -16) U (2, ∞)

6. $|2w-7| \leq 0$ Rta: w = 7 / 2

AUTOEVALUACION UNIDAD UNO

1. $\frac{y+1}{4}+\frac{2y-3}{4}=\frac{y}{2}-2$

2. $\frac{6}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\frac{9}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}$

3. $\frac{8}{4y-8}=\frac{6}{3y-6}$

4. Qué valor debe tener φ en la expresión 3y - 3 φ = 3y – 5, para que se cumpla la igualdad.

5. Demuestre que la ecuación $4(y+1)=6(y-2)-2y$ no tiene solución.

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción.

6. $\begin{array}{lllll} \frac{3}{4}x & + & \frac{2}{3}y & = & 7 \\ \frac{5}{3}x & - & \frac{1}{2}y & = & 18 \end{array}$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Igualación.

7. $\begin{array}{lllll} \frac{2}{5}x & - & \frac{1}{6}y & = & 7/10 \\ \frac{3}{4}x & - & \frac{2}{3}y & = & 19/8 \end{array}$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Sustitución

8. $\begin{array}{lllll} -\frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 1/6 \\ \frac{3}{x} & + & \frac{4}{y} & = & 3 \end{array}$

Identificar el valor de φ en cada determinante, de tal manera que la igualdad se cumpla.

9. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ \varphi & 4 \end{vmatrix} = 13$

Resolver los sistemas de ecuaciones propuestos por el método de **Kramer**; es decir, utilizando determinantes.

10. $\begin{array}{lllll} 3p & - & q & = & 13 \\ -12p & + & 4q & = & -52 \end{array}$

11. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} &= 1 \end{aligned}$$

Resolver por eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

12. $$\begin{aligned} 3x + y - z &= 2/3 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 4x + 2y &= 8/3 \end{aligned}$$

Cuál será el valor de x para que el determinante sea verdadero.

13. $$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

14. $$P = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -1 & x & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Kramer.

15. $$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -3 \\ -3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

16. Describa explícitamente los métodos de Sarros y Kramer y explique para que se utilizan.

17. Se desea construir un Silo para granos en forma de cilindro circular y semiesférico en la parte superior. El diámetro del silo debe ser de 30 pies ¿Cuál será la altura del silo, si la capacidad debe ser de 11.250π pie^3?

18. El largo de un campo de baloncesto es 12 metros más que su ancho. Si el perímetro es de 96 metros, ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

19. En un triángulo, el ángulo más pequeño es la mitad del mayor y las dos terceras partes del ángulo intermedio. ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos?

20. Un fabricante de grabadoras reduce el precio de un modelo X en el 15%, si el precio con el descuento es de $125.000,00 ¿Cuál será el precio original del modelo X?

21. José recibe de liquidación 10 millones de pesos, decide invertir una parte en la Banca al 12% anual y el resto lo invierte en transporte al 16% anual. Si al final de un año recibe 1,3 millones de intereses, ¿Cuánto invirtió José en banca y en transporte?

22. El perímetro de un rectángulo es de 16 metros, su área es de 15 m^2 ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

23. Para asistir a una función de teatro, se tiene dos tipos de entradas, el preferencial vale $4.500 y el popular vale $3.000, si se vendieron 450 boletas para un recaudo de $1'819.500 ¿Cuántas boletas de cada clase se vendieron?

24. Se desea preparar 200 Litros de ácido nítrico al 34% a partir de dos soluciones del 28% y 36% de concentración. ¿Cuáles deben ser las cantidades de ácido a utilizar para obtener la solución deseada?

25. Para tres grupos de investigación hay 1'360.000 millones de pesos, la cantidad de científicos es de 100, cada científico del primer grupo recibió $20.000 millones, del segundo grupo cada científico recibió $8.000 millones y del tercer grupo cada científico recibió $10.000 millones. Los científicos del primer grupo recibieron 5 veces más fondos que el segundo ¿Cuántos científicos hay en cada grupo de investigación?

26. En una Fabrica se usan tres maquinas de diferentes modelos y capacidades para desarrollar la producción diaria. Al funcionar simultáneamente las tres maquinas, la producción se realiza en 2 horas. Si la máquina más moderna se avería, las otras dos pueden hacer la producción diaria en 4 horas; si se avería la segunda máquina; las otras dos pueden hacer la producción en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardara cada máquina en realizar la producción diaria, de manera individual?

27. Un triángulo rectángulo tiene su hipotenusa 7 metros más larga que uno de sus lados, el perímetro del rectángulo es de 392 metros ¿Cual es la longitud de los lados del triángulo?

28. La cantidad de dinero A que resulta al invertir un capital P a una tasa de interés r compuesta anualmente por dos años, está dada por la ecuación $A = P(1+r)^2$ Si $10.000 se invierten a una tasa de interés compuesto anualmente, el capital aumenta a $12.321 en dos años. ¿De cuánto fue la tasa de interés?

Resolver las siguientes ecuaciones, realizando el procedimiento adecuadamente y justificando las respuestas.

29. $z^2 + \sqrt{2}z - 2 = 0$

30. $y^6 - 10y^3 = -21$

31. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es $-\frac{b}{a}$

32. Para la ecuación $y^2 - \beta y = -4$ Encontrar el valor de β tal que la ecuación tenga dos soluciones reales repetidas.

Desarrollar el procedimiento apropiado para resolver los ejercicios propuestos.

33. $2\sqrt{y^2+3} = \sqrt{-(16y+3)}$

34. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3x-5}} = \sqrt{2}$

35. $y^{3/1} - 64 = 0$

36. $y^{3/2} - 81 = 0$

37. $2\sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{-(16y + 3)}$

Desarrollar los siguientes ejercicios, verificar la respuesta.

38. $\dfrac{5y}{y^2 + 9} = -1$

39. $\dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{y-4} = \dfrac{5}{4}$

40. $1 + y + \dfrac{2+y}{y-1} = \dfrac{3}{y-1}$

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos.

41. $3x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$

42. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

43. $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

44. La ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ tiene entre sus raíces a x = 3. Hallar la suma de las otras dos raíces.

45. Un circuito de tres resistencias en paralelo tiene como modelo matemático: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

Para una instalación se debe cumplir las siguientes condiciones: La resistencia dos debe tener 10 ohmios más que la resistencia uno y la resistencia tres debe tener 50 ohmios más que la resistencia uno. Si la resistencia resultante es de 6 ohmios. Cual debe ser el valor de las resistencias componentes.

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos.

46. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

47. $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 40 = 0$

48. $x^7 - 12x^5 + 48x^3 - 64x = 0$

49. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

50. La ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ tiene entre sus raíces a x = 3. Hallar la suma de las otras dos raíces.

Dadas las siguientes expresiones, escribirlas como suma de fracciones parciales.

51. $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2}$

52. $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}$

53. $\dfrac{3x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

54. Resolver las siguientes inecuaciones.

a-) $3 \le \dfrac{2x - 3}{5} < 7$ b-) $9 + \dfrac{1}{3}x \ge 4 - \dfrac{1}{2}x$ c-) $\dfrac{7R}{7 + R} > 3$

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

55. $|x + 3| = |2x - 1|$

56. $|q| - q = 1$

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

57. $\left|\dfrac{x - 2}{x + 1}\right| > 2$

58. $\left|\dfrac{1}{2}x - 3\right| < \dfrac{1}{10}$

59. El peso en gramos de llenado de un recipiente que contiene granos, debe cumplir con la siguiente condición: $\left|\dfrac{P - 16}{0{,}05}\right| \le 1$ donde P es el peso. Se toma un tarro y al pesarlo éste fue de 17 gramos. El tarro cumple con las especificaciones de peso.

Resolver los siguientes ejercicios con su respectivo procedimiento.

60. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \le 0$

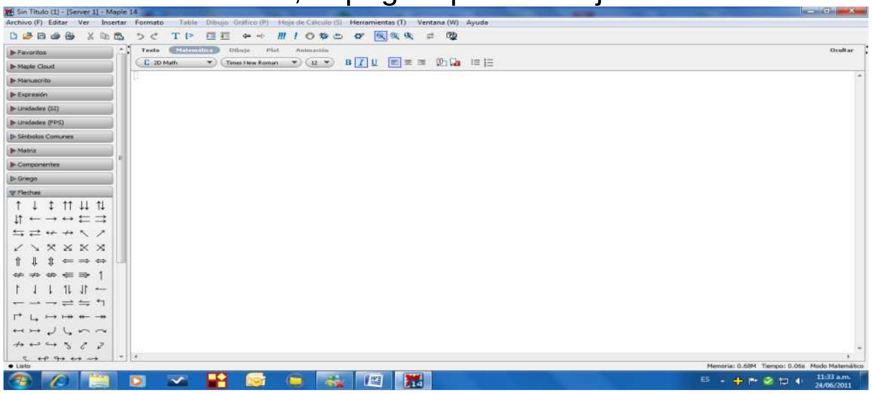
61. $\dfrac{(x + 3)^2 (x - 4)(x + 5)^2}{x^2 + x - 20} \ge 0$

62. Hallar la solución grafica del sistema de desigualdades: $4x + 4y < 6$ y $y - 2x > 1$

LABORATORIO

Para desarrollar este laboratorio, debemos tener disponible el software MAPLE.

Se habre el software, la página para trabajar se observa así:

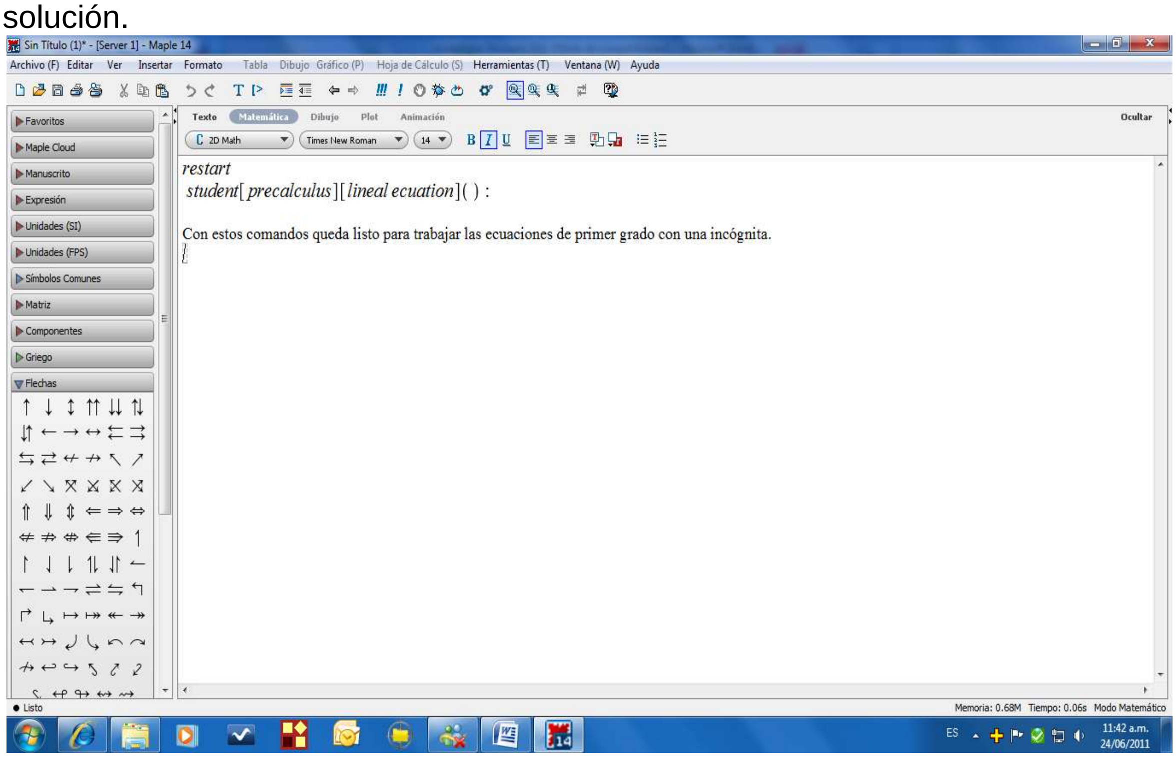


Al pulsar flechas en la parte izquierda, aparece una serie de flechas y símbolos, se pulsa la que se requiera, según la operación a realizar.

Para iniciar se escribe *restart*, lo que indica que podemos iniciar sin problema.

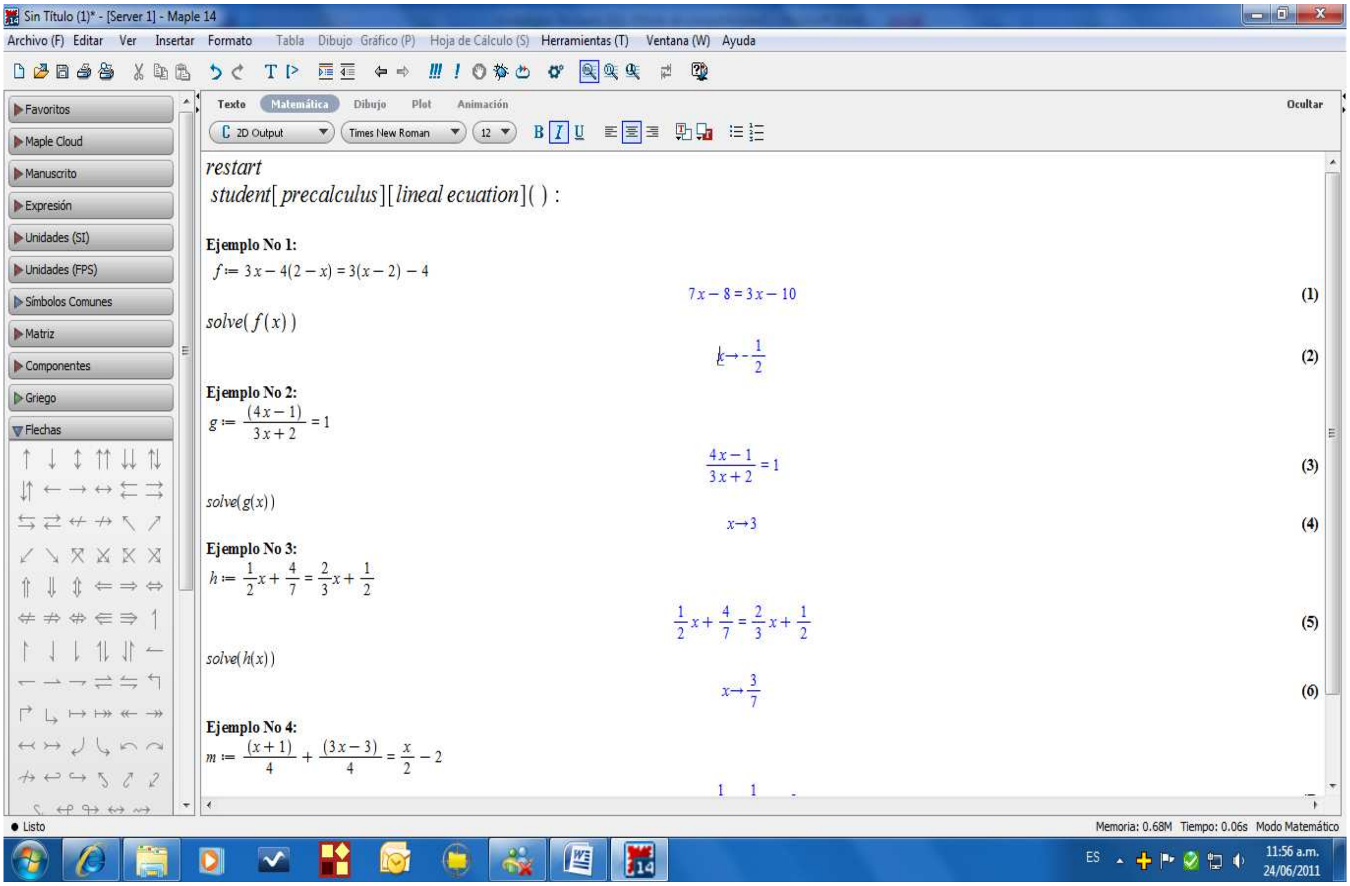
Ecuaciones:

Ahora para trabajar las ecuaciones, se invoca la librería correspondiente, por ejemplo para ecuaciones lineales de primer grado. *Student[precalculus][lineal ecuation]():* Al dar enter, se carga la librería y luego se puede plantear las ecuaciones de este tipo para obtener la solución.



En seguida vamos a resolver tres ejemplos, observar la programación para cada uno.

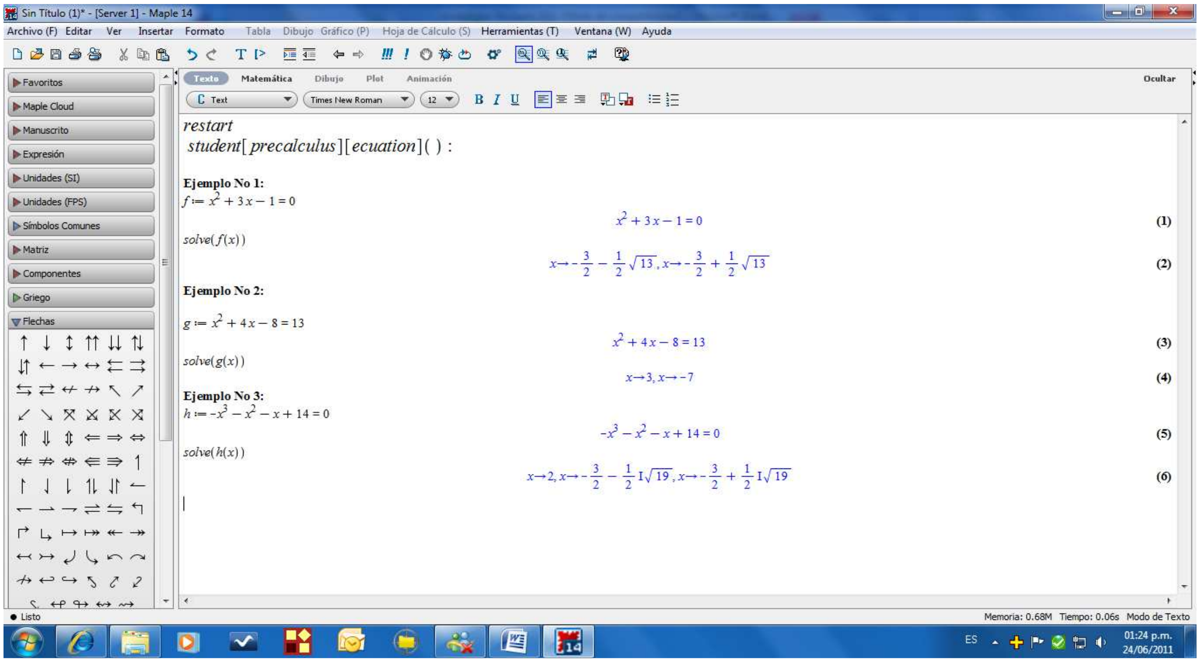
Se escribe la ecuación así: $f := 3x - 4(2-x) = 3(x-2) - 4$ Se pulsa Enter, aparece la ecuación en color azul, en seguida se pide que la resuelva con *solve(f(x))*, enter, aparece la solución en color azul. Así para los demás ejemplos.



Resolver utilizando Maple:

1. $3(2-x) = 2x - 1$
2. $\frac{1}{2}x - 6 = \frac{3}{4}x + 1$
3. $\frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$

Para ecuaciones de grado dos o más, se invoca *Student[precalculus][ecuation]():* Lo demás igual que en las ecuaciones lineales.

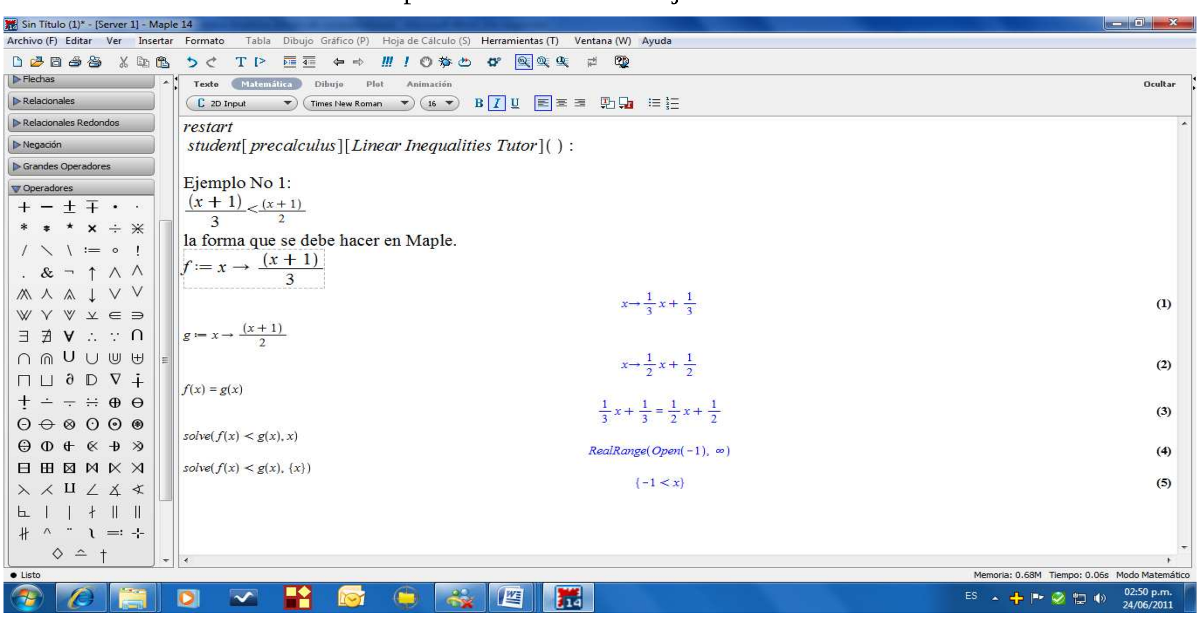


Resolver utilizando Maple:

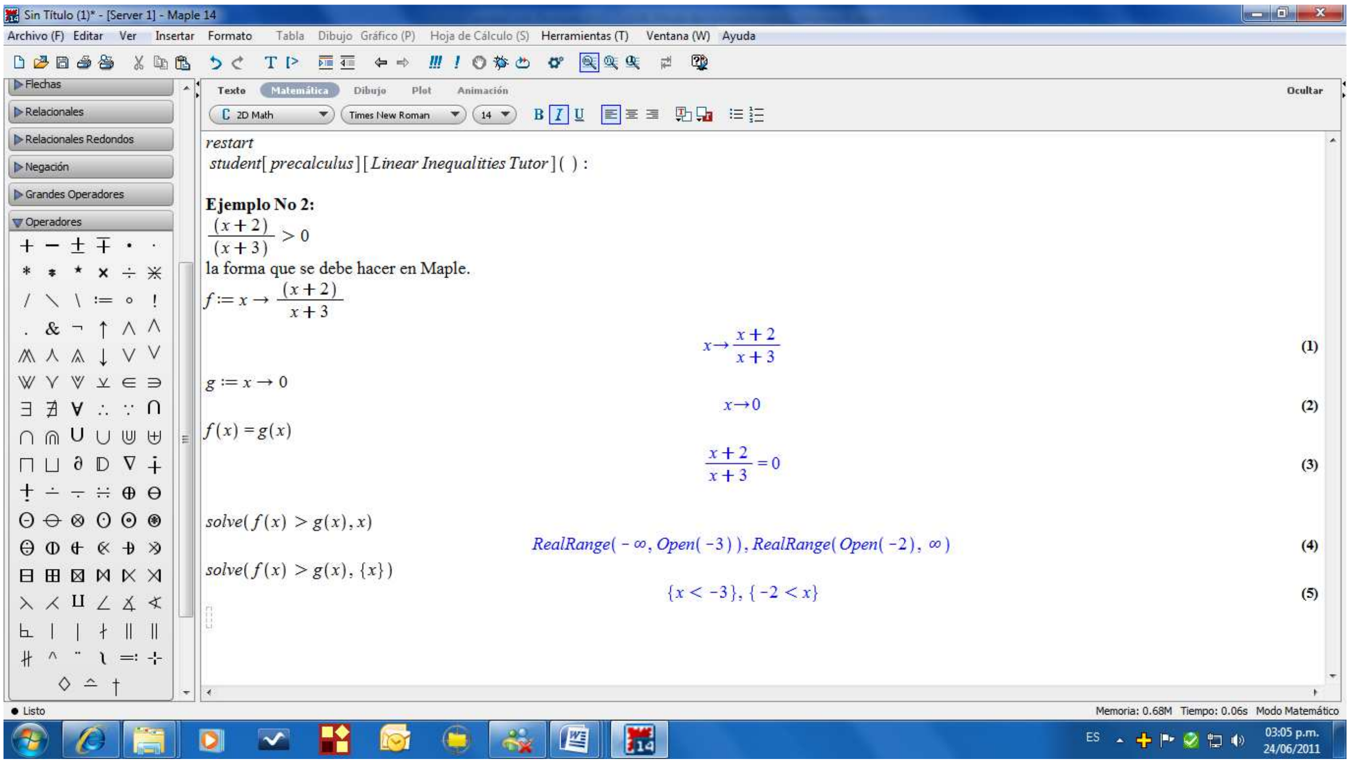
1. $x^2 + 3x - 1 = 0$
2. $x^2 + 4x - 8 = 13$
3. $-x^3 - x^2 - x + 14 = 0$
4. $\dfrac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{9}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

Inecuaciones:

Para las desigualdades lineales: Inicialmente se recetea la hoja de trabajo (*restart*), se invoca la librería: *lineal Inecualities tutor*. Así se puede iniciar el trabajo.



Otro ejemplo:



Resolver utilizando Maple:

1. $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$
2. $x^3 > x^2$
3. $\dfrac{x+4}{x-2} \leq 1$
4. $\dfrac{2x+5}{x+1} > \dfrac{x+1}{x-1}$
5. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

En la dirección siguiente podemos observar el planteamiento de ecuaciones de primer grado con una incógnita y verificar su solución.

http://www.terra.es/personal3/frjavier.lamas/mat1/matesol.htm#pr10

En la dirección siguiente podemos observar el planteamiento de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas y verificar su solución.

http://www.terra.es/personal3/frjavier.lamas/mat1/SISTEMAS%20DE%20ECUACIONES.htm

En este sitio debemos registrarnos para hacer laboratorio interactivamente.

http://132.248.17.238:8080/ejercicios/jsp/paginaInicial.jsp

UNIDAD DOS

FUNCIONES, TRIGONOMETRÍA E HIPERNOMETRÍA

CAPÍTULO CUATRO: FUNCIONES $\boxed{y = f(x)}$

INTRODUCCIÓN

En Matemáticas uno de los conceptos más importantes es el de FUNCIÓN, se cree que el gran matemático alemán Leibniz la introdujo a finales del siglo XVII. El concepto proviene del latín *functo*, que quiere decir *Acto de realizar*.

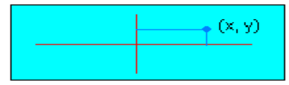
Todas las áreas de las Matemáticas tienen que ver con funciones, de allí la importancia de su análisis, partiendo de la definición, sus características y su clasificación.

El capítulo está estructurado de una manera secuencial, iniciando con el estudio del sistema de referencia más utilizado, las características de las relaciones y la Conceptualización de función, los elementos fundamentales sobre las funciones, como dominio, imagen, monotonía, simetría, la representación gráfica. Se ha dado bastante importancia a los principios sobre funciones para luego análisis las clasificaciones más relevantes.

Respecto a los tipos de clasificación, se ha dado en dos enfoques: Según la relación entre los conjuntos de partida y llegara y las otra según el modelo matemático que la explica. Este tipo de clasificación busca que cualquier función pueda ser considerada dentro de una de las categorías dadas. Además las diversas aplicaciones que tiene esta temática.

Es importante analizar cada temática con detenimiento, desarrollando los ejercicios propuestos para poder comprender y afianzar los conocimientos sobre funciones. El tema de funciones es muy interesante y apasionante.

Lección Veintiuno: Sistema de Coordenadas



Los Matemáticos y Científico, han inquietado sus estudios a las representaciones gráficas de los fenómenos naturales, para lo cual se han diseñado diversos sistemas de representación, las cuales tiene un sistema de referencia, llamada “Sistema de Coordenadas”, en las cuales se hacen los gráficos según el sistema definido. Entre las más conocidas se tienen las coordenadas cartesianas, las coordenadas polares, las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas. Para efectos de este curso se van a estudiar las coordenadas cartesianas.

COORDENADAS CARTESIANAS:

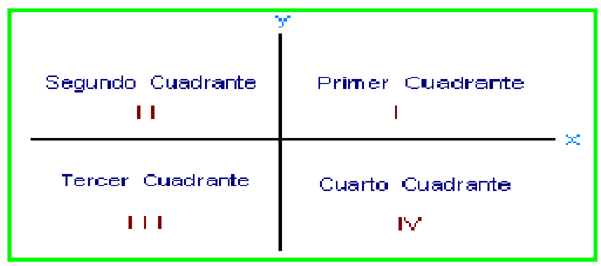
Renato Descartes (1.596 – 1.650) en su gran sabiduría estableció que un punto cualquiera del plano geométrico se podría ilustrar por medio de un par ordenado (x, y) que representa la distancia euclidia perpendicular desde los ejes del sistema que él propuso a dicho par ordenado. Se considero el principal gestor entre el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico, ya que por medio de éste, se pudo relacionar a una ecuación con una curva y viceversa.

Actualmente se les conoce como el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, la cual se forma al cruzar dos rectas perpendicularmente, el punto de corte se le llama origen de coordenadas, de esta manera el plano se fracciona en 4 cuadrantes.

Eje de Coordenadas:

Por convención internacional el nombre de los ejes se presentan así:

Horizontal: Abscisa o eje x
Vertical: Ordenada o eje y



En este sistema cualquier pareja (x, y) tendrá un signo según el cuadrante. Sabemos que el eje *x* se considera positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda a partir del origen, el eje *y* se considera positivo hacia arriba y negativo hacia abajo a partir del origen, entonces:

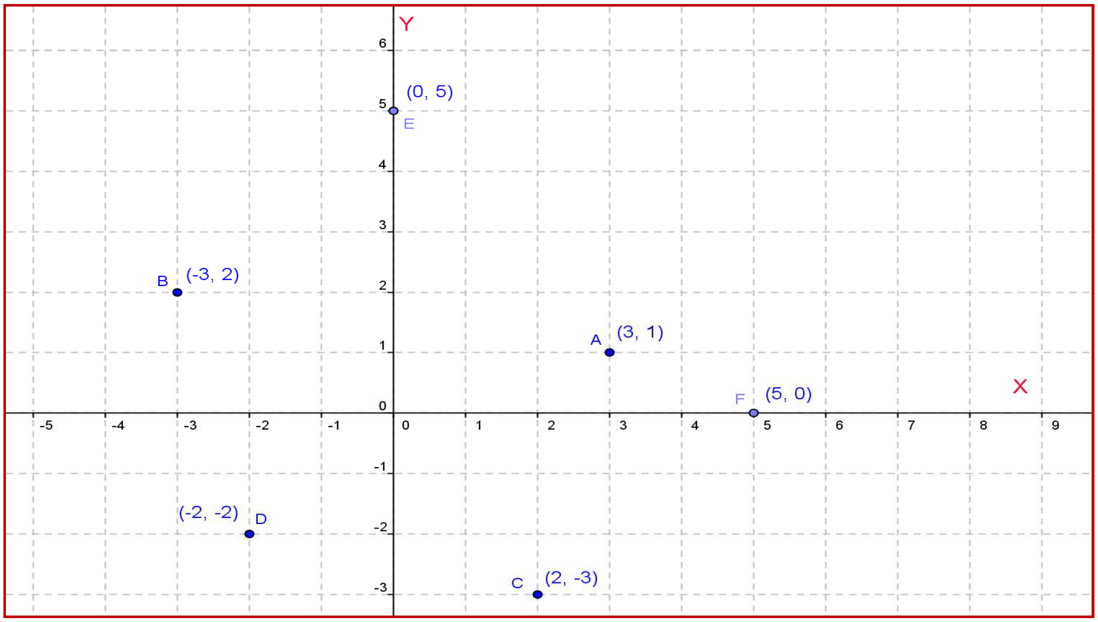
EJES	CUADRANTES			
	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO
X	Positivo	Negativo	Negativo	positivo
Y	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo

Ejemplo 128.

Para ilustrar esta convención, ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos:
a(3, 1), b(-3, 2), c(2, -3) y d(-2, -2), e(0, 5) y f(5,0).

Solución:

En el siguiente grafico, se puede observar la ubicación de los puntos propuestos.

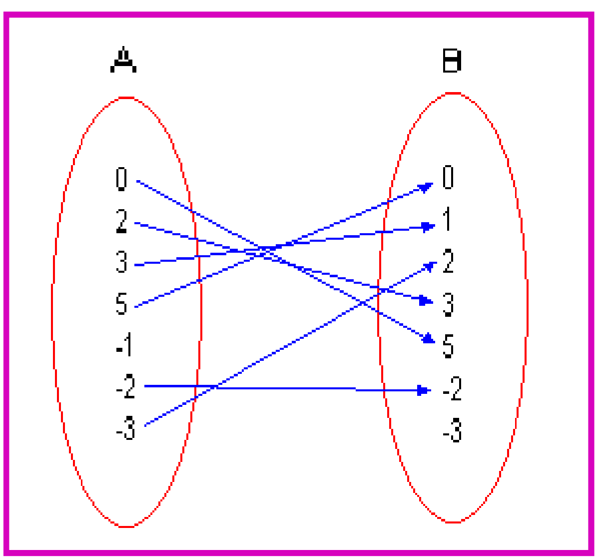


En cada pareja ordenada la primera componente corresponde al eje x y la segunda componente al eje y. Se observa que el punto **A** es positiva para las dos componentes, **B** es negativa para la primera componente y negativa para la segunda componente. Así se puede observar para las demás puntos.

DIAGRAMAS DE VENN:

Otra forma de representar un par ordenado, es por medio de los muy conocidos Diagramas de Venn. John Venn, un lógico Británico (1.834 – 1.923) propone un sistema de óvalos para representar las relaciones entre pares ordenados, propiedades y operaciones entre conjuntos. El sistema buscaba reducir los análisis lógicos y la teoría de conjuntos a un cálculo simbólico. Actualmente esta herramienta es muy usada en Matemáticas, especialmente en teoría de conjuntos y en el estudio de funciones.

Cada pareja ordenada esta relacionada a través de un óvalo así: La componente *x* en el primer óvalo y la componente *y* en el segundo óvalo.



En el diagrama de Venn, se esta representando los mismos puntos que fueron ubicados en el plano cartesiano anterior.

El conjunto **A** se le conoce como conjunto de partida o conjunto inicial y al conjunto **B** se le conoce como conjunto de llegada o conjunto final.

Las líneas van del conjunto de partida al conjunto de llegada e indican las parejas ordenadas que se relacionan.

Los elementos del conjunto de partida A, se ubican en el eje *x* del plano cartesiano y los elementos del conjunto de llegada B, se ubican en el eje *y* del plano cartesiano.

Lección Veintidós: Relaciones y funciones

$\boxed{f : R \to R}$

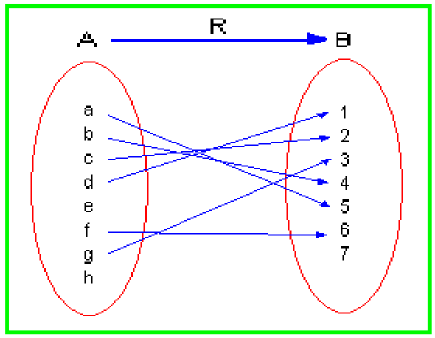
RELACIONES:

En el mundo que nos rodea, existen relaciones entre dos conjuntos, por ejemplo la relación entre Temperatura y Altitud, la cual establece que a mayor altitud, menor temperatura. Otro caso es la relación entre le número de kilómetros recorridos y el costo del servicio en un taxi, el cual esta relacionado que a mayor kilometraje, mayor costo del servicio. Así existen muchas relaciones entre dos conjuntos.

El concepto de relación está asociado a una *condición* entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un o varios elementos del conjunto de llegada.

Las relaciones se pueden representar por medio de los diagramas de Venn.

Las parejas ordenadas graficadas son:
(a, 5), (b, 4), (c, 2), (d, 1), (f, 6), (g, 3)



Según la teoría:

A = Conjunto de partida
B = Conjunto de llegada
R = Relación entre cada para ordenado.

Componentes de Una Relación:

Toda relación presenta varios componentes.

Dominio: Corresponden a todos los elementos que conforman el conjunto de partida; es decir, los elementos del conjunto A.
Codominio ó Rango: Corresponde a los elementos que conforman el conjunto de llegada; es decir, los elementos del conjunto B.
Regla o Norma: Corresponde a la forma en que se asocian los elementos del dominio y el codominio, generalmente se representa con la R.

$$\boxed{\text{Sea} \quad R: A \longrightarrow B}$$

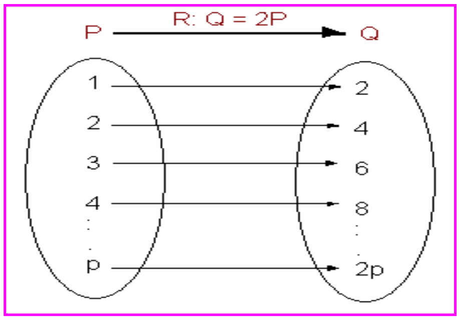
La expresión significa que existe una relación R entre los conjuntos A y B.

Ejemplo 129:

Dada la relación entre los conjuntos P y Q, cuya norma o regla es: Q = 2P, hacer el diagrama de Venn e identificar las parejas ordenadas, tomar los 4 primeros enteros positivos.

Solución:

A partir de las condiciones del problema: R: Q =2P. Sea R: P $\longrightarrow$ Q



Las parejas ordenadas:

(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8),…, (p, 2p)

En el conjunto de partida se tomaron los 4 primeros números enteros positivos por las condiciones del ejemplo, pero en dicho conjunto se pueden tomar los valores que se deseen, sean positivos o negativos.

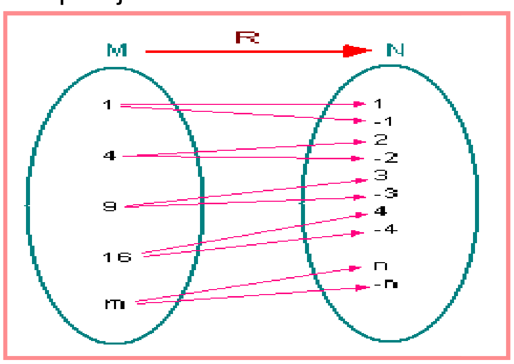
Ejemplo 130:

Dados los conjuntos M y N, de tal manera que N sea la raíz cuadrada de M. Hacer el diagrama de Venn y obtener las parejas ordenadas para 1, 4, 9, 16,…, m para m positivo.

Solución:

Sea R: $M \xrightarrow{R:N=\sqrt{M}} N$

Las parejas ordenadas:

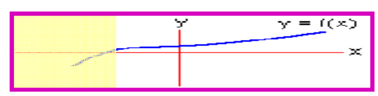


(1, 1) y (1, -1)
(4, 2) y (4, -2)
(9, 3) y (9, -3)
(16, 4) y (16, -4)

En general:

(m, n) y (m, -n)

FUNCIONES



Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el de Función, ya que en las ciencias puras y aplicadas son fundamentales para analizar diferentes fenómenos. En Biología el crecimiento de los organismos es modelado por una función exponencial, en Economía para la descripción del costo ó utilidad de un artículo, en Física el análisis del movimiento se modela por funciones polinómicas, etc.

Dentro del análisis de funciones, hay algunos conceptos que son pertinentes mencionar.

Variables: Se puede decir que es todo aquello que cambia a través del tiempo o espacio, el mismo espacio y tiempo se consideran variables. La clave de este concepto es que ocurre cambio, ya que si esto sucede, se dice que ocurrió variación. En el estudio de funciones se conocen dos tipos de variables. ***VARIABLE INDEPENDIENTE***: Se considera aquella que se define por si misma, una de esas por su naturaleza es el tiempo, pero existen otras. Esta variable por lo general se ubica en el eje de las abscisas del plano cartesiano; es decir, en el eje *x*. ***VARIABLE DEPENDIENTE***: Como su nombre lo indica, son aquellas que quedan definidas a partir de otra; es decir, depende de otra para quedar definida. Esta variable es ubicada en el eje de las ordenadas en el plano cartesiano; eje *y*.

Cuando se dice que el área de un círculo es función del radio, lo que se quiere decir es que el área depende del radio. A = f (R)

Constantes: Son términos que tienen valores fijos; es decir, lo que indica que no cambia en ninguna circunstancia. Los valores numéricos son el ejemplo típico de constantes.

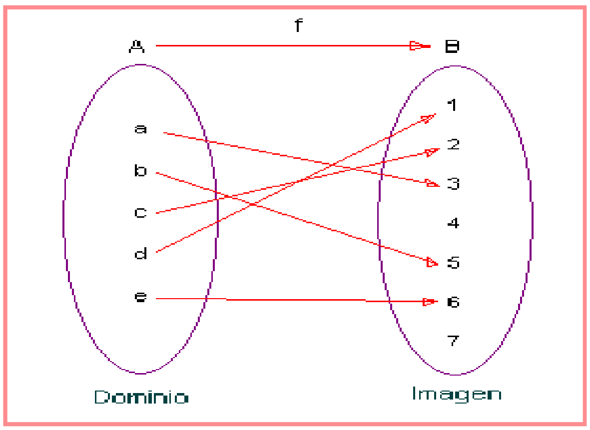
En la antigüedad se utilizaban las vocales para indicar las variables y las consonantes para indicar las constantes. En la actualidad por convención general, las primeras letras del alfabeto se utilizan para indicar las constantes y las últimas letras para indicar las variables.

Con estos elementos se puede hacer una definición de función.

DEFINICIÓN: Una función es *una relación* donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde *uno y solo* un elemento del conjunto de llegada.

En funciones, al conjunto de partida se le llama ***Dominio*** y a los elementos del conjunto de llegada se le llama ***imagen***. En el plano cartesiano los elementos del dominio son ubicados en el eje *x* y los elementos de la imagen son ubicados en el eje *y*.

Por la definición, se puede inferir que todas las funciones son relaciones, pero NO todas las relaciones son funciones. (*Discutir esta conclusión con los compañeros del grupo colaborativo*)



Para determinar si una relación es función, basta con observar en el diagrama de Venn, que todos los elementos del dominio estén relacionados con algún elemento del rango, pero solo con uno.

Gráficamente, para todos los elementos del dominio, debe salir solo una flecha.

Hay dos casos donde la relación no es función: Cuando un solo elemento del dominio no esté relacionado con alguno del rango o si algún elemento del dominio está relacionado con más de un elemento del rango.

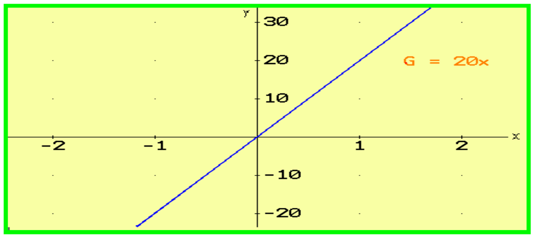
Existen 4 formas de definir una función, en el trabajo con funciones Éstas formas se trabajan indistintamente, lo que indica que se deben conocer y dominar adecuadamente.

1. DESCRIPTIVA: Es la descripción verbal del fenómeno que se estudia, en esta se detallan las condiciones en que ocurren los hechos. Por ejemplo: La ganancia G que resulta de vender x artículos, en la cual el valor unitario es de $200.

2. NUMÉRICA: Consiste en hacer una tabla de valores con los datos obtenidos del fenómeno al hacer las mediciones correspondientes. Por ejemplo:

x	0	1	2	3	4 ...
G	0	20	40	60	80 ...

3. GRÁFICA: Por medio de una representación gráfica, ubicando pares ordenados en el plano cartesiano, se puede observar la forma de la curva que muestra la función dada.



Los puntos ubicados en el plano son los descritos en la parte numérica.

En el eje x se representan los artículos vendidos y en el eje y la ganancia por ventas.

4. ANALÍTICA: También es llamada Matemática, es aquella que por medio de un modelo matemático se describe el fenómeno, para el ejemplo que estamos analizando seria:

El modelo describe la ganancia (G) en función de número de artículos vendidos (x).

$$\boxed{G = 20x}$$

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN:

En toda función se encontrar 3 elementos.

Dominio: Son los elementos del conjunto de partida; es decir, los elementos de *x*, que corresponden a la variable independiente. En el ejemplo modelo la variable independiente son el número de artículos vendidos. Anteriormente se hizo aclaración que los elementos del dominio se ubican en el eje *x* del plano cartesiano.

Imagen: Son los elementos del conjunto de llegada; es decir, los elementos de *y*, que corresponden a la variable dependiente. En el ejemplo modelo es la ganancia G. También por convención los elementos de la imagen se ubican en el eje *y* del plano cartesiano.

Regla o Condición: Se considera a la forma en que se relacionan los elementos de *x* e *y*. Cada función tiene una regla que relaciona las dos variables. Solo se debe tener presente que a cada elemento de *x* le corresponde solo uno de *y*.

Ejemplo 131:

La relación entre las variables x e y está dada de tal manera que y se obtiene elevando al cuadrado la variable x, a partir de la descripción del fenómeno, obtener la tabla de datos, la gráfica y el modelo matemático.

Solución:

Los valores:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

La grafica:

Plano Cartesiano.

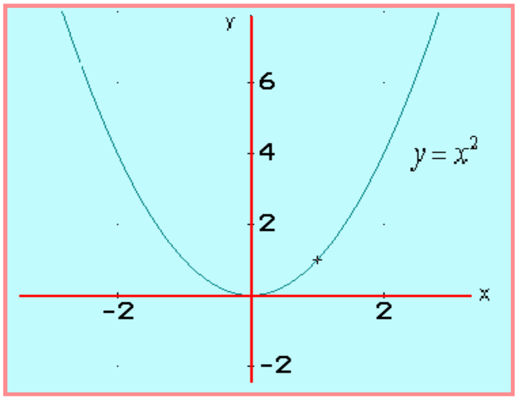
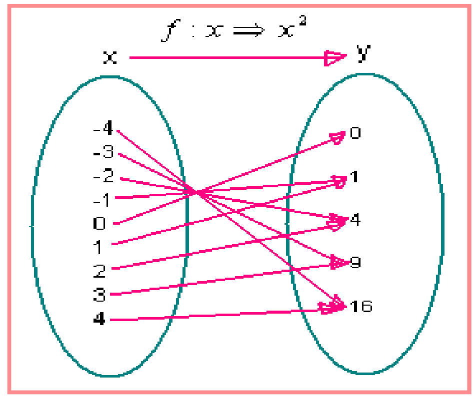


Diagrama de Venn



El modelo matemático: $y = x^2$

El dominio: Para el caso que se presenta, la variable independiente puede tomar cualquier valor real, luego el dominio son todos los reales.
La Imagen: Para cualquier valor de la variable independiente, el valor de la variable dependiente será positiva, luego la imagen son todos los reales no negativos.

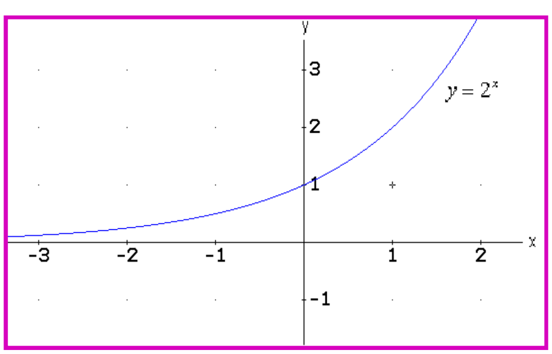
Determinación del Dominio e Imagen de una Función:

En el análisis de funciones, es importante identificar el dominio e imagen de la función, lo cual se puede hacer de dos maneras.

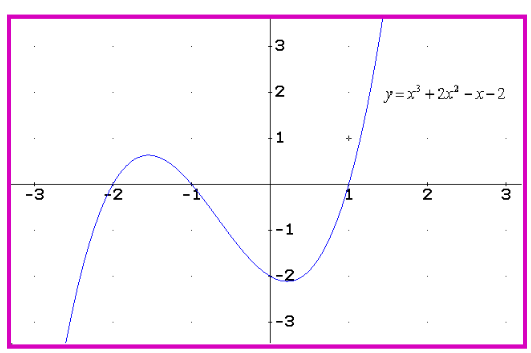
A Partir de la Gráfica:

Con la observación detallada de la gráfica, se puede identificar el dominio y la imagen de una función, veamos dos ejemplos modelos.

Gráfica A



Gráfica B



Gráfica A. Se observa que la curva se desplaza a lo largo del eje x, tomando valores positivos y negativos, luego el dominio son todos los valores reales. Para la imagen, la curva se desplaza en la parte positiva del eje y, luego la imagen son todos los reales positivos.

La notación será: $f : R \rightarrow R^{+}$

Gráfica B: En la curva se observa que la grafica puede tomar valores positivos o negativos en el eje x, igual para el eje y, luego el dominio e imagen de la función son todos los reales.

La notación será: $f : R \rightarrow R$

A Partir del Modelo Matemático: (fórmula matemática)

Dada el modelo matemático, se determina los valores que pueden tomar la variable independiente y la variable dependiente.

Sea la función valores $\boxed{y = x^3 + 2x^2 - x + 1}$ Según el modelo, se infiere que la variable x puede tomar positivos, negativos incluso cero, luego el dominio son todos los reales. Así se observa que la variable y tendrá valores positivos y negativos e incluso cero, luego la imagen son todos los reales; es decir es una función de reales en reales.

Sea la función pero NO $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ Se observa que la variable *x* puede tomar valores positivos y negativos, puede tomar el valor de cero, luego el dominio serán todos los reales diferentes de cero. La variable *y* será positiva si x es positiva y viceversa, pero nunca será cero, luego la imagen son todos los reales diferentes de cero.

Sea la función. $\boxed{y = \sqrt{x}}$ La variable *x* puede tomar valores positivos y cero, pero No puede tomar valores negativos, ya que la raíz cuadrado de números negativos no es real, así el dominio serán los reales positivos y el cero (reales no negativos). Los valores que puede tomar *y* serán positivos y cero ó negativos, pero no los dos; para que se pueda consideran una función, luego la imagen son los reales no negativos ó los reales negativos.

En general el Dominio de una función serán los valores que pueda tomar la variable *x* sin que se presenten ambigüedades en el momento de hacer la operación matemática.
La imagen se determina despejando *x* del modelo matemático y se observa qué valores puede tomar la variable *y*.

NOTA: Con la práctica y muchos ejercicios se ganará destreza para determinar el dominio e imagen de una función.

Notación Moderna de Función:

El matemático francés Agustín Louis Cauchy (1.789 – 1.857) dentro de los aportes dados a la matemática, como precisión de los conceptos de Función, Límites y Continuidad, propone una nomenclatura para definir esquemáticamente una función, de la siguiente manera.

$$\boxed{y = f(x)}$$

Fuente: mat.usach.cl/histmat/html/cauc.html

Como se ha comentado la variable x será la variable independiente y la variable y será la variable dependiente o función. Así *y* y *f(x)* serán equivalentes ya que significan lo mismo.
Por ejemplo si escribimos:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{Es lo mismo que} \quad y = 2x^2 - 3x + 1$$

Con lo analizado hasta el momento ya estamos en capacidad de responde las siguientes preguntas.

Toda relación es función: V F

Toda función es relación: V F

Funciones de Valor Real:

Con la aclaración de las afirmaciones anteriores, ahora se debe analizar en qué conjunto numérico se pueden trabajar las funciones. En apartados anteriores se dio un indicio sobre en donde se puede definir el dominio e imagen de una función. Una función de valor real, nos indica que los elementos del dominio e imagen son números reales, por esto las funciones de valor real se describen de la siguiente manera:

$$\boxed{f : R \rightarrow R}$$

Es pertinente aclarar los conceptos de rango e imagen. El rango es el conjunto que conforma el codominio de la relación y la imagen son los elementos del rango que interactúan con los elementos del dominio.

LAS FUNCIONES SEGÚN EL TIPO DE RELACIÓN:

Como se sabe en las funciones hay una interacción entre los elementos del dominio y rango. De acuerdo al tipo de interacción existen tres clases de funciones.

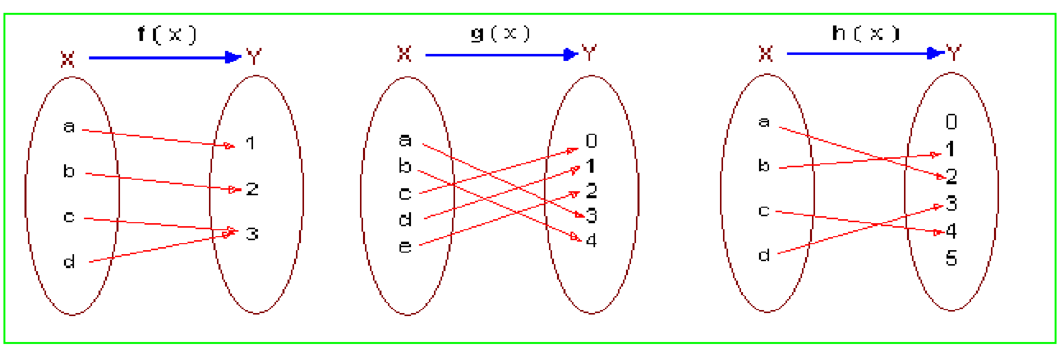
Función Inyectiva: También llamada Función Uno a Uno, son aquellas donde los elementos del rango que son imagen de algún elemento del dominio, solo lo hacer una vez. Las funciones crecientes y decrecientes son inyectivas.

DEFINICIÓN:
Sea la función y = f(x), dados dos elementos del dominio x_1 y x_2,
Si $x_1 \neq x_2$, y $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función es inyectiva

Función Sobreyectiva: Las funciones y = f(x), donde "Todos los elementos del rango" son al menos imagen de uno o varios elementos del dominio. Lo anterior quiere decir que todos los elementos del rango se relacionan con algún o algunos elementos del dominio.

Función Biyectiva: Una función y = f(x) es Biyectiva si, solo si, es inyectiva y Sobreyectiva.

En el siguiente grafico identifica que tipo de función es cada una.



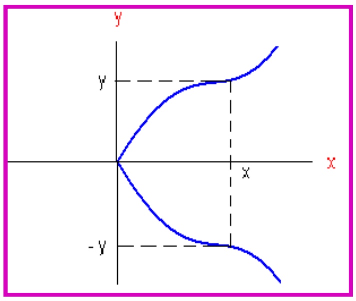
f(x): ______________________________

g(x): ______________________________

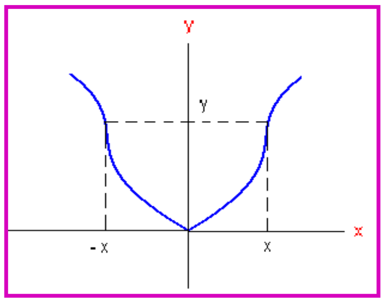
h(x): ______________________________

SIMETRÍA DE LAS FUNCIONES:

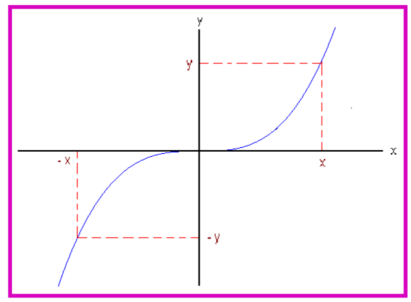
La simetría es el comportamiento de la curva respecto a los ejes coordenados. Una curva es simétrica respecto al eje *y*, si la parte derecha es la imagen especular de la parte izquierda, será simétrica respecto a *x* si la parte superior es la imagen especular de la parte inferior.



Simetría respecto a eje x



Simetría respecto al eje y



Simetría respecto al origen

La simetría de las funciones está relacionado con el concepto de función par e impar, veamos en qué consisten dichos principios.

Función Par: Una función f (x) es par si para todo x en su dominio: ***f (- x) = f (x)***. Este tipo de funciones son simétricas respecto al eje y. El ejemplo típico son las funciones cuadráticas.

Ejemplo 132:

Sea la función f (x) = $x^2 + 2$, mostrar que es par.

Solución:

Lo que se debe hacer es cambiar x por – x en la función: $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2$
Como f (- x) = f (x), entonces la función dada es par.

Ejemplo 133:

Mostrar si la función: $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x+1}$ es simétrica respecto al eje y.

Solución:

Solo se debe reemplazar a x por – x en cada una y observar el resultado: $g(x) = \dfrac{(-x)^3 - 4(-x)}{-x+1} = \dfrac{-(x^3 - 4x)}{-x+1} = \dfrac{(x^3 - 4x)}{x-1}$ g (- x) ≠ g (x), la función no es par, por ende g(x) no es simétricas respecto al eje y.

Función Impar: Una función f (x) es impar si para todo x en su dominio: ***f (- x) = - f (x)***. Este tipo de funciones son simétricas respecto al origen de coordenadas. El ejemplo típico son las funciones cúbicas.

Ejemplo 134:

Dada la función f (x) = x^3 – 2x, determinar si es impar.

Solución:

Se debe reemplazar a x por – x y observar la función obtenida.
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x)$

Como se puede ver f (- x) = - f (x), Luego la función es impar, así será simétrica respecto al origen de coordenadas.

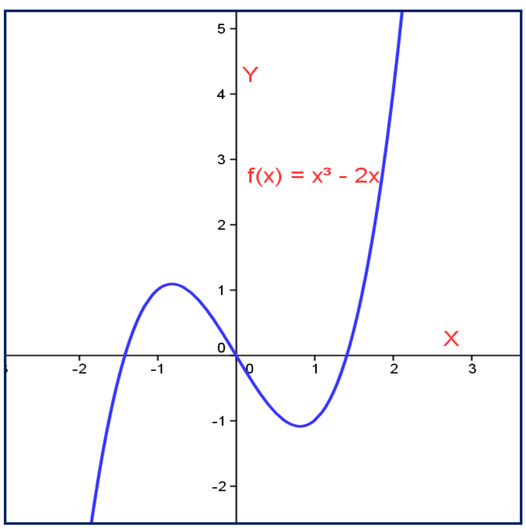
Ejemplo 135:

Mostrar si la función g (x) = $4x^5 + 2x^3$, es impar.

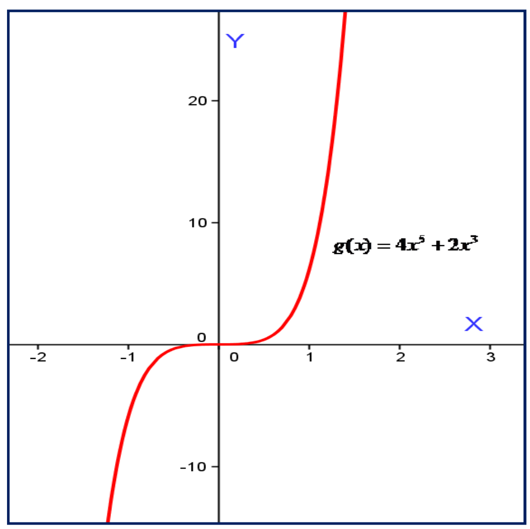
Solución:

Se debe reemplazar a x por – x y observar la función obtenida.
$g(x) = 4(-x)^5 + 2(-x)^3 = -4x^5 - 2x^3 = -(4x^5 + 2x^3)$. Entonces: g(-x) = -g(x). la función es simétrica respecto al origen.

Grafica ejemplo 134.



Grafica ejemplo 135



MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES:

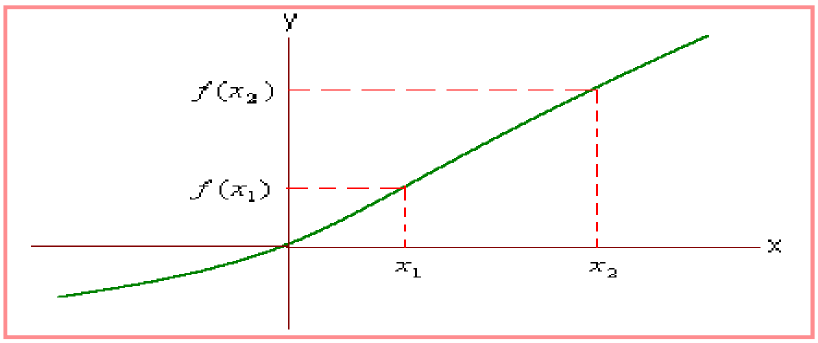
Una función se considera monótona si es creciente o decreciente.

Función Creciente: Intuitivamente una función es creciente si a medida que aumenta la variable x, también aumenta la variable y.

DEFINICIÓN:
Sea f(x) una función definida en el intervalo I, para $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$. Si $f(x_1) < f(x_2)$, se dice que la función es creciente en el intervalo I.

Cuando se dice que la función f (x) está definida en el intervalo I, se afirma que el intervalo I es parte del dominio de la función.

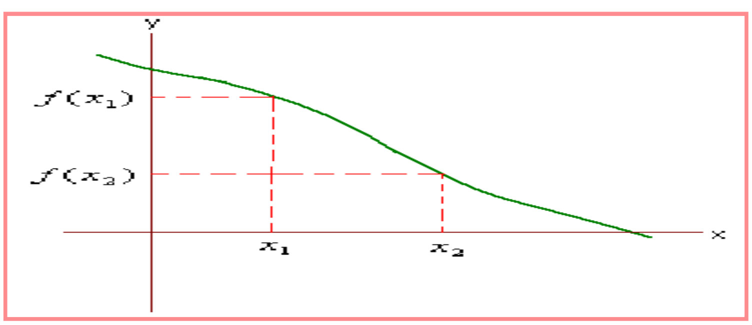
FUNCIÓN CRECIENTE



Función Decreciente: Intuitivamente una función es decreciente si a medida que aumenta la variable x, la variable y disminuye.

DEFINICIÓN:
Sea f(x) una función definida en el intervalo I, para $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$.
Si $f(x_1) > f(x_2)$, se dice que la función es decreciente en el intervalo I.

FUNCIÓN DECRECIENTE



Descripción De Una Función:

Describir una función es hacer el análisis donde se identifique el dominio y la imagen, su monotonía, su simetría y la gráfica correspondiente, entre las características más importantes.

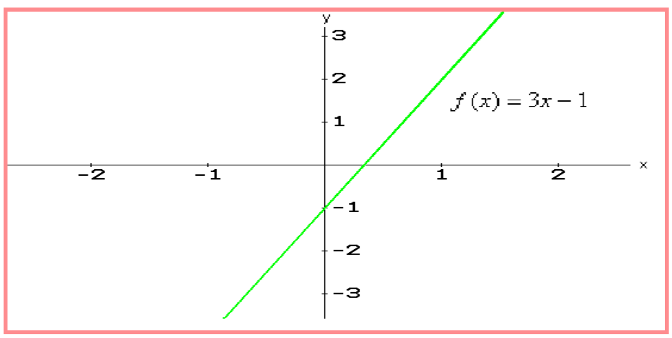
Ejemplo 136:

Sea la función $f(x) = 3x - 1$, hacer una descripción de la misma.

Solución:

Dominio: Como x puede tomar cualquier valor real, sin restricciones, entonces el dominio son todos los reales. D ϵ **R**.
Imagen: Para hallar la imagen, debemos despejar la variable x y observar qué valores puede tomar y, como y = 3x – 1, entonces. x = (y + 1) / 3 Así, la variable y puede tomar cualquier valor real, luego la imagen son todos los reales I ϵ **R**.
Decimos: f: **R** $\longrightarrow$ **R**. (Se lee reales en reales)
Monotonía: Se debe identificar si la función es creciente o decreciente. Para esto se toman dos valores del dominio: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, recordemos que $x_1 < x_2$ según la definición. Ahora se determina la imagen de cada uno así: $f(x_1 = 2) = 3(2) – 1 = 5$. $f(x_2 = 3) = 3(3) – 1 = 8$
Como $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.
Simetría: Se debe buscar que f (- x) = f (x) ó f (- x) = - f (x), de otra manera no hay simetría.
f (- x) = 3 (- x) – 1 = - 3 x – 1 = - (3 x + 1). Como se puede ver no se cumple ninguna de las dos condiciones, luego la función no tiene simetría.
Gráfico: Para hacer el gráfico se debe tomar algunos puntos, veamos:

x	y
-2	-7
-1	-4
0	-1
1	2
2	5



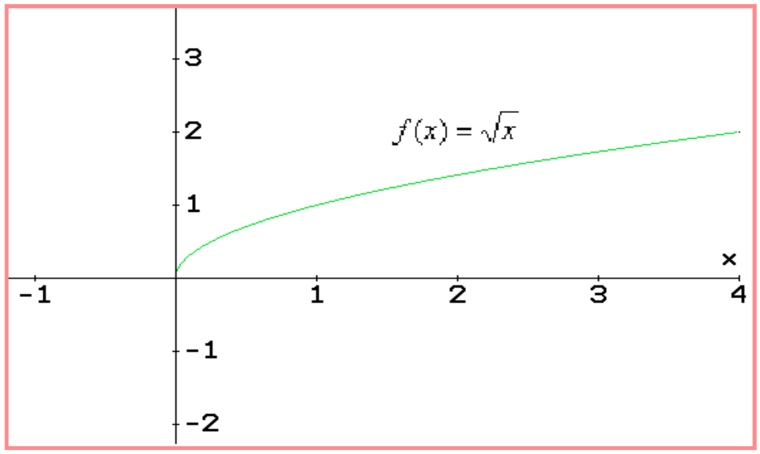
Ejemplo 137:

Sea la función $y = \sqrt{x}$ Hacer la descripción de dicha función.

Solución:

Dominio: La variable x esta dentro de una raíz cuadrada, luego solo puede tomar valores positivos y cero, pero no puede tomar valores negativos, entonces el dominio son los reales positivos y el cero; es decir, los reales no negativos (**R***) D ϵ **R***
Imagen: Despejamos la variable x, luego: $x = y^2$ esto significa que la variable y solo toma valores positivos o cero (analice porqué). I ϵ **R***
Se puede expresar: f: **R*** $\longrightarrow$ **R***
Monotonía: Tomemos dos valores, digamos $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, entonces: $f(x_1) = \sqrt{1} = 1$ y $f(x_2) = \sqrt{4} = 2$. Como $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.
Simetría: Si tomamos f (- x) en la función, se presenta ambigüedad, ya que raíces pares de números negativos no son reales. Así la función no es simétrica.
Grafica: Tomamos varios puntos y se unen, para observar el comportamiento de la grafica.

0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2
6	$\sqrt{6}$
9	3



Lección Veintitrés: Algebra de Funciones

$\boxed{f(x)=g(x)\pm h(x)}$

Las funciones también se pueden operar algebraicamente.

SUMA: La suma de dos o más funciones origina otra función, cuyo dominio serán los elementos comunes a las funciones que participaron en la operación.

Sean las funciones. f (x), g (x), h (x) entonces: s (x) = f (x) + g (x) + h (x)

La suma de funciones cumple con las leyes básicas propias de la suma, como la conmutativa, clausurativa, asociativa y otras.

RESTA: Al igual que en la suma, la resta de dos o más funciones, origina otra función. El dominio de la función resultante son los elementos comunes a las funciones que fueron operadas.

Sean f (x) y g (x) dos funciones, luego: r (x) = f (x) – g (x)

Es pertinente recordar que la resta no es conmutativa.

PRODUCTO: Cuando se multiplican dos o más funciones, se produce otra función, la función resultante tiene como dominio los elementos comunes de las funciones multiplicadas.

Sea f (x), g (x) y h (x), funciones , entonces: p (x) = f (x) * g (x) * h (x)

COCIENTE: Dividir funciones es equivalente a dividir polinomios, solo que para poder realizarla, el denominador debe ser diferente de cero.

Sea $f(x)=\dfrac{g(x)}{d(x)}$ con d (x) ≠ 0.

El dominio de f (x) serán todos los valores de x, excepto aquellos que hagan d (x) = 0

Ejemplo 138:

Sean las funciones: $f(x)=3x^2-2x+5$ y $g(x)=x^2-6$

Hallar: f (x) + g (x), f (x) – g (x), f (x) * g (x), f (x) / g(x),

Solución:

-) $f(x)+g(x)=(3x^2-2x+5)+(x^2-6)=4x^2-2x-1$

-) $f(x)-g(x)=(3x^2-2x+5)-(x^2-6)=2x^2-2x+11$

-) $f(x)*g(x)=(3x^2-2x+5)*(x^2-6)=3x^4-18x^2-2x^3+12x+5x^2-30=3x^4-2x^3-13x^2+12x-30$

-) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^2-2x+5}{x^2-6}=3-\dfrac{2x+23}{x^2-6}$

Ejemplo 139:

Hallar la suma, resta, producto y cociente de las funciones dadas a continuación:

$f(x)=e^{2x}+10$ y $g(x)=Ln(x)-4$

La primera es una función exponencial y la segunda una función logarítmica, más adelante se estudiaran.

Solución:

-) $f(x)+g(x)=(e^{2x}+10)+(Ln(x)-4)=e^{2x}+Ln(x)+6$

-) $f(x)-g(x)=(e^{2x}+10)-(Ln(x)-4)=e^{2x}-Ln(x)+14$

-) $f(x)*g(x)=(e^{2x}+10)*(Ln(x)-4)=Ln(x)e^{2x}+10Ln(x)-4e^{2x}-40$

-) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{e^{2x}+10}{Ln(x)-4}$ Para $[Ln(x)-4]\neq 0$

En este ejemplo se puede observar que cuando las funciones no se pueden operar, entonces se deja indicado dicha operación.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: Una de las operaciones más importantes en el álgebra de funciones es la composición. Intuitivamente componer funciones es "Introducir" una función dentro de otra, de tal manera que la función introducida será el dominio de la función anfitriona.

Sea f (x) y g (x) dos funciones, entonces:

$$\boxed{f[g(x)] = (f \circ g)(x)}$$

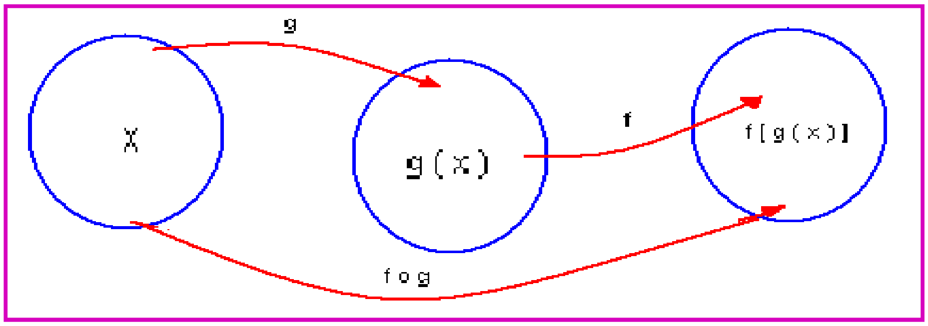
Se lee *f* de *g* ó *g* compuesta *f*

$$\boxed{g[f(x)] = (g \circ f)(x)}$$

Se lee *g* de *f* ó *f* compuesta *g*

El dominio de $f\,^o\,g$ es el conjunto de todos los elementos *x* del dominio de la función *g,* de tal manera que *g(x)* esté en el dominio de *f*. De la misma forma para $g\,^o\,f$.

Se puede graficar la composición de funciones así:



Es de aclarar que al función compuesta NO es conmutativa, ya que: $f\,^o\,g \neq g\,^o\,f$.

Ejemplo 140:

Sea $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ Hallar $f\,^o\,g(x)$ y $g\,^o\,f(x)$.

Solución:

-) $fog(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$

-) $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x^2+2)+1} = \sqrt{x^2+3}$

Ejemplo 141:

Sean las funciones $h(x) = 3x^2 - 2$ y $j(x) = \frac{x-1}{x}$. Hallar $h\,^o\,j$ (2) y $j\,^o\,h$ (3)

Solución:

Para calcular $h\,^o\,j$ (2), primero se busca la función compuesta y luego se aplica para x = 2, siempre y cuando este valor este en el dominio de la compuesta. Igual para $j\,^0\,h$ (3)

-) $hoj\ (x) = 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 2$

Ahora lo aplicamos para x = 2: $hoj\ (x) = 3\left(\frac{2-1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$

Entonces $h\,^o\,j$ (2) = - 5 / 4

-) $joh(x) = \frac{(3x^2-2)-1}{(3x^2-2)} = \frac{3x^2-3}{3x^2-2}$

Se aplica para x = 3. $joh(x) = \frac{3x^2-3}{3x^2-2} = \frac{3(3)^2-3}{3(3)^2-2} = \frac{24}{25}$

Entonces $j\,^0\,h$ (3) = 24 / 25

Ejemplo 142:

Calcular (f ^{o} g) (1/3) y (g ^{o} f)(π/8) para f (x) = sen(4x) y g(x) = Ln(3x)

Solución:

-) Calculemos primero (f ^{o} g) (x) y luego lo aplicamos a x = 1/3

$$fog(x) = sen(4Ln(3x))$$

Reemplazamos para x = 1/3. $fog(x) = sen(4Ln(3\frac{1}{3})) = sen(4Ln(1)) = sen(0) = 0$

Entonces (f ^{o} g) (1/3) = 0

-) Hallemos: (g ^{o} f) (x) y luego lo aplicamos a X = π/8

$$gof\ (x) = Ln\,(3sen\ (4x))$$

Ahora se aplica para x = π/8. $gof(x) = Ln(3sen(4\frac{\pi}{8})) = Ln(3sen(\frac{\pi}{2})) = Ln(3x1) = Ln(3)$

Entonces (g ^{o} f)(π/8) = Ln(3)

Ejemplo 143:

Dadas las funciones f (x) = $4x^2 + 4$ y g(x) = 1/x Para x ≠ 0. Hallar:
a-) (f ^{o} f)(x)
b-) (g ^{o} g)(x)
c-) (f ^{o} g)(x)

Solución:

a-) $fof\,(x) = 4(4x^2 + 4)^2 + 4 = 4(16x^4 + 32x^2 + 16) + 4$

$$fof\,(x) = 64x^4 + 128x^2 + 64 + 4 = 64x^4 + 128x^2 + 68$$

b-) $gog(x) = \frac{1}{1/x} = x$

c-) $fog(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4 = \frac{4}{x^2} + 4$ Para x ≠ 0

EJERCICIOS

Para las funciones dadas, hacer la descripción correspondiente: Dominio, Imagen, simetría y monotonía y una descripción de la gráfica.

1. $f(x)=3x^2-4x+5$

2. $g(x)=\dfrac{5x-1}{2x-6}$

3. $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ Hallar la imagen; si existe para x = 0, x = -1, x = 1, x = 3

5. Proponga dos ejemplos de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

6. Dada las funciones $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-4}$ y $g(x)=\dfrac{x-4}{3x}$ Hallar.

a-) $f(x)+g(x)$ b-) $f(x)-g(x)$

7. Para las funciones $h(y)=y^2-5y+4$ y $L(y)=3y^2-5y+8$ Hallar:

a-) $h(y)-3L(y)$ b-) $L(y)+5h(y)$ c-) $\dfrac{5h(y)}{3L(y)}$

8. Sean $f(x)=4sen^2(x)$ y $g(x)=4\cos^2(x)$ Hallar:

a-) $f(x)+g(x)$ b-) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

9. Sean las funciones: $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$ y $g(x)=\sqrt{x^2+2}$

Determinar: a-) $(fog)(x)$ b-) $(gof)(x)$

10. Sean las funciones: $f(x)=2^x$ y $g(x)=sen(3x)$

a-) $f(x)+g(x)$ b-) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ c-) $(fog)(x)$ d-) $(gof)(x)$

Lección Veinticuatro: Funciones Especiales.

Clasificar la gran cantidad y variedad de funciones no es tarea fácil, anteriormente analizamos que según el tipo de relación hay funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Pero existen otros criterios para clasificar funciones, el más general es clasificar las funciones *según el tipo de expresión matemática que la describe*. Por ejemplo la ecuación lineal describe funciones lineales, las ecuaciones cuadráticas describen funciones cuadráticas, los logaritmos describen las funciones logarítmicas y así sucesivamente.

El criterio descrito es muy pertinente, ya que de esta manera se puede involucrar la mayoría; por no decir todas las funciones que existen y puedan existir.

Bajo este contexto las funciones se clasifican en Algebraicas, Trascendentales y Especiales.

FUNCIONES ESPECIALES:

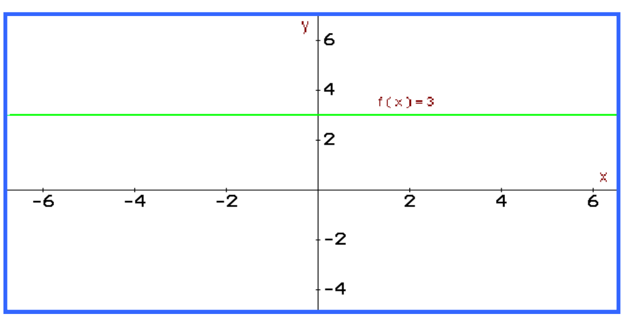
Se consideran a las funciones cuyo modelo matemático no tiene un patrón definido, más bien son muy particulares.

1. Función Constante:

Sea $f(x) = b$ Siendo *b* una constante. Esta función indica que para todo valor de *x*, su imagen siempre será *b*. La función constante es lineal.

La notación $f : R \to R_{fijo}$

Su dominio son todos los reales y su imagen un único valor b; quizás esto es lo que la hace ver especial. Es una función par, ya que f (-x) = f (x), luego es simétrica respecto al eje y.



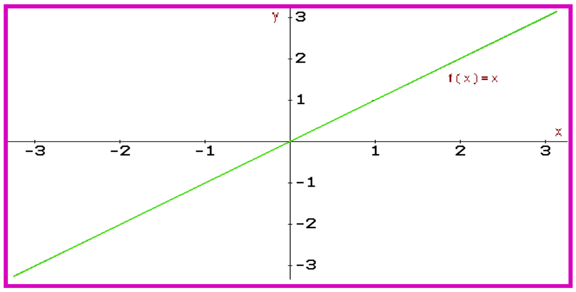
La función que se presenta en la gráfica muestra que el dominio es cualquier real y la imagen para este caso es y = 3.

Esta función no es creciente, tampoco decreciente, por lo cual no se considera monótona.

2. Función idéntica:

Se le llama idéntica ya que para cualquier valor del dominio, su imagen es precisamente el mismo valor. Sea $f(x) = x$. Esta función también es lineal, solo que el valor del dominio e imagen es el mismo, aquí es donde se le da la connotación de especial.
La notación $f : R \rightarrow R$

Esta función es impar, ya que se cumple f (-x) = - f (x).



Por ser una función impar, la función idéntica es simétrica respecto al origen.

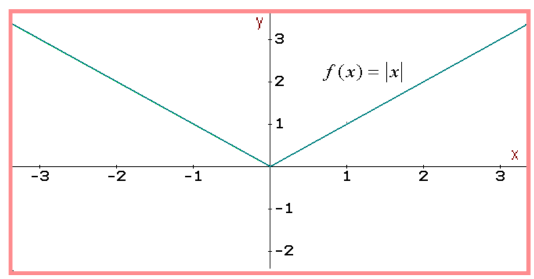
En la gráfica se observa que la función es creciente, esto porque el coeficiente de la variable *x* es positivo, pero si dicho coeficiente es negativo la función será decreciente, de todas maneras esta función es monótona.

3. Función Valor Absoluto:

Esta función cumple con los principios del valor absoluto. Sea $f(x) = |x|$. El dominio son todos los reales, ya que el valor absoluto se aplica a cualquier valor real. La imagen son los reales no negativos, debido a que el valor absoluto por definición siempre será positivo o a lo más cero. La notación $f : R \rightarrow R^*$

Esta función es par ya que f (- x) = f (x), por lo cual es
Simétrica respecto al eje *y*.

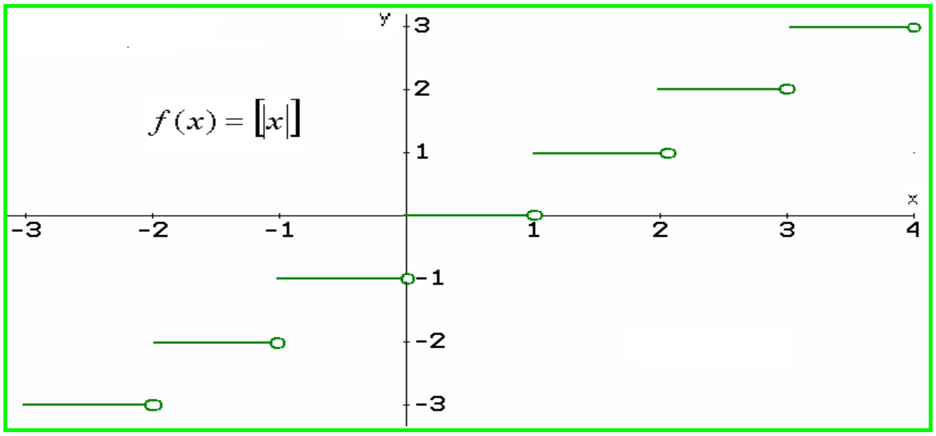
La función es creciente en el intervalo [0, ∞) y decreciente en el intervalo (-∞, 0)



4. Función Parte Entera:

Es una función muy especial ya que presenta una discontinuidad notoria. Algunos la llaman función escalonada, en la gráfica se verá porque.

Sea $f(x) = [\![x]\!]$ Cuyo significado es el valor máximo entero menor o igual que *x*, más común parte entera. Por ejemplo $f(x) = [\![0,2]\!] = 0$, ya que 0,2 es mayor menor o igual que 0. Más explícitamente:
Para -1 ≤ x < 0, su imagen es -1
Para 0 ≤ x < 1, su imagen será 0
Para 1 ≤ x < 2, su imagen es 1. Así sucesivamente.



El dominio de esta función son todos los reales y su imagen los enteros. La notación: $f : R \rightarrow Z$ No tiene simetría, tampoco monotonía, su característica más notoria es su discontinuidad para cada x entero.

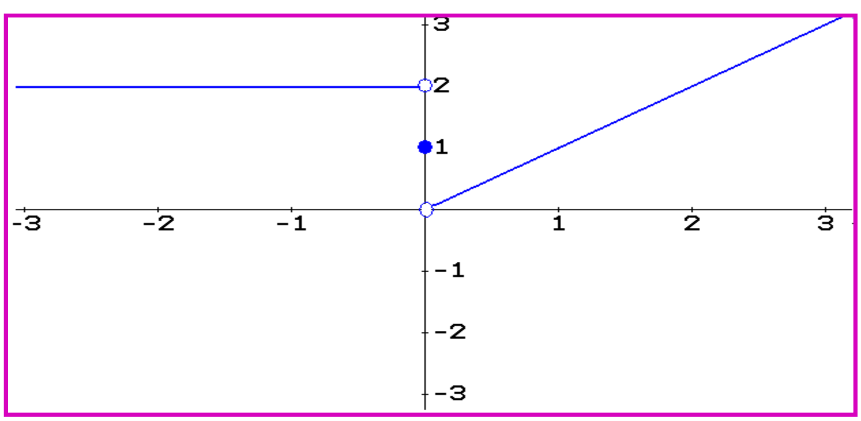
5. Función Definida por Partes:

Es una función que combina parte de diversas funciones, puede ser definida por una parte constante y otra idéntica, una parte lineal y otra trascendental, etc. En general la función definida por partes se muestra por una regla compuesta por dos o más expresiones matemáticas. Aunque no hay una forma general, podemos ilustrar con algún ejemplo, pero se tendrá más oportunidad de analizar este tipo de funciones a lo largo del curso.

Ejemplo 144:

Sea $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$

Se observa que esta función está definida en tres partes, según el valor que tome la variable *x*, para la parte positiva de la variable la función es idéntica, para la parte negativa la función es constante. Cuando x = 0, entonces la imagen es 1. Veamos la gráfica.



Lección Veinticinco: Funciones Algebraicas.

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Las funciones algebraicas se caracterizan porque la ecuación que la describe son polinomios, haciendo que éstas tengan los principios y características que tienen éstos.

1. Función Lineal:

Su nombre es dado por la gráfica que la representa, la cual es una línea recta no vertical, además su ecuación es de primer grado.

> **DEFINICION:** Sea $f(x) = mx + b$, donde m y b son reales y m $\neq 0$. Se define como una función lineal, donde *m* se conoce como la pendiente y *b* el intercepto.

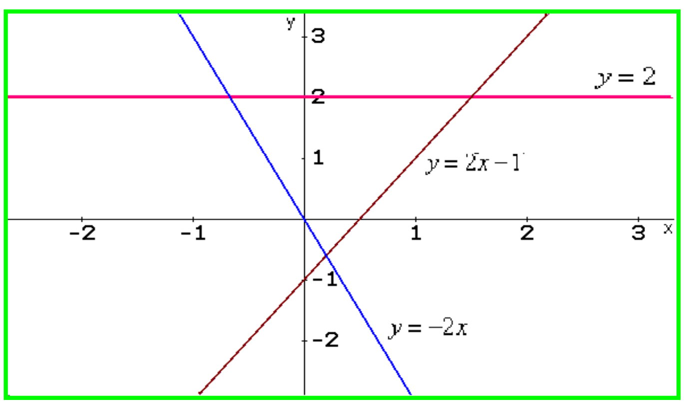
El dominio de la función lineal son todos los reales al igual que la imagen. $f : R \to R$

La pendiente *a* se calcula de la siguiente manera, a partir de dos puntos P(x_1, y_2) y P(x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente puede ser negativa, positiva o cero.
Cuando **m = 0**, la recta es horizontal, así la función no tiene monotonía, tampoco simetría.
Cuando **m > 0** la recta es inclinada hacia la derecha, en este caso la función es creciente.
Cuando **m < 0** la recta es inclinada hacia la izquierda, siendo decreciente para este caso.

El intercepto es el punto donde la recta corta al eje *y*.



En la gráfica se observa los tres casos de la función lineal.

Para **y = 2** la pendiente m = 0, la recta es horizontal y el intercepto es y = 2.

Para **y = 2x – 1**, la pendiente m > 0, la recta es creciente y el intercepto es y = -1.

Para **y = -2x** la pendiente m < 0, la recta es decreciente y el intercepto es y = 0.

Como se puede inferir, la monotonía de la función lineal está determinada por el valor de la pendiente. *En el pequeño grupo colaborativo, analizar la simetría de la función lineal.*

Ejemplo 145:

Sea la función f(x) = ax +b, por dicha función pasa los puntos P (2, 4) y Q (-2, -3). Determinar la ecuación que describe dicha función, identificar la pendiente, el intercepto y hacer la grafica.

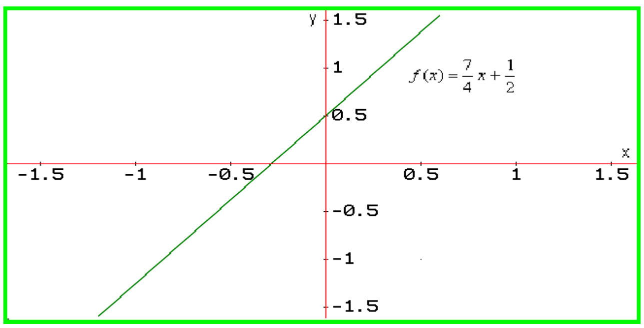
Solución:

Según la ecuación que identifica la función f(x) = *a*x +b, lo que se debe hallar es *a* y b, sabiendo que *a* es la pendiente y b el intercepto.

Calculemos la pendiente: tomemos como P_1 (2, 4) y Q (-2, -3) entonces: $a=m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-4}{-2-2}=\frac{7}{4}$

Se reemplaza el valor de *a* en la ecuación planteada: $f(x)=\frac{7}{4}x+b$. Como los dos puntos deben satisfacer dicha ecuación, se reemplaza uno de ellos y así se obtiene b: Tomando el punto P (2, 4): $4=\frac{7}{4}(2)+b\Rightarrow\Rightarrow b=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$ Así la ecuación que distingue la función es: $f(x)=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$

La gráfica:



La gráfica muestra que la recta esta inclinada hacia la derecha, luego la pendiente es positiva, lo que se puede corroborar en la ecuación; además, es creciente.

No es simétrica, lo que se puede comprobar sustituyendo a x por – x en la ecuación.

Ejemplo 146.

Dados los puntos R (-3, 4) y S (3, -2), determinar la ecuación lineal que contiene dichos puntos, la gráfica, su monotonía.

Solución:

La ecuación será de la forma: y = mx + b, que es equivalente a f(x) = ax + b

Como en el caso anterior debido a que no se conoce la pendiente lo primero es hallarla.

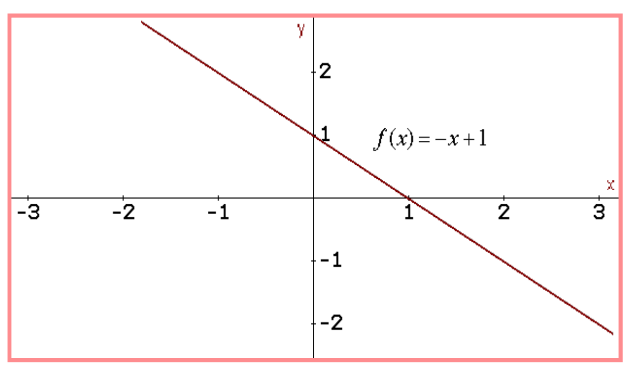
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-4}{3-(-3)}=\frac{-6}{6}=-1$$

Ahora en la ecuación dada se reemplaza uno de los puntos, ya sabemos por qué. $4=-1(-3)+b\Rightarrow\Rightarrow b=1$

Por consiguiente: $f(x)=-x+1$

La gráfica:
Según la ecuación, la pendiente es negativa, luego la recta será inclinada hacia la izquierda, lo que se observa en la gráfica.

La función es decreciente.
(*Comprobarlo matemáticamente, en el grupo colaborativo*)



El intercepto es 1, se ve en la gráfica y se observa en la ecuación. Así la expresión obtenida es una función lineal.

Ejemplo 147:

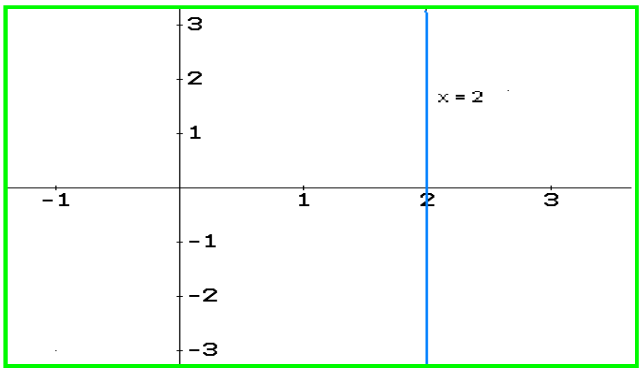
Sean los puntos P (2, 3) y Q(2, -2) que pasan por una recta. Hallar la ecuación, la gráfica y determinar si es función.

Solución:

Calculemos la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{2-2} = \frac{-5}{0} = Ind$

Esto nos indica que NO hay pendiente. Así la recta es vertical. La ecuación es de la forma:
x = 2

La gráfica:



La ecuación obtenida No representa una función, ya que para x = 2, las imágenes son infinitas.

Así la expresión x = 2 es una relación, pero no es función.

Generalizando, toda línea vertical representa una relación y toda línea no vertical representa una función.

2. Función Cuadrática:

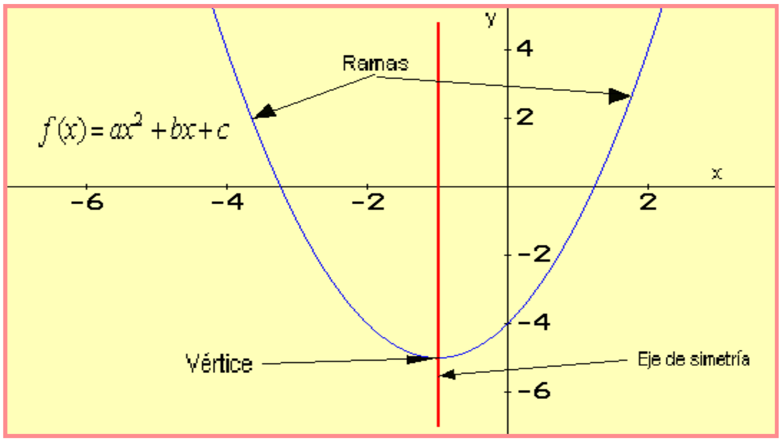
Su nombre es dado por el tipo de polinomio que la describe, un polinomio de segundo grado.

DEFINICION:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son reales y $a \neq 0$. Se define como una función cuadrática.

El dominio esta dentro de los reales al igual que la imagen. $f : R \rightarrow R$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, que consta de dos ramales que se unen en un punto llamado vértice; además, una recta que pasa por el vértice llamada eje de simetría, el cual divide la curva en dos partes iguales. Para que una parábola corresponda a una función, el eje de simetría debe ser siempre vertical.



Analizando la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, se pueden hacer algunas particularidades. Cuando b = c = 0, la parábola tiene el vértice en el origen. Si b y/o c son diferentes de cero, el vértice esta fuera del origen, en este caso el vértice se haya así:

El vértice (x, y) Donde: $x = \frac{-b}{2a}; y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ **El eje de simetría:** $x = \frac{-b}{2a}$

Cuando *a*; es decir, el coeficiente de la variable al cuadrado toma valores positivos o negativos, la gráfica cambia.
-) Si *a* > 0, las ramas de la parábola abren hacia arriba a partir del vértice.
-) Si *a* < 0, las ramas de la parábola abren hacia abajo a partir del vértice.

Ejemplo 148:

Dada la función $f(x) = 3x^2$ hacer la descripción correspondiente.

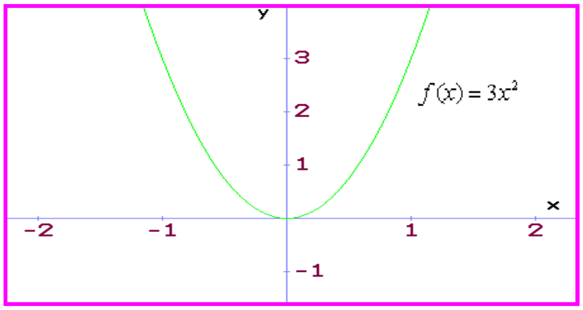
Solución:

Como la ecuación dada es cuadrática, se puede inferir que se trata de una función cuadrática. Se observa que b = c = 0, luego el vértice esta en el origen.
El dominio son todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.
La imagen: Recordemos que se despeja *x* y se observa que valores puede tomar *y* ó f(x).

$y = f(x) = 3x^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 = \frac{y}{3} \Rightarrow\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{3}}$, esto nos indica que *y* solo puede tomar valores positivos, ya que las raíces pares solo tiene solución en reales para valores positivos y cero. La imagen serán los Reales no negativos. ($\mathbf{R}^*$)

El eje de simetría será: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

Como *a* > 0, ya que a = 3, entonces las ramas abren hacia arriba a partir del vértice.
La función es decreciente en $(-\infty \ , 0)$ y creciente en $[0 \, , \infty)$



Por teoría de polinomios, sabemos que una ecuación cuadrática tiene dos ceros, que es donde la curva corta la eje x, para este caso el corte es en cero, luego dicho polinomio tiene dos ceros reales iguales.

No debemos olvidar la teoría de polinomios analizada en la parte de ecuaciones polinómicas, es de mucha ayuda para el estudio de funciones.

Ejemplo 149:

Hacer la descripción de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

Solución:

El dominio: todos los reales.

La imagen: Son los reales que sean mayores o iguales a $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, ya que a > 0.

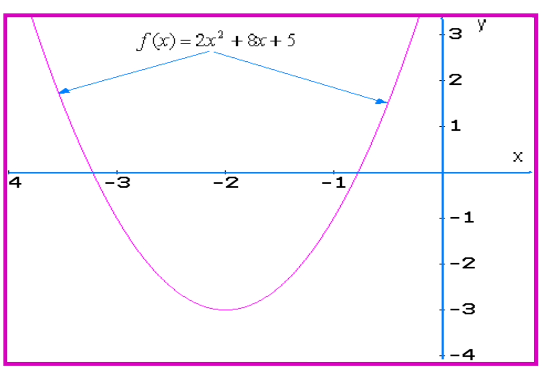
Primero se calcula: $\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(2)} = -2$ Ahora se determina $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

Veamos: $f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) + 5 = -3$ Finalmente se establece que la imagen son los reales mayores o iguales que -3. *Vértice*: V (-2, -3)

Simetría: Se debe reemplazar x por – x en la función: $f(-x) = 2(-x)^2 + 8(-x) + 5 = 2x^2 - 8x + 5$
Se observa que f (- x) es diferente a f (x). Así no hay simetría par. Se factoriza el signo y se obtiene: $f(-x) = 2x^2 - 8x + 5 = -(-2x^2 + 8x - 5)$ Tampoco se cumple que f (- x) = - f (x), luego no hay simetría impar, por consiguiente la función no tiene simetría.

Monotonía: Como a > o, las ramas abren hacia arriba a partir del vértice. Luego la función presenta la siguiente monotonía:
De $(-\infty, -2)$ la función es decreciente.
De $[-2, \infty)$ la función es creciente.

La gráfica:



Como ejercicio, se debe determinar los ceros del polinomio; es decir, donde la curva corta al eje x.

Muestre que dichos ceros son: -0,775 y -3,224.

Trabajarlo en el grupo colaborativo.

Ejemplo 150:

Hacer la descripción de la función cuya ecuación es $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$

Solución:

Dominio: Todos los reales

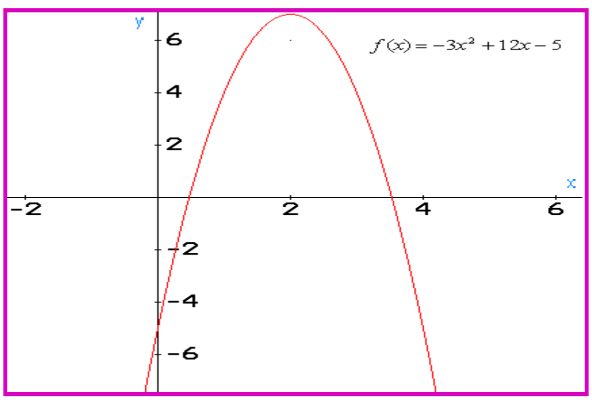
Imagen: Todos los reales que sean menores o iguales que $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, ya que a < 0.

$\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = 2$. Ahora: $f(2) = -3(2)^2 + 12(2) - 5 = 7$ La imagen son todos los reales menores o iguales que 7. *Vértice* V (2, 7)

Simetría: Como en el caso anterior se infiere que NO hay simetría, *por favor comprobarlo en el grupo colaborativo.*

Monotonía: La curva presenta la siguiente monotonía:
De $(-\infty, 2)$ la función es creciente.
De $[2, \infty)$ la función es decreciente.

La grafica:



Mostrar que los ceros de esta curva son: 0,472 y 3,527

Trabajarlo en el grupo colaborativo.

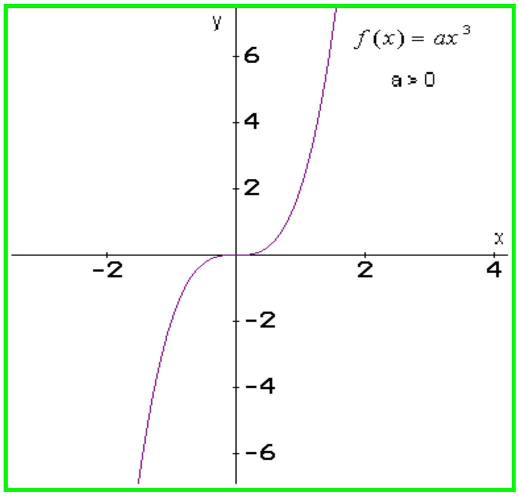
3. Función Cúbica:

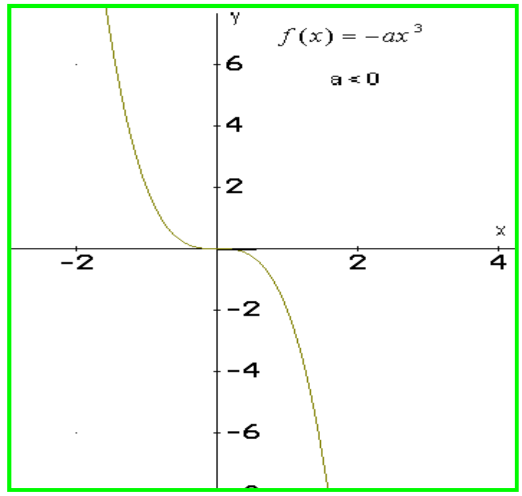
Su nombre es dado por el tipo de polinomio que la describe, un polinomio de tercer grado.

DEFINICION:
Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d son reales y $a \neq 0$. Se define como una función cúbica.

El dominio y la imagen están en los reales $f : R \rightarrow R$

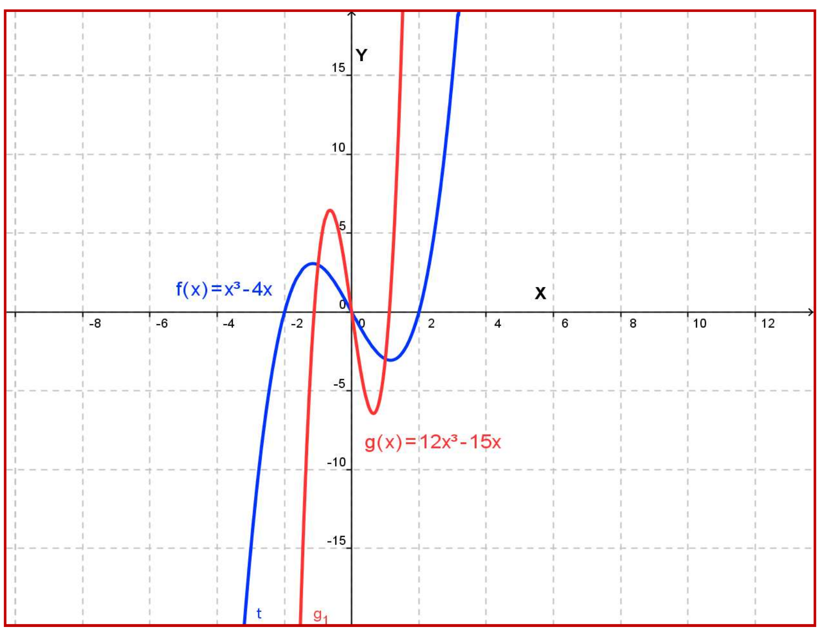
Cuando b = c = d = 0, se obtiene la función característica $f(x) = ax^3$. Esta función es impar. Cuando a > 0 la función es creciente y cuando a < 0 la función es decreciente.



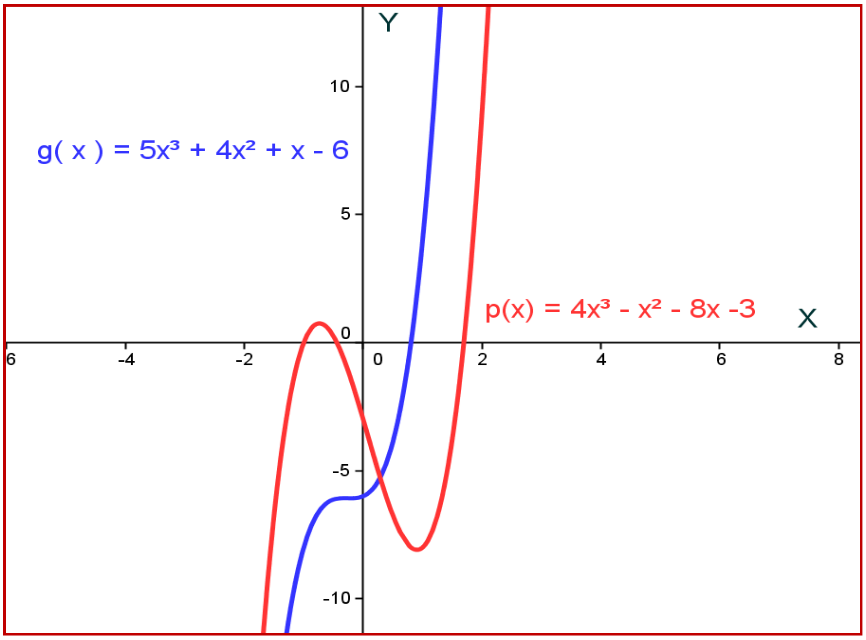


La función cúbica de la forma $f(x) = ax^3$ con a ≠ 0, es simétrica respecto al origen, es monótona y tiene tres raíces reales iguales, para el caso de $f(x) = ax^3 + cx,$ donde a ≠ 0 y c ≠ 0 presentan simetría respecto al origen, no son monótonas y tienen tres raíces reales diferentes.

Sea la función: f(x) = x^3 – 4x y g(x) = $12x^3$ – 5x. La gráfica siguiente muestra que tanto f(x) como g(x), presentan simetría respecto al origen, no tienen monotonía y presentan tres raíces reales diferentes. .



Para el caso de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donde b ≠ 0, c ≠ 0 y d ≠ 0, no presenta simetría. Si la función presenta las tres raíces reales, no es monótona. Veamos dos ejemplos en la siguiente grafica. Según la gráfica, qué tipo de raíces tiene g(x) y p(x).



4. Función Polinómica:

Las funciones polinómicas son aquellas cuya regla está dada por el polinomio que la define, por lo tanto el grado de la función será el grado del polinomio.

DEFINICION:
Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + ax + a_0$, donde a_u, a_{n-1},…, a y a_0 son reales y $a_n \neq 0$ y n ϵ Z^+. Se define como una función polinómica.

Para estas funciones el dominio y su imagen están en los reales; es decir: $f : R \rightarrow R$

Según la definición las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas son polinómicas, solo que éstas se estudiaron por separado, debido a su importancia y características. Aunque analizar funciones polinómicas requiere de sólidos conocimientos en polinomios y buena cantidad de ejercicios modelos, lo presentado en las temáticas de polinomios y funciones nos pueden servir como base para adquirir sólidos conocimientos en el tema.

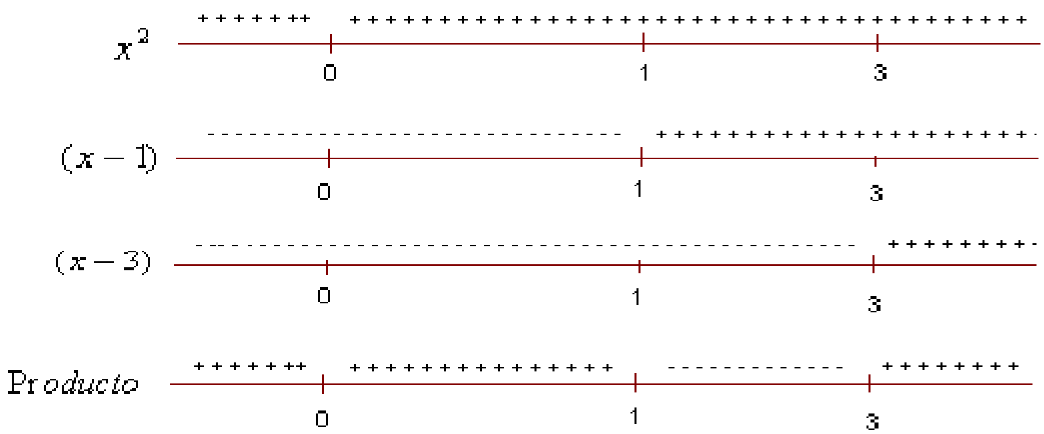
Ejemplo 151:

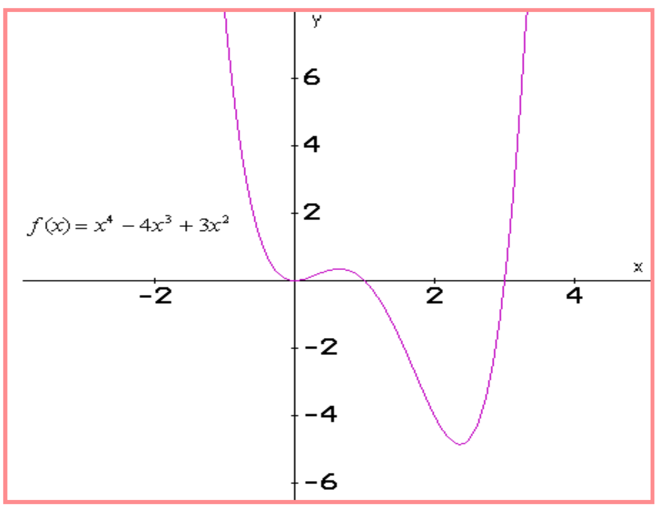
Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$: Hacer la descripción de dicha función.

Solución:

Dominio: Los reales, ya que la variable *x* puede tomas cualquier valor real.
Imagen: Los reales, ya que la variable *y* toma también valores reales.
Monotonía: Las funciones polinómicas por lo general no son monótonas, ya que pueden ser crecientes y decrecientes.

Simetría: Si se reemplaza *x* por – *x*, tenemos: $f(-x)=(-x)^4-4(-x)^3+3(-x)^2=x^4+4x^3+3x^2$
Así no se cumple f (-x) = f (x), tampoco f (- x) = - f (x). La función no tiene simetría.
Gráfica: Para hacer un bosquejo de la gráfica, se puede primero identificar los ceros del polinomio, lo que se hace, linealizándolo: $f(x)=x^4-4x^3+3x^2=x^2(x^2-4x+3)=x^2(x-1)(x-3)$ Entonces los ceros del polinomio son x = 0, x = 1, x = 3.
Por el diagrama de signos, se puede identificar cómo se comporta la curva.





Con el diagrama de signos se infiere que la función presenta la siguiente curvatura:
Positiva en los intervalos:
$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$ Negativa en el intervalo: $(1,3)$
En la gráfica se puede corroborar lo obtenido en el diagrama de signos.

La gráfica también nos deja ver que la imagen son los y ≥ - 5.

Ejemplo 152:

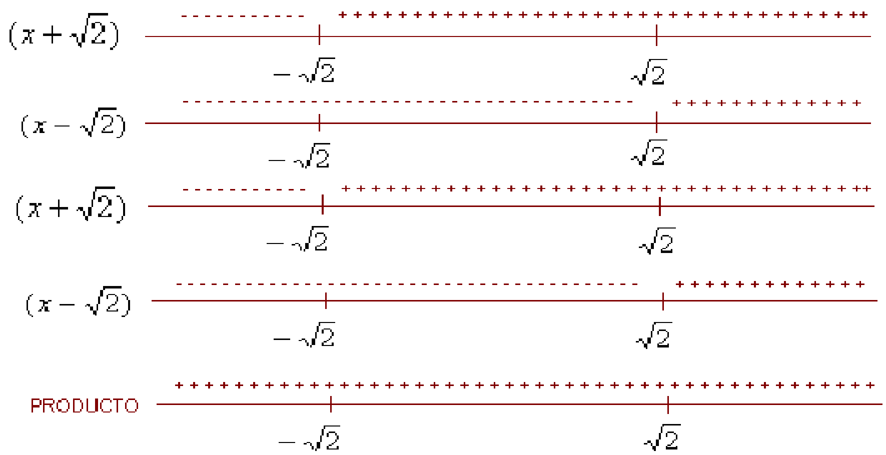
Hacer la descripción de la función que tiene como ecuación: $f(x)=x^4-4x^2+4$

Solución:

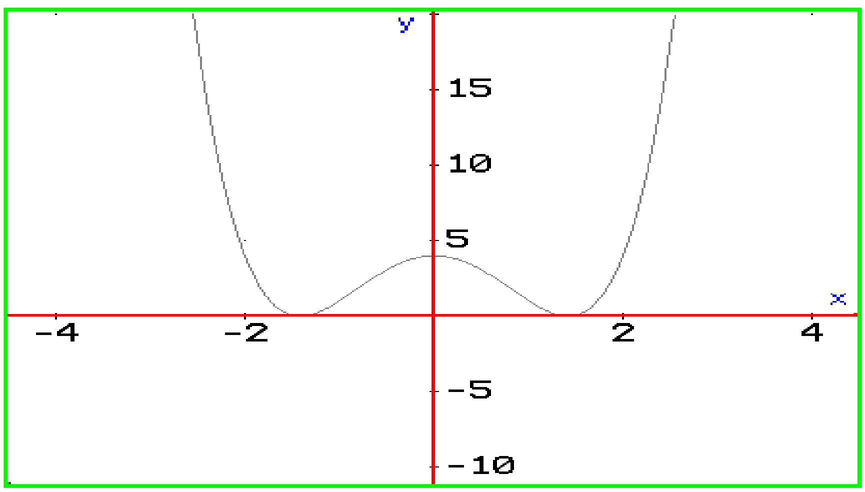
Dominio: Todos los reales
Imagen: Según la ecuación la variable *x* siempre será positiva, luego la imagen serán los reales no negativos.
Monotonía: La función no tiene monotonía, ya que presenta crecimiento y decrecimiento.
Simetría: $f(-x)=(-x)^4-4(-x)^2+4=x^4-4x^2+4$ Se observa que f (-x) = f (x), luego la función tiene simetría par, así es simétrica respecto al eje *y*.
Gráfica: Identifiquemos los ceros. $f(x)=x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x^2-2)(x^2-2)$

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Como el polinomio es de grado cuarto, se tienen cuatro ceros. Con ayuda del diagrama de signos, podemos identificar la curvatura de la grafica.

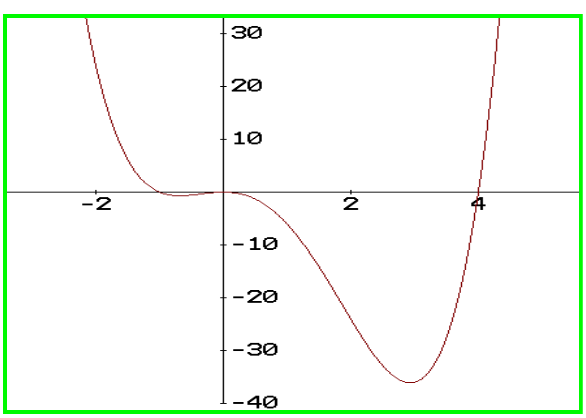


La gráfica, nos corrobora que la imagen de la función son los reales no negativos; además, que la función es positiva, ya que en el diagrama de signos el producto es positivo en todo su recorrido.



Ejemplo 153:

Dada la gráfica, identificar las características de la función.



Hacer el ejercicio con el *pequeño grupo colaborativo* y corroborar la solución con el tutor.

Ayuda: Es una función de cuarto grado.

5. Función Racional:

El cociente de dos número enteros origina una número racional, análogamente, el cociente de dos polinomios originan las funciones racionales.

DEFINICION:

Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$ a $f(x)$ se le denomina función racional.

El dominio de la funciones racionales son todos los reales excepto aquellos que hagan a q(x) = 0. Respecto a la imagen, depende del tipo de función, ya que cada una tiene sus particularidades, al igual que la monotonía y simetría. La gráfica es una función racional se puede hacer identificando las características descritas, pero además el límite hasta donde puede llegar la curva según las restricciones del dominio y la imagen. Los límites de las curvas se pueden identificar por medio de las llamadas Asíntotas.

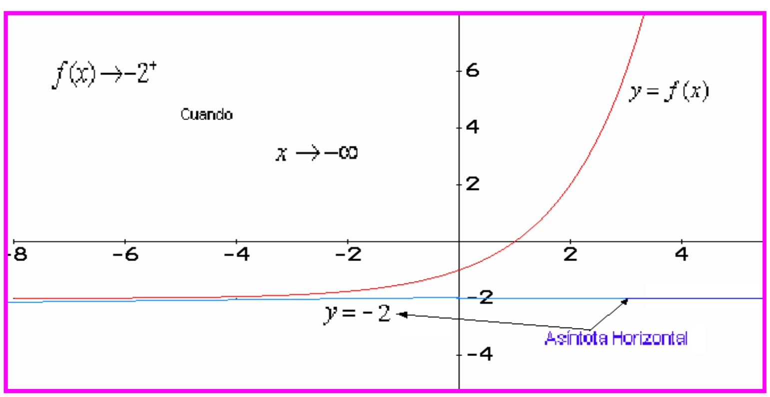
ASINTOTA: En términos muy sencillos una asíntota es una recta que limita la curva de una función racional. Podemos decir que la Asíntota es como la Cebra que hay en los semáforos en donde no debe estar el carro cuando éste está en rojo. La Asíntota es la cebra donde no puede estar la curva, solo muy cerca.

Las Asíntotas son de tres tipos al saber:

Asíntotas Horizontales: Se dice que la recta y = c es una asíntota horizontal de la función f(x), si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

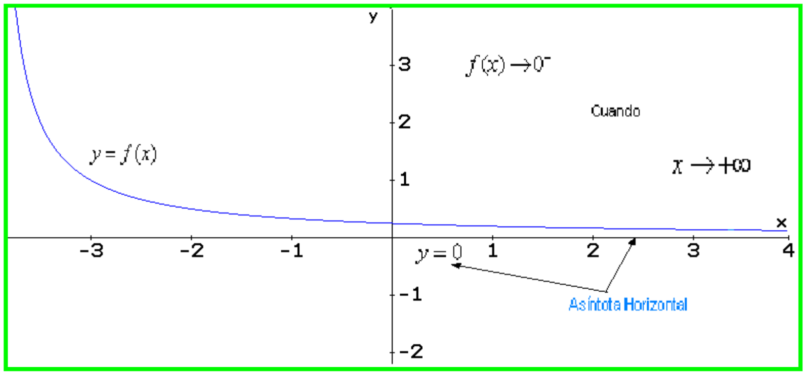
$f(x) \to c^{+}$ Cuando $x \longrightarrow \pm\infty$ o $f(x) \to c^{-}$ Cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

Lo anterior significa, que la función f (x) tiende a *c* por la derecha (c^+) ó por la izquierda (c^-) cuando *x* tiende a más ó menos infinito.



La gráfica anterior muestra que f (x) tiende a menos dos por la derecha, cuando x tiende a menos infinito.

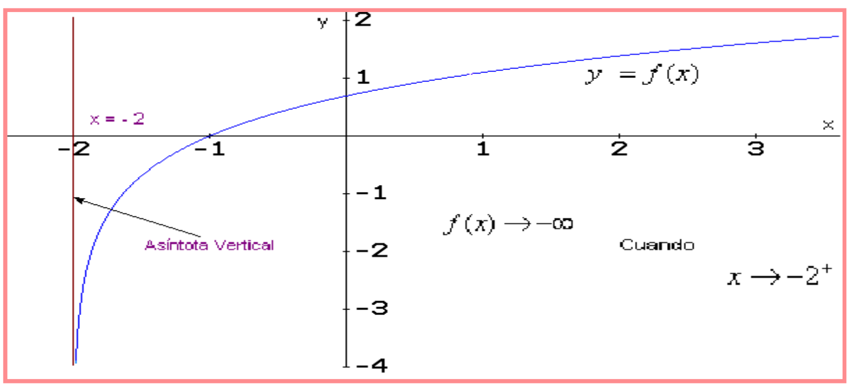
En la siguiente gráfica se puede observa que la función f (x) tiende a cero por la izquierda, cuando x tiende a más infinito.



Asíntotas Verticales: Se dice que la recta x = a es una asíntota vertical de la función f(x), si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

$$f(x) \to \pm\infty \text{ Cuando } x \to a^+ \quad \text{o} \quad f(x) \to \pm\infty \text{ Cuando } x \to a^-$$

Lo anterior significa, que la función f (x) tiende a más o menos infinito, cuando *x* tiende hacia *a* por la derecha o por la izquierda.



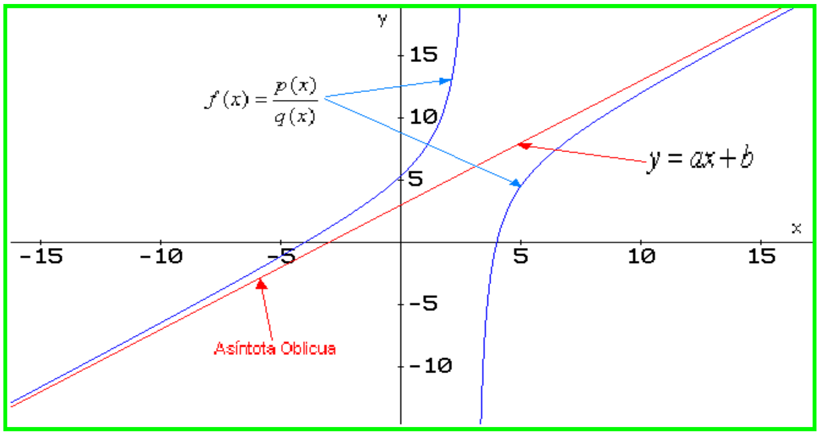
En la gráfica anterior se puede observar que cuando *x* tiende a menos 2 por la derecha, la función f (x) tiende a menos infinito.

Asíntotas Oblicuas: Cuando una recta es asíntota de una curva, pero dicha recta no es vertical tampoco horizontal, se dice que oblicua.

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ Es una función racional, donde el grado de p (x) es **n** y el de q (x) es **n – 1**, entonces f (x) tendrá una asíntota oblicua de la forma $y = ax + b$.

El trabajo consiste en saber cómo hallar dichas asíntotas, veamos: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, como el grado de p(x) es uno mayor que el grado de q(x).

Al hacer la división: $\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{R}{q(x)}$ Donde *h (x)* = *ax* + *b*; es decir, una ecuación lineal, R es el residuo. Luego, cuando $x \to \pm\infty$ entonces $\frac{R}{q(x)} \to 0$ luego: $h(x) \to ax + b$ Por consiguiente la asíntota oblicua será la ecuación *y* = *ax* + *b*, obtenida al hacer la división entre los polinomios de la función racional.

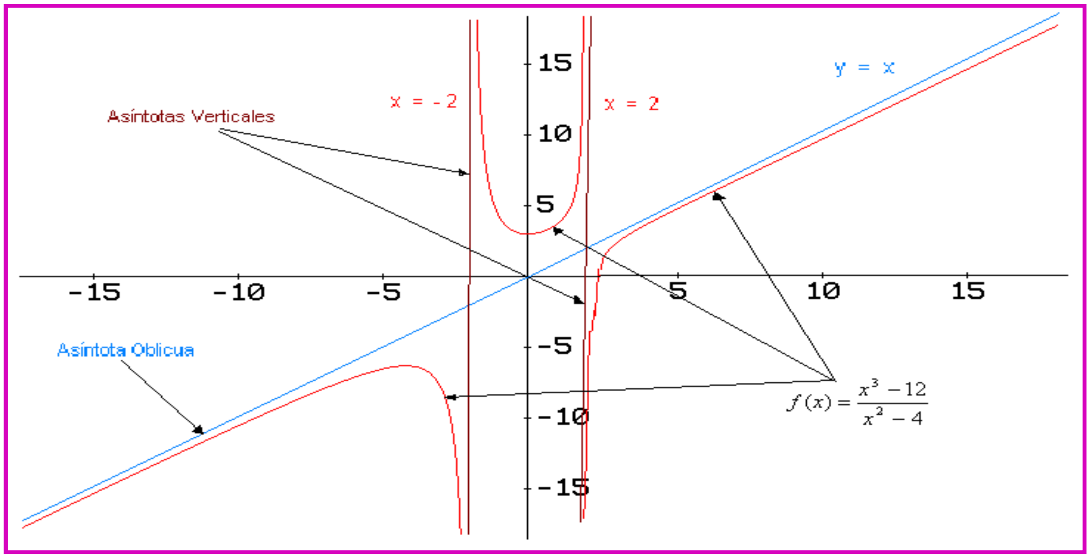


Ejemplo 154:

Describir la función: $f(x) = \frac{x^3 - 12}{x^2 - 4}$

Solución:

Dominio: Todos los reales diferentes de 2 y -2
Imagen: Todos los reales
Monotonía: La función no es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.
Simetría: Al reemplazar *x* por – *x*, no se presenta el caso de función par tampoco impar.
Asíntotas:
HORIZONTALES: No tiene ya que no se cumple ninguna de las opciones para este tipo de asíntota.
VERTICALES: Se presentan varios casos:
Cuando $x \to 2^+$ entonces $f(x) \to -\infty$
Cuando $x \to 2^-$ entonces $f(x) \to +\infty$
Por otro lado:
Cuando $x \to -2^+$ entonces $f(x) \to +\infty$
Cuando $x \to -2^-$ entonces $f(x) \to -\infty$
Por consiguiente se presenta asíntota vertical en x = -2 y x = 2.
OBLICUAS: Cuando se hace la división de la expresión racional, se obtiene una ecuación lineal de la forma y = x.
Gráfica:



Ejemplo 155:

Para la función: $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ Hacer la descripción correspondiente.

Solución:

Dominio: Todos los reales diferentes de 2
Imagen: Todos los reales diferentes de cero.
Monotonía: La función no es monótona, ya que en su dominio crece y decrece, lo veremos en la gráfica.
Simetría: Si reemplazamos a x por –x en la función, no presenta ninguna de las alternativas de simetría.
Asíntotas:
HORIZONTALES:

Cuando $x \to +\infty$, entonces $f(x)=\dfrac{3}{\infty-2}=\dfrac{3}{\infty}\to 0^{+}$.

Cuando $x \to -\infty$, entonces $f(x)=\dfrac{3}{-\infty-2}=\dfrac{3}{-\infty}\to 0^{-}$.

Así se presenta una asíntota horizontal en y = 0.

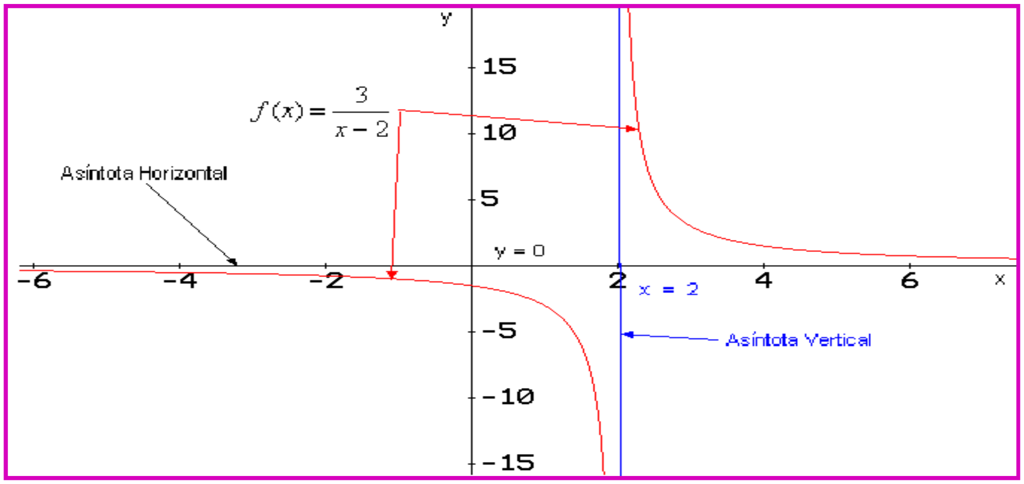
VERTICAL:

Cuando $x \to 2^{+}$ entonces $f(x)=\dfrac{3}{2^{+}-2}=\dfrac{3}{0^{+}}\to +\infty$

Cuando $x \to 2^{-}$ entonces $f(x)=\dfrac{3}{2^{-}-2}=\dfrac{3}{0^{-}}\to -\infty$

Así se presenta una asíntota vertical en x = 2.

Gráfica:



La función no presenta asíntotas oblicuas, ¡*Reflexionar porqué*!

6. Función Radical:

Cuando el polinomio que describe la función esta dentro de un radical, se le llama función radical.

> **DEFINICION:**
>
> Sea $f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$, para n ≥ 2 y n ϵ Z^+ Se dice que es una función radical.

El dominio de este tipo de funciones son los reales; según los siguientes casos:
Para *n* = *Par*: p(x) ≥ 0. La imagen son los reales positivos.
Estas funciones por lo general son monótonas y no simétricas.
Para *n* = *Impar*: p(x) puede ser positivo o negativo. La imagen también puede ser positiva o negativa.

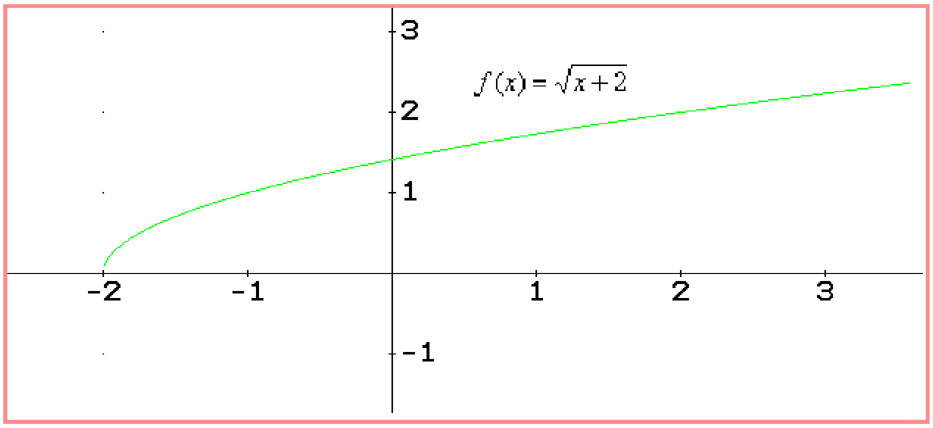
Ejemplo 156:

Dada la función $f(x)=\sqrt{x+2}$ Identificar sus características.

Solución:

Dominio: Como x + 2 ≥ 0, entonces x ≥ - 2. Así el dominio son los reales mayores o iguales a menos dos.
Imagen: Los reales no negativos.
Monotonía: La función es creciente ya que para un $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
Simetría: Reemplazamos x por – x. $f(-x)=\sqrt{-x+2}=-\sqrt{x-2}$, no hay simetría, ya que no se cumple f (-x) = -f (x) tampoco f (-x) = f (x).

Gráfica:



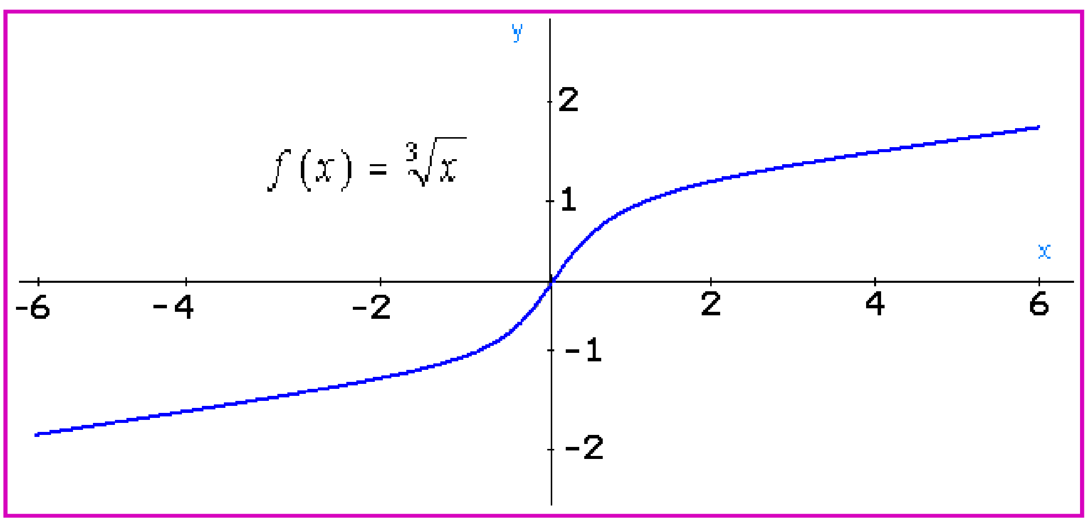
Ejemplo 157:

Describir la función: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución:

Dominio: Todos los reales.
Imagen. Todos los reales
Monotonía: La funciones es creciente.
Simetría: $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ Se cumple que f (-x) = - f (x). La función es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Gráfica:



Ejemplo 158:

Analizar la función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-4}}$

Solución:

Dominio: Son todos los reales para los cuales $\frac{1}{x-4} > 0$ Como el numerador siempre es positivo, entonces el que determina el valor que puede tomar la variable *x* es el denominador, así: x – 4 > 0, luego x > 4. El dominio son todos los reales mayores que 4.
Imagen: Para este tipo de función se sabe que son los reales no negativos, pero para este caso como x – 4 solo puede ser estrictamente mayor, entonces la imagen serán los reales positivos.
Monotonía: si se tomas dos valores de x, digamos $x_1 = 5$ y $x_2 = 6$, al reemplazar en la función se puede observar que $f(x_1) > f(x_2)$, luego la función es decreciente, por consiguiente es monótona.
Simetría: Esta función no es simétrica, ya que no cumple que f (-x) = f (x), tampoco f (-x) = - f (x).
Asíntotas:

HORIZONTALES:

Cuando $x \to +\infty$, entonces. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\infty - 4}} \to 0$

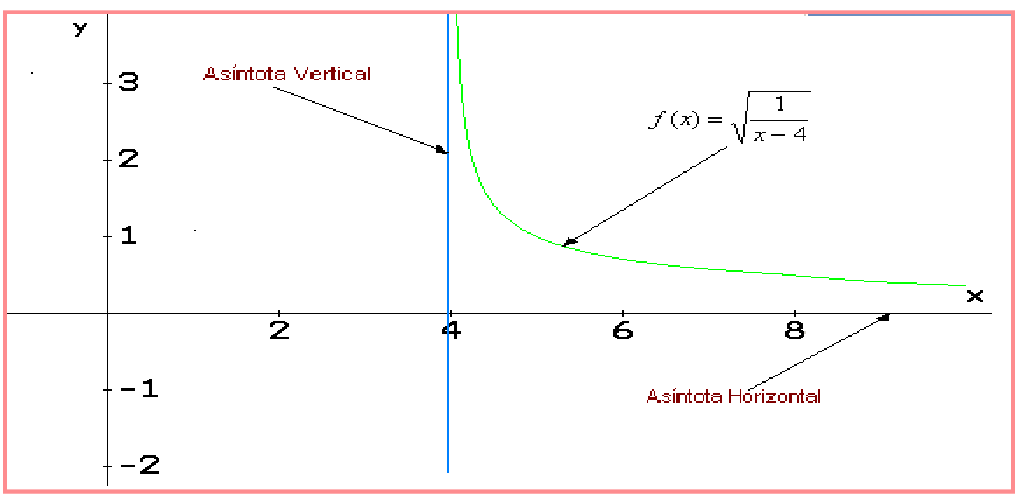
Así se presenta una asíntota horizontal en y = 0.

VERTICAL:

Cuando $x \to 4^+$ entonces $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4^+ - 4}} \to +\infty$

Así se presenta una asíntota vertical en x = 4.

Gráfica:



EJERCICIOS

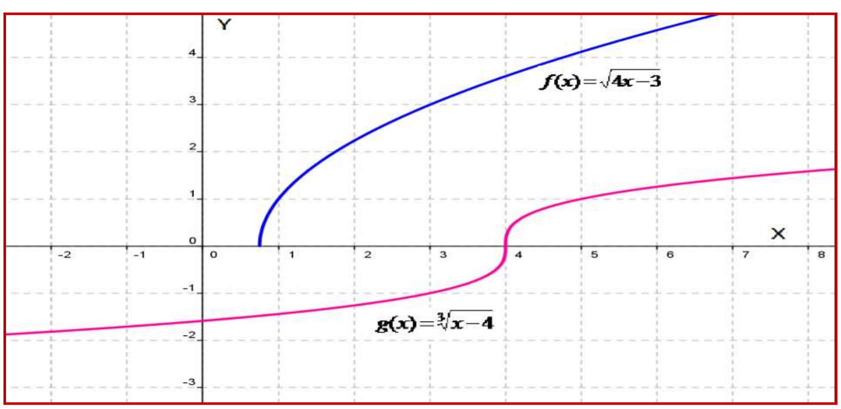
Dada la expresión $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para x ≠ 1, Hallar el valor de la función dada:

1. $f(x)=3x$ Rta: 3
2. $f(x)=1-3x$ Rta: -3
3. $f(x)=\sqrt{x}$ Rta: $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Dadas las siguientes funciones, hacer la descripción identificando: Dominio, Imagen, monotonía, simetría, gráfica.

4. $f(x)=x^3-4$
5. $f(x)=x^3-5x^2+6x$
6. $q(x)=\frac{2x}{x^2-4}$
7. $f(x)=-4x+6$
8. $f(x)=x+|x|$
9. $f(x)=|4x|$
10. $f(x)=3x^2+4x-10$

11. Dadas las funciones f(x) y g(x) cuyas gráficas se observar a continuación, identificar las características de cada una tales como: Dominio, Imagen, monotonía y simetría.



12. Identificar algunas aplicaciones de las funciones polinómicas y racionales en las áreas de Ingeniería, Administración, Ciencias Agrarias y Ciencias Sociales.

Lección Veintiséis: Funciones Transcendentales

$f(x) = Log(x^2 + bx + c)$

Se consideran a las funciones cuyo modelo matemático son expresiones con exponenciales, logarítmicas, expresiones trigonométricas o combinaciones de estas.

FUNCIÓN EXPONENCIAL: Se caracteriza porque la variable esta en el exponente, luego su descripción esta bajo los principios de los exponentes. De este tipo se conocen muchas, pero con el fin de comprenderlas se analizarán algunas.

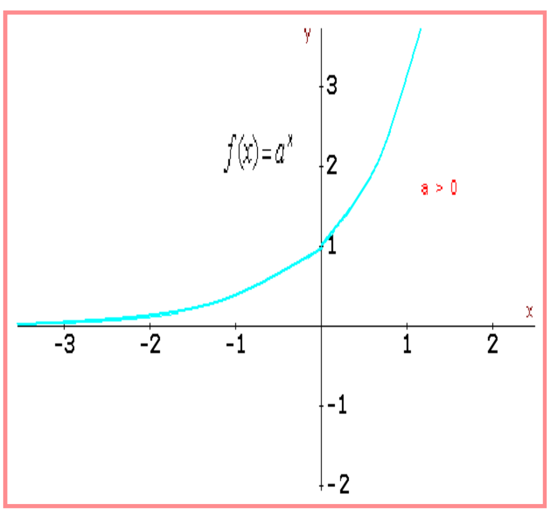
Función Exponencial Base a:

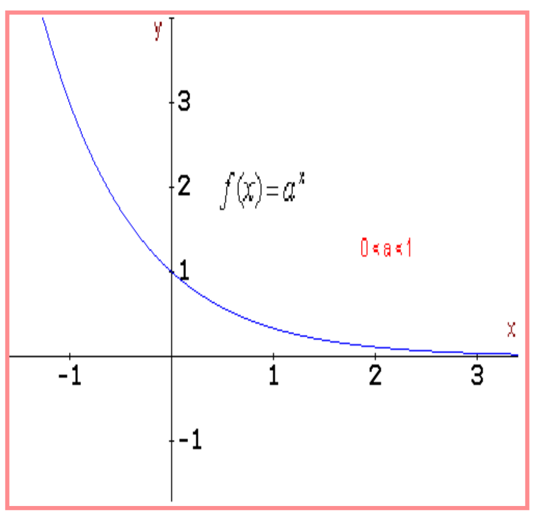
Son aquellas cuya base es un número real positivo y el exponente la variable independiente.

DEFINICION:
Sea $f(x) = a^x$, para a > 0 y a $\neq$ 1. Se define como una función exponencial de base a.

La función exponencial tiene las siguientes características:

Dominio: Es el conjunto de los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real en el modelo matemático que la representa.
Imagen: Esta en el conjunto de los reales positivos, debido a que para cualquier valor de *x*, la función no toma valores negativos.
La relación: $f : R \rightarrow R^+$
El Intercepto: Esta función corta al eje y en el valor y = 1. La explicación es que para x = 0, la imagen siempre es y = 1.
Monotonía. La función exponencial es monótona. Si a > 0 la función es creciente, pero si 0 < a < 1, la función es decreciente.
Simetría: Este tipo de función no presenta ningún tipo de simetría.
Asíntotas: Las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal en y = 0.





Todas las funciones de la forma $f(x)=a^x$ tiene la misma forma, solo cambia la pendiente de la curvatura, según sea el valor de *a*. Así hay dos tipos de funciones exponenciales muy particulares, que analizaremos a continuación.

Función Exponencial Decimal:

Es aquella función cuya base en 10, de allí su nombre.

> **DEFINICION:**
> Sea $f(x)=10^x$, Se define como una función exponencial decimal

La función exponencial decimal tiene las propiedades de una función exponencial de base *a*.

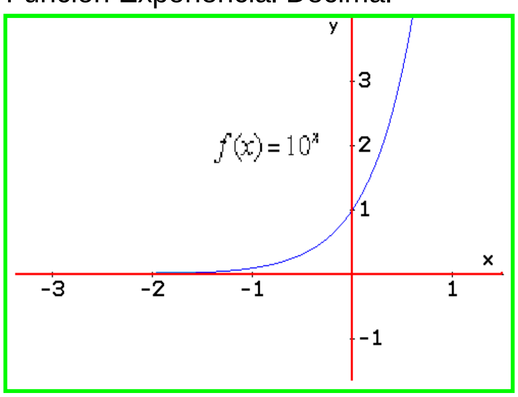
Función Exponencial Natural:

Es aquella función cuya base en el número de Euler, representado por la letra *e.*

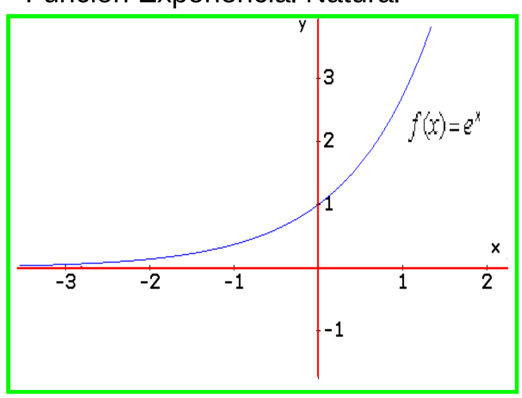
> **DEFINICION:**
> Sea $f(x)=e^x$, Se define como una función exponencial natural

El gran matemático Suizo Leonhard Euler obtuvo el número *e* desarrollando la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \rightarrow 2{,}7182..$ a medida que $x \longrightarrow \infty$

Función Exponencial Decimal



Función Exponencial Natural



El numero *e* es un número irracional, pero se ha tomado como la base de la función exponencial natural.

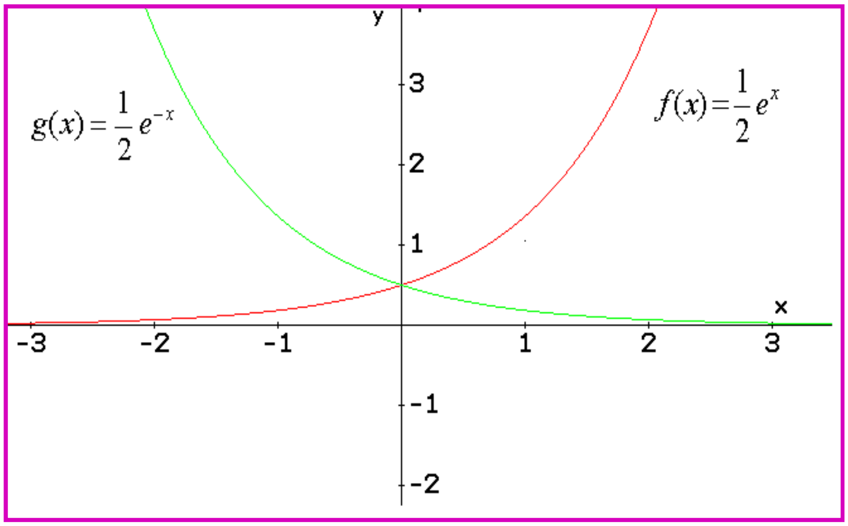
En la gráfica, se observa que la función exponencial decimal es más pendiente que la natural.

Ejemplo 159:

Analizar la función $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}$ y $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$

Solución:

Todas las propiedades dadas para función exponencial se cumplen para estas funciones, solo veamos las gráficas.



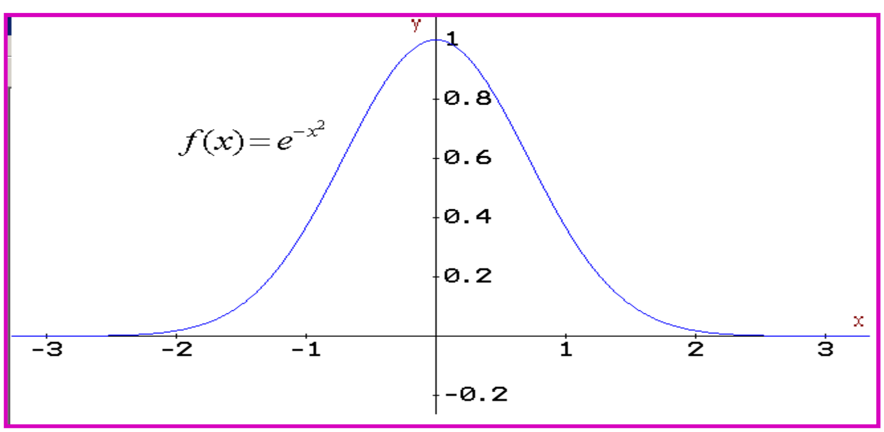
Estas dos funciones son la base de las llamadas funciones hiperbólicas, que se analizarán más a adelante.

Ejemplo 160:

Describir la función: $f(x)=e^{-x^2}$

Solución:

Para esta función el dominio son todos los reales, pero la imagen está restringida a el intervalo (0, 1]
Es simétrica respecto al eje y, creciente en el intervalo $(-\infty,0]$ y decreciente en el intervalo $(0,\infty)$
Analizar estas características con el grupo colaborativo y luego compartir con el Tutor.



FUNCIÓN LOGARITMICA: El logaritmo es una operación inversa a la potenciación, análogamente la función logarítmica es inversa a la función exponencial. Los principios, leyes y propiedades de los logaritmos son aplicables a este tipo de función.

Antes de comenzar a trabajar con funciones logarítmica, es pertinente recordar algo sobre los logaritmos. A propósito, John Neper (1.550 – 1.617) fue el primero que dio la definición de logaritmo, como la razón de dos magnitudes. La palabra está asociada a la curvatura de la trayectoria de cuerpos celestes.

Propiedades de los Logaritmos:

Aunque por estudios previos, todos tenemos algo de conocimientos sobre los logaritmos, en el curso de *Matemáticas Básicas*, se estudian con detenimiento, pero se considera pertinente hacer referencia a algunas propiedades de esta operación.

Inversa	$y = Log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$
Suma	$Log_a(x) + Log_a(y) = Log_a(x * y)$
Diferencia	$Log_a(x) - Log_a(y) = Log_a(\frac{x}{y})$
potencia	$Log_a(x)^k = kLog_a(x)$
Raíz	$Log \sqrt[x]{y} = \frac{Log(y)}{x}$
Recíproco	$Log_a(x) = \frac{1}{Log_x(a)}$
Nulo	$Log_a(1) = 0$
Operación Opuesta	$Log_a(a)^x = a^{Log_a(x)} = x$

Cambio de Base:

En ocasiones se tiene una función logarítmica en base *a,* pero se requiere trabajar una función logarítmica con otra base, para esto existe un principio que permite cambiar la base de una función logarítmica sin que sus propiedades se alteren.

$$\boxed{Log_a(x) = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}}$$

Demostración:

Sea $y = Log_a(x)$ se desea que la función se transforme en una nueva base, digamos *b*, entonces: $y = Log_a(x) \Rightarrow a^y = x$ Aplicamos logaritmo en la *nueva base* a la última ecuación: $a^y = x \Rightarrow Log_b(a^y) = Log_b(x)$ Por la propiedad de potencia para logaritmo, se tiene: $yLog_b(a) = Log_b(x)$ Despejamos la variable y, se obtiene: $y = \dfrac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$

Ejemplo 161:

Dada la función $y = \log_2(x)$, transformarla a base e.

Solución:

Para el caso a = 2 y b = e, entonces reemplazando: $\log_2(x) = \dfrac{Ln(x)}{Ln(2)}$

Ejemplo 162:

Trasformar de la base dada a base 4, la función $y = Log(x)$

Solución:

$$Log(x) = \frac{Log_4(x)}{Log_4(10)}$$

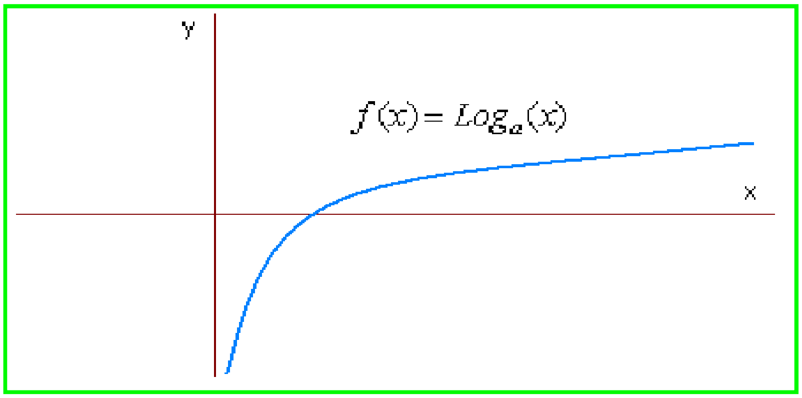
Función Logarítmica Base a: Lo que diferencia a las funciones logarítmicas es la base, así se verán algunas funciones logarítmicas muy particulares.

DEFINICION:
Sea $f(x) = Log_a(x)$, para a > 0 y a ≠ 1. Se define como una función logarítmica de base a.

Al igual que la función exponencial, la función logarítmica tiene algunas propiedades.

El Dominio: Para las funciones logarítmicas, el dominio son todos los reales positivos, ya que el logaritmo de reales negativos no existen.

La Imagen: La imagen de la función logarítmica son todos los reales: $R^+ \rightarrow R$
La Monotonía: La función logarítmica es creciente para a > 1 y decreciente para 0 < a < 1. Entonces la función logarítmica es monótona.
Asíntotas: Presenta una asíntota vertical en x = 0.
Intercepto: La curva corta al eje x en x = 1, pero no corta al eje y.
Asíntotas: La función logaritmo *f(x) = Log(x)* tienen una asíntota vertical en x = 0.



Función Logarítmica Base 10: Esta función se conoce como la función logaritmo decimal.

> **DEFINICION:**
> Sea $f(x) = Log_{10}(x) = Log(x)$. Se define como una función logarítmica decimal

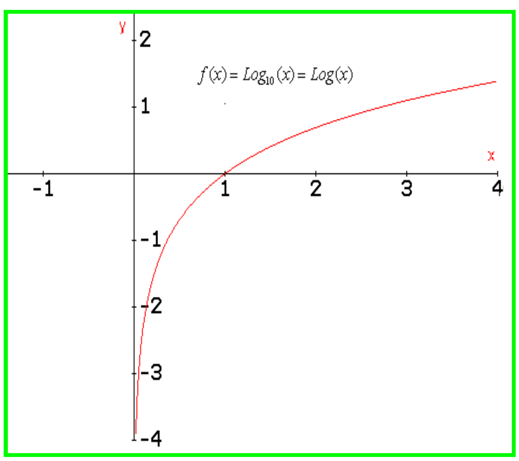
Como se observa en la definición, la función logarítmica decimal se escribe comúnmente como Log(x), es una de las funciones logarítmicas más conocidas y utilizadas. Todas las propiedades de los logaritmos son aplicables a esta función.

Función Logarítmica Base e: Esta función se conoce como la función logarítmica natural.

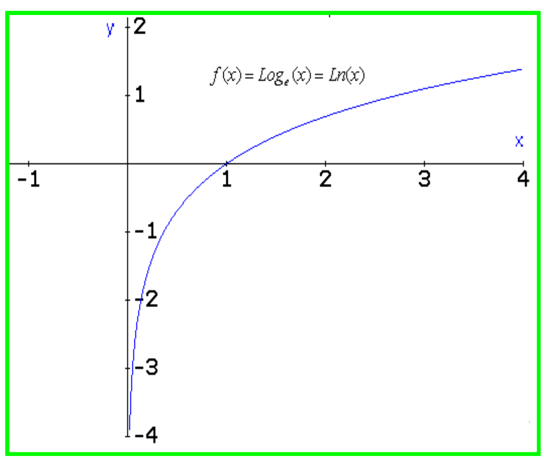
> **DEFINICION:**
> Sea $f(x) = Log_e(x) = Ln(x)$. Se define como una función logarítmica natural

Como se observa en la definición, la función logaritmo natural se escribe comúnmente como Ln(x), también es una de las funciones logarítmicas más conocidas y utilizadas. Todas las propiedades de los logaritmos, también son aplicables a esta función.

Función Logaritmo Decimal



Función Logaritmo Natural



En las gráficas se puede ver que la función logaritmo natural es más pendiente que la función logaritmo decimal. Pero las dos son crecientes en su dominio, también se observa la asíntota en x = 0.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

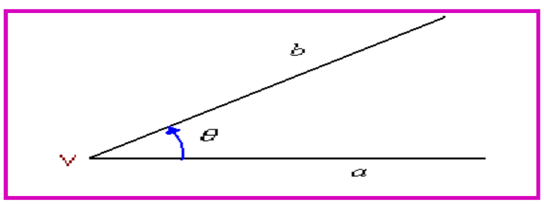
La trigonometría fue desarrollada hace más de 2.000 años, siendo los Griegos sus gestores y el Matemático y Astrónomo ***Hiparco* de Nicea** (190-120 a d C) uno de sus representantes. Sus inicios fueron motivados por la necesidad de predecir rutas y posiciones de cuerpos celestes, para mejorar la navegación, el cálculo de tiempos y posiciones de los planetas. La trigonometría se centra en el estudio de los Triángulos, la palabra se deriva del griego *Trigonom* que significa Triángulo y *metres* de medición. En esta lección solo nos centraremos en el estudio de las funciones trigonométricas, sus principios, características y aplicaciones. En la lección de Trigonometría se analizarán aspectos de trigonometría analítica.

Hiparco de Nicea
Fuente:astrocosmo.cl/biografi/b-e_hiparco.htm

Sabemos por nuestros conocimientos previos que todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos; además, que los triángulos rectángulos tienen un ángulo conocido.

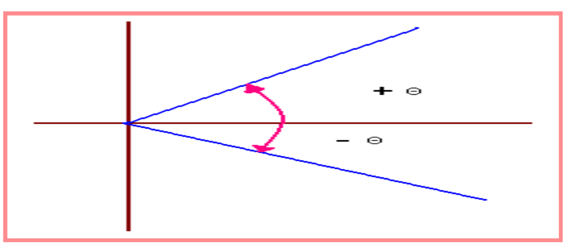
Los Ángulos: En Geometría se estudiaron los ángulos, clases, propiedades y demás. Se analizaron diversas definiciones de ángulos, aquí solo se dará una definición muy sencilla y particular.

Un ángulo se forma cuando dos segmentos de recta se cortan en un punto llamado Vértice. A los segmentos de recta se le conocen como lado inicial y lado Terminal.



V = Vértice
a = lado inicial
b = Lado Terminal
Θ = Ángulo formado

Se puede decir que un ángulo es el "Espacio formado" por los segmentos de recta que se cruzan en el vértice. Por convención un ángulo es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo cuando se mide en sentido de dichas manecillas.

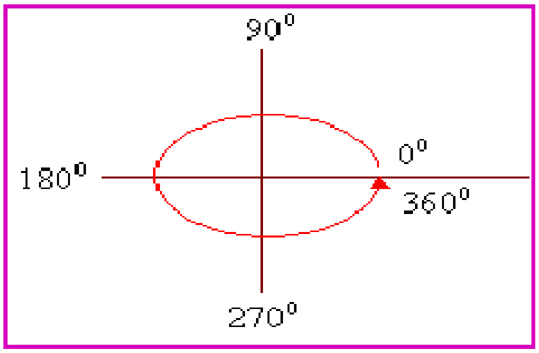


Por lo general para simbolizar los ángulos se usan letras griegas como α β λ ϑ entre otras, o letras latinas mayúsculas A, B, C, otros.

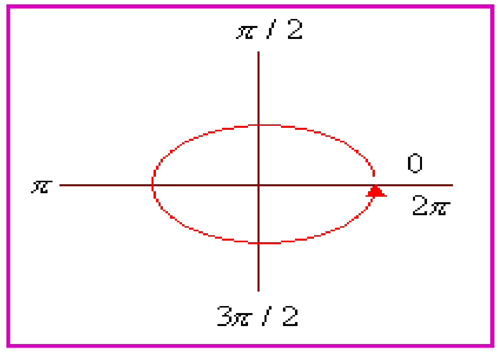
La gráfica muestra que el ángulo es positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

Medida de loa ángulos: La medida de los ángulos depende de la abertura o separación que presenten las dos semirrectas. Existen dos sistemas básicos para medir los ángulos.
El Sistema Sexagesimal cuya unidad son los Grados y el *sistema Circular* cuya unidad es el Radian. Estos tienen referencias, veámoslo en la grafica siguiente.

Sistema Sexagesimal



Sistema Circular



Una vuelta equivale a 360^0 en el sistema sexagesimal y 2π en el sistema circular.

Existe un sistema de conversión entre los sistemas, según las equivalencias que se pueden ver en las gráficas.

Para convertir de radianes a grados:

$$\boxed{y_{Grados} = \frac{180}{\pi}(x_{Radianes})}$$

Para convertir de grados a radianes.

$$\boxed{x_{Radianes} = \frac{\pi}{180}(y_{Grados})}$$

Ejemplo 163:

Convertir π/3 a grados.

Solución:

Para este caso nos sirve la primera fórmula. $y = \frac{180}{\pi}(\pi/3) = \frac{180}{3} = 60^0$

Lo anterior significa que π / 3 equivale a 60^0.

Ejemplo 164:

A cuantos radianes equivalen 120^0

Solución:

Aquí se debe cambiar de grados a radianes. $y = \frac{\pi}{180^0}(120^0) = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$

Entonces 120^0 equivalen a $2\pi / 3$

Ejemplo 165:

Cuantos radianes hay en 420^0

Solución:

$$y = \frac{\pi}{180^0}(420^0) = \frac{42\pi}{18} = \frac{7\pi}{3}$$

Ejemplo 166:

Cuantos grados y radianes hay en 3 vueltas y media.

Solución:

Como una vuelta es de 360^0 y media vuelta es de 180^0, entonces tres vueltas y media será: $3(360^0) + 180^0 = 1.080 + 180^0 = 1.260^0$ en grados.

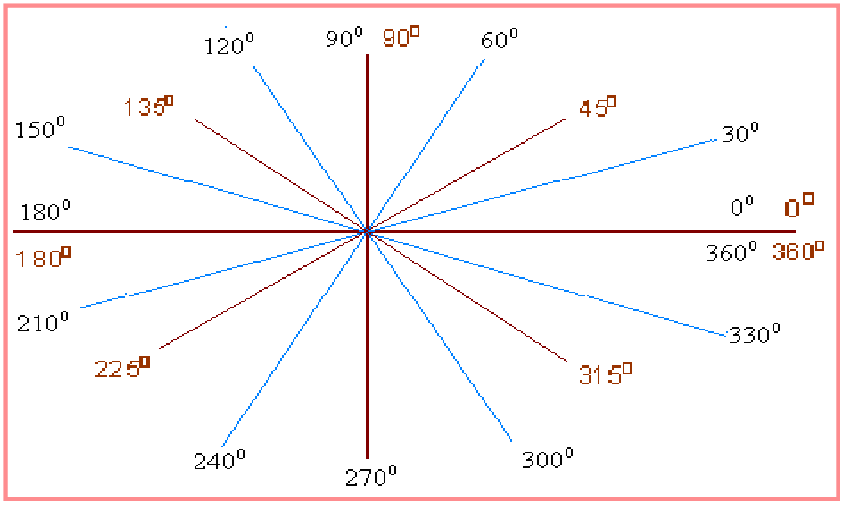
Para radianes. $y = \frac{\pi}{180^0}(1260^0) = \frac{126\pi}{18} = 7\pi$ Así 3 vueltas y media equivalen a 1.260^0 ó 7π

Ángulos Notables: Ángulos existen muchos, pero para facilitar el análisis de las funciones trigonométricas, se han establecido unos ángulos que se les han denominado ángulos notables, ya que a partir de estos se puede analizar cualquier otro. En el sistema de coordenadas rectangulares, el primer cuadrante está comprendido entre los ángulos 0 y $\pi/2$. El segundo cuadrante está comprendido entre $\pi / 2$ y π, el tercer cuadrante entre π y $3\pi / 2$ y el cuarto cuadrante entre $3\pi /2$ y 2π

Los ángulos notables se obtienen cuando se divide la unidad en 6 partes, así se obtienen 6 ángulos ya que $180^0 / 6 = 30^0$, entonces se obtiene 6 ángulos con una medida de 30^0 cada uno en la parte superior del plano, de la misma manera en la parte inferior. Otra división es en cuatro partes: $180^0 / 4 = 45^0$, entonces se obtiene 4 ángulos con una medida de 45^0 cada uno.

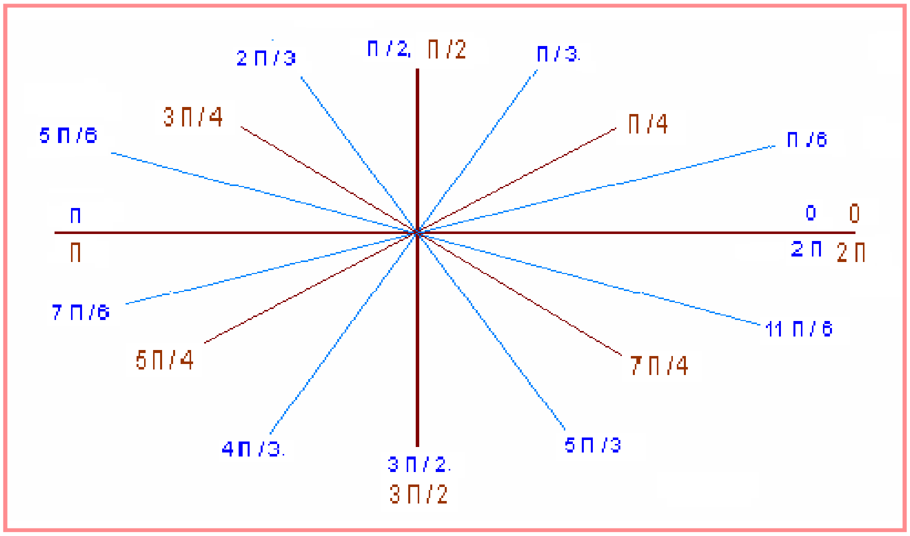
La siguiente gráfica ilustra dichas divisiones. Las líneas azules muestras las 6 divisiones de la parte superior y 6 divisiones de la parte inferior. Las líneas cafés muestras las 4 divisiones de la parte superior y las 4 de la parte inferior. De esta manera se muestran los ángulos notables en grados.

Ángulos Notables Dados en Grados



Para el caso de radianes, la división es de la forma. 1 / 6, así cada parte es 1/6 por la parte superior, igual para la parte inferior del plano. Haciendo la división en 4 partes, se obtiene la razón 1 / 4. Las líneas azules muestran la división en 6 partes y la línea café muestra la división en 4 partes. De esta manera se muestran los ángulos notables en radianes.

Ángulos Notables Dados en Radianes

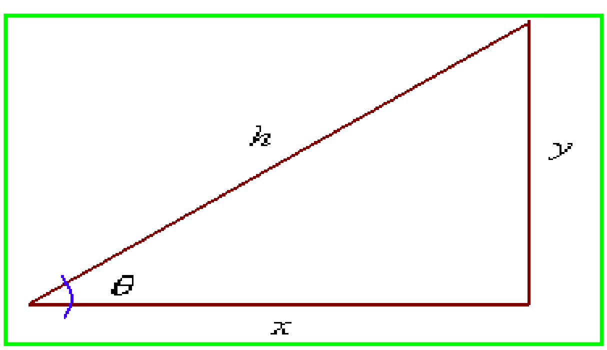


Resumiendo la construcción de los ángulos notables, en la siguiente tabla se presentan aquellos en los cuadrantes correspondientes.

Cuadrante / Sistema	***Sexagesimal***	***Circular***
Primer cuadrante	0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	0 π/6 π/4 π/3 π/2
Segundo Cuadrante	120^0 135^0 150^0 180^0	2π/3 3π/4 5π/6 π
Tercer Cuadrante	210^0 225^0 240^0 270^0	7π/6 5π/4 4π/3 3π/2
Cuarto Cuadrante	300^0 315^0 330^0 360^0	5π/3 7π/4 11π/6 2π

Relaciones Trigonométricas:

Recordando que las relaciones son interacciones entre dos conjuntos, para el caso de trigonometría la relación es el cociente entre dos longitudes. Tomando como referencia el triángulo rectángulo, se puede determinar las relaciones trigonométricas conocidas.



y = Lado Opuesto

x = lado adyacente

h = Hipotenusa

θ = Angulo

A partir de las longitudes de *x*, *y*, *h* se definen 6 relaciones trigonométricas.

$$sen(\theta) = \frac{y}{h}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{h}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\csc(\theta) = \frac{h}{y}$$

$$\sec(\theta) = \frac{h}{x}$$

$$\cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

Convención:

$sen(\theta)$ = Seno del ángulo
$\cos(\theta)$ = coseno del ángulo
$\tan(\theta)$ = tangente del ángulo
$\cot(\theta)$ = cotangente del ángulo
$\sec(\theta)$ = secante del ángulo
$\csc(\theta)$ = cosecante del ángulo

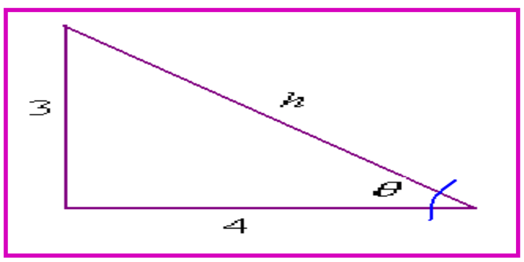
Las tres primeras relaciones se conocen como las *principales* y las otras tres como las *complementarias.* Como las relaciones originan un cociente, se puede inferir que la relación se da entre un ángulo y un número real.

Ejemplo 167:

Sea en triángulo rectángulo cuyos lados miden x = 4; y, y = 3, hallar las relaciones trigonométricas correspondientes.

Solución:

Grafiquemos el triángulo correspondiente.



Primero hallamos la hipotenusa, lo que se puede hacer por medio del teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16}$$

$$h = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Así se tienen los valores de las tres longitudes, luego ya se puede definir las relaciones trigonométricas.

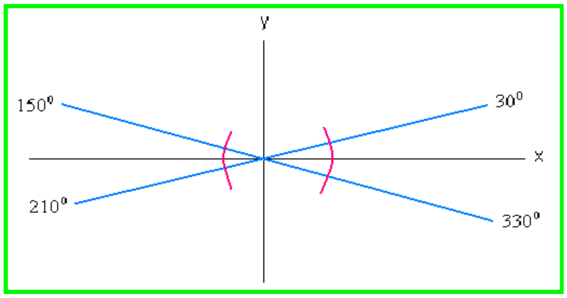
$sen(\theta) = \frac{y}{h}$ Entonces: $sen(\theta) = \frac{3}{5}$ $\qquad \csc(\theta) = \frac{h}{y}$ Entonces: $\csc(\theta) = \frac{5}{3}$

$\cos(\theta) = \frac{x}{h}$ Entonces: $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$ $\qquad \sec(\theta) = \frac{h}{x}$ Entonces: $\sec(\theta) = \frac{5}{4}$

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ Entonces: $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$ $\qquad \cot(\theta) = \frac{x}{y}$ Entonces: $\cot(\theta) = \frac{4}{3}$

Se observa que cada relación tiene un valor real para un ángulo.

Reducción de Ángulos al Primer Cuadrante: Se sabe que los ángulos el primer cuadrante van de 0 a π/2, cualquier ángulo mayor a estos se puede reducir a un ángulo equivalente del primer cuadrante. Lo anterior se sustenta en que las medidas de los ángulos se hacen respecto al eje *x*, luego en el plano cartesiano y para la circunferencia unidad (radio = 1) siempre habrá 4 ángulos equivalentes respecto al eje *x*, solo que cada uno estará ubicado en cada uno de los cuadrantes. Con la siguiente situación se puede ilustrar la reducción mencionada.



Se observa que los 4 ángulos tienen la misma abertura respecto al eje *x,* solo que están en cuadrantes diferentes. Para expresar la abertura en el primer cuadrante, se debe hacer una conversión.

Del segundo cuadrante: 180^0 - 150^0
Del tercer cuadrante. $210^0 – 180^0$
Del cuarto cuadrante: $360^0 – 330^0$

Generalizando: Sea Φ un ángulo dado y sea x^0 el ángulo equivalente de Φ llevado al primer cuadrante, para cualquier ángulo Φ > π/2 se tiene:

Del segundo al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = 180^0 - \theta}$

Del tercer al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = \theta - 180^0}$

Del cuarto al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = 360^0 - \theta}$

Ejemplo 168:

Reducir al primer cuadrante: 125^0 y 225^0

Solución:

El ángulo de 125^0 está en el segundo cuadrante, luego: $x^0 = 180^0 – 125^0 = 55^0$ Entonces el ángulo 125^0 que está en el segundo cuadrante, es equivalente a 55^0 en el primer cuadrante.

Para el ángulo 225^0 que está en el tercer cuadrante $225^0 – 180^0 = 45^0$. Para este caso el resultado nos indica que 225^0 ubicado en el tercer cuadrante es equivalente a 45^0 en el primer cuadrante.

Ejemplo 169:

Reducir al primer cuadrante los ángulos 310^0 y -60^0

Solución:

Para 310^0 por estar en el cuarto cuadrante: $x^0 = 360^0 – 310^0 = 50^0$

Para el caso de -60^0, el valor en el primer cuadrante es 60^0 (porqué).

Funciones Trigonométricas de Ángulos:

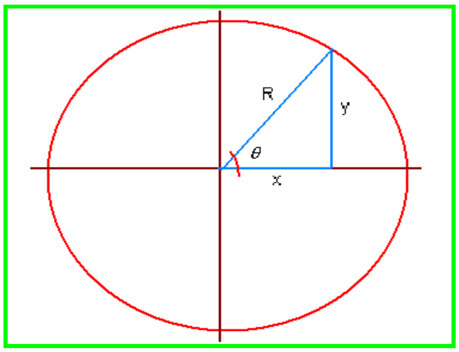
Las funciones trigonométricas son relaciones en las cuales a cada ángulo le corresponde un único número real. El dominio de las funciones trigonométricas son todas las medidas de los ángulos agudos, pero según la función definida, el dominio se puede extender a otros ángulos.

Se va a analizar cada función, con el fin de identificar sus particularidades, no sin antes resaltar que estas funciones son periódicas, ya que se repiten cada cierto ángulo, es decir:

$f(x) = f(x+p)$ Para P > 0.

La Circunferencia Unidad y Longitud de Lados de Triángulo Rectángulo: La circunferencia unidad es aquella cuyo radio es R = 1. A partir de este principio, se puede conocer la longitud de los lados e hipotenusa de un triángulo rectángulo, según el ángulo establecido. Hay algunos teoremas que permiten identificar los valores de los lados de un triángulo rectángulo para los *ángulos notables básicos*: 0, π/6, π/4, π/3, π/2.

CIRCUNFERENCIA UNIDAD (R=1)



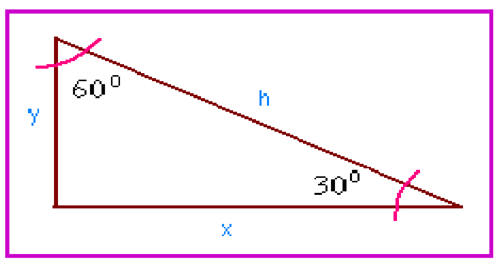
ANGULO DE 0 – 90: (0, π)

Para el ángulo de **0^0** los valores de las coordenadas son:
***y* = 0**. La razón es que en este ángulo no hay coordenada vertical.
***x* = 1**. La razón es que en este ángulo coinciden la hipotenusa y el lado adyacente.

Para el caso de **90^0** la situación es la siguiente:
***y* = 1**. La razón es que en este ángulo la hipotenusa y el lado opuesto coinciden.
***x* = 0**. La razón es que en este ángulo no hay coordenada horizontal

ANGULO DE 30 – 60:(π/6, π/3)

TEOREMA:
En un triángulo rectángulo 30^0 - 60^0, la longitud del lado opuesto al ángulo de 30^0 es la mitad de la longitud de la hipotenusa.



Entonces: $y = \frac{h}{2}$ y $x = \sqrt{h^2 - y^2}$

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio para que usted estimado estudiante, la investigue, así se afianzan de manera más dinámica los conocimientos.

Para 30^0 - π/6:

Para la circunferencia unidad: $h = 1$ Luego: $y = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$

$$x = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

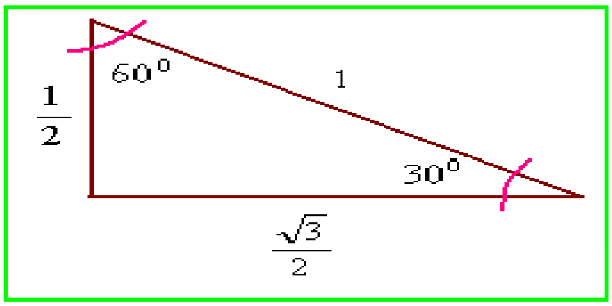
Entonces: $y = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para 60^0 - π/3:

Las longitudes de los dados son al contrario.

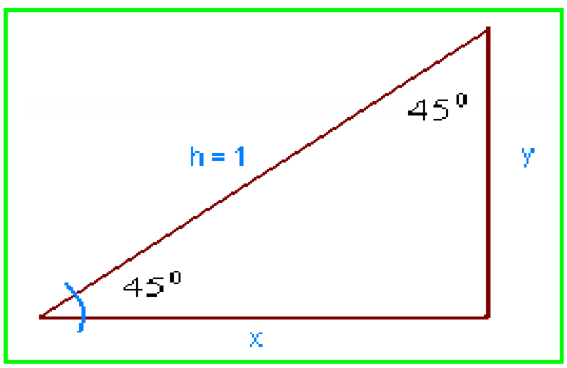
$x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Con este resultado, se puede hallar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30^0 y 60^0.



ANGULO DE 45: (π/4)

Por geometría básica sabemos que un triángulo rectángulo con un ángulo de 45^0, tiene sus lados iguales, ya que el otro ángulo también es de 45^0



Como x = y, entonces por Pitágoras:

$h = \sqrt{x^2 + y^2}$ Reemplazando:

$1 = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$

Despejando la incógnita: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por consiguiente: $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conociendo las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo para los ángulos notables básicos; es decir, los del primer cuadrante, podemos iniciar el estudio de las funciones trigonométricas.

FUNCIÓN SENO:

Definida la relación sen (θ), podemos definir la función seno como sigue:

f (x) = sen(θ). Donde x = θ y al cual le corresponde un número real.

Lo anterior significa que a cada ángulo le corresponde un número real.

<u>*Dominio*</u>: Son todos los reales, ya que la variable puede tomar cualquier valor real.
<u>*Imagen*</u>: la imagen de la función seno esta en el intervalo [-1, 1], ya que el cociente de la relación nunca puede superar la unidad. Lo anterior establece que como sen (θ) = y/h siendo h ≥ y, lo máximo es que h = y, así el cociente será 1, pero si h > y, el cociente estará entre 0 y 1, siendo 0 cuando y = 0. El signo negativo se da en los cuadrantes donde el eje *y* es negativo.

Valores del seno: Para obtener los valores de los ángulos notables, utilizamos la definición de relación trigonométrica y las longitudes del triángulo para los diferentes ángulos analizados.

$sen(\theta) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow sen(0^0) = \frac{0}{1} = 0$ Luego: $sen(\theta) = 0$

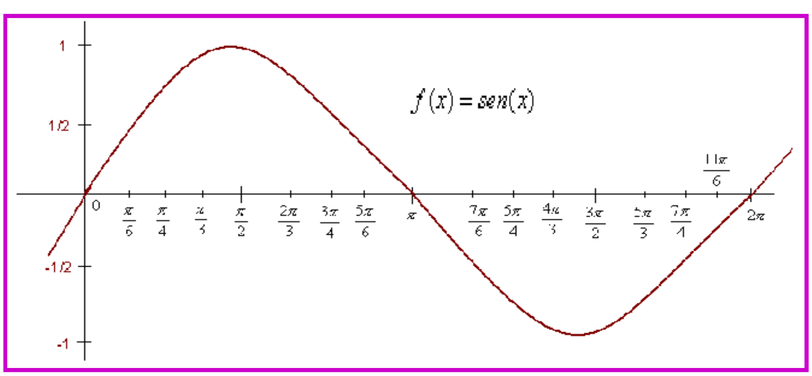
$sen(30^0) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ $sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $sen(60^0) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $sen(90^0) = \frac{1}{1} = 1$

Para obtener los valores de los ángulos en los demás cuadrantes, se tiene en cuenta la equivalencia entre ángulos del primer cuadrante y los otros. Por ejemplo el ángulo de 30^0 es equivalente a 150^0, 210^0 y 330^0, solo se tiene en cuenta el valor de *y* para cado uno. El eje *y* es positivo en el primero y segundo cuadrante (I y II) y negativo en los demás. Como consecuencia se tiene que para la función sen (θ), el valor de los ángulos en el primero y segundo cuadrante son positivos y en el tercero y cuarto cuadrante (III y IV) son negativos.

El siguiente cuadro resume los valores notables del dominio y su imagen.

0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Gráfica de la función sen(x):



<u>*Simetría*</u>: Para la función seno se cumple: **sen(-x) = -sen(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.

Monotonía: La función no es monótona, ya que presenta crecimiento y decrecimiento a través de su dominio, como se puede observar en la gráfica.
Periodicidad: Anteriormente hicimos referencia a que la función es periódica, el periodo del seno es 2π, ya que cumple: $sen(x) = sen(x + 2\pi)$ Esto significa que la función seno se repite cada 2π en las mismas condiciones.

Propiedades Adicionales: Para *x* cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $sen\,(x + \pi) = -sen\,(x)$

-) $sen\,(x - \pi) = sen\,(x)$

-) $sen(\pi/2 - x) = \cos(x)$

FUNCIÓN COSENO:

f (x) = cos(θ). Donde x = θ y al cual le corresponde un número real.

Al igual que en el seno, a cada ángulo le corresponde un número real.
Dominio: Son todos los reales, ya que la variable puede tomar cualquier valor real. $(-\infty, \infty)$
Imagen: la imagen de la función coseno esta dada también en el intervalo [-1, 1], ya que el cociente de la relación nunca puede superar la unidad.
Como se explico para seno, en este caso es lo mismo. *Como cos (θ) = x / h siendo h ≥ x, lo máximo es que h = x, así el cociente será 1, pero si h > x, el cociente estará entre 0 y 1, siendo 0 cuando x = 0. El signo negativo se da en los cuadrantes donde el eje x es negativo.*

Valores del Coseno: Para obtener los valores de los ángulos notables, utilizamos la definición de relación trigonométrica y las longitudes del triángulo para los diferentes ángulos analizados.

$\cos(\theta) = \frac{x}{h} \Rightarrow\Rightarrow \cos(0^0) = \frac{1}{1} = 1$ Luego: $\cos(0^0) = 1$

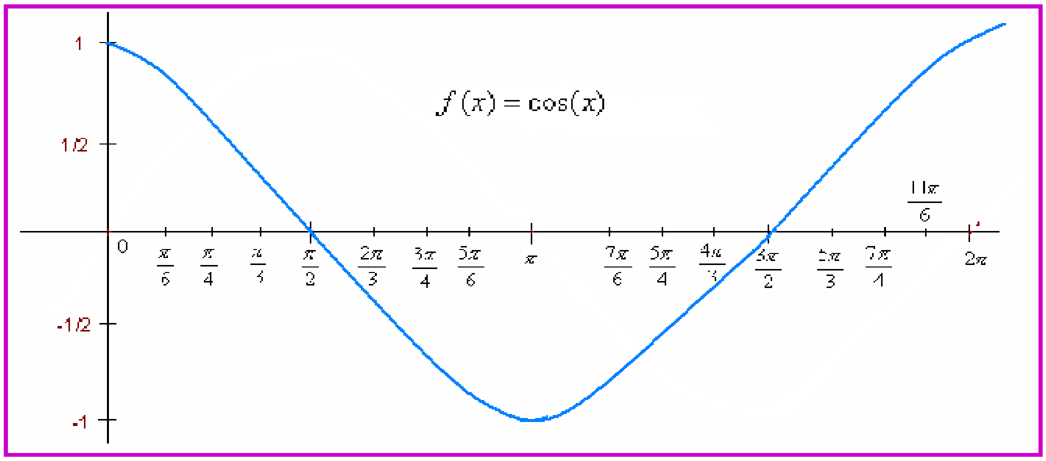
$\cos(30^0) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(45^0) = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(60^0) = \frac{1/2}{1} = \frac{2}{2}$ $\cos(90^0) = \frac{0}{1} = 0$

Para obtener los valores de los ángulos en los demás cuadrantes, al igual que el seno, se tiene en cuenta la equivalencia entre ángulos del primer cuadrante y los otros cuadrantes. Por ejemplo el ángulo de 30^0 es equivalente a 150^0, 210^0 y 330^0, solo se debe tener en cuenta el valor de *x* para cado uno. El eje *x* es positivo en el primero y cuarto cuadrante (I y IV) y negativo en los demás. Como consecuencia se tiene que para la función cos (Φ), el valor de los ángulos en el primero y cuarto cuadrante son positivos y en el segundo y tercero (II y III) son negativos.

El siguiente cuadro resume los valores notables del dominio y su imagen.

0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Gráfica de la función cos(x):



<u>Simetría</u>: Para la función coseno se cumple: **cos(-x) = cos(x),** luego es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al eje *y* de coordenadas cartesianas.
<u>Monotonía</u>: La función no es monótona, ya que presenta crecimiento y decrecimiento a través de su dominio, como se puede observar en la gráfica.
<u>Periodicidad</u>: El periodo del coseno es 2π, ya que cumple: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ Esto significa que esta función; al igual que el seno, se repite cada 2π en las mismas condiciones.

Propiedades Adicionales: Para *x* cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

-) $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$

-) $\cos(\pi/2 - x) = sen(x)$

FUNCIÓN TANGENTE:

f (x) = tan(θ). La tangente significa que toca en un punto.

<u>Dominio</u>: Son los reales para los cuales x ≠ 0, así el dominio serán todos los valores excepto los múltiplos de π/2, esto debido a que en este ángulo el valor de x es 0, luego el cociente y / x queda indefinido.
<u>Imagen</u>: la imagen de la función tangente son todos los reales.

Valores de la Tangente: Con los mismos argumentos utilizados para seno y coseno, se puede obtener los valores de los ángulos notables.

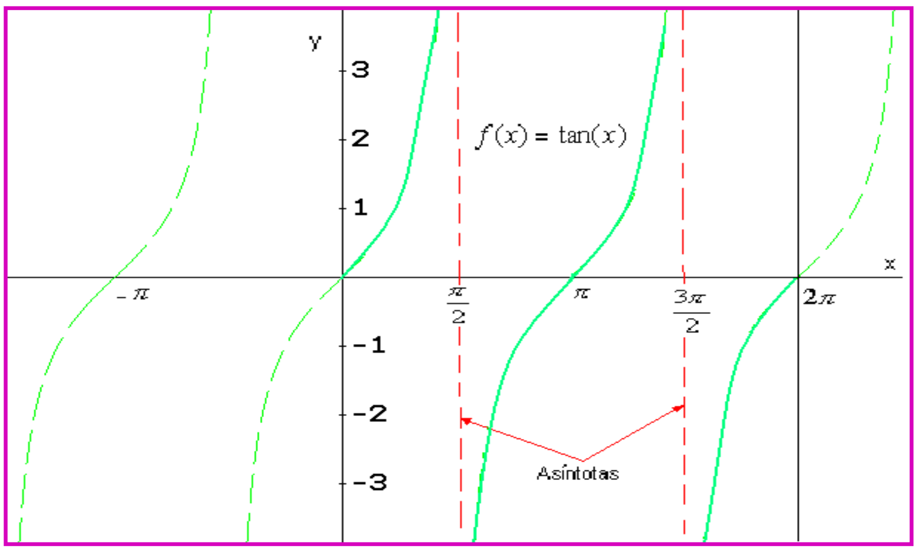
$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow\Rightarrow \tan(0^0) = \frac{0}{1} = 0$ Luego: $\tan(\theta) = \frac{0}{1} = 0$

$\tan(30^0) = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(45^0) = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$
$\tan(60^0) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$	$\tan(90^0) = \dfrac{1}{0} = ind$

La función tangente es positiva donde el cociente de las variables *x* e *y* es positivo; es decir, la tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero. (I y III)

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
0 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ ∞	$-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ ∞	$-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0

Grafica de la función tangente:



La función tangente tiene Asíntotas verticales en x = π/2 y 3π/2, para la circunferencia unidad, se puede observar en la gráfica.

<u>*Simetría:*</u> Para la función tangente se cumple: **tan(-x) = - tan(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.
<u>*Monotonía*</u>: La función tangente es monótona, ya que es creciente en su dominio.
<u>*Periodicidad*</u>: El periodo de la tangente es π, ya que cumple: $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ Esto significa que esta función se repite cada π en las mismas condiciones.

Propiedades Adicionales: Para *x* cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$

-) $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

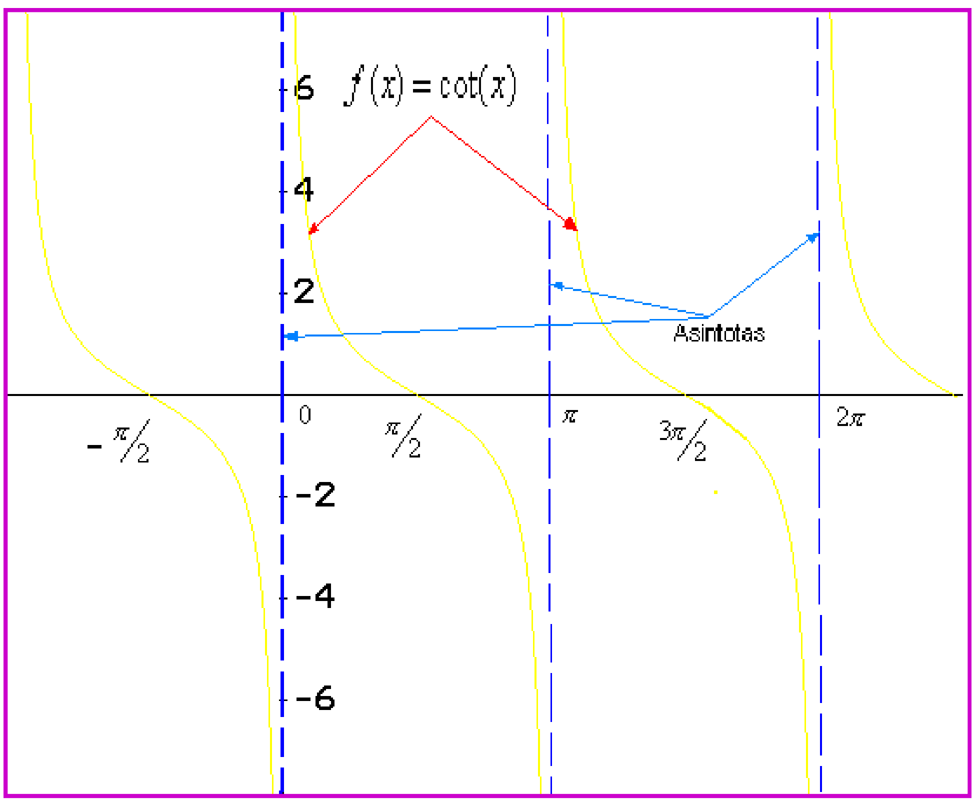
-) $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

FUNCIONES COMPLEMENTARIA:

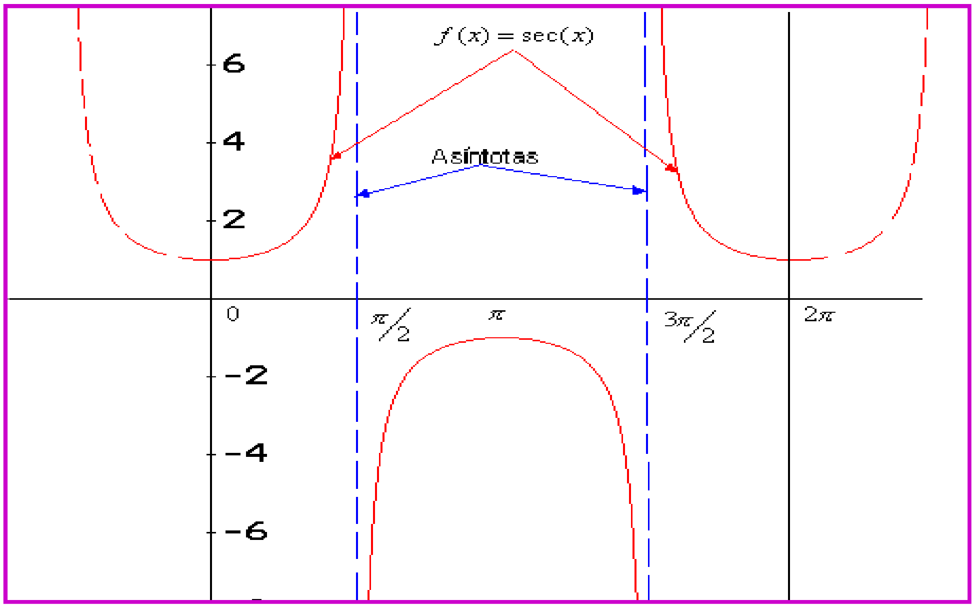
De esta manera quedan analizadas las funciones trigonométricas principales, en seguida se hará una descripción de las funciones complementarias, con el fin de que usted estimado estudiante indague en diferentes fuentes sobre las mismas, para de esta manera afianzar sus conocimientos.

FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONIA	PERIODO	ASÍNTOTAS
Cotangente	x є R, donde x ≠ π y x ≠ 2π	Los Reales	Función impar. Simetría respecto al origen	Es monótona. Decreciente en su dominio	π	x = 0 x = π x = 2 π
Secante	x є R, donde x ≠ π/2 y x ≠ 3π/2	(-α, -1] U [1, α]	Función par. Simetría respecto al eje y.	No es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.	2π	x = π/2 x = 3π/2
Cosecante	x є R, donde x ≠ π y x ≠ 2π	(-α, -1] U [1, α]	Función impar. Simetría respecto al origen	No es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.	2π	x = 0 x = π x = 2 π

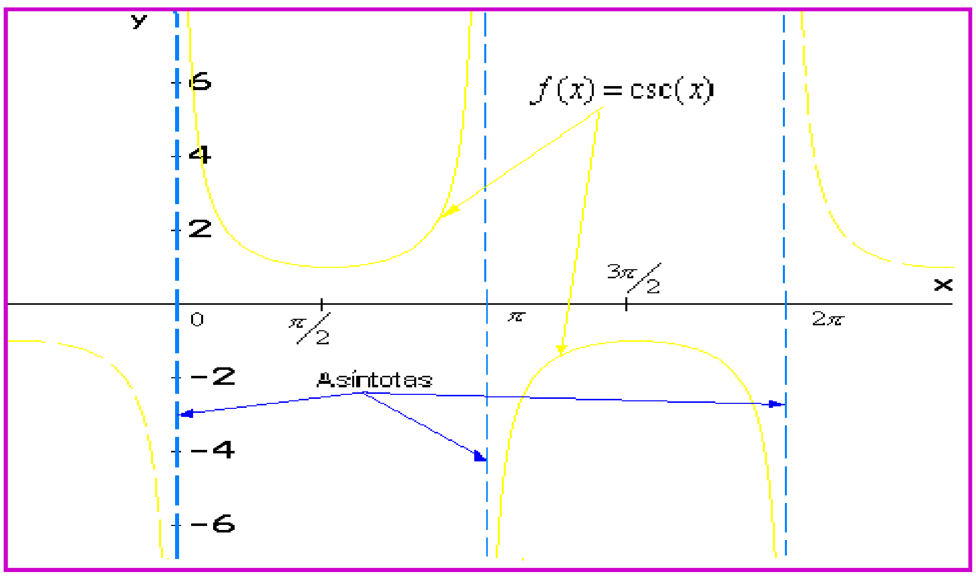
Grafica función Cotangente:



Grafica función Secante:



Grafica función Cosecante:



Los valores de las funciones cotangente, secante y cosecante, se obtiene de la misma manera como se hizo para las funciones principales.

Veamos algunos ejemplos.

$$\cot(\frac{\pi}{6}) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \qquad \sec(\frac{\pi}{6}) = \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc(\frac{\pi}{6}) = \frac{h}{y} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Así sucesivamente.

El trabajo consiste en que usted estimado estudiante complete los valores para los ángulos notables en los cuatro cuadrantes en la tabla propuesta en seguida, utilizando los principios dados en el aparte: *Valores de las funciones trigonométricas:*

Cotangente:

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
∞ $\sqrt{3}$			

Secante:

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
1 $2\sqrt{3}/3$			

Cosecante:

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
∞ 2			

EJERCICIOS

Hallar el dominio, imagen, monotonía, simetría y un bosquejo de la gráfica.

1. $f(x) = 2^{x}$
2. $h(x) = 3^{x} + 2$
3. $J(x) = e^{x-1}$
4. $f(x) = Log_{2}(4x)$
5. $h(x) = Log\,(x+4)$

6. El número de bacterias en un cultivo está dado por la función: $n(t) = 500e^{0.45t}$ Donde t se mide en horas.
a-) cual es la tasa relativa (TR) del crecimiento de la población de bacterias.
b-) Cual es la población inicial del cultivo
c-) Cuantas bacterias habrá en el cultivo a las 5 horas.

Rta: a-) 445 Bacterias/Hora. b-) Rta: 500 bacterias c-) 4.744 Bacterias

7. La relación entre el ingreso anual *x* y el número de individuos *y* en un país capitalista esta dado por la función: $P(x) = Log(y) - kLog(x)$ ¿Cuál será el número de individuos en un país capitalista donde k = 2 y b = 12.000, si el ingreso anual es de 10.

Rta: 120

Dados los ángulos, hacer la conversión a radianes.

8. 15^{0} Rta: π/12

9. 70^{0} Rta: 7π/18

10. - 25^{0} Rta: 67π/36

11. 480^{0} Rta: 8π/3

12. -78^{0} Rta: 141π/90

Convertir a grados los siguientes ángulos dados en radianes.

13. 4π/3 Rta: 240^{0}

14. 3π/8 Rta: $67{,}5^{0}$

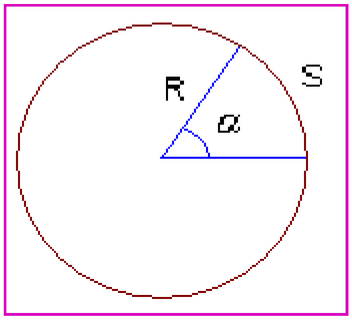
15. -7π/8 Rta: $202{,}5^{0}$

16. 7π/12 Rta: 105^{0}

17. - 9π/12 Rta: 225^0

Para la siguiente figura, Hallar la longitud del arco y el área del sector circular

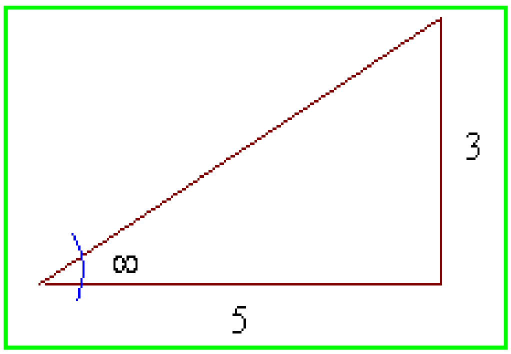
18.

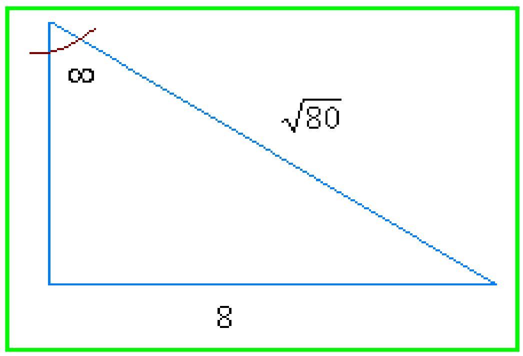


R = 8 cm.
α = π / 4

Rta: Longitud S = 6, 28 cm. Área: 25,13 Cm^2

19. Para Los triángulos dados, hallar el valor de las 6 funciones trigonométricas, según el ángulo establecido.





20. Para la función f(x) = cot(x), en el intervalo 0 ≤ x ≤ 2π, identificar las asíntotas horizontales y verticales, si las tiene.

21. Graficar las siguientes funciones:

a-) f(x) = - cot(x)

b-) g(x) = - cos(x)

c-) h(x) = sen(3x)

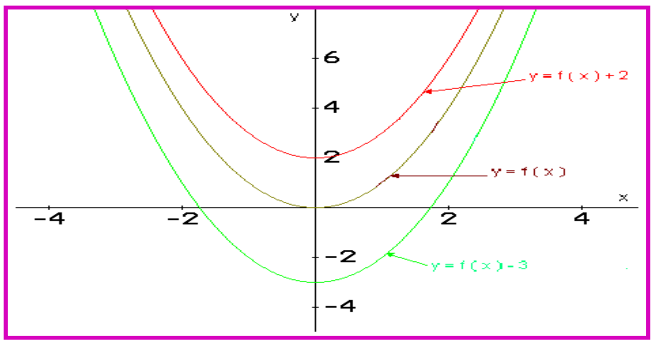
$\boxed{y = af\,(bx + c)}$

Lección Veintisiete: Transformación de Funciones

Las funciones analizadas hasta el momento son las que se podrían consideran las funciones modelos o básicas, pero a partir de estas se pueden obtener nuevas funciones modificando o mejor haciendo ciertas transformaciones a las primeras. Las transformaciones pueden ser de tipo traslación o estiramiento.

TRASLACIÓN: La traslación es un corrimiento que puede sufrir la función ya sea horizontal o verticalmente, debido a que se adiciona una constante a dicha función.

Corrimiento Vertical: Sea $y = f(x)$ una función, si se adiciona una constante k, de tal manera que la función queda: $y = f(x) + k$ la función sufre un corrimiento vertical.



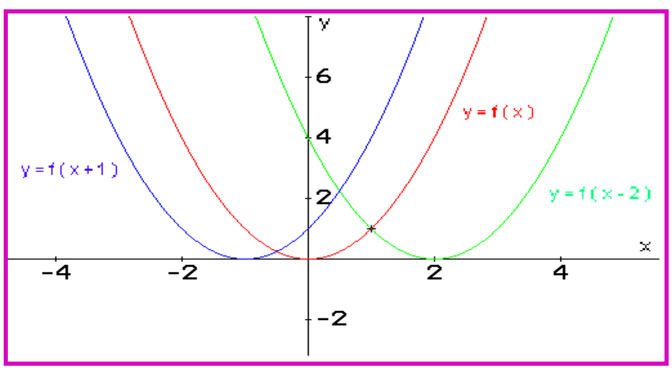
Cuando: K > 0

El corrimiento vertical es hacia arriba k unidades a partir de la función base.

Cuando: K < 0

El corrimiento vertical es hacia abajo k unidades a partir de la función base.

Corrimiento Horizontal: Sea $y = f(x)$ una función, si se adiciona una constante p, de tal manera que la función queda: $y = f(x + p)$ la función sufre un corrimiento horizontal.



Cuando: p > 0

El corrimiento horizontal es hacia la izquierda p unidades a partir de la función base.

Cuando: p < 0

El corrimiento horizontal es hacia la derecha p unidades a partir de la función base.

Ejemplo 170:

Sea la función $y = x^3$ A partir de esta obtener:

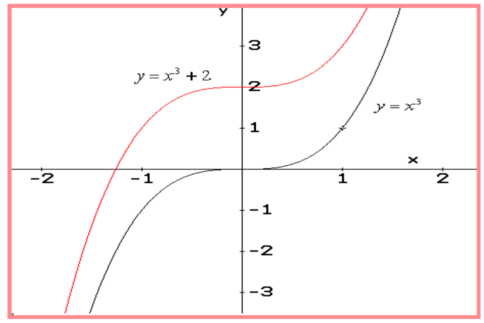
a-) $y = x^3 + 2$

b-) $y = (x-2)^3$

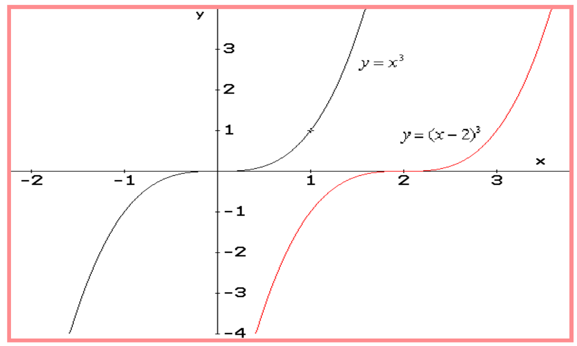
c-) $y = (x+1)^3 - 2$

Solución:

a-) De la función base $y = x^3$, se le adiciono + 2. A la función, luego hubo un corrimiento vertical 2 unidades hacia arriba.



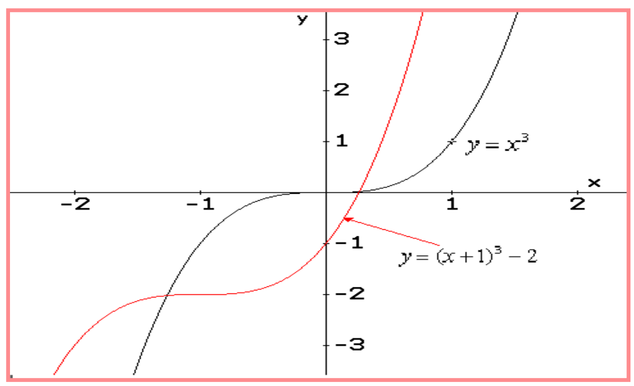
b-) Para este caso se adicionó – 2 a la variable, luego el corrimiento es horizontal, dos unidades hacia la derecha.



c-) Para este caso se presenta corrimiento en los dos ejes.

Horizontal: Un unidad hacia la izquierda, ya que se adicionó + 1 a la variable.

Vertical: Dos unidades hacia abajo, ya que se adicionó – 2 a la función.



Ejemplo 171:

Graficar la función:

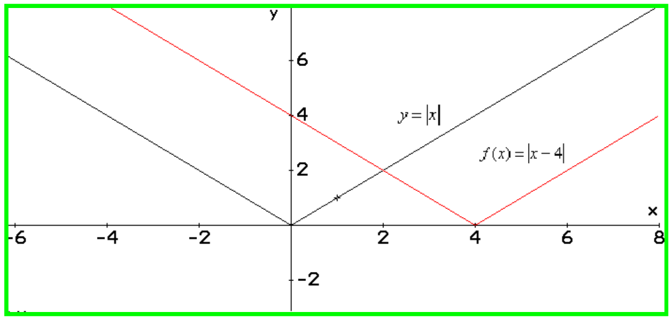
a-) $f(x) = |x - 4|$

b-) $g(x) = |x| + 2$

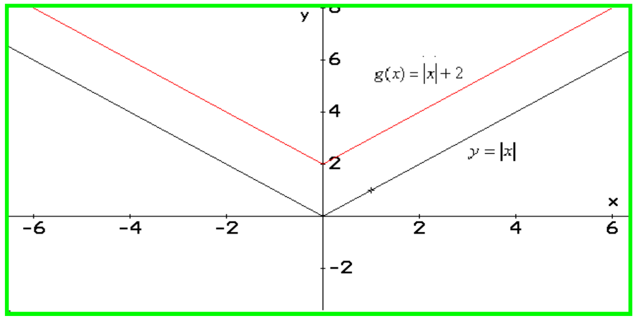
c-) $h(x) = |x - 2| + 3$

Solución:

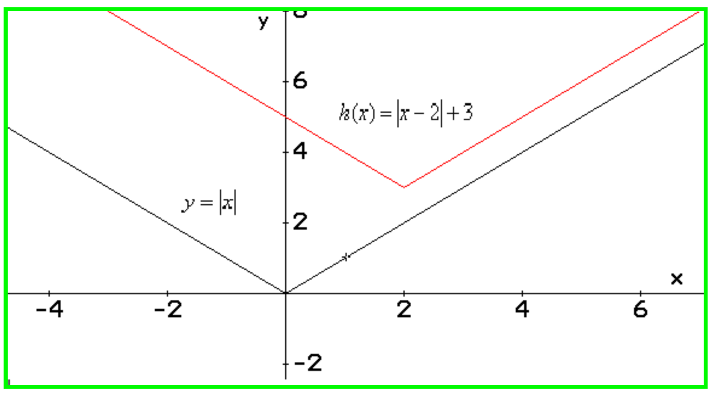
a-) La función base es la función valor absoluto, luego para el primer caso se adiciona 4 unidades negativas a la variable, así hay corrimiento horizontal de 4 unidades hacia la derecha.



b-) A partir de la función base, valor absoluto, se adiciona dos unidades positivas a la función, luego esta se corre dos unidades hacia arriba; es decir, sufre corrimiento vertical.



c-) Para este caso, la función sufre corrimiento tanto vertical como horizontal.

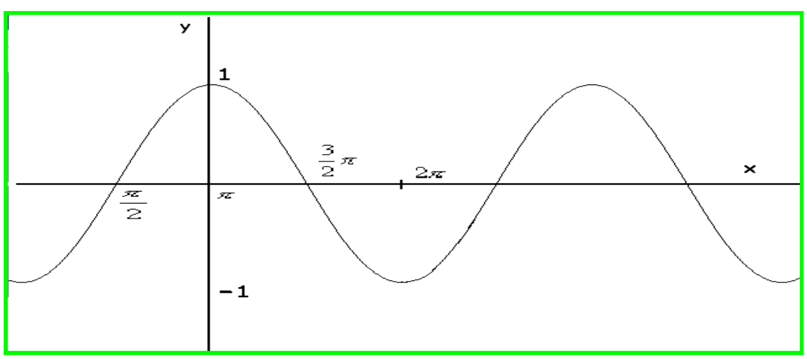


Vertical: Como se adiciono 3 unidades positivas a la función, entonces ésta sube 3 unidades.

Horizontal: Además para la misma función se adicionó dos unidades negativas a la variable, entonces ésta se corre dos unidades hacia la derecha.

Ejemplo 172:

Según la grafica siguiente, identificar la función que la describe, de las opciones propuestas.



Solución:

a-) $f(x) = \cos(x - \pi)$

b-) $g(x) = \cos(x + \pi)$

c-) $h(x) = sen(x - \pi)$

Aunque la respuesta está entre estas, por favor justifiquen ¿Cual es y porque?

ESTIRAMIENTO: Cuando a una función se le antepone un coeficiente, ésta puede presentar estiramiento o compresión, según los siguientes casos:

DEFINICIÓN:

Sea f (x) una función y sea k una constante diferente de cero.

Si $y = kf(x)$ La función sufre compresión vertical en k unidades.

Si $y = \frac{1}{k} f(x)$ La función sufre estiramiento vertical en 1/k unidades

Ejemplo 173:

A partir de la función valor absoluto: $f(x) = |x|$ observar los siguientes casos:

a-) $y = 2|x|$

b-) $y = \frac{1}{2}|x|$

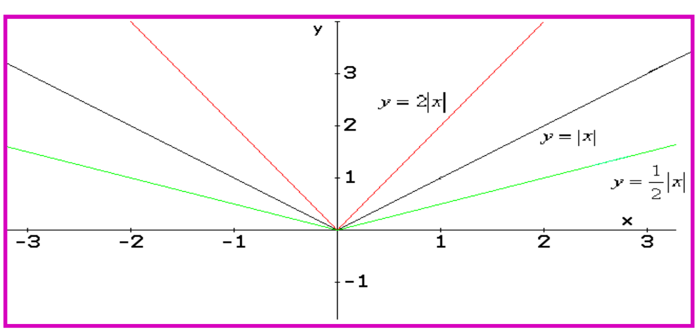
Solución:

La función base es la función valor absoluto.

a-) Se multiplica la función por el valor 2, así la función sufre compresión vertical.

b-) Cuando se multiplico la función por ½, ésta se estiró verticalmente.

Las dos situaciones se pueden observar en la gráfica siguiente.



DEFINICIÓN:
Sea f (x) una función y sea k una constante diferente de cero.

Si $y = f(kx)$ La función sufre compresión horizontal en k unidades.

Si $y = f(\frac{1}{k}x)$ La función sufre estiramiento horizontal en 1/k unidades

Ejemplo 174:

A partir de la función cuadrática: $f(x) = x^2$ observar los siguientes casos:

a-) $y = 2x^2$

b-) $y = \frac{1}{2}x^2$

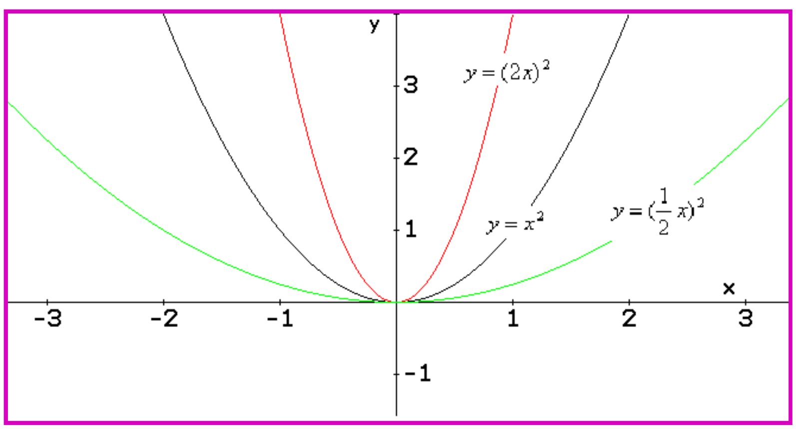
Solución:

La función base es la función cuadrática.

a-) Se multiplica la variable por el valor 2, así la función sufre compresión vertical.

b-) Cuando se multiplico la variable por ½, la función sufre estiramiento verticalmente.

Las dos situaciones se pueden observar en la gráfica siguiente.



Ejemplo 175:

Dada la función: $f(x) = x^3$ Establecer que ocurre si:

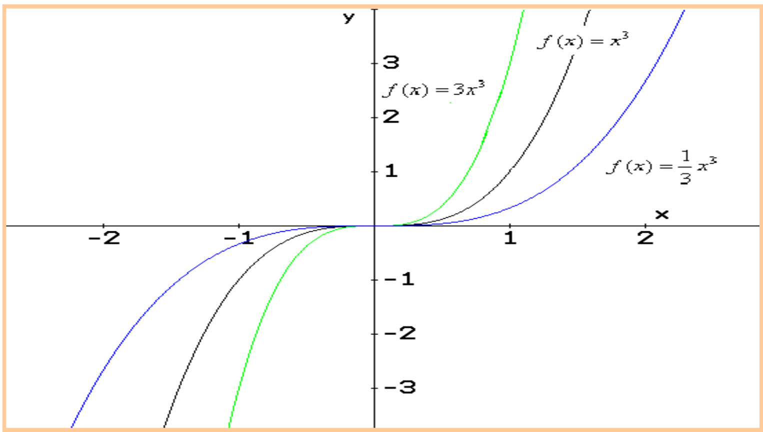
a-) Se multiplica a f(x) por 3
b-) Se multiplica a f(x) por 1/3
c-) Se multiplica a x por 2
d-) Se multiplica a x por ½

Solución:

a-) La función base es la función cúbica: $f(x)=x^3$ Cuando se multiplica dicha función por 3, se presenta una compresión vertical.

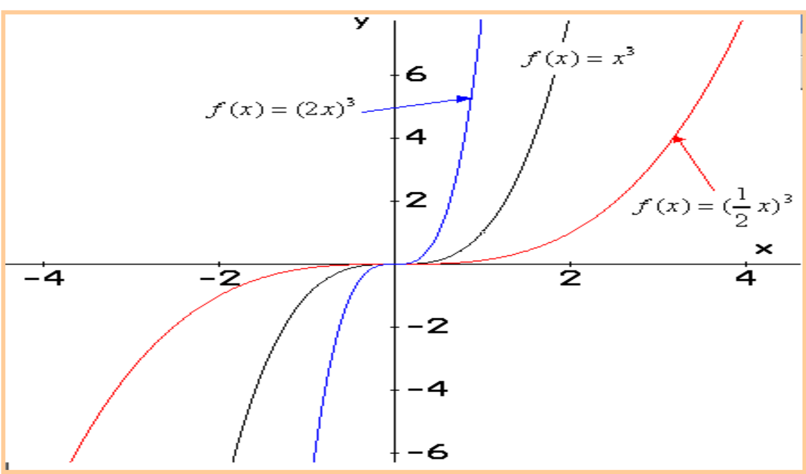
b-) Cuando se multiplica la función por 1/3, se presenta un estiramiento vertical.

En las siguientes gráficas se explica los casos presentados.



c-) Cuando se multiplica la variable por 2, la función presenta una compresión vertical.

d-) Cuando se multiplica la variable por 1/2, la función presenta un estiramiento vertical.



Ejemplo 176:

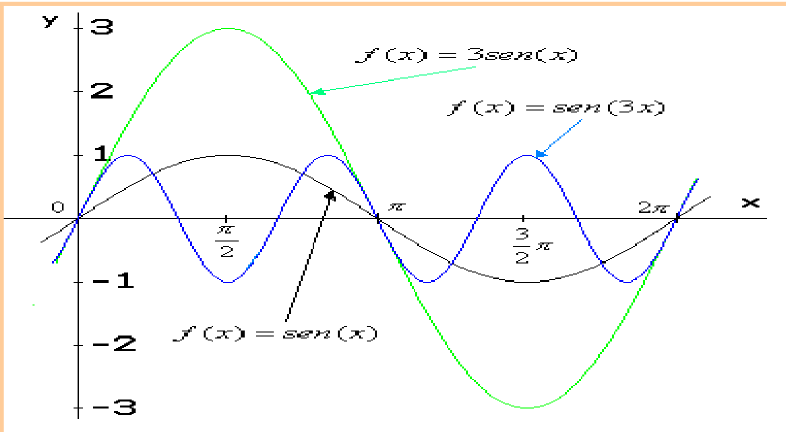
Para las funciones dadas a continuación identificar que tipo de estiramiento presentaron.

a-) $f(x)=3sen(x)$
b-) $f(x)=sen(3x)$

Solución:

a-) La función base sen(x), al multiplicarla por 3, ésta se estira verticalmente.

b-) Pero si multiplicamos la variable por 3, la función se encoge horizontalmente.



Conclusiones:

A manera de resumen se puede comentar:

Cuando a una función base se le suma una constante la función se traslada ya sea horizontal o verticalmente.

Cuando a una función base se le multiplica por una constante, la función se estira o encoge, pero no se traslada.

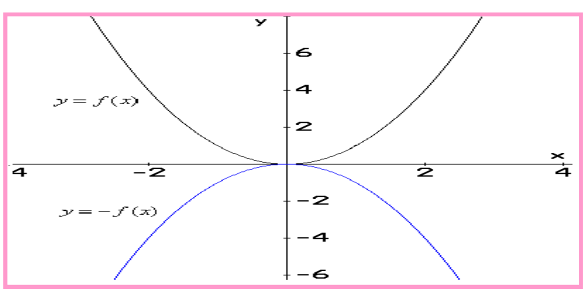
REFLEXIÓN:

A toda función f(x) se le puede hallar otra función que sea su reflejo. La función y su reflejo forman simetría respecto a los ejes coordenados.

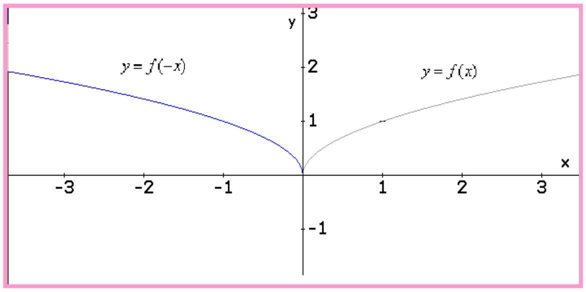
Sea f (x) una función, entonces - f (x) es el reflejo respecto al eje x.

Sea f (x) una función, entonces f (- x) es el reflejo respecto al eje y.

Veamos esta situación de manera gráfica.



La reflexión que se observa es con respecto al eje x.



La reflexión es este caso es con respecto al eje y.

EJERCICIOS

Para Las funciones dadas a continuación, a partir de la función base, identificar cuáles fueron los cambios presentados y hacer la gráfica.

1. $f(x) = x^2 + 4$

2. $f(x) = (x-2)^2 + 3$

3. $g(x) = |x - 5|$

4. $h(x) = 6\sqrt{x}$

5. $p(x) = e^{x-2}$

6. $s(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$

Lección Veintiocho: Funciones Inversas

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

En las funciones ocurre algo parecido a las operaciones matemáticas básicas, donde la resta anula la suma, la multiplicación anula la división, en este orden de ideas las funciones inversas anulan la función base, se caracterizan porque el dominio e imagen se invierten.

Es importante resaltar que para que una función se pueda invertir, ésta debe ser INYECTIVA, la razón es lógica, si se invierten el dominio e imagen, se debe tener cuidado en que no se presenten dominios donde alguno de sus elementos tengan más de una imagen.

Definición: Sea y = f(x) una función Inyectiva (uno a uno), la inversa de f(x) es la función $f^{-1}(x)$, la cual tiene como dominio la imagen de f(x) y como imagen el dominio de f(x).

Dada la función $y = f(x)$, la función inversa se puede expresar de dos maneras

Forma Implícita: $x = f(y)$

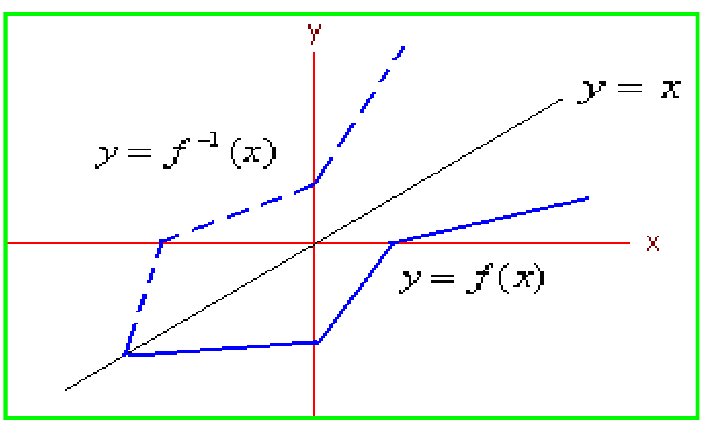
Forma Explícita: $y = f^{-1}(x)$

La *propiedad fundamental* de invertir funciones: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x)\right) = x$

En las condiciones analizadas, se puede inferir que las funciones monótonas son invertibles, es decir las funciones crecientes o decrecientes.

Veamos las características básicas de las funciones inversas:

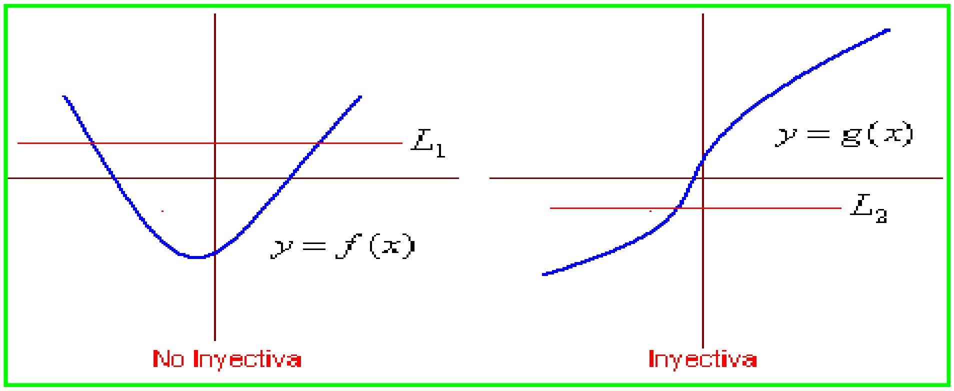
Dominio: El dominio de $f^{-1}(x)$ es la imagen de f(x)
Imagen: La imagen de $f^{-1}(x)$ es el dominio de f(x)
Simetría: Las funciones f(x) y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta y = x.



La recta y = x, es el eje de simetría de las funciones f(x) y $f^{-1}(x)$.

FUNCIONES ALGEBRÁICAS INVERSAS:

Las funciones polinómicas de grado impar, como las de grado uno y tres son inyectivas, las funciones radicales también son inyectivas, este tipo de función es invertible, en general como se dijo anteriormente todas las funciones monótonas. Existe un método gráfico para identificar si una función es inyectiva, consistente en trazar una recta horizontal en cualquier punto del plano y verificar que corta a la curva en un solo punto.



Se observa que L_1 corta la curva en más de un punto, luego f(x) no es inyectiva, para el caso de g(x) la recta corta a la curva solo en un punto, por consiguiente g(x) es inyectiva.

Ejemplo 177:

Halar la función inversa de $f(x) = 4x - 5$

Solución:

Como la función es lineal, se puede obtener su inversa. El procedimiento consiste en despejar la variable x y obtener una nueva función donde y es la variable independiente. Veamos:

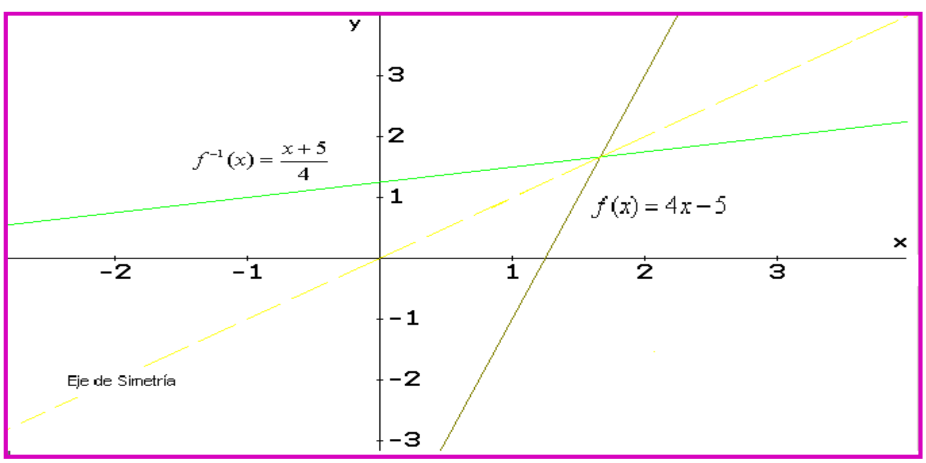
$$y = 4x - 5 \Rightarrow\Rightarrow y + 5 = 4x \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{y+5}{4}$$

Así la función inversa será:

Forma Implícita: $x = \dfrac{y+5}{4}$

Forma Explícita: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{4}$

La gráfica siguiente nos muestra el comportamiento de la función f(x) y su inversa.



Ejemplo 178:

Dada la función: $g(x) = x^3$ Hallar $g^{-1}(x)$.

Solución:

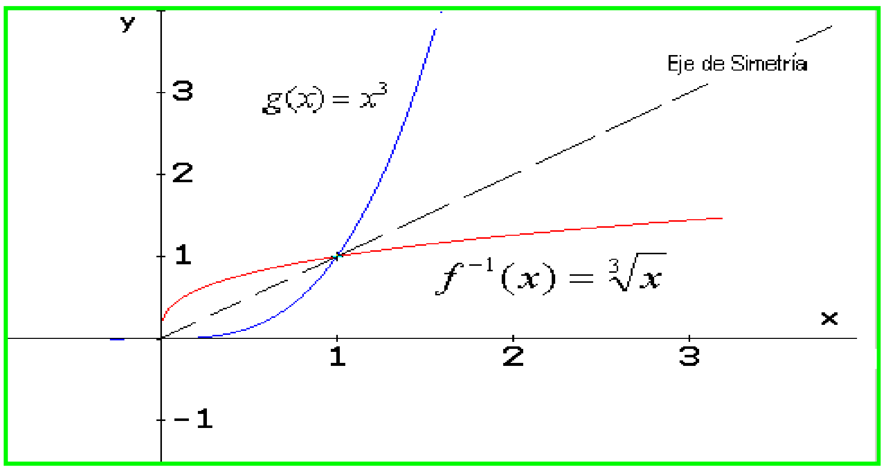
Por la teoría analizada, la función tiene inversa, ya que es un polinomio de grado impar. Entonces despejamos la variable x.

$$y = x^3 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

La inversa es:

Forma Implícita: $x = \sqrt[3]{y}$

Forma Explícita: $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



Ejemplo 179:

Identificar la inversa de la función: $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Solución:

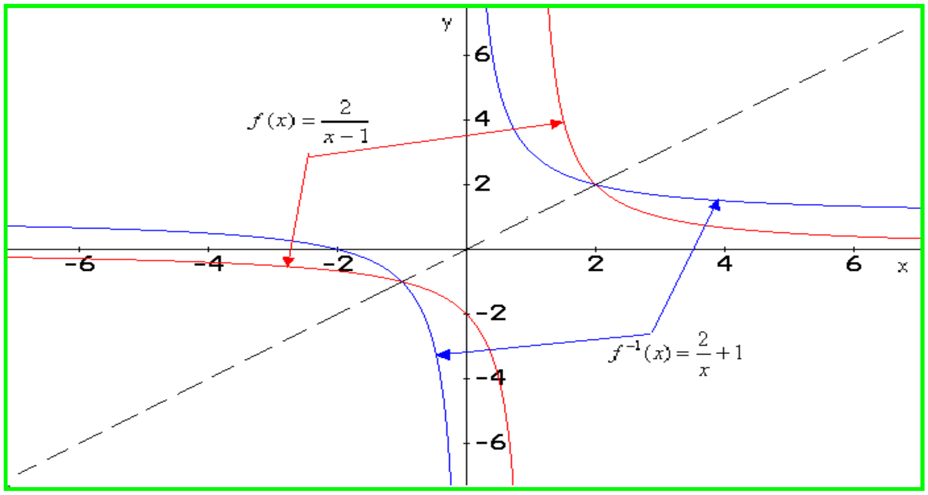
La función es inyectiva, luego tiene inversa.

$$y = \frac{2}{x-1} \Rightarrow\Rightarrow x - 1 = \frac{2}{y} \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{2}{y} + 1$$

La inversa en las dos formas:

Forma Implícita: $x = \dfrac{2}{y} + 1$

Forma Explícita: $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x} + 1$



Ejemplo 180:

Determinar la inversa de: $g(x)=\dfrac{x-1}{3x+4}$

Solución:

Despejamos la variable *x* para obtener la inversa.

$$y=\frac{x-1}{3x+4}\Rightarrow\Rightarrow y(3x+4)=x-1\Rightarrow\Rightarrow 3xy+4y-x=1\Rightarrow\Rightarrow 3xy-x=-4y-1$$

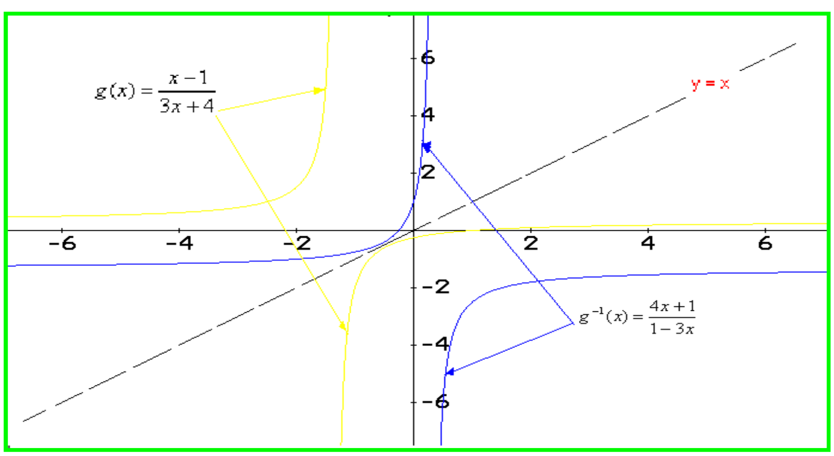
$$x(3y-1)=-4y-1\Rightarrow\Rightarrow x=\frac{-4y-1}{3y-1}$$

Así la función inversa es:

Forma Implícita: $x=\dfrac{-4y-1}{3y-1}$

Forma Explícita: $g^{-1}(x)=\dfrac{-4x-1}{3x-1}=\dfrac{4x+1}{1-3x}$

Veamos las gráficas.



Para comprobar si la inversión de la función fue correcta, se puede aplicar la propiedad fundamental:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

Apliquémoslo para el ejemplo 177, $f\left(f^{-1}(x)\right)=4\left(\frac{x+5}{4}\right)-5=x+5-5=x$

Para el ejemplo 178: $g\left(g^{-1}(x)\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{3}=x$

Se observa que la propiedad se cumple. Como ejercicio de refuerzo, desarrolle lo mismo para los ejemplos 179 y 180.

FUNCIONES TRASCENDENTALES INVERSAS:

Las funciones trascendentales inversas son muy importantes ya que tienen mucha utilidad en la integración, en la solución de ecuaciones y otras áreas.

Función Exponencial: Sabemos que la función exponencial es inyectiva, por consiguiente tiene inversa la cual es la función logarítmica.

DEFINICIÓN:

Sea $f(x)=a^{x}$, entonces $f^{-1}(x)=Log_{a}(x)$

Demostración:

A partir de: $y=a^{x}\Rightarrow\Rightarrow Log_{a}(y)=Log_{a}(a^{x})\Rightarrow\Rightarrow Log_{a}(y)=x$ Expresándola en forma explícita: $Log_{a}(y)=x\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Log_{a}(x)$

Analizando las funciones exponenciales más conocidas, la natural y la decimal:

$$f(x)=e^{x}\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Ln(x)$$

$$f(x)=10^{x}\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Log(x)$$

Función Logarítmica: Sabemos que la función logarítmica también es inyectiva, por consiguiente tiene inversa la cual es la función exponencial.

DEFINICIÓN:

Sea $f(x)=Log_{a}(x)$, entonces $f^{-1}(x)=a^{x}$

Demostración:

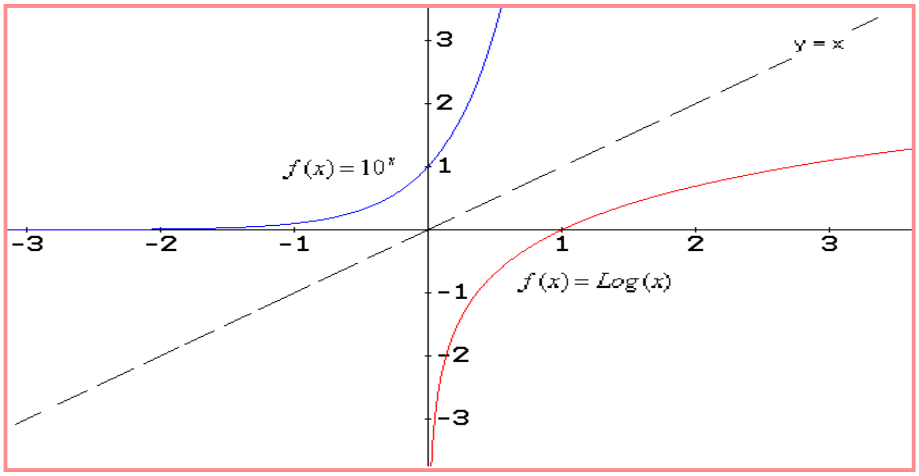
A partir de: $y=Log_{a}(x)\Rightarrow\Rightarrow a^{y}=a^{Log_{a}(x)}\Rightarrow\Rightarrow a^{y}=x$ Expresándola en forma explícita: $a^{y}=x\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=a^{x}$

Analizando las funciones logarítmicas más conocidas, la natural y la decimal:

$$f(x) = Ln(x) \Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x) = e^{x}$$

$$f(x) = Log(x) \Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{x}$$

Función Exponencial Decimal y función Exponencial Logarítmica.

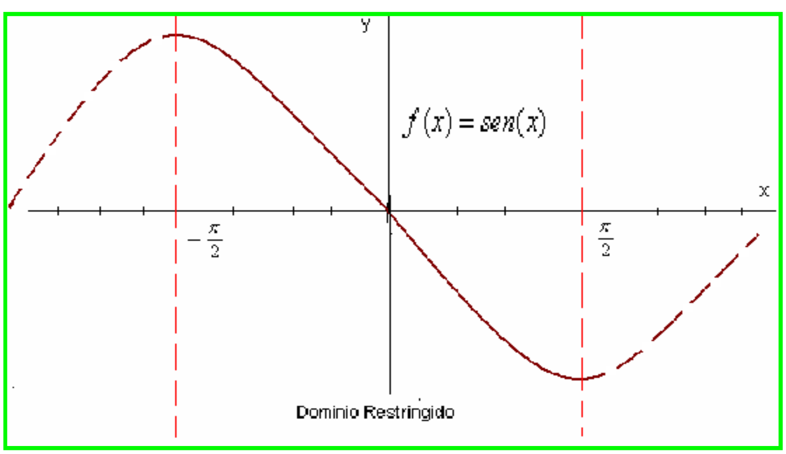


Función Trigonométrica Inversas: Sabemos que las funciones trigonométricas no son inyectivas, ya que por ser periódicas se repiten cada ciento valor del dominio, por ejemplo la función seno se repite cada 2π, la función tangente cada π, así las demás.

Para poder invertir las funciones trigonométricas, se hace un análisis del dominio, haciendo lo que se conoce como la "*Restricción del Dominio*", que consiste en tomar solo una parte de éste, donde la función sea monótona, ya que de esta manera si se pueden invertir.

Veamos el proceso:

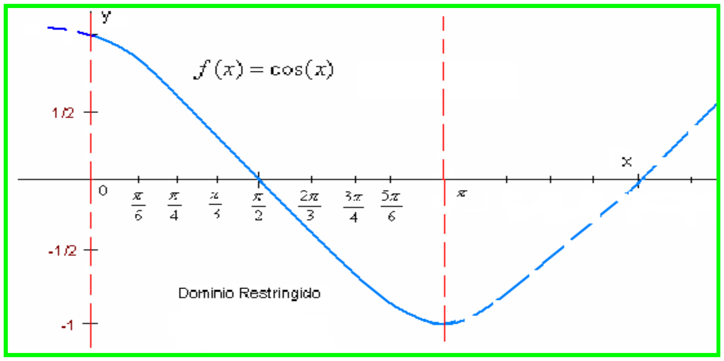
Seno:



Dominio restringido para el seno es: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En este intervalo la función es decreciente

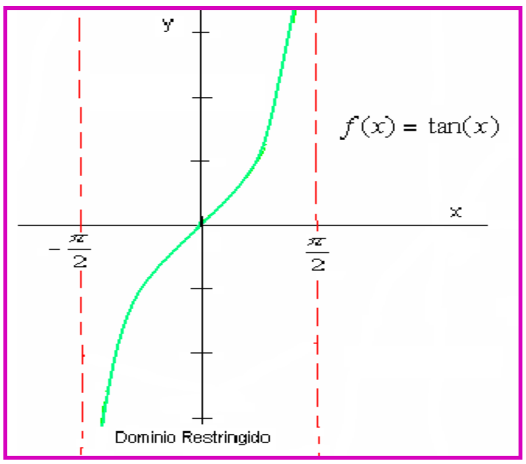
Coseno:



El dominio restringido para el coseno es: $[0, \pi]$

En este intervalo la función es decreciente

Tangente:



El dominio restringido para la tangente es: $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

En este intervalo la función es creciente

Para el caso de las funciones restantes:

Cotangente: Dominio restringido: $(0\ ,\ \pi\ )$ en este intervalo la función es decreciente.

Secante: Dominio restringido $(0\ ,\ \pi\ )$ excepto $\frac{\pi}{2}$ En este intervalo al función es creciente.

Cosecante: Dominio restringido $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ excepto 0. En este intervalo la función es creciente.

En estas condiciones las funciones trigonométricas se pueden invertir.

Seno Invertido:

> Sea $f(x) = sen^{-1}(x)$ Se define como la función inversa del seno o arcoseno de la variable x.

Dominio: Son los números reales comprendidos: $[-\ 1, 1]$

Imagen. Los ángulos entre $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

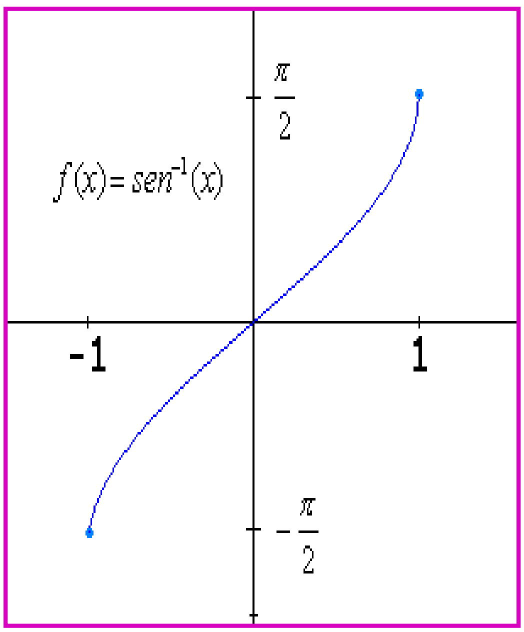
Simetría: la función $\text{sen}^{-1}(x)$ es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Monotonía: Creciente en su dominio.

Coseno Invertido:

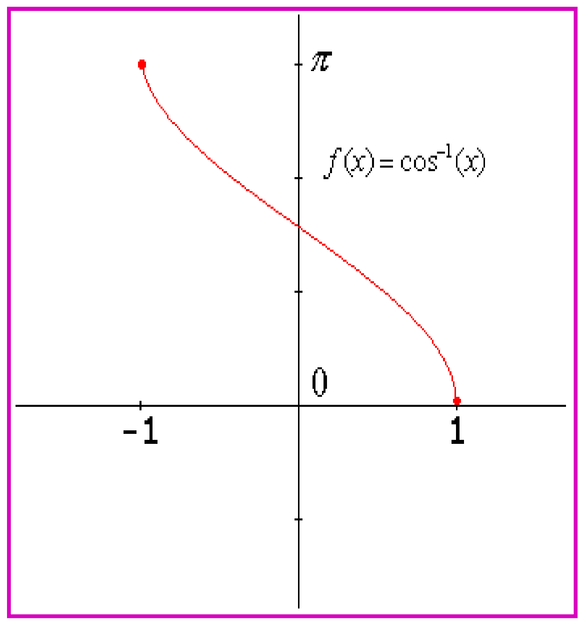
Sea $f(x) = \cos^{-1}(x)$ Se define como la función inversa del coseno o arco coseno de la variable x.

Dominio: Son los números reales comprendidos: $[-1, 1]$
Imagen. Los ángulos entre $[0, \pi]$
Simetría: la función $\cos^{-1}(x)$ es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Monotonía: Decreciente en su dominio.
Veamos las gráficas de estas funciones.

Función Seno Inverso



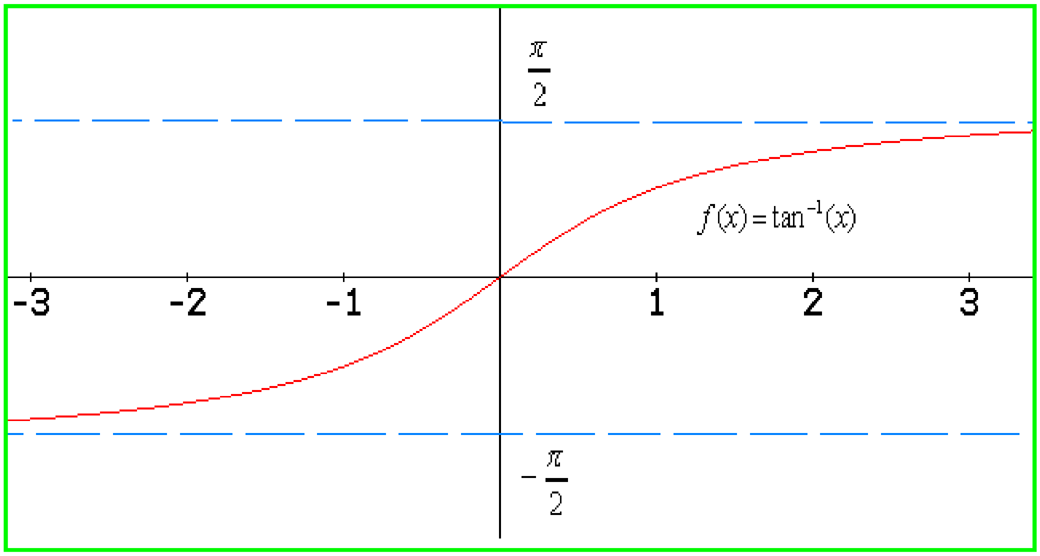
Función coseno Inverso



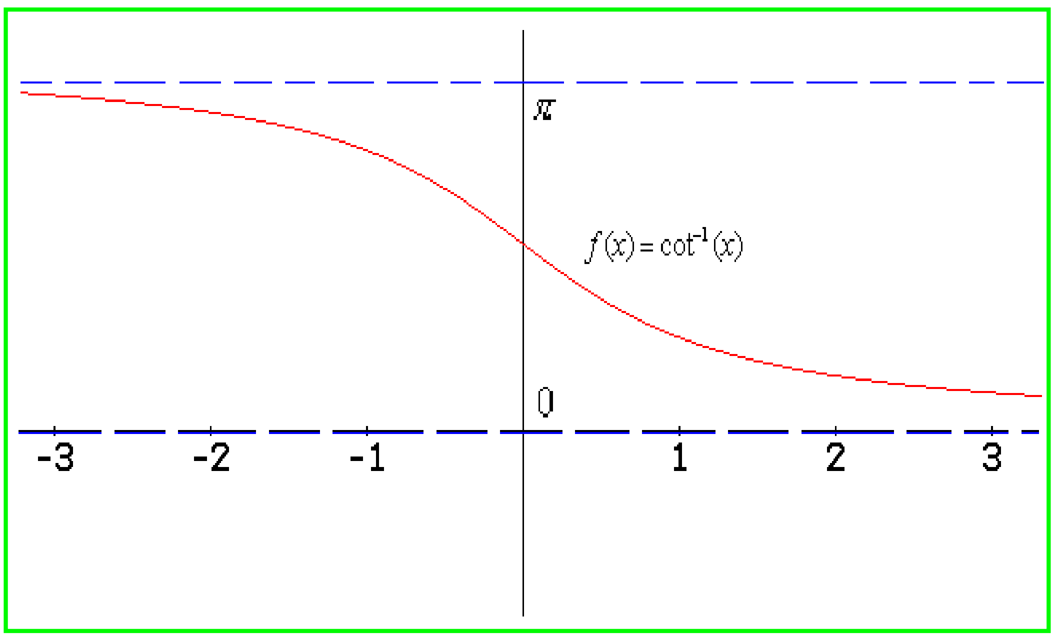
Veamos las otras funciones trigonométricas inversas:

FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONÍA
$\tan^{-1}(x)$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	Impar	Creciente
$\cot^{-1}(x)$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$	¿Investigar?	¿Investigar?

Función Tangente Inversa

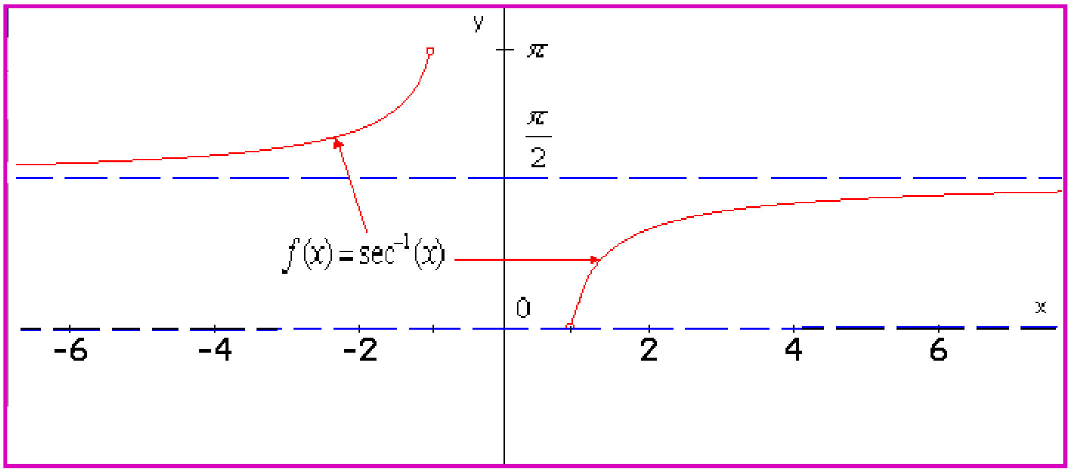


Función Cotangente Inversa

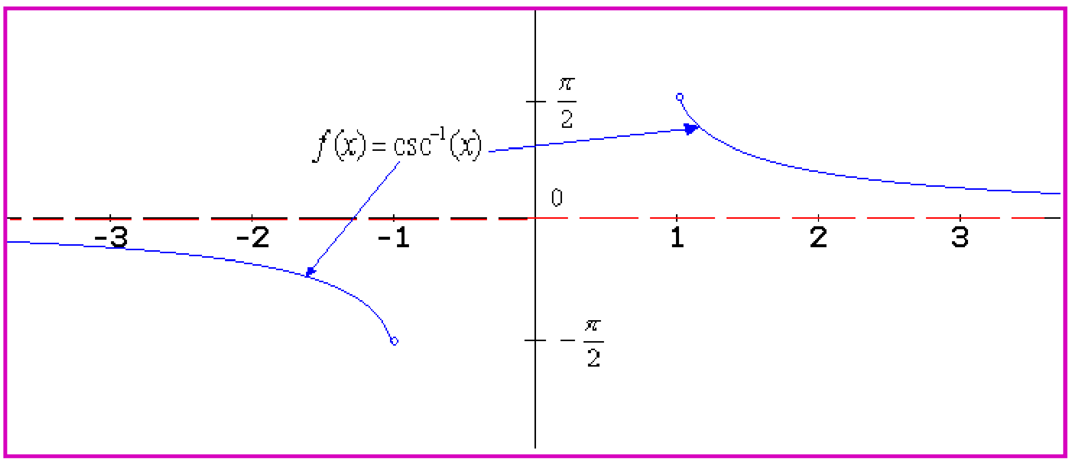


FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONÍA
$\sec^{-1}(x)$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	¿Investigar?	¿Investigar?
$\csc^{-1}(x)$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	¿Investigar?	¿Investigar?

Función Secante Inversa



Función Secante Inversa



Ejemplo 181:

Hallar $y = sen^{-1}(1/2)$

Solución:

Lo que se debe hacer es buscar en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que es el conjunto de la imagen del arco seno, un ángulo para el cual el seno vale ½, se sabe que el sen(π/6) es 1/2 , luego:
$sen^{-1}(1/2) = \pi/6$, entonces: $y = \pi/6$

Ejemplo 182:

Resolver: $y = tan^{-1}(1)$.

Solución: En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se debe buscar una ángulo para el cual su tangente vale 1. El ángulo para el cual la tangente es 1, corresponde a π/4 (45^0). Entonces: $\tan^{-1}(1)$ = π/4, por consiguiente y = π/4

Ejemplo 183:

Hallar el ángulo o ángulos para el cual: $y = \cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$

Solución:

El arco coseno tiene como imagen, el intervalo $[0, \pi]$ Se debe buscar el ángulo o ángulos en este intervalo donde el coseno vale $\sqrt{2}/2$. Se sabe que el coseno de π/4 es igual a $\sqrt{2}/2$. Entonces: $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{4}$

Ejemplo 184:

Resolver: $y = \cos^{-1}(1/2) + \cot^{-1}(\sqrt{3})$

Solución:

Se debe hallar el arco coseno de ½ y el arco cotangente de $\sqrt{3}$.

Para el $\cos^{-1}(1/2) = \frac{\pi}{3}$ (Justifique *esta respuesta*)

Para la $\cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$. Recordemos que para $\cot^{-1}(x)$ el intervalo de la imagen es $(0, \pi)$

Ahora: $y = \cos^{-1}(1/2) + \cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ Así: y = π/2

Ejemplo 185:

Hallar el ángulo para los valores dados: a-) $\mathrm{Sen}^{-1}(0, 05)$ b-) $\cos^{-1}(0, 9135)$

Solución:

a-) El valor dado $\mathrm{Sen}^{-1}(0{,}05)$ se puede hallar a través de las tablas de funciones trigonométricas. El valor se encuentra así:

ANGULO	VALOR
$2{,}82^0$	0,0488
x	0,05
$2{,}92^0$	0,0506

Por interpolación: x = 2,986 (*Compartir con su Profesor el proceso de interpolación*)

En el programa D. Se pulsa **shift** con **$\sin^{-1}$** se ingresa el valor para este caso (0,05) la calculadora arroja el valor 2,866 que será el valor del ángulo correspondiente.

b-) Igual que en el caso anterior. $\cos^{-1}(0{,}9135)$

En la tabla corresponde a 24^0

Por la calculadora: **shift** → **$\sin^{-1}$** (0,9135) = $24{,}0064^0$

EJERCICIOS

De las siguientes funciones determinar si son inyectivas y justificar la respuesta.

1. $f(x) = 5x - 6$ Rta: Sí

2. $g(x) = x^2 + 4$ Rta: No

3. $h(x) = |x|$ Rta: No

Las funciones dadas a continuación son inyectivas, hallar la función inversa y su dominio.

4. $f(x) = 10 - 4x$ Rta: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

5. $g(x) = \frac{4x}{5+x}$ Rta: $g^{-1}(x) = \frac{5x}{4-x}$

6. $l(x) = 4 - x^3$ Rta: $l^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$

Para cada una de las funciones dadas, identificar la inversa.

7. $h(x) = \frac{e^x}{4}$ Rta: $h^{-1}(x) = Ln(4) + Ln(x)$

8. $N(x) = Log\left(\frac{2+x}{x}\right)$ Rta: $N^{-1}(x) = \frac{2}{10^x - 1}$

Para las funciones dadas a continuación, graficas la función y su inversa.

9. $f(x) = 10^{3x}$

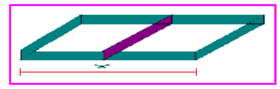
10. $h(x) = Ln(4x)$

Desarrolle los siguientes ejercicios, utilizando la tabla de funciones trigonométricas o la calculadora.

Hallar el valor de *y* para las siguientes funciones.

11. $y = sen^{-1}(1)$ Rta: π/2
12. $y = \cos^{-1}(1)$ Rta: 0
13. $y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ Rta: - π/3 = 5π/3
14. $y = \cot^{-1}(\sqrt{3})$ Rta: π/6
15. $y = \sec^{-1}(2)$ Rta: π/3
16. $y = \csc^{-1}(\sqrt{2})$ Rta: π/4
17. Hallar $\cosh^{-1}(2x)$ Rta: $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2}$

Lección Veintinueve: Aplicación de las Funciones.



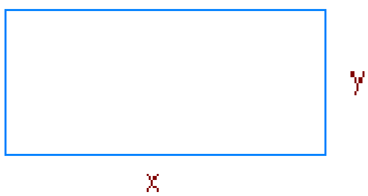
Las funciones tienen aplicaciones en todas las áreas del saber, por lo cual se desea presentar algunas de las muchas conocidas, los ejemplos modelos son una motivación para que con estos y otros que pueda analizar, estimado estudiante adquiera mucha destreza para resolver problemas con funciones. Se presentarán casos con funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

1. ALGEBRÁICAS:

Ejemplo 186:

El perímetro de un rectángulo mide 120 cm. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de su largo.

Solución:



Perímetro: 2x + 2y = 120
Simplificando: P: x + y = 60
Despejando y, entones: y = 60 – x
Área del rectángulo: A = x * y
A = x * (60 – x) = 60 x – x^2
A(x) = 60 x - x^2
Así queda expresada el área en función del largo.

Ejemplo 187:

La relación entre la temperatura del medio ambiente y la altitud es aproximadamente lineal, para $0 \leq y \leq 3.500$ T = grados centígrados (^{0}C) y y = metros. La temperatura a nivel del mar es aproximadamente 16^{0}C al aumentar la altitud a 1.500 metros, la temperatura disminuye en 7^{0}C.
a-) Hallar T (y); es decir, la temperatura en función de la altitud.
b-) Qué temperatura ambiental habrá a 2.00 metros de altura.
c-) A qué altitud la temperatura será de 0^{0}C.

Solución:

a-) Por las condiciones del problema: $T = my + b$ donde T es la temperatura, m la pendiente de la recta; ya que es una relación lineal, y la altitud y, b el intercepto. El problema nos describe que para T = 16^{0}C, y = 0 metros, así se tiene un punto, con este podemos hallar el intercepto b:
A partir de: $T = my + b$ reemplazamos: $16 = m(0) + b \Rightarrow\Rightarrow b = 16$
Para hallar el otro punto que nos permita obtener la pendiente, el problema también nos dice que cuando y = 1.500 m. La temperatura disminuye en 7^{0}C, entonces: T = 16^{0}C – 7^{0}C = 9^{0}C.
Luego por la ecuación lineal: $9 = 1.500\, m + 16$
En seguida calculamos la pendiente, despejando *m* de la ecuación anterior:

$$m = \frac{T - b}{y} = \frac{9 - 16}{1.500} = -\frac{7}{1.500}$$

Entonces: T = f (y): $T = -\frac{7}{1.500} y + 16$

b-) A 2.00 metros de altura, la temperatura será:

$$T = -\frac{7}{1.500}(2.000) + 16 = 6,67\ {}^{0}C$$

C-) A 0^{0}C la altitud será:

$$0 = -\frac{7}{1.500}y + 16 \Rightarrow\Rightarrow \frac{7}{1.500}y = 16 \Rightarrow\Rightarrow 7y = 16 * 1500$$

Finalmente: $y = \frac{24.000}{7} = 3.428,57\ m$

Como *y* está en el rango que se considero en el planteamiento del problema, el dato es confiable.

Ejemplo 188:

Expresar el área del círculo como función del perímetro.

Solución:

El área del círculo es: $A = \pi R^2$ y el perímetro $P = 2\pi R$
La idea es despajar R de la ecuación del perímetro y reemplazarlo en el área:

$$P = 2\pi R \Rightarrow\Rightarrow R = \frac{P}{2\pi}$$ Ahora: $$A = \pi R^2 \Rightarrow\Rightarrow A = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2$$

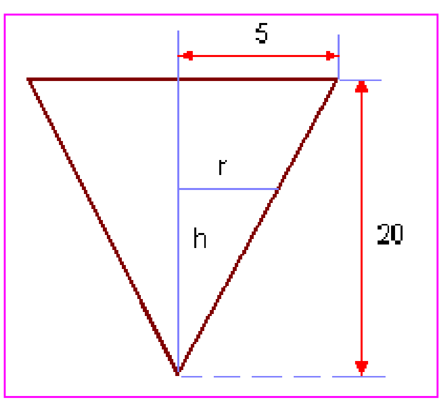
Por consiguiente: $A(P) = \frac{P^2}{4\pi}$

Ejemplo 189:

Un tanque de almacenamiento de líquido tiene forma de cono circular recto, con una altura de 20 metros y radio de la base de 5 metros. Expresar el volumen del líquido en cualquier instante como función de la altura de líquido.

Solución:

Una gráfica nos ayudará a resolver el problema.



Por geometría sabemos que el volumen de un cono circular recto esta dado por la ecuación:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2 h$$

Se observa que el volumen depende del radio y de la altura.

El problema consiste en expresar el volumen solo en función de la altura.

En la figura se observan dos triángulos semejantes (*estimado* *estudiante detéctelos*) Se sabe que cuando hay dos triángulos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, según la figura:

$$\frac{20}{5} = \frac{h}{r} \Rightarrow\Rightarrow \quad r = \frac{5h}{20} = \frac{h}{4}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación del volumen:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$$

Finalmente: $V(h) = \frac{\pi}{48} h^3$

Ejemplo 190:

Para el ejemplo 197, ¿A qué altura estará el líquido si el volumen de éste es de 4 m^3?

Solución:

Como se conoce la función: $V(h) = \frac{\pi}{48} h^3$ reemplazamos los valores y despejamos la incógnita.

$$V(h) = \frac{\pi}{48} h^3 \Rightarrow\Rightarrow \quad 4 = \frac{\pi}{48} h^3 \Rightarrow\Rightarrow \quad \pi h^3 = 192$$

Despejando altura: $h = \sqrt[3]{\frac{192}{\pi}} = 3{,}938 \quad m$

Ejemplo 191:

El costo de producción de un artículo esta dado por los costos fijos más los costos variables. En una compañía los costos fijos de producción son de \$50.000, el costo de producir una unidad es de \$200 ¿Cuánto costará producir 1.000 unidades?

Solución:

Costo total = Costos fijos + Costos variables. La siguiente función puede expresar matemáticamente el fenómeno. $C(x) = K + n(x)$

Con los datos dados en el problema:

$$C(x) = K + n(x) \Rightarrow\Rightarrow \quad C(x) = 50.000 + 200x$$

Para producir 1.000 unidades, el costo será:

$$C(x = 1.000) = 50.000 + 200(1.000) = 250.000$$

Por consiguiente producir 1.000 unidades costará \$250.000

2. EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS:

Existen muchos fenómenos que son explicados por funciones de tipos exponenciales o logarítmicos, como los presentados a continuación:

Ejemplo 192:

En economía una función muy conocida es la de interés compuesto. Si se invierten *C* pesos a un interés *i* compuesto anualmente en *t* años, el monto *P* esta dado por: $P = C(1+i)^t$
Un ciudadano invierte $500.000 al 10% de interés anual compuesto. ¿Cuánto tendrá al tercer año y de cuanto fue la ganancia en intereses?

Solución:

Vemos que la función que gobierna este fenómeno es una función exponencial.
Los datos:
C = $500.000
I = 10% = 0,1
t = 3 años
La incógnita: P =?

Reemplazando en la ecuación del monto:

$$P = C(1+i)^t \Rightarrow\Rightarrow P = 500.000(1+0{,}1)^3 = 500.000(1{,}1)^3 = 665.500$$

El monto al cabo del tercer año es de $665.500. La ganancia en este tiempo fue de $165.500

Ejemplo 193:

En medicina la recuperación normal de una herida se puede modelar por medio de una función exponencial. Sea A_0 el área original de la herida y A es el área de la herida después de n días. Luego la función de recuperación es de la forma: $A = A_0 e^{-0.35\,n}$
En un proceso de recuperación ¿Cuántos medirá una herida a los 3 días de 1,5 cm^2 área superficial?

Solución:

A = incógnita
A_0 = 1,5 cm^2
n = 3 días

Reemplazando en la ecuación tenemos: $A = 1{,}5e^{-0.35(3)} = 0{,}525cm^2$
A los 3 días la herida ha disminuido en 0,525 cm^2

Ejemplo 194:

El pH de una solución química está dada por la función: $pH = -Log\left[H^+\right]$ donde $\left[H^+\right]$ es la concentración de iones hidrogeno en moles por litro. ¿Cuál será la concentración de iones de hidrógeno para un pH = 6.

Solución:

A partir de la ecuación, se despeja $\left[H^+\right]$ reemplazando el valor del pH.

$$6 = -Log\left[H^+\right] \Rightarrow\Rightarrow -6 = Log\left[H^+\right] \Rightarrow\Rightarrow 10^{-6} = 10^{Log\left[H^+\right]}$$

Por operaciones inversas: $10^{-6} = 10^{Log\left[H^{+}\right]} \Rightarrow\Rightarrow \left[H^{+}\right] = 10^{-6}$

Luego para un pH de 6, la concentración de iones hidrógenos es de 10^{-6}

Ejemplo 195:

Una solución tiene una concentración de $2X10^{-8}$ iones hidrógeno, cuál será su pH.

Solución:

Con el grupo colaborativo, muestren que dicho pH = 7,698

Ejemplo 196:

La escala de Richter permite medir el nivel de los sismos, dicha función está dada por una ecuación donde la medida Richter depende de la intensidad mínima y la intensidad en un instante dado.

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

R = Nivel Ritcher
I_0 = Intensidad mínima
I = Intensidad en un instante dado.
En un sismo la intensidad fue de 500 veces la intensidad mínima, ¿cual será el nivel de Richter?

Solución:

Como I = 500 I_0 entonces: $R = Log\left(\frac{500I_0}{I_0}\right) = Log(500) = 2{,}699$

Cuando la intensidad de un sismo es 500 veces la intensidad mínima el nivel Ritcher es de 2,699

Ejemplo 197:

En un sismo la intensidad mínima es I_0, si el nivel de Ritcher es de 4,5 ¿De cuanto fue la intensidad de dicho sismo?

Solución:

Con la ecuación de R, debemos despejar la intensidad I, entonces:

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow\Rightarrow 10^{R} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow\Rightarrow I = I_0 10^{R}$$

Reemplazando los datos: $I = I_0 10^{4,5} \Rightarrow\Rightarrow I = I_0 (31.622{,}77)$

Para dicho sismo la intensidad es 31.622,77 veces su intensidad mínima.

Ejemplo 198:

El número de bacterias en un cultivo está dado por la función: $n(t) = 500e^{0.45t}$ Donde t se mide en horas.
a-) cual es la tasa relativa (TR) del crecimiento de la población de bacterias.
b-) Cual es la población inicial del cultivo
c-) Cuantas bacterias habrá en el cultivo a las 5 horas.

Solución:

a-) $TR = \frac{n(t_2)-n(t_1)}{t_2-t_1}$ Donde: t_1 = 1 Hr. y t_2 = 2 Hr.

$n(t_2) = 500e^{0.45} = 1.229{,}80$ y $n(t_1) = 500e^{0.90} = 784{,}156$

Finalmente: $TR = \frac{1.229{,}80-784{,}156}{2-1} = 445{,}64 \approx 445\ bacterias/Hr$

b-) Población inicial: $n(t=0) = 500e^{0.45(0)} = 500\ bacterias$

c-) $n(t=5) = 500e^{0.45(5)} = 500e^{2.25} = 4.743{,}87 \approx 4.744\ bacterias$

Ejemplo 199:

Una sustancia radioactiva se desintegra de tal forma que la cantidad que permanece después de t días está definida por la función: $m(t) = 13e^{-0{,}015t}$ Para m (t) en kilogramos.

a-) Hallar la masa inicial de la sustancia.
b-) Qué cantidad de masa hay a los 20 días.
c-) En qué tiempo la masa será de 5 kg.

Solución:

a-) Para la masa inicial: t = 0, entonces: $m(t=0) = 13e^{-0{,}015(0)} = 13$ Inicialmente hay 13 kilogramos.

b-) $m(t=20) = 13e^{-0{,}015(20)}$ Luego: $m = 13e^{-0{,}3} = 9{,}631$ kg.

c-) $m(t) = 13e^{-0{,}015t}$ Reemplazando: $5 = 13e^{-0{,}015t}$ Entonces: $0{,}385 = e^{-0{,}015t}$Aplicando operación inversa: $Ln(0{,}385) = Ln(e^{-0{,}015t})$ Entonces: -0,955 = -0,015t, despejando la variable: t = 63,67 días.

3. TRIGONOMÉTRICAS:

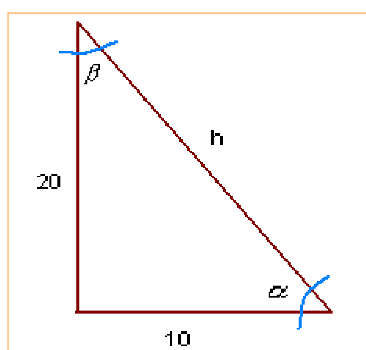
La trigonometría sirve para solucionar problemas en muchas áreas del saber. La Astronomía, la Física, la Geografía y otras se sirven de la trigonometría para resolver diversidad de problemas.

Las herramientas para trabajar problemas con trigonometría son conocer claramente el Teorema de Pitágoras, buenos principios de funciones trigonométricas, una calculadora científica para acelerar los cálculos; ojo NO para simplificarlos. Es pertinente que todos los cálculos se planteen metódicamente para comprender el problema y su solución sea la pertinente.

Ejemplo 200:

En un triángulo rectángulo el lado adyacente mide 10 cm. y el opuesto mide 20 cm. Hallar las medidas de los lados y de los ángulos.

Solución:



Una gráfica nos ayuda para la solución.

Para hallar el lado h es decir la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras. $h^2 = x^2 + y^2$

Reemplazando: $h^2 = (20)^2 + (10)^2 = 400 + 100 = 500$

$h^2 = 500 \Rightarrow\Rightarrow h = \sqrt{500} = 22{,}36\,cm.$

Para hallar el ángulo α, por medio de la función seno se puede obtener:

$$sen(\alpha) = \frac{y}{h} = \frac{20}{22,36} = 0,8945$$

Para hallar el ángulo, aplicamos función inversa: $sen^{-1}[sen(\alpha)] = sen^{-1}(0,8945) \Rightarrow\Rightarrow \alpha = 63,44^0$

Para hallar el ángulo β se puede hacer de dos formas:

-) $sen(\beta) = \frac{10}{22,36} = 0,4472$ ó $\cos(\beta) = \frac{20}{22,36} = 0,8945$

Aplicando función inversa:

$sen^{-1}[sen(\beta)] = sen^{-1}(0,4472)$ ó $\cos^{-1}[\cos(\beta)] = \cos^{-1}(0,8945)$

$\beta = sen^{-1}(0,4472) = 26,56^0$ ó $\beta = \cos^{-1}(0,8945) = 26,55^0$

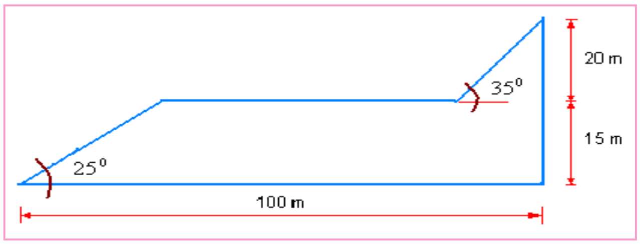
Vemos que el valor es semejante, ya que estamos midiendo en mismo ángulo.

-) Como la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180 ^{0} entonces por diferencia: $90^0 + 63,44^0 + \beta = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow \beta = 180^0 - (90^0 + 63,44^0) = 26,56^0$

Los resultados son iguales.

Ejemplo 201:

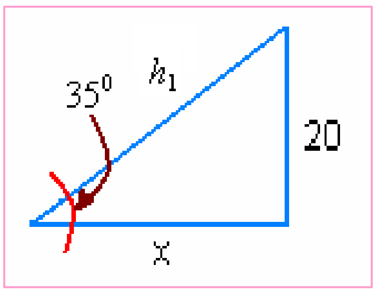
Se requiere diseñar un tobogán como lo muestra la grafica, calcular la longitud del tobogán según las especificaciones dadas.



Solución:

Dividamos el problema en 3 partes:

1.) La parte más alta.



Por la función seno:

$$sen(35^0) = \frac{20}{h_1} \Rightarrow\Rightarrow h_1 = \frac{20}{sen(35^0)} = \frac{20}{0,57357} = 34,87m$$

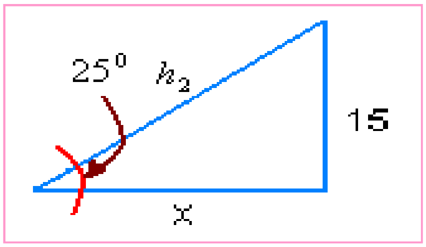
La longitud de la primera parte del tobogán es de 34,87 metros.

Ahora se debe determinar cuánto recorre en longitud horizontal, es decir cuánto vale x:

$$\cos(35^0) = \frac{x}{34,87} \Rightarrow\Rightarrow x = 34,87\cos(35^0) = 28,56m$$

Lo que se recorre en x_1 es de 28,56 metros.

2.) La parte más baja.



Por la función seno:

$$sen(25^0) = \frac{15}{h_2} \Rightarrow\Rightarrow h_2 = \frac{15}{sen(25^0)} = \frac{15}{0{,}4226} = 35{,}49\ m$$

La longitud de la tercera parte del tobogán es de 35,49 metros.

El recorrido en determinar cuánto recorre en longitud horizontal, es decir cuánto vale x:

$$\cos(25^0) = \frac{x}{35{,}49} \Rightarrow\Rightarrow x = 35{,}49\cos(25^0) = 32{,}165\ m$$

Lo que se recorre en x_2 es de 32,165 metros.

3.) El recorrido total del tobogán será las dos inclinaciones más la parte horizontal, para hallar la parte que recorre el tobogán horizontalmente (x_h), debemos restan los recorridos horizontales de la parte alta y baja al toral de la longitud horizontal:
x_h = 100 – (28,56 + 32,165) = 39,275 metros

La longitud total del tobogán será: 34,87 + 35,49 + 39,275 = 109,635 metros

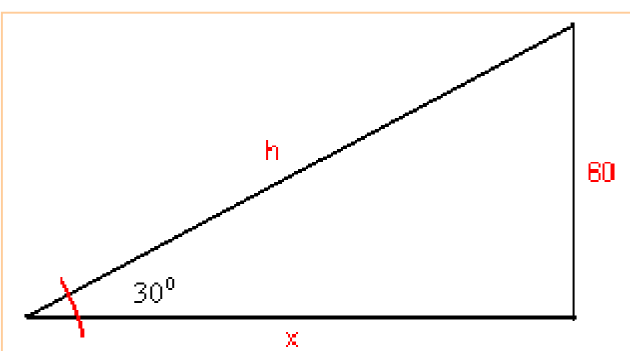
Ejemplo 202:

Un niño eleva una cometa que está a 60 metros de altura y éste no puede soltar más cuerda.

El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30^0 ¿Cuánta piola tenía el niño?

Solución:

Con un gráfico nos orientamos:



La pregunta es hallar h en la gráfica.

La función seno es adecuada para resolver el problema.

$$sen(\alpha) = \frac{y}{h}$$

Reemplazando:

$$sen(30^0) = \frac{60}{h} \Rightarrow\Rightarrow h = \frac{60}{sen(30^0)} = \frac{60}{1/2} = 120$$

El niño solo tenía 120 metros de piola para elevar la cometa.

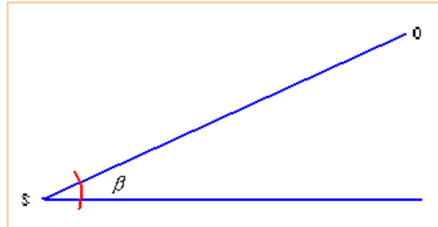
ANGULO DE ELEVACIÓN:

Cuando un observador ubicado en un punto dado, observa un objeto que esta a mayor altura que la visual de éste, el ángulo formado se le conoce como ángulo de elevación.

S = Observador

O = Objeto a observar

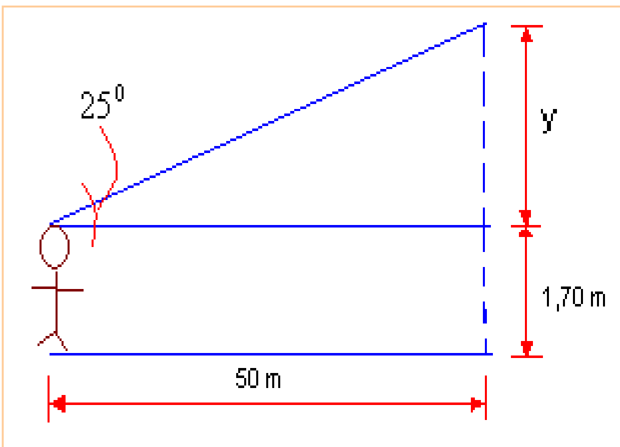
β = Angulo de elevación.



Ejemplo 203:

Un observador que tiene 1,70 metros de altura, está a 50 metros de una iglesia, el ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25^0 ¿Cuál será la altura de la iglesia?

Solución:



La incógnita es y. Primero calculamos la hipotenusa, por medio de la función coseno:

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h}$$

Reemplazando:

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h} \Rightarrow\Rightarrow \cos(25^0) = \frac{50}{h}$$

Despejamos h, entonces:

$$h = \frac{50}{\cos(25^0)} = \frac{50}{0{,}9063} = 55{,}17$$

Como ya conocemos h, ahora sí podemos hallar y:

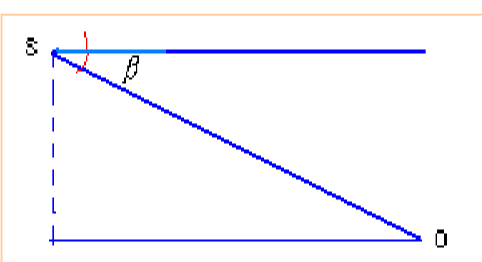
$$sen(\beta) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow y = hsen(\beta)$$

Reemplazando: $y = hsen(\beta) = 55{,}17 sen(25^0) = 55{,}17 x (0{,}4226) = 23{,}315$

La altura de la iglesia es de 23,315 metros + 1,70 metros = 25,015 metros

ANGULO DE DEPRESIÓN:

Es el formado por la visual y la horizontal, cuando el observador esta a mayor nivel que el objeto observado.



S = Observador

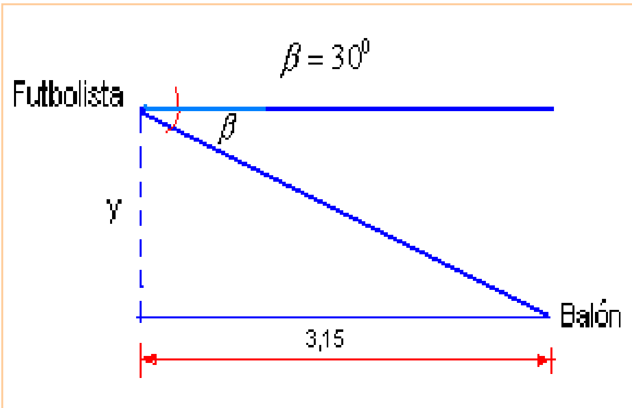
O = Objeto observado

β = Angulo de depresión

Ejemplo 204:

Un futbolista esta a 3,15 metros del balón, el ángulo de depresión es de 30^0 ¿Cuál será la estatura del futbolista?

Solución:



y = Altura del futbolista.

Primero se debe hallar la hipotenusa, es decir la distancia entre el futbolista y el balón, lo que se puede hacer por función coseno.

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h}$$

Reemplazando:

$$\cos(30^0) = \frac{3,15}{h} \Rightarrow\Rightarrow h = \frac{3,15}{\cos(30^0)} = 3,637$$

Para hallar la altura del futbolista, usando la función seno del ángulo, despejamos y:

$$sen(\beta) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow y = hsen(\beta) = 3,637sen(30^0) = 1,8185$$

El futbolista tiene una estatura de 1, 8185 metros.

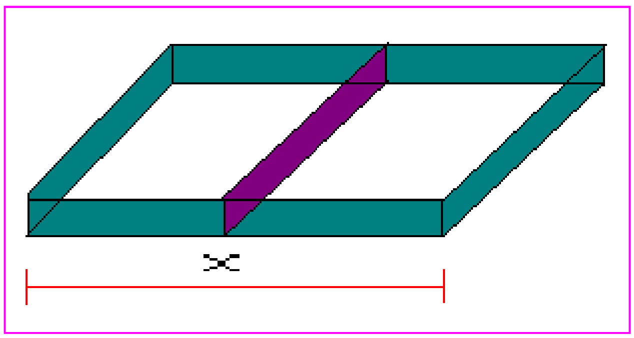
EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas utilizando todos los principios aprendidos en esta temática tan interesante. Si requiere de dibujos por favor utilizarlos.

1. Dado un cubo de lado *l*, expresar el volumen de cubo como función del área de la base.

Rta: $V = \sqrt{A^3}$

2. Para la gráfica dada, el perímetro P corresponde al total de la longitud, los dos triángulos son iguales. El área total es de 4.000 m ^{2}. Expresar el perímetro en función de la longitud *x*.



Rta: $P(x) = 2x + \dfrac{12.000}{x}$

3. El crecimiento de un bebe de más de 84 días de gestación esta dado por la expresión: $L(t) = 1{,}52t - 6{,}8$ donde L es la longitud en centímetros, t el tiempo en semanas. ¿Cuál será la edad de gestación de un bebe cuya longitud es de 35 cm?

Rta: t = 27, 5 semanas

4. Un jugador de fútbol tiene un record de goles dado por 8 goles en 17 partidos. El jugador fue alineado en 180 juegos manteniendo el record de goles.
a-) Expresar el número de goles como función del número de alineamientos donde participo el jugador.
b-) Cuantos goles anoto en la temporada de los 180 partidos.

Rta: a-) $G(l) = \dfrac{8}{17}l$ b-) 85 goles

5. La tasa de interés compuesto esta dado por la expresión: $A = ce^{it}$
Donde: A = cantidad acumulada a los t años. C = capital inicial, i = interés anual, expresado en tanto por uno y t = años de C invertidos.

Resolver las siguientes preguntas:
a-) Si depositamos $1.00 al 33 / 4 de interés anual, ¿Cuál será el saldo a los 5 años de hacer el ahorro?

Rta: A = $1.510,59

b-) En cierto tiempo t, la cantidad acumulada es de $10.500 el capital ahorrado fue de $8.500 y el interés fue del 9,2% ¿Qué tiempo transcurrió para obtener la cantidad acumulada?

Rta: $t \approx 2{,}3$ años

c-) Después de 4 años de depósito, un capital presenta una cantidad acumulada de \$26.300 al 7,8% anual. ¿De cuánto fue el depósito inicial?

Rta: c = \$19.252

6. Un salvavidas está en su torre de observación a 20 metros del altura. Una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35^{0} ¿A qué distancia de la base de la torre esta la persona que solicita ayuda?

Rta: x = 28,56 metros

7. Un poste de 35 metros de altura debe ser apoyado por un alambre que lo fije a tierra. Si el alambre forma un ángulo de 52^{0} con la horizontal. ¿Cuál será la longitud del alambre?

Rta: h = 44,42 metros

8. Una persona de 1,62 metros, proyecta su sombra de 1,15 metros a lo largo del suelo. ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol sobre la sombra?

Rta: $\alpha = 54{,}63^{0}$

9. Un cohete se dispara y éste sube a un ángulo constante de 70^{0} hasta llegar a una distancia de 12.000 metros. ¿Qué altitud alcanzo el cohete?

Rta: y = 11.276,31 metros

CAPÍTULO CINCO: TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

INTRODUCCIÓN

En el contexto que se va a trabajar, cuando se hable de *Trigonometría* se hace referencia a el análisis del triangulo.

Analizadas las funciones trigonométricas, es importante profundizar éstas temáticas en la medida que son necesarias para afianzar los conocimientos en este campo, tales como las identidades y las ecuaciones trigonométricas, cuyos conocimientos fortalecerán las competencias cognitivas muy importantes en el campo de las Matemáticas, insumos para cursos posteriores y una herramienta para la vida profesional de Ingenieros, Administradores, Agrónomos, Zootecnistas y otros.

En primera instancia se estudiarán las identidades fundamentales, obtenidas a partir de los principios de la circunferencia unidad, haciendo las demostraciones básicas, dejando las demás como trabajo de investigación para que los estudiantes sean partícipes de su formación, esto es muy interesante. A partir de éstas, se desarrollarán identidades diversas. Posteriormente se trabajarán sobre unas identidades muy específicas llamadas ecuaciones trigonométricas, las cuales son muy importantes en el ámbito de la trigonometría y del mundo de las Matemáticas.

Una vez obtenida una buena profundización de las temáticas, el siguiente paso será la transferencia, la cual se presenta por medio de diversas aplicaciones en diferentes campos, a través de ejemplos modelos, los cuales dejan ver los alcances de la trigonometría. Es pertinente analizar cada ejemplo, su planteamiento y su solución, con el fin de poder llevar la misma estructura a diferentes contextos.

Lección Treinta: Identidades Trigonométricas

$\boxed{sen^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

En trigonometría existen unas ecuaciones muy particulares a las cuales se le llama *identidades trigonométricas*, dichas ecuaciones tiene la particularidad que se satisfacen para cualquier ángulo. Dentro de este contexto se analizarán varias clases de identidades, las básicas, las de suma y diferencia, las de ángulo doble y las de ángulo mitad.

IDENTIDADES BÁSICAS:

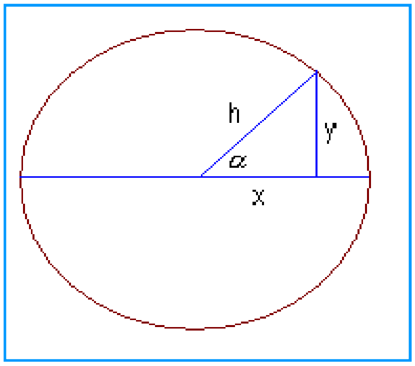
Dentro de las identidades básicas se presentan 6 categóricas, las cuales analizaremos a continuación:

1. **Identidad Fundamental:** Partiendo del teorema de Pitágoras, la relación de los lados del triángulo y el círculo trigonométrico, se puede obtener dicha identidad.

$$\boxed{sen^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

Demostración:

A partir del círculo trigonométrico unitario.



h = 1. Se está trabajando con la circunferencia unitaria. (R = 1)

Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = h^2$

Por definición de relación trigonométrica:

$$sen(\alpha) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow sen(\alpha) = y$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{h} \Rightarrow\Rightarrow \cos(\alpha) = x$$

Si reemplazamos a *x* e *y* en la ecuación de Pitágoras tenemos:

$x^2 + y^2 = h^2 \Rightarrow\Rightarrow sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1^2$

Finalmente: $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

2. **Identidades de Cociente:** Estas se obtienen por la definición de las relaciones trigonométricas

a-) $$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Demostración:

Se sabe que: $sen\,(\alpha) = \frac{y}{h}$ y $\cos(\alpha) = \frac{x}{h}$ Si dividimos sen (α) en cos(α) se obtiene: $\frac{y/h}{x/h} = \frac{y}{x}$

Por definición: $\frac{y}{x} = \tan(\alpha)$ Así: $\frac{sen\,(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

b-) $\boxed{\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{sen\,(\alpha)}}$

Demostración:

Con los mismos argumentos utilizados para la tangente, solo que en este caso el cociente es coseno sobre seno.

$\frac{x/h}{y/h} = \frac{x}{y}$ Por definición: $\frac{x}{y} = \cot(\alpha)$ Así $\frac{\cos(\alpha)}{sen\,(\alpha)} = \cot(\alpha)$

3. **Identidades Recíprocas:** Se les llama de esta manera debido a que a partir de la definición, al aplicar el recíproco, se obtiene nuevos cocientes.

a-) $\boxed{sen\,(\alpha) = \frac{1}{\csc(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}}$

Demostración:

Como $sen(\alpha) = \frac{y}{h}$ Entonces aplicamos el reciproco: $\frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{1}{y/h} \Rightarrow\Rightarrow \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{h}{y}$

Se sabe que $\csc(\alpha) = \frac{h}{y}$ Así las funciones seno y cosecante son recíprocas.

b-)

$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{\sec(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para realizar con el grupo colaborativo.

c-) $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para trabajar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

4. **Identidades Pitagóricas:** a partir de la identidad fundamental y las identidades de cociente, se obtienen otras identidades llamadas pitagóricas. Aunque varios autores llaman a la identidad fundamental también pitagórica.

a-) $$\boxed{\tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)}$$

Demostración:

A partir de la identidad fundamental $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, dividimos toda la expresión por $\cos^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\Rightarrow\Rightarrow \tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)$$

b-) $$\boxed{\cot^2(\alpha)+1=\csc^2(\alpha)}$$

Demostración:

De la fundamental, dividimos por $sen^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{1}{sen^2(\alpha)}\Rightarrow\Rightarrow 1+\cot^2(\alpha)=\csc^2(\alpha)$$

5. **Identidades Pares - Impares:** Cuando se definió la simetría de las funciones trigonométricas, se hizo referencia a las funciones pares e impares, de este hecho se obtiene las funciones pares e impares.

Pares: $\boxed{\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)}$ y $\boxed{\sec(-\alpha)=\sec(\alpha)}$

Impares $\boxed{sen(-\alpha)=-sen(\alpha)}$ $\boxed{\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)}$

$\boxed{\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)}$ $\boxed{\csc(-\alpha)=-\csc(\alpha)}$

6. **Identidades de Cofunción:** Cuando a π/2 se le resta un ángulo cualquiera, se obtiene la cofunción respectiva.

a-) $\boxed{sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=sen(\alpha)}$

b-) $\boxed{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot(\alpha)}$ $\boxed{\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan(\alpha)}$

7. **Identidades Inversas:** Cuando a π se le suma o resta un ángulo cualquiera, se obtiene la función pero con signo contrario, veamos los casos siguientes.

a-) $\boxed{sen(\pi-\alpha)=sen(\alpha)}$ $\boxed{sen(\pi+\alpha)=-sen(\alpha)}$

b-) $\boxed{\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)}$

c-) $\boxed{\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)}$ $\boxed{\tan(\pi+\alpha)=Investigar}$

Las demostraciones se dejan como ejercicio de investigación.

IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA:

En muchas ocasiones, un ángulo dado se puede expresar como suma o diferencia de ángulo notables, por ejemplo 15^0 se puede expresar como $(45^0 - 30^0)$, 75^0 como $(30^0 + 45^0)$ y así con otros. Para este tipo de situaciones es donde se utilizan las identidades de suma y diferencia.

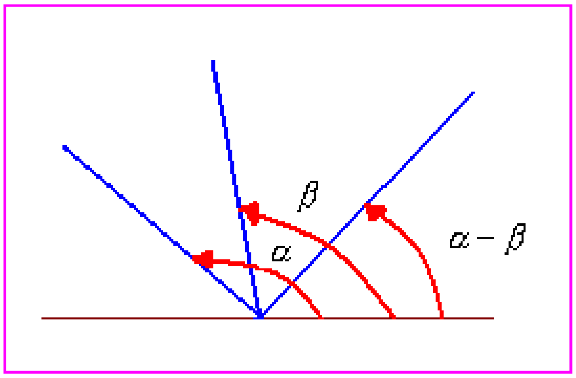
a-) $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)}$

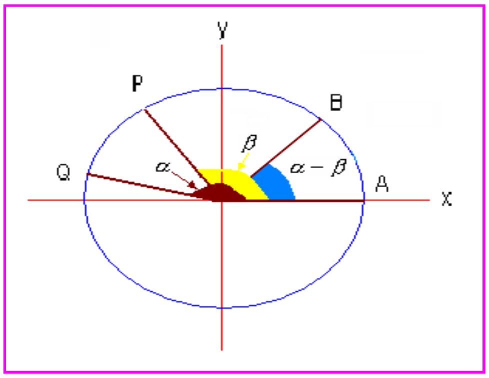
Demostración:

Vamos a utilizar como herramienta la geometría del círculo trigonométrico unitario.

Identifiquemos las coordenadas de los puntos dados en la circunferencia unidad.

A = (x_0, y_0) = (1, 0)
B = (x_1, y_1) = (cos (α – β), sen (α – β))
P = (x_2, y_2) = (cos (β), sen (β))
Q = (x_3, y_3) = (cos (α), sen (α))





La distancia de AB es igual a la distancia PQ, entonces: d(AB) = d(PQ), así:
(B – A) = (Q – P)

Reemplazando, a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{[x_1 - x_0]^2 + [y_1 - y_0]^2} = \sqrt{[x_3 - x_2]^2 + [y_3 - y_2]^2}$$

$$\sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [sen(\alpha - \beta) - 0]^2} = \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [sen(\alpha) - sen(\beta)]^2}$$

Elevando al cuadrado para eliminar raíz:

$$[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [sen(\alpha - \beta) - 0]^2 = [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [sen(\alpha) - sen(\beta)]^2$$

Desarrollando los productos notables:

$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + sen^2(\alpha - \beta)$ Es igual a:

$$\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + sen^2(\alpha) - 2sen(\alpha)sen(\beta) + sen^2(\beta)$$

Agrupando términos:

$$[\cos^2(\alpha - \beta) + sen^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = [\cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)] + [\cos^2(\beta) + sen^2(\beta)]$$
$$-2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta)$$

Por la identidad fundamental:

$$1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = 1 + 1 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta)$$

Operando: $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2sen(\alpha)sen(\beta)$

Simplificando: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$

Así queda la demostración de la diferencia de ángulos para coseno.

b-) $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)}$

Demostración:

A partir de la definición:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + sen(\alpha)sen(-\beta)$$

Se sabe que: $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ y $sen(-\beta) = -sen(\beta)$

Entonces: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$

c-) $$\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración:

A partir de la identidad de diferencia de ángulos para coseno, las identidades de cofunción y algunas transformaciones sencillas.

Inicialmente: $w=(\alpha+\beta)$

Ahora por identidad de cofunción: $\cos(\pi/2-w)=sen(w)$

Por otro lado: $\cos(\pi/2-w)=\cos(\pi/2-(\alpha+\beta))=\cos(\pi/2-\alpha-\beta)=\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]$

La última expresión la desarrollamos como una diferencia de ángulos:
$\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=\cos(\pi/2-\alpha)\cos(\beta)+sen(\pi/2-\alpha)sen(\beta)$

Pero $\cos(\pi/2-\alpha)=sen(\alpha)$ y $sen(\pi/2-\alpha)=\cos(\alpha)$ Por identidades de cofunción. Sustituyendo en la expresión anterior: $\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$

Como $\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=\cos\left[\pi/2-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\pi/2-w\right]=sen(w)=sen(\alpha+\beta)$

Finalmente: $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$

Así queda demostrada la identidad de suma de ángulos para seno.

d-) $$\boxed{sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración:

Por favor hacer la demostración con el pequeño grupo colaborativo y compartir con el Tutor. ¡Una idea¡ como se hizo para el caso b.

e-) $$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

Demostración:

Por identidades de cociente:
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$$

Dividimos la expresión por $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, esto debido a que debemos llegar a tangente y se sabe que tangente es cociente entre seno y coseno. Entonces:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$$

Utilizando identidades de cociente:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Así queda demostrada la suma de ángulos para tangente.

f-) $$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

Demostración:

Con los mismos principios del caso anterior, hacer la demostración con el pequeño grupo colaborativo. Posteriormente compartir con el Tutor.

Ejemplo 205:

Determinar el valor de $sen(\pi/12)$

Solución:

El ángulo se puede descomponer en: $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$

Entonces: $sen(\pi/12)=sen(\pi/4-\pi/6)$

Aplicando la identidad:

$$sen(\pi/4-\pi/6)=sen(\pi/4)\cos(\pi/6)-\cos(\pi/4)sen(\pi/6)=\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{1}{2}$$

Operando:

$$sen(\pi/4-\pi/6)=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\Rightarrow sen(\pi/12)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 206:

Calcular $\cos(75^0)$

Solución:

El ángulo propuesto se puede descomponer en dos ángulos notables al saber:

$\cos(75^0) = \cos(30^0 + 45^0)$

Por la identidad de suma de ángulos para coseno:

$\cos(30^0 + 45^0) = \cos(30^0)\cos(45^0) - sen(30^0)sen(45^0) = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$

Operando:

$\cos(30^0 + 45^0) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ Por consiguiente: $\cos(75^0) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Ejemplo 207:

Demostrar que $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$

Solución:

Por la identidad de suma para tangente:

$$\tan(\pi + \theta) = \frac{\tan(\pi) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\pi)\tan(\theta)}$$

Pero sabemos que $\tan(\pi) = 0$ Reemplazamos:

$$\tan(\pi + \theta) = \frac{0 + \tan(\theta)}{1 - 0 * \tan(\theta)} = \frac{\tan(\theta)}{1 - 0} = \tan(\theta)$$

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE:

Cuando en la suma de ángulos, los dos ángulos son iguales, es decir: α = β, se obtiene los llamados ángulos dobles. Estos son una herramienta muy usada en el movimiento parabólico.

a-) $\boxed{sen(2\beta) = 2sen(\beta)\cos(\beta)}$

Demostración:

Sabemos qué $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)sen(\beta)$, pero como α = β

Entonces: $sen(\alpha + \alpha) = sen(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)sen(\alpha) = sen(\alpha)\cos(\alpha) + sen(\alpha)\cos(\alpha)$

Por consiguiente: $sen(\alpha + \alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$

Finalmente: $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$

b-) $\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)}$

Demostración:

Siguiendo la misma metodología del caso anterior.

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - sen(\alpha)sen(\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

Así $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$

c-) $$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}$$

Demostración:

Se deja para hacerlo en el grupo colaborativo y compartirlo con el Tutor.
Una idea, recordemos que tan (α)= sen (α)/cos (α)

IDENTIDADES DE ÁNGULO MITAD:

En ocasiones se presentan casos donde se requiere trabajar con ángulos mitad, luego es pertinente analizar identidades de éste tipo.

a-) $$\boxed{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración:

A partir de las identidades de ángulo doble podemos hacer estas demostraciones.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

Por la identidad fundamental: $\cos^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha)$ Reemplazando:

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha)$$

Despejamos sen^2 (α) se obtiene: $sen^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

Hacemos un reemplazo de α por α / 2, entonces: $sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(2\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$

Despejamos el seno, por consiguiente: $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

b-) $$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración:

Por favor hacerlo individualmente y luego compartirlo con los compañeros del grupo colaborativo, las dudas con el Tutor.

c-) $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

Demostración:

Igual que en el caso anterior.

IDENTIDADES DE PRODUCTO - SUMA:

A continuación vamos a mostrar unas identidades que en ocasiones son requeridas, las demostraciones están en libros de Precálculo y de Matemáticas, sería pertinente que se investigaran como refuezo a estas identidades.

a-) $$sen(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]$$

b-) $$sen(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

c-) $$\cos(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)\right]$$

d-) $$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

Demostración:

Se demostrarán los casos a, b y d, para que con estos referentes, ustedes estimados estudiantes, demuestren los demás.

1. $sen(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]$

Por identidad de suma: $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)sen(\beta)$

Despejando: $sen(\alpha)\cos(\beta) = sen(\alpha+\beta) - \cos(\alpha)sen(\beta)$

Adicionamos a los dos lados de la expresión: sen(α)cos(β) + cos(α)sen(β), luego:

$sen(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta) = sen(\alpha+\beta)-\cos(\alpha)sen(\beta)+sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$

Operando en la primera parte de la ecuación sen(α)cos(β) + sen(α)cos(β) = 2sen(α)cos(β)

En la segunda parte de la ecuación: $sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cos(\beta) = sen(\alpha-\beta)$ Entonces:

$2sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta) = sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$

Simplificando: $2sen(\alpha)\cos(\beta) = sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)$

Por consiguiente: $sen(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$

2. $sen(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

Por identidad de suma: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$

Despejando: $sen(\alpha)sen(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

Adicionamos a los dos lados de la expresión: sen(α)sen(β) + cos(α)cos(β), luego:

$sen(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)$

Operando en la primera parte de la ecuación sen(α)sen(β) + sen(α)sen(β) = 2sen(α)sen(β)

En la segunda parte de la ecuación: $\cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) = \cos(\alpha-\beta)$ Entonces:

$2sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)$

Simplificando: $2sen(\alpha)sen(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

Finalmente: $sen(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

3. $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

Por identidad de suma: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$

Despejando: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$

Adicionamos a los dos lados de la expresión: sen(α)sen(β) + sen(α)sen(β), luego:

$\cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) = \cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\alpha)$

Operando en la primera parte de la ecuación y reemplazando por identidad en la segunda parte:

$2\cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Simplificando: $2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Finalmente: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

IDENTIDADES DE SUMA - PRODUCTO:

También en ocasiones son requeridas las identidades de suma – producto. Las demostraciones son pertinentes que se investigaran como refuerzo a esta temática.

a-) $\boxed{sen(\alpha) + sen(\beta) = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

b-) $\boxed{sen(\alpha) - sen(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

c-) $\boxed{\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

d-) $\boxed{\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

Lección treinta y uno: Desarrollo de Identidades Trigonométricas

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{sen(\theta)}{\theta}$$

Al inicio de este capítulo se hizo el análisis de las identidades básicas, identidades de suma y diferencia, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, identidades de suma-producto e identidades de producto – suma. Con estos insumos y los principios matemáticos conocidos, se tienen los argumentos para demostrar identidades trigonométricas.

Una identidad trigonométrica es una ecuación que se cumple para cualquier ángulo, entonces demostrar una identidad es precisamente demostrar la igualdad. El proceso se puede desarrollar de tres maneras.

Asumiendo que la generalización de una identidad es de la forma ***a*** = ***b***

1. A partir del primer término ***a*** llegar a el segundo ***b*** por medio de procedimientos matemáticos adecuados.
2. A partir del segundo término ***b*** llegar al primero ***a****,* también utilizando métodos matemáticos adecuados.
3. Haciendo transformaciones simultáneamente a los dos términos de la igualdad para llegar a una equivalencia. Se parte de *a* = *b,* se hacer transformaciones adecuadas hasta llegar a una equivalencia de la forma *p* = *p*

No existe una regla o norma para saber cual método elegir, pero por experiencia y facilidad es aconsejable utilizar la técnica 1 o la 2, partiendo del término más complejo para llegar al más sencillo, ya que es más fácil simplificar que amplificar.

Ejemplo 208:

Expresar como solo función de cos(x) la siguiente fracción: $\frac{sen^3(x)}{\tan^2(x)}$

Solución:

Lo que se debe hacer es utilizando las identidades básicas y haciendo las transformaciones pertinentes llegar a obtener solo cos(x), veamos:

$$\frac{sen^3(x)}{\tan^2(x)}=\frac{sen^2(x)sen(x)}{sen^2(x)/\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)\left[sen^2(x)sen(x)\right]}{sen^2(x)}=\cos^2(x)sen(x)$$

Finalmente: $\cos^2(x)sen(x)=\cos^2(x)\sqrt{1-\cos^2(x)}$

Ejemplo 209:

Reducir la siguiente expresión en términos de la función seno. $\frac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)}$

Solución:

Al igual que el ejemplo 216, haciendo las transformaciones adecuadas a la expresión inicial, con las identidades básicas y los principios aritméticos sobre fracciones, llega a una expresión que solo tenga sen(x), veamos:

$$\frac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)}=\frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+(\frac{1}{\cos(x)})(\frac{sen(x)}{\cos(x)})}{1+\frac{1}{\cos(x)}}=\frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+\frac{sen(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{(\cos(x)+1)}{\cos(x)}}$$

Sumando las fracciones del numerador y dejando una fracción en numerador y denominador, para aplicar producto de extremos y medios. Simplificando cos(x) y factorizando lo obtenido, resulta:

$$\frac{\frac{\cos^2(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)}{\cos(x)\cos^2(x)}}{\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)}}=\frac{\cos(x)\left[\cos^2(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x)\cos^2(x))}=\frac{\cos(x)\left[\cos(x)sen(x)+sen(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos^2(x))}$$

Volviendo a simplificar y reorganizando:

$$\frac{\left[\cos(x)sen(x)+sen(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x))}=\frac{sen(x)\left[\cos(x)+1\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x))}=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{sen(x)}{\sqrt{1-sen^2(x)}}$$

La expresión inicial quedo solo como función sen(x).

Ejemplo 210:

Demostrar que: $\frac{\tan(x)}{\sec(x)}=sen(x)$

Solución:

Por la expresión dada, es más pertinente partir del primer término y llegar al segundo.

$$\frac{\tan(x)}{\sec(x)}=\frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}}{\frac{1}{\cos(x)}}=\frac{sen(x)\cos(x)}{\cos(x)}=sen(x)$$ Así queda demostrada dicha identidad.

Ejemplo 211:

Demostrar la siguiente identidad. $\cos(x)\left[\sec(x)-\cos(x)\right]=sen^2(x)$

Solución:

Según la identidad planteada, es más pertinente partir de la primera expresión para llegar a la segunda, es decir, el método 1.

$$\cos(x)\left[\sec(x)-\cos(x)\right]=\cos(x)\left[\frac{1}{\cos(x)}-\cos(x)\right]=\cos(x)\left[\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}\right]=1-\cos^2(x)$$

Por la identidad fundamental: $1-\cos^2(x)=sen^2(x)$

Ejemplo 212:

Demostrar la identidad $\frac{\cos(x)}{1-sen(x)}=\frac{1+sen(x)}{\cos(x)}$

Solución:

Se observa que las dos partes son muy parecidas en la cantidad de términos que presenta, luego se puede partir de cualquiera de ellas. Para nuestro caso, partimos de la primera para llegar a la segunda parte.

Aplicamos la conjugada al denominador, operamos y aplicamos al identidad fundamental..

$$\frac{\cos(x)}{1-sen(x)}=\frac{\cos(x)(1+sen(x))}{(1-sen(x))(1+sen(x))}=\frac{\cos(x)(1+sen(x))}{1-sen^2(x)}=\frac{\cos(x)(1+sen(x))}{\cos^2(x)}$$

Simplificamos: $\frac{\cos(x)(1+sen(x))}{\cos^2(x)}=\frac{1+sen(x)}{\cos(x)}$

Esta última expresión es la segunda parte de la identidad propuesta.

Ejemplo 213:

Demostrar la identidad:

$$[\tan(x)-\sec(x)]^2=\frac{1-sen(x)}{1+sen(x)}$$

Solución:

Para demostrar esta identidad tomemos la primera opción, partir de la primera expresión para llegar a la segunda. Desarrollamos el producto notable y aplicando identidades:

$$\tan^2(x)-2\tan(x)\sec(x)+\sec^2(x)=\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}-2\frac{sen(x)}{\cos(x)}*\frac{1}{\cos(x)}+\frac{1}{\sec^2(x)}$$

Expresando sobre un solo denominador y simplificando:

$$\frac{sen^2(x)-2sen(x)+1}{\cos^2(x)}=\frac{[sen(x)-1][sen(x)-1]}{1-sen^2(x)}=\frac{[sen(x)-1][sen(x)-1]}{[1-sen(x)][1+sen(x)]}=\frac{[1-sen(x)][1-sen(x)]}{[1-sen(x)][1+sen(x)]}$$

Finalmente: $\frac{[1-sen(x)][1-sen(x)]}{[1-sen(x)][1+sen(x)]}=\frac{[1-sen(x)]}{[1+sen(x)]}$

Ejemplo 214:

Demostrar la identidad: $\frac{\cos^3(x)-sen^3(x)}{\cos(x)-sen(x)}=1+\sqrt{sen^2(x)-sen^4(x)}$

Solución:

Es pertinente tomar el primero para llegar al segundo. Inicialmente desarrollamos la diferencia de cubos.

$$\frac{\cos^3(x)-sen^3(x)}{\cos(x)-sen(x)}=\frac{(\cos(x)-sen(x))(\cos^2(x)+\cos(x)sen(x)+sen^2(x))}{\cos(x)-sen(x)}$$

Simplificando, reorganizando términos y aplicamos la identidad fundamental.

$$(\cos^2(x)+sen^2(x)+\cos(x)sen(x))=1+\cos(x)sen(x)$$

Convertimos coseno como seno, por la identidad fundamental:

$$1+\cos(x)sen(x)=1+sen(x)\sqrt{1-sen^2(x)}=1+\sqrt{sen^2(x)(1-sen^2(x))}$$

Finalmente:

$$1+\sqrt{sen^2(x)(1-sen^2(x))}=1+\sqrt{sen^2(x)-sen^4(x)}$$

Así queda demostrada la identidad.

EJERCICIOS

Reducir a la función trigonométrica propuesta los siguientes ejercicios.

1. $\dfrac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)}$ En función solo de sen(x)

2. $\dfrac{\csc^2(x)-1}{\cot^2(x)}$ En función solo de cos(x)

3. $\dfrac{\tan(A)+\cot(A)}{\csc(A)}$ En función solo de sec(A)

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

4. $\dfrac{sen(\pi/2-x)}{1-sen(x)}-\sec(x)=\tan(x)$

5. $[sen(\theta)+\cos(\theta)]^2+[sen(\theta)-\cos(\theta)]^2=2$

6. $sen(\beta+\pi)=-sen(\beta)$

7. $\tan(x+\pi/4)=\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$

8. $\dfrac{sen^4(x)-\cos^4(x)}{1-2\cos^2(x)}=1$

Lección Treinta y dos: Ecuaciones Trigonométricas

$Sen^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

Anteriormente se decía que las identidades trigonométricas son igualdades que se cumple para cualquier ángulo. Existen ciertas identidades que se cumplen para ángulos específicos, a dichas identidades se les llama ecuaciones trigonométricas.

> DEFINICIÓN:
> Las ecuaciones trigonométricas, son identidades que satisfacen ángulos específicos, cuya solución se expresa en medidas de ángulos, puede ser en grados o radianes.

La resolución de ecuaciones trigonométricas requiere de un buen manejo de las funciones trigonométricas inversas; además, de los principios de álgebra y trigonometría.

Para que la ecuación sea más fácil de desarrollar, es pertinente reducir toda la expresión a una sola función, generalmente seno o coseno, de tal manera que se pueda obtener el ángulo o los ángulos solución. Es importante aclarar que si no se dice otra cosa, la solución para nuestro caso se dará solo para la circunferencia unidad: 0 ≤ x ≤ 2π. Algunos autores acostumbrar a dar al solución general, recordemos que las funciones trigonométricas son periódicas, ya que se repiten cada *p* intervalo.

Ejemplo 215:

Resolver: $sen(x) = \frac{1}{2}$

Solución:

El proceso en general consiste en despejar el ángulo. Para el caso que nos proponen, aplicando la función inversa del seno queda resuelto el problema.

$$sen(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(1/2) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(1/2)$$

El siguiente paso es identificar en donde el seno vale ½, para los cuadrantes positivos, ya que el valor es positivo. Se sabe que el seno vale ½ en 30^0 para el primer cuadrante y 150^0 para el segundo cuadrante. Recordemos que el seno es positivo en I y II cuadrantes.

Solución: x = 30^0 y 150^0

Ejemplo 216:

Resolver: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Solución:

Como la expresión está en función solo de coseno, se puede despejar, aplicando la inversa de coseno. $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow \cos^{-1}(\cos(x)) = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) \Rightarrow\Rightarrow x = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

Debemos identificar en donde el coseno vale -1/2. El coseno es negativo en los cuadrantes II y III, luego en dichos cuadrantes debe estar la solución. Recordemos que cos (120^0) = -1/2 y cos (240^0) = -1/2. Por consiguiente: x = 120^0 y 240^0 (2π/3 y 4π/3)

Ejemplo 217:

Resolver la siguiente ecuación: $sen(x) - \cos(x) = 0$

Solución:

Expresemos la ecuación en función solo de coseno:

$sen(x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \cos(x) \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$

Elevando al cuadrado toda la ecuación y operando términos semejantes:

$sen^2(x) = 1 - sen^2(x) \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) + sen^2(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow 2sen^2(x) = 1$

Despejamos sen(x): $2sen^2(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vemos que tenemos valores positivos y negativos, luego habrá solución en los cuatro cuadrantes.

$sen(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

Se sabe que el seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en 45^0, luego se debe proyectar a los demás cuadrantes.

Solución: x = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0 (π/4, 3 π/4, 5 π/4, 7 π/4)

Ejemplo 218:

Hallar la solución de la ecuación: $\tan^5(x) - 9\tan(x) = 0$

Solución:

Inicialmente se factoriza: $\tan(x)\left[\tan^4(x) - 9\right] = 0$

Por la ley del producto nulo: $\tan(x) = 0$ o $\left[\tan^4(x) - 9\right] = 0$

Para el caso $\tan(x) = 0$: $\tan^{-1}(\tan(x)) = \tan^{-1}(0) \Rightarrow\Rightarrow x = \tan^{-1}(0)$

En la circunferencia unidad la tangente vale 0 en: 0, π, 2 π.

Para el caso $\left[\tan^4(x) - 9\right] = 0 \Rightarrow\Rightarrow \tan^4(x) = 9 \Rightarrow\Rightarrow \tan^2(x) = \pm 3$

$\tan^2(x) = \pm 3 \Rightarrow\Rightarrow \tan(x) = \pm\sqrt{3}$

La tangente vale $\sqrt{3}$ en π / 3, pero como presenta signo + y -, habrá 4 ángulos de solución.

Para $+\sqrt{3}$: x = π / 3, 7π / 6

Para $-\sqrt{3}$: x = 2π / 3, 5π / 3

Solución: x = 0, π / 3, π, 7π / 6, 2π / 3, 5π / 3, 2 π

Ejemplo 219:

Resolver la ecuación: $\sec(x) - \tan(x) = \cos(x)$

Solución:

Primero debemos hacer las transformaciones necesarias para expresar la ecuación como una sola función, para este caso escogemos sen(x).

$$\sec(x) - \tan(x) = \cos(x) \Rightarrow\Rightarrow \frac{1}{\cos(x)} - \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \cos(x) \Rightarrow\Rightarrow \frac{1 - sen(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

Operando la última fracción y aplicando identidad fundamental.

$$1 - sen(x) = \cos^2(x) \Rightarrow\Rightarrow 1 - sen(x) = 1 - sen^2(x) \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) - sen(x) = 0$$

Se factoriza la última expresión: $sen(x)[sen(x) - 1] = 0$

Por la regla del producto nulo:

-) $sen(x) = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(0) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(0)$ Solución: 0, π y 2π

-) $[sen(x) - 1] = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(1) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(1)$

El seno vale 1 en: π / 2. Esta solución se rechaza ¿POR QUÉ?

La solución final: 0, π y 2π

Ejemplo 220:

Resolver la ecuación: $\cos^2(2x) - sen^2(2x) = 0$

Solución:

Como se ha dicho se debe expresar como una sola función, veamos:

$$\cos^2(2x) = sen^2(2x) \Rightarrow\Rightarrow \frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{sen^2(2x)}{\cos^2(2x)} \Rightarrow\Rightarrow 1 = \tan^2(2x)$$

¿*Qué operaciones se hicieron en el paso anterior*?, por favor analizarlas e interpretarlas.

$$1 = \tan^2(2x) \Rightarrow\Rightarrow \tan(2x) = \pm 1$$

Utilizando identidades de ángulo doble para la tangente.

$$\tan(2x) = \pm 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \pm 1$$

Reorganizando la última expresión.

$$\frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \pm 1 \Rightarrow\Rightarrow 2\tan(x) = 1 - \tan^2(x) \Rightarrow\Rightarrow \tan^2(x) + 2\tan(x) - 1 = 0$$

Por la cuadrática: $\tan(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Así: $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{2}$

Entonces: $x_1 = \tan^{-1}(-1+\sqrt{2}) = 22{,}5^0 = \dfrac{\pi}{8}$

En el primer cuadrante, pero la tangente también es positiva en el tercer cuadrante, luego: $x = 180^0 + 22{,}5^0 = 202{,}5^0 = \dfrac{9}{8}\pi$

$x_2 = \tan^{-1}(-1-\sqrt{2}) = -67{,}5^0$ Equivalente en ángulo positivo a $292{,}5^0 = \dfrac{13}{8}\pi$

En el cuarto cuadrante, pero la tangente también es negativa en el segundo cuadrante, luego: $x = 180^0 - 67{,}5^0 = 112{,}5^0 = \dfrac{5}{8}\pi$

Solución total: $x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5}{8}\pi, \dfrac{9}{8}\pi, \dfrac{13}{8}\pi$

Estimado estudiante, por favor analizar este ejemplo y hacer sus propias conclusiones.

Lección Treinta y tres: Análisis de Triángulos no rectángulos

En los apartes anteriores se han analizado situaciones de los triángulos rectángulos, pero existen diversos fenómenos que no siguen este patrón, la base de un telescopio del observatorio internacional, las velas de un barco, las caras de las pirámides de Egipto, no tienen forma de triángulos rectángulos, sabemos que a este tipo de triángulo se les llama “Triángulos No Rectángulos”.

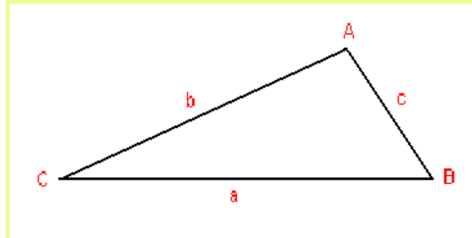
FUENTE:www.cienciateca.com/pyramids.jpg&imgref

FUENTE: http://www.bbo.arrakis.es/geom/trian3.htm

El trabajo que se desarrollará en este aparte es el análisis de triángulos no rectángulo. El soporte del estudio está en los llamados teoremas de seno y coseno, los cuales permiten determinar los lados y ángulos de triángulos no rectángulos.

TEOREMA DE SENO:

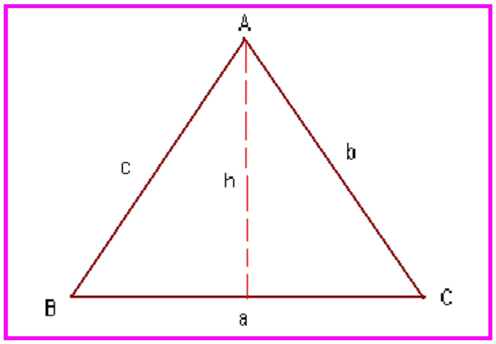
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C. respectivamente, se cumple:



$$\boxed{\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(B)}{b}=\frac{sen(C)}{c}}$$

Demostración:

La demostración la vamos a hacer para un triángulo acutángulo, pero se cumple para cualquier triángulo.



Según la grafica:

$$sen(B)=\frac{h}{c}\Rightarrow\Rightarrow h=csen(B)$$

$$sen(C)=\frac{h}{b}\Rightarrow\Rightarrow h=bsen(C)$$

Como h es igual para los dos casos, se igualan:

$$csen(B)=bsen(C)\Rightarrow\Rightarrow\frac{sen(B)}{b}=\frac{sen(C)}{c}$$

Similarmente se puede probar que: $\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(B)}{b}$

Por consiguiente: $\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(B)}{b}=\frac{sen(C)}{c}$

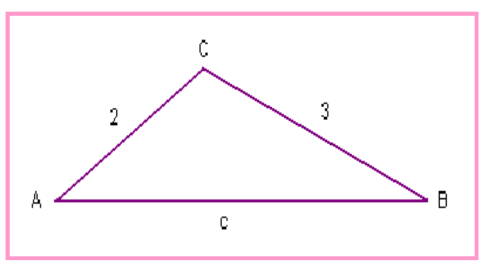
De esta manera se puede hallar los lados y ángulos de cualquier triángulo, pero esta metodología es pertinente para triángulos no rectángulos.

En este contexto se pueden encontrar varios casos:

-) LAA ó ALA: Conocer un lado y dos ángulos
-) LLA: Conocer dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos
-) LLL: Conocer los tres lados.

Ejemplo 221:

Para el triángulo que se presenta en la gráfica, hallar todos los lados y ángulos de la misma.
$A = 40^0$



Solución:

Se trata de un caso LLA, entonces:

$$\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(B)}{b}\Rightarrow\Rightarrow\frac{sen(40^0)}{3}=\frac{sen(B)}{2}\Rightarrow\Rightarrow sen(B)=\frac{2sen(40^0)}{3}$$

Desarrollando: $sen(B) = \dfrac{2(0,6427)}{3} = 0,4284$

Para hallar el ángulo, aplicamos función inversa de seno:

$$sen^{-1}(sen(B)) = sen^{-1}(0,4284) \Rightarrow\Rightarrow B = sen^{-1}(0,4284) = 25,36^0$$

Para hallar el ángulo C, por el teorema de la suma de ángulos para un triángulo:

$A + B + C = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow 40^0 + 25,36^0 + C = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow 65,36 + C = 180^0$

Despejando: C = $180^0 - 65,36^0 = 114,64^0$

En seguida podemos hallar el lado c:

$$\frac{sen(C)}{c} = \frac{sen(A)}{3} \Rightarrow\Rightarrow \frac{sen(114,64^0)}{c} = \frac{sen(40^0)}{3} \Rightarrow\Rightarrow c = \frac{3sen(114,64^0)}{sen(40^0)}$$

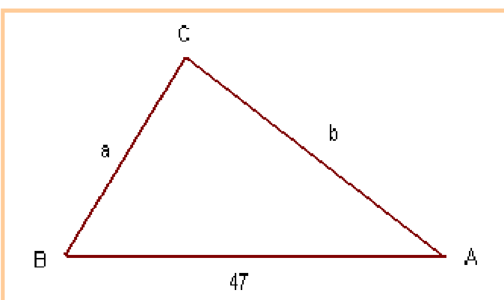
Resolviendo: $c = \dfrac{3(0,9089)}{0,6427} = 4,24$

Es obvio que la longitud de *c* debe ser mayor que la de *a* y la de *b*.

Ejemplo 222:

En un triángulo dos de sus ángulos miden 48^0 y 57^0, el lado que esta entre ellos mide 47 cm. Hallar los lados restantes.

Solución:



Según el problema:

A = 57^0 y B = 48^0

El problema es de tipo LAA o ALA

Primero hallemos C:
C = $180^0 - (57^0 + 48^0) = 75^0$

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(C)}{c} \Rightarrow\Rightarrow a = \frac{csen(A)}{sen(C)} = \frac{csen(57^0)}{sen(75^0)} = \frac{47x0,8386}{0,966} = 40,80$$

Para hallar el lado b:

$$\frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c} \Rightarrow\Rightarrow b = \frac{csen(B)}{sen(C)} = \frac{47xsen(48^0)}{sen(75^0)} = \frac{34,427}{0,966} = 36,16$$

Así, los lados miden: b = 36,16 cm. y a = 40,80 cm.

Más adelante en los problemas de aplicación se refuerza este tema sobre teorema de seno.

TEOREMA DE COSENO:

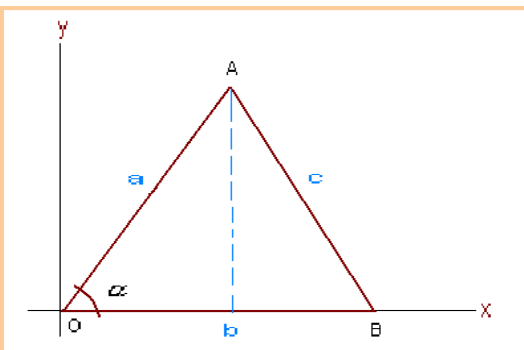
Existen situaciones donde el teorema de seno no se puede aplicar de manera directa, en casos como tener dos lados y el ángulo entre ellos o tener los tres lados. Para estos casos y otros, la solución es el teorema del coseno.

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C. respectivamente, se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

Demostración:

La demostración se hará con un triángulo obtusángulo, pero la situación se cumple para cualquier triángulo.



0 (0, 0)

B = (x_2, y_2) = (b, 0)

A (x_1, y_1) = (acos(α), asen(α))

Por medio de la distancia euclidia se puede hallar la magnitud de c.

Distancia Euclidia: $c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Para el caso del triángulo que tenemos: $c^2 = (b - a\cos(\alpha))^2 + (0 - asen(\alpha))^2$

Desarrollando los productos notables: $c^2 = b^2 - 2ab\cos(\alpha) + a^2\cos^2(\alpha) + a^2 sen^2(\alpha)$

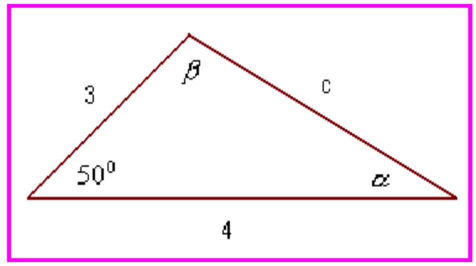
Factorizando y agrupando términos: $c^2 = a^2(\cos^2(\alpha) + a^2 sen^2(\alpha)) + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

Aplicando la identidad fundamental. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

Así queda demostrado para *c*, de manera similar se puede hacer para *a* y *b*. El estudiante en el grupo colaborativo debe hacer la demostración para *a* y *b*, con los mismos argumentos expuestos para *c*, compartiendo con el Tutor dichas demostraciones.

Ejemplo 223:

Del triángulo expuesto a continuación, determinar sus lados y ángulos.



Solución:

Aplicando la ecuación del teorema para coseno. Asumiendo que:

a = 3,   b = 4. Entonces:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos(50^0)$$

$$c^2 = 9 + 16 - 24\cos(50^0) = 25 - 15{,}426 = 9{,}574$$

Para hallar c extraemos raíz cuadrada, luego: $c^2 = 9{,}574 \Rightarrow\Rightarrow c = 3{,}09$

Ahora podemos hallar el ángulo α.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Reemplazando:

$$\cos(\alpha) = \frac{3^2 - 4^2 - (9{,}57)^2}{-2(4)(3{,}09)} = \frac{-16{,}57}{-24{,}72} = 0{,}670$$

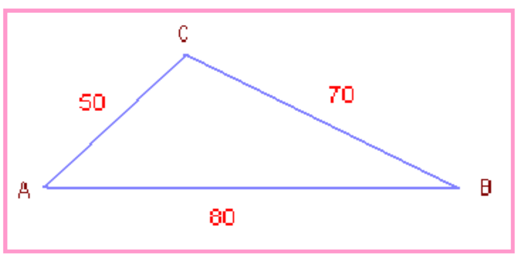
$$\cos(\alpha) = 0{,}670 \Rightarrow\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}670) = 47{,}93^0$$

Para calcular el ángulo β, entonces: $\beta = 180^0 - (50^0 + 47{,}93^0) = 180^0 - 97{,}93 = 82{,}07^0$

Ejemplo 224:

Dado un triángulo T, cuyos lados miden a = 80 cm. b = 50 cm. y c = 70 cm. Hallar los ángulos del triángulo T.

Solución:



La gráfica nos ilustra el caso que se expone en el enunciado del ejemplo 231.
Como se conocen los tres lados, se puede utilizar el teorema de coseno, para hallar A y B, ya que C se obtiene por diferencia como en los casos anteriores.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(A) = \cos(A) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Reemplazamos: $\cos(A) = \dfrac{70^2 - 50^2 - 80^2}{-2(50)(80)} = \dfrac{-4000}{-8000} = 0{,}5$

$$\cos(A) = 0{,}5 \Rightarrow\Rightarrow A = \cos^{-1}(0{,}5) = 60^0$$

Ahora calculamos el ángulo b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B) = \cos(B) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

Reemplazando:

$$\cos(B) = \frac{50^2 - 70^2 - 80^2}{-2(70)(80)} = \frac{-8.800}{-11.200} = 0,7857$$

$$\cos(B) = 0,7857 \Rightarrow\Rightarrow B = \cos^{-1}(0,7857) = 38,21$$

Finalmente para calcular C: $C = 180^0 - (60^0 + 38,21^0) = 81,79^0$

Lección Treinta y cuatro: Aplicación de las funciones trigonométricas.

Una vez analizados los principios sobre triángulos no rectángulos, ahora podemos resolver problemas donde se requiera la utilización de estos principios.

Resolver problemas de esta índole, no existe una metodología definida, paro es pertinente tener presente los siguientes aspectos.

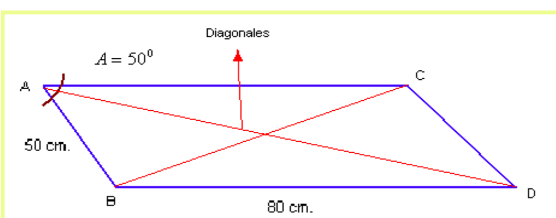
1. Leer el problema las veces que sean necesarios para entender lo que se tiene y lo que se desea obtener.
2. Hacer en lo posible un gráfico explicativo, que ilustre el fenómeno.
3. Aplicar el teorema pertinente, según las condiciones del problema planteado.
4. Realizar los cálculos necesarios, para buscar la respuesta.
5. Hacer las conclusiones del caso.

Ejemplo 225:

Hallar la longitud de las diagonales de un paralelogramo si sus lados miden 50 y 80 cm. Además uno de sus ángulos mide 50^0

Solución:

Una gráfica nos ayuda en la solución



Podemos calcular el lado BC, por medio del teorema de coseno.

$$(BC)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(A)$$

Además: $\text{Cos}(50^0) = 0,6427$

Desarrollando: $(BC)^2 = 2500 + 5400 - 8000(0,6427) = 7900 - 5141,6 = 2758,4$

Para hallar la distancia se debe extraer raíz cuadrada: $(BC)^2 = 2758,4 \Rightarrow\Rightarrow BC = \sqrt{2758,4} = 52,52$

En seguida podemos calcular el lado AD, pero necesitamos el ángulo B ó C. Podemos hallar el ángulo B, así:
Como A + B + C + D = 360^0, pero A = D y B = C, por ser un paralelogramo regular. Entonces: 50 + B + 50 + C = 360, luego: B + C = 360 – 100 = 260
Como B = C, entonces: B = 130^0

$$(AD)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(B)$$

$$(AD)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(130^0) = 2500 + 5400 - 8000(-0,64278)$$

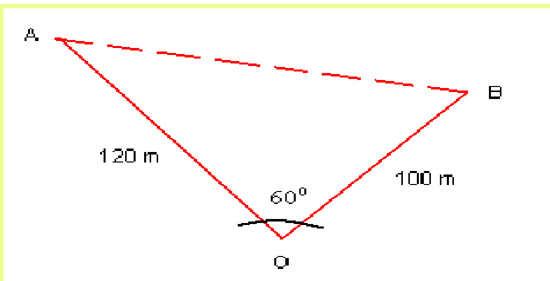
$$(AD)^2 = 7900 + 5142,24 = 13042,24$$

$$(AD)^2 = 13042,24 \Rightarrow\Rightarrow AD = 114,20$$

Ejemplo 226:

Un Topógrafo quiere determinar la distancia entre dos casas denominadas con A y B, desde el punto de observación del Topógrafo, el ángulo entre las dos casas y éste es de 60^0. La distancia del punto de observación y la casa A es de 120 m. y la distancia de este a la casa B es de 100 m. ¿Qué distancia separa las dos casas?

Solución:



Se debe hallar la distancia AB

Por el teorema de coseno:

$$(AB)^2 = 120^2 + 100^2 - 2(120)(100)\cos(60^0)$$

Se sabe que $\text{Cos}(60^0) = 0,5$

$$(AB)^2 = 14400 + 10000 - 24000(0,5) = 24400 - 12000 = 12400$$

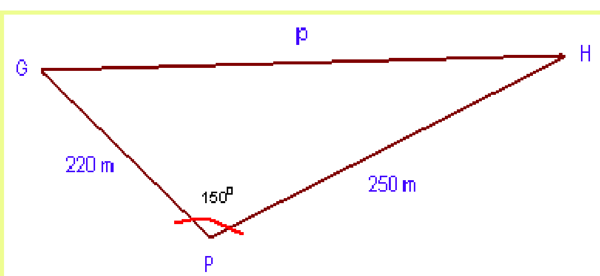
$$(AB)^2 = 12400 \Rightarrow\Rightarrow AB = 111,355$$

La distancia entre las dos casas es de 111,355 metros.

Ejemplo 227:

Un Golfista golpea la pelota desplazándola 220 metros en línea recta, la pelota queda a 250 metros del hoyo. El ángulo que se forma en el punto donde quedo la pelota, con la ubicación del Golfista y el hoyo es de 150^0 ¿Cuál será la distancia del Golfista al hoyo?

Solución:



G = Ubicación del Golfista
H = Ubicación del hoyo
P = Ubicación de la pelota
p = Distancia del golfista al hoyo

Por el teorema del coseno se puede resolver el problema.

$$p^2 = (220)^2 + (250)^2 - 2(220)(250)\cos(150^0)$$

Desarrollando: $p^2 = 48400 + 62500 - 110000(-0,8660) = 110900 + 95260 = 206160$

$$p^2 = 206.160 \Rightarrow\Rightarrow p = 454,048$$

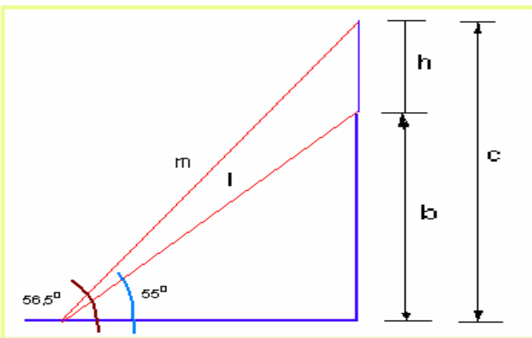
El golfista esta a 454,048 metros del hoyo.

Ejemplo 228:

Un edifico tiene en la cima la bandera de la compañía, la altura del edificio es de 180 metros. El ángulo de elevación de la base del piso y la cima del edificio es de 55^0 y el ángulo de elevación de la base del piso y la punta de la bandera es de $56{,}5^0$. ¿Cuál será la altura del asta de la bandera?

Solución:

h = Altura del asta de la bandera
l = Visual del piso a la cima del edificio
m = Visual del piso a la punto del asta de la bandera.
A = ángulo recto. B = 55^0



C = $56{,}5^0$
b = Altura del edificio 180 metros
c = Altura del edificio más el asta de la bandera

Por teorema de seno:

$$\frac{sen(C)}{c} = \frac{sen(B)}{b}$$

Reemplazando los datos correspondientes:

$$\frac{sen(56{,}5^0)}{c} = \frac{sen(55^0)}{180} \Rightarrow\Rightarrow c = \frac{sen(56{,}5^0)x180m}{sen(55^0)} = \frac{150{,}099}{0{,}8191} = 183{,}248$$

La altura del edificio y el asta es de 183,248 metros. Como se conoce la altura del edificio, por diferencia se haya la altura del asta.

h = c – b. Entonces: h = 183,248 – 180 = 3,248 metros.

El asta de la bandera mide 3,248 metros.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para la circunferencia unidad. Por favor hacer todo el procedimiento.

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — Rta: $x = 30^0, \quad 330^0$

2. $sen^2(x) - 1 = 0$ — Rta: $x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi$

3. $\sec(\theta) - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0$ — Rta: $\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$

4. $\cos(4\theta) = sen(2\theta)$ — Rta: $\theta = 15^0, \quad 75^0, \quad 135^0$

5. $\tan^2(\alpha) + \tan(\alpha) = 0$ — Rta: $\alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad \pi$

6. $2sen^2(x) + sen(x) - 1 = 0$ — Rta: $x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi$

7. Una circunferencia tiene un radio de 25 cm. subtendido por el ángulo central de 36^0 ¿Cuál será la longitud del arco de la circunferencia?

Rta: 15, 71 cm.

8. Una persona se encuentra a 120 metros de la base de una torre inclinada, el ángulo de elevación desde su posición a la punta de la torre es de 24^0 a su vez la torre forma un ángulo con el suelo de 72^0 ¿Cuál será la altura de la torre?

Rta: h = 49,08 metros

9. Asumiendo que las orbitas de Mercurio y Tierra con circulares y se encuentran en el mismo plano. La tierra se encuentra a $9,3X10^7$ millas del sol y mercurio se encuentra a $3,6X10^7$ millas del sol. Si mercurio se ve desde la tierra y el ángulo entre mercurio, tierra y sol es de $8,35^0$ siendo la tierra el vértice. ¿Qué tan lejos está la tierra de mercurio?

Rta: $1,25X10^8$ millas

CAPÍTULO SEIS: HIPERNOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

La palabra HIPERNOMETRÍA, se acuño en este contexto haciendo referencia a el análisis de las funciones Hiperbólicas, de la misma manera como al análisis de las funciones trigonométricas se le denomina *Trigonometría*, es posible que la palabra no sea muy técnica, pero la idea es que con ella; en este material, se identifique el análisis de las funciones hiperbólicas.

En la parte de funciones trascendentales se analizaron las funciones hiperbólicas, sus principios y características. Así las funciones hiperbólicas tienen unas identidades básicas.

Lección Treinta y cinco: Funciones Hiperbólicas.

Dentro de las funciones trascendentales existen unas funciones que se obtienen a partir de la combinación de las funciones exponenciales y son llamadas funciones hiperbólicas y cuyo nombre está relacionado con la hipérbola, al igual que el triángulo con las trigonométricas.

Fuente: wikipedia.

La importancia de estas funciones está en que existen algunas estructuras arquitectónicas que presentan una curvatura que no es precisamente una parábola, como es el caso del arco Gateway en E.E. U.U. También son muy usadas como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales.

Otro campo de acción de este tipo de función es cuando se suspende un cable homogéneo flexible entre dos puntos a la misma altura, se forma una curva denominada *Catenaria*, dicha curva es modelada por una función hiperbólica.

FUNCIÓN SENO HIPERBÓLICO:

La función seno hiperbólico denotado por f(x) = senh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{senh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$$

<u>*Dominio*</u>: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

<u>*Imagen*</u>: la imagen de la función seno hiperbólico son también todos los reales.

<u>*Simetría*</u>: Para la función seno hiperbólico se cumple: **senh(-x) = -senh(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.

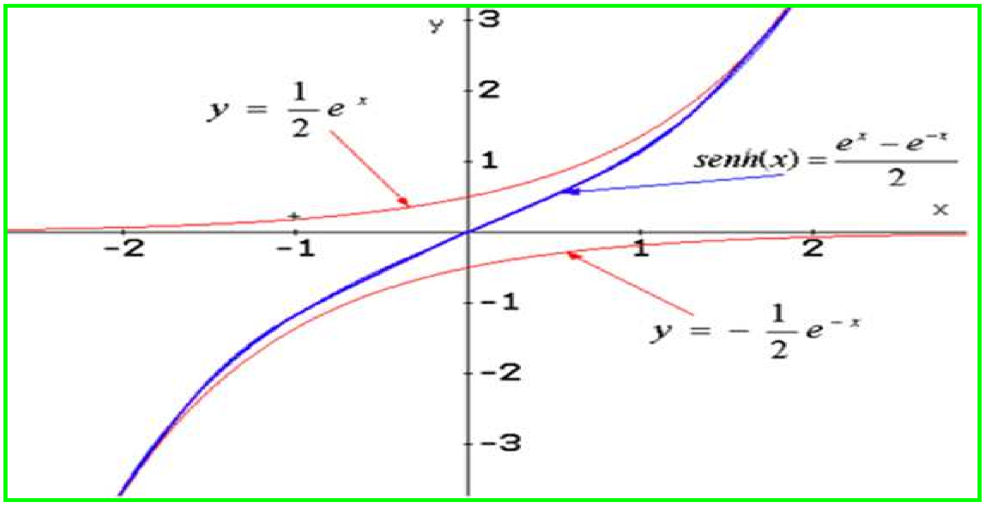
<u>*Monotonía*</u>: La función es monótona, ya que creciente en su dominio, como se puede observar en la gráfica.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza dos referencias, consistente en dos funciones exponenciales, al saber:

$$y = \frac{1}{2}e^{x} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

Esto debido a que la función senh(x) es una combinación de estas.

Grafica Función seno hiperbólico:



COSENO HIPERBÓLICO:

La función coseno hiperbólico denotado por f(x) = cosh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

<u>*Dominio*</u>: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

<u>*Imagen*</u>: la imagen de la función coseno hiperbólico son los reales mayores e iguales a uno. ($y \geq 1$)

<u>*Simetría*</u>: Para la función coseno hiperbólico se cumple: **cosh(-x) = cosh(x),** luego es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al eje *y*.

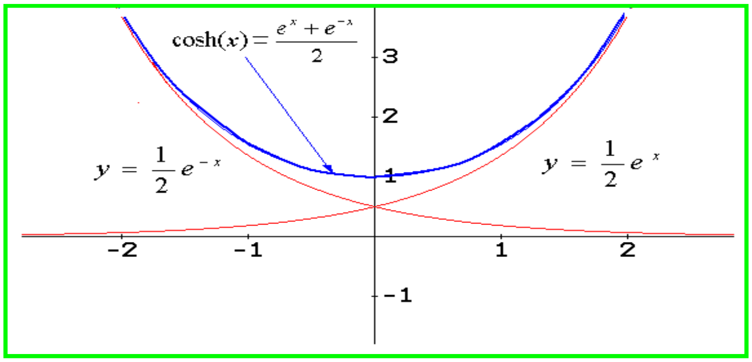
<u>*Monotonía*</u>: La función no es monótona, ya que creciente y decrece en su dominio, la gráfica permite observar esta situación.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las siguientes funciones.

$$y = \frac{1}{2}e^{x} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Esto debido a que la función cosh(x) es una combinación de estas.

Grafica Función seno hiperbólico:



TANGENTE HIPERBÓLICA:

La función tangente hiperbólica denotada por f (x) = tanh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

Dominio: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

Imagen: la imagen de la función tangente hiperbólico son todos los reales comprendidos en el intervalo (-1,1).

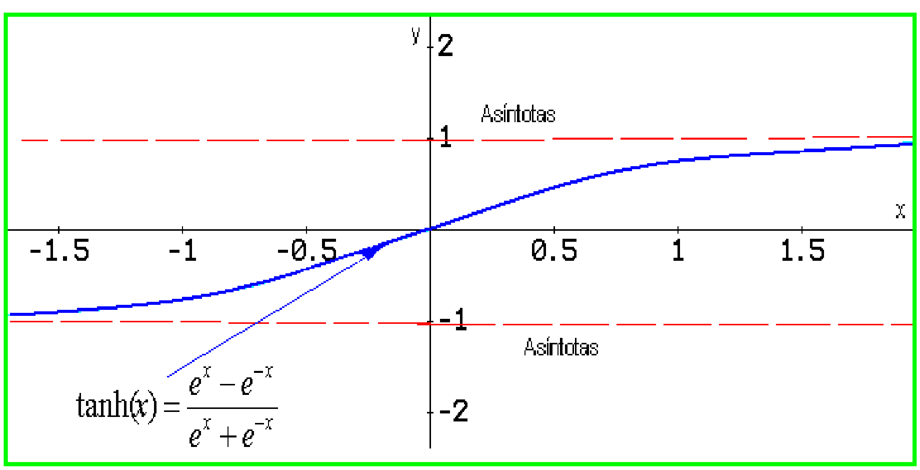
Simetría: La función tangente hiperbólica es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Monotonía: La función tanh(x) es monótona, ya que es creciente en su dominio.

Asíntotas: Esta función tiene dos asíntotas horizontales, en *y = 1* y *y = -1*

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las funciones combinadas de seno y coseno hiperbólicos.

Grafica Función tangente hiperbólico:



COTANGENTE HIPERBÓLICA:

La función cotangente hiperbólica denotada por f (x) = coth(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}}$$

<u>*Dominio*</u>: Todos los reales, diferente de cero; es decir, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

<u>*Imagen*</u>: la imagen de la función cotangente hiperbólico son los reales comprendidos en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

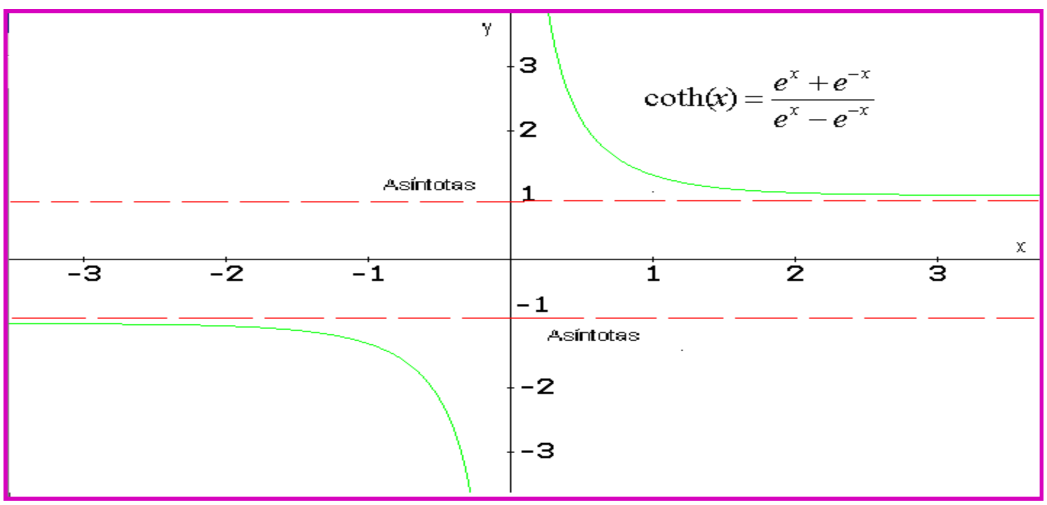
<u>*Simetría*</u>: La función cotangente hiperbólica es una función impar, ya que cumple la condición **coth(-x) = -coth(x),** por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.

<u>*Monotonía*</u>: La función coth(x) es monótona, ya que es decreciente en su dominio.

<u>*Asíntotas*</u>: Esta función tiene dos asíntotas horizontales, en *y = 1* y *y = -1*. Además una asíntota vertical en x = 0.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las funciones combinadas de coseno y seno hiperbólicos.

Grafica Función cotangente hiperbólica:

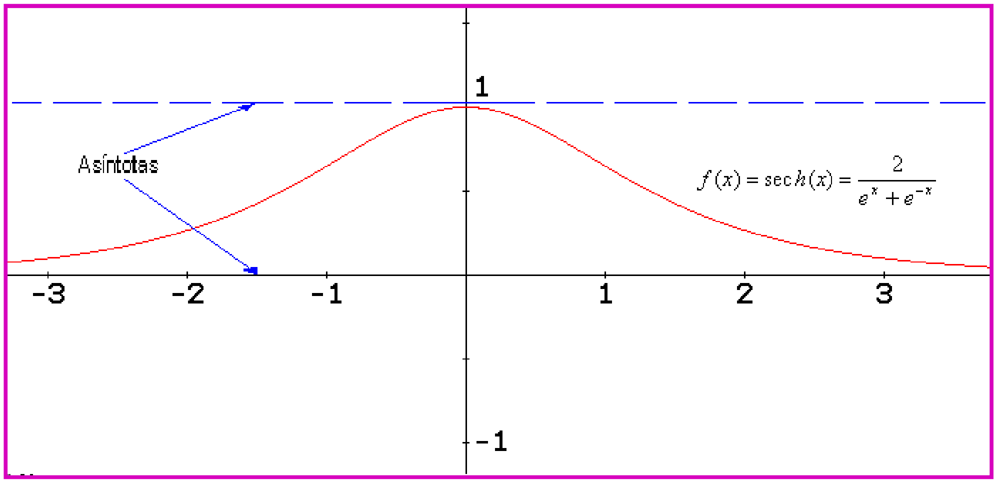


Para las funciones secante y cosecante hiperbólicas, se hace un resumen en el siguiente cuadro.

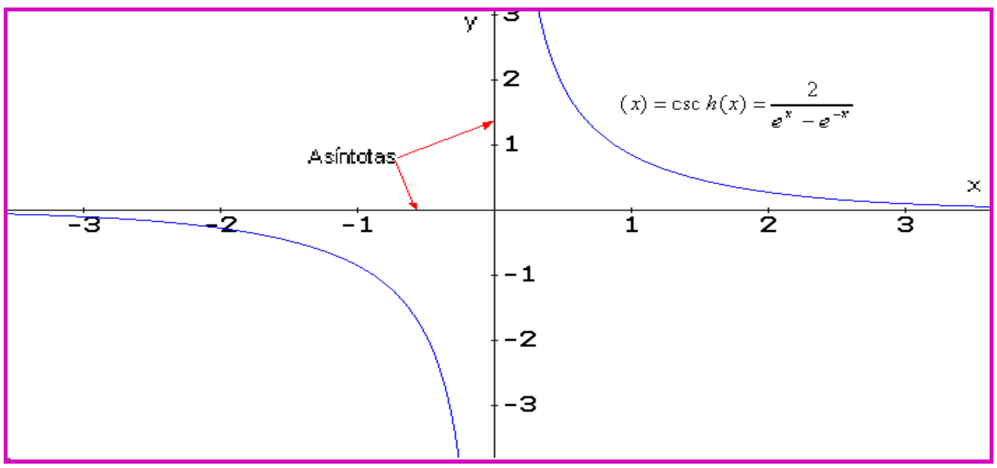
FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRIA	MONOTONÍA	ASÍNTOTAS
Sech(x)	Los Reales	Intervalo (0, 1]	Respecto al eje y.	No es monótona	y = 1 y = 0
Csch(x)	(-α,0) U (0, α)	(-α,0) U (0, α)	Respecto al origen	Monótona. Es decreciente en su dominio	x = 0 y = 0

Gráficas:

Función secante hiperbólica:



Función cosecante hiperbólica:



Lección Treinta y seis: Identidades de las funciones hiperbólicas.

IDENTIDADES BÁSICAS:

Dentro de las identidades básicas se presentan las siguientes categóricas:

1. **Identidad Fundamental Uno:** Análogamente a la identidad fundamental de las trigonométricas, en la hiperbólicas se tiene una identidad fundamental..

$$\boxed{\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1}$$

Demostración:

Por la definición de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{4e^xe^{-x}}{4}=e^xe^{-x}=1$$

2. **Identidad Fundamental Dos:**

$$\boxed{\sec h^2(x)+\tanh^2(x)=1}$$

Demostración:

Por la definición de las funciones secante hiperbólico y tangente hiperbólico.

$$\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2=\frac{4}{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}+\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}=\frac{4+e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}$$

$$\frac{4+e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}=\frac{2+e^{2x}+e^{-2x}}{2+e^{2x}+e^{-2x}}=1$$

3. **Identidades de Cociente:** Estas se obtienen por las relaciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

a-) $\boxed{\tanh(\alpha)=\dfrac{senh(\alpha)}{\cosh(\alpha)}}$

Demostración:

Como $\tanh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Pero: $\tanh(x)=\dfrac{senh(x)}{\cosh(x)}=\dfrac{\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}}{\frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}}}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\tanh(x)$

b-) $\boxed{\coth(\alpha)=\dfrac{\cosh(\alpha)}{senh(\alpha)}}$

Demostración:

Con los mismos argumentos utilizados para la tangente, solo que en este caso el cociente es coseno hiperbólico sobre seno hiperbólico.

Como $\coth(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Pero: $\coth(x)=\dfrac{\cosh(x)}{senh(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}\big/2}{e^x-e^{-x}\big/2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\coth(x)$

4. **Identidades Recíprocas:** Se les llama de esta manera debido a que a partir de la definición, al aplicar el recíproco, se obtiene nuevos cocientes.

a-) $\boxed{senh\ (\alpha)=\dfrac{1}{\csc\ h(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\csc h(\alpha)=\dfrac{1}{senh(\alpha)}}$

Demostración:

Se deja como ejercicio para hacer en forma individual.

b-) $\boxed{\cosh(\ \alpha)=\dfrac{1}{\sec\ h(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\sec\ h(\alpha)=\dfrac{1}{\cosh(\ \alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para realizar con el grupo colaborativo.

c-) $\boxed{\tanh(\ \alpha)=\dfrac{1}{\coth(\ \alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\coth(\ \alpha)=\dfrac{1}{\tanh(\ \alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para trabajar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

5. **Identidades Cuadráticas:** a partir de la identidad fundamental y las identidades de cociente, se obtienen otras identidades llamadas cuadráticas.

a-) $\boxed{\tanh^2(\alpha)=1-\sec h^2(\alpha)}$

Demostración:

A partir de la identidad fundamental $\cosh^2(\alpha)-senh^2(\alpha)=1$, dividimos toda la expresión por $\cosh^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{\cosh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)}-\frac{senh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)}=\frac{1}{\cosh^2(\alpha)}\Rightarrow\Rightarrow 1-\tanh^2(\alpha)=\sec h^2(\alpha)$$

Despejando se obtiene: $1-\tanh^2(\alpha)=\sec h^2(\alpha)\Rightarrow\Rightarrow 1-\sec h^2(x)=\tanh^2(x)$

b-) $\boxed{\coth^2(\alpha)=1+\csc h^2(\alpha)}$

Demostración:

De la fundamental, dividimos por $sen^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{\cosh^2(\alpha)}{senh^2(\alpha)} - \frac{senh^2(\alpha)}{senh^2(\alpha)} = \frac{1}{senh^2(\alpha)} \Rightarrow\Rightarrow \coth^2(x) - 1 = \operatorname{csc}h^2(x)$$

Despejando tenemos: $\coth^2(x) - 1 = \operatorname{csc}h^2(x) \Rightarrow\Rightarrow \coth^2(x) = 1 + \operatorname{csc}h^2(x)$

IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA:

a-) $$\boxed{senh(\alpha \pm \beta) = senh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha)senh(\beta)}$$

b-) $$\boxed{\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) \pm senh(\alpha)senh(\beta)}$$

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE:

a-) $$\boxed{senh(2\beta) = 2senh(\beta)\cosh(\beta)}$$

Demostración:

Sabemos qué $senh(\alpha + \beta) = senh(\alpha)\cosh(\beta) + \cosh(\alpha)senh(\beta)$, pero como α = β entonces: $senh(\alpha + \alpha) = senh(\alpha)\cosh(\alpha) + \cosh(\alpha)senh(\alpha) = senh(\alpha)\cosh(\alpha) + senh(\alpha)\cosh(\alpha)$

Operando: $senh(\alpha + \alpha) = 2senh(\alpha)\cosh(\alpha)$

Así queda demostrada esta identidad.

b-) $$\boxed{\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)}$$

Demostración:

Siguiendo la misma metodología del caso anterior.

$\cosh(2\alpha) = \cosh(\alpha + \alpha) = \cosh(\alpha)\cosh(\alpha) + senh(\alpha)senh(\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)$

Así $\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)$

IDENTIDADES AL CUADRADO:

$$\boxed{senh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}} \qquad \boxed{\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}}$$

IDENTIDADES DE ÁNGULO MITAD:

a-) $$\boxed{senh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\alpha) - 1}{2}}}$$

b-) $\boxed{\cosh(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh(\alpha) + 1}{2}}}$

Lección Treinta y siete: Funciones Hiperbólicas Inversas

De las funciones hiperbólicas: senh(x), tanh(x), coth(x) y csch(x) son inyectivas, luego tienen inversa. Para el caso de cosh(x) y sech(x), por no ser inyectivas, se les debe restringir su dominio.

El siguiente cuadro resume las funciones hiperbólicas inversas, en donde se presente la palabra investigar en para que usted estimado estudiante, indague en diferentes fuentes para encontrar la respuesta a dicho interrogante.

FUNCIÓN	**DOMINIO**	**IMAGEN**	**SIMETRÍA**	**MONOTONÍA**	**EXPLÍCITA**
$\text{Senh}^{-1}(x)$	Reales	Reales	Impar	Creciente	$Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
$\text{Cosh}^{-1}(x)$	$x \geq 1$	$y \geq 0$	Investigar	Creciente	$Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ Para $x \geq 1$
$\text{Tanh}^{-1}(x)$	-1 < x < 1	Reales	Impar	Creciente	$\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$\text{Coth}^{-1}(x)$	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar
$\text{Sech}^{-1}(x)$	0 < x ≤ 1	$y \geq 1$	Investigar	Decreciente	$Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ Para 0 < x ≤ 1
$\text{Csch}^{-1}(x)$	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar

Del cuadro surge una pregunta ¿Cómo se obtiene la forma explicita de la función? A manera de ejemplo desarrollemos la del $\cosh^{-1}(x)$.

Sea $y = \cosh^{-1}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2y = e^x + e^{-x}$

La última expresión la multiplicamos por $2e^x$, luego:

$$4ye^x = 2e^x(e^x + e^{-x}) \Rightarrow\Rightarrow 4ye^x = 2e^{2x} + 2$$

Dividimos por 2 toda la última expresión e Igualando a cero se obtiene:

$$2ye^x - e^{2x} - 1 = 0$$

Ajustándola a una ecuación cuadrática:

$$(e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$$

Entonces: $e^{x} = \dfrac{2y + \sqrt{(2y)^{2} - 4}}{2} = y + \sqrt{y^{2} - 1}$ Así: $e^{x} = y + \sqrt{y^{2} - 1}$

Despejando la variable x:

$$Ln(e^{x}) = Ln(y + \sqrt{y^{2} - 1}) \Rightarrow\Rightarrow \; x = Ln(y + \sqrt{y^{2} - 1})$$

Así, aplicando la definición de inversa:

$$f^{-1}(x) = Ln(x + \sqrt{x^{2} - 1}) \quad \text{Para} \quad x \geq 1$$

En el pequeño grupo colaborativo se debe trabajar en la demostración de las demás funciones explícitas de las hiperbólicas inversas. Luego se debe socializar con el tutor para aclarar las dudas encontradas.

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de f(x = a) para las funciones dadas.

a-) $f(x) = senh(x)$ Para x = 0 y x = 1. Rta: $y = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$

b-) $g(x) = \tanh(x)$ Para x = 2 y x = 4. Rta: $\dfrac{e^4 - 1}{e^4 + 1}$ y $\dfrac{e^8 - 1}{e^8 + 1}$

2. Dada la función f(x) = 4cosh(x). Cuál será el valor de la función para:

a-) x = 0 Rta: 4

b-) x = 2 Rta: $2e^4 + \dfrac{2}{e^2}$

3. Verificar que:

a-) cosh(x) + senh(x) = e^x

b-) cosh(2x) + senh(2x) = e^{2x}

AUTOEVALUACIÓN UNIDAD DOS

1. Para la función $g(x) = \dfrac{x-4}{3x-2}$ Cual será el valor de x para:

   a) g(x) = 0
   b) g(x) = -3

2. Demuestre que la función $y = \dfrac{3}{2-x}$ es decreciente.

3. Demuestre que la función $y = \sqrt{4x^3 - 5}$ es creciente

4. Demuestre que la función $y = x^3 + 4x$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

5. ¿En qué condiciones una parábola y una circunferencia es función?

Dada las funciones $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-4}$ y $g(x) = \dfrac{x-4}{3x}$ Hallar.

6. $f(x) * g(x)$

7. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Sean $f(x) = 4sen^2(x)$ y $g(x) = 4\cos^2(x)$ Hallar:

8. $f(x) + g(x)$

9. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Dadas las siguientes funciones, hacer la descripción identificando: Dominio, Imagen, monotonía, simetría, gráfica.

10. $f(x) = [\![|2x|]\!]$

11. $f(x) = 2x^2 - 5x$

Para las funciones dadas, identificar dominio, imagen, simetría si la tiene, monotonía si la tiene, asíntotas si las tiene y hacer una bosquejo de la gráfica.

12. $g(x) = x^4 + 2x^3$

13. $h(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

14. $q(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$

15. La concentración de un fármaco en la sangre, esta dado por la función:

$c(t) = \dfrac{25t}{(t+1)^2}$ (t horas)

a-) ¿Cuál será la concentración inicial del fármaco?

b-) ¿Cuanto fármaco hay a las 4 horas?

Describir las funciones dadas a continuación, incluyendo la gráfica.

16. $I(x) = 10^{x-2}$

17. $M(x) = e^x + 4$

18. $f(x) = Log_2(4x)$

19. $h(x) = Log\ (x+4)$

20. $N(x) = Ln(2x) + 6$

21. $K(x) = Ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

22. $N(x) = Ln(2x) + 6$

23. $K(x) = Ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

24. Para las funciones definidas, hallar las restantes y hacer la gráfica explicativa.

a-) $sen(\alpha) = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ b-) $\tan(\alpha) = \dfrac{7}{5}$

25. Hallar el valor de las expresiones propuestas:

a-) $sen(\left(\pi/2\right) + \cos\left(\pi/6\right)$ b-) $\tan(\left(\pi/4\right) + \cot\left(\pi/3\right) - sen(0)$

c-) $\sec(\left(\pi/6\right) + \csc\left(\pi/3\right) + \cot\left(\pi/4\right)$ d-) $3\cos(\left(5\pi/6\right) - 4\tan\left(7\pi/6\right) + 3\sec\left(11\pi/6\right)$

26. La longitud del arco de un sector circular, en una circunferencia mide 37,7 cm. si el ángulo es de 2 π / 3, ¿Cuál será el valor del radio?.

Para Las funciones dadas a continuación, a partir de la función base, identificar cuáles fueron los cambios presentados y hacer la gráfica.

27. $g(x) = 2|x+3| - 4$

28. $h(x) = 4\sqrt{x-1}$

29. $p(x) = 3 + e^{x-4}$

30. $s(x) = 4\cos(x - \pi)$

De las siguientes funciones determinar si son inyectivas y justificar la respuesta.

31. $p(x) = \sqrt{4 - x^2}$

32. $m(x) = \dfrac{4x^2 - 2x}{\sqrt{x-1}}$

Las funciones dadas a continuación son inyectivas, hallar la función inversa y su dominio.

33. $f(x) = 10 - 4x$

34. $g(x) = \dfrac{4x}{5+x}$

35. $l(x) = 4 - x^3$

Para cada una de las funciones dadas, identificar la inversa.

36. $h(x) = \dfrac{e^x}{4}$

37. $N(x) = Log\left(\dfrac{2+x}{x}\right)$

38. Para las funciones dadas a continuación, graficas la función y su inversa.

a-) $g(x) = e^{4x}$ b-) $J(x) = 3Log(2x)$

Hallar el valor de *y* para las siguientes funciones.

39. $y = \tan^{-1}(0{,}1743)$

40. $y = \sec^{-1}(1{,}0353)$

41. $sen(\cos^{-1}(0{,}707))$

42. $\tan^{-1}(\cos(\frac{\pi}{6}))$

43. Demuestre que si $f(x) = senh(x)$, entonces: $f^{-1}(x) = senh^{-1}(x) = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
Una ayuda: senh(x) + cosh(x) = e^x y que: $\cosh^2(x)$ + $senh^2(x)$ = 1

44. Un cilindro circular recto de volumen V, altura h y radio R tiene una altura el doble del radio. Expresar el volumen del cilindro como función del radio.

45. Sea la función $g(x) = x^2 - 8$ el punto (x, y) está sobre la gráfica de g(x), Expresar la distancia D que se presenta desde p(x, y) al punto q(0, -1) como función de *x*.

46. En una investigación se determino que el área del cuerpo es su superficie está dada por: $Log\,(A) = -2{,}144 + 0{,}425\,Log\,(m) + 0{,}725\,Log\,(h)$
Donde: a = área superficial, m = masa del cuerpo en Kg y h = altura en metros.

Resolver:
a-) Una persona tiene 75 Kg de peso y 1,80 metros de altura. ¿Cuál será e lárea superficial de sus cuerpo?

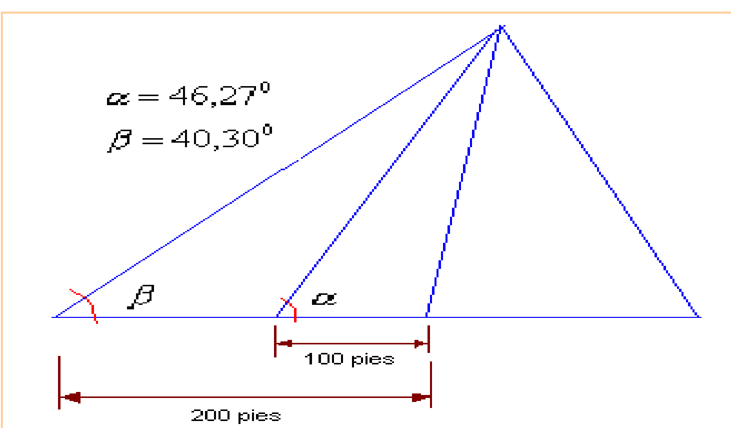
b-) Una persona pesa 68 Kg, su área superficial es de 0,05615 m ^{2} ¿Cuál será sui estatura?

c-) Para montar un juego mecánico, la persona debe tener máximo 60 Kg de peso. José es medido y presenta un área superficial de 0,0725 m ^{2} y una estatura es de 1,92 metros.
Podrá José montar en el juego mecánico?

47. El pentágono de los EE. UU. Tiene forma de pentágono regular, cuyo lado mide 981 pies. ¿Cuál será el área del pentágono?

48. Un deslizadero forma un ángulo de 35 ^{0} con la horizontal, si la distancia del punto donde llega el deslizadero en tierra a la horizontal donde inicia éste es de 100 metros, ¿Qué longitud tiene el deslizadero?

49. Una de las 7 maravillas del mundo es la pirámide de Keops, su altura original fue de 480 pies y 11 pulgadas. Pero con el tiempo ha presentado pérdida de piedra, así su altura ha disminuido, según la figura. ¿Cuál será la altura actual de la pirámide?



Reducir a la función trigonométrica propuesta los siguientes ejercicios.

50. $\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}+\frac{1+\cos(x)}{sen(x)}$ En función solo de csc(x)

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

51. $\cos(t-\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(t)+sen(t)\right)$

52. $\frac{\cos(7x)+\cos(x)}{sen(7x)+sen(x)}=\cot(4t)$

53. $\frac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)}=\frac{sen(2x)-sen(2y)}{sen(2x)+sen(2y)}$

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para la circunferencia unidad. Por favor hacer todo el procedimiento.

54. $sen(3x)+sen(5x)=0$

55. $2sen\left(\frac{3}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=sen(\theta)$

56. $\sqrt{\frac{1+2\cos(x)}{2}}=1$

57. $2sen(\alpha)+3\sqrt{sen(\alpha)}=0$

58. Las casas de José y Alberto están al dados opuestos del río, un Ingeniero debe hacer un puente que comunique las dos casas, para lo cual ubica a 100 metros de la casa de José por la misma orilla, el Teodolito (aparato para visualizar puntos distantes) obteniendo los siguientes datos: El ángulo entre las casas y el teodolito es de 50^0, siendo el teodolito el vértice. El ángulo entre las casas y el teodolito es de 40^0, siendo la casa de José el vértice. ¿Cuál será la longitud del puente?

59. Para medir la altura de una montaña, un Topógrafo determina que el ángulo de elevación desde su ubicación a la punta de la montaña es de 25^0, luego camina 100 metros y mide el nuevo ángulo el cual fue de 15^0 ¿Cuál será la longitud de la punta de la montaña hasta la ubicación inicial del Topógrafo?

60. Dos autos parten de una intersección de dos carreteras, cuya separación es de 80^0, uno viaja a 80 Km/hr y el otro a 100 Km/hr., al cabo de 45 minutos ¿Qué tan separados estarán los autos?

61. Dadas las funciones f(x) = 3coth(x) y g(x) = 4sech(x). Cuál será el valor para:

a-) x = 1.

b-) x = 5

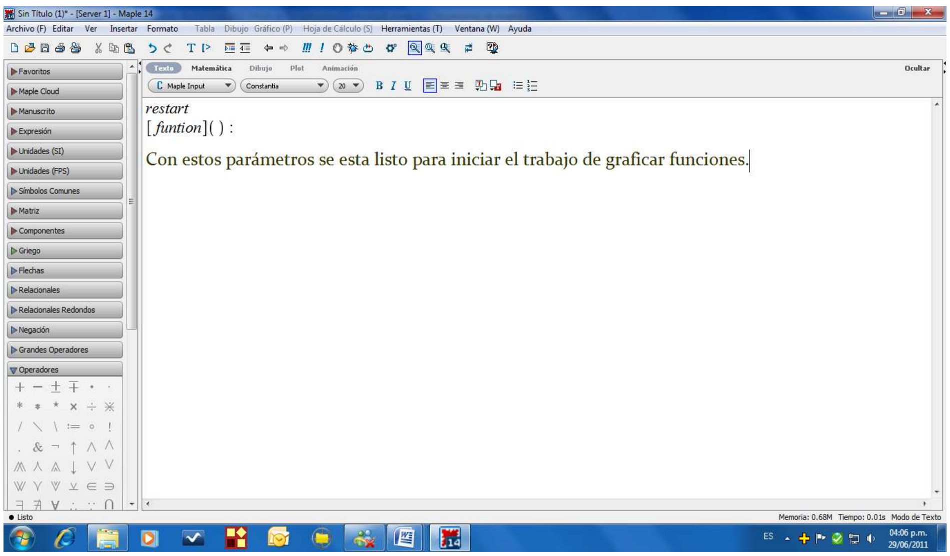
62. En un cuadro hacer un paralelo de las funciones hiperbólicas, identificando similitudes y diferencias.

LABORATORIO

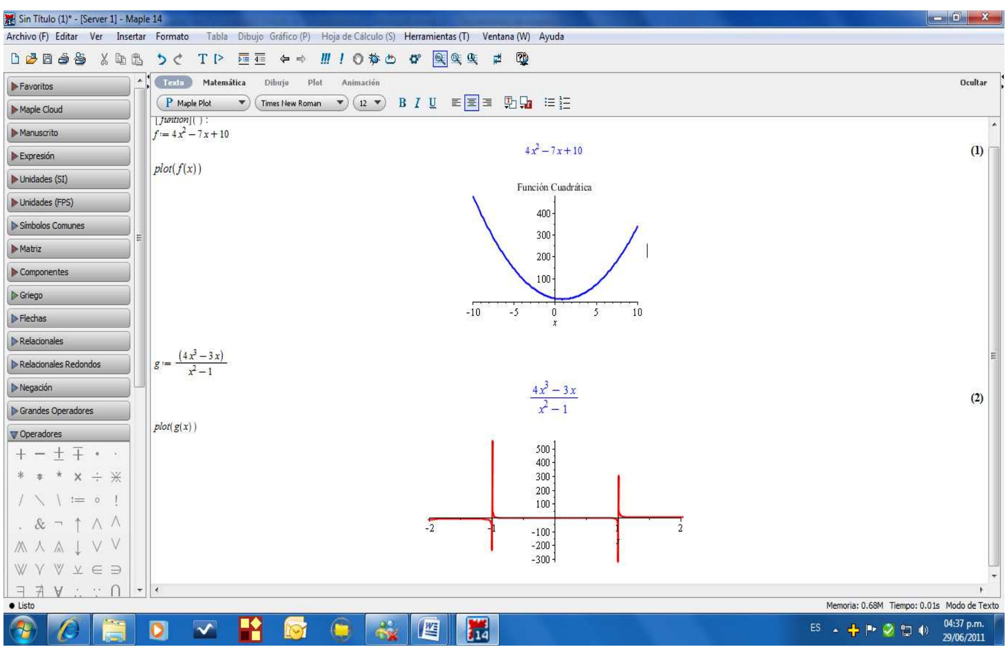
Para desarrollar este laboratorio, debemos tener disponible el software MAPLE.

Gráficos de Funciones:

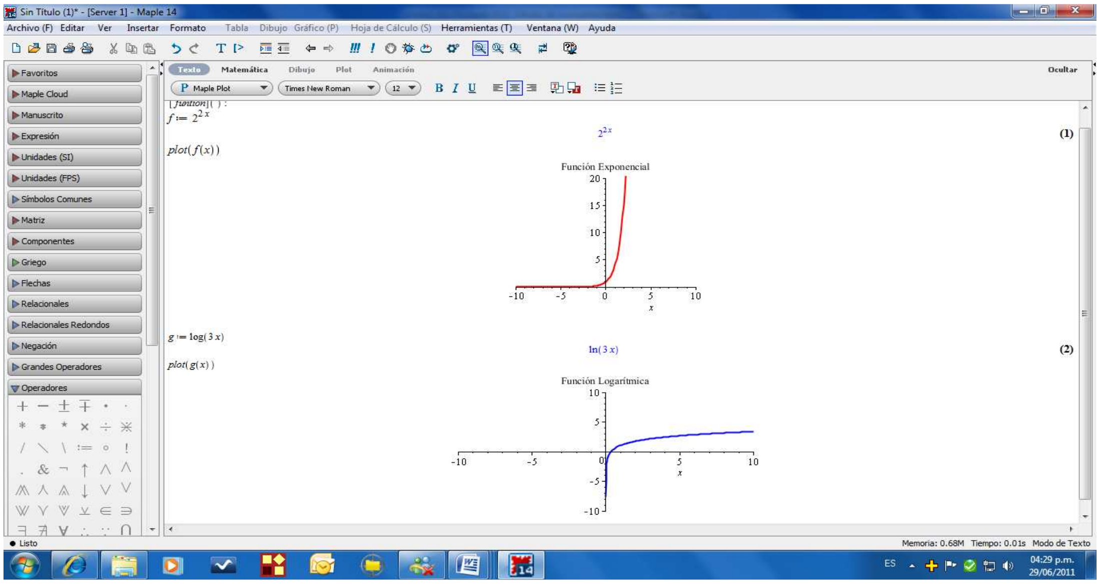
Se habre el software, se recetea, escribiendo *restart*, lo que indica que podemos iniciar sin problema. Luego se invoca: $[funtion](\ ):$ para trabajar con funciones.
Cuando se pulsa clic derecho, hay diversos opciones para mejorar la presentación.



Veamos ejemplos: Función cuadrática y función racional.



Ahora funciones trascendentales: Exponencial y logarítmica.



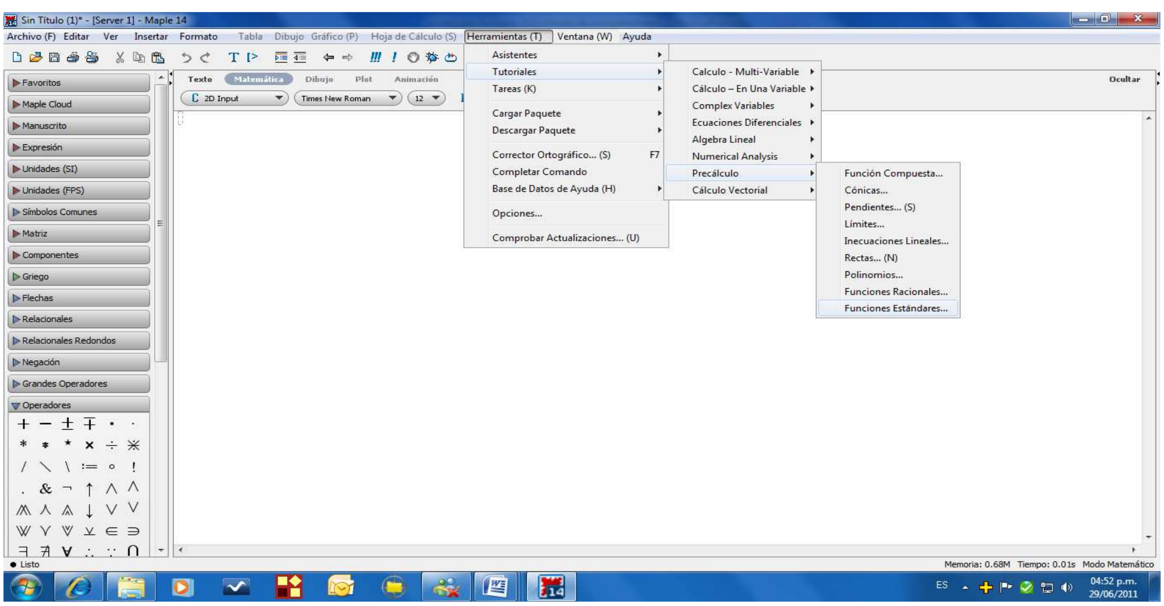
Ejercicios: Graficar con Maple. Identificando el dominio, imagen, simetría y monotonía.

1. $g\,(x) = \dfrac{5x - 1}{2x - 6}$

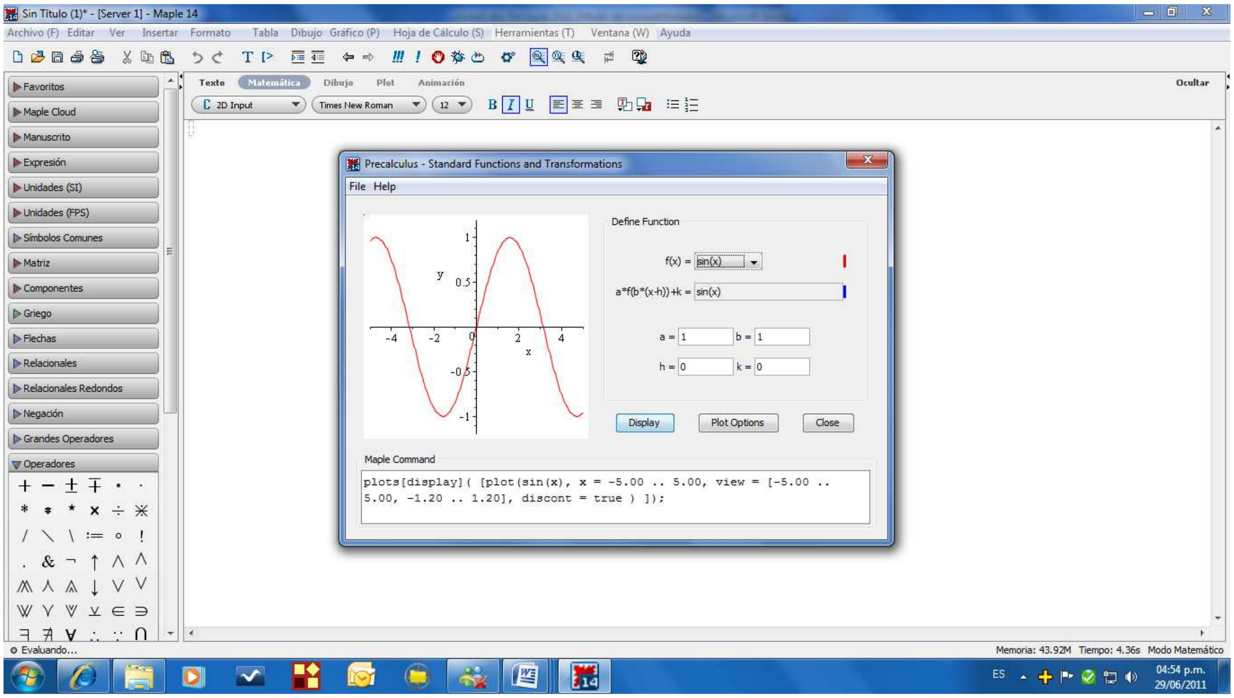
2. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^{2} - 16}}$

3. $f\,(x) = |4x|$

Para las funciones trigonométricas: En la página principal, se va por herramientas, tutoriales, precalculo, funciones estándar. Allí encuentra todas las funciones trigonométricas, donde pueden programar la que desee.

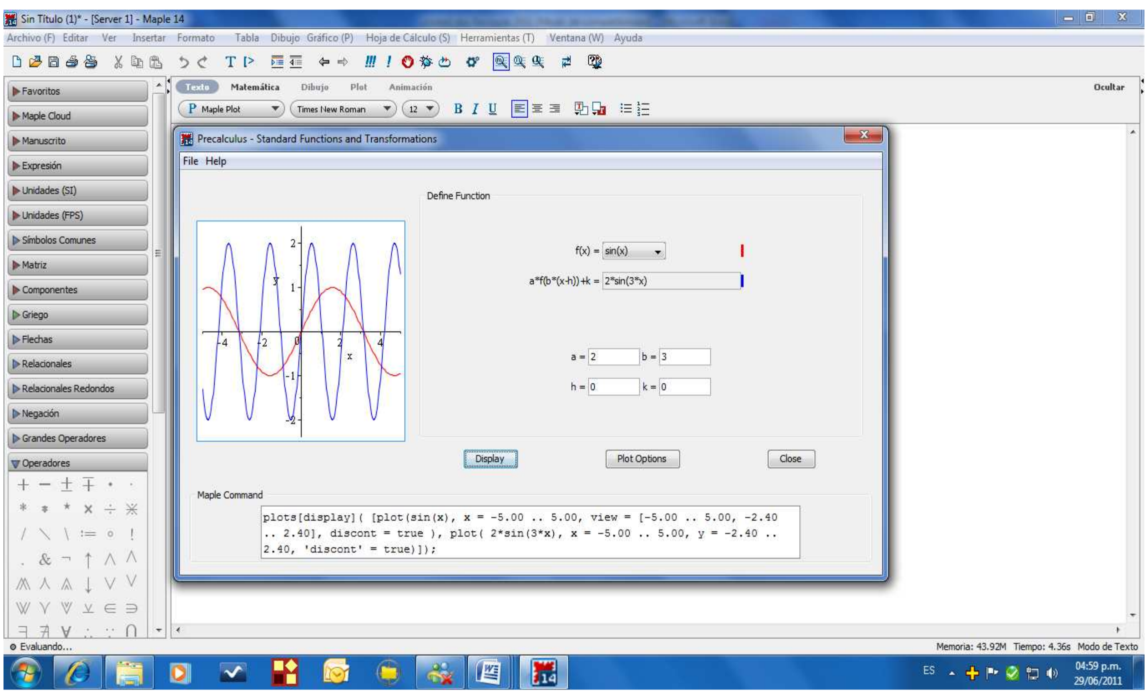


El ejemplo básico que aparece es el siguiente:

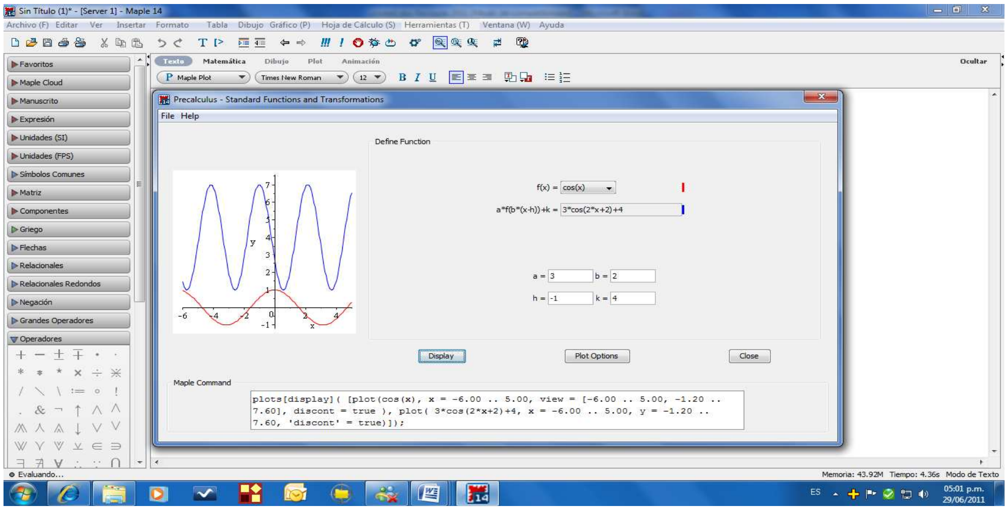


A partir de este se puede graficar el que se desee.

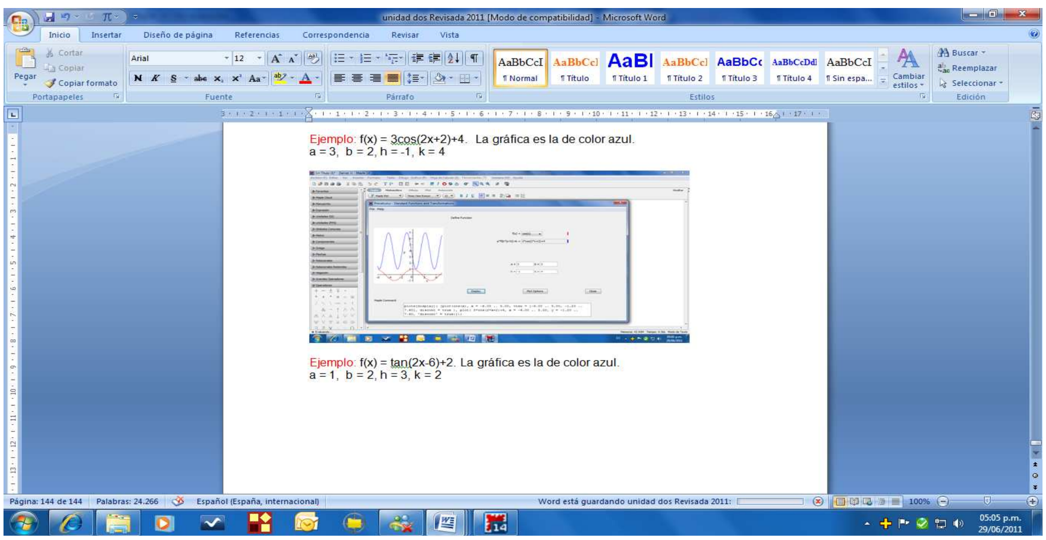
Ejemplo: f(x) = 2sen(3x). En la gráfica es la de color azul.



Ejemplo: f(x) = 3cos(2x+2)+4. La gráfica es la de color azul.
a = 3, b = 2, h = -1, k = 4



Ejemplo: f(x) = tan(2x-6)+2. La gráfica es la de color azul.
a = 1, b = 2, h = 3, k = 2



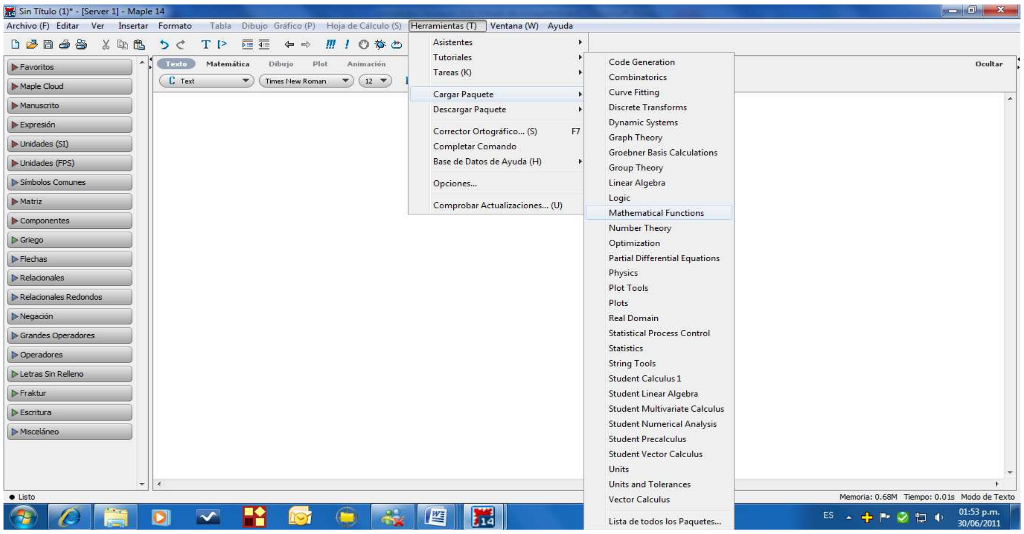
Ejercicios:

Graficar las siguientes funciones:

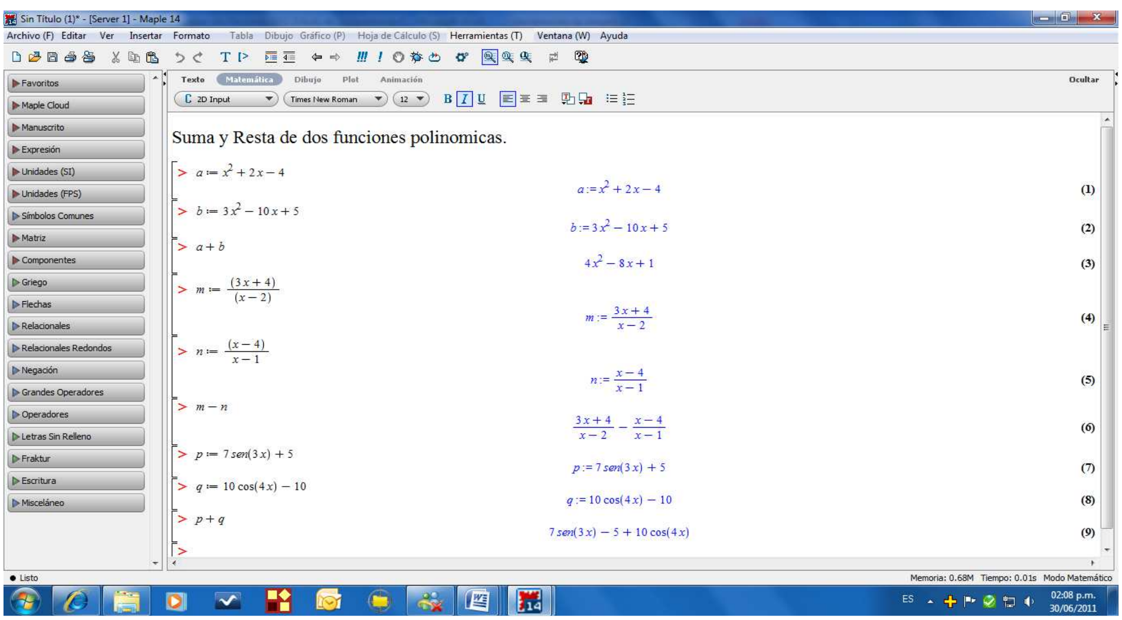
1. f(x) = cot(6x)
2. g(x) = 4sen(2x)
3. h(x) = 5cos(x-4) + 2
4. m(x) = sec(2x+4) – 3

Operaciones con Funciones:

Para operar funciones, se procede de la siguiente manera: Para invocar el paquete se pulsa herramientas,… cargar paquete,… funciones matemáticas.



Cuando aparece la hoja cargada con el paquete, se debe pulsar: [> en la parte superior de la ventana, así se puede trabajar. Veamos algunos ejemplos el Maple.



Ejercicios:

1. $f(x) = 10x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ y $g(x) = 15x^2 - 8x + 10$
2. $f(x) = 3x - 12$ y $g(x) = 10x^2 - 4x + 14$
3. $f(x) = 6e^{2x} + 5x + 2$ y $g(x) = 4e^x + 8x - 2$
4. $f(x) = 5sen(2x) - 10$ y $g(x) = 4cos(3x) - 5$

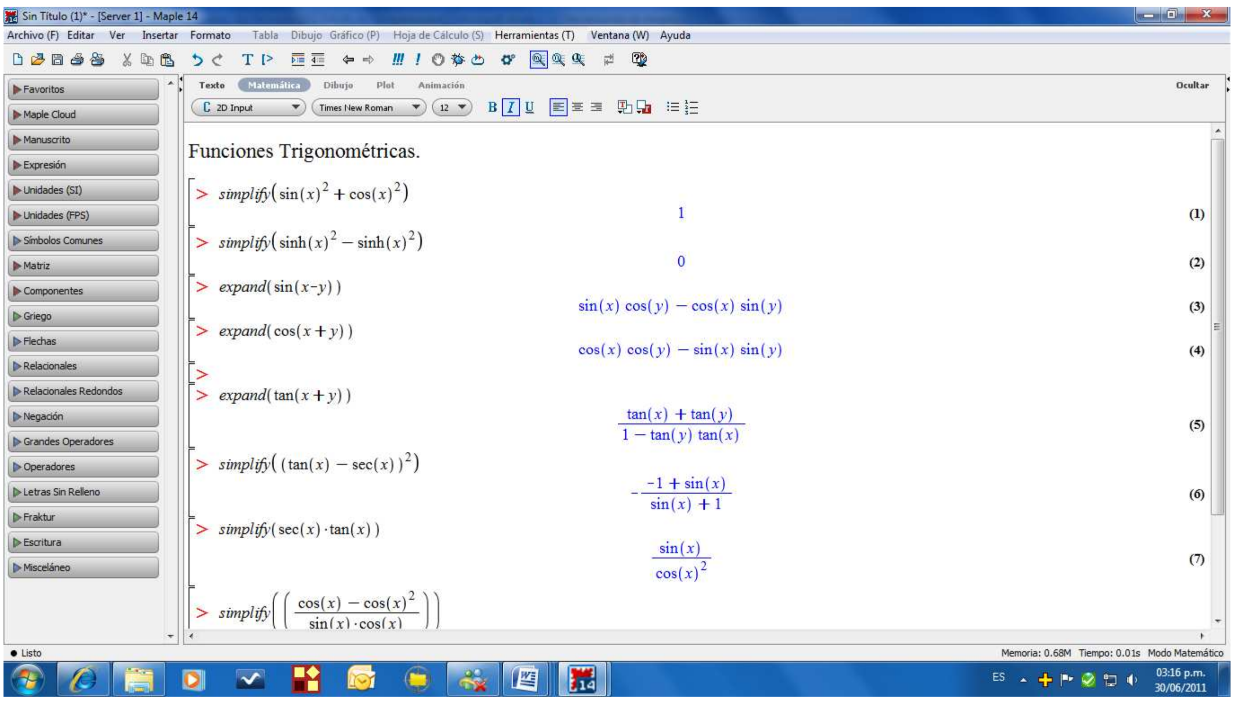
Identidades de Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas:

En la misma hoja, se puede *resert,* para luego trabajar con funciones trigonométricas e hiperbólicas.
Para resolver expresiones con funciones trigonométricas e hiperbólicas se escribe: simplify (*expresión*) automáticamente da el valor real de la misma.

Para resolver identidades, se pulsa simplify (*expresión*), aparece la equivalencia de la expresión dada.

Para conocer la equivalencia de las identidades fundamentales: expand (*expresión*) y se observa dicha equivalencia.

Veamos algunos ejemplos:



Ejercicios:

Hallar el valor de:
1. $\sec^2(x) - \tan^2(x)$
2. $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x)$
3. $\cot^2(x) - \csc^2(x)$

Determinar la equivalencia de las siguientes identidades fundamentales:
4. sen(x + y)
5. cos(x – y)
6. tan(x + y)

Resolver las siguientes identidades:

7. $\dfrac{\cos(x)}{1-sen(x)}=\dfrac{1+sen(x)}{\cos(x)}$

8. $\dfrac{\tan(x)}{\sec(x)}=sen(x)$

9. $\dfrac{\cos^3(x)-sen^3(x)}{\cos(x)-sen(x)}=1+\sqrt{sen^2(x)-sen^4(x)}$

10. $\dfrac{\cos(x)-\cos^2(x)}{sen(x)\cos(x)}=\dfrac{1-\cos(x)}{sen(x)}$

UNIDAD TRES

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SUMATORIAS Y PRODUCTORIAS

CAPÍTULO SIETE: GEOMETRÍA ANALÍTICA

INTRODUCCIÓN

La geometría analítica o llamada también "*Geografía Matemática*" es la ciencia que combina el Álgebra y la Geometría para describir figuras geométricas planas desde el punto de vista algebraico y geométrico. Esto se podría resumir diciendo que dada gráfica, se debe encontrar una ecuación que la describa matemáticamente, o dando el modelo matemático, hacer la figura que la muestre gráficamente.

La Geometría Analítica fue desarrollada por el famoso Filosofo y Matemático Renato Descartes (1.596 – 1.650) quien a partir del planteamiento del plano cartesiano; también de su autoría, desarrolla toda la teoría geométrica, para darle nombre matemático a las figuras como la elipse, parábola y otras.

En este orden de ideas, el trabajo a desarrollar será el análisis de diversas figuras geométricas como la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, a las cuales se les describirá los parámetros que las explican claramente. Se estudiarán las ecuaciones canónicas, la general y finalmente el análisis de la ecuación general de segundo grado. Además se requiere el análisis de la traslación de ejes coordenados y algunas aplicaciones de éste tipo de figuras.

En muchas áreas de las Matemáticas son necesarias el uso de las sumatorias y productorias, tal es el caso de la Estadística, para calcular el promedio aritmético y promedio geométrico. En cálculo integral, para el estudio de las integrales definidas se requiere el uso de las sumatorias, en Algebra, la solución de un expansión binomial requiere el uso de las productorias; además, en diversas áreas de la Ingeniería las sumatorias y productorias son insumos para resolver diversos problemas. Lo anterior ha motivado el estudio de las temáticas referentes a Sumatorias y Productorias.

Lección Treinta y ocho: Análisis de la Recta

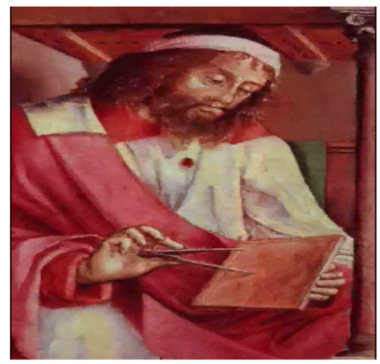
Generalidades: De las figuras geométricas la más sencilla y más conocida es la recta, ya que los parámetros que la caracterizan son en general sencillo y de mucha utilidad. Desde tiempos antiguos se sabe que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, lo cual es evidente. De las métricas de distancia la más común es la "Distancia Euclidiana", aunque existen otras que son importantes.

En este lección se analizará la recta desde el énfasis de la distancia euclidia entre dos puntos, sus parámetro, su gráfica. Pero además es pertinente hacer el análisis de rectas perpendiculares, rectas paralelas.

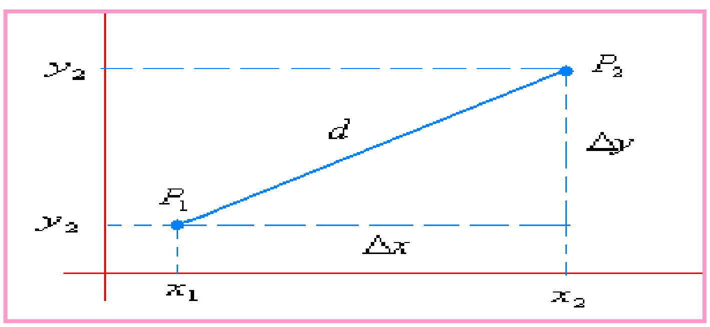
Se presentan las temáticas de manera sencilla pero con rigurosidad matemática, para que el estudiante se sumerja en este interesante tema de la recta, será de gran satisfacción.

DISTANCIA EUCLIDIANA:

A través de la historia de las Matemáticas, la distancia ha sido un concepto de gran trascendencia por su utilidad, desde la antigüedad se buscaron formas de determinarla. Fue ***EUCLIDES***, el gran matemático nacido en 300 años A: C: en Alejandría (Egipto) quien dio una solución para determinar la distancia entre dos puntos. A partir de conocido teorema de Pitágoras, estableció una técnica para determinar la distancia entre dos puntos.



FUENTE: euler.ciens.ucv.ve/matematicos/images/euclides.gif



Sean los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$.

d = distancia entre P_1 y P_2

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = y_2 - y_1$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Para señalar la distancia euclidia, generalmente se describe como: $d(P_1P_2)$, lo cual se determina por la fórmula anterior. Es pertinente aclarar que $d(P_1P_2) = d(P_2P_1)$,

Ejemplo 229:

Sean los puntos (-2, 4) y (2, 5), determinar la distancia entre dichos puntos.

Solución:

Tomemos $P_1(-2, 4)$ y $P_2(2, 5)$, entonces por medio del teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(2-(-2))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Entonces la distancia entre los puntos dados es de $\sqrt{17}$

Ejemplo 230:

La distancia de los puntos (0, 15) y (15, 0) será:

Solución:

$P_1(0, 15)$ y $P_2(15, 0)$, entonces por medio del teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(15-0)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{225+225} = \sqrt{450} \cong 21{,}21$$

Ejemplo 231:

La distancia entre dos puntos es de $\sqrt{25}$, uno de los puntos es P(17, 5) el otro punto Q(20, y). Cual será el valor de la coordenada y en el punto Q.

Solución:

A partir del teorema, debemos despajar la coordenada que es la incógnita.

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(20-17)^2 + (y_2-5)^2} \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{3^2 + (y_2-5)^2}$$

Eliminando raíz: $25 = 9 + (y_2-5)^2$

Despejando la incógnita: $25 - 9 = (y_2-5)^2 \Rightarrow\Rightarrow 16 = (y_2-5)^2 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{(y_2-5)^2}$

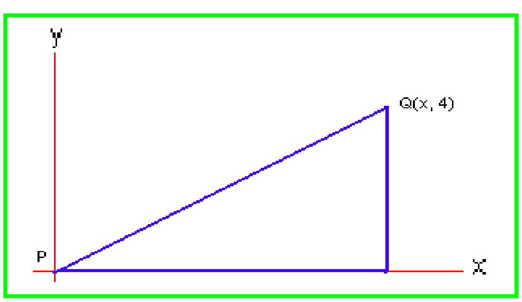
De nuevo eliminando la raíz: $4 = (y_2 - 5)$

Entonces: $y_2 = 4 + 5 = 9$. Así los puntos son: P(17, 5) y Q(20, 9).

Ejemplo 232:

El área de un triángulo rectángulo es 12 cm^2, uno de los vértices del triángulo en el punto P(0, 0), otro vértice es Q(x, 4). ¡Cual es la coordenada x del punto Q y cual es al distancia PQ?

Solución:



Una gráfica nos ayudará a resolver el problema.

Como $A = \frac{bxh}{2}$

A = Área del triángulo
b = Longitud de la base
h = Longitud de la altura

La longitud de la base, es precisamente la coordenada x del triángulo; entonces:

$$A = \frac{bxh}{2} \Rightarrow\Rightarrow b = \frac{2A}{h} = \frac{2x12}{4} = 6$$

Así, x = 6.   Ahora para hallar la distancia entre los puntos: P (0, 0) y Q (6, 4).

$d = \sqrt{(6-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ La distancia PQ es de $\sqrt{52}$

LA RECTA:

En geometría un de los conceptos más importantes es el de La Recta, dar una definición de recta es relativamente fácil, todos conocemos una línea recta, la dibujamos, la construimos, pero busquemos un acercamiento a una definición sencilla pero muy técnica.

DEFINICIÓN:
Una recta es una sucesión de puntos colineales; es decir, puntos ubicados uno tras otro de tal manera que uno esconde al anterior cuando se observa la fila de frente: El concepto de colineal, se puede explicar diciendo que cada punto de línea recta no se sale de la línea.

Parámetros de la Recta:

Toda recta tiene una serie de puntos P(x, y) que satisfacen una Ecuación, unos parámetros, una ecuación canónica y una general, además de una gráfica.

Los parámetros de la recta son:

- ***La Pendiente***: Se simboliza con la letra *m*, esta relacionado con la inclinación que tiene la recta respecto al eje x. Para determinar la pendiente de una recta se requiere solo de dos puntos. Como una recta presenta desplazamiento respecto a los ejes x e y, la pendiente la determina la relación de éstos.

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Δy = Desplazamiento en el eje y

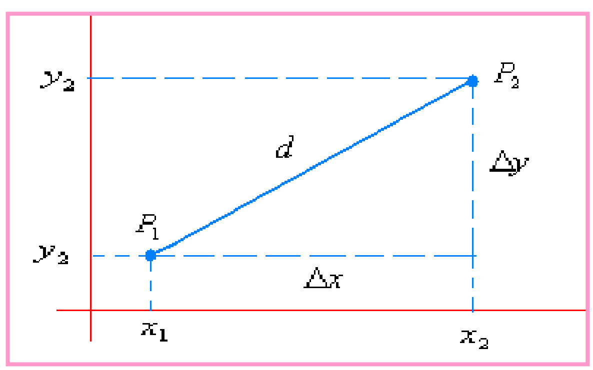
Δx = Desplazamiento en el eje x

Observando la gráfica, se puede determinar que las coordenadas de los puntos son:

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Identificando dos puntos, se puede determinar la pendiente de cualquier recta.

Según el valor de la pendiente (**m**), la recta puede tomar varios comportamientos:



Cuando **m > 0:** La recta presenta inclinación hacia la derecha, (positiva) es decir, el ángulo es agudo $(0 < \theta < \pi/2)$
Cuando **m < 0:** La recta presenta inclinación hacia la izquierda (negativa), es decir, el ángulo es obtuso. $(\pi/2 < \theta < \pi)$
Cuando **m = 0:** La recta es horizontal, luego el ángulo es cero $\theta = 0$.
Cuando **m = ∞.** Se presenta una indeterminación, la recta es vertical. $\theta = \pi/2$

Ejemplo 233:

Dados los puntos P (-4, -1) y Q (5, 2) determinar la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos.

Solución:

Se define $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Por medio de la fórmula de pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Reemplazando:

$$m = \frac{2-(-1)}{5-(-4)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

La pendiente es positiva, luego la recta debe tener inclinación hacia la derecha; es decir, el ángulo se menor de $\pi/2$.

Ejemplo 234:

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (4, -2) y (-3, 2)

Solución:

Se define $P_1(4, -2)$ y $P_2(-3, 2)$, entonces: $m = \frac{2-(-2)}{-3-4} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$
Como la pendiente es negativa, la recta tiene inclinación hacia la izquierda, es decir su ángulo será mayor de 90^0.

Ejemplo 235:

Cual será la inclinación de la recta que para por los puntos (2, 5) y (2, -4)

Solución:

Como en el caso anterior: $P_1(2, 5)$ y $P_2(2, -4)$, luego: $m = \frac{-4-5}{2-2} = \frac{-9}{0}$ Indeterminación

Como la pendiente es indeterminada, la recta es vertical, así su ángulo es de 90^0.

- *El Intercepto*: Se simboliza con la letra b, esta relacionado con el punto donde la recta corta al eje y. En la ecuación canónica éste corresponde al término independiente, en la ecuación general, para identificarlo, se debe despejar la variable y.

Ecuación de la Recta:

Como se dijo en la parte inicial de este tema, la recta tiene dos tipos de ecuación, vamos a analizar cada una.

-***Ecuación Canónica***: Llamada también ecuación analítica, ya que por medio de ésta se puede inferir el comportamiento de la recta.

$$\boxed{y = mx + b}$$

La ecuación muestra una pendiente ***m***, un intercepto ***b*** y una serie de puntos (x, y) que satisfacen dicha recta.

- ***Ecuación General:*** Es una ecuación de primer grado, de la forma:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

En esta ecuación no se ve explícitos los parámetros de la recta, para poderlos observar, se debe despajar la variable *y*.

Ejemplo 236:

Dada la ecuación y = 4x – 2. Identificar los parámetros, obtener la ecuación general y hacer la gráfica.

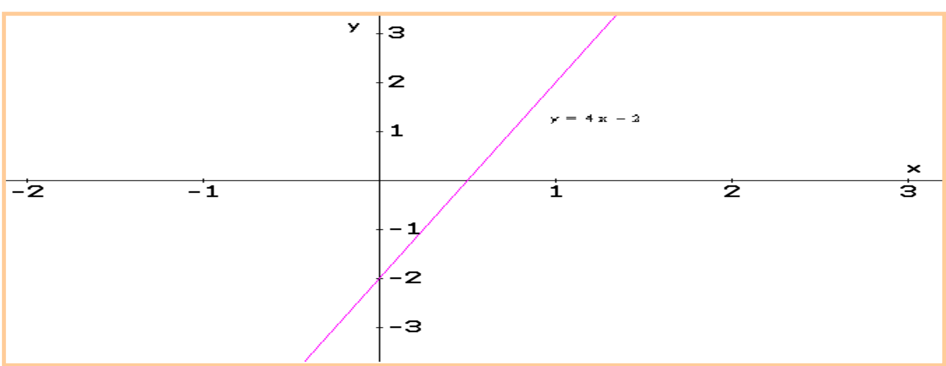
Solución:

Los parámetros se pueden visualizar ya que se tiene la ecuación canónica. Así: Pendiente = 4 y el intercepto = –2. La recta tiene inclinación hacia la derecha, es decir, positiva y corta al eje vertical en y = -2

La ecuación general, se obtiene igualando a cero la ecuación canónica.
y = 4x – 2, entonces: y – 4x + 2 = 0, esta es la ecuación general.

La gráfica, se puede hacer obteniendo dos puntos como mínimo, lo que se hace dando cualquier valor a x y buscando su correspondiente y, en la ecuación canónica.

x	1	-1
y	4(1) – 2 = 2	4(-1) – 2 = - 6



Ejemplo 237:

A partir de la ecuación 4y + 16x +12 = 0, obtener la ecuación canónica, identificar los parámetros y hacer la gráfica.

Solución:

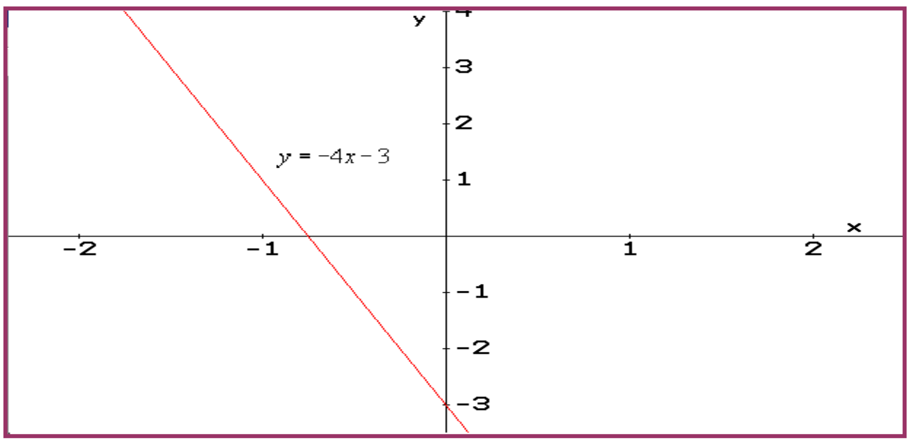
Para hallar la ecuación canónica se despeja la variable y en la ecuación general:

$$4y+16x+12=0 \Rightarrow\Rightarrow 4y=-16x-12 \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{-16x-12}{4}$$

Separamos el denominador para cada término del numerador. $y=\frac{-16}{4}x-\frac{12}{4} \Rightarrow\Rightarrow y=-4x-3$

Con esta ecuación podemos identificar los parámetros: Pendiente: - 4; Intercepto: -3
La gráfica, al igual que en el ejemplo anterior (244), se obtiene dando mínimo dos valores a la variable x, para obtener el valor de y.

x	1	-1
y	4(1) – 3 = 1	4(-1) – 3 = - 7



Como la pendiente es negativa, el ángulo es mayor de π/2.

Ecuación Punto Pendiente: En diversas ocasiones se trabaja con la conocida ecuación punto pendiente, donde los parámetros son la pendiente y un punto conocido de la recta. Este tipo de ecuación es de la forma: $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$ Para $P(x_1, y_1)$

Ejemplo 238:

Una recta tiene como pendiente m = - 2 y para por el punto (3, 4). Hallar la ecuación canónica y general.

Solución:

Reemplazando en la ecuación: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow\Rightarrow y-4=-2(x-3)$
A partir de esta podemos obtener la canónica.

$$y-4=-2(x-3) \Rightarrow\Rightarrow y-4=-2x+6 \Rightarrow\Rightarrow y=-2x+10$$

La ecuación canónica: $y=-2x+10$. Entonces la pendiente es – 2 y el intercepto 10.
Para la ecuación general, igualamos la canónica a cero:
$y=-2x+10 \Rightarrow\Rightarrow 2x+y-10=0$. Esta última es la ecuación general.

Ejemplo 239:

La recta L para por los puntos (4, 3) y (-2, - 4). Hallar la ecuación analítica, la general y la de punto pendiente.

Solución:

Inicialmente calculamos la pendiente: $m = \frac{-4-3}{-2-4} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$

La ecuación canónica será de la forma: $y = \frac{7}{6}x + b$

Para hallar b, reemplazamos uno de los puntos en la ecuación anterior. Tomemos el punto (4, 3)

$$3 = \frac{7}{6}(4) + b \Rightarrow\Rightarrow 3 - \frac{28}{6} = b \Rightarrow\Rightarrow b = -\frac{18-28}{6} = -\frac{5}{3}$$

Así la ecuación canónica será: $y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{3}$

Para hallar la ecuación general, igualamos a cero toda la expresión:

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{3} \Rightarrow\Rightarrow y = \frac{7x-10}{6} \Rightarrow\Rightarrow 6y = 7x - 10 \Rightarrow\Rightarrow 6y - 7x + 10 = 0$$

Para hallar la ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, conocemos la pendiente (7/6) y un punto (4, 3) o (- 2, - 4), luego reemplazamos, tomado solo un punto, obtenemos la ecuación:

Ecuación punto – pendiente: $y - 3 = \frac{7}{6}(x - 4)$

RECTAS PARALELAS:

Del concepto básico sobre la recta, esta aquel que dice que dos rectas son paralelas cuando tiene el mismo ángulo, o cuando para todo x, la distancia entre ellas siempre es igual.

> TEOREMA:
> Dos rectas no – verticales son paralelas si, y solo si, estas tienen la misma pendiente, es decir, $m_1 = m_2$ para: $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$

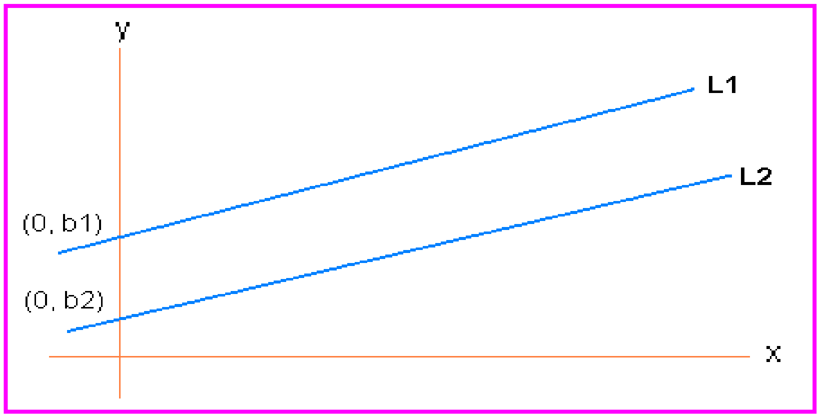
Demostración:

Sean L_1 y L_2 dos rectas con pendiente m_1 y m_2 respectivamente y con intercepto b_1 y b_2. las rectas tendrán como ecuación:

$y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$. Estas rectas cortarán en algún punto (x, y) si, y solo si, los valores de y para L_1 y L_2 sean iguales para algún x. Luego:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow\Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$$

La última ecuación se puede resolver solo si $m_1 \neq m_2$. Por consiguiente dos rectas se cortas si $m_1 \neq m_2$, pero por argumentos esto no se cumple, luego las rectas no se cortan, esto significa que son paralelas.



Ejemplo 240:

Dadas las rectas: $L_1 : 4x - 2y + 8 = 0$ y $L_2 : 2x - y + 6 = 0$. Determinar si son paralelas.

Solución:

Se observa que las ecuaciones están en forma general, luego primero se debe llevarlas a la forma canónica.

$$L_1 : 4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow\Rightarrow -2y = -4x - 8 \Rightarrow\Rightarrow y = \frac{-4x-8}{-2} = \frac{4x}{2} + \frac{8}{2}$$

Así: $L_1 : y = 2x + 4$

$$L_2 : 2x - y + 6 = 0 \Rightarrow\Rightarrow -y = -2x - 6 \Rightarrow\Rightarrow y = 2x + 6$$

Así: $L_2 : y = 2x + 6$

Como L_1 y L_2 tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.

Ejemplo 241.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (4, 2) y es paralela a la recta que tiene como ecuación 8x + 2y – 12 = 0.

Solución:

Sea L_1 la recta desconocida y L_2 la recta conocida.

Como la pendiente de la recta L_1 y L_2 son iguales ya que son paralelas, luego hallando la pendiente de L_2, para conocer la pendiente de L_1.

$$8x + 2y - 12 = 0 \Rightarrow\Rightarrow 2y = -8x + 12 \Rightarrow\Rightarrow y = \frac{-8x+12}{2} = -4x + 6$$

Entonces la ecuación de L_2: y = -4x + 6

La pendiente de L_1 es m = - 4.

Planteamos la ecuación canónica: y = mx + b, reemplazamos la pendiente: y = - 4x + b.
Para hallar el valor del intercepto (b), reemplazamos el punto que se conoce en la ecuación canónica y despajamos b. Recordemos que el punto es (4,2)

2 = - 4 (4) + b, luego: b = 18.
Por consiguiente la ecuación de la recta L_1 es: y = - 4x + 18

RECTAS PERPENDICULARES:

Cuando dos rectas se cortan en algún punto, estas NO son paralelas, pero si las rectas se cortan de tal manera que el ángulo entre ellas es de π/2, se dice que las rectas son perpendiculares.

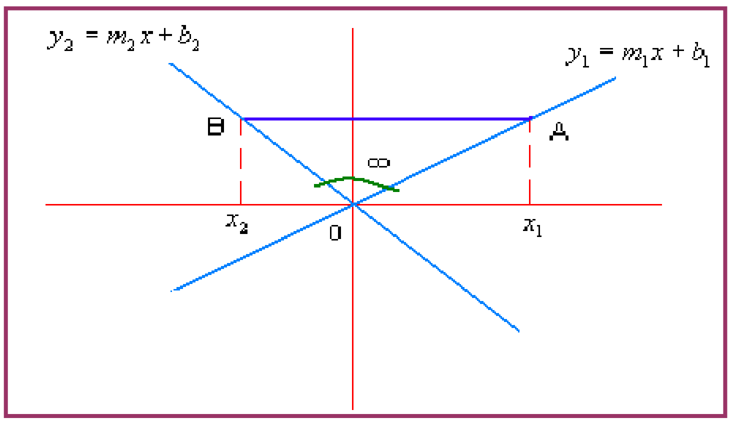
> TEOREMA:
> Dos rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente, son perpendiculares si, y solo si, $m_1 x\ m_2 = -1$

Demostración:

Para demostrar este teorema vamos a utilizar el muy conocido teorema de Pitágoras. Para los triángulos rectángulos: $h^2 = x^2 + y^2$ Se tomarán dos rectas que se corten en el origen de coordenadas.

0 = (0,0)
A = (x_1, y_1)
B = (x_2, y_2)
$\infty = \frac{\pi}{2}$
Podemos expresar A y B de la siguiente manera:

A = (x_1, m_1x_1)
B = (x_2, m_2x_2)



Las rectas y_1 y y_2 son perpendiculares si, y solo si, el ángulo ∞ es recto; es decir, el triángulo 0AB es rectángulo, así por el teorema de Pitágoras:
$$[d(AB)]^2 = [d(0A)]^2 + [d(0B)]^2$$

Reemplazando las coordenadas.
$$[d(AB)]^2 = [x_2 - x_1]^2 + [m_2 x_2 - m_1 x_1]^2$$

Según la construcción gráfica:
$$[d(0A)]^2 = [x_1 - 0]^2 + [m_1 x_1 - 0]^2 \quad \text{y} \quad [d(0B)]^2 = [x_2 - 0]^2 + [m_2 x_2 - 0]^2$$

Reemplazando en la ecuación inicial de distancia:
$$[x_2 - x_1]^2 + [m_2 x_2 - m_1 x_1]^2 = x_1{}^2 + (m_1 x_1)^2 + x_2{}^2 + (m_2 x_2)^2\}$$

Desarrollando los cuadrados:
$$x_2{}^2 - 2x_1 x_2 + x_1{}^2 + (m_2 x_2)^2 - 2m_2 x_2 m_1 x_1 + (m_1 x_1)^2 = x_1{}^2 + (m_1 x_1)^2 + x_2{}^2 + (m_2 x_2)^2$$

Se simplifican términos: $-2x_1 x_2 - 2m_2 x_2 m_1 x_1 = 0$

Reorganizando la ecuación: $-2x_1x_2(1+m_2m_1)=0 \Rightarrow\Rightarrow m_2m_1+1=0$

Finalmente: $m_2m_1=-1$

De esta manera queda demostrada la perpendicularidad de dos rectas.

Ejemplo 242:

Demostrar que las rectas x – 2y + 8 = 0 y 2x + y + 3 = 0, son perpendiculares.

Solución:

Primero expresemos las ecuaciones en forma canónica.

$$x-2y+8=0 \Rightarrow\Rightarrow -2y=-x-8 \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{-x}{-2}+\frac{-8}{-2} \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+4$$

$$2x+y+3=0 \Rightarrow\Rightarrow y=-2x-3$$

Tenemos $m_1 = ½$ y $m_2 = -2$

Se debe cumplir que $m_1*m_2 = -1$, veamos: 1/2 * (-2)= -1

Por consiguiente las rectas dadas son perpendiculares.

Ejemplo 243:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) y es perpendicular a la recta 6x + 3y – 12 = 0

Solución:

La recta conocida denominémosla L_1 y a la recta desconocida L_2. A partir de L_1 se identifica la pendiente.

$$6x+3y-12=0 \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{-6x+12}{3} \Rightarrow\Rightarrow y=-2x+4$$

Para L_1 se tiene m_1 y para L_2 se tiene m_2. Como dos rectas son perpendiculares si $m_1 * m_2 = -1$

-2 * m_2 = -1, entonces: $m_2 = ½$

Ahora planteamos la ecuación para L_2.

y = ½ x + b. Pero la recta pasa por el punto (3, 5), luego:

5 = ½ (3) + b, entonces: b = 5 – 3/2 = 7/2, por consiguiente:

$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ Ecuación canónica de la recta L_2

EJERCICIOS

Hallar la pendiente de la recta que para por los puntos dados:

1. (4, 7) y (- 2, - 3) Rta: m = 5/3

2. (- 4, 3) y (3, - 2) Rta: m = -5/7

3. (- 2, 3) y (4, 3) Rta: m = 0

4. (5, 4) y (5, - 4) Rta: m = Independiente

Hallar la ecuación de la recta que cumple con las condiciones dadas.

5. Pendiente 4 t el intercepto – 2: Rta: y = 4x – 2

6. Pasa por el punto (2, - 2) y Pendiente – 3. Rta: y = -3x + 4

7. Para por los puntos (8, 1) y (-3, 1) Rta: y = 1

8. Corta al eje x en 4 y al eje y en –2. Rta: y = (½)x – 2

Para cada caso, determinar si las rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

9. $3y - 2x - 8 = 0 \quad y \quad -4x + 6y - 10 = 0$ Rta: Paralelas

10. $\frac{1}{2}x + y - 5 = 0 \quad y \quad y - 2x = 8$ Rta: Perpendiculares

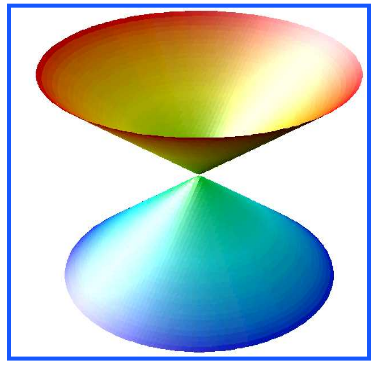
Resolver los problemas propuestos:

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (-2, 4) y es paralela a la recta x + 3y – 2 = 0.
Rta: 3y + x – 10 = 0

12. Hallar la ecuación de la recta que para por el punto (-5, 4) y es perpendicular a la recta que para por (1, 1) y (3, 7).
Rta: x + 3y – 7 = 0

13. Cuál será la ecuación general de la recta que pasa por (3, 4) y su pendiente es el doble de la pendiente de la recta 4x – 6y – 12 = 0.
Rta: 3y + 4x – 24 = 0

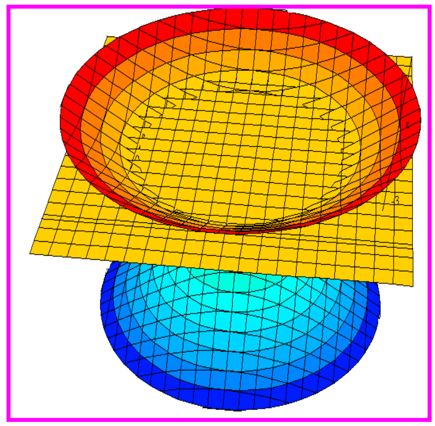
Lección Treinta y nueve: Análisis de la Circunferencia



Generalidades: La Circunferencia pertenece a la familia de las Cónicas, la palabra cónica viene de la figura geométrica CONO. Las secciones cónicas, entre las que está la circunferencia, son figuras geométricas que se obtienen al hacer pasar un plano de diferente forma a través de un par de conos invertibles y unidos por el vértice.

El análisis de las cónicas, esta en describir a partir de la gráfica una ecuación matemática para cada una de ellas o viceversa, a partir de una ecuación matemática hacer la gráfica correspondiente e identificar sus parámetros.

LA CIRCUNFERENCIA



Por geometría básica se sabe que la circunferencia es el perímetro del círculo, ésta no tiene área, solo longitud y los parámetros que la identifican. La circunferencia se forma cuando el plano corta horizontalmente el cono.

DEFINICIÓN:

La circunferencia es un conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano que equidistan a un punto fijo llamado centro. La distancia fija se le llama radio.

Los parámetros de la circunferencia son:
Centro: La coordenada en x se le denomina h y la de y se le denomina k. C(h, k)
Radio: Es la distancia del centro a cualquier punto de la misma, se representa por R.
Otros parámetros de la circunferencia, que no inciden directamente con la ecuación son:
Diámetro: $D = 2R$
Longitud: $L = 2\pi R$

Con los conceptos dados, se puede inferir que la circunferencia queda descrita por medio de su centro, su radio y el conjunto de puntos que la conforman.

Ecuación Canónica:

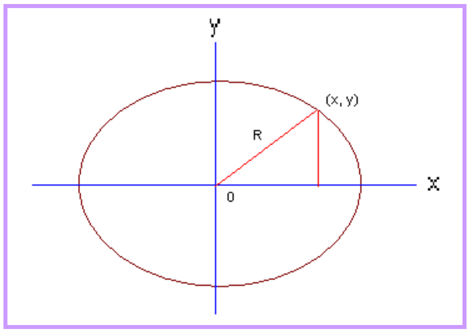
Para una circunferencia de centro en el origen de coordenadas (h, k) = (0, 0) y radio R, la ecuación canónica es de la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Demostración:

Para hacer la demostración de la ecuación canónica de la circunferencia, vamos a definir algunas condiciones:

El centro está en el origen, es decir (h, k) = (0, 0)
El radio es la distancia del centro a cualquier punto que conforman la circunferencia.



Por Pitágoras:

$$R^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$

Simplificando:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Así queda demostrada la ecuación canónica de la circunferencia.

Ejemplo 244:

Cuál será la ecuación canónica de la circunferencia cuyo centro es (0, 0) y radio 2; además, cual será su longitud.

Solución:

Aplicando la fórmula de la ecuación canónica: $R^2 = x^2 + y^2$ Reemplazando los valores, para este caso, radio.
$(2)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
Para hallar la longitud: $L = 2\pi R = 2(2)\pi = 4\pi$

Ejemplo 245:

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen de coordenadas y para por el punto (3, 4)

Solución:

Como el punto satisface la ecuación canónica, al reemplazar en dicha ecuación el punto obtenemos el radio. $R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow\Rightarrow R^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$
Entonces el radio será: R = 5. Así la ecuación quedará: $25 = x^2 + y^2$

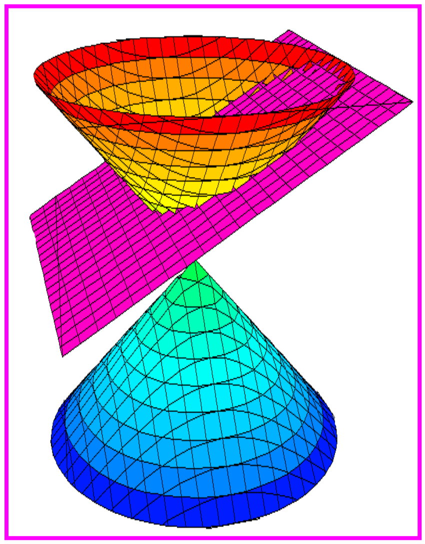
Ejemplo 246:

Una circunferencia tiene como ecuación canónica: $x^2 + y^2 = 36$ ¿Cuál será el diámetro y la longitud de dicha circunferencia?

Solución:

Si ajustamos la ecuación que nos dan a la ecuación canónica: $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow\Rightarrow x^2 + y^2 = 6^2$
Así el radio será: R = 6. Como el diámetro es 2R, entonces: D = 2(6) = 12
La longitud será: L = 2πR = 2(6) π, L = 12π

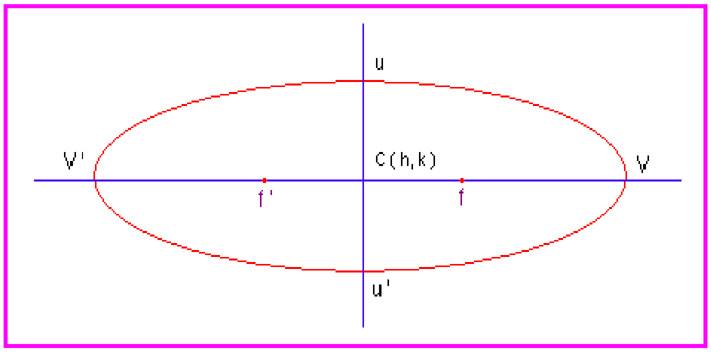
Lección Cuarenta: Análisis de la Elipse



La elipse también hace parte de la familia de las cónicas. Hemos escuchado sobre el movimiento elíptico, de la tierra, del electrón y de otros fenómenos, pero la pregunta sería ¿Como es la descripción matemática de esta figura geométrica?
La elipse es una curva ovalada, que se asemeja a una circunferencia alargada, se obtiene cuando el plano corta el cono de manera sesgada.

> DEFINICIÓN:
>
> La elipse es un conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante

Al igual que la circunferencia, la elipse tiene los parámetros que la caracterizan, los cuales se describen a continuación.



Los parámetros de la elipse son:
Centro: C (h, k)
Vértices mayores: V y V’
Vértices menores: u y u’
Focos: f y f’
Eje mayor: 2a (Distancia V V ‘)
Eje menor: 2b (Distancia u u ‘)

Por definición: 2a > 2b

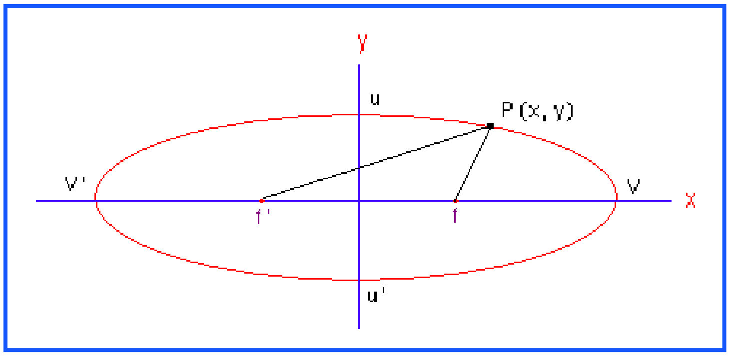
Ecuación Canónica: (Con eje mayor en x)

La ecuación canónica de la elipse con centro en C(0, 0) y eje mayor sobre la coordenada *x* es de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Demostración:

Para demostrar la ecuación canónica de la elipse, se van a tener algunas consideraciones:
Centro en (0, 0)
Eje mayor sobre el eje x
a = Distancia del centro al vértice.



Veamos las siguientes coordenadas

V(a, 0) y V '(- a, 0)
u (b, 0) y u ' (- b, 0)
f (c, 0) y f ' (- c, 0)
2a = Eje mayor
2b = Eje menor
P(x, y) = Los puntos de la elipse.

La gráfica muestra que 2a > 2b

Por definición: $d(Pf') + d(Pf) = 2a$

Las distancias dadas: $d(Pf') = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$

Operando: $d(Pf) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

Ahora: $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$

Simplificando: $\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a$

Reorganizando: $\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}$

Elevamos al cuadrado para eliminar raíces:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + (y)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Desarrollando los cuadrados:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificando términos semejantes: $-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Reorganizando términos: $4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$

Dividiendo por 4 toda la expresión y elevando al cuadrado.

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc \Rightarrow\Rightarrow a^2\left((x+c)^2 + y^2\right) = \left(a^2 + xc\right)^2$$

Desarrollando los cuadrados: $a^2\left(x^2 + 2xc + c^2 + y^2\right) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$

Multiplicando el primer término y simplificando: $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$

Reorganizamos para obtener trinomios cuadrados perfectos.

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividiendo todo por a^2 $(a^2 - c^2)$, entonces: $\dfrac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \dfrac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = \dfrac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$

Operando: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$

Por la definición se sabe que a > c, ya que la distancia del eje mayor es mayor que la distancia focal, entonces $a^2 > c^2$ así: $a^2 - c^2 > 0$. Esto nos lleva a que: $a^2 - c^2 = b^2$

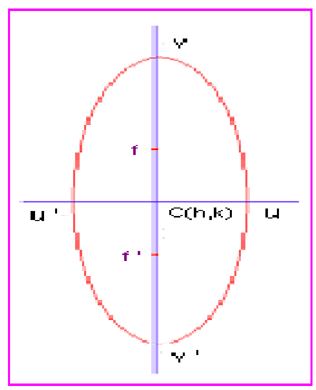
Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Así queda demostrada la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, focos sobre el eje *x* y eje mayor también sobre el eje *x*.

Ecuación Canónica: (Con eje mayor en y)

La ecuación canónica de la elipse con centro en C(0, 0) y eje mayor sobre la coordenada *y* es de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$



Demostración:

La demostración es análoga al caso anterior, es muy interesante que se realizara, en el grupo colaborativo y se compartiera con el Tutor.

Ejemplo 247:

A partir de la ecuación dada a continuación, identificar los parámetros de la elipse y hacer un bosquejo de la gráfica. $50x^2 + 72y^2 = 3.600$

Solución:

De la ecuación dada, obtener la canónica.

$$50x^2 + 72y^2 = 3.600 \Rightarrow\Rightarrow \frac{50}{3.600}x^2 + \frac{72}{3.600}y^2 = \frac{3.600}{3.600}$$

Haciendo las operaciones pertinentes: $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{50}=1$

Como ya tenemos la ecuación canónica, comenzamos a identificar los parámetros.

$a^2 = 72 \Rightarrow\Rightarrow a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ y $b^2 = 50 \Rightarrow\Rightarrow b = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Así:

Eje mayor: $2a = 2(6\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$

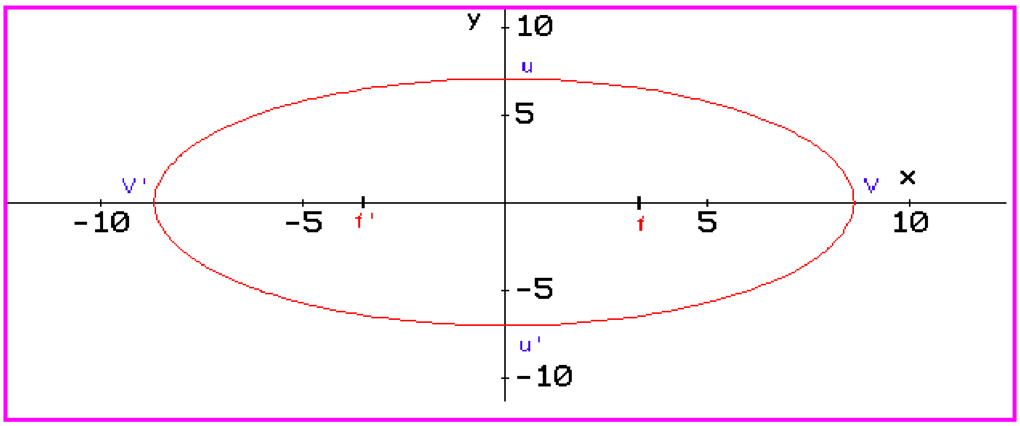
Eje Menor: $2b = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

Vértices mayores: $V = (6\sqrt{2},0)$ y $V' = (-6\sqrt{2},0)$

Vértices menores: $u = (0,5\sqrt{2})$ y $u' = (0,-5\sqrt{2})$

Foco: $c^2 = a^2 - b^2 = 72 - 50 = 22 \Rightarrow\Rightarrow c = \sqrt{22}$

Focos: $\left(\sqrt{22},0\right)$ y $\left(-\sqrt{22},0\right)$



Ejemplo 248:

Una elipse tiene como vértices: (±4,0) y focos (±2,0), hallar la ecuación canónica y la gráfica.

Solución:

Como se conocer los vértices, entonces: a = 4, $a^2 = 16$

También se conocen los focos: c = 2, $c^2 = 4$

Para hallar b: $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow\Rightarrow b^2 = 16 - 4 = 12$

A partir de los datos, construimos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

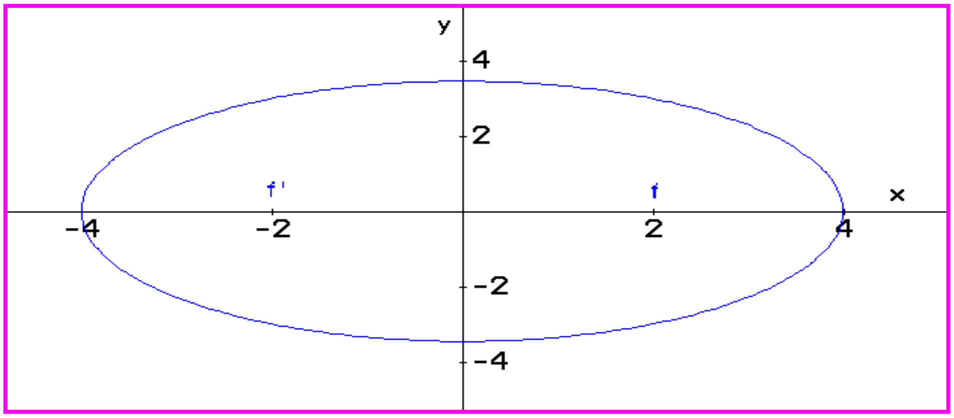
Ecuación canónica de la elipse con vértices en (±4,0) y focos en (±2,0)

Los otros parámetros:

Eje Mayor: a = 4, 2a = 8

Eje Menor: $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow\Rightarrow 2b = 4\sqrt{3}$

Bosquejo de la gráfica:



Ejemplo 249:

Dada la ecuación de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ Hallar los vértices, los focos, los ejes y hacer un bosquejo de la gráfica.

Solución:

Lo primero es transformar la ecuación dada a forma canónica, lo cual se consigue dividiendo todo por 36, veamos:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow\Rightarrow \frac{9}{36}x^2 + \frac{4}{36}y^2 = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Como $a^2 = 9$ esta sobre el eje y, entonces el eje mayor esta sobre dicho eje, igual que los focos. Se puede decir que la elipse es vertical.

$a^2 = 9 \Rightarrow\Rightarrow a = 3$

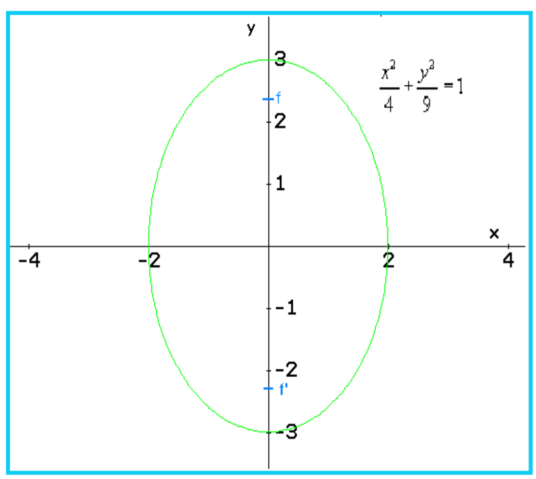
$b^2 = 4 \Rightarrow\Rightarrow b = 2$

Para hallar los focos es por medio de la expresión:

$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow\Rightarrow c = \pm\sqrt{5}$

Eje mayor: 2a = 2(3) = 6
Eje menor: 2b = 2(2) = 4
Focos: $f(0, \sqrt{5})$ y $f'(0, -\sqrt{5})$

Bosquejo de la gráfica se observa la frente.



EXCENTRICIDAD:

El concepto de excentricidad es usado para describir la forma de la curva, haciendo una relación de cociente entre la longitud del foco y la longitud del eje mayor. Esto nos permite determinar si la elipse es aplanada o abombada.

La excentricidad se define como: $\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$

Para la elipse la excentricidad está entre 0 y 1. (0 < e < 1). Cuando $e \to 0$ la elipse es casi circular, cuando $e \to 1$ la elipse es casi plana. ($\to$ Significa tiende o se acerca a...)

Para la circunferencia la excentricidad es cero (e = 0), esto significa que cuando e = 0, la figura es concéntrica. Lo anterior quiere decir que si a = b, entonces c = 0, obteniendo así una circunferencia.

Ejemplo 250:

Una elipse tiene vértices mayores en (±8, 0) y focos en (±5, 0), cual es su excentricidad.

Solución:

Por la ecuación: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

Consiste en una elipse con tendencia a ser plana, ya que la excentricidad en baja.

Ejemplo 251:

Para el caso del ejemplo 257, hallar la excentricidad de la elipse en análisis.

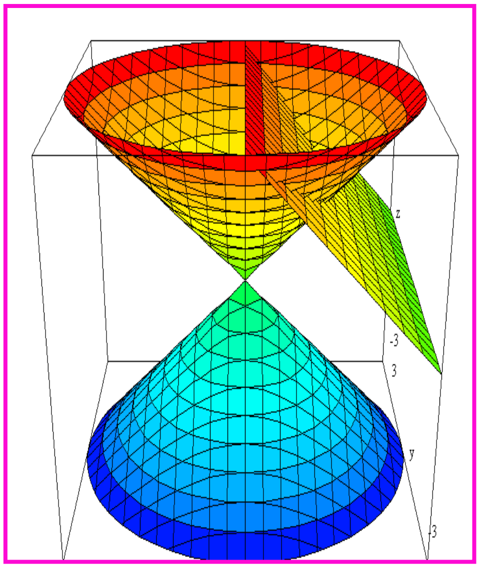
Solución:

Según los datos del ejemplo: $c = \sqrt{5} \cong 2{,}2360$ y a = 3, entonces: $e = \frac{2{,}2360}{3} = 0{,}7453$

La elipse tiene cierta tendencia a ser redonda.

Lección Cuarenta y uno: Análisis de la Parábola

Otra figura de la familia de las cónicas. La parábola es una figura que describe diversos fenómenos, como la trayectoria de un balón, la forma de las antenas de señales de televisión por cable, la trayectoria de un tejo en nuestro deporte autóctono y otros. Se forma cuando el cono es cortado por el plano de corte de manera sesgada.



DEFINICIÓN:

La parábola es un conjunto de puntos en el plano (x, y) que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo F llamado foco y una recta D llamada directriz.

Los parámetros de la parábola son:

Vértice V (h, k): Donde la curva se divide en dos partes iguales.
Foco: F: El punto fijo a una distancia ***p*** del vértice, llamada distancia focal.
Eje de Simetría: Una recta que para por el vértice y es perpendicular a la directriz.

Directriz D: Recta ubicada a la misma distancia que el foco pero en sentido contrario

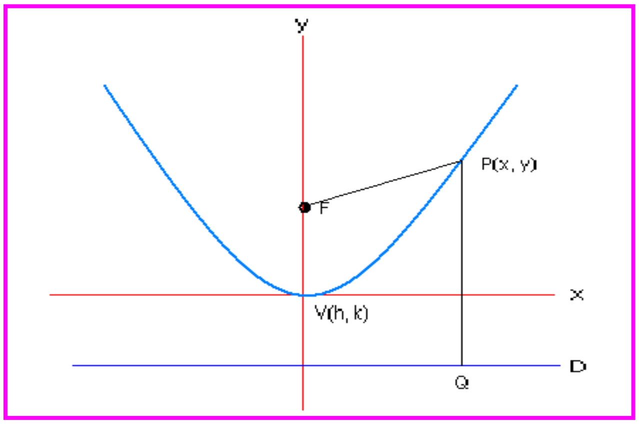
Ecuación Canónica: (Eje de Simetría vertical)

Toda parábola con eje de simetría vertical y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Demostración:

Por medio de una gráfica podemos ver los elementos que presenta una parábola.



Eje de Simetría: El eje y.

V (h, k) = (0, 0)

Foco: F (0, p)

P(x, y) = Conjunto de puntos que hacer parte de la curva

Q(x, -p)

Directriz: D = -p

Por hipótesis la distancia de F a P es igual a la distancia de P a Q. $d(PF) = d(PQ)$

Entonces: $d(PF) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$

$d(PQ) = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$

Aplicando el principio de la hipótesis: $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$

Desarrollando las operaciones: $\sqrt{(x)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p))^2}$

Elevando al cuadrado: $(x)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

Desarrollando los productos notables: $(x)^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$

Simplificando términos: $(x)^2 - 4py = 0$

Finalmente: $x^2 = 4py$

Así queda demostrada la ecuación canónica de la parábola bajo las condiciones establecidas.

Análisis de las Ramas:

Como la parábola tiene dos ramas que se abren a partir del vértice, es pertinente aclarar:

Si **p > 0.** Las ramas abren hacia arriba a partir del vértice.
Si **p < 0**. Las ramas abren hacia abajo a partir del vértice

Es pertinente aclarar que el vértice y el foco están sobre el eje de simetría; además, éste último y la directriz son perpendiculares.

Ecuación Canónica: (Eje de Simetría horizontal)

Toda parábola con eje de simetría horizontal y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio para desarrollar en el grupo colaborativo.

Análisis de las Ramas:

Para este caso:

Si **p > 0.** Las ramas abren hacia la derecha a partir del vértice.
Si **p < 0**. Las ramas abren hacia la izquierda a partir del vértice

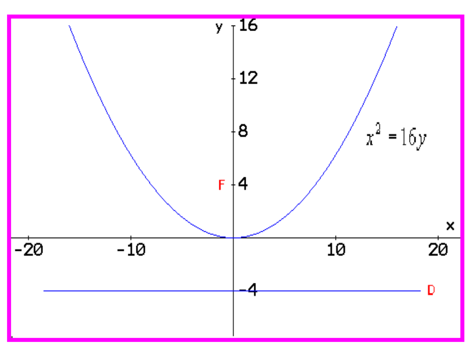
El vértice y el foco también están sobre el eje de simetría; además, éste último y la directriz son perpendiculares.

ECUACIÓN CANÓNICA	EJE DE SIMETRIA	VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	RAMAS
$x^2 = 4py$	x = 0	V(0, 0)	F(0, P)	y = -P	P>0: Hacia arriba P<0. Hacia abajo
$y^2 = 4px$	y = 0	V(0, 0)	F(P, 0)	x = -P	P>0: Hacia derecha P<0. Hacia izquierda

Ejemplo 252:

Dada la ecuación de la parábola $x^2 = 16y$. Identificar los parámetros y hacer un bosquejo de la gráfica.

Solución:



Como la variable x es la que esta al cuadrado, entonces el eje de simetría es vertical x = 0. Así la ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$ donde 4p = 16, entonces: p = 4.
Los parámetros son:
Vértice (0, 0)
Foco:(0, 4), distancia focal es p.
Directriz: y = - 4

Como p > 0, las ramas abren hacia arriba.

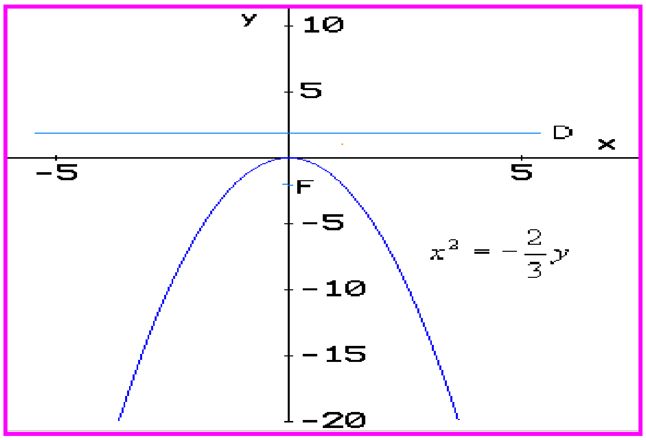
Ejemplo 253:

Una parábola tiene vértice en el origen, sus ramas abren hacia abajo, y pasa por el punto (2, -6). Hallar la ecuación canónica y hacer la gráfica.

Solución:

Como las ramas abren hacia abajo, el eje de simetría es vertical, luego la ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$ Para p < 0. Como la curva pasa por el punto (2, -6), éste satisface la ecuación. Entonces:

$$(2)^2 = 4P(-6) \Longleftrightarrow 4 = -24P \Rightarrow\Rightarrow P = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}$$



Por consiguiente la ecuación es de la forma:

$$x^2 = -\frac{4}{6}y \Rightarrow\Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}y$$

La ecuación finalmente es: $x^2 = -\frac{2}{3}y$

Foco: (0, -1/6)

Directriz. y = 1/6

Ejemplo 254:

Hallar la ecuación y hacer la gráfica de la parábola que tiene foco en (3, 9), la directriz tiene como ecuación x = - 3 y vértice en el origen.

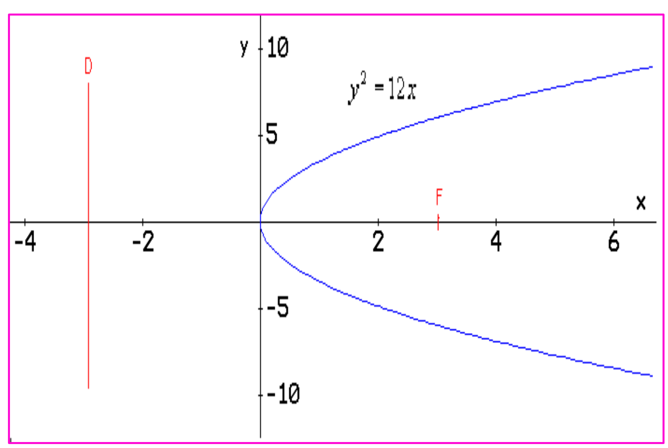
Solución:

Se observa que el foco esta sobre le eje x, lo que indica que el eje de simetría es horizontal. Así la ecuación es de la forma: $y^2 = 4px$

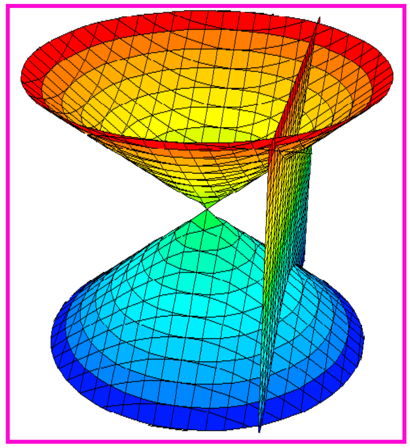
Como la directriz es x = - 3, nos indica que p = 3, que corresponde a la coordenada en x del foco. Entonces: $y^2 = 4(3)x = 12x$

La ecuación canónica será: $y^2 = 12x$

Como p > 0, las ramas abren hacia la derecha, como lo dice la teoría.



Lección Cuarenta y dos: Análisis de la Hipérbola

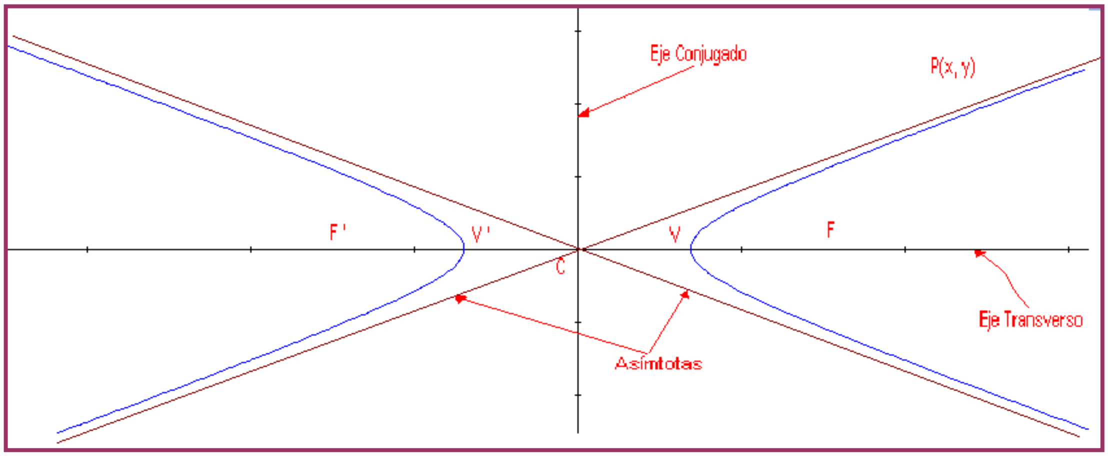


También pertenece a la familia de las cónicas. La hipérbola se obtiene cuando el plano de corte se hace vertical por las esquinas de los conos invertidos.

> DEFINICIÓN:
>
> La Hipérbola es un conjunto de puntos en el plano (x, y) cuya diferencia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Los parámetros de la Hipérbola son:

Centro: C (h, k). Equidistante a los vértices
Vértices V y V' Donde las curvas se dividen en dos partes iguales.
Focos: F y F': Los puntos fijos.
Eje Transverso: Una recta que para por los vértices y por los focos.
Eje Conjugado: En una recta perpendicular al eje transverso y para por el centro.
Asíntotas: Dos rectas que paran por el centro delimitan las curvas de la hipérbola.



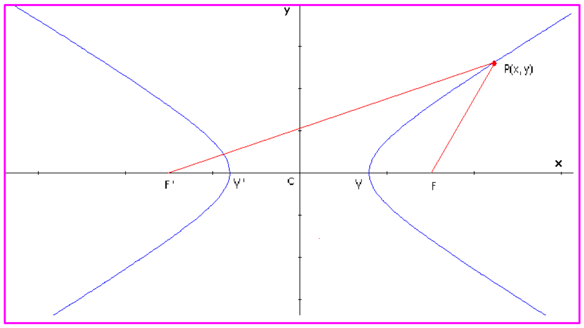
Ecuación Canónica: (Eje transverso horizontal)

Toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las abscisas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración:

Con ayuda de una gráfica, podemos hacer la demostración.



Centro: C (0, 0)
Eje Transverso: El eje x.
Eje conjugado: Eje y
Vértices: V(a, 0) y V '(- a, 0)
Focos: F(c, 0) y F '(- c, 0)

P(x, y) = Conjunto de puntos que hacer parte de la curva
Por la construcción: $a < c$ Distancia: d(F F ‘) = 2c

Por definición de la hipérbola:
$d(P,F') - d(P,F) = 2a$

A partir de este planteamiento y por distancia euclidia, se puede obtener la ecuación canónica de la hipérbola.

$d(P,F) = (x-c)^2 + (y-0)^2 = (x-c)^2 + y^2$

$d(P,F') = (x-(-c))^2 + (y-0)^2 = (x+c)^2 + y^2$

Por hipótesis: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Haremos el desarrollo en forma secuencial, pero es pertinente que usted estimado estudiante, identifique las propiedades aplicadas en cada paso.
Inicialmente se plantea la distancia euclidia y se eleva al cuadrado, para eliminar radicales.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Se simplifica el primer término y se desarrolla el producto notable del segundo término.

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Se desarrollan los productos notables presentes en la ecuación obtenida.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Se simplifican términos semejantes y reorganiza la ecuación:

$$2xc + 2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow\Rightarrow 4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Como todos los términos tienen como coeficiente 4, simplificamos y elevamos al cuadrado, para eliminar el radical que se presenta allí:

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow\Rightarrow (xc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Desarrollamos las operaciones indicadas:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] \Rightarrow\Rightarrow x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

Simplificando: $x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

Factorizando: $x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Dividimos toda la expresión por $a^2(c^2 - a^2)$ entonces: $\dfrac{x^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} - \dfrac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \dfrac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$

Simplificando, se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$

Como a < c entonces: c – a > 0 y $c^2 - a^2 > 0$. Denominamos a $c^2 - a^2 = b^2$. Finalmente la ecuación queda de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Así queda demostrada la ecuación canónica de la hipérbola.

Ecuación Canónica: (Eje transverso vertical)

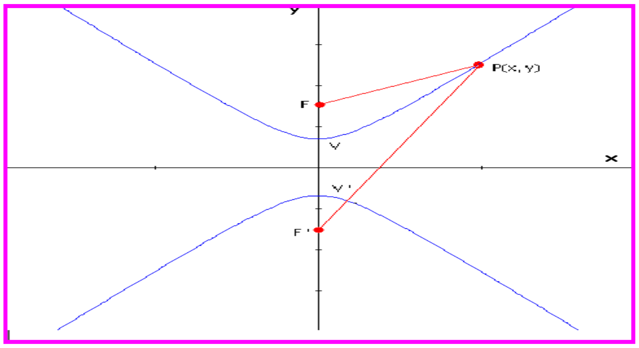
Toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las ordenadas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Demostración:

Con los mismos argumentos que se tuvieron en cuenta en el caso anterior, por favor estimado estudiante desarrolle la demostración.

Demos algunos lineamientos:



Centro: C (0, 0)
Eje Transverso: El eje y.
Eje conjugado: El Eje x
Vértices: V (0, a) y V '(0, - a)
Focos: F (0, c) y F '(0, - c)
P(x, y) = Conjunto de puntos que hacer parte de la curva
Por la construcción: $a < c$

Distancia: d (F F ') = 2c

ASINTOTAS:

En la hipérbola se conocer dos rectas oblicuas que pasan por centro de la hipérbola, cuya función es orientan la curvatura de la figura. La obtención de la ecuación de dichas rectas, se hace a partir de la ecuación canónica. La obtención de la ecuación se hace despejando la variable y en la canónica.

Se presentan dos casos:

1. Eje transverso horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow\Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

Si $x \neq 0$ entonces: $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \Rightarrow\Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$

Cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$ la expresión $a^2 / x^2 \to 0$, así a medida que la x crece, la ecuación se reduce a: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Por consiguiente las asíntotas de una hipérbola cuyo eje transverso es x:

$\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ y $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$

2. Eje transverso Vertical:

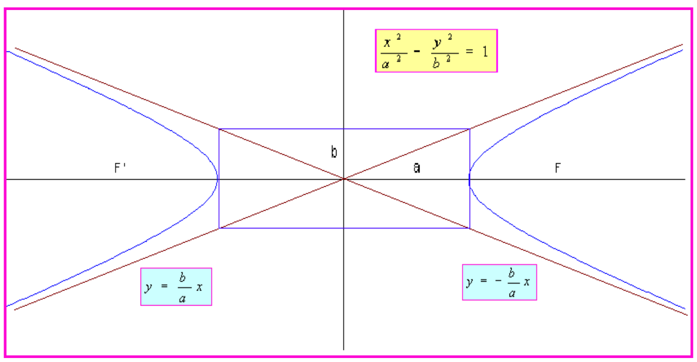
A partir de la ecuación: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ Se llega a las ecuaciones de las asíntotas.

$\boxed{y = \frac{a}{b}x}$ y $\boxed{y = -\frac{a}{b}x}$

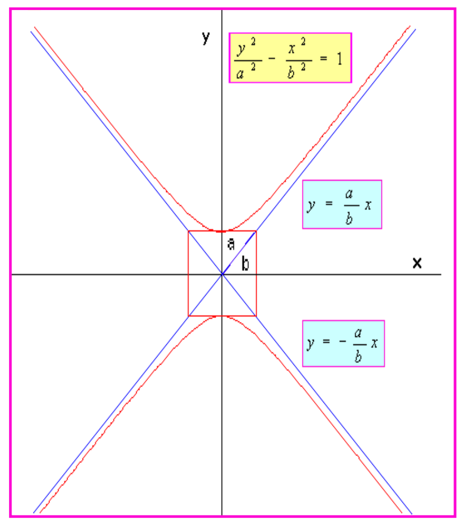
NOTA: *Se deja como ejercicio la demostración de estas ecuaciones, que se puede hacer en forma individual, en el grupo colaborativo o en compañía del Tutor.*

Las siguientes gráficas ilustran los dos casos.

Hipérbola con eje transverso horizontal



Hipérbola con eje transverso vertical.



Ejemplo 255:

Hallar los parámetros de la hipérbola que tiene como ecuación $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

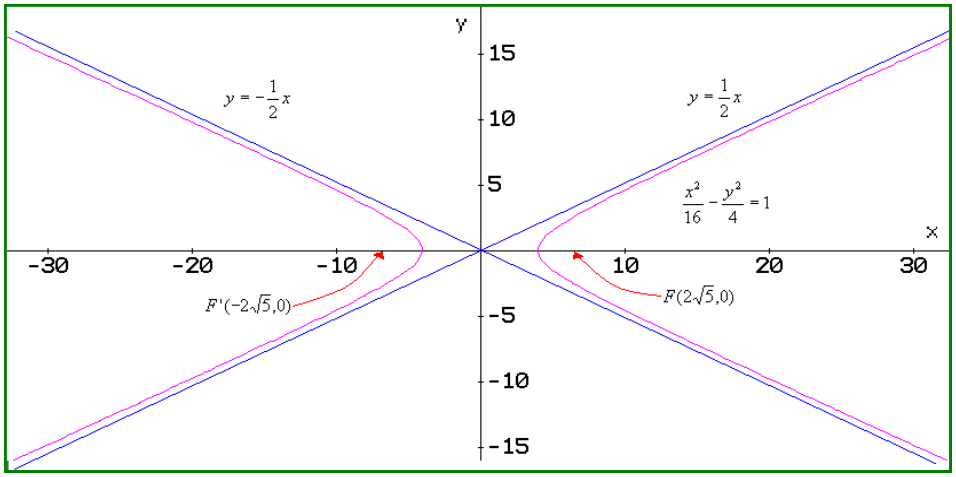
Solución:

De la ecuación: $a^2=16 \Rightarrow\Rightarrow a=4$ y $b^2=4 \Rightarrow\Rightarrow b=2$

Como el valor mayor esta sobre la variable x, el eje transverso esta sobre x.
Los vértices: V (4, 0) y V ‘(- 4, 0)
Los focos: F(c, 0) y F ‘(-c. 0)

Para calcular el valor de c, utilizamos la condición dada en estos casos: $b^2=c^2-a^2$
Despejamos c: $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow\Rightarrow c^2=4+16=20 \Rightarrow\Rightarrow c=\pm\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$
Así los focos son: $F(2\sqrt{5},0) \quad y \quad F'(-2\sqrt{5},0)$

Asíntotas: $y=\frac{b}{a}x \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{2}{4}x \Rightarrow\Rightarrow y=\frac{1}{2}x \qquad y=-\frac{b}{a}x \Rightarrow\Rightarrow y=-\frac{2}{4}x \Rightarrow\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x$



Ejemplo 256:

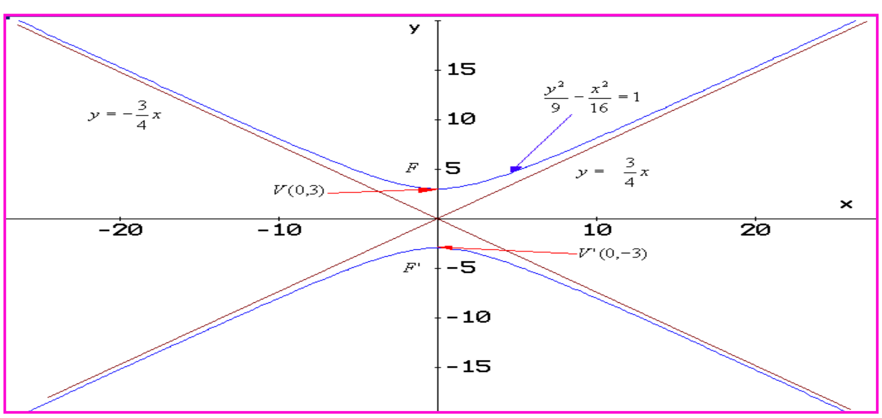
Dada la ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0) $16y^2 - 9x^2 = 144$.
Identificar sus parámetros y hacer la gráfica.

Solución:

Primero transformemos la ecuación dada a la forma canónica, lo cual se hace dividiendo todo por 144 y simplificando:

$$\frac{16}{144}y^2 - \frac{9}{144}x^2 = \frac{144}{144} \Rightarrow\Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

El eje transverso esta en x, ya que el mayor valor esta sobre dicha variable.
Vértice: V (0, a) y V ‘(0, -a)
Como $a^2 = 9 \Rightarrow\Rightarrow a = \pm 3$ Entonces: $V(0,3)$ y $V'(0,-3)$
Los focos: Como $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow\Rightarrow c = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ Entonces: $F(0,5)$ y $F'(0,-5)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x \Rightarrow\Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ $y = -\frac{3}{4}x$
Bosquejo de la gráfica:



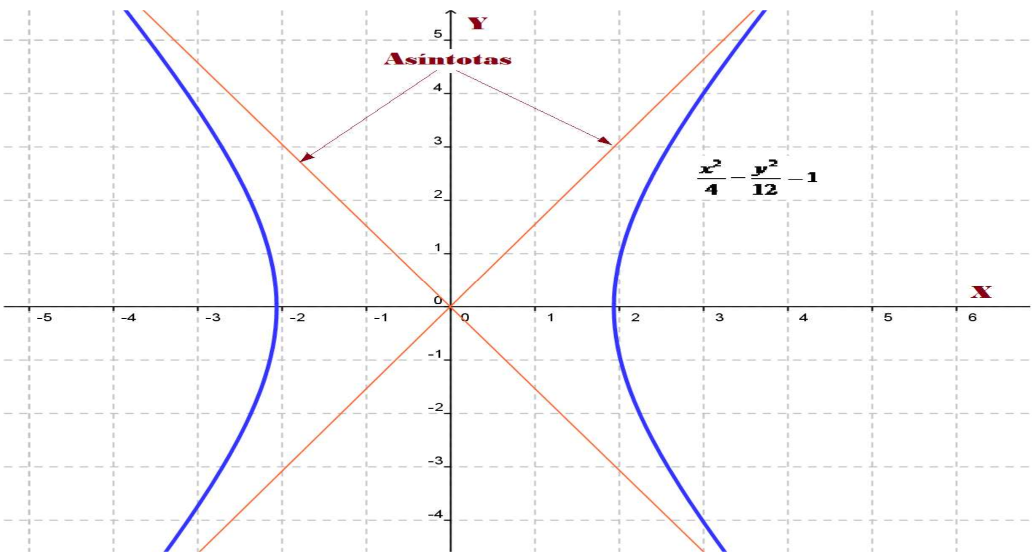
NOTA: Cuando *y* en la ecuación canónica es positiva, entonces el eje transverso es paralelo a la coordenada y. De la misma manera cuando x es positiva en la ecuación canónica, el eje transverso es paralelo al eje x.

Ejemplo 257:

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola cuyos focos están en (±4, 0) y a = 2.

Solución:

Según los datos: a = 2, entonces $a^2 = 4$. c = 4, entonces: $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$. b ≈ 3,464
Por otro lado como las coordenadas de los focos están sobre la abscisa (eje x), lo que nos indica que el eje transverso está sobre el eje x. En este orden de ideas, la ecuación es de la forma:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Reemplazando: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$



EJERCICIOS

1. Encontrar la ecuación canónica, el diámetro y longitud de la circunferencia, cuyo centro es en el origen de coordenadas y para por el punto (0, 6)

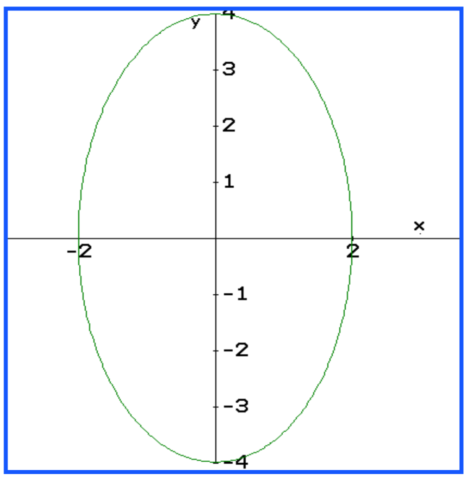
Rta: $x^2 + y^2 = 36$, D = 12, L = 12π

2. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 49$, hallar el radio, el centro y la longitud.

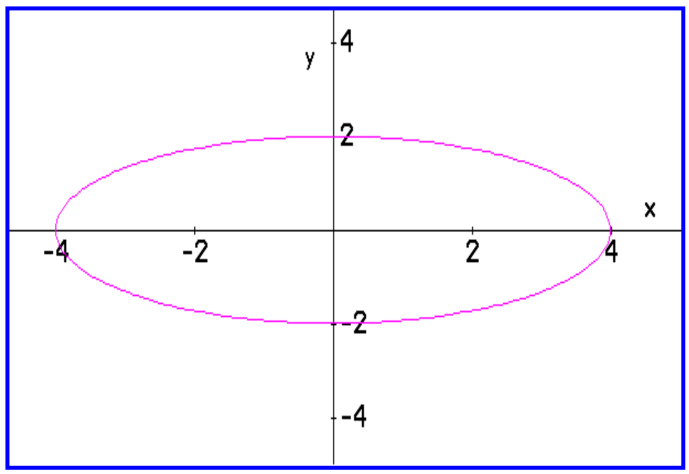
Rta: R = 7, C (0, 0), L = 14π

3. Relacione la gráfica con la ecuación correspondiente:

A



B



1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ 2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Dada la ecuación, identificar los parámetros de la elipse y hacer la gráfica.

4. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

Rta: V(0, 5) y V '(0, -5); f(0, 4) y f ' (0, -4)

Eje mayor: 10 y eje menor: 6

5. $4x^2 + y^2 = 16$

Rta: V(0, 4) y V '(0, -4); $f(0, 2\sqrt{3})$ y $f'(0, -2\sqrt{3})$

Eje mayor: 8 y eje menor:4

Encontrar la ecuación de la elipse, a partir de los parámetros dados:

6. C(0,0), f(3, 0) y V(5, 0)

Rta: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

7. Focos: (0, ±3), intersección en x = ±2 Rta: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$

8. Determinar la excentricidad de los pontos 6.

Rta: $e_6 = 0{,}8320$

Para las ecuaciones dadas, identificar los parámetros y hacer la gráfica correspondiente.

9. $y^2 = 16x$ Rta: V(0, 0); F(2, 0); D: x = - 2

10. $x^2 = 36y$ Rta: V(0, 0); F(0, 9); D: y = - 9

11. $12x + y^2 = 0$ Rta: V(0, 0); F(-3, 0); D: x = 3

A partir de los datos dados, hallar la ecuación de la parábola.

12. F(3, 0); D: x = - 3 Rta: $y^2 = 12x$

13. V(0,0); Eje simetría horizontal y pasa por (-1, 4) Rta: $y^2 = -16x$

14. La fachada de un edificio tiene forma parabólica, el largo es de 32,5 metros y el ancho de la base es de 24,2 metros. Identificar la ecuación que modela el diseño de la fachada.

Rta: $x^2 = \frac{9}{2}y$

15. Un túnel tiene forma parabólica, su altura máxima es de 12,8 metros y el ancho de la base es de 10,2 metros. ¿Cuál será la altura del túnel a 1,5 metros de la orilla del mismo?

Rta: y = 6,4 metros

Encontrar La ecuación canónica de la hipérbola, a partir de los datos dados.

16. Centro(0, 0), Foco(3, 0), Vértice(1, 0) Rta: $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

17. Centro(0, 0), Foco(0, -6), Vértice(0, 4) Rta: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$

18. Focos(±5, 0), Vértices(±3, 0) Rta: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

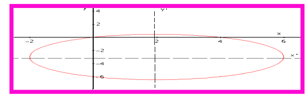
A partir de la ecuación dada, identificar los parámetros y hacer un bosquejo de la gráfica.

19. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ Rta: $F(\pm\sqrt{29},0)$ y $V(\pm 5,0)$

20. $6y^2 - 3x^2 = 18$ Rta: $F(0,\pm 3\sqrt{5})$ y $V(0,\pm\sqrt{3})$

21. $x^2 - y^2 - 25 = 0$ Rta: $F(\pm 5\sqrt{2},0)$ y $V(\pm 5,0)$

Lección Cuarenta y tres: Traslación de Ejes

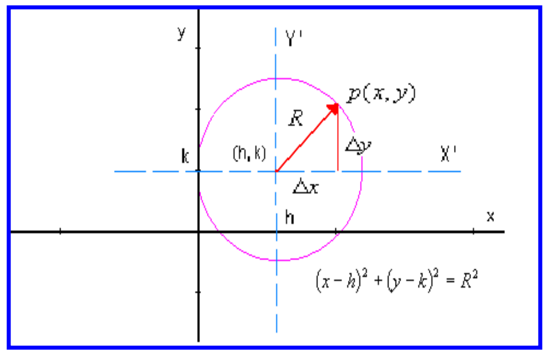


En muchas situaciones, el centro de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y el vértice de la parábola, NO están en el origen de coordenadas, luego se requiere un análisis de dichas situaciones.

En este apartado vamos a estudiar las cónicas, cuando en centro o vértice están fuera del origen de coordenadas.

LA CIRCUNFERENCIA.

Cuando el centro de la circunferencia esta fuera del origen de coordenadas, digamos en (h, k), donde h corresponde a la coordenada en x y k a la coordenada en y, la ecuación varia ligeramente.



Se observa que se presenta un cambio en las coordenadas del plano.

$\Delta x = x - h$

$\Delta y = y - k$

Para calcular R, se utiliza el teorema de Pitágoras:

$R^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Reemplazando, $\Delta x \quad por \quad x-h$ y $\Delta y \quad por \quad y-k$, llegamos a la ecuación requerida.

Ecuación canónica de la circunferencia: Centro en (h, k) $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=R^2}$

Ejemplo 258:

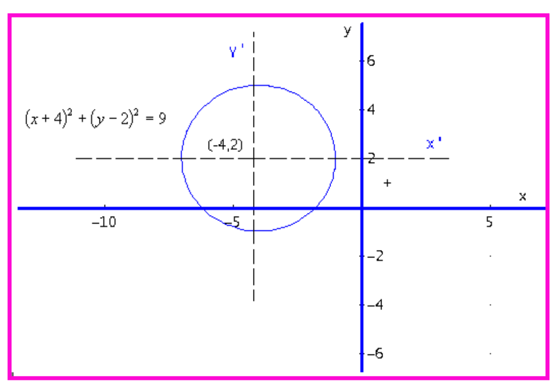
Hallar la ecuación canónica de la circunferencia y hacer la gráfica, si esta tiene el centro en (-4, 2) y su radio es de 3 unidades.

Solución:

Como se conoce el centro y el radio, por medio de la ecuación, reemplazamos:

$(x-(-4))^2+(y-2)^2=3^2 \Rightarrow\Rightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=9$

La gráfica se puede ver en el esquema siguiente.

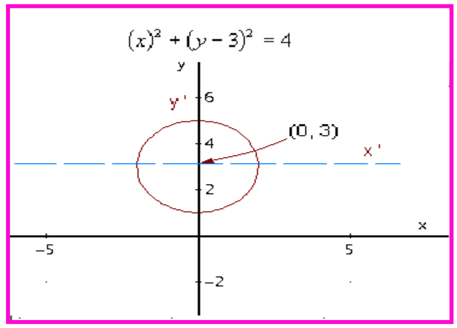


Ejemplo 259:

Una circunferencia tiene como ecuación: $(x)^2 + (y-3)^2 = 4$ Hallar el centro, el radio y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Según la ecuación, se observa que (h, k) tiene como coordenadas (0, 3) que será el centro de la circunferencia y el radio R = 2.
La gráfica la podemos observar en seguida.



Ejemplo 260:

Hallar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Solución:

Se observa que la ecuación dada NO es la canónica, luego debemos transformar dicha ecuación a la forma canónica. Veamos cómo se hace.
A partir de la ecuación dada, se agrupan variables similares.

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = 3$

Completamos cuadrados, recordemos que esto se hace, dividiendo el coeficiente del segundo término en 2 y elevando al cuadrado. Se debe tener en cuenta que lo que se adiciona a un lado de la ecuación, también se debe adicionar al otro lado.

$$(x^2 - 6x + (6/2)^2) + (y^2 + 4y + (4/2)^2) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 3 + 9 + 4$$

Factorizando los dos trinomios, se obtiene la ecuación canónica: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

Entonces: centro (3, -2) y radio R = 4.
Estimado estudiante, por favor hacer un bosquejo de la gráfica.

LA ELIPSE.

Al igual que en la circunferencia, en la elipse la situación es similar. El centro es (h, k) que se obtiene cuando el centro que estaba en el origen se desplazo h unidades en x y k unidades en y, conlleva a ecuaciones canónicas ajustadas, las cuales son más generales.

La ecuación canónica de una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje x es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

De la misma manera, la ecuación canónica de una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje y es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$$

Ejemplo 261:

Hallar la ecuación de la elipse con centro en (3, 2), focos en (1, 2) y (5, 2); además b = 2.

Solución:

Según los datos: (h, k) = (3, 2) La distancia focal es c = 2, esto por la ubicación del centro y de los focos. Además, b = 2, entonces se puede calcular a:

Como $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ Reemplazando:

$a^2 = (2)^2 + (2)^2 = 8$

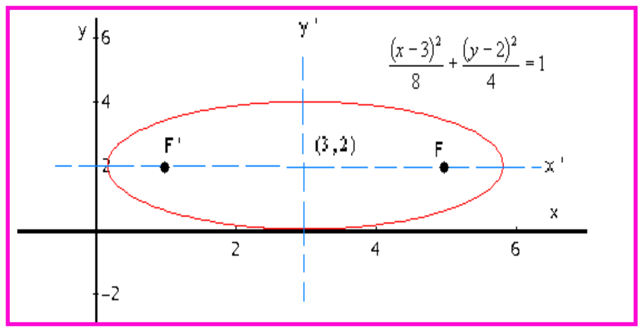
Como los focos están paralelos al eje x, entonces la ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Con los datos obtenidos, la ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Veamos un bosquejo de la gráfica



Ejemplo 262:

Una elipse tiene centro en (-3, -2), un foco está en (-3, -5); además, pasa por el punto P(-3, 3). Hallar la ecuación canónica de la elipse y un bosquejo de la gráfica.

Solución:

Si el centro está en (-3, -2) y un foco en (-3, -5), el otro foco será (1, -5), ya que la distancia c = 3. En primera instancia la ecuación será: $\frac{(x-(-3))^2}{b^2} + \frac{(y-(-2))^2}{a^2} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{b^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1$

La ecuación es de ésta forma porque los focos son paralelos al eje y. Para hallar los valores de a y b, procedemos así: $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

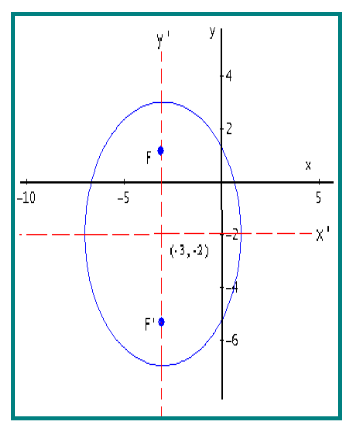
Pero c = 3, entonces c^2 = 9 así: $9 = a^2 - b^2 \Rightarrow\Rightarrow b^2 = a^2 - 9$; además, se conoce un punto (-3, 3), todo esto lo reemplazamos en la ecuación canónica.

$$\frac{(x+3)^2}{b^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{(-3+3)^2}{a^2-9} + \frac{(3+2)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{5^2}{a^2} = 1 \Rightarrow\Rightarrow a^2 = 25$$

Ahora: $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow\Rightarrow 25 - 9 = 16$

La ecuación queda finalmente así: $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

Vértices: V (-3,3) y V' (-3, -7)



Ejemplo 263:

Para el caso del ejemplo 268 y 269, hallar la excentricidad.

Solución:

Para el ejemplo 268: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.707$

Por ser muy cercana a uno, la elipse tiene a ser achatada.

Para el ejemplo 269: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{9}}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$

Como e = 0,5 la elipse tiene a ser circular; es decir, ni muy acharada ni muy abombada.

LA PARÁBOLA.

En la parábola el vértice puede estar fuera del origen de coordenadas, esto nos indica que las coordenadas del mismo se han corrido h unidades en x y k unidades en y, también como en los casos anteriores se obtienen ecuaciones canónicas ajustadas, las cuales son más generales.

Cuando el vértice de la parábola esta en el punto (h, k) y el eje de simetría paralelo al eje y, se obtiene una ecuación de la forma:

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Recordemos que si p > 0, las ramas abren hacia arriba a partir del vértice y si p < 0, las ramas abren hacia abajo a partir del vértice.

El otro caso es cuando el vértice de la parábola esta en el punto (h, k) y el eje de simetría paralelo al eje x, se obtiene una ecuación de la forma:

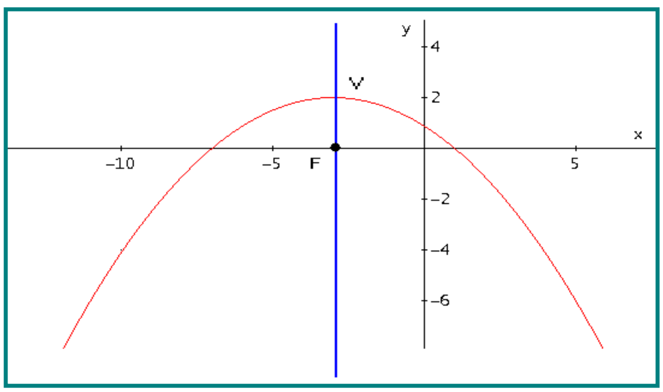
$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

Para este caso, si p > 0, las ramas abren hacia la derecha a partir del vértice y si p < 0 , las ramas abren hacia la izquierda a partir del vértice.

Ejemplo 264:

Dada la ecuación $(x+3)^2 = -8(y-2)$. Identificar los parámetros de la parábola y un bosquejo de la gráfica.

Solución:



De la ecuación se puede visualizar que h = -3 y k = 2. Entonces: V (-3, 2)

El eje de simetría será x = - 3.
Como 4p = - 8, entonces: p = - 2.

Así las ramas abren hacia abajo a partir del vértice.

El foco: F (h, k + p), F (-3, 2-2) = (-3, 0)

La directriz: D = k – p = 2 – (-2) = 4

Ejemplo 265:

Hallar la ecuación de la parábola y hacer un bosquejo de la gráfica, si ésta tiene el foco en (-3, -2) y la directriz tiene como ecuación x = 1.

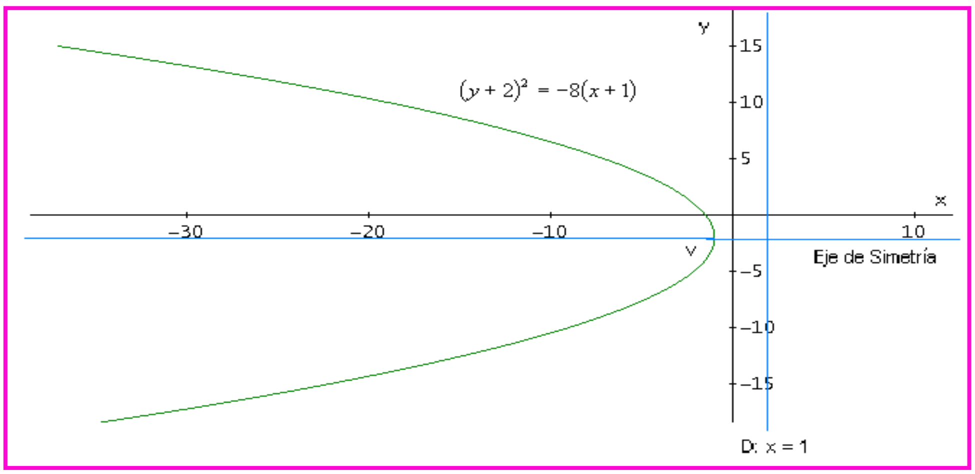
Solución:

Ubicar los puntos en el plano cartesiano nos da una idea de la curva. Como la directriz es vertical, luego el eje de simetría es horizontal. ¿Por qué?
La distancia de la directriz al foco es de 4, entonces la distancia del vértice al foco es de 2.
Con estos datos la distancia focal p = 2. El vértice estará en (-1, -2)
Por la ubicación del foco respecto al vértice, se puede inferir que p = -2.

La ecuación se de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Reemplazando: $(y-(-2))^2 = 4(-2)(x-(-1)) \Rightarrow\Rightarrow (y+2)^2 = -8(x+1)$

La gráfica:



REFLEXIÓN:

En el análisis de la parábola, se ha dicho que según el valor de p, las ramas toman cierta dirección. Al respecto vale la pena hacer una reflexión del porqué de esta situación. Tomemos el caso de la ecuación cuando el vértice esta en el origen y el eje de simetría vertical.

Primer Caso: $x^2 = 4py$

Despejando x: $x = \pm 2\sqrt{py}$ Para que x tenga solución real, se debe cumplir dos posibilidades:
1. p > 0 y y > 0. Como y es mayor que cero, entonces las ramas van hacia arriba.
2. p < 0 y y < 0, Como y es menor que cero, las ramas van hacia abajo.

Segundo Caso: $y^2 = 4px$

Despejando y: $y = \pm 2\sqrt{px}$ Para qué y tenga solución real, se debe cumplir dos posibilidades:

1. p > 0 y x > 0. Como x es mayor que cero, entonces las ramas van hacia la derecha.
2. p < 0 y x < 0, Como x es menor que cero, las ramas van hacia la izquierda.

LA HIPERBOLA.

Con los análisis realizados con la circunferencia, elipse y parábola, se puede extender al caso de la hipérbola. Veamos los dos casos.

1. Una Hipérbola con centro en (h, k) y eje transverso paralelo al eje x, tiene como ecuación:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Los parámetros:

Centro: C (h, k). Vértices: V (h + a, k) y V ‘(h – a, k). Focos: F (h + c, k) y F ‘ (h – c, k)
Eje trasverso: y = k. Eje conjugado: x = h

2. Una Hipérbola con centro en (h, k) y eje transverso paralelo al eje y, tiene como ecuación:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

Los parámetros:

Centro: C (h, k). Vértices: V (h, k + a) y V ‘(h, k - a). Focos: F(h, k + c) y F ‘ (h, k - c)
Eje trasverso: x = h. Eje conjugado: y = k

La relación de las distancia a, b y c son similares al caso de centro en el origen: $b^2 = c^2 - a^2$

Ejemplo 266:

Una hipérbola tiene vértices en (5, 2) y (-1, 2); además, un foco esta en (7, 2). Hallar la ecuación canónica de la hipérbola y hacer un bosquejo de la gráfica.

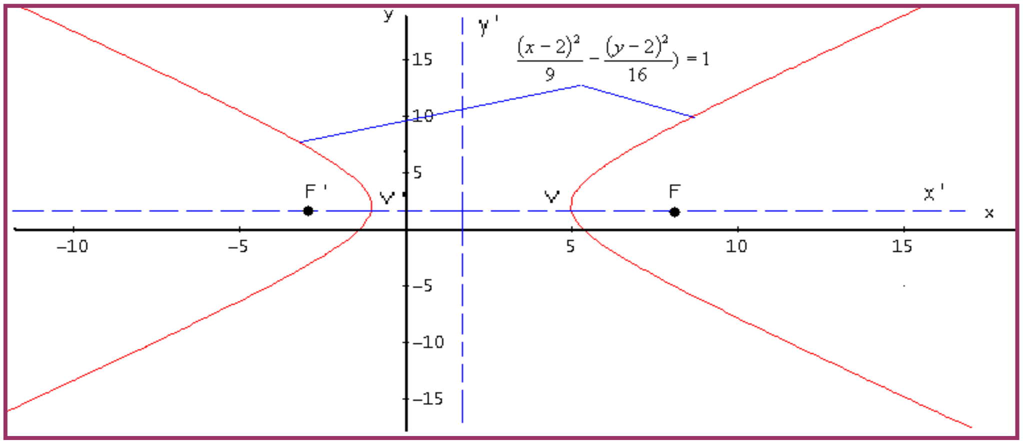
Solución:

Como los vértices están en (5, 2) y (-1, 2), la distancia (2a) es de 6 unidades (5- (-1)), así a = 3. Por otro lado el centro estará en (2, 2), ya que para x: 5 – 3 = 2 y para y esta sobre el punto 2. Para hallar el valor de c, por la ubicación del foco F (7, 2), c = 7 – 2 = 5.
Ahora el valor de b: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow\Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$ Así b = 4.

El eje trasverso es paralelo al eje x, ya que el foco y vértices lo muestran.

Como ya tenemos los datos que se debe colocar en la ecuación, entonces reemplazamos:

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}) = 1$$



Ejemplo 267:

Una hipérbola tiene centro en (-2, -4), vértices en (-2, -2) y (-2, -6); además, uno de los focos esta en (-2, 1). Hallar la ecuación canónica y un bosquejo de la gráfica.

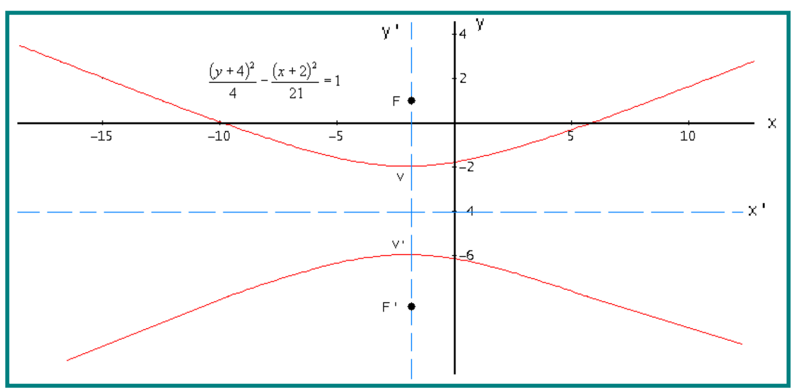
Solución:

Como en centro está en (-2, -4) y vértice en (–2, -6), la distancia entre los vértices es: $|-6-(-2))| = |-4| = 4$ Así a = 2.

El valor de c. La distancia del centro al foco es: 2 + 3 = 5.

Ahora el valor de b: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow\Rightarrow b^2 = 25 - 4 = 21$

Según las coordenadas de los vértices y foco, el eje trasverso es paralelo al eje y. La ecuación: $\frac{(y+4)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{21} = 1$



EJERCICIOS

Dados los parámetros de la circunferencia, hallar la ecuación canónica.

1. R = 2 y centro (0, 2) Rta: $(x)^2+(y-2)^2=4$

2. R = 5 y centro (4, -3) Rta: $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

3. extremos del diámetro (3, 8) y (-1, 4) Rta: $(x-1)^2+(y-6)^2=8$

Para la ecuación dada, hallar los parámetros.

4. $(x-1)^2+(y+3)^2=49$ Rta: Centro (1, -3); R = 7

5. $(y+5)^2+(x-4)^2=12$ Rta: Centro (4, -5); $R=2\sqrt{3}$

Dada la ecuación, identificar los parámetros.

6. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ Rta: C(3, -1); V(3, 2) V '(3, -4); $F(3,-1\pm\sqrt{5})$

7. $\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{25}=1$ Rta: C(2, 1); V(7, 1) V'(-3, 1); F(6, 1) F'(-2 1)

8. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$ Rta: C(1, -2); V(1, 1) V '(1, -5) $F(1,-2\pm\sqrt{5})$

A partir de los parámetros dados hallar la ecuación de la elipse y un bosquejo de la gráfica.

9. C(3, 1) un foco en (0, 1) y vértice en (-1, 1) Rta: $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{7}=1$

10. Vértices en (-1, 3) y (-1, -3) y pasa por $\left(0,\frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$ Rta: $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y)^2}{9}=1$

11. C(1, 2) un vértice en (4, 2) y para por P(1, 5) Rta: $\frac{(x-1)^2}{9}+(y-2)^2=1$

A partir de la ecuación dada, encontrar los parámetros.

12. $(y+1)^2 = -4x$ Rta: Eje: y = -1, V(0, -1), F(-1, -1), D: x = 1

13. $(x-2)^2 = 4(y-1)$ Rta: Eje: x = 2, V(2, 1), F(2,2), D: y = 0

14. $x^2 + 18x - 2y + 1 = 0$ Rta: Eje: x = -9, V(-9, -40), F(-9, -79/2), D: y = -81/2)

Hallar la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas.

15. D: y = -1, F(4, 5) Rta: $x^2 - 8x - 12y + 40 = 0$

16. V(4, -6), Eje: x = 4, Pasa por (0, -8) Rta: $x^2 - 8x + 8y + 64 = 0$

17. V(8, -7), Eje paralelo al eje x y pasa por (6, -8) Rta: $2y^2 + 28y + x + 90 = 0$

A partir de la ecuación dada, identificar los parámetros.

18. $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

Rta: C(3, -2), $F(3 \pm \sqrt{61}, -2)$, V(8, -2) y V'(-2, -2), Asíntotas: y + 2 = ± 6 / 5(x - 3)

19. $\frac{(y+2)^2}{25} - x^2 = 1$

Rta: C(0, -2), $F(0, -2 \pm \sqrt{26})$, V(0, 3) y V '(0, -7), Asíntotas: y + 2 = ± 5x

20. $4(x-1)^2 - 25(y-2)^2 = 100$

Rta: C(1, 2), $F(1 \pm \sqrt{29}, 2)$, V(6, 2) y V'(-4, 2), Asíntotas: y - 2 = ± 2/5(x – 1)

Determinar la ecuación canónica de la hipérbola, conociendo algunos parámetros.

21. Centro (-3, 2), Focos (-3, 8) y (-3, -4), Vértices (-3, 6) y (-3, -2)

Rta: $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{20} = 1$

22. Centro (0, 0), Un vértice (-3/2, 0) y Un foco (-2, 0)

Rta: $\frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{7} = 1$

Lección Cuarenta y cuatro: ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0}$$

Recorrido todo el análisis de las secciones cónicas, utilizando como fundamento la distancia euclidia y además, conocidas las ecuaciones canónicas de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, el siguiente paso es entrar en el estudio de lo que se conoce como la Ecuación General de Segundo Grado. Que es otra forma de expresar analíticamente las cónicas.

LA CIRCUNFERENCIA:

A partir de la ecuación canónica, se puede tomar un procedimiento algebraico para obtener la ecuación general de la circunferencia.

> DEFINICIÓN:
> Toda ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$
> corresponde a una circunferencia, siempre y cuando a = b y $a \neq 0$;
> además, a y b tienen signos iguales.

La ecuación corresponde a una ecuación de segundo grado, donde c y d están indicando que el centro está fuera del origen de coordenadas. Cuando c y d son cero, el centro de la circunferencia está en el origen.

Ejemplo 268:

Sea la ecuación canónica de una circunferencia: $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$ Hallar la ecuación general.

Solución:

La ecuación nos muestra que el centro está en (-4, 2) y el radio R = 5. Para obtener la ecuación general, se procede de la siguiente manera: A partir de la canónica se desarrollan los productos notable. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow\Rightarrow (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) = 25$

Ahora se reorganizan los términos y se iguala acero.

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 = 25 \Rightarrow\Rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$$

La última ecuación corresponde a la general, donde a = b = 1; además, c = 8 y d = -4. Como c y d son diferentes de cero, están indicando que el centro esta fuera del origen de coordenadas, lo que se corrobora en la canónica.

Ejemplo 269:

Hallar la ecuación general de la circunferencia, si tiene como ecuación canónica: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 40$

Solución:

Vemos que la canónica muestra que el centro esta en (4, 2) y el radio es $\sqrt{40}$. Desarrollemos los cuadrados para llegar a la general.

$$(x-4)^2+(y-2)^2=40 \Rightarrow\Rightarrow (x^2-8x+16)+(y^2-4y+4)=40$$

Se reorganiza la expresión y luego la iguala a cero.

$$x^2+y^2-8x-4y+16+4=40 \Rightarrow\Rightarrow x^2+y^2-8x-4y+20-40=0$$

Finalmente: $x^2+y^2-8x-4y+20-40=0$ Donde a = 1 y b = 1, además c = -8 y d = -4.

Ejemplo 270:

Una circunferencia tiene como centro (4, 0) y su radio es R = 7. ¿Cuál será la ecuación general de dicha circunferencia?

Solución:

Primero debemos hallar la ecuación canónica, para luego sí llegar a la general.

La canónica: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

Reemplazando: $(x-4)^2+(y-0)^2=7^2 \Rightarrow\Rightarrow (x-4)^2+(y)^2=49$

Desarrollando el cuadrado: $(x-4)^2+(y)^2=49 \Rightarrow\Rightarrow (x^2-8x+16)+y^2=49$

Reorganizando términos: $x^2+y^2-8x+16-49=0 \Rightarrow\Rightarrow x^2+y^2-8x-33=0$

Ejemplo 271:

Una circunferencia corta al eje x en dos puntos, tiene radio de 4 unidades, el centro está en (-2, k) y pasa por el punto (-2, -7). Hallar la ecuación general de dicha circunferencia.

Solución:

Primero organicemos la ecuación canónica: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ Como el radio es 4 y el centro en (-2, k) reemplacemos estos datos: $(x+2)^2+(y-k)^2=16$

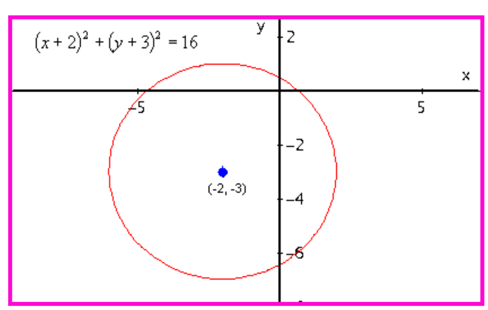
Como el punto (-2, -7) satisface dicha ecuación, lo podemos reemplazar. $(-2+2)^2+(-7-k)^2=16$

Despejando el valor de k: $(-7-k)^2=16 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{(-7-k)^2}=\sqrt{16} \Rightarrow\Rightarrow (-7-k)=\pm 4$: k = ± 4 – 7

Se obtienen dos valores: - 11 y - 3.

Como la circunferencia corta al eje x, el valor que satisface esta condición es –3.

Así la ecuación canónica será: $(x+2)^2+(y+3)^2=16$



Para hallar la ecuación general, procedemos como los casos anteriores.

Desarrollando los cuadrados:

$$(x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)=16$$

Reorganizando: $x^2+y^2+4x+6y+4+9=16$

Igualando a cero: $x^2+y^2+4x+6y+13-16=0$

Finalmente: $x^2+y^2+4x+6y-3=0$

LA ELIPSE:

El procedimiento para obtener la ecuación general de la elipse es similar al realizado en la circunferencia.

> DEFINICIÓN:
> Toda ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$
> corresponde a una elipse, siempre y cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$
> además, $a \neq b$ pero a y b de igual signo.

La ecuación corresponde, también a una ecuación de segundo grado, donde c y d están indicando que el centro está fuera del origen de coordenadas. Si c y d son cero, el centro de la elipse están en (0, 0).

Ejemplo 272:

Hallar la ecuación general de la elipse cuyo centro es (2, -3), el eje mayor mide 10 y es paralelo al eje x, el menor mide 6.

Solución:

La ecuación canónica es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (h, k) = (2, -3), a = 5 y b = 3

Reemplazamos en la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

Desarrollamos las fracciones, primero busquemos el común denominador. El cual es 225.

$$\frac{9(x-2)^2 + 25(y+3)^2}{225} = 1 \Rightarrow\Rightarrow 9(x-2)^2 + 25(y+3)^2 = 225$$

Ahora desarrollamos los productos notables.

$$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 6y + 9) = 225 \Rightarrow\Rightarrow 9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 150y + 225 = 225$$

Reorganizando los términos: $9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 150y = 0$

Finalmente: $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$

Según esta ecuación, a = 9 y b = 25, son diferentes pero de igual signo. c = - 36 y d = 150. Se confirma las condiciones para que una ecuación de segundo grado sea una elipse.

Ejemplo 273:

Hallar la ecuación general de la elipse que tiene centro en (4, -2) vértice en (9, -2) y un foco en (0, -2)

Solución:

Por los datos dados en el problema, la ecuación es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Si (h, k) = (4, -2). Para hallar a: Restamos la coordenada x del vértice y del centro: 9 – 4 = 5, luego: a = 5. Como un foco esta en (0, -2) entonces distancia focal c = 4 – 0 = 4.

Ahora calculamos b: $b^2 = a^2 - c^2$ reemplazando: $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

Como ya se tienen los datos necesarios, se reemplaza en la fórmula.

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

En seguida procedemos a buscar la ecuación general: identifiquemos el común denominador: 225. entonces: $\frac{9(x-4)^2+25(y+2)^2}{225}=1 \Rightarrow\Rightarrow 9(x-4)^2+25(y+2)^2=225$

Desarrollando los productos notables:

$9(x^2-8x+16)+25(y^2+4y+4)=225 \Rightarrow\Rightarrow 9x^2-72x+144+25y^2+100y+100=225$

Igualando a cero: $9x^2+25y^2-72x+100y+244=225 \Rightarrow\Rightarrow 9x^2+25y^2-72x+100y+19=0$

En la ecuación se observa que a = 9 y b = 25, son diferentes y de igual signo, luego corresponde a una elipse, como se dicen en la definición. Además como c y d son diferentes de cero, el centro de la elipse esta fuera del origen de coordenadas.

Ejemplo 274:

Dada la ecuación $5x^2+4y^2-30x+16y+41=0$. Identificar los parámetros y hacer un bosquejo de la gráfica.

Solución:

Como a = 5 y b = 4 y con signos iguales, corresponde a una elipse. Para identificar los parámetros, se debe llevar de la ecuación general a la canónica, para esto, se agrupan las variables: $(5x^2-30x)+(4y^2+16y)=-41$

Factorizamos para obtener la variable al cuadrado con coeficiente uno.

$5(x^2-6x)+4(y^2+4y)=-41$

Completamos cuadrados en ambas variables. Recordemos que esto se hace dividiendo el coeficiente de la variable lineal en 2 y elevando al cuadrado.

$5(x^2-6x+(6/2)^2)+4(y^2+4y+(4/2)^2)=-41+5(6/2)^2+4(4/2)^2$

Recordemos que lo adicionado a un lado, se debe adicionar al otro lado de la ecuación, para que esta no se altere. Operando:

$5(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)=-41+5(9)+4(4)$

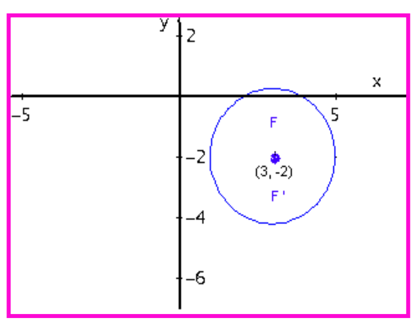
$5(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)=20$

Desarrollando los trinomios cuadrados perfectos: $5(x-3)^2+4(y+2)^2=20$

Dividimos todo por 20, para que el cociente sea igual a uno. $\frac{5(x-3)^2}{20}+\frac{4(y+2)^2}{20}=1$

Simplificando: $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$

La última ecuación es la canónica. Recordemos que a > b, luego 5 > 4, entonces el eje mayor es paralelo al eje y. Centro: (3, -2). Como $a=\sqrt{5} \Rightarrow\Rightarrow 2a=2\sqrt{5}$ $\quad b=\sqrt{4} \Rightarrow\Rightarrow 2b=4$



$c^2=a^2-b^2=5-4=1$

Distancia focal: c = 1

Focos: (3, -1) y F '(3, -3)

LA PARÁBOLA:

El procedimiento para obtener la ecuación general de la parábola es similar al realizado en los casos anteriores.

> DEFINICIÓN:
> Toda ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ corresponde a una parábola, siempre y cuando $a = 0$ ó $b = 0$.
> Si c y d son cero, el vértice de la parábola esta en el origen de coordenadas.

Ejemplo 275:

Sea la parábola con ecuación canónica: $(y-3)^2 = 18(x+3)$ Hallar la ecuación general.

Solución:

Desarrollamos el producto notable. $y^2 - 6y + 9 = 18x + 54$

Igualamos todo a cero. $y^2 - 6y - 18x + 9 - 54 = 0 \Rightarrow\Rightarrow y^2 - 6y - 18x - 45 = 0$

En este caso, a = 0 y b = 1, ya que no aparece término en x ^{2}. Como c = – 18 y d = -6, el vértice de la parábola esta fuera del origen.

Ejemplo 276:

Hallar la ecuación general de la parábola con vértice en (-2, 2) y foco en (0, 2).

Solución:

Primero debemos obtener la ecuación canónica. Como el vértice y foco coinciden sobre el eje x, entonces la parábola tendrá como ecuación canónica: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

La distancia focal p = 0 – (-2) = 2. Entonces reemplazando: $(y-2)^2 = 4(2)(x-(-2)) \Rightarrow\Rightarrow (y-2)^2 = 8(x+2)$

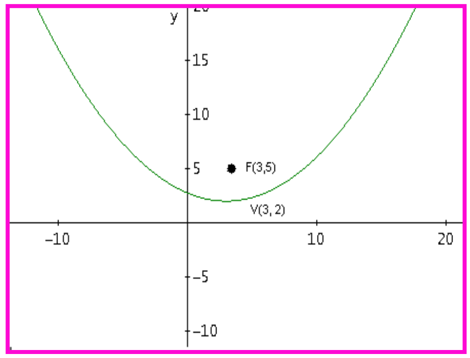
Operando la última ecuación, se obtiene la general. $y^2 - 4y + 4 = 8x + 16$

Reorganizando los términos: $y^2 - 4y - 8x + 4 - 16 = 0 \Rightarrow\Rightarrow y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

Para este caso: a = 0 y b = 1. Como c y d son diferentes de cero, el vértice esta fuera del origen de coordenadas.

Ejemplo 277:

Dada la ecuación de la parábola: $x^2 - 6x - 12y + 33 = 0$ Identificar los parámetros y hacer un bosquejo de la grafica.



Solución:

Debemos transformar la ecuación general en la canónica, lo que se hace agrupando las variables y completando cuadrados donde se requiera.

$$(x^2 - 6x) - 12y + 33 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) - 12y + 33 = 9$$
$$(x-3)^2 = 12y - 33 + 9 \Rightarrow\Rightarrow (x-3)^2 = 12y - 24$$

Ajustando la última ecuación a la forma canónica:

$(x-3)^2 = 12(y-2)$

4p = 12, entonces: p = 3

LA HIPERBOLA:

Siguiendo los mismos argumentos utilizados en los casos anteriores:

> DEFINICIÓN:
> Toda ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ corresponde a una Hipérbola, siempre y cuando $a \neq 0$ $b \neq 0$ $a \neq b$ además, debe tener signos contrarios. Cuando c y / o d son diferentes de cero, el centro de la hipérbola esta fuera del origen de coordenadas.

Ejemplo 278:

Sea la ecuación canónica de la hipérbola: $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$ Identificar la ecuación general.

Solución:

De la ecuación canónica, buscamos el divisor común que para este caso es 6 y desarrollamos así:

$\frac{3(x+2)^2 - (y-2)^2}{6} = 1 \Rightarrow\Rightarrow 3(x+2)^2 - (y-2)^2 = 6$

Desarrollamos los paréntesis:

$3(x^2 + 4x + 4) - (y^2 - 4y + 4) = 6 \Rightarrow\Rightarrow 3x^2 + 12x + 12 - y^2 + 4y - 4 - 6 = 0$

Reorganizando se obtiene la ecuación:

$3x^2 - y^2 + 12x + 4y + 12 - 4 - 6 = 0 \Rightarrow\Rightarrow 3x^2 - y^2 + 12x + 4y + 2 = 0$

En la última ecuación se observa que a = 3 y b = -1. c = 12 y d = 4, como c y d son diferentes de cero, el centro de la hipérbola esta fuera del origen de coordenadas.

Ejemplo 279:

Encontrar la ecuación general de la hipérbola que tiene focos en (±4, 0) y a = 2.

Solución:

Según los datos c = 4 y a = 2. Entonces: $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

El centro está en (0, 0). El vértice V (± 2, 0). El eje trasverso es y = 0

La ecuación es de la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

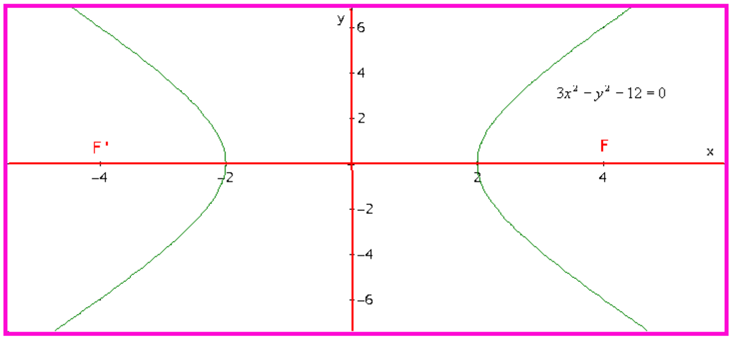
Reemplazando: $\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-0)^2}{12} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

A partir de ésta, se puede obtener la ecuación general.

$\frac{(x)^2}{4} - \frac{(y)^2}{12} = 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x^2 - y^2}{12} = 1 \Rightarrow\Rightarrow 3x^2 - y^2 = 12$

Finalmente: $3x^2 - y^2 = 12 \Rightarrow\Rightarrow 3x^2 - y^2 - 12 = 0$

Vemos que a = 3, b = -1. En este caso c = 0 y d = 0, entonces el centro estará en el origen de coordenadas.



Lección Cuarenta y cinco: Aplicación de la Geometría Analítica

La geometría analítica es una fuerte herramienta matemática para resolver problemas de las diversas áreas del conocimiento. Inicialmente es pertinente tener en cuenta los principios y características de cada figura, con el fin de saber cual utilizar según el problema presentado. Los ejemplos que se proponen solo son una motivación para que con buenos argumentos matemáticos, buen razonamiento y ante todo buen sentido lógico, se pueda resolver problemas donde la geometría analítica es protagonista.

A continuación se dan algunos lineamientos que pueden servir para resolver problemas de Geometría Analítica.

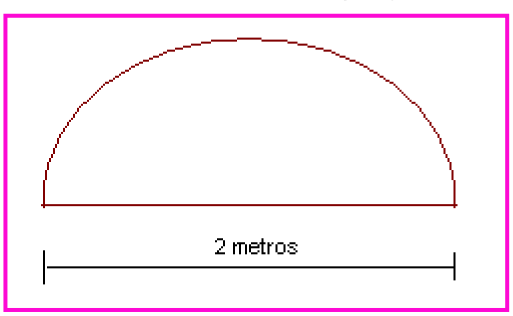
1. Leer el problema las veces que sea necesario hasta entender que se debe hacer y cómo hacerlo.
2. Determinar la figura que más se adapta al problema, identificando los datos dados y los datos a calcular.
3. Encajar los datos; según el problema, en la ecuación pertinente para realizar las operaciones requeridas.
4. Obtener el valor a las preguntas planteadas y así resolver el problema.

Ejemplo 280:

Se desea construir una ventana de forma semicircular, cuya base debe medir 2 metros. ¿Cuánto material se requiere para el contorno de la misma?

Solución:

De forma semicircular significa media circunferencia. Así el material requerido es para la mitad de una circunferencia más la base que ya se sabe su longitud.



Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi R$
El diámetro es D = 2, luego R = 1.
Entonces: $L = 2\pi(1) = 2\pi$
Pero es media circunferencia, así: $L = \pi$

El contorno para hacer la ventana requiere $(\pi + 2)$ metros.

Ejemplo 281:

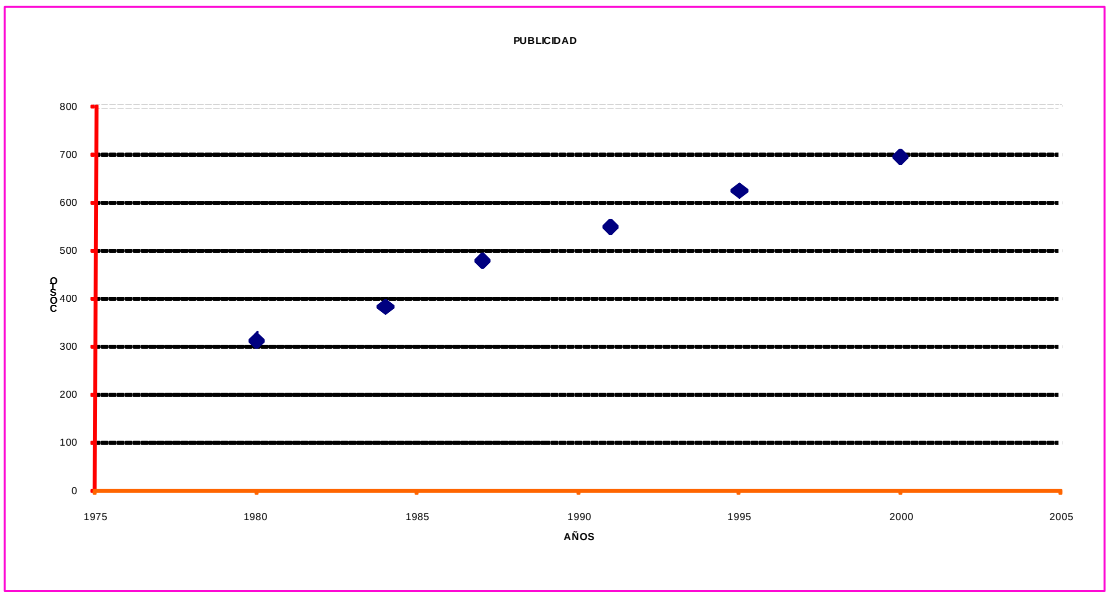
En la tabla adjunta se muestra los datos de los costos de publicidad de 10 segundos en miles de pesos, en un horario de mediana sintonía.

X (Años)	Y (Costo)
1980	315
1984	385
1987	480
1991	550
1995	625
2000	695

a-) Identificar el grafico que muestra el comportamiento de los datos.
b-) Obtener el modelo matemático más adecuado según el gráfico obtenido.
c-) Con el modelo obtenido, pronosticar el valor de la publicidad para los años 1.982 y 1.994

Solución:

a-)



b-) Según la gráfica se observa que la tendencia de los datos en a una recta, luego el modelo que vamos a diseñar es el de una recta. $y = mx + b$

Lo primero que debemos hallar es la pendiente m. Veamos cómo se hace.

P_1(1980, 315) y P_2(1984, 385). $m_1 = \dfrac{385-315}{1984-1980} = \dfrac{70}{4} = 17.5$

P_3(1987, 480) y P_4(1991, 550). $m_2 = \dfrac{550-480}{1991-1987} = \dfrac{70}{4} = 17.5$

P_5(1995, 625) y P_6(2000, 695). $m_2 = \dfrac{695-625}{2000-1995} = \dfrac{70}{5} = 14$

Calculamos la pendiente promedio: $\overline{m} = \dfrac{17{,}5+17{,}5+14}{3} = 16.33$

Como ya tenemos la pendiente, ahora calculamos el valor de b que esta en la ecuación. $y = 16.33x + b$, tomamos cualquier punto, digamos P_1(1980, 315) luego:

$315 = 16.33(1980) + b \Rightarrow\Rightarrow b = 315 - 32333.4 = -32018{,}4$

Finalmente el modelo será de la forma: $y = 16.33x - 32.018,4$

c-) Con el modelo obtenido:

Para el año 1982. $y = 16.33(1982) - 32.018,4 = 347,66$

Para el año 1994. $y = 16.33(1994) - 32.018,4 = 543,64$

Ejemplo 282:

El planeta Mercurio se mueve de forma elíptica alrededor del sol, con una excentricidad de 0,206. El eje mayor es de 0,774 U. A. (Unidades Astronómicas), ¿Cuál será la distancia máxima entre Mercurio y el Sol?

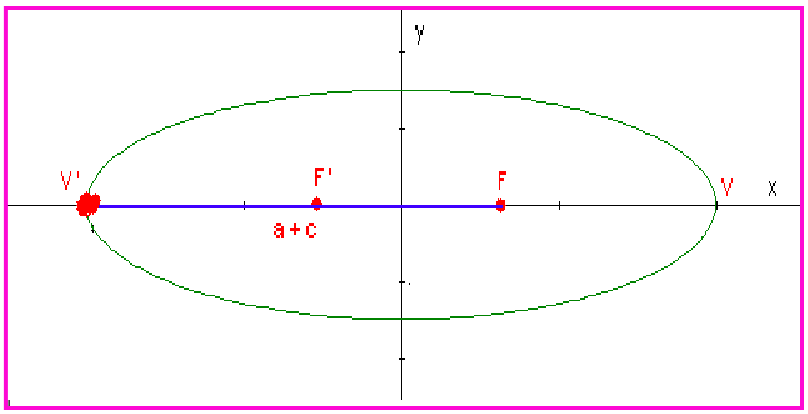
Solución:

Para la elipse la excentricidad es de la forma: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ Entonces: $c = a * e$

El sol está ubicado en el foco F. Como 2a = 0,774 U. A. Entonces a = 0,387 U. A. Para calcular c podemos aplicar la fórmula de excentricidad. c = a * e = 0,387 x 0,206 = 0,0797

La mayor distancia entre el sol y mercurio es FV'; es decir, a + c

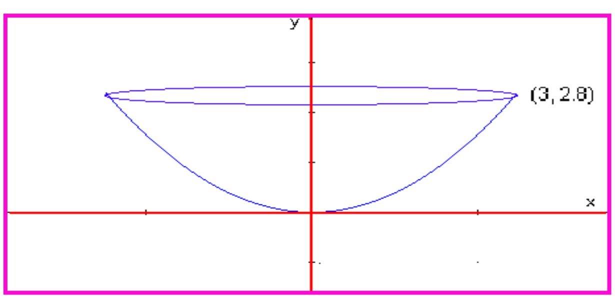
Así distancia máxima: 0,387 + 0,079 = 0,466 U. A.



Ejemplo 283:

Las señales de un satélite son recibidas en una antena parabólica y reflejada en un solo punto, donde está ubicado el receptor de señales. La antena mide 6 metros de diámetros y 2,8 metros de profundidad. ¿En qué posición se debe colocar el receptor tomando como base el vértice del disco.

Solución:



La figura nos ilustra el proceso.

La ecuación que se adapta a la figura es de la forma: $x^2 = 4py$

Con el punto que se conoce se reemplaza en la ecuación: $(3)^2 = 4p(2,8)$

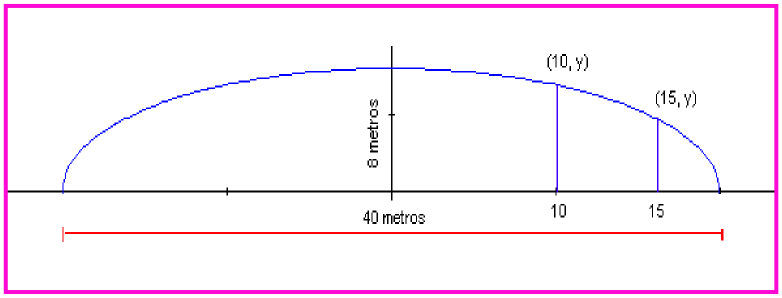
Despejamos P para obtener: P = 0,8035

Como p es la distancia focal, entonces el foco se debe colocar a 0,8035 metros del vértice de la antena.

Ejemplo 284:

Un puente está construido en forma semielíptica, cuya extensión es de 40 metros y altura máxima de 8 metros. ¿Cuál será la altura del puente a 10 y 15 metros del centro del mismo?

Solución



La ecuación que se requiere es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Como 2a = 40, entonces a = 20. Por otro lado: b = 8, se puede observar en la figura.

Entonces la ecuación que gobierna la forma del puente es: $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{64}=1$

- Para hallar la altura a 10 metros del centro, se reemplaza el valor de x en la ecuación y se despeja el valor de y.

$\frac{(10)^2}{400}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow\Rightarrow \; y^2 = 64\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{192}{4}$ Despejando y: $y=\sqrt{\frac{192}{4}}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\approx 6{,}928$

- De la misma manera que el caso anterior, la altura a 15 metros.

$$\frac{(15)^2}{400}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow\Rightarrow \; y^2 = 64\left(1-\frac{225}{400}\right)=64\left(\frac{175}{400}\right)=\frac{11200}{400} \quad y=\sqrt{\frac{11200}{400}}=\sqrt{28}\approx 5{,}291$$

EJERCICIOS

Dada la ecuación de segundo grado, identificar los parámetros y un bosquejo de la gráfica.

1. $y^2 - 4y - 2x + 4 = 0$ Rta: Parábola. V(-4, 2) F(-7/2, 2) Eje: y = 2
   Directriz: x = -9/2

2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ Rta: Circunferencia. C(2, -3) y R = 7

3. $y^2 - 4x^2 - 16x - 2y - 19 = 0$ Rta: Hipérbola. C(-2, 1), V(-2, 3) y V((-2, 1)
   $F(-2, 1 \pm \sqrt{5})$

4. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$ Rta: Elipse. C(5, 2), V(5, 2±5), $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$

5. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$ Rta: Circunferencia. C(3, -1), $R = \sqrt{\dfrac{35}{2}}$

6. Un rayo de luz es emanado del foco de una parábola, cuya ecuación es $x^2 + y - 4 = 0$, éste toca con la parábola en el punto p(-1, 3) ¿Cuál será la ecuación del rayo de luz?

Rta: $4y - 3x - 15 = 0$

7. La superficie que describe la tierra tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un Satélite da vueltas a la tierra en forma circular a 0,6 unidades por encima de ésta. ¿Cuál será la ecuación de la órbita del satélite'

Rta: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4168 = 0$

8. Un puente está construido en forma de arco semielíptico, su extensión es de 120 metros y la altura máxima del puente es de 25 metros. ¿Cuál será la altura del arco a 50 metros del centro del puente.
Rta: 13,82 metros

9. Una pista para Atletismo tiene forma elíptica, la distancia focal es de 40 metros y la longitud del eje menor que pasa por el centro es de 60 metros. ¡Cual es la longitud del eje mayor?

Rta: 100 metros

CAPÍTULO OCHO: LAS SUMATORIAS Y PRODCUTORIAS

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

INTRODUCCIÓN

Dentro del estudio de muchos fenómenos de la naturaleza, la formulación del modelo que describe el comportamiento del mismo, puede estar bajo el uso de variables discretas, siendo las sumatorias un insumo fundamental. Las sumatorias son procesos matemáticos muy particulares de gran utilidad en ciencias estadísticas, ciencias económicas y otros. Aún en los fundamentos de Cálculo Integral, las sumatorias son un insumo básico, es común hablar de las muy nombradas *Sumas de Riemman*, como la base de las integrales definidas. En el análisis de series las sumatorias son el pan de cada día. En fin se puede observar que las sumatorias tienen gran utilidad en el mundo de las matemáticas.

La idea de proponer es estudio de las Sumatorias, es con el fin de poderlas utilizar en temáticas que las requieran y que a veces por falta de las mismas, los procesos se detienen un poco y a veces se complican para los estudiantes.

La productoria es un operador matemático muy específico, de gran utilidad en ciencias estadísticas, ciencias económicas y otros, no se conoce un compendio específico para este operador, solo se dan apartes en cursos donde es necesario utilizarlo. Por esto se consideró pertinente darle ese espacio que merece dicha temática.

El operador productoria no es muy conocido, tal vez porque su utilidad es muy limitada, sin embargo este operador es fundamental en muchos temas de matemáticas, por decir un caso “El Factorial” utilizado en estadística para las técnicas de conteo y en Álgebra para el desarrollo de la expansión binomial. Esto es suficiente justificación para que se deba analizar este operador matemático.

Se ha utilizado un lenguaje muy sencillo y didáctico para que usted estimado estudiante, pueda comprender e interiorizar los principios sobre estas dos temáticas.

LA SUMATORIA

Lección Cuarenta y seis: Fundamentación de sumatoria

$$s = \sum_{i=a}^{a+k} n_i$$

Para denotar la sumatoria se utiliza la letra griega sigma $\sum$ que corresponde a la letra s en el alfabeto español. La notación se puede generalizar de la siguiente manera:

S = La magnitud de la operación sumatoria
i = El índice de la suma, éste varia de a hasta a + k.
a = Término inicial de la sumatoria. (*Límite inferior*)
a + k = Término final de la sumatoria. (*Límite superior*)
n_i = Valor del término en el punto i.
k = Cantidad de términos a operar en la sumatoria.

Existe un caso particular de sumatoria en donde el límite superior es infinito, más conocidas como series, cuya simbología es:

$$s = \sum_{i=a}^{\infty} n_i$$

La temática de series será abordada en cursos superiores, aquí solo se busca que se conozca cual es su raíz, las sumatorias.

Para operar sumatorias es pertinente comprender en primera instancia, los términos a operar y el índice de los mismos. Por ejemplo si deseamos operar $\sum_{i=1}^{3} a_i$ Lo que se dice es que debemos tomar los términos desde uno hasta tres (Límite inferior: i = 1, Límite superior: i = 3) para los valores de a y sumarlos. Entonces: $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$

Otro caso que nos puede ambientar las sumatorias: Se desea operar: $\sum_{i=3}^{5} a_i b_i$

El problema nos plantea que debemos sumar el producto *ab*, que van desde tres hasta cinco. Veamos: $\sum_{i=3}^{5} a_i b_i = a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5$

Resumiendo los dos casos, se observa que los términos se suman desde el límite inferior hasta el límite superior.

Ejemplo 285:

Hallar la suma de los siguientes términos. D = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

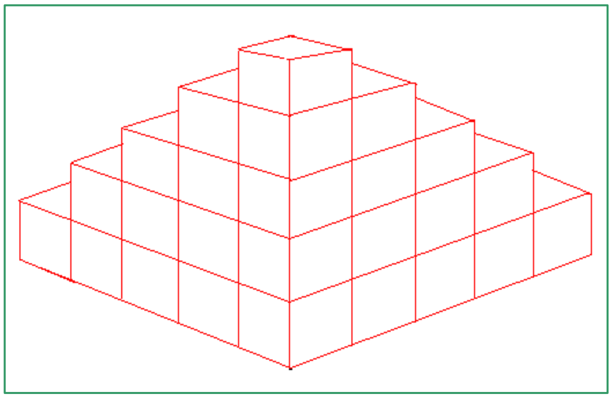
Solución:

Se expresa analíticamente el problema. $S = \sum_{i=1}^{8} a_i$ Donde $a_i = 2n_i$ Es la forma de expresar los enteros pares positivos. $S = \sum_{i=1}^{8} 2n_i = 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7) + 2(8)$

Operando: $S = \sum_{i=1}^{8} 2n_i = 2+4+6+8+10+12+14+16 = 72$

Ejemplo 286:

Según la figura, cuantos cubos hay en la organización dada por la pirámide.



Solución:

Se observa que en cada fila se tiene el cuadrado de la cantidad presentada. Planteemos matemáticamente el caso:

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

Aplicando la nomenclatura de sumatorias.

$$S = \sum_{i=1}^{5} i^2$$

Desarrollando la sumatoria. $S = \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1+4+9+16+25 = 55$

En la pirámide se tienen 55 cubos.

Ejemplo 287:

Resolver la siguiente operación. $\sum_{i=1}^{6} 5$

Solución:

Lo que plantea la sumatoria es que se debe sumar el cinco, seis veces.

$$\sum_{i=1}^{6} 5 = 5+5+5+5+5+5 = 30$$

Ejemplo 288:

Resolver la siguiente sumatoria. $\sum_{i=1}^{7} (2i+2)$

Solución:

Como en los casos anteriores, se debe sumar los términos desde 1 hasta 7.

$$\sum_{i=1}^{7} (2i+2) = (2(1)+2)+(2(2)+2)+(2(3)+2)+(2(4)+2)+(2(5)+2)+(2(6)+2)+(2(7)+2)$$

Operando: $\sum_{i=1}^{7} (2i+2) = 4+6+8+10+12+14+16 = 70$

Por consiguiente: $\sum_{i=1}^{7} (2i+2) = 70$

En los ejemplos se observa que las operaciones son extensas, para simplificarlas, existen algunos teoremas y propiedades que permiten aceleran los cálculos.

TEOREMAS:

TEOREMA 1:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n * c \qquad \text{Para n} \in Z^{+} \quad \text{y} \quad c = \text{constante}$$

Demostración:

Sea c una constante, como la sumatoria varia de uno hasta n, esto indica que se debe sumar n veces la constante.

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + ...n...veces = n * c$$

TEOREMA 2:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{Para n} \in Z^{+} \quad \text{y} \quad i = 1, 2, 3,..., n$$

Demostración:

La demostración se le atribuye al gran matemático Gauss (1.777 – 1.855).
Primero sumamos en forma ascendente.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-2) + (n-1) + n$$

Como la suma es conmutativa, sumamos en forma descendente.

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$$

Ahora sumemos las dos ecuaciones anteriores.

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (2+n-1) + (3+n-2) + ... + (2+n-1) + (n+1)$$

Simplificando: $2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)$

Se observa que se debe sumar n veces el término (n + 1), entonces: $2\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)$

Despejamos la sumatoria. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}$

Así queda demostrado el teorema No 2.

Forma Alternativa del teorema 2. $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n^{2} + \frac{1}{2} n}$

TEOREMA 3:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Demostración:

Se deja como investigación para hacerla en forma individual y compartir con el grupo colaborativo.

Forma Alternativa del teorema 3.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

TEOREMA 4:

$$\sum_{i=n}^{m} i^2 = \sum_{i=1}^{m} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \qquad \text{Para } n < m$$

Demostración:

Investigar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

TEOREMA 5:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Demostración:

Investigar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

Forma alternativa del teorema 5:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

TEOREMA 6:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Demostración:

Investigar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

A continuación vamos a interiorizar los teoremas dados anteriormente, por medio de algunos ejemplos modelos.

Ejemplo 289:

Resolver: $\sum_{i=1}^{4} i$

Solución:

Según el teorema No 1: $\sum_{i=1}^{4} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$

Ejemplo 290:

Resolver: $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución:

Por el teorema No 2, desarrollamos el problema. $\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{5(5+1)(2*5+1)}{6} = \frac{5*6*11}{6} = 55$

Ejemplo 291:

Cuál será el valor de: $\sum_{i=1}^{8} i^3$

Solución:

Por el teorema No 5 se puede resolver. $\sum_{i=1}^{8} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{8(8+1)}{2}\right)^2 = \frac{72^2}{2^2} = \frac{5184}{4} = 1.296$

Los teoremas propuestos, simplifican los cálculos en términos de operar sumatorias, lo importante no es aprender el orden de los mismos, sino su principio y utilidad en un momento que se requiera. Con muchos ejercicios se fortalece esta premisa.

Lección Cuarenta y siete: Propiedades y Operaciones de las Sumatorias

Las sumatorias tienen propiedades, que también permiten resolverlas de una manera más analítica. Las demostraciones se pueden hacer por Inducción matemática, lo cual sería pertinente investigar, pero por las metas del curso, éstas se omiten, ya que lo importante es utilizarlas adecuadamente.

Propiedad 1:

$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$ Para c = constante y n Є Z^+

Propiedad 2:

$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ Para n Є Z^+

Esta propiedad es consecuencia del teorema No 2.

Propiedad 3:

$$\sum_{i=p}^{q} i = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2} \qquad \text{Para } p < q \quad y \quad n \in Z^{+}$$

Esta propiedad nos permite resolver sumatorias partiendo de cualquier valor inicial *i* diferente de uno.

Propiedad 4:

$$\sum_{i=n}^{m} k = (m-n+1)*k \qquad \text{Para } n < m \quad y \quad n \in Z^{+}$$

Esta propiedad es análoga al teorema No 1, solo que aquí los términos comienzan en un valor diferente de uno.

Propiedad 5:

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \text{Para } \quad n \in Z^{+}$$

Propiedad 6:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 + i} = \frac{n}{n+1} \qquad \text{Para } \quad n \in Z^{+}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de estas propiedades.

Ejemplo 292:

Resolver $\sum_{i=1}^{6} 2i$

Solución:

Este ejemplo se puede resolver aplicando las propiedades uno ó dos. Resolvámosla por los dos caminos:

- Por la propiedad uno: $2\sum_{i=1}^{6} i = 2\frac{6(6+1)}{2} = 6(6+1) = 42$

-Por la propiedad dos. $\sum_{i=1}^{6} 2i = 6(6+1) = 42$

Ejemplo 293:

Hallar la sumatoria siguiente: $\sum_{i=4}^{7} i$

Solución:

La propiedad No 3 nos permite resolver este problema. $\sum_{i=4}^{7} i = \frac{(4+7)(7-4+1)}{2} = \frac{11*4}{2} = 22$

Ejemplo 294:

Resolver: $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i(i+1)}$

Solución:

Por la propiedad No 6 se puede resolver este problema. $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$

Para interiorizar las propiedades de sumatorias, lo más pertinente es resolver diversos ejercicios, por lo cual se recomienda que usted estimado estudiante proponga ejercicios y los resuelva en grupo colaborativo, esto les dará mucha riqueza en términos de sumatorias.

OPERACIONES CON SUMATORIAS:

La sumatoria es un operador que se puede utilizar para suma y resta de términos, según los siguientes principios.

SUMA:

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Este principio nos permite deducir que la sumatoria de una suma, es igual a la suma de la sumatoria de los términos. Lo anterior se puede hacer extensivo a más de dos términos.

RESTA:

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

En este caso se puede decir que la sumatoria de una diferencia, es igual a la diferencia de la sumatoria de los términos.

Ejemplo 295:

Resolver: $\sum_{i=1}^{8} (4i+3)$

Solución:

Con las propiedades y teoremas estudiados, podemos resolver este ejemplo, veamos:

Por el principios de la suma. $\sum_{i=1}^{8}(4i+3)=\sum_{i=1}^{8}4i+\sum_{i=1}^{8}3$

Por la propiedad No 1 y el teorema No 1. $\sum_{i=1}^{8}4i+\sum_{i=1}^{8}3=4\sum_{i=1}^{8}i+8*3$

Desarrollando: $4\sum_{i=1}^{8}i+8*3=4\left(\frac{8(8+1)}{2}\right)+24=2*72+24=168$

Ejemplo 296:

Resolver: $\sum_{i=1}^{5}(5i^2-7i)$

Solución:

Inicialmente por el principio de la diferencia. $\sum_{i=1}^{5}(5i^2-7i)=\sum_{i=1}^{5}5i^2-\sum_{i=1}^{5}7i$

Ahora aplicando la propiedad No 1. $\sum_{i=1}^{5}5i^2-\sum_{i=1}^{5}7i=5\sum_{i=1}^{5}i^2-7\sum_{i=1}^{5}i$

Aplicando el teorema dos y tres: $5\left(\frac{5(5+1)(2*5+1)}{6}\right)-7\left(\frac{5(5+1)}{2}\right)$

Desarrollando: $5\left(\frac{330}{6}\right)-7\left(\frac{30}{2}\right)=275-105$ Finalmente: $\sum_{i=1}^{5}(5i^2-7i)=170$

Ejemplo 297:

Resolver: $\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$

Solución:

Se observa que la sumatoria esta sobre el subíndice i, en este caso j sería una constante, entonces:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2=\left(x_{1j}-\bar{x}_j\right)^2+\left(x_{2j}-\bar{x}_j\right)^2+\left(x_{3j}-\bar{x}_j\right)^2+\ldots+\left(x_{Nj}-\bar{x}_j\right)^2$$

Con este ejemplo es pertinente aclarar dos situaciones:

1. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\neq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

2. $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_i\,j_i\neq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_j\right)}$$

Ejemplo 298:

Resolver: $\sum_{i=1}^{3} x_i^2$ y $\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2$

Solución:

Para el primer caso: $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Para el segundo caso: $\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$

Evidentemente: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq (x_1 + x_2 + x_3)^2$

LA MEDIA ARITMÉTICA:

Un ejemplo vivo del uso de las sumatorias es la muy conocida Media Aritmética o Promedio, término muy utilizado en Estadística.

Por definición: $\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

A partir de la anterior, se pueden obtener dos ecuaciones alternas.

$n\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $n = \frac{1}{\overline{x}}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Ejemplo 299:

Demostrar que $\sum_{x=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$

Solución:

Por el principio de la resta: $\sum_{x=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \sum_{x=1}^{n} (x_i) - \sum_{x=1}^{n} (\overline{x})$

Reemplazando en las ecuaciones alternas y utilizando las propiedades respectivas.

$$\sum_{x=1}^{n} (x_i) - \sum_{x=1}^{n} (\overline{x}) = n\overline{x} - n\overline{x} = 0$$

Ejemplo 300:

Demostrar: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$

Solución:

Desarrollando el producto notable: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2\right)$

Por el principio de suma y resta. $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(2x_i\bar{x}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}^2\right)$

Aplicando la propiedad No 1: $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(2x_i\bar{x}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$

Ahora por el teorema No 1: $\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}(n\bar{x})+n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2$

Finalmente: $\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$

DOBLE SUMATORIA:

En situaciones encontradas de Álgebra Lineal, Economía, Estadística y otras ciencias, se presentan casos donde se debe hacer la suma de *n* sumas. Dicho de otra forma, sumatorias de series de sumatorias.

En este espacio vamos a analizar la doble sumatoria, la cual se puede expresar de la siguiente manera.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}+\sum_{i=1}^{n}a_{i3}+\ldots+\sum_{i=1}^{n}a_{im}$$

Resumiendo: $\sum_{i=1}^{n}a_{i1}+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}+\sum_{i=1}^{n}a_{i3}+\ldots+\sum_{i=1}^{n}a_{im}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$

Lo anterior muestra que para este tipo de sumatorias: $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$

Como conclusión, podemos decir que en una doble sumatoria finita, el orden del operador es irrelevante; es decir, no afecta la operación en su resultado.

Ejemplo 301:

Hallar el valor de la siguiente operación. $\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4}(i+2j)\right)$

Solución:

Primero hacemos la sumatoria sobre j:

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(i+2(1))+(i+2(2))+(i+2(3))+(i+2(4))\right]=\left[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\right]$$

Operando: $\sum_{i=1}^{3}\ =\left[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\right]=\sum_{i=1}^{3}(4i+20)$

En seguida hacemos la sumatoria sobre i: $\sum_{i=1}^{3}(4i+20)=(4(1)+20)+(4(2)+20)+(4(3)+20)$

Finalmente: $\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4}(i+2j)\right)=24+28+32=84$

Ejemplo 302:

Desarrollar: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\left(i*3^{j}\right)$

Solución:

Al igual que en el caso anterior, operamos sobre j primero.

$$\sum_{i=1}^{4}\left[i*3^{1}+i*3^{2}+i*3^{3}\right]=\sum_{i=1}^{4}\left[3i+9i+27i\right]=\sum_{i=1}^{4}39i$$

Ahora hacemos la operación sobre i.

$$\sum_{i=1}^{4}39i=\left[39(1)+39(2)+39(3)+39(4)\right]=39+78+117+156=390$$

Ejemplo 303:

Resolver: $\sum_{j=2}^{4}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{j*i}{j+i}\right)^{2}$

Solución:

Se opera sobre i primero. $\sum_{j=2}^{4}\left[\left(\frac{j*1}{j+1}\right)^{2}+\left(\frac{j*2}{j+2}\right)^{2}\right]=\sum_{j=2}^{4}\left[\left(\frac{j}{j+1}\right)^{2}+\left(\frac{2j}{j+2}\right)^{2}\right]$

Operando y simplificando. $\sum_{j=2}^{4}\left[\left(\frac{j}{j+1}\right)^{2}+\left(\frac{2j}{j+2}\right)^{2}\right]=\sum_{j=2}^{4}\left[\frac{j^{2}}{(j+1)^{2}}+\frac{4j^{2}}{(j+2)^{2}}\right]$

Ahora se opera sobre j.

$$\sum_{j=2}^{4}\left[\frac{j^{2}}{(j+1)^{2}}+\frac{4j^{2}}{(j+2)^{2}}\right]=\left[\frac{2^{2}}{(2+1)^{2}}+\frac{4*2^{2}}{(2+2)^{2}}\right]+\left[\frac{3^{2}}{(3+1)^{2}}+\frac{4*3^{2}}{(3+2)^{2}}\right]+\left[\frac{4^{2}}{(4+1)^{2}}+\frac{4*4^{2}}{(4+2)^{2}}\right]$$

Desarrollando las potencias y productos, para luego sumar las fracciones.

$$\left[\frac{4}{9}+\frac{16}{16}\right]+\left[\frac{9}{16}+\frac{36}{25}\right]+\left[\frac{16}{25}+\frac{64}{36}\right]=\frac{13}{9}+\frac{801}{400}+\frac{544}{225}=\frac{5200+7209+8704}{3600}$$

Operando las fracciones se obtiene finalmente. $\sum_{j=2}^{4}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{j*i}{j+i}\right)^{2}=\frac{21113}{3600}$

Algunas de las aplicaciones de la sumatoria esta el desarrollo de la expansión binomial, dicho algebraicamente los productos notables.

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

LA PRODUCTORIA

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

Lección Cuarenta y ocho: Fundamentación de Productorias

Para denotar la productoria se utiliza la letra griega pi $\prod$

La notación se puede generalizar de la siguiente manera:

$$P = \prod_{i=n}^{n+k} a_i$$

P = La magnitud de la operación productoria
i = El índice del producto, éste varia de n hasta n + k.
n = Término inicial de la productoria. (*Límite inferior*)
n + k = Término final de la productoria. (*Límite superior*)
a_i = Valor del término en el punto i.
k = Cantidad de términos a operar en la productoria.

La fórmula establece que el operador productoria consiste en multiplicar los términos a_i dado que i varia de n hasta n + k.

Se puede generalizar la definición de la siguiente manera:

$$\prod_{i=n}^{m} a_i = a_n * a_{n+1} * a_{n+2} * \dots * a_m$$ Siendo n ≤ m

En este operador es importante identificar el número de factores, el cual se obtiene con la siguiente relación. m – n + 1

Ejemplo 304:

Dada la expresión: $\prod_{i=1}^{4} a_i$ Desarrollar la productoria e identificar el número de términos.

Solución:

La productoria se puede indicar así: $\prod_{i=1}^{4} a_i = a_1 * a_2 * a_3 * a_4$

Ahora para identificar el número de términos, aunque se ven explícitamente, con la fórmula:
m – n +1: 4 – 1 + 1 = 4. Efectivamente hay 4 términos en la expansión.

Ejemplo 305:

Calcular: $\prod_{j=1}^{5} 2^j$

Solución:

La extensión de la productoria. $\prod_{j=1}^{5} 2^j = 2^1 * 2^2 * 2^3 * 2^4 * 2^5$

Desarrollando: $$\prod_{j=1}^{5} 2^{j} = 2 * 4 * 8 * 16 * 32 = 32.768$$

Ahora determinemos el número de términos: m – n + 1 = 5 – 1 + 1 = 5.

Ejemplo 306.

Desarrollar: $$\prod_{k=3}^{6}\left(\frac{k^2}{k+1}\right)$$

Solución:

La expansión. $$\prod_{k=3}^{6}\left(\frac{k^2}{k+1}\right) = \left(\frac{3^2}{3+1}\right)\left(\frac{4^2}{4+1}\right)\left(\frac{5^2}{5+1}\right)\left(\frac{6^2}{6+1}\right)$$

Operando: $$\prod_{k=3}^{6}\left(\frac{k^2}{k+1}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{25}{6}\right)\left(\frac{36}{7}\right) = \frac{2160}{114} = \frac{1.080}{7}$$

El número de factores: m – n + 1: 6 – 3 + 1 = 4, los cuales se observan en la operación.

Lección Cuarenta y nueve: Propiedades de las Productorias

Al igual que las sumatorias, las productorias tienen algunas propiedades, que permiten desarrollar productorias de una manera más ágil.

Propiedad 1:

$$\prod_{i=1}^{n} kx_i = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{Para k = constante y n} \in Z^+$$

La siguiente propiedad, hace referencia a la productoria del producto.

Propiedad 2:

$$\prod^{n}\left[f(i)g(i)h(i)\right] = \left[\prod^{n}\left[f(i)\right]\right]\left[\prod^{n}\left[g(i)\right]\right]\left[\prod^{n}\left[h(i)\right]\right]$$

También es pertinente la propiedad de cociente. La propiedad expresa que la productoria de un cociente, es igual al cociente de la productoria.

Propiedad 3:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f(i)}{g(i)}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(i)}{\prod_{i=1}^{n} g(i)} \qquad \text{Para } \prod_{i=1}^{n} g(i) \neq o$$

Existe una propiedad de los logaritmos que esta relacionado con las productorias.

Propiedad 4:

$$Log\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} Log\ (x_i)$$

Ejemplo 307:

Desarrollar $\prod_{i=1}^{6} 2\ i$

Solución:

Haciendo la expansión: $\prod_{i=1}^{6} 2i = 2^6 \prod_{i=1}^{6} i = 2^6(1*2*3*4*5*6)$

Desarrollando: $2^6(1*2*3*4*5*6) = 46.080$

Ejemplo 308:

Desarrollar: $Log \prod_{k=1}^{3}(3k)$

Solución:

Por la propiedad 1: $Log \prod_{k=1}^{3}(3k) = Log\ 3^3 \prod_{k=1}^{3}(k)$

Desarrollando la productoria: $Log\ 3^3 \prod_{k=1}^{3}(k) = Log\ 3^3(1*2*3)$

Operando: $Log\ 3^3 * 6 = Log\ 27 * 6 = Log\ (162)$

Finalmente: $Log\ (162) \approx 2{,}209$

Calculo de Productorias:

Para desarrollar las productorias existen algunas fórmulas que nos permiten resolverlas de una manera más ágil.

1. $$\boxed{\prod_{i=1}^{n} k = k^n}$$

2. $$\boxed{\prod_{i=1}^{n} i = n!}$$

3. $$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(i+p) = \frac{(n+p)!}{p!}}$$

Para p una constante

4. $$\boxed{\prod_{i=m}^{n} i = \frac{n!}{(m-1)!}}$$

Para $m \le n$

Ejemplo 309:

Hallar: $\prod_{i=1}^{6} p$

Solución:

Aplicando las propiedades se obtiene. $\prod_{i=1}^{6} p = p^{6}$

Ejemplo 310:

Hallar el valor de: $\prod_{k=1}^{5} k$

Solución:

Utilizando las propiedades, desarrollamos el problema. $\prod_{k=1}^{5} k = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$

Ejemplo 311:

Resolver: $\prod_{i=3}^{7} i$

Solución:

$$\prod_{i=3}^{7} i = \frac{7!}{(3-1)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{2*1} = 2520$$

Ejemplo 312:

Resolver: $\prod_{i=n}^{m}\left(\frac{i^2}{(i+1)^2}\right)$

Solución:

Desarrollemos la expansión.

$$\prod_{i=n}^{m}\left(\frac{i^2}{(i+1)^2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)^2} * \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} * \frac{(n+2)^2}{(n+3)^2} * \dots * \frac{(m-1)^2}{m^2} * \frac{m^2}{(m+1)^2}$$

Simplificando términos semejantes se obtiene.

$$\prod_{i=n}^{m}\left(\frac{i^2}{(i+1)^2}\right) = \frac{n^2}{(m+1)^2}$$

Ejemplo 313:

Resolver: $\sum_{i=1}^{4} Log\ (4i)$

Solución:

Por la propiedad de equivalencia entre sumatorias y productorias, lo podemos desarrollar:

$$\sum_{i=1}^{4} Log\ (4i) = Log\left[\prod_{i=1}^{4} 4i\right] = Log\left[4^4 \prod_{i=1}^{4} i\right] = Log\ [256\,(4!)]$$

Más adelante se analizará el concepto de factorial, por ahora solo podemos decir que el factorial de 4 (4!) es 4 x 3 x 2 x 1 = 24

Así: $Log\ [256\ (4!)] = Log\ [256\ x\,24\ ] = Log\ (6144\ ) \approx 3{,}788$

Por consiguiente: $\sum_{i=1}^{4} Log\ (4i) \cong 3{,}788$

Lección Cincuenta: El Factorial

El factorial es un concepto matemático, siendo una herramienta muy importante en campos como el álgebra, el cálculo y la estadística. Estas razones motivan el estudio de los factoriales.

El factorial o producto factorial de un número, es una operación que permite hacer productos secuenciales cuando así se requiera, tal es el caso del desarrollo de combinatorias en el cálculo de probabilidades, el desarrollo de la expansión binomial en los llamados productos notables y otros.

DEFINICIÓN:
Para todo número natural n, el factorial de n es el producto de todos los naturales desde 1 hasta n.

n! = 1 x 2 x 3 x 4 x... x (n – 1) x n

A partir de la definición anterior, el factorial de un número se puede resumir de la siguiente manera:

$$\boxed{n! = \prod_{i=1}^{n} i}$$

Propiedades:

Dos propiedades importantes acerca de los factoriales:

1. Por definición: **0! = 1**
2. De la definición se infiere: **n! = n x (n - 1)!**

El operador factorial es pieza fundamental en análisis matemático, en las fórmulas de Taylor y Mc Laurin, como ejemplos de la utilidad de éste concepto matemático.

Ejemplo 314:

Hallar 3!

Solución:

Por la definición: 3! = 1 x 2 x 3 = 6

Ejemplo 315:

Desarrollar 6!

Solución:

6! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720

Ejercicios Diversos:

Con el fin de afianzar los temas de sumatorias y productorias, se presenta a continuación ejemplos diversos, para que usted estimado estudiante los analice y profundice en dichas temáticas.

Ejemplo 316:

Calcular. $\prod_{i=1}^{6} 3^{-i}$

Solución:

Aplicando el operador productoria: $\prod_{i=1}^{6} 3^{-i} = 3^{-1}\, x\, 3^{-2}\, x \ldots x\, 3^{-6} = \frac{1}{3}\, x\, \frac{1}{9}\, x \ldots x\, \frac{1}{729}$

Finalmente: $\prod_{i=1}^{6} 3^{-i} = \frac{1}{3}\, x\, \frac{1}{9}\, x \ldots x\, \frac{1}{729} = \frac{1}{3^{22}}$

El número de factores: 6 – 1 + 1 = 6

Ejemplo 317:

$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} 3(2i + j)$$

Solución:

Vamos a desarrollar el ejemplo secuencialmente, deduzcan los principios aplicados. Primero hacemos la operación sobre el subíndice más interno, en este caso i.

$$\sum_{j=3}^{7}\sum_{i=1}^{5}3(2i+j)=\sum_{j=3}^{7}\left(\sum_{i=1}^{5}(6i+3j)\right)=\sum_{j=3}^{7}\left(6\sum_{i=1}^{5}i+3\sum_{i=1}^{5}j\right)$$

$$\sum_{j=3}^{7}\left(6\sum_{i=1}^{5}i+3\sum_{i=1}^{5}j\right)=\sum_{j=3}^{7}\left(6\left[\frac{5(5+1)}{2}\right]+3*5j\right)=\sum_{j=3}^{7}(90+15j)$$

Ahora el operador sumatoria sobre el subíndice más externo, para este caso j.

$$\sum_{j=3}^{7}(90+15j)=\sum_{j=3}^{7}(90)+\sum_{j=3}^{7}15j=\sum_{j=3}^{7}(90)+15\sum_{j=3}^{7}j$$

Aplicando el operador: $\sum_{j=3}^{7}(90)+15\sum_{j=3}^{7}j=[90(7-3+1)]+\left[15\left(\frac{(7+3)*(7-3+1)}{2}\right)\right]$

Por consiguiente: $[90(7-3+1)]+\left[15\left(\frac{(7+3)*(7-3+1)}{2}\right)\right]=450+375$

Finalmente: $\sum_{j=3}^{7}\sum_{i=1}^{5}3(2i+j)=825$

Ejemplo 318:

Desarrollar. $\prod_{i=-2}^{1}\left(\frac{i}{i+3}\right)$

Solución:

Como el subíndice va de –2 hasta 1, la secuencia no se restringe; es decir, la secuencias es válida en dicho intervalo.

Entonces: $\prod_{i=-2}^{1}\left(\frac{i}{i+3}\right)=\left(\frac{-2}{-2+3}\right)\left(\frac{-1}{-1+3}\right)\left(\frac{0}{0+3}\right)\left(\frac{1}{1+3}\right)$

Operando: $\prod_{i=-2}^{1}\left(\frac{i}{i+3}\right)=(-2)(-\frac{1}{2})(0)(\frac{1}{4})=0$

Ejemplo 319:

Resolver: $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=6}^{10}(20j-2j^2-i)*i$

Solución:

Primero se resuelve la operación interna, para este caso la sumatoria.

$$\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=6}^{10}(20j-2j^2-i)*i=\prod_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=6}^{10}(20j-2j^2-i)*i\right]$$

En el paréntesis el que varía es j, luego i es constante, entonces:

$$\prod_{i=1}^{3}\left[i\sum_{j=6}^{10}\left(20\,j-2\,j^2-i\right)\right]=\prod_{i=1}^{3}\left[i\left(\sum_{j=6}^{10}20\,j-\sum_{j=6}^{10}2\,j^2-\sum_{j=6}^{10}i\right)\right]$$

Por la propiedad de la sumatoria de una constante por la variable:

$$\prod_{i=1}^{3}\left[i\left(20\sum_{j=6}^{10}j-2\sum_{j=6}^{10}j^2-\sum_{j=6}^{10}i\right)\right]=\prod_{i=1}^{3}\left[i\left(20\sum_{j=6}^{10}j-2\left(\sum_{j=1}^{10}j^2-\sum_{j=1}^{5}j^2\right)-\sum_{j=6}^{10}i\right)\right]$$

Ahora desarrollamos las sumatorias:

$$\prod_{i=1}^{3}i\left[20\left(\frac{(10+6)(10-6+1)}{2}\right)-2\left(\frac{10(10+1)(2*10+1)}{6}-\frac{5(5+1)(2*5+1)}{6}\right)-(10-6+1)i\right]$$

Operando: $\prod_{i=1}^{3}i[800-2(385-55)-(5i)]=\prod_{i=1}^{3}i[140-5i]=\prod_{i=1}^{3}[140i-5i^2]$

Aquí solo queda el operador productoria. Entonces:

$$\prod_{i=1}^{3}\left[140\,i-5i^2\right]=\left[140\,(1)-5(1)^2\right]\left[140\,(2)-5(2)^2\right]\left[140\,(3)-5(3)^2\right]$$

Desarrollando las operaciones: $[140(1)-5(1)^2][140(2)-5(2)^2][140(3)-5(3)^2]=[135][260][375]$

Finalmente: $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=6}^{10}\left(20\;j-2\;j^2-i\right)*i=13'162\;.500$

Ejemplo 320:

Que valor debe tomar P en la siguiente expresión, para que se cumpla la igualdad.

$$\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\prod_{i=1}^{j}\left(\frac{i}{i+1}\right)=6$$

Solución:

Desarrollando la productoria.

$$\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\prod_{i=1}^{j}\left(\frac{i}{i+1}\right)=6\Rightarrow\Rightarrow\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\left[\frac{1}{1+1}*\frac{2}{2+1}*\frac{3}{3+1}*\ldots*\frac{j-2}{j-1}*\frac{j-1}{j}*\frac{j}{j+1}\right]=6$$

Simplificando:

$$\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\left[\frac{1}{1+1}*\frac{2}{2+1}*\frac{3}{3+1}*\ldots*\frac{j-2}{j-1}*\frac{j-1}{j}*\frac{j}{j+1}\right]=\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\left[\frac{1}{j+1}\right]=6$$

Se puede volver a simplificar: $\sum_{j=1}^{P}(j+1)*j\left[\frac{1}{j+1}\right]=\sum_{j=1}^{P}\;j=6$

Por el desarrollo de sumatoria: $\sum_{j=1}^{P} j = 6 \Rightarrow\Rightarrow \frac{P(P+1)}{2} = 6$

Despejamos P: $\frac{P(P+1)}{2} = 6 \Rightarrow\Rightarrow P^2 + P = 12 \Rightarrow\Rightarrow P^2 + P - 12 = 0$

Linealizando el polinomio: $P^2 + P - 12 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (P+4)(P-3) = 0$

Los valores que puede tomar P: P = - 4 y P = 3

Como valores negativos no se aceptan, entonces la solución es P = 3.

Algunas utilidades que tiene las productorias:

1. En Estadística es muy utilizada la llamada Fórmula de Stirling, cuando n es muy grande.

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

2. Para desarrollar el binomio de Newton, los coeficientes de los términos del polinomio se desarrollan como una combinatoria.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

3. Las combinatorias permiten determinar la cantidad de elementos en un espacio muestral, para resolver una expansión binomial, son algunas de las utilidades que tiene los factoriales.

Combinatoria: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$ Para n ≥ k

Ejemplo 321:

Resolver: $\binom{6}{2}$

Solución:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! * 2!} = \frac{720}{24 * 2} = \frac{720}{48} = 15$$

Ejemplo 322:

Resolver: $(x+y)^5$

Solución:

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 y^0 + \binom{5}{1} x^{5-1} y + \binom{5}{2} x^{5-2} y^2 + \binom{5}{3} x^{5-3} y^3 + \binom{5}{4} x^{5-4} y^4 + \binom{5}{5} x^{5-5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

EJERCICIOS

Desarrollar el proceso para obtener las sumatorias propuestas.

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} i$ Rta: $\frac{1}{4}\left(n^2 + n\right)$

2. $\sum_{j=4}^{15} j$ Rta: 114

3. $\sum_{k=1}^{12} \left(k^2 + k\right)$ Rta: 728

4. $\sum_{j=7}^{18} 12$ Rta: 144

Resolver las siguientes dobles sumatorias.

5. $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=3}^{7} (i+1)(j-1)$ Rta: 180

Desarrollar el operador indicado.

6. $\prod_{i=1}^{6} 2^{i}$ Rta: 2’097.152

7. $\prod_{j=1}^{4} \left(\frac{1+j}{j+2}\right)$ Rta: 1 / 3

8. $\prod_{k=6}^{10} k$ Rta: 30.240

9. $\prod_{j=1}^{20} (5+j)$ Rta: 1,2926x10^{23}

10. $\prod_{i=a}^{6} \left(\frac{i^2}{(i+1)^2}\right)$ Rta: $\frac{a^2}{(b+1)^2}$

Desarrollar el doble operador:

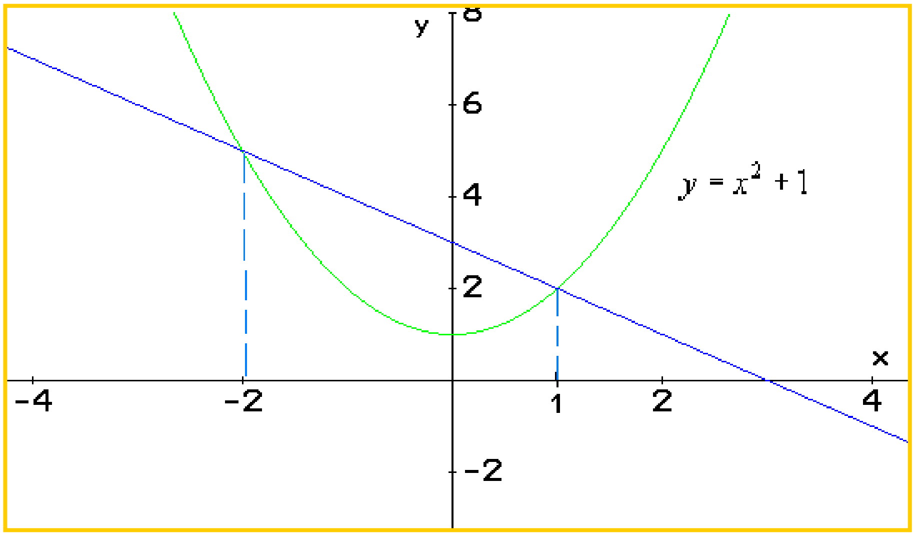
11. $\sum_{i=2}^{7} \sum_{j=1}^{5} (j+i)$ Rta: 225

12. $\sum_{j=3}^{7} \prod_{i=4}^{5} 3\left[2i + (-1)^{i} * j\right]$ Rta: 2.835

AUTOEVALUACIÓN UNIDAD TRES

Para las ecuaciones dadas, hallar los parámetros.

1. $2x + 5y - 8 = 0$
2. $3x/4 - y/3 = 2$
3. $\dfrac{2}{3x-4y} = \dfrac{1}{3}$
4. Hallar la ecuación de la recta observada en la gráfica:



Para cada caso, determinar si las rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

5. $3x + 4y - 9 = 0 \quad y \quad 3y - 4x - 10 = 0$

6. $2x + 3y = 1 \quad y \quad x - 2y = 9$

Resolver los problemas propuestos:

7. Una recta corta al eje x en 5 y es paralela a la recta 2x + y – 5 = 0. Cual ser{a su ecuación correspondiente.

8. Una recta cuya ecuación es 5y – 4x – 20 = 0, limita un triángulo rectángulo y con los ejes coordenados ¡Cual será el área de dicho triángulo?

9. Hallar la ecuación canónica y el valor de x de la circunferencia, la cual tiene diámetro 10, para por el punto (x, 4).

Encontrar la ecuación de la elipse, a partir de los parámetros dados:

10. Focos: $(0,\pm\sqrt{3})$ y el eje mayor mide 4

11. Determinar la excentricidad de los pontos 7.

A partir de los datos dados, hallar la ecuación de la parábola, si: F(3, 2); D: y = - 2.

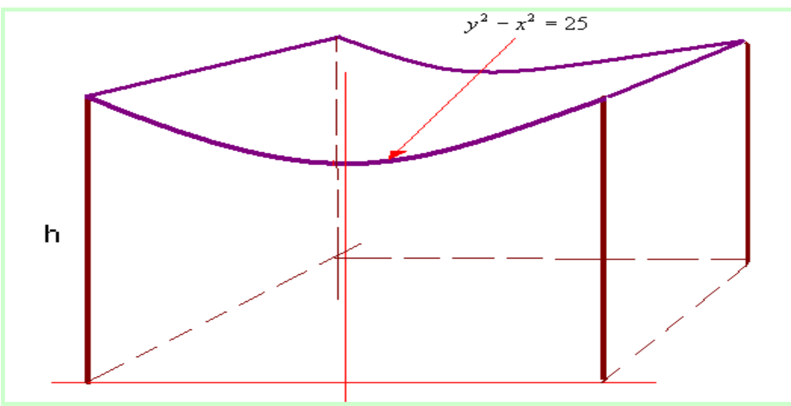
12. Determine la parábola y = ax^2 + bx + c, la cual pasa por los puntos: (1, 2), (-2, -7) y (2, -3).

13. Encontrar La ecuación canónica de la hipérbola, si Vértices(0, ±6), Asíntota $y = \pm\frac{3}{4}x$

14. A partir de la ecuación dada, identificar los parámetros y hacer un bosquejo de la gráfica.

$$x^2 - y^2 - 25 = 0$$

15. El techo de un auditorio tiene forma hiperbólica, la ecuación que lo gobierna es de la forma: $y^2 - x^2 = 25$ Donde x e y están en metros. ¿Cuál será la altura de las paralelas exteriores que sostienen el techo?. Ver la figura.



16. Dados los parámetros de la circunferencia, hallar la ecuación canónica, si: centro (5, 6) y tangente al eje x.

17. Para la ecuación dada, hallar los parámetros: $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 24 = 0$

18. Un canal de conducción de agua tiene forma semicircular, la profundidad en el centro del canal es de 10 metros, ¿cuál será la ecuación que describe el canal y cuál será su profundidad a 4 metros del borde?

19. Dada la siguiente ecuación, identificar los parámetros. $3x^2 + y^2 + 18x + 18 = 0$

20. En un terreno rectangular de 6x3 metros, hay una pista para atletismo de forma eliptica, ésta toca el centro de los lados del rectángulo. Cuál será la ecuación que gobierna la pista.

21. A partir de la ecuación dada, encontrar los parámetros. $-3y^2 - 18y + 6x = 0$

22. El arco de la ventana de una iglesia tiene forma parabólica, la altura del arco en el punto medio es de 16 pies y el ancho de la base es de 7 pies. Se desea pasar una caja de forma rectangular a través de la ventana. Si la caja tiene una altura de 12 pies. ¿Cuál debe ser el máximo ancho de la caja para que pueda pasar por la ventana?

23. A partir de la ecuación dada, identificar los parámetros de la hipérbola: $4y^2 - x^2 + 8y - 6x - 4 = 0$

24. Centro (2, -1), Un foco (2, -3) Un vértice (2, -2)

Dada la ecuación, identificar los parámetros.

25. $6x^2 - 2y^2 + 8y - 12x = 0$

26. $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$

27. $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

28. En el punto p (-2, 200) se produce una explosión, el sonido hace eco en un acantilado ubicado en q (2, 200). Una persona ubicada en el punto r (x, y) escucha el eco 6 segundos después de oír la explosión. ¿Cuál será la ecuación de la curva para el punto r (x, y) donde se encuentra la persona? La distancia se da en pies y el sonido viaja a 1.100 pie/seg.

29. Un disco receptor de sonido está diseñado de forma parabólica, el foco esta a 5 cm. Del vértice ¿cuál será el ancho del disco si la profundidad es de 2 cm.

Realizar la operación indicada.

30. $\sum_{i=1}^{8} 6i^4$

31. $\sum_{p=5}^{14} p^2$

32. $\sum_{i=0}^{5} \sum_{j=2}^{3} \left[(-2)^i * j + j^3\right]$

33. $\prod_{k=1}^{4} 8x_k$

34. $\sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{k}{(j+1)^2} \right)$ Rta: 4 / 3

LABORATORIO

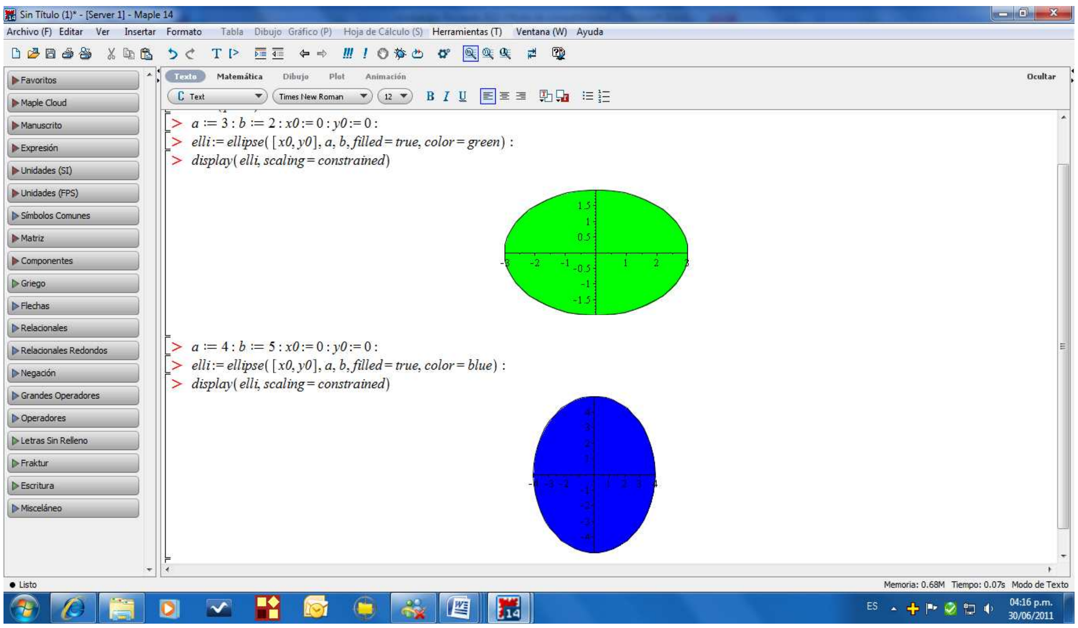
Geometría Analítica:

Como siempre primero reseteamos la hoja: *Resert*, para comenzar. Luego cargamos los paquetes: with(geometry), enter. with(plottools), enter. Luego with(plots), enter. Listo. A partir de este momento podemos trabajar con cualquiera de las cónicas.

1. **Elipse:** La forma canónica de la elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Para el ejemplo se observa la grafica:

$\frac{(x)^2}{9}+\frac{(y)^2}{4}=1$ Color Verde   y $\frac{(x)^2}{16}+\frac{(y)^2}{25}=1$ Color azul



Graficar:

1. $\frac{(x)^2}{16}+\frac{(y)^2}{1}=1$ Color Gris
2. $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$ Color Café

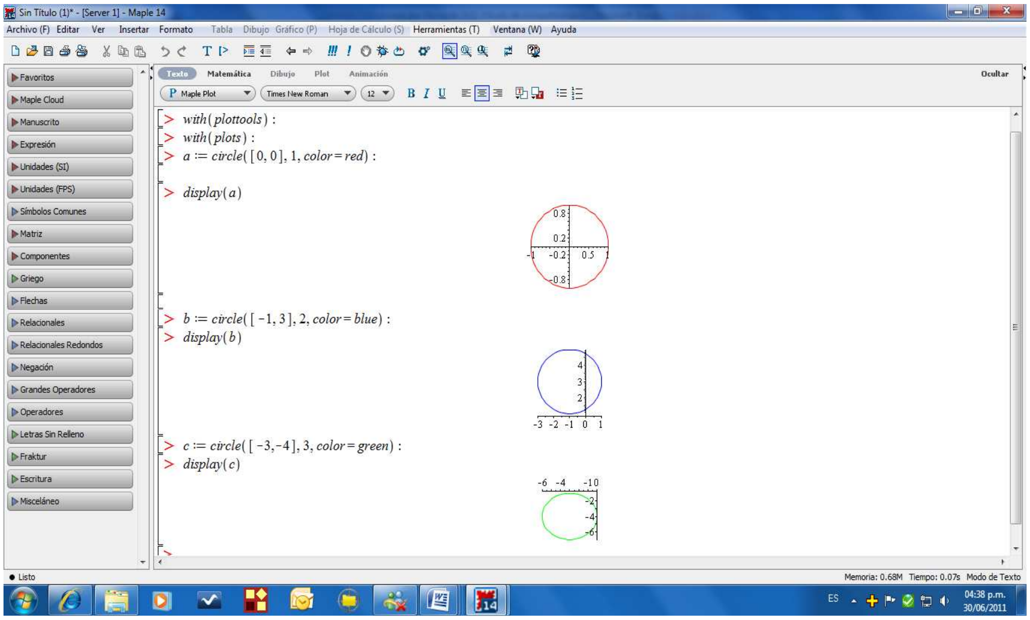
2. **Circunferencia:** La forma canónica de la elipse: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

Donde (h, k) = centro   y R = Radio. Veamos ejemplos para esta cónica.

$(x)^2+(y)^2=1$ Color Rojo.

$(x+1)^2+(y-3)^2=4$ Color Azul

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$ Color Verde

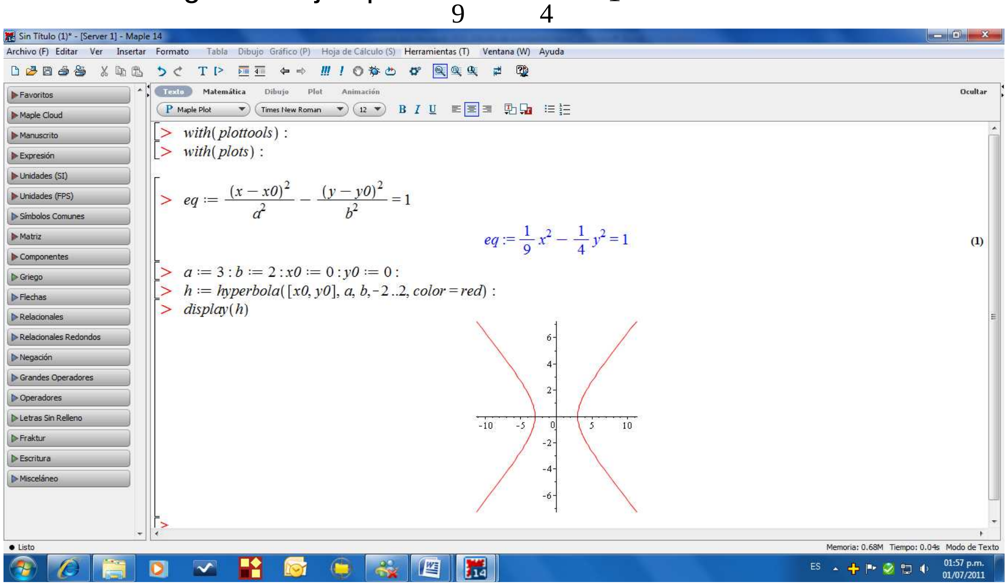


Graficar:

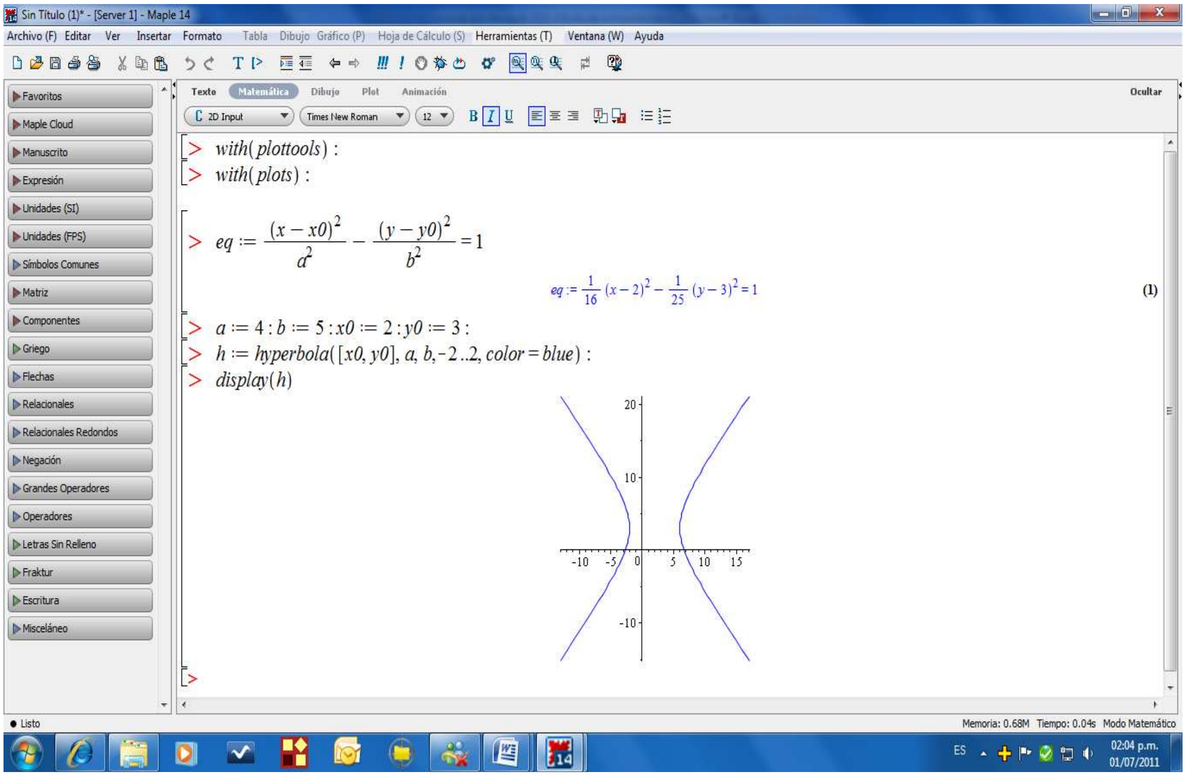
1. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$ Color café
2. $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ Color gris
3. $(x)^2+(y-5)^2=10$ Color Amarillo

3. **Hipérbole:** La forma canónica de la elipse: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Veamos el siguiente ejemplo: $\dfrac{(x)^2}{9}-\dfrac{(y)^2}{4}=1$



$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{25}=1$$



Ejercicios:

Graficar las siguientes hipérbolas.

1. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
2. $6y^2 - 3x^2 = 18$
3. $x^2 - y^2 - 25 = 0$

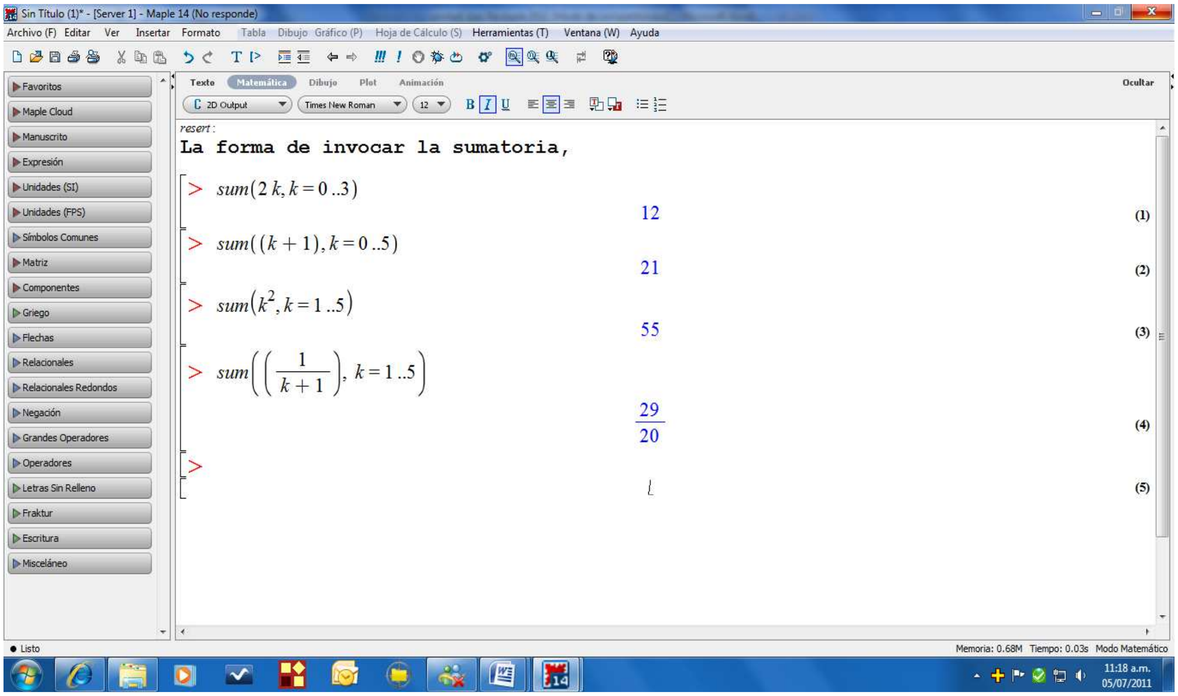
Sumatorias:

El operador sumatoria es muy utilizado en áreas como la Estadística, Cálculo, Matemáticas Especiales y otros. Por tal razón es necesario aprender a trabajar las sumatorias dese el Maple.

Como en todo inicio de trabajo: *resert*, Luego Activando [> en la barra superior, se puede iniciar a trabajar con sumatorias: La operación se invoca así: sum(k, k=m..n), lo que significa: $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ El software hace la operación de inmediato.

Veamos algunos ejemplos:

a-) $\sum_{k=0}^{3} 2k$ b-) $\sum_{k=0}^{5} (k+1)$ c-) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ d-) $\sum_{k=1}^{5} \dfrac{1}{(k+1)}$



Ejercicios:

1. $\sum_{k=1}^{8}(4k+3)$
2. $\sum_{k=3}^{7}(5k^2-7k)$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2})$
4. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty}-1^k$

Productorias:

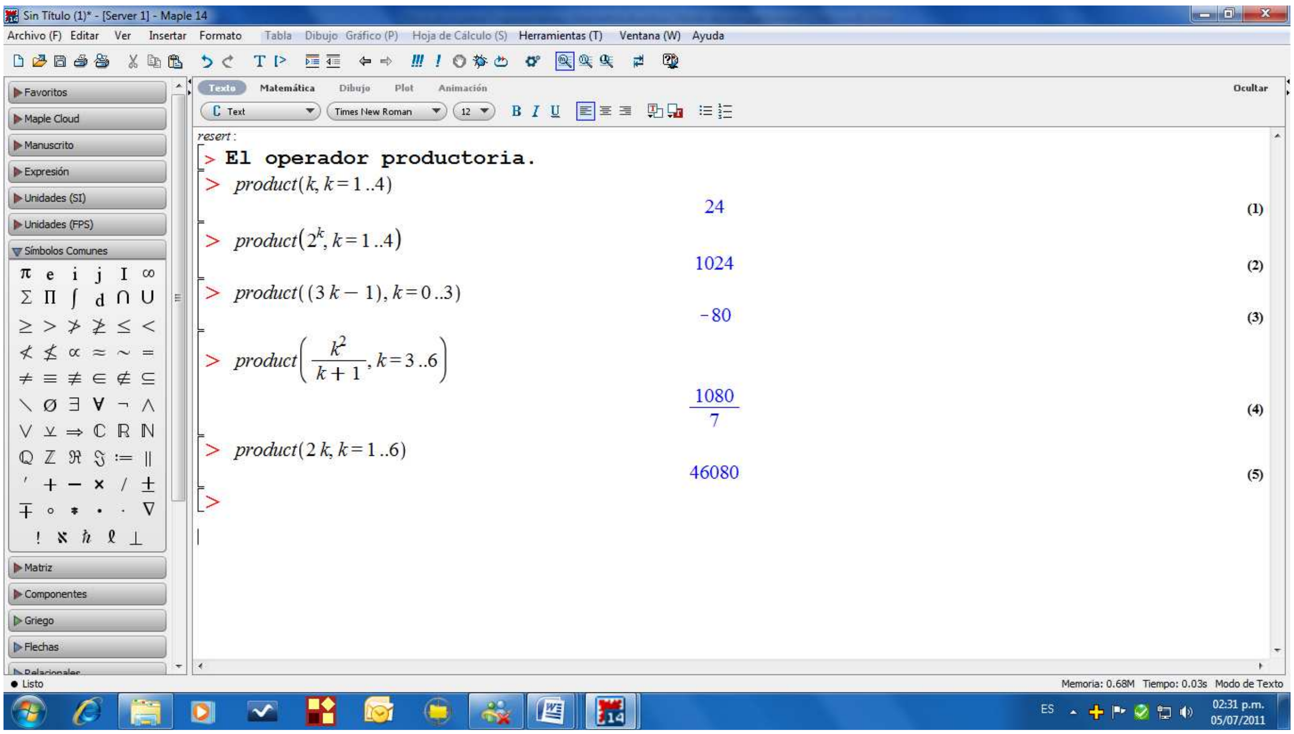
Otro operador muy importante es la productoria, por ejemplo la media geométrica y en otras muchas temáticas, la porductoria es muy necesaria.

Como se ha trabajado: *Resert*, luego se invoca la operación: *product*(f(k), k=m..n).

$$\prod_{k=m}^{n} f(k)$$

Veamos algunos ejemplos de este operador, utilizando Maple.

a-) $\prod_{k=1}^{4} k$ b-) $\prod_{k=1}^{4} 2^k$ c-) $\prod_{k=0}^{3} (3k-1)$ d-) $\prod_{k=3}^{6} \frac{k^2}{k+1}$ e-) $\prod_{k=1}^{6} 2k$



Ejercicios:

1. $\prod_{k=1}^{6} 2^{k}$

2. $\prod_{k=1}^{4} \left(\frac{1+k}{k+2}\right)$

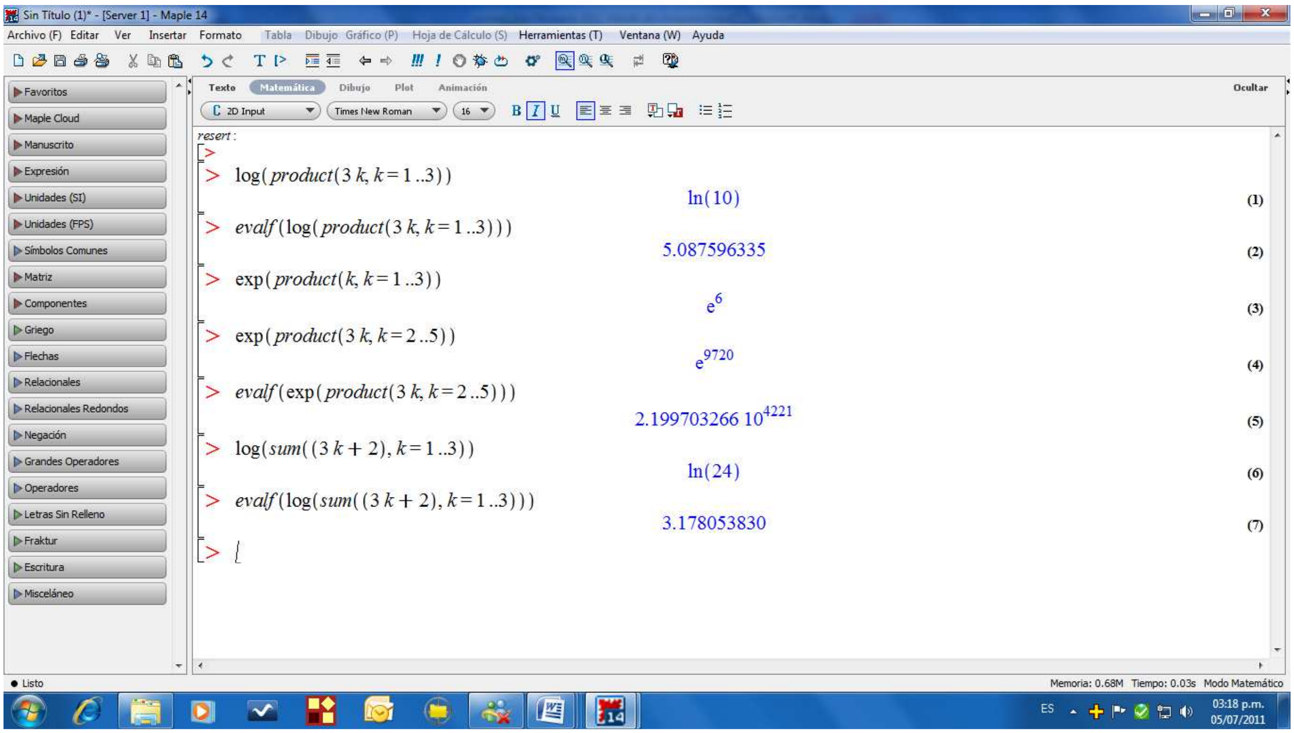
3. $\prod_{k=1}^{20} (5+k)$

4. $\prod_{k=a}^{6} \left(\frac{k^2}{(k+1)^2}\right)$

Cuando se desea involucrar operaciones como exponencial o logarítmica, se puede hacer la operación, según los siguientes ejemplos. Si se desea saber el valor real, se aplica *evalf*(expresión a evaluar).

En la gráfica se observan los siguientes ejemplos.

a-) $\log \prod_{k=1}^{3} (3k)$ b-) $e^{\prod_{k=1}^{3} k}$ c-) $\log \sum_{k=1}^{3} (3k+2)$



Ejercicios:

1. $\log \prod_{k=1}^{5} (k)$ Hallar el valor real.

2. $\log \sum_{k=2}^{6} (k+2)$ Hallar el valor real.

3. $e^{\prod_{k=2}^{4} 3k}$ Hallar el valor real.

4. $10^{\sum_{k=1}^{3} k}$

5. $2^{\prod_{k=1}^{4} k}$

BIBLIOGRAFÍA

AUFMANN, Richard. Beginning Algebra. 7º Edición, Cengage Learning. EE UU, 2006

BARNET, Raymond. Álgebra y trigonometría. Mc Graw Hill, México, 1.978

_____ Precalculo, FUNCIONES Y Gráficas, Mc Graw Hill, México, 1.999

LOVAGLIA, Florence, Álgebra, Reverte, 1.972

STANLEY Smith. Álgebra y Trigonometría. Editorial Iberoamericana, USA 1997

KEDDY, BITTINGER, Álgebra y Trigonometría, Fondo Educativo Interamericano, .978

SWOKOSKI, Earl, Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericano, 1.981

ALLENDOELFER, Oakley, Fundamentos de Matemáticas Universitarias. Mc Graw Hill, México, 1.982

MUNEM y YIZZE, Precalculus, Reverte, 1.980

HENGEN, Henry. Fundamental Mathematical Structures, Scott Foresman and Company. 1.966

TAYLOR, Wade. Matemáticas Básicas. Limusa, 1.981

SULLIVAN, Michael, Precálculo, Pearson Education. México, 1997

GUSTAFSON, David. Álgebra Intermedia, Thomson Learning. México, 1997

STEWART; Janes, REDLIN Lothar, WATSON, Saleem. Precálculo, International Thomson Editores, 3º Edición, México, 2001

SWOKOSWKI, Earl y COLE, Jeffery. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Thomson Learning, 10º Edición, Bogotá Colombia, 2002

JOHNSON, Murphu y STEFFENSEN, Arnold, Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Trillas, México D. F. 1.994

ZILL, Dennis y DEWAR, Jacqueline. Álgebra y Trigonometría, 4º Edición, Mc Graw Hill, Bogotá Colombia, 2. 008

Software:

Maple. Disponible para la UNAD

Geogebra. Libre, se puede descargar de la Web.

Sitios Web.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuacion-linea-recta.html

http://www.vitutor.com/algebra.html

http://www.aritor.com/

http://www.purplemath.com/modules/grphrtnl.htm

http://www.geoan.com/