

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

**JORGE ELIECER RONDON DURAN**

**AUTOR**

$$\frac{D y}{D x} = f'(x) = D_x(y)$$

**100410 – CÁLCULO DIFERENCIAL**

OSCAR CARRILLO  
(Director Nacional)

WILSON CEPEDA  
Acreditador

BOGOTÁ D.C.  
MARZO 2011

## ASPECTOS DE PROPIEDAD INTELECTUAL Y VERSIONAMIENTO

El presente módulo fue diseñado y elaborado en el año 2006 por Jorge Eliécer Rondon Duran y Francisco Ortegón Camacho, como la primera versión. Las necesidades y actualizaciones, exigieron diseñar y alabarar una nueva versión que presentará las temáticas de manera más racional y con gran profundidad, diversos ejemplos, ejercicios diversos que permitan identificar la gran utilidad que tiene el cálculo diferencial, esto motivo una nueva versión.

Como novedades de este material es la presentación por unidades, capítulos y lecciones, que permite una fácil ubicación de temáticas específicas, según el interes del estudiante. Además, el componente práctico al final de cada unidad.

Este documento se puede copiar, distribuir y comunicar públicamente bajo las condiciones siguientes:

- *Reconocimiento.* Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor. (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- *No comercial.* No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- *Sin obras derivadas.* No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.
- *Reutilización o Distribución:* Se tiene que dejar ver claramente los *términos de la licencia* de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor
- Nada en esta menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

## INTRODUCCIÓN

El presente modulo esta dirigido a estudiantes de programas de pregrado que oferta la UNAD, bajo la modalidad de educación superior a distancia, en sus diferentes metodologías.

El material esta estructurado en Tres unidades didácticas, las cuales presentan las temáticas macro del curso académico. El contenido de cada una de las partes fue seleccionado, teniendo en cuenta los saberes mínimos que se esperaría debe alcanzar un estudiante de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia en el campo del Cálculo Deferencial.

La propuesta permite que los estudiantes reconozcan los conocimientos mínimos del curso en mención, que le permita resolver situaciones propias del mismo y además, abordar posteriores temáticas que requieran de éstos conocimientos.

Para el mejor aprovechamiento de este material, se recomienda que el estudiante posea como conocimientos previos: Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica, Fundamentación en Geometría plana y Espacial.

El modulo se caracteriza porque en cada lección se presentar ejemplos modelos del tema en estudio, al final de cada capitulo se exponen ejercicios de nivel medio - bajo de complejidad; con respuesta, que permite a los estudiantes contextualizarse en diversas áreas del conocimiento, con el fin de fortalecer las temáticas propias del curso. Al final de cada unidad se presenta una Autoevaluación de un nivel medio-alto, las cuales permiten verificar los alcances de los estudiantes en las temáticas analizadas y detectar las debilidades y así centrarse en éstas, con el fin de alcanzar las metas propuestas.

Finalmente, el Material pretende servir como guía de aprendizaje autónomo, se recomienda apoyar este proceso por medio de lecturas especializadas, ayudas audiovisuales, visitas a sitios Web y prácticas de laboratorio; entre otros, así lograr una efectiva comprensión, interiorización y aplicación de las temáticas estudiadas.

## INDICE DE CONTENIDO

<b>UNIDAD UNO: Análisis de Sucesiones y Progresiones</b>	6
<b>CAPÍTULO UNO: LAS SUCESIONES.</b>	7
Lección No 1: Generalidades	7
Lección No 2: Sucesiones Monótonas	11
Lección No 3: Sucesiones Acotadas	13
Lección No 4: Sucesiones Convergentes	17
Lección No 5: Límite de una Sucesión	22
Lección No 6: Sucesiones Divergentes	24
Ejercicios	25
<b>CAPÍTULO DOS: LAS PROGRESIONES</b>	26
Lección No 7: Progresiones Aritméticas	26
Lección No 8: Progresiones Geométricas	30
Ejercicios	36
Autoevaluación Unidad Uno	37
Laboratorio.	38
<b>UNIDAD DOS: Análisis de Límites y Continuidad</b>	39
<b>CAPÍTULO TRES: GENERALIDADES DE LÍMITES</b>	40
Lección No 9: Conceptualización Intuitiva de Límite	40
Lección No 10: Conceptualización Básica de Límite	40
Lección No 11: Conceptualización Formal de Límite	41
Lección No 12: Propiedades de Límites	44
Lección No 13: Evaluar un Límite	45
Ejercicios	48
<b>CAPÍTULO CUATRO: LÍMITES DE FUNCIONES Y ASÍNTOTAS</b>	49
Lección No 14: Límites al infinito	49
Lección No 15: Límites Infinitos	54
Lección No 16: Formas Indeterminadas	56
Lección No 17: Formas NO Indeterminadas	61
Lección No 18: Límite de Funciones Trigonométricas	62
Lección No 19: Límites Unilaterales	65
Lección No 20: Límite de una Función	68
Lección No 21: Asíntotas	69
Ejercicios	72
<b>CAPÍTULO CINCO: CONTINUIDAD</b>	74
Lección No 22: Continuidad en un Punto	74
Lección No 23: Continuidad en un Intervalo	76
Lección No 24: Discontinuidad	79
Ejercicios	83
Autoevaluación Unidad Dos	84
Laboratorio.	85

<b>UNIDAD TRES: Análisis de las Derivadas y sus Aplicaciones</b>	88
<b>CAPÍTULO SEIS: FUNDAMENTACIÓN SOBRE LAS DERIVADAS</b>	89
Lección No 25: Principio Geométrico sobre la Derivada	89
Lección No 26: Principio Físico sobre la Derivada	92
Lección No 27: Incrementos	95
Lección No 28: Definición Formal de la Derivada	96
Lección No 29: Derivadas Básicas	102
Ejercicios	110
<b>CAPÍTULO SIETE: DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS</b>	112
Lección No 30: Derivada de Suma y Resta de Funciones	112
Lección No 31: Derivada de Producto de Funciones	115
Lección No 32: Derivada de Cociente de Funciones	118
Lección No 33: Derivada de la Función Compuesta	122
Lección No 34: Derivada de la Función Implícita	126
Ejercicios	130
<b>CAPÍTULO OCHO: DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES</b>	131
Lección No 35: Derivada De la Función Exponencial y Función Logarítmica	131
Lección No 36: Derivada de las Funciones Trigonométricas	138
Lección No 37: Derivada de las Funciones Hiperbólicas	144
Ejercicios	150
<b>CAPÍTULO NUEVE: DERIVADA ORDEN SUPERIOR Y FUNCIONES INVERSAS</b>	151
Lección No 38: Derivada de Orden Superior	151
Lección No 39: Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas	155
Lección No 40: Derivada de Funciones Hiperbólicas Inversas	160
Ejercicios	163
<b>CAPÍTULO DIEZ. TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL</b>	164
Lección No 41: Teorema de Rolle	164
Lección No 42: Teorema del Valor Medio	167
Ejercicios	171
<b>CAPÍTULO ONCE: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS</b>	172
Lección No 43: Razones de Cambio Relacionadas	172
Lección No 44: Formas Indeterminadas	176
Lección No 45: Máximos y Mínimos de una Función	181
Lección No 46: Optimización	188
Lección No 47: Análisis de Gráficas	195
Lección No 48: Derivadas en la Física	203
Lección No 49: Derivadas en las Ciencias Económicas	206
Lección No 50: Derivadas en la Estadística	213
Autoevaluación Unidad Tres	225
Laboratorio.	230
Información de Retorno	231
Bibliografía	258



## **UNIDAD UNO**

### **ANÁLISIS DE SUCESSIONES Y PROGRESIONES**

## CAPÍTULO UNO: LAS SUCESIONES:

$$S = \{U_n\}_{n \geq a}$$

### Lección No 1: Generalidades:

En muchos contextos hacemos referencia a las sucesiones, El incremento bacteriano a través del tiempo, el aumento de la tasa de interés a través del tiempo, otros. Una sucesión esta referido a secuencia, luego se puede decir que una sucesión es un conjunto de valores que presenta una secuencia con una característica determinada.

**Definición Formal:** Una sucesión  $U_n$  es una función en la cual el dominio  $(n)$  son los números naturales y la imagen  $(u_n)$  los números reales.

$$f(x) : N \rightarrow R \quad \text{Es decir: } n \rightarrow F(n)$$

Analicemos un poco la notación:

Sea  $n = a, a+1, a+2, a+3, \dots$  Entonces:  $U_a$  es el primer término de la sucesión y

$U_n$  el  $n$ -ésimo término de la sucesión. La notación para una sucesión esta dada por:

$$S = \{U_n\}_{n \geq a}$$

**Descripción de una Sucesión:** Las sucesiones se pueden describir desde tres puntos de vista:

- A partir del termino general
- A partir de los primeros términos
- A partir del primer término y la relación de recurrencia.

**1. El Término general:** Toda sucesión tiene un término general, el cual describe dicha sucesión por comprensión; es decir, expresa la característica común de la sucesión.

### Ejemplo No 1:

Para la sucesión  $U_n = \{n + 2\}_{n \geq 1}$  Identificar los términos de la misma.

### Solución:

Al expresar la sucesión por extensión tenemos:

$$\text{El primer término: } U_{n=1} = \{1 + 2\} = \{3\}$$

El segundo término así:  $U_{n=2} = \{2 + 2\} = \{4\}$

Así sucesivamente. Entonces:  $U_n = \{3, 4, 5, 6, \dots, n + 2, \dots\}$

Vemos que conociendo el término general, se pueden obtener cada uno de los términos de la sucesión.

**2. Los Primeros Términos:** Conociendo los primeros términos, se puede hacer un análisis de la secuencia que presentan éstos y así obtener el término general. Lo anterior significa que se debe identificar “La Regla” que permiten desarrollar la secuencia.

**Ejemplo No 2:**

Sea  $U_n = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  Identificar el término general.

**Solución:**

Descomponemos los términos para buscar un patrón de secuencia, veamos:

$$U_{n=0} = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 1 + 2 * 0 = 1$$

$$U_{n=1} = 3 \Rightarrow 1 + 2 = 1 + 2 * 1 = 3$$

$$U_{n=2} = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 1 + 2 * 2 = 5$$

$$U_{n=3} = 7 \Rightarrow 1 + 6 = 1 + 2 * 3 = 7$$

El patrón de secuencia es  $1 + 2*n$ . Donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Entonces el término general es de la forma:  $U_n = \{1 + 2n\}_{n \geq 0}$

**Ejemplo No 3:**

Sea la sucesión:  $v_n = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$  Hallar el término general.

**Solución:**



Igual que en el caso anterior, se busca un patrón de secuencia. Se observa que los signos van intercalados, luego se debe tener expresión de potencia, ya que cuando la base es negativa y el exponente positivo par; la expresión es positiva, pero si la base es negativa y el exponente positivo impar; la expresión es negativa.

$$v_{n=1} = -2 = (-2)^1$$

$$v_{n=2} = 4 = 2^2 = (-2)^2$$

$$v_{n=3} = -8 = (-2)^3$$

⋮

$$v_{n=i} = 16 = 2^i$$

Luego el patrón de secuencia es  $(-2)^n$  Siendo n entero positivo.

El término general de la sucesión es:  $v_n = \{-2\}^n$

**3. El primer término y la Relación de Recurrencia:** La recurrencia consiste en identificar un término de la sucesión, en función del término anterior, es decir identificar  $u_n$  conociendo  $u_{n-1}$ .

#### Ejemplo No 4:

Una sucesión tiene como primer término  $u_0 = 3$  y la relación de recurrencia es de la forma:  $U_n = 2 + u_{n-1}$  identificar los primeros términos y el término general.

#### Solución:

Partiendo del primer término, se va construyendo uno a uno los demás.

$$u_0 = 3$$

Para los siguientes términos utilizamos la recurrencia.  $U_n = 2 + u_{n-1}$

$$u_1 = 2 + u_0 = 2 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 + u_1 = 2 + 5 = 7$$

$$u_3 = 2 + u_2 = 2 + 7 = 9$$

$$u_4 = 2 + u_3 = 2 + 9 = 11 \quad \text{Así sucesivamente.}$$

Los primeros términos:  $u_n = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

Para identificar el término general, de la secuencia construida por la recurrencia se puede observar:

$$u_0 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$u_1 = 2 + u_0 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 + u_1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$u_3 = 2 + u_2 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

$$u_4 = 2 + u_3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

Término general:  $u_n = 2n + 3$

### Ejemplo No 5:

Una sucesión tiene como primer término  $u_0 = -5$  y la relación de recurrencia es de la forma:

$U_n = U_{n-1} + (3\pi - 1)$  identificar los primeros términos y el término general.

### Solución:

Partiendo del primer término, se va construyendo uno a uno los demás.

$$u_0 = -5$$

$$U_1 = U_0 + (3\pi - 1) = -5 + (3\pi - 1)$$

$$U_2 = U_1 + (3\pi - 1) = [-5 + (3\pi - 1)] + (3\pi - 1) = -5 + 2(3\pi - 1)$$

$$U_3 = U_2 + (3\pi - 1) = [-5 + 2(3\pi - 1)] + (3\pi - 1) = -5 + 3(3\pi - 1)$$

Así sucesivamente, entonces para el n-esimo término:  $U_n = U_0 + n(3\pi - 1)$

*Según el tamaño del dominio, las sucesiones pueden ser infinitas o finitas.*

**Sucesión Infinita:** Una sucesión se considera infinita, si el dominio es el conjunto de los números naturales.

$$f(x) : N \rightarrow R \quad \text{Donde } N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

La sucesión:  $w_n = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$  Es infinita, ya que no tiene un último término, para  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Sucesión Finita:** Una sucesión se considera finita, cuando el dominio es un subconjunto de los números naturales, de tal forma que  $N \leq k$ , para  $k$  un natural.

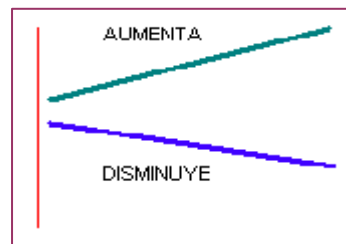
La sucesión:  $v_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  Es finita, para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

El interés matemático se centra en las sucesiones infinitas, ya que son éstas las que requieren mayor análisis y describen diversos fenómenos de la naturaleza.

## Lección No 2: Las Sucesiones Monótonas

El concepto de monotonía, esta relacionado con el aumento o disminución de una secuencia.

Una sucesión es monótona si la secuencia de valores aumenta o disminuye, a medida que  $n$  crece.



Lo anterior significa que deben existir dos tipos de sucesiones, las crecientes y decrecientes.

**Sucesiones Crecientes:** Una sucesión  $u_n$  es creciente si, y solo si, a partir de un  $n_1$ :  $u_{n+1} \geq u_n$  Dicho de otra forma:  $u_n \leq u_{n+1}$

Para que una sucesión sea creciente:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

**Sucesiones Decrecientes:** Una sucesión  $u_n$  es decreciente si, y solo si, a partir de un  $n_1$ :  $u_{n+1} \leq u_n$  Dicho de otra forma:  $u_n \geq u_{n+1}$

Para que una sucesión sea decreciente:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Es pertinente recordar que  $U_{n+1}$  es el término siguiente a  $U_n$ .

Para mostrar que una sucesión es creciente, solo se debe demostrar que la diferencia entre un término dado y el siguiente es positiva. De igual manera, para mostrar que una sucesión es decreciente, solo se busca demostrar que la diferencia entre el término dado y el siguiente es negativa.

### Ejemplo No 6:

Dada la sucesión:  $u_n = \{n^2 + 2\}$  Mostrar que es creciente.

### Solución:

Aplicamos la relación:  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  Veamos:

$$\{(n+1)^2 + 2\} - \{n^2 + 2\} = \{n^2 + 2n + 1 + 2\} - \{n^2 + 2\} = n^2 + 2n + 3 - n^2 - 2 = 2n + 1$$

El término  $(2n + 1)$  siempre será positivo, luego queda demostrado que la sucesión es creciente.

### Ejemplo No 7:

Dada la sucesión  $v_n = \left\{ \frac{4}{n+2} \right\}$  mostrar que es decreciente.

### Solución:

Solo debemos demostrar que  $v_{n+1} \leq v_n$ , veamos:

$$\left\{ \frac{4}{(n+1)+2} \right\} - \left\{ \frac{4}{n+2} \right\} \leq 0 \Rightarrow \left\{ \frac{4}{n+3} \right\} - \left\{ \frac{4}{n+2} \right\} = \left\{ \frac{4n+8-4n-12}{(n+3)(n+2)} \right\} = \left\{ \frac{-4}{(n+3)(n+2)} \right\}$$

El último término es negativo, luego queda demostrado que la sucesión es decreciente.

Existen sucesiones que se les llama **Estrictamente Creciente o Estrictamente Decreciente**, las cuales son de la forma:  $u_{n+1} > u_n$  y  $u_{n+1} < u_n$  respectivamente.

### DEFINICIÓN:

Sea  $u_n$  una sucesión para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  se dice que  $u_n$  es Monótona si, y solo si, la sucesión es creciente o decreciente.

Cuando tenemos una sucesión, solo se debe demostrar que es creciente o decreciente, para establecer que es monótona.

**Reflexión:** Será que la sucesión:  $w_n = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$  es monótona.

*La idea es que con los argumentos expuestos, se analice la situación para dar una respuesta, esperando que sea la adecuada.*

**Ejemplo No 8:**

Determinar si la sucesión dada es monótona  $u_n = \left\{ \frac{n}{3n-1} \right\}_{n \geq 0}$

**Solución:**

Lo que se debe hacer es mostrar que  $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_n - u_{n+1} \leq 0$  o  $u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow u_n - u_{n+1} \geq 0$ . En el primer caso la sucesión es creciente y en el segundo caso la sucesión es decreciente. Si se cumplen una de las dos situaciones, la sucesión es monótona.

$u_n = \frac{n}{3n-1}$  y  $u_{n+1} = \frac{n+1}{3(n+1)-1}$  Agrupamos los términos:

$$\frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3n+3-1} \Rightarrow \frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3n+2} = \frac{n(3n+2) - (n+1)(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)}$$

Desarrollando la última expresión racional, se obtiene:

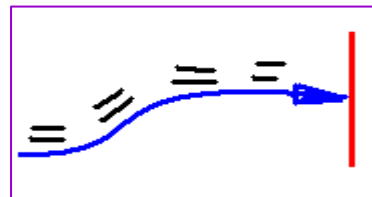
$$\frac{n(3n+2) - (n+1)(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$$

Donde  $\frac{1}{(3n-1)(3n+1)} > 0$ . Para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Por consiguiente la sucesión es creciente.

Conclusión: La sucesión  $u_n = \frac{n}{3n-1}$  es monótona.

### Lección No 3: Las Sucesiones Acotadas

La acotación tiene que ver con llegar a un límite, del cual no se puede pasar. Las sucesiones acotadas presentan esta característica.



Una idea general de acotación pueden ser los números naturales, que tiene un término primero, pero no tiene un último término, entonces si hablamos del conjunto de los números naturales, éstos tienen cotas inferiores, pero no tienen cotas superiores.

### **Sucesiones Acotadas Superiormente:**

Sea la sucesión  $u_n$  y sea un valor M fijo, para cualquier elemento de  $u_n$ , si se cumple que:  $u_n \leq M$  entonces la sucesión es acotada superiormente. El valor M definido, será una cota superior de dicha sucesión.

#### **Ejemplo No 9:**

Dada la sucesión:  $u_n = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$  identificar un M que sea la mínima cota superior de la sucesión.

#### **Solución:**

Si definimos algunos términos de la sucesión, se puede observar un valor de M.

$$u_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

Es evidente que  $M = 1/2$  es una cota superior de la sucesión, pero hay otras cotas como 1, 2, etc.

**Definición:** Para toda cota superior C de  $u_n$ , sea M una cota superior, si se cumple que  $M < C$ , entonces M es la mínima cota superior de  $u_n$ .

Para el ejemplo No 9 que se analizó anteriormente, la mínima cota superior será  $\frac{1}{2}$ , según la definición.

#### **Ejemplo No 10:**

Sea la sucesión:  $u_n = \{-2n^2 - n + 3\}_{n \geq 0}$  identificar un M de tal forma que sea la mínima cota superior de la sucesión.

#### **Solución:**

Si definimos algunos términos de la sucesión, se puede observar un valor de M.

$$u_n = \{3, 0, -7, -18, \dots\}$$

Se observa que los términos van descendiendo. Entonces la mínima cota superior  $M = 3$ .

**Sucesiones Acotadas Inferiormente:**

Sea la sucesión  $v_n$  y sea un valor  $N$  fijo, para cualquier elemento de  $v_n$ , si se cumple que:  $v_n \geq N$  entonces la sucesión es acotada inferiormente. El valor  $N$  definido, será una cota inferior de dicha sucesión.

**Ejemplo No 11:**

Sea la sucesión  $v_n = \{n^2 - 2\}_{n \geq 0}$  Determinar si es acotada inferiormente.

**Solución:**

Obtengamos algunos términos:  $v_n = \{-2, -1, 2, 7, \dots\}$

Se puede observar que  $N = -2, -3, -4$  son cotas inferiores de la sucesión dada, por consiguiente  $v_n = n^2 - 2$  es acotada inferiormente.

**Definición:** Para toda cota inferior  $c$  de  $u_n$ , sea  $N$  una cota inferior, entonces si se cumple que  $N \geq c$ , entonces  $N$  es la máxima cota inferior de  $u_n$ .

Para el ejemplo No 11, se puede observar que la máxima cota inferior será  $-2$ ; según la definición.

**Sucesiones Acotadas:** Una sucesión es acotada, si admite una cota superior y una cota inferior.

$$N \leq \{u_n\} \leq M$$

Se puede inferir, que cuando una sucesión tiene una cota superior y una cota inferior, la sucesión es acotada.

### **Axioma de Completitud**

Para un conjunto no vacío de números reales, si tiene una cota inferior, por consiguiente debe tener una máxima cota inferior. De la misma manera, si el conjunto tiene una cota superior, entonces debe tener una mínima cota superior.

El axioma expuesto, indica que toda sucesión acotada, tiene una mínima cota superior (mínimo) y una máxima cota inferior (máximo).

#### **Ejemplo No 12:**

Sea la sucesión:  $u_n = \left\{ \frac{3n-2}{n+1} \right\}_{n \geq 1}$  Establecer si es acotada o no.

#### **Solución:**

Lo que se debe hacer es mostrar que la sucesión tiene cota superior e inferior, veamos:

$$u_n = \left\{ \frac{3n-2}{n+1} \right\} \Rightarrow u_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{10}{5}, \frac{13}{6}, \dots \right\}$$

Con algo de observación, se puede inferir que a medida que  $n$  crece, la sucesión tiende hacia 3. Entonces la sucesión tiene como máxima cota inferior a  $\frac{1}{2}$  y como mínima cota superior a 3. Por consiguiente la sucesión es acotada.

#### **Ejemplo No 13:**

Sea la sucesión:  $v_n = \{n^2 - 4\}_{n \geq 1}$  Establecer si es acotada.

#### **Solución:**

Lo que se debe hacer es mostrar que la sucesión tiene cota superior e inferior, veamos:

$$v_n = \{n^2 - 4\} \Rightarrow v_n = \{-3, 0, 5, 12, 21, \dots\}$$

La sucesión tiene cota inferior pero no tiene cota superior, ya que a medida que  $n$  crece, la sucesión tiende al infinito. Por consiguiente la sucesión dada NO es acotada. Solo se puede decir que es monótona. ¿Por qué?



*Analizar esta última afirmación con el grupo colaborativo de trabajo y compartir con el Tutor.*

### Teorema:

Toda sucesión monótona y acotada, es convergente.

### Demostración:

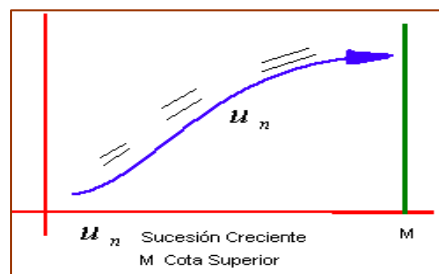
Investigar la demostración en cualquier libro de Matemáticas que desarrolle el tema de sucesiones, pero sería interesante que con los argumentos expuestos, los estudiantes en pequeño grupo colaborativo lo puedan hacer.

## Lección No 4: Las Sucesiones Convergentes

La convergencia esta relacionada con la tendencia que tiene un conjunto de valores, hacia un valor dado.

En esta temática, se va a estudiar hacia donde tiende una sucesión, cuando  $n$  crece indefinidamente.

Para comprender el concepto de convergencia, analizaremos inicialmente en que consiste la vecindad.



### VECINDAD:

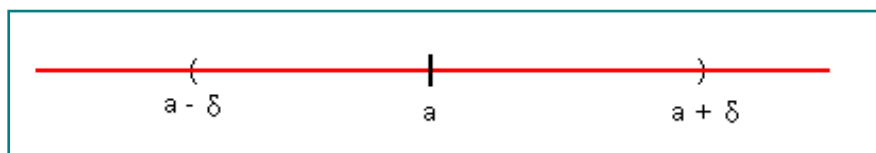
La vecindad esta asociada a la cercanía que se desea un punto respecto a sus alrededores.

**Definición:** Sea el conjunto de todos los puntos  $x$ , tal que:  $|x - a| < \delta$

Donde  $\delta > 0$  Se dice que existe una vecindad de centro  $a$  y radio  $\delta$ .

Lo anterior se puede representar de la siguiente manera:  $V_\delta(a)$

El valor  $\delta$  consistente en el radio de la vecindad, nos indica la longitud que tendrá dicha vecindad.



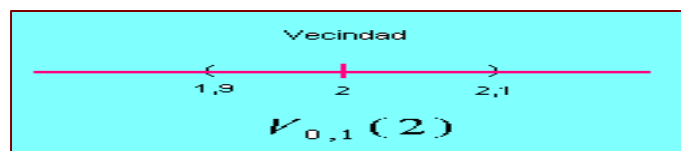
### Ejemplo No 14:

Cual es el centro y radio de la vecindad definida por:  $V_{0,1}(2)$

### Solución:

Para  $V_{0,1}(2)$ , el centro es 2 y el radio es 0.1, entonces:  $2 - 0,1 = 1,9$  para el extremo inferior y  $2 + 0,1 = 2,1$  para el extremo superior.

Ilustremos con una gráfica.



### Ejemplo No 15:

Se tiene el centro de una vecindad  $a = 4$  y el radio  $\delta = 0,001$ . De que longitud será dicha vecindad.

### Solución:

La nomenclatura:  $V_{0,001}(4)$

Extremo inferior:  $a - \delta = 4 - 0,001 = 3,999$

Extremo superior:  $a + \delta = 4 + 0,001 = 4,001$

La longitud será entonces:  $4,001 - 3,999 = 0,002$

El radio definido por  $\delta$ , puede ser tan pequeño como se desee, así el intervalo será más y más pequeño.

### - ) SUCESIONES CONVERGENTES:

Con el concepto de vecindad y lo analizado en sucesiones crecientes y decrecientes, podemos iniciar el análisis de las sucesiones convergentes.

**Teorema:** Sea  $u_n$  una sucesión creciente y se asume que M es una cota superior de la sucesión, entonces  $u_n$  es convergente si se puede mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} \leq M$$

**Teorema:**

Sea  $v_n$  una sucesión decreciente y se asume que N es una cota inferior de la sucesión, entonces  $v_n$  es convergente si se puede mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{v_n\} \geq N$$

La situación de los teoremas mencionados, es demostrar que el límite existe, lo cual se puede hacer por teoría de límites, temática de la próxima unidad.

La siguiente definición nos muestra analíticamente cuando una sucesión es convergente.

**DEFINICIÓN:**

Sea  $\{U_n\}$  una sucesión, se dice que  $\{U_n\}$  **converge** a L, si dado una  $\varepsilon > 0$ ; además, un N entero, tal que para toda n:

$$\text{Si } n > N \Rightarrow |U_n - L| < \varepsilon$$

Cuando el valor L no existe, entonces se dice que la sucesión diverge. En caso que  $U_n$  converge a L, entonces se dice que L es el límite de la sucesión y se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = L$$

**- ) Sucesiones que convergen a cero:**

Una sucesión converge a cero, si existe un número real  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera, luego es posible hallar un número N tal que si  $n > N$ , entonces:

$$|u_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} = 0$$

Para mostrar que el límite existe, se debe buscar una relación entre  $n$  y  $\varepsilon$ , de tal manera que  $n = f(\varepsilon)$ . Si se logra encontrar dicha relación, se demuestra que el límite existe, por consiguiente la sucesión converge a cero.

### Ejemplo No 16:

Dada la sucesión:  $u_n = \left\{ \frac{2}{n^2 + 4} \right\}$  Demostrar que la sucesión converge a cero.

### Solución:

Sea  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera, luego debe existir un número  $N$  tal que: Si  $n > N$  entonces,  $|u_n| < \varepsilon$

Ahora  $\left| \frac{2}{n^2 + 4} \right| < \varepsilon$ , pero  $n^2 + 4 > 0$  ¿**Qué opinas?** Entonces:  $\frac{2}{n^2 + 4} > 0$  luego:  $\frac{2}{n^2 + 4} < \varepsilon$

Aplicando el recíproco:  $\frac{n^2 + 4}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$  Despejando  $n$ , se obtiene:  $n = \sqrt{\frac{2 - 4\varepsilon}{\varepsilon}}$

Como se puede observar, existe una relación entre  $n$  y  $\varepsilon$ , luego el límite si existe, por consiguiente la sucesión converge a cero.

En la última expresión, el valor mayor entero de la raíz será  $N$  y así la condición de que  $n > N$ , se cumple.

### Ejemplo No 17:

Sea la sucesión:  $u_n = \left\{ \frac{1}{n^2 - 2} \right\}_{n \geq 2}$  Dado un numero positivo  $\varepsilon$ , hallar un natural  $N$  tal que si  $n > N$  entonces  $|u_n| < \varepsilon$  para  $\varepsilon = 10^{-3}$

### Solución:

Debemos hallar un número natural  $N$  de tal manera que si  $n > N$  entonces  $|u_n| < \varepsilon$  Veamos:

$$|U_n| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2 - 2} \right| < 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{n^2 - 2} < 10^{-2} \quad \text{Por las propiedades de valor absoluto.}$$

Aplicando recíprocos:  $n^2 - 2 > \frac{1}{10^{-2}}$  Despejando n obtenemos:  $n > \sqrt{102}$

Entonces tomando el mayor entero positivo N que esta contenido en  $\sqrt{102}$  , por ejemplo N =10, éste cumple la condición.

La conclusión sería: Si  $n > N$  entonces  $|U_n| < 10^{-2}$

Algunos teoremas sobre sucesiones que convergen a cero, son pertinentes tenerlos en cuenta:

### Teorema 1:

Sea  $\{u_n\} \rightarrow 0$  y  $\{v_n\} \rightarrow 0$ , entonces:  $\{u_n + v_n\} \rightarrow 0$

Lo anterior quiere decir que cuando dos sucesiones convergen a cero, la suma de éstas también converge a cero.

### Teorema 2:

Sea la sucesión  $\{u_n\} \rightarrow 0$  y sea un  $k \in R$ , entonces:  $\{ku_n\} \rightarrow 0$

Cuando a una sucesión que converge a cero, se le multiplica por un número real, la nueva sucesión también converge a cero.

### Teorema 3:

Dada la sucesión  $\{u_n\} \rightarrow 0$  y sea la sucesión  $\{v_n\} \rightarrow \text{Acotada}$ , entonces:  
 $\{u_n * v_n\} \rightarrow 0$

Si tenemos una sucesión que converge a cero y otra sucesión que es acotada, el producto de las dos converge a cero.

#### Teorema 4:

Dada la sucesión  $\{u_n\} > 0$  y además,  $\{u_n\} \rightarrow 0$  Sea  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , entonces:  
 $\{u_n^\lambda\} \rightarrow 0$

Los teoremas estudiados son importantes en el momento que se requiera desarrollar sucesiones convergentes. Se les invita a buscar la demostración en cursos de matemáticas, para su fortalecimiento.

#### Lección No 5: Límites de una Sucesión:

Para determinar el límite de una sucesión, tomamos como referencia la definición de convergencia, el cual nos permite definir analíticamente éste último concepto.

Si una sucesión  $\{u_n\}$  tiene límite, se dice:  $\{u_n\} \rightarrow L$

Lo anterior se cumple si:  $\{u_n - L\} \rightarrow 0$  Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} = L$

#### Demostración:

Para demostrar que el límite existe, se debe cumplir:  $\{u_n\} \rightarrow L$  si, y solo si, existe un  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera, además se puede hallar un  $N$  tal que; para todo término de  $\{u_n\}$  se cumple:  $n > N$  siempre que  $\{u_n - L\} < \varepsilon$

En términos generales, demostrar que una sucesión tiene límite, es mostrar que existe una relación entre  $n$  y  $\varepsilon$ ; además, que hay un número  $N$  que cumple la condición  $n > N$ .

#### Ejemplo 18:

Demostrar que  $v_n = \left\{ \frac{2n-3}{n+1} \right\} \rightarrow 2$

#### Solución:

Sea  $\varepsilon > 0$ ; si  $n > N$ , entonces:  $\{u_n - L\} < \varepsilon$

Veamos:

$$\left| \frac{2n-3}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2n-3-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

Simplificando:  $\left| \frac{-5}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{5} < \frac{1}{\varepsilon}$

Despejando  $n$  obtenemos:  $n > \frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}$

Vemos que  $n$  está relacionado con  $\varepsilon$ . Por otro lado, tomando el mayor entero contenido en  $\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}$  como el valor de  $N$ , la condición se cumple.

### Propiedades de las sucesiones Convergentes:

1. Sea  $\{u_n\} \rightarrow L$  Entonces:  $\{u_n - L\} \rightarrow 0$  Luego  $\{u_n - L\}$  es acotada., por

consiguiente:  $n \leq \{u_n\} \leq M$

2. Si  $\{u_n\} \rightarrow L$  y  $\{v_n\} \rightarrow L$ , además  $\{u_n\} \leq \{w_n\} \leq \{v_n\}$ . Entonces

$\{w_n\} \rightarrow L$ . Esta propiedad se conoce como el Emparejado.

3. Sean  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ ,  $\{w_n\}$ , de tal manera que:  $\{u_n\} \leq \{w_n\} \leq \{v_n\}$

Además:  $\{u_n\} \rightarrow L$  y  $\{v_n\} \rightarrow P$  y  $\{w_n\} \rightarrow Q$ . Entonces:  $L \leq Q \leq P$

4. Una sucesión monótona y acotada es convergente.

Si definimos  $u_n < u_{n+1}$  y  $n \leq \{u_n\} \leq M$  Por consiguiente:  $\{u_n\} \rightarrow L$

### Lección No 6: Las Sucesiones Divergentes:

Las sucesiones que NO son convergentes, se le llaman divergentes.

Sea una sucesión  $\{u_n\}$ , tal que  $\{u_n\} \rightarrow \infty$ , se dice que la sucesión es divergente.

Las sucesiones divergentes cumplen alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} \rightarrow \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} \rightarrow -\infty$$

### Propiedades de las sucesiones Divergentes:

1. Si  $\{u_n\} \rightarrow \infty$  y  $\{v_n\} \rightarrow \infty$  entonces:  $\{u_n + v_n\} \rightarrow \infty$  y  $\{u_n * v_n\} \rightarrow \infty$

Cuando dos sucesiones son divergentes, la suma y el producto de éstas, también son divergentes.

2. Si  $\{u_n\} \rightarrow +\infty$  y  $k \in \mathbb{R}^+$  entonces:  $\{ku_n\} \rightarrow +\infty$

3. Si  $\{u_n\} \rightarrow +\infty$  y existe un  $n_0$  tal que  $n > n_0$ , si se cumple que:  $\{u_n\} \leq \{v_n\}$  Entonces:  
 $\{v_n\} \rightarrow +\infty$

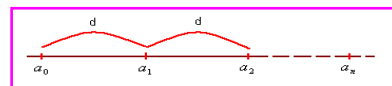


## EJERCICIOS

1. Hallar los primeros 5 términos de la sucesión:  $U_n = \left\{ \frac{n(n-1)}{3} \right\}_{n \geq 0}$
2. Hallar los primeros 6 términos de la sucesión:  $U_n = \left\{ \frac{4}{n-3} \right\}_{n \geq 4}$
3. Sea la sucesión cuyos primeros términos son:  $U_n = \{1, 3, 9, 19, \dots\}$  Hallar el término general.
4. Sea la sucesión cuyo primer término es  $U_0 = 1$  y la relación de recurrencia es  $U_n = U_{n-1} + 3$  Hallar el término general de la sucesión.
5. Dada la solución cuyo primer término  $V_0 = 2$  y la relación de recurrencia esta dada por  $V_n = 3V_{n-1}$  Hallar el término general de la sucesión.
6. Demuestre que la sucesión  $U_n = \{2n^3 + n + 2\}_{n \geq 0}$  Es creciente.
7. Sea la sucesión  $U_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$  Demostrar que dicha sucesión es estrictamente decreciente.
8. Dada la sucesión cuyo primer término es  $W_0 = 5$  y su relación de recurrencia es  $W_{n+1} = W_n - (e + 3)$ . Se puede afirmar que  $W_n$  es ¿monótona?
9. Para la sucesión  $V_n = \{8(-1)^n\}_{n \geq 0}$  Verificar si es monótona.
10. Sea la sucesión  $U_n = \{200 * (0,45)^n\}_{0 \leq n \leq 12}$  ¿A qué tipo de sucesión corresponde?
11. Dada La función  $U_n = \left\{ \frac{2}{3^n} \right\}_{n \geq 0}$  Determinar si es acotada superiormente y hallar la mínima cota superior.
12. Para la sucesión del ejercicio No 1,  $U_n = \left\{ \frac{n(n-1)}{3} \right\}_{n \geq 0}$  determinar si ésta es acotada.
13. Dada la sucesión  $V_n = \left\{ \frac{-7}{n-1} \right\}_{n \geq 2}$  Identificar la máxima cota inferior si tiene.

## CAPÍTULO DOS: LAS PROGRESIONES

### Lección No 7: Las Progresiones Aritméticas



Las progresiones aritméticas están asociadas con secuencia donde los valores van creciendo o decreciendo en la misma proporción.

Se puede considerar a una progresión aritmética como una Sucesión de números tal que cada uno de ellos; excepto el primero, se obtiene a partir del anterior mas un valor fijo, que es llamado diferencia común. El primer término se referencia como  $U_a$ , el segundo como  $U_{a+1}$  y así sucesivamente.

#### DEFINICIÓN:

Una sucesión  $\{U_n\}_{n \geq a}$  se considera una progresión aritmética, si y solo si, para todo  $n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  y además  $N \geq a$  se cumple:

$$U_{n+1} = U_n + d$$

A  $d$  se le denomina diferencia común.

#### Ejemplo No 19:

La sucesión:  $U_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  es una progresión aritmética, justifique la afirmación:

#### Solución:

Según la definición, los términos van creciendo y hay una diferencia común que es 2; es decir,  $d = 2$ .

#### Termino General:

La mayoría de progresión aritmética tiene un término general, el cual describe el comportamiento de la misma.

$$U_n = U_a + (n - a) * d$$

$U_n$  = Término n-esimo

$U_a$  = Primer término

$n$  = Número de términos de la progresión

$d$  = Diferencia común

Analicemos un poco esta situación:

Primer término:  $n = a$                       Entonces:  $U_{a+0} = U_a$

Segundo término:  $n = a + 1$                       Entonces:  $U_{a+1} = U_a + d$

Tercer término:  $n = a + 2$                       Entonces:  $U_{a+2} = U_a + 2d$

Cuarto término:  $n = a + 3$                       Entonces:  $U_{a+3} = U_a + 3d$

Así sucesivamente:

$n$ -ésimo término:  $n = a + p$                       Entonces:  $U_{a+p} = U_a + p \cdot d = U_a + (n-a)d$

Porque  $p = (n - a)$ . Así se obtiene el término general de la progresión aritmética.

**Ejemplo No 20:**

Dada la progresión:  $U_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  Determine el término general.

**Solución:**

A partir de la sucesión dada:

$U_a = 1$ ,  $d = 2$ , entonces:

$$U_n = U_a + (n-a)d = 1 + 2(n-a)$$

**Ejemplo No 21:**

Dada la progresión:  $U_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  Determine el 8 término.

**Solución:**

A partir de la sucesión dada, sabiendo que  $a = 1$ , primer término.

$$U_n = U_a + (n-a)d \Rightarrow U_8 = U_1 + 2(8-1) = 15$$

**Suma de los  $n$  Primeros Términos:**

Vamos a ver en seguida cómo se puede obtener la suma de los  $n$  primeros términos. Para el caso de los números naturales, la fórmula fue desarrollada por el prominente matemático GAUSS, quien despertando su gran sabiduría, hizo el siguiente planteamiento.

Sumando los  $n$  términos:  $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n-1) + n$

Sumando al contrario:  $s = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$

-----

Operando:  $2s = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$

Entonces:  $2s = n$  veces  $(n+1)$  Así:  $s = \frac{n(n+1)}{2}$

Pero cuando tenemos cualquier sucesión, podemos generalizar de la siguiente forma:

Suma de los  $n$  primeros términos de cualquier progresión aritmética:

$$s = \frac{n(U_a + U_n)}{2}$$

Siendo  $U_a$  el primer término,  $U_n$  el  $n$ -ésimo término hasta donde se desea hacer la sumatoria y  $n$  el número de términos.

**Ejemplo No 22:**

Sea  $U_n$  una sucesión, donde:  $U_1 = -1/4$  y  $d = 1$ . Hallar la suma de los 4 primeros términos.

**Solución:**

Conocemos el primer término, debemos hallar el  $n$ -ésimo término, en este caso el cuarto.

Como  $U_4 = U_1 + (n-1) * d \Rightarrow U_4 = -1/4 + (4-1) * 1 = -1/4 + 3 = 11/4$

Calculemos la sumatoria:

$$S = \frac{n(U_a - U_n)}{2} = \frac{4(-1/4 + 11/4)}{2} = \frac{4(10/4)}{2} = 5$$

**Tipos de progresiones Aritméticas:**

- ) **Progresiones Aritméticas Crecientes:** Una progresión aritmética es creciente si cada término es mayor al anterior.

$$U_{n+1} > U_n \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$

- ) **Progresiones Aritméticas Decrecientes:** Una progresión aritmética es decreciente si cada término es menor al anterior.

$$U_{n+1} < U_n \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

### Ejemplo No 23:

Un proyectil es disparado hacia arriba de tal forma que al primer segundo recorre 16.025 metros, al segundo recorre 16.000, al tercero recorre 15.975 metros. Hallar:

a-) La distancia recorrida en el cuarto segundo

b-) El término n-ésimo

### Solución:

a-) Según los datos:

$$U_1 = 16.050$$

$$U_2 = U_1 - 25 = 16.025 - 25 = 16.000$$

$$U_3 = U_2 - 25 = 16.000 - 25 = 15.975$$

$$U_4 = U_3 - 25 = 15.975 - 25 = 15.950$$

La distancia recorrida en el cuarto segundo fue de 15.950

b-) Como  $d = -25$  entonces:  $U_n = U_1 + (n-1) * d \Rightarrow U_n = 16.000 + (n-1) * (-25)$

$$U_n = 16.000 + (-25n + 25) \Rightarrow U_n = 16.025 - 25n$$

### Ejemplo No 24:

A partir del ejemplo 23. Hallar:

a-) Tipo de progresión.

b-) La distancia total recorrida a los 12 segundos.

### Solución:

a-) Se puede observar que como hay una diferencia común se trata de una progresión y es decreciente ya que  $U_{n+1} < U_n$

b-) Lo que nos están pidiendo es la sumatoria hasta  $n = 12$ .

$U_1 = 16.000$ , debemos hallar el 12 termino.

$$U_{12} = 16.000 + (12-1) * (-25) \Rightarrow U_{12} = 16.000 - 275 = 15.725$$

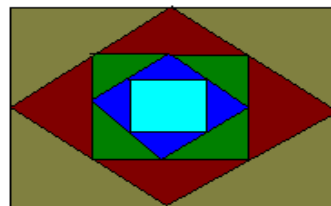
La distancia recorrida en el 12 segundos es de 15.725 metros.

Entonces la distancia total será:

$$s = \frac{12(16.000 + 15.725)}{2} = 190.350 \text{ metros.}$$

### Lección No 8: Las Progresiones Geométricas

Se puede considerar a una progresión geométrica como una Sucesión de números tal que cada uno de ellos; excepto el primero, se obtiene a partir del anterior multiplicado por un valor fijo, que es llamado razón común.



#### DEFINICIÓN:

Sea la sucesión  $\{U_n\}_{n \geq a}$  se considera progresión geométrica, si y solo si, para todo número natural  $n \geq a$ , se cumple:

$$U_{n+1} = q * U_n \quad q = \text{Razón común.}$$

#### Ejemplo No 25:

Sea la sucesión  $U_n = \{3, 6, 12, 24, \dots\}$  verificar que se trata de una progresión geométrica.

### Solución:

Se puede observar que cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Entonces:

$$U_n = \{3 * (1), 3 * (2), 3 * (4), 3 * (8), \dots\}$$

### Razón Común:

La razón común de una progresión geométrica se obtiene dividiendo un término con el inmediatamente anterior. La razón no siempre es un entero, puede ser racional y además negativo.

$$q = \frac{U_{n+1}}{U_n} \text{ Siempre que } U_n \neq 0$$

### Ejemplo No 26:

Sea la sucesión  $U_n = \{3, 6, 12, 24, \dots\}$  identificar la razón común.

### Solución:

$$\text{Si hacemos la división: } q = \frac{6}{3} = 2, \frac{12}{6} = 2, \frac{24}{12} = 2, \dots$$

Así la razón común  $q = 2$ .

### Término General:

Para hallar el término general de una progresión geométrica comencemos con el siguiente análisis:

$$\begin{aligned} U_2 &= q * U_1 = q^1 * U_1 \\ U_3 &= q * U_2 = q^2 * U_1 \\ U_4 &= q * U_3 = q^3 * U_1 \\ &\vdots \\ U_n &= q * U_{n-1} = q^{n-1} * U_1 \end{aligned}$$

Siendo  $U_a$  el primer término y  $U_n$  el  $n$ -ésimo término, entonces:

$$U_n = q^{n-a} U_a$$

### Ejemplo No 27:

Sea la sucesión  $U_n = \{4, 12, 36, 108, \dots\}$  Hallar el  $n$ -ésimo término.

**Solución:**

Hallemos primero la razón común.  $12/4 = 3$ ,  $36/12 = 3$ , Entonces:  $q = 3$

Como el primer término  $U_1 = 4$ , ahora podemos hallar  $U_n$ .

$$U_n = 3^{n-1} * 4 = \left[ \left( \frac{4}{3} \right) * 3^n \right]_{n \geq 1}$$

**Ejemplo No 28:**

Sea la sucesión  $U_n = \{3, 6, 12, 24, \dots\}_{n \geq 1}$  hallar el  $n$ -ésimo término.

**Solución:**

Del ejemplo 26 se obtuvo la razón común  $q = 2$ . Como el primer término es 3, entonces:

$$U_n = 3 * 2^{n-1} = \left[ \left( \frac{3}{2} \right) * 2^n \right]_{n \geq 1}$$

### - ) Suma de los $n$ Primeros Términos:

Analizaremos en seguida cómo se puede obtener la suma de los  $n$  primeros términos.

Definiendo  $S$  como la suma de los  $n$  primeros términos:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

Ahora sumemos los mismos términos pero multiplicados por la razón común.

$$q * S_n = q * U_1 + q * U_2 + q * U_3 + \dots + q * U_{n-1} + q * U_n$$

Pero debemos tener en cuenta que si multiplicamos el primer término por la razón se obtiene el segundo y así sucesivamente,  $U_2 = U_1 * q$ ,  $U_3 = U_2 * q$ , así sucesivamente luego:

$$q * S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_n + q * U_n$$



$$q * S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_n + q * U_n$$

En seguida restamos  $q * S_n - S_n$  Entonces:

$$-S_n = -U_1 - U_2 - \dots - U_{n-1} - U_n$$

$$q * S_n - S_n = -U_1 + q * U_n$$

Factorizando y reorganizando se obtiene:

$$S_n = \frac{U_n * q - U_1}{q - 1}$$

Esta ecuación se puede utilizar cuando se conoce el primero y último término de la progresión.

Cuando se desea expresar la sumatoria en términos de la razón común, y el primer término de la progresión, se hace una transformación de la siguiente manera: En la ecuación anterior reemplazamos  $U_n$  por  $q^{n-a} * U_a$  siendo  $U_a$  el primer término; es decir,  $a = 1$ .

$$S_n = \frac{q^{n-1} U_1 * q - U_1}{q - 1} = \frac{U_1 (q^{n-1} * q - 1)}{q - 1} = \frac{U_1 (q^n * q^{-1} * q - 1)}{q - 1}$$

Finalmente:

$$S_n = \frac{U_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{Para } q \neq 1$$

### Ejemplo No 29:

Sea la sucesión  $U_n$  donde  $q = \frac{1}{2}$  y  $U_1 = 3$ . Hallar la suma de los 5 primeros términos.

### Solución:

Como se conoce el primer término y la razón común, se puede utilizar la última ecuación.

$$S_n = \frac{3((1/2)^5 - 1)}{1/2 - 1} = \frac{3(-31/12)}{-1/2} = \frac{-93/32}{-1/2} = \frac{93}{16}$$

### Ejemplo No 30:

En una progresión geométrica la suma de los  $n$  primeros términos es 80, la razón es 3 y el primer término es 2 ¿cuántos términos fueron sumados?

### Solución:

A partir de la ecuación de sumatoria, despejamos  $n$ :

$$S_n = \frac{U_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow U_1 * q^n - U_1 = S_n(q - 1) \Rightarrow U_1 * q^n = U_1 + S_n(q - 1)$$

$$U_1 * q^n = U_1 + S_n(q - 1) \Rightarrow q^n = \frac{U_1 + S_n(q - 1)}{U_1} = \frac{2 + 80(3 - 1)}{2} = 81$$

$$q^n = 81 \Rightarrow \text{Log}_q(q^n) = \text{Log}_q(81) \Rightarrow n = \text{Log}_q(81) \Rightarrow n = \frac{\text{Ln}(81)}{\text{Ln}(3)} = 4$$

Recordemos que  $q = 3$ . Entonces se sumaron los primeros 4 términos de la progresión.

### - ) Producto de los $n$ Primeros Términos:

En seguida estudiaremos cómo se puede obtener el producto de los  $n$  primeros términos.

Utilicemos el símbolo de productoria para representar el producto. Comencemos por representar la productoria de los  $n$  primeros términos.

$$\pi_n = U_1 * U_2 * U_3 * \dots * U_{n-1} * U_n$$

Ahora hagamos la misma productoria pero al contrario.

$$\pi_n = U_n * U_{n-1} * \dots * U_2 * U_1$$

En seguida hacemos el producto:

$$\pi_n^2 = (U_1 * U_n) * (U_2 * U_{n-1}) * \dots * (U_{n-1} * U_2) * (U_1 * U_n)$$

El producto representa  $n$  potencia de  $(U_1 * U_n)$

$$\pi_n^2 = (U_1 * U_n)^n$$

Finalmente la productoria es de la forma:

$$\pi_n = \sqrt{(U_1 * U_n)^n}$$

La expresión anterior nos indica que el producto de los  $n$  primeros términos es el producto de los extremos elevado a la potencia  $n$ , extrayendo la raíz segunda.

### Ejemplo No 31:

Sea la progresión geométrica dada por los términos  $U_n = \{1, 4, 16, 64, \dots\}$ . Hallar el producto de los 5 primeros términos.

### Solución:

Primero debemos hallar el término general para identificar  $U_n$ . De la progresión dada observamos que:  $U_1 = 1$  y  $q = 4$  Entonces:

$$U_n = q^{n-a} U_a \Rightarrow U_n = 4^{n-1} * 1 = \frac{1}{4} * 4^n \Rightarrow U_n = \frac{1}{4} * 4^n$$

El quinto termino:  $U_5 = \frac{1}{4} * 4^5 = \frac{1.024}{4} = 256$

Ahora si podemos hallar la productoria:

$$\pi_n = \sqrt{(1 * 256)^5} = \sqrt{1,0995 \times 10^{12}} = 1048576$$

## EJERCICIOS

1. Sea la progresión aritmética  $U_n = \{n + 2\}_{n \geq 1}$  Hallar:

a-) Los primeros 6 términos de la progresión.

b-) La suma de los primeros 10 términos.

2. Se la progresión aritmética  $U_n = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$  Hallar:

a-) El n-ésimo término

b-) La suma de los primeros 20 términos.

3. Dada una progresión aritmética cuya diferencia común es 4; además, la suma de los 54 primeros términos es 270. Hallar:

a-) El primer término

b-) El término general.

4. Dada la progresión geométrica  $U_n = \{(-2)^n\}_{n \geq 0}$  Hallar la suma de los 5 primeros términos.

5. Calcular el décimo término de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

## AUTOEVALUACIÓN UNIDAD UNO

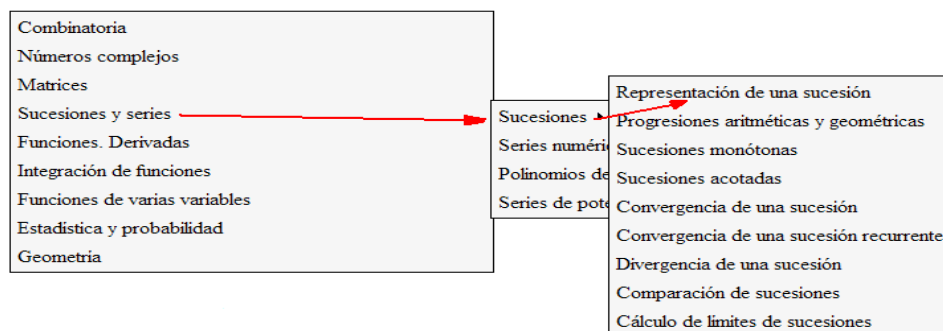
1. Para la sucesión  $W_n = \left\{ \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n + 10 \right\}_{n \geq 0}$  Establecer si es acotada en tal caso identificar la mínima cota superior y la máxima cota inferior.
2. Demostrar que la sucesión  $U_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{n \geq 1}$  Converge a cero. Para  $k \in \mathbb{R}^+$
3. Dada la sucesión  $U_n = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n$  Dado un numero real positivo  $\varepsilon$ , hallar un natural N tal que si  $n > N$  entonces  $|U_n| < \varepsilon$  si  $\varepsilon = 0,01$
4. Determinar si la sucesión  $V_n = \left\{ \frac{2^n(n+1)}{3^n * n} \right\}$  converge a cero.
5. Sea la sucesión  $U_n = \left\{ \frac{4n}{3n+2} \right\}_{n \geq 0}$  Demostrar que convergente a  $4/3$ .
6. Investigar a que converge la sucesión:  $U_n = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n$
7. La sucesión:  $U_n = \{-2, 2, -2, 2, -2, \dots\}$  Hallar el producto de los 3 primeros términos.
8. La canasta familiar de los empleados asistentes de un país es de \$120.000 a primero de enero, si la tasa de inflación mensual es del 2,05%. Hallar:
  - a-) Costos de la canasta a los 3 meses del año.
  - b-) Costo de la canasta a los n meses.
  - c-) Cuanto gasta un empleado de nivel asistencial en un año.

## LABORATORIO:

Para realizar prácticas de laboratorio en este tema de sucesiones y progresiones, vamos a utilizar dos direcciones de Internet, donde se presenta un trabajo interactivo.

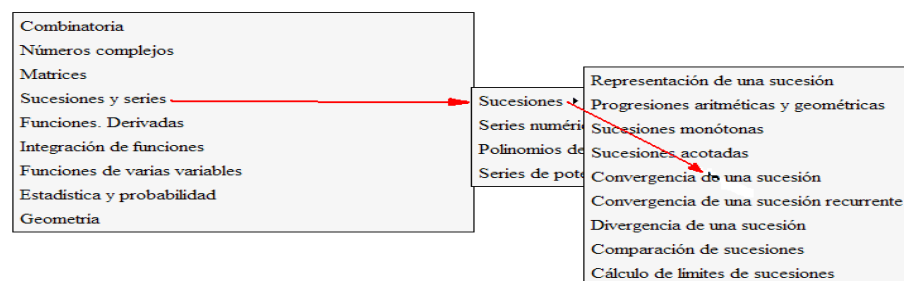
1. Entrar a la página <http://endrino.pntic.mec.es/~hotp0055/javierzabala/sucesio.htm>. Resolver los ejercicios propuestos.
2. Entrar a la página <http://www.lemat.unican.es/lemat/Laboratorios/Laboratorios.html>. Observar la secuencia de una sucesión.

### Laboratorios



3. Entrar a la página <http://www.lemat.unican.es/lemat/Laboratorios/Laboratorios.html>. Observar el comportamiento de una sucesión acotada.
4. Entrar a la página <http://www.lemat.unican.es/lemat/Laboratorios/Laboratorios.html>. Observar el comportamiento de una sucesión acotada.

### Laboratorios



5. Entrar a la página <http://www.lemat.unican.es/lemat/Laboratorios/Laboratorios.html>. Desarrolle al menos un ejercicio sobre progresión aritmética y uno sobre progresión geométrica.



## **UNIDAD DOS**

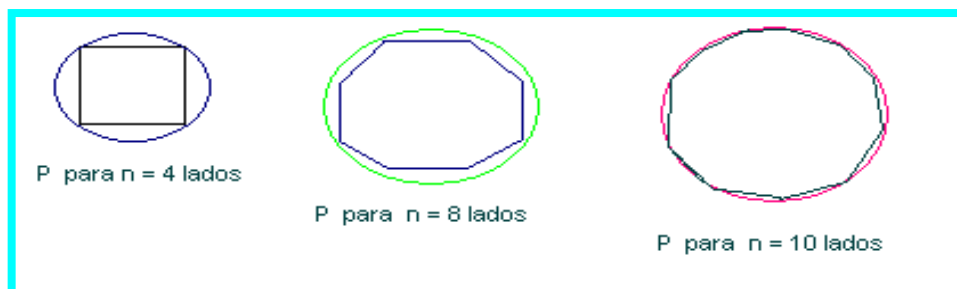
### **ANÁLISIS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD**

## CAPÍTULO TRES: GENERALIDADES SOBRE LÍMITES

### Lección No 9: Conceptualización Intuitiva de Límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = C$$

Definamos la función  $P(n)$  como un polígono regular de  $n$  lados, la idea es observar que pasaría si  $n$  se hace muy grande; es decir, cuando  $n$  tiende a infinito.



En la ilustración se muestra que cuando  $n$  aumenta, el polígono se acerca cada vez más al círculo. Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = C$$

$P$  = Polígono

$C$  = Circunferencia

La expresión anterior, esta indicando que cuando el número de lados se hace muy grande, el polígono se acerca al círculo.

### Lección 10: Conceptualización Básica de Límite: (Método Inductivo)

Sea la función  $y = f(x)$ , si se hace que la variable se acerque más y más a un valor fijo  $c$ , entonces la función se acercará a un valor fijo  $L$ . Lo anterior se puede escribir simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

(Se lee: límite cuando  $x$  tiende a  $c$  de la función  $f$  de  $x$ , es igual a  $L$ )

Si aplicamos la definición a un caso específico, se puede entender mejor el principio.

Sea

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4$$



Lo que vamos a hacer es tabular algunos valores de  $x$  muy cercanos; por encima y por debajo de 2 y, reemplazando en la función, se obtiene el valor del límite de la función.

Tomamos valores de la variable por debajo de 2:

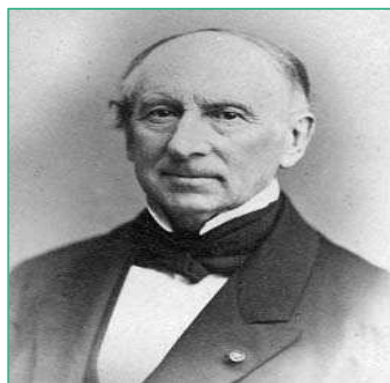
<b>x</b>	1.90	1,99	1,999	1,9999	1,99999	1,999999
<b>Límite</b>	3,9	3,99	3,999	3,9999	3,99999	3,999999

Tomamos valores de la variable por encima de 2:

<b>x</b>	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001
<b>Límite</b>	4,1	4,01	4,001	4,0001	4,00001	4,000001

Los cuadros dejan ver claramente que a medida que la variable  $x$  se acerca a 2; por encima o por debajo, el límite de la función  $L$  se acerca a 4.

### Lección 11: Conceptualización Formal de Límite:



La forma en que va a analizar la definición formal de límite, es por el uso de la matemática axiomática, la cual desarrolla todo el campo matemático a partir de axiomas, teoremas, postulados y definiciones. Fue precisamente Augustin-Louis Cauchy, quien dio los términos, para definir formalmente el concepto de límite, por lo cual se le llamó **Definición  $\varepsilon - \delta$  de límite**.

*Augustin-Louis Cauchy nació en París el 21 de agosto de 1789 y murió el 23 de mayo de 1857 en Sceaux, Francia.*

Fuente: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/>

Es pertinente recordar el concepto de vecindad tratado en la temática de convergencia de sucesiones, ya que allí se analizó la cercanía de una vecindad según el tamaño del radio  $\delta$ .

### DEFINICIÓN:

Sea la función  $f(x)$ , definida en un intervalo abierto  $I$ , sea un valor  $c$  que esta contenido en  $I$ , pero la función  $f(x)$  no necesariamente puede estar definida en  $c$ . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Esto significa que debe existir una  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera; además, debe existir un  $\delta > 0$ , tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ Siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Lo anterior indica, es que  $f(x)$  difiere de  $L$  en un valor  $\varepsilon$ , dado que  $x$  es suficientemente cercano a  $\delta$ , pero no igual.

Veamos esta situación:

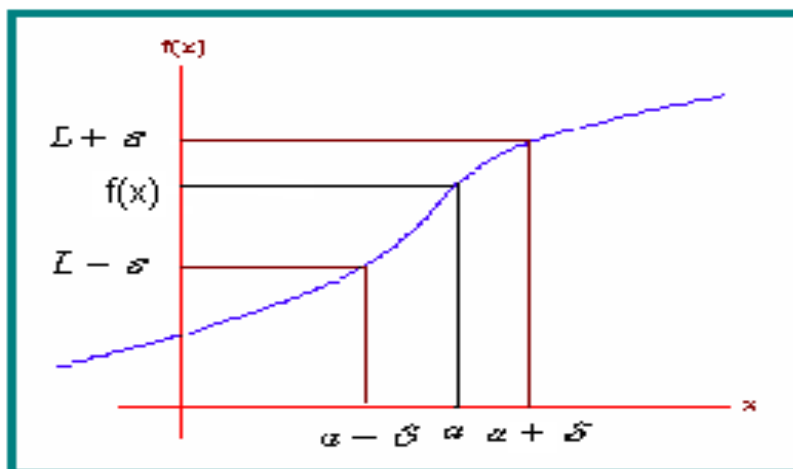
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Ya que se cumple:

$$x - \delta < x < a + \delta$$

Así se puede inferir que:

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$



Para demostrar que el límite existe, se debe encontrar una relación entre  $\varepsilon$  y  $\delta$ , de tal manera que  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , es decir,  $\delta = \delta(\varepsilon)$

### Ejemplo 32:

Demostrar:  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$

### Solución:

Se debe definir un  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera. Definamos una  $\varepsilon = 0.01$ , pero puede ser otro, luego debe existir un  $\delta$ , tal que:

$$|(2x + 1) - 7| < 0.01 \quad \text{Siempre que:} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

El trabajo consiste en buscar el valor de  $\delta$  que tenga relación con el  $\varepsilon$  definido.

$$|(2x + 1) - 7| < 0.01 \Rightarrow |2x - 6| < 0.01 \Rightarrow 2|x - 3| < 0.01$$

$$2|x - 3| < 0.01 \Rightarrow |x - 3| < 0.005$$

Observando, el valor de  $\delta$  es 0.005. La relación que se tiene entre  $\varepsilon$  y  $\delta$ , es:  $\delta = \varepsilon / 2$ .

**La conclusión será:**  $(2x+1)$  esta al menos 0.01 de 7, siempre que  $x$  este al menos 0.005 de 3.

De esta manera, se demuestra que el límite existe y es el que se tiene propuesto.

### Ejemplo 33:

Demostrar:  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-1}{2x-1} \right) = \frac{2}{5}$

### Solución:

Se debe encontrar una expresión que relacione a  $\varepsilon$  y  $\delta$ . A partir de la definición:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{Siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Tomado las expresiones del ejemplo:

$$\left| \frac{x-1}{2x-1} - \frac{2}{5} \right| < \varepsilon \quad \text{Para } \varepsilon > 0, \text{ tan pequeño como se quiera.}$$

Operando: 
$$\left| \frac{5x-5-4x+2}{5(2x-1)} \right| = \left| \frac{x-3}{5(2x-1)} \right| = \frac{1}{5} \left| \frac{x-3}{2x-1} \right|$$

Por otro lado, como  $x$  tiende a 3, podemos asumir un  $\delta$  como 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , otros. Suponiendo:  $|x-3| < 1$  Resolvemos la desigualdad del valor absoluto.

$$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow -1+3 < x-3+3 < 1+3 \Rightarrow 2 < x < 4$$

Como debemos buscar la expresión  $\frac{1}{5} \left| \frac{x-3}{2x-1} \right|$ , entonces a partir de la última desigualdad:

$$2(2) < x(2) < 4(2) \Rightarrow 4 < 2x < 8 \Rightarrow 4-1 < 2x-1 < 8-1 \Rightarrow 3 < 2x-1 < 7$$

Como debemos bajarlo al denominador, entonces aplicamos el recíproco o inverso multiplicativo.  $\frac{1}{7} < \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{3}$  Sabemos que  $x$  está en la vecindad de 3. Luego asociando:

$$\frac{1}{5} \left| \frac{x-3}{2x-1} \right| < \left( \frac{1}{5} \right) \left( \frac{1}{3} \right) |x-3| \Rightarrow \left| \frac{x-3}{2x-1} - \frac{2}{5} \right| < \frac{|x-3|}{15}$$

Por consiguiente para verificar  $|f(x) - L| < \varepsilon$  solo basta con probar que  $\frac{|x-3|}{15} < \varepsilon$

$$\frac{|x-3|}{15} < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < 15\varepsilon \quad \text{Tomando la definición } 0 < |x-a| < \delta \quad \text{se puede inferir que } \delta =$$

$15\varepsilon$ . Evidentemente existe una relación entre  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-1}{2x-1} \right) = \frac{2}{5}$$

## Lección 12: Propiedades de Límites:

Con el fin de comprender de una mejor manera el desarrollo de los límites vamos a analizar algunas propiedades esenciales de esta temática.

1. **Límite de una Constante:**  $\lim_{x \rightarrow a} (k) = k$  Para  $k$  una constante

2. **Límite de una Variable:**  $\lim_{x \rightarrow a} (x^n) = a^n$  Para  $n \in \mathbb{Z}$

3. **Límite de Constante por Función:**  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$

4. **Límite de Suma / Resta de funciones:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \pm \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]$

5. **Límite de Producto de Funciones:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] * \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]$

6. **Límite de Cociente de Funciones:**  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]}{\lim_{x \rightarrow a} [g(x)]}$  Para  $\lim_{x \rightarrow a} [g(x)] \neq 0$

7. **Límite de una Potencia:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \right)^n$  Para  $n \in \mathbb{Z}^+$

8. **Límite de la Raíz:**  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]}$  Siempre que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \geq 0$  si n es par.

9. **Límite de Función Exponencial:**  $\lim_{x \rightarrow a} [K^{f(x)}] = K^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]}$   $K \neq 0$

10. **Teorema del Emparedado:** Sea  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones definidas en el intervalo I ; el cual contiene a c, excepto posiblemente en  $x = c$ .

Sea:  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y asumiendo que  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)] = L$  y que  $\lim_{x \rightarrow c} [h(x)] = L$  Por consiguiente:

$$\lim_{x \rightarrow c} [g(x)] = L$$

### Lección 13: Evaluar un Límite:

Evaluar un límite es reemplazar la tendencia de la variable en la función, para obtener su límite.

#### Ejemplo 34:

Sea la función  $f(x) = 5x^4 - 2x$  Evaluar el límite cuando x tiende a 3.

#### Solución:

Escribamos analíticamente la expresión anterior:  $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^4 - 2x)$

Aplicando las propiedades de suma / resta y constante por función:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (5x^4 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 3} (5x^4) - \lim_{x \rightarrow 3} (2x) = 5 \lim_{x \rightarrow 3} (x^4) - 2 \lim_{x \rightarrow 3} (x)$$

El siguiente paso es evaluar el límite:  $5 \lim_{x \rightarrow 3} (x^4) - 2 \lim_{x \rightarrow 3} (x) = 5(3)^4 - 2(3) = 405 - 6 = 399$

Observemos que cuando se evalúa el límite, la expresión  $\lim_{x \rightarrow a}$  desaparece, ya que la variable es reemplazada por su tendencia.

### Ejemplo 35:

Hallar el límite de la función  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6$  cuando  $x$  tiende a 4.

### Solución:

Expresemos el ejercicio de manera analítica:  $\lim_{x \rightarrow 4} [3x^3 + 4x^2 - 6]$

Aplicando la propiedad de suma:  $\lim_{x \rightarrow 4} [3x^3 + 4x^2 - 6] = \lim_{x \rightarrow 4} [3x^3] + \lim_{x \rightarrow 4} [4x^2] - \lim_{x \rightarrow 4} [6]$

El primer límite es de una constante por una función al igual que el segundo y el tercero es el límite de una constante, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 4} [3x^3] + \lim_{x \rightarrow 4} [4x^2] - \lim_{x \rightarrow 4} [6] = 3 \lim_{x \rightarrow 4} [x^3] + 4 \lim_{x \rightarrow 4} [x^2] - \lim_{x \rightarrow 4} [6]$$

Aplicando las propiedades 1 y 2, y evaluando obtenemos:

$$3 \lim_{x \rightarrow 4} [x^3] + 4 \lim_{x \rightarrow 4} [x^2] - \lim_{x \rightarrow 4} [6] = 3(4)^3 + 4(4)^2 - 6 = 192 + 64 - 6 = 250$$

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow 4} [3x^3 + 4x^2 - 6] = 250$

Es de anotar que en el desarrollo de un límite se pueden utilizar una o varias de las propiedades mencionadas.

### Ejemplo 36:

Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 4x - 1}{x + 5}}$

### Solución:

Siguiendo un proceso secuencial, lógico y coherente tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 4x - 1}{x + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{2x^2 + 4x - 1}{x + 5} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5)} \right]}$$

Analizando los pasos anteriores, vemos que hemos aplicado: Límite de una raíz cuadrada, luego el límite de un cociente. Sigamos.

$$\sqrt{\left[ \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5)} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (4x) - \lim_{x \rightarrow 2} (1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5)} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + 4 \lim_{x \rightarrow 2} (x) - \lim_{x \rightarrow 2} (1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5)} \right]}$$

En los pasos anteriores hemos aplicado límite de suma/resta y límite de constante por función. Finalmente lo que se hace es evaluar el límite:

$$\sqrt{\left[ \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + 4 \lim_{x \rightarrow 2} (x) - \lim_{x \rightarrow 2} (1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5)} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{2(2^2) + 4(2) - 1}{(2) + 5} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{15}{7} \right]} \cong 1,4638$$

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 4x - 1}{x + 5}} = \sqrt{\frac{15}{7}}$

### Ejemplo 37:

Sea:  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  Siendo:  $f(x) = 2 - \frac{3x^2}{4}$   $h(x) = 2 + \frac{x^2}{3}$  Hallar el límite de  $g(x)$  cuando  $x$  tiende a 0.

### Solución:

La pregunta:  $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = ?$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 - \frac{3x^2}{4} \right] = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 + \frac{x^2}{3} \right] = 2 \quad \underline{\text{Verificar estos límites con el grupo colaborativo.}}$$

Por el teorema del emparejado:  $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] = 2$

## EJERCICIOS

1. Demostrar que el límite de la función  $(4x + 1)$ , cuando  $x$  tiende a 2 es 9

2. Resolver los siguientes límites:

a-)  $\lim_{x \rightarrow (-2)} \left[ \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right]$

b-)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2e^{2x} + \frac{x - 6}{x + 1} \right]$

3. Si  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = 3$  Entonces:

a-) hallar  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^4$

b-) hallar  $\lim_{x \rightarrow a} [3f(x) - 2]$

4. Sea  $f(x) = \ln|x|$  y  $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$  Hallar  $\lim_{x \rightarrow 2} [f \circ g](x)$



## CAPÍTULO CUATRO: LÍMITES DE FUNCIONES Y ASÍNTOTAS

### Lección 14: Límites al Infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$$

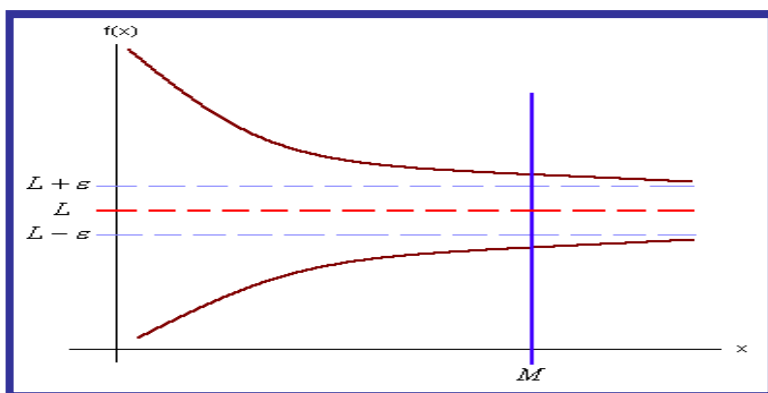
Los límites al infinito son aquellos donde la variable tiene a infinito o menos infinito y la función tiende a un valor fijo.

- ) El primer caso:

#### DEFINICIÓN:

Dada La función  $f(x)$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$

Sea un  $\varepsilon > 0$ , luego debe existir un valor  $M$  tal que si  $x > M$ , entonces  $|f(x) - K| < \varepsilon$ . Entre más pequeño sea  $\varepsilon$ , más grande será  $M$ . Nótese que  $M$  depende de  $\varepsilon$



- ) El segundo caso:

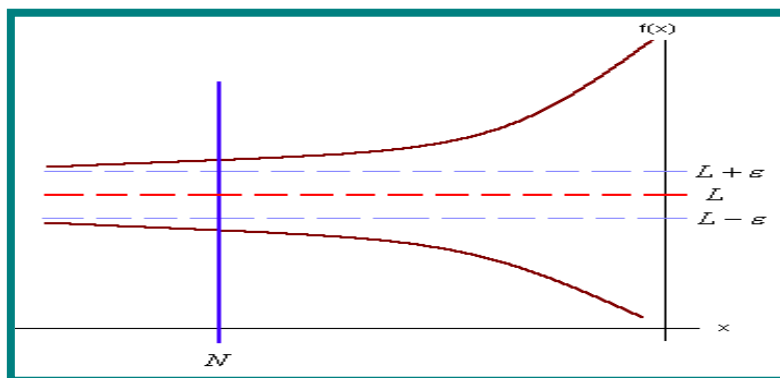
#### DEFINICIÓN:

Dada La función  $f(x)$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$

De igual manera ocurre cuando la variable tiene a menos infinito.

Sea un  $\varepsilon > 0$ , luego debe existir un  $N$  tal que si  $x < N$ , entonces

$|f(x) - K| < \varepsilon$ . Entre más pequeño sea  $\varepsilon$ , más pequeño será  $N$ . En este caso  $N$  también depende de  $\varepsilon$



Para demostrar que el límite existe, basta encontrar una relación entre  $M$  y  $\varepsilon$ , de tal manera que  $M$  o  $N$  según el caso, sean dependientes de  $\varepsilon$ , si esto ocurre, se concluye que el límite existe.

**Ejemplo 38:**

Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^n} \right) = 0$

**Solución:**

Lo que se tiene que hacer es buscar un  $M$  que se relacione con el  $\varepsilon$  (epsilon) Veamos:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow x > M$$

Entonces reemplazamos la función propuesta:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{x^n}$$

Por otro lado:

$$x > M \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x^n} < \frac{1}{M^n}$$

Como  $\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| = \frac{1}{x^n} < \varepsilon$  Entonces:  $\varepsilon = \frac{1}{M^n}$

Si se despeja M, se obtiene:  $M = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$

Así, se cumple la condición, de que M depende del  $\varepsilon$  definido. Como conclusión se afirma que el límite si existe y es cero.

El límite propuesto, es un de los límites más importantes dentro de los límites al infinito.

A partir de límite anterior, se puede resolver una gran cantidad de límites al infinito, utilizando las propiedades básicas sobre límites.

### Ejemplo 39:

Hallar:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{12x^3 + 4x^2 - 5x + 8}{4x^3 + 10x - 5} \right)$$

### Solución:

Si aplicamos las propiedades básicas podemos llegar a una indeterminación (*Mas adelante se analizará este tema*)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{12x^3 + 4x^2 - 5x + 8}{4x^3 + 10x - 5} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (12x^3 + 4x^2 - 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 10x - 5)}$$

Los siguientes pasos ya los conocemos, lleguemos al último:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (12x^3 + 4x^2 - 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 10x - 5)} = \frac{12 \cdot \infty^3 + 4 \cdot \infty^2 - 5 \cdot \infty + 8}{4 \cdot \infty^3 + 10 \cdot \infty - 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

Corresponde a una *Indeterminación*

El trabajo con este tipo de límites es eliminar esa indeterminación, lo cual se hace de la siguiente manera.

Inicialmente se observa que la expresión racional sea tal que el grado del numerador y denominador sean iguales o que el grado del denominador sea mayor. Si esto ocurre, entonces lo que se procede a hacer es dividir cada término de la expresión por la variable con el máximo exponente, para luego simplificar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{12x^3 + 4x^2 - 5x + 8}{4x^3 + 10x - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{12x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{8}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{10x}{x^3} - \frac{5}{x^3}} \right)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{12x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{8}{x^3} \right]}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{4x^3}{x^3} + \frac{10x}{x^3} - \frac{5}{x^3} \right]} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 12 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right]}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 4 + \frac{10}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right]}$$

Aplicando propiedad de los límites:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 12 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right]}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 4 + \frac{10}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right]} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (12) + \lim_{x \rightarrow \infty} (4/x) - \lim_{x \rightarrow \infty} (5/x^2) + \lim_{x \rightarrow \infty} (8/x^3)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4) + \lim_{x \rightarrow \infty} (10/x^2) - \lim_{x \rightarrow \infty} (5/x^3)}$$

Evaluando los límites:  $\frac{12 + (4/\infty) - (5/\infty^2) + (8/\infty^3)}{(4) + (10/\infty^2) - (5/\infty^3)} = \frac{12 + 0 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = 3$

Finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{12x^3 + 4x^2 - 5x + 8}{4x^3 + 10x - 5} \right) = 3$$

El desarrollo se hizo, utilizando las propiedades de límites y el límite demostrado anteriormente.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{x^n} \right) = 0$$

**Ejemplo 40:**

Hallar:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x + 5}{2x^2 + 2x + 4} \right)$

**Solución:**

Si evaluamos el límite hacia la tendencia de la variable, llegamos a una indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x + 5}{2x^2 + 2x + 4} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6x + 5)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 2x + 4)} = \frac{6 * \infty + 5}{2 * \infty^2 + 2 * \infty + 4} = \frac{\infty}{\infty} = Ind.$$

Para eliminar dicha indeterminación, procedemos a dividir cada término por  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x + 5}{2x^2 + 2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x/x^2 + 5/x^2}{2x^2/x^2 + 2x/x^2 + 4/x^2} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6x/x^2 + 5/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2/x^2 + 2x/x^2 + 4/x^2)}$$

Simplificando y evaluando:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6x/x^2 + 5/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2/x^2 + 2x/x^2 + 4/x^2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6/x + 5/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + 2/x + 4/x^2)} = \frac{6/\infty + 5/\infty^2}{2 + 2/\infty + 4/\infty^2} = \frac{0}{2+0} = 0$$

Finalmente:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x + 5}{2x^2 + 2x + 4} \right) = 0$

### Ejemplo 41:

Hallar:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} [\sqrt{x^2 + 1} - x]$

### Solución:

Como tenemos el límite donde hay raíces, el camino de solución es la conjugada, donde multiplicamos y dividimos por el mismo término pero con signo contrario.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right]$$

Haciendo las operaciones de producto y simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right]$$

Aplicando límite de cociente y evaluando::

$$\left[ \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} (1)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} (\sqrt{x^2 + 1} + x)} \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1} + \alpha} = \frac{1}{\alpha} = 0$$

Para los límites al infinito, podemos hacer una generalización:

Sea:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{n-2m} + \dots + b_1 x + b_0} \right)$

Las soluciones son:

1. Si  $n > m$  entonces el límite es  $\infty$
2. Si  $n < m$  entonces el límite es 0
3. Si  $n = m$  entonces el límite es  $a_n/b_m$

## Lección 15: Límites Infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

Los límites infinitos son aquellos donde la variable tiene a un valor fijo, mientras que la función tiende a más o menos infinito.

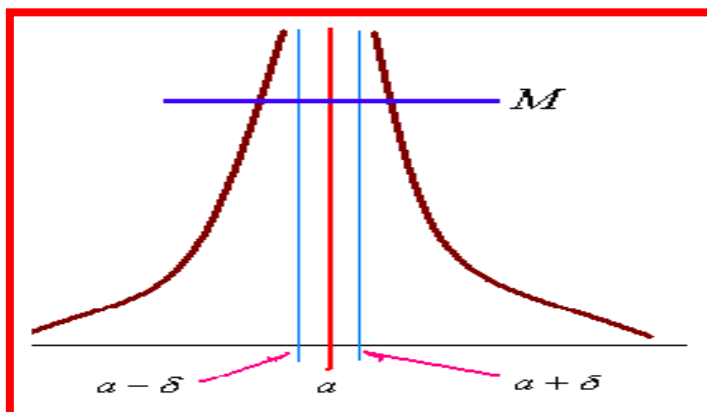
Con lo desarrollado sobre límites, ya se puede comprender que pasa en el siguiente caso.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x - 3}$  Si se hiciera la evaluación del límite, se obtendría una expresión de la forma:  $4 / 0 = \text{Indeterminación}$ . En teoría de límites, cuando se obtiene cero en el denominador, se dice que se presenta una indeterminación, luego lo que se hace es que la tendencia de la variable sea al valor definido pero por la derecha o la izquierda, esto se desarrollará en límites unilaterales.

### DEFINICIÓN:

Dada La función  $f(x)$  definida en el intervalo abierto  $I$ , el cual contiene al valor  $a$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Esto significa, dado un valor  $M > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que:  $f(x) > M$  Siempre que  $0 < |x - a| < \delta$



### Ejemplo 42:

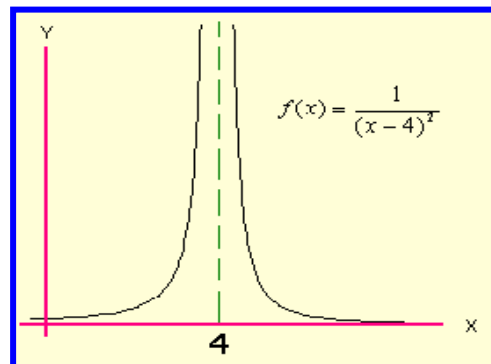
Resolver el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x - 4)^2}$

### Solución:

Como se puede observar, el numerador siempre será constante, mientras que el denominador será positivo.

En la gráfica, se ve que cuando  $x$  tiende a 4 por la derecha, la función tiende a infinito. Si  $x$  tiende a 4 por la izquierda, la función también tiende a infinito

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$$



### Ejemplo 43:

$$\text{Resolver el siguiente límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-1)^2}$$

### Solución:

En este caso el numerador es negativo, el denominador se acerca a cero a medida que la

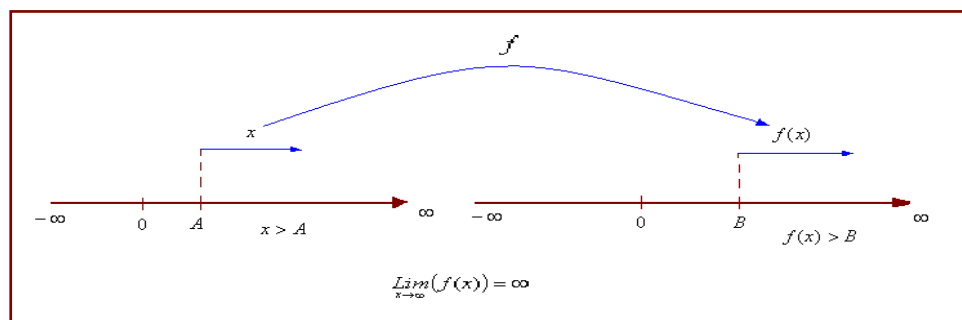
$$\text{variable se acerca a uno. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

### DEFINICIÓN:

Dada La función  $f(x)$  con dominio  $D$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Esto significa que para un valor  $B > 0$ ; tan grande como se desee, debe existir un  $A > 0$  tal que para todo  $x$  que pertenece a  $D$ :  $(\forall x \in D). f(x) > B$  siempre que  $x > A$

Veamos esto gráficamente:



### Ejemplo 44:

Resolver el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} [2x^2 + 4]$

### Solución:

Por medio de las propiedades de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [2x^2 + 4] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow \infty} (4) = 2(\infty)^2 + 4 = \infty$$

### Lección 16: Formas Indeterminadas:

$$\frac{0}{0} = ?$$

En la teoría de límites, en muchas ocasiones nos encontramos con situaciones como las siguientes:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad \infty^0 \quad 0^\infty \quad 1^\infty \quad 0 * \infty \quad 0^0$$

Estos casos se denominan **indeterminaciones**, ya que no se puede tomar una decisión respecto a la operación. La explicación es relativamente sencilla.

*Para el primer caso, el cero del numerador lleva la operación a cero, mientras que el denominador lleva la operación al infinito, luego “Las fuerzas son contrarias”, por lo cual no se puede tomar una decisión. Igual ocurre con la segunda y tercera opción. La cuarta opción, el infinito de la base hace que la operación sea infinita, mientras que el cero del exponente envía la operación a uno, luego también tienen “fuerzas contrarias”.*

La habilidad de resolver límites se basa en eliminar las indeterminaciones, existen 2 métodos para hacerlo: Algebraicos y de cálculo para eliminar indeterminaciones y así resolver límites:

#### 1. Métodos Algebraicos: Entre estos tenemos la Factorización y la racionalización.

- ) **La Factorización:** Se utiliza generalmente cuando se tiene una expresión racional y ha posibilidad de simplificarla para resolver el límite.



### Ejemplo 45:

Resolver el límite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

### Solución:

Si evaluamos directamente se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Luego, la idea es eliminar la indeterminación, lo que se puede hacer factorizando el numerador, veamos: El numerador es una diferencia de cuadrados,... verdad... entonces, se procede de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

Con este procedimiento, efectivamente se eliminó la indeterminación, ahora si es posible calcular el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = (2 + 2) = 4$$

Por consiguiente:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

### Ejemplo 46:

Resolver el límite:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 27}$

### Solución:

Si evaluamos directamente se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 27} = \frac{9 - 9}{27 - 27} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Para eliminar la indeterminación, factorizamos, el numerador como factor común y el denominador como diferencia de cubos.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 + 3x + 9}$$

Ahora se puede evaluar:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 + 3x + 9} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

Finalmente:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 27} = \frac{1}{9}$

- ) **La Racionalización:** Se utiliza generalmente cuando se tiene una expresión en diferencia donde hay presencia de radicales.

**Ejemplo 47:**

Resolver el límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x)$

**Solución:**

Si evaluamos directamente se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x) = \sqrt{\infty - 2} - \infty = \infty - \infty$$

Para eliminar un radical, se racionaliza la expresión, lo cual se hace multiplicando y dividiendo la expresión por el conjugado de dicha expresión.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - x)(\sqrt{x^2 - 2} + x)}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + x}$$

Simplificando:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \frac{-2}{\sqrt{\infty} + \infty} = \frac{-2}{\infty} = 0$

Finalmente:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x) = 0$

**Ejemplo 48:**

Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} \right)$

### Solución:

Si evaluamos directamente se obtiene:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3+0} - \sqrt{3}}{0} \right) = \frac{0}{0}$

Se nos presenta una forma indeterminada, entonces aplicamos la conjugada.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(\sqrt{3+x} - \sqrt{3})(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \right)$$

$$\text{Operando: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(3+x-3)}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x)}{x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \right)$$

$$\text{Evaluando el límite: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

**2. Métodos de Cálculo:** Corresponden al uso de los límites al infinito y a la regla de L'hôpital. El primero se analizará a continuación, el segundo se dejará cuando se estudie las aplicaciones de las derivadas.

- ) **Límites al Infinito:** En ocasiones se tienen expresiones enteras o racionales de límites al infinito que conllevan a indeterminaciones. Para los casos donde el grado del polinomio del numerador es menor o igual al grado del polinomio del denominador, se divide todos los términos de la expresión por la variable con el mayor exponente, para aplicarles el límite al infinito, así se elimina la indeterminación.

### Ejemplo 49:

$$\text{Resolver: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{6x^3 - x}$$

### Solución:

$$\text{Si evaluamos directamente se obtiene: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{6x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Evidentemente es una indeterminación. Entonces dividimos cada término de la expresión por  $x^3$ . Luego:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{4x^3/x^3 + 7x/x^3}{6x^3/x^3 + x/x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{4 + 7/x^2}{6 + 1/x^2} \right] = \frac{4 + 0}{6 + 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Aquí aplicamos la teoría del límite al infinito más conocido, recordemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{x^2} = 0 \quad \text{Siendo K una constante.}$$

**Ejemplo 50:**

Resolver:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 4x^2 + 5x - 10)$

**Solución:**

Si evaluamos directamente se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 4x^2 + 5x - 10) = 3 * \infty - 4 * \infty + 5 * \infty - 10 = \infty - \infty$$

La solución para eliminar esta indeterminación es multiplicar y dividir por la variable con el mayor exponente.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 4x^2 + 5x - 10) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^3 \left( 3x^3/x^3 - 4x^2/x^3 + 5x/x^3 - 10/x^3 \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^3 \left( 3 - 4/x + 5/x^2 - 10/x^3 \right) \right] = \infty (3 - 0 + 0 - 0) = 3 * \infty = \infty$$

Por consiguiente:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 4x^2 + 5x - 10) = \infty$

En los casos donde el grado del numerador sea mayor que el grado del denominador, primero se hace la división, para luego aplicar el procedimiento anterior.

**Ejemplo 51:**

Desarrollar:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3}$

### Solución:

Evaluando directamente se obtiene una indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3} = \frac{\infty - \infty}{\infty}$$

Luego para eliminar la indeterminación, primero se hace la división de la expresión racional:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{x + 1}{x^2 - 3} \right)$$

Por propiedad de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{x + 1}{x^2 - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 1}{x^2 - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} \right)$$

$$\text{Resolviendo: } \lim_{x \rightarrow \infty} (x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} \right) = \infty + \frac{0 + 0}{1 - 0} = \infty + \frac{0}{1} = \infty + 0 = \infty$$

$$\text{Por consiguiente: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3} = \infty$$

### Lección 17: Formas No Indeterminadas:

Dentro del álgebra de límites, se presentan situaciones que se consideran no indeterminadas. A continuación se exponen dichos casos, que puede ser de ayuda en diversas situaciones.

$$\infty * \infty = \infty$$

$$\infty^\infty = \infty$$

$$0^\infty = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

En cada una de ellas, no se presenta ambigüedad, ya que se puede tomar una decisión, que es precisamente lo que se debe hacer al resolver un límite.

## Lección 18: Límites de Funciones Trigonométricas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Los límites también se pueden aplicar a las funciones trigonométricas.

Para un valor real  $a$  definido en el dominio de la función trigonométrica, se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} [\text{sen}(x)] = \text{sen}(a) ; \quad \lim_{x \rightarrow a} [\cos(x)] = \cos(a) ; \quad \lim_{x \rightarrow a} [\sec(x)] = \sec(a)$$

### Ejemplo 52:

Resolver los siguientes límites:

a-)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [\cos(x)]$

b-)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [\tan(x)]$

### Solución:

Por las definiciones anteriores:

a-)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [\cos(x)] = \cos(\pi/2) = 0$

b-)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [\tan(x)] = \tan(\pi/2) = \alpha$

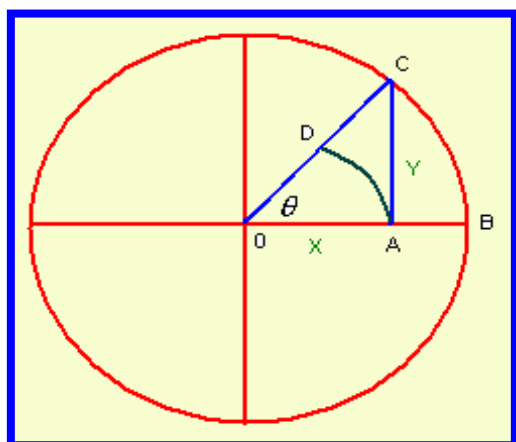
En trigonometría son importantes, dos límites que analizaremos a continuación.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

Este límite se puede demostrar por dos caminos, uno es el teorema del emparedado y otro por la regla de L'hôpital.

### Demostración:

Utilicemos el teorema del emparedado. Para esto tomamos como referencia la circunferencia unidad. ( $R = 1$ )



$A_1(OAD)$  = Área del sector circular interno

$A(OAC)$  = Área del triángulo

$A_2(OBC)$  = Área del sector circular externo

$$A_1 \leq A \leq A_2$$

Iniciemos con el área del sector circular pequeño. Como  $X = R$  (radio), Por definición de función coseno:  $X = R \cos(\theta)$ , pero  $R = 1$ , entonces  $X = \cos(\theta)$ , ya que estamos trabajando con la circunferencia unidad, luego:

$$A_1(OAD) = \frac{1}{2} \theta R^2 = \frac{1}{2} \theta X^2 = \frac{1}{2} \theta \cos^2(x)$$

Ahora, se halla el área del triángulo: Según la gráfica,  $Y = \sin(\theta)$ . y  $X = \cos(\theta)$

$$A(OAC) = \frac{1}{2} X * Y = \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Finalmente, hallamos el área del sector circular grande: Como  $R = 1$ , que corresponde al radio de la circunferencia unidad.  $A_2(OBC) = \frac{1}{2} \theta R^2 = \frac{1}{2} \theta$

Se plantea la desigualdad de las áreas:

$$\frac{1}{2} \theta \cos^2(\theta) \leq \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) \leq \frac{1}{2} \theta$$

Multiplicamos por  $\frac{2}{\theta \cos(\theta)}$ , se obtiene:  $\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$

Aplicamos el límite a la desigualdad:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Evaluando los límites se obtiene:

$$\cos(0) \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \frac{1}{\cos(0)} \Rightarrow 1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$$

$$\lim(A_1) \leq \lim(A) \leq \lim(A_2) \quad \text{Como} \quad \lim(A_1) = \lim(A_2) = 1$$

Por el teorema del emparejado:  $\lim(A) = 1$

Conclusión:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

**Ejemplo 53:**

Hallar:  $\lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x}$

**Solución:**

Expresamos  $h = 4x$ , luego:

$$\lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{Por la definición del límite de } \sin(x) \text{ cuando la variable tiende a cero.}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

**Demostración:**

Para demostrar este límite, aplicamos racionalización a través de la conjugada.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) * (1 + \cos(x))}{(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))}$$

Separamos los límites:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$



Evaluando los límites:  $1 * \frac{\text{sen}(0)}{1 + \cos(0)} = 1 * \frac{0}{2} = 0$

Así queda demostrado el límite propuesto.

Estos dos límites tienen gran importancia en el mundo de las Matemáticas, por favor tenerlos muy en cuenta.

#### Ejemplo 54:

Hallar:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(6x)}{8x}$

#### Solución:

Evaluando directamente nos aparece una indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(6x)}{8x} = \frac{\text{sen}(0)}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

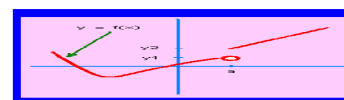
Debemos eliminar la indeterminación. Veamos. Lo primero es aplicar límite de un cociente y dividir los dos términos por x:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(6x)}{8x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen}(6x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (8x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen}(6x)) / x}{\lim_{x \rightarrow 0} (8x) / x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(6x) / x]}{\lim_{x \rightarrow 0} [8x / x]}$$

El numerador lo multiplicamos y dividimos por 6 y el denominador lo dejamos igual.

$$\frac{6 \lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(6x) / 6x]}{\lim_{x \rightarrow 0} [8x / x]} \quad \text{Cuando } x \rightarrow 0 \Rightarrow 6x \rightarrow 0 \text{ Entonces: } \frac{6 \lim_{6x \rightarrow 0} [\text{sen}(6x) / 6x]}{\lim_{x \rightarrow 0} (8)} = \frac{6 * 1}{8} = \frac{3}{4}$$

#### Lección 19: Límites Unilaterales:



Los límites unilaterales surgen de la necesidad de determinar límites de funciones cuando la variable tiene restricciones.

Veamos el siguiente caso:  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x - 3}$

Este límite se puede resolver solo si los  $x$  se acercan a 3 por valores mayores que éste, como: 3.01, 3.001,... Cuando  $x$  se acerca a 3 por valores menores que éste como: 2.99, 2.999, 2.9999,... El límite no existe. (Analice Porque)

Utilizando la nomenclatura de límites unilaterales, se dice:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$

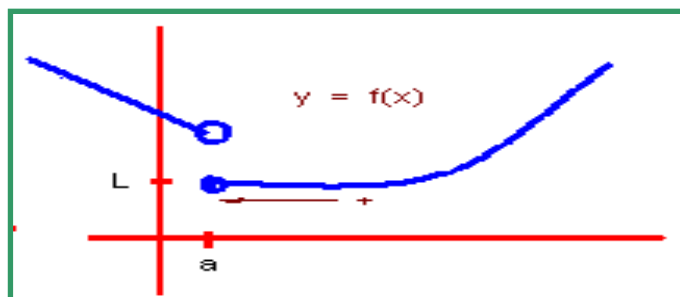
Lo anterior indica que el límite cuando  $x$  tiende a 3 por la derecha, la función dada tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x-3} = \text{No} - \text{existe}$$

Esto indica que el límite cuando  $x$  tiende a 3 por la izquierda de la función dada, no existe.

**DEFINICIÓN:**

Dada La función  $f(x)$  definida en el intervalo  $(a, b)$ , si  $x$  tiende a  $c$  por la derecha,  $f(x)$  tiende a  $L$ . Entonces:  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$



Para que el límite exista, sea una  $\varepsilon > 0$ , debe existir un  $\delta > 0$ , tal que:  $0 < |x - c^+| < \delta$   
 Entonces:  $|f(x) - L| < \varepsilon$

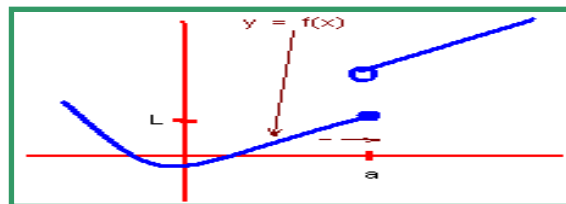
Por la definición formal de límite, lo que se debe encontrar es una relación entre  $\varepsilon$  y  $\delta$ , como se ha venido analizando.

**DEFINICIÓN:**

Dada La función  $f(x)$  definida en el intervalo  $(a, b)$ , si  $x$  tiende a  $b$  por la izquierda,  $f(x)$  tiende a  $L$ . Entonces:  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$

Para que el límite exista, sea una  $\varepsilon > 0$ ,  
 debe existir un  $\delta > 0$ , tal que:  $0 < |x - a| < \delta$

Entonces:  $|f(x) - L| < \varepsilon$



**Ejemplo 55:**

Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor$

**Solución:**

La función que se presenta es la función *parte entera*, recordemos que esta función se define así:

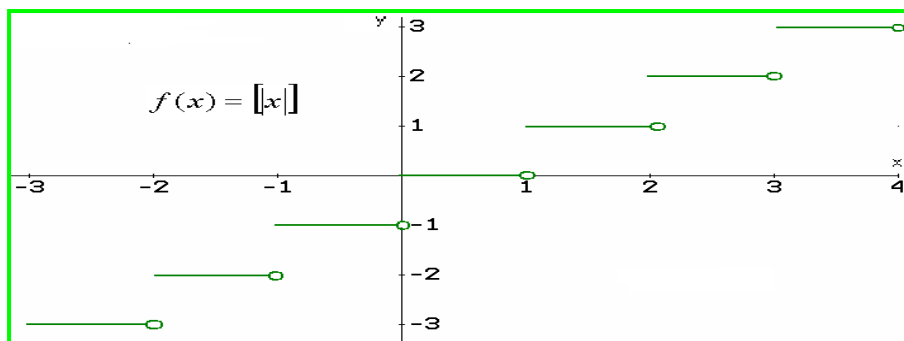
Para  $-1 \leq x < 0$ , su imagen es -1

Para  $0 \leq x < 1$ , su imagen será 0

Para  $1 \leq x < 2$ , su imagen es 1. Así sucesivamente.

Así, cuando  $x$  tiende a cero por la izquierda, entonces la función es -1.

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$

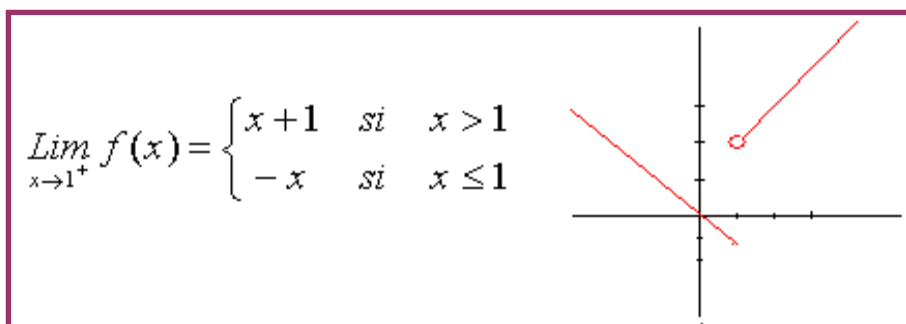


**Ejemplo 56:**

Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

### Solución:

La función que se presenta es la función definida por partes, la gráfica nos deja ver sus límites unilaterales.



Por consiguiente:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

### Ejemplo 57:

Para la función del ejemplo 56, muestre que el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda es -1.

### Solución:

Observando la gráfica se puede obtener la respuesta, además; por la definición de la función se puede inferir que efectivamente el límite es -1.

## Lección 20: Límite de una Función:

### TEOREMA:

Sea la función  $f(x)$  definida en un intervalo  $I$ , el cual contiene al valor  $a$ , entonces:

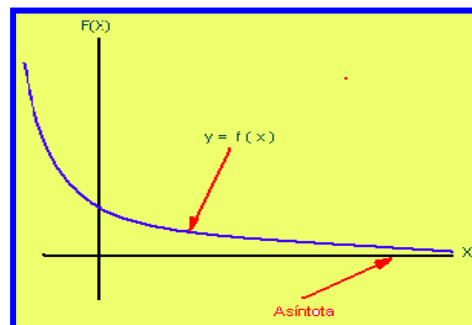
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ Existe, si y solo si, } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

El teorema muestra que el límite de una función existe, solo si sus límites unilaterales existen y son iguales.

## Lección 21: Asíntotas:

Las Asíntotas son rectas que limitan las curvas en su recorrido, hasta el punto que no las deja pasar. Las asíntotas permiten observar el recorrido de las curvas en el plano.

Existen rectas que se aproximan arbitrariamente a curvas de funciones, pero nunca se tocan, se dice que la curva se acerca asintóticamente a la recta.



### - ) ASINTOTAS HORIZONTALES:

La recta  $y = L$ , es una asíntota horizontal, si se cumple una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

### Ejemplo 58:

Para la función dada, determinar sus asíntotas horizontales, si las tiene:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

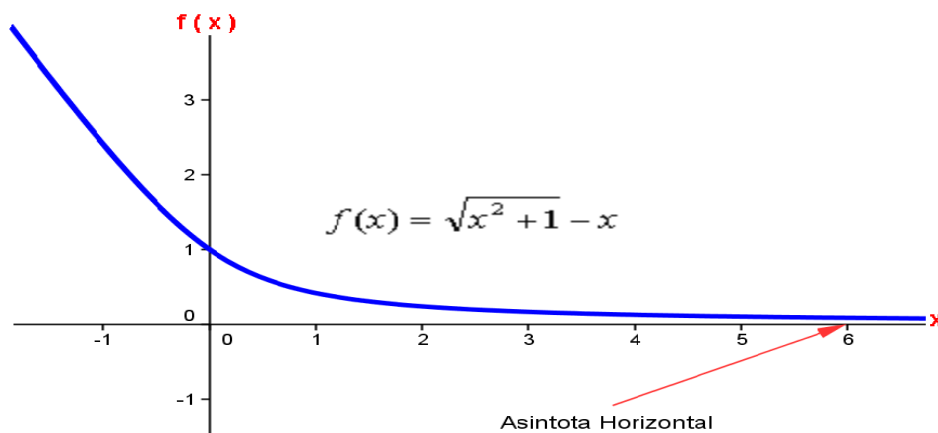
### Solución:

Resolviendo el límite, se sabe si tiene o no asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como el límite existe y es cero, entonces:  $y = 0$  es Asíntota horizontal de la función dada.



### - ) ASINTOTAS VERTICALES:

La recta  $x = a$ , es una asíntota vertical, si se cumple una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

### Ejemplo 59:

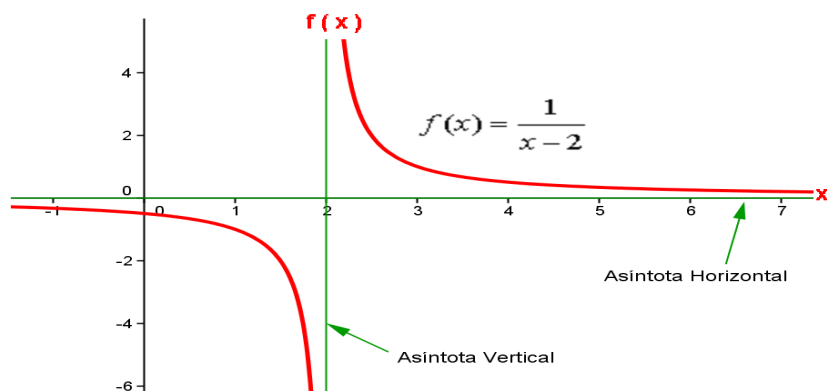
Para la función dada, determinar sus asíntotas verticales, si las tiene:  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

### Solución:

Primero se busca en donde la función no esta definida, se hace que  $x$  tienda a 2, que es el punto donde la función no esta definida.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} = -\infty$$

Se presenta el primer caso, luego  $x = 2^+$ , la función va al infinito positivo, cuando  $x = 2^-$ , la función va al infinito negativo, entonces hay una asíntota vertical de la función dada en  $x = 2$ , además de la horizontal que hay en  $y = 0$ .



### Ejemplo 60:

Para la función dada, determinar sus asíntotas verticales, si las tiene:  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x-6}$

### Solución:

Primero se busca en donde la función no esta definida, lo que se puede identificar linealizando el denominador:

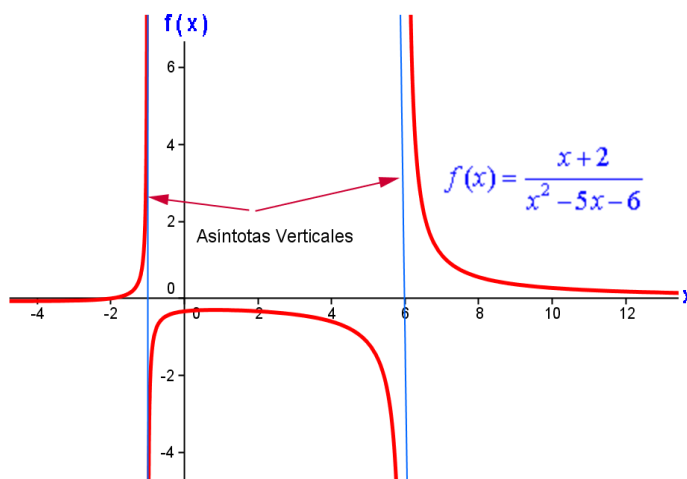
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x-6} = \frac{x+2}{(x-6)(x+1)}$$

Se hace que x tienda a 6 y a -1, que es el punto donde la función no esta definida.

$$a) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+2}{x^2-5x-6} = \frac{8}{0} = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2-5x-6} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para los dos casos se presenta la primera condición, luego  $x = -1$  y  $x = 6$  son asíntotas verticales de la función dada.



## EJERCICIOS

1. Resolver los siguientes límites.

a-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 5x - 9} \right]$

b-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6x^3 + 10x^2 - 3}{3x^4 + 2x^2 - 6} \right]$

c-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{4x^3 - 5x^2 + 8x - 3}{2x^2 + 8x - 6} \right]$

d-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 2} + \sqrt[5]{x^3 + 3x^2 + x + 1}}{\sqrt[4]{x^6 + 3x + 2} + \sqrt[5]{x^2 + 4x + 7}} \right]$

e-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} * \left[ \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \right]$

2. Resolver:  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right]$

3. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - 4}{x - 1} \right]$

4. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x} \right]$

5. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}(8x) + \text{sen}(4x)}{\text{sen}(6x)} \right]$

6. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{5}{x}}$

7. Resolver los siguientes límites:

a-)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right]$

b-)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(2x)}{\text{sen}^2(2x)} \right]$

c-)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[ \frac{\tan^2(x)}{1 + \cos(x)} \right]$

8. Resolver los siguientes límites unilaterales.

a-)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

b-)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

9. a-) Hallar los límites unilaterales de la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 5x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



b-) Establecer si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  Existe

10. Sea  $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a-) Hallar los límites unilaterales.

b-) Establecer si  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$  existe.

11. Sea la función:  $g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1-x| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a-) Hallar los límites unilaterales

b-) determinar si  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  Existe.

12. Determinar las asíntotas horizontales; si existen de las siguientes funciones.

a-)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

b-)  $g(x) = \frac{4}{x^2 - 4x}$

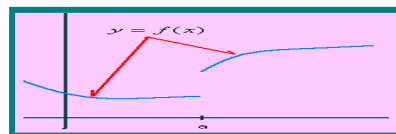
13. Determinar la asíntotas verticales; si existen de las siguientes funciones.

a-)  $f(x) = \frac{x-1}{x^3 - 1}$

b-)  $g(x) = \frac{4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

14. Hallar las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1}$  Si las tiene. ( $0 \leq x \leq 2\pi$ )

## CAPÍTULO CINCO: CONTINUIDAD



El concepto de continuidad está relacionado con la **no interrupción** de una curva de una función en un punto o en un intervalo.

La continuidad es muy importante, debido a que en Matemáticas las funciones continuas son trabajadas de una manera muy particular.

### Lección 22: Continuidad en un Punto:

Sea la función  $y = f(x)$ , además, sea  $a$  el valor de  $x$ . Se dice que  $f(x)$  es continua en  $x = a$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) : \text{Existe}$$

$$f(a) : \text{Existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para que una función sea continua en un punto, se deben cumplir las tres condiciones simultáneamente.

Existen casos donde se puede cumplir la primera y/o segunda condición, pero no la tercera.

#### Ejemplo 61:

Determinar la continuidad de la función dada en  $x = 4$  y  $x = 0$ .  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$

#### Solución:

a) Aplicamos las tres condiciones para  $x = 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{4-2}{16-16} = \frac{2}{0} = \infty \quad \text{y} \quad f(4) = \frac{4-2}{4^2-16} = \frac{2}{0} = \infty$$

La primera y segunda condición no se cumplen, luego la tercera tampoco se cumplirá, como conclusión se puede decir que la función dada, NO es continua en  $x = 4$ .

b) Para  $x = 0$ :

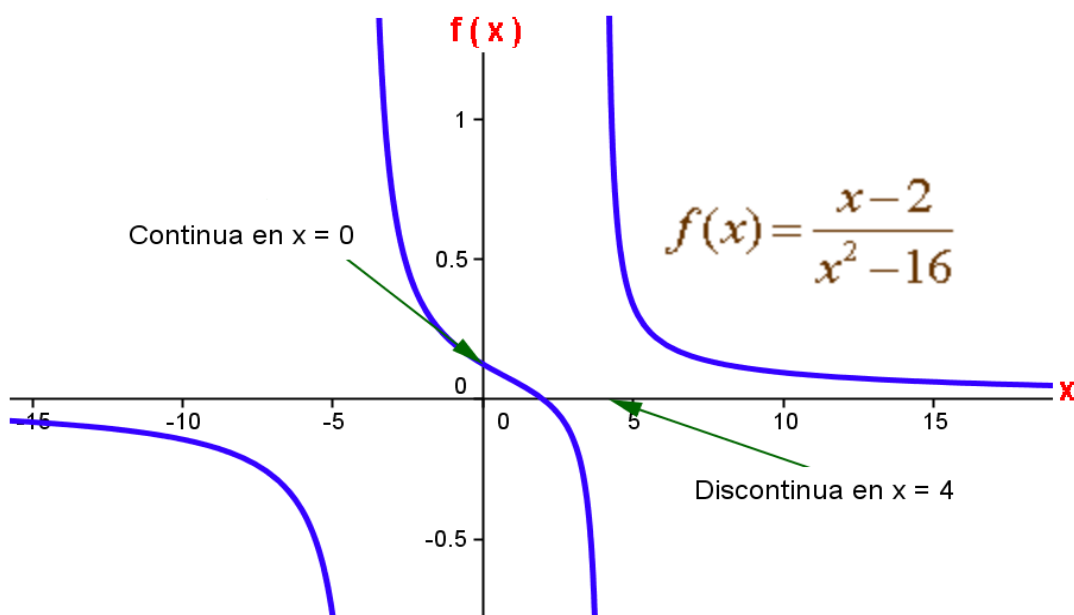
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0 + 2}{0 - 16} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

$$f(x = 0) = \frac{0 + 2}{0 - 16} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x = 0) = -\frac{1}{8}$$

Como la función en el punto  $x = 0$ , cumple las tres condiciones:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \text{Existe}$  Se concluye que dicha función es continua en  $x = 0$ .



**Ejemplo 62:**

Determinar la continuidad de la función dada en  $x = 1$  y  $x = 2$ .  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$

**Solución:**

a-) Aplicamos las tres condiciones para  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = \sqrt{\frac{5}{0}} = \infty \quad \text{y} \quad f(x=1) = \sqrt{\frac{5}{0}} = \infty$$

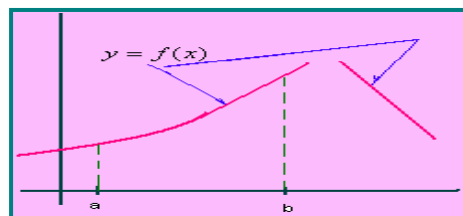
Por consiguiente, la función NO es continua en  $x = 1$ .

$$b-) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} = \sqrt{\frac{6}{1}} = \sqrt{6} \quad y \quad f(x=2) = \sqrt{\frac{6}{1}} = \sqrt{6}$$

Como se puede observar la función  $f(x)$  es continua en  $x = 2$ .

### Lección 23: Continuidad en un Intervalo

Para determinar la continuidad en un intervalo  $I$ , éste debe definirse abierto, es decir solo se incluyen los puntos internos de dicho intervalo.



#### Definición:

Sea la función  $y = f(x)$  definida en el intervalo abierto  $I = (a, b)$ . Se dice que  $f(x)$  es continua en el intervalo dado, si dicha función es continua en todos los puntos interiores de dicho intervalo y en los puntos extremos.

Punto Interior: La función  $f(x)$  es continua en los puntos interiores del intervalo  $(a, b)$  si:

$$\text{Para } c \in (a, b): \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Puntos extremos: La función  $f(x)$  es continua en los puntos extremos del intervalo  $(a, b)$  si:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

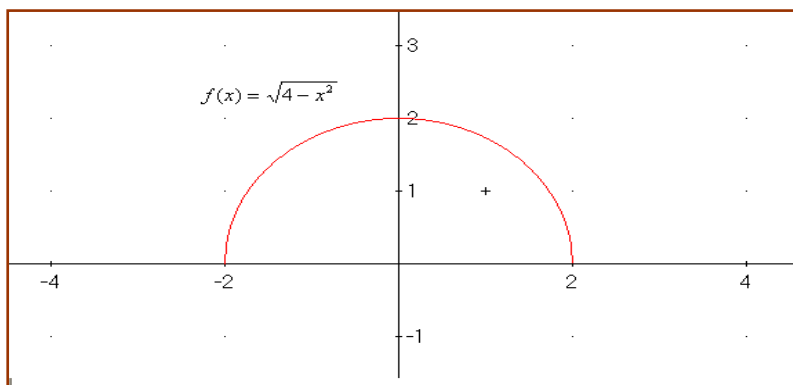
Es de resaltar que los límites deben existir para que la función sea continua en el intervalo definido.

#### Ejemplo 63:

Sea la función  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  Determinar en qué intervalo la función es continua.

### Solución:

Como el radicando no puede ser negativo, entonces  $4 - x^2 \geq 0$  resolviendo la desigualdad se obtiene:  $-2 \leq x \leq 2$ . En forma de intervalo:  $[-2, 2]$



La función en estudio es continua en el intervalo  $[-2, 2]$ .

Existen algunos teoremas que fortalecen el concepto de continuidad en un intervalo, los cuales serán mencionados a continuación.

**Teorema de la Función Polinomial:** Todas las funciones polinomiales son continuas en los Reales.

**Teorema de la Función Racional:** Toda la función racional, es continua en su dominio de definición.

**Teorema de la Función Valor Absoluto:** La función valor absoluto, es continua en los Reales.

**Teorema de la Función Raíz:** La función raíz de índice par, es continua para  $x > 0$ , siendo  $x$  el radicando. Para la función de índice impar, el dominio son todos los reales.

**Teorema de Suma de Funciones:** Si  $f(x)$  y  $g(x)$ , son continuas en  $x = a$ , entonces,  $f(x) + g(x)$ , también será continua en  $x = a$ . Lo mismo ocurre con la resta de funciones.

**Teorema de Producto de Funciones:** Si  $f(x)$  y  $g(x)$ , son continuas en  $x = a$ , entonces,  $f(x) \cdot g(x)$ , también será continua en  $x = a$ . Lo mismo ocurre con el cociente de funciones, solo que en este caso,  $g(x)$  debe ser diferente de cero.

### Ejemplo 64:

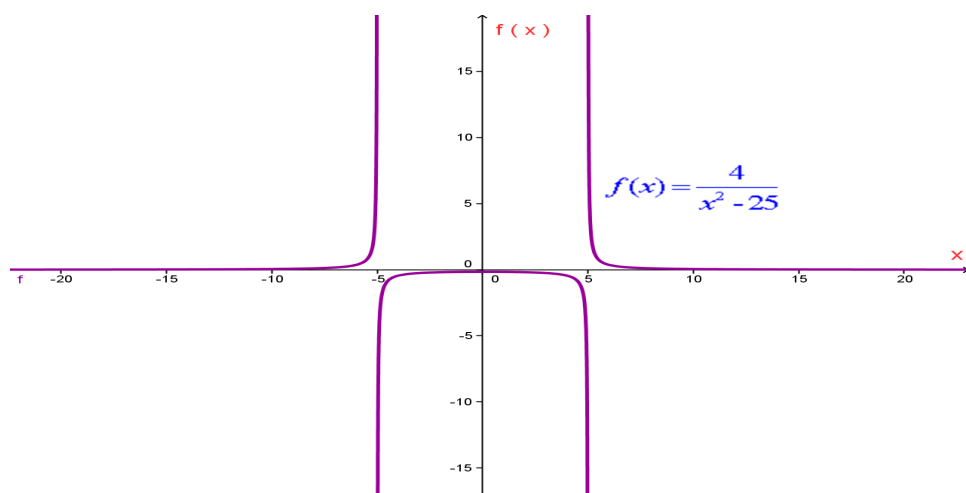
Identificar en qué intervalo es continua la siguiente función.  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 25}$

### Solución:

Primero debemos identificar el dominio de la función, para luego establecer por el teorema de función racional, el dominio de la misma.

La función tiene restricción en  $x = 5$  y  $x = -5$ . Luego el dominio de la función son los Reales diferentes de 5 y -5.

La función es continua en los intervalos:  $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$



### Ejemplo 65:

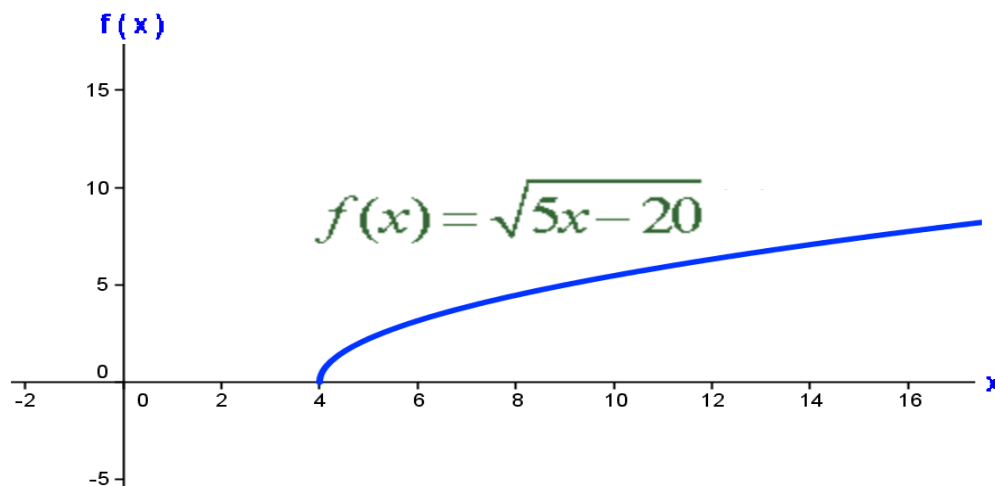
Identificar en que intervalo es continua la siguiente función.  $f(x) = \sqrt{5x - 20}$

### Solución:

Primero debemos identificar el dominio de la función, lo cual se determina conociendo en donde la función se restringe. Por ser una raíz de índice par, el radicando no puede ser negativo, luego:

$$5x - 20 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq 20 \Rightarrow x \geq 4$$

Entonces, el dominio serán todos los reales mayores o iguales de 4. Así dicha función será continua en el intervalo  $[4, \infty)$ . Los puntos de dicho intervalo cumplen las tres condiciones de continuidad en un punto.



### Ejemplo 66:

Identificar en que intervalo es continua la siguiente función.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$

### Solución:

Sabemos que el dominio de una función polinomial son todos los reales, luego la función dada será continua en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . A esta función se le dice continua en todas partes. ¿Entiendes porqué?

### Ejemplo 67:

Identificar en que intervalo es continua la siguiente función.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

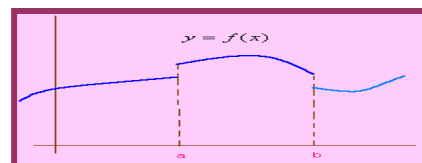
### Solución:

Sabemos que la función se restringe en  $x = 1$ , así el dominio será  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ . Luego en estos intervalos la función es continua.

## Lección 24: Discontinuidad:

Las funciones que no son continuas en un punto o en un intervalo, se les dice discontinua en el punto o en el intervalo.

La discontinuidad es de varios tipos, al saber.



## 1. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE:

Hay casos en donde se presenta discontinuidad, pero por el tipo de función, se puede eliminar la discontinuidad, redefiniendo la función.

### Ejemplo 68:

Identificar el punto de discontinuidad y buscar la forma de eliminar dicha discontinuidad si es

posible y resolver el límite, para la función:  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

### Solución:

La función presenta un punto de discontinuidad en  $x = 2$ , pero utilizando técnicas algebraicas, redefinimos la función y podemos resolver el límite; es decir, *eliminar la indeterminación*.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$$

De esta manera, se puede resolver el límite,  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$

### Ejemplo 69:

Identificar el punto de discontinuidad y buscar la forma de eliminar dicha discontinuidad si es posible y resolver el límite para la función:

$$g(x) = \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

### Solución:

La función presenta un punto de discontinuidad en  $h = 0$ , pero utilizando técnicas algebraicas, redefinimos la función y podemos resolver el límite; es decir, eliminar la indeterminación.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 - x^3}{h}$$

Simplificando:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh) = 3x^2$$

Se observa que el proceso matemático, permitió resolver el límite.

## 2. DISCONTINUIDAD INFINITA:

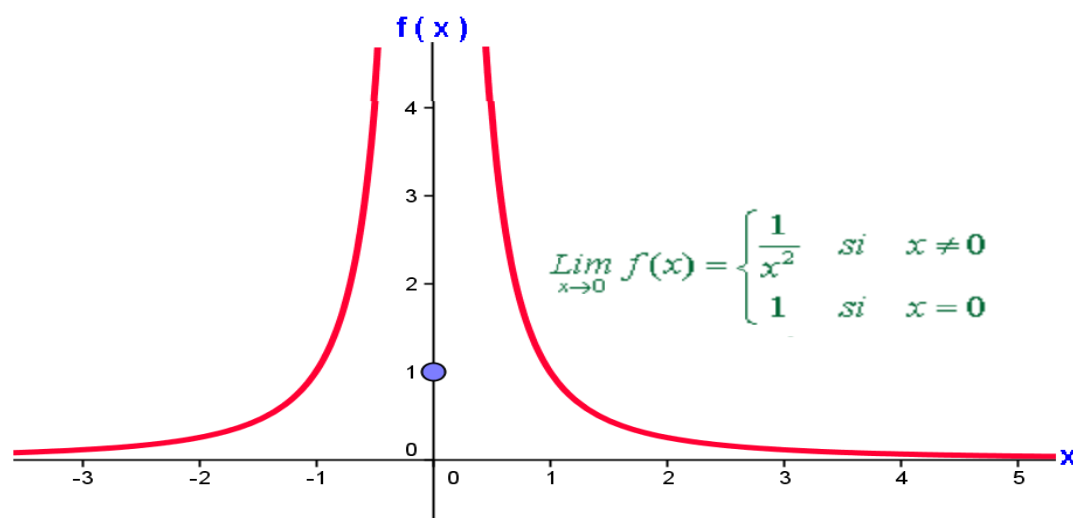
Hay casos en donde la discontinuidad presentada, NO se puede eliminar, ya que la función no es puede redefinir.

### Ejemplo 70:

Determinar el punto o puntos de discontinuidad y resolver el límite si existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:



La función no se puede redefinir, luego hay una discontinuidad infinita en  $x = 0$ .

### Ejemplo 71:

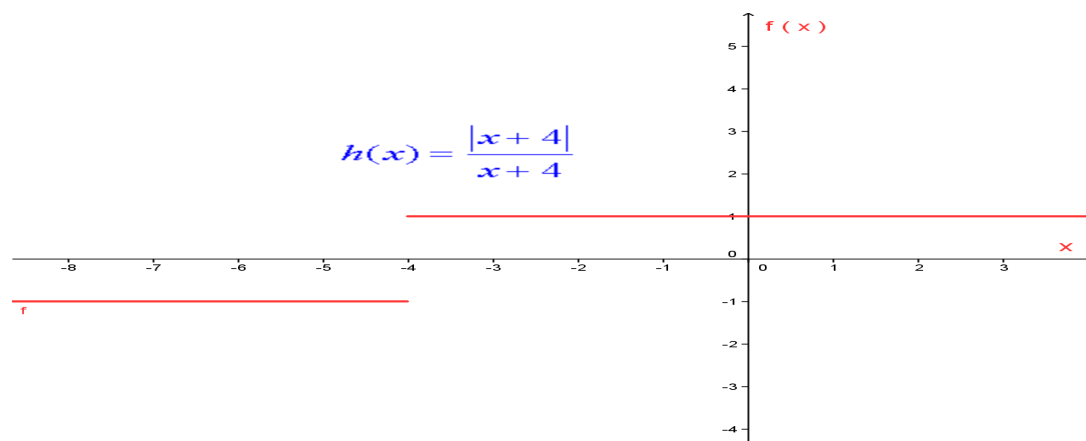
Identificar el punto de discontinuidad y buscar la forma de eliminar dicha discontinuidad si es posible, para resolver el límite de la función:

$$h(x) = \frac{|x + 4|}{x + 4}$$

### Solución:

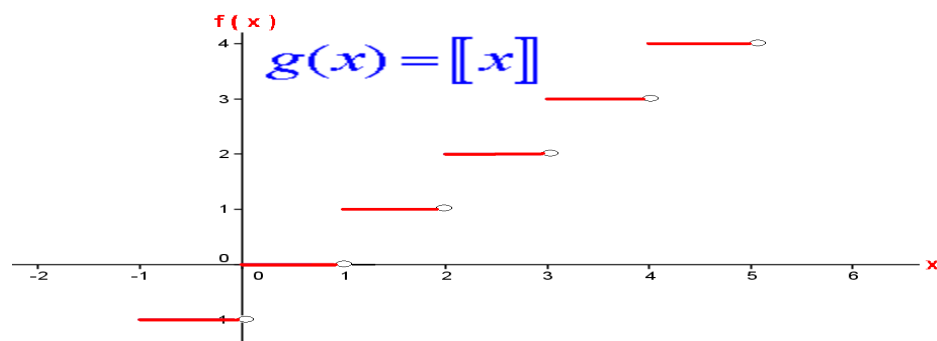
La función tiene un punto de discontinuidad en  $x = -2$ , la cual NO se puede evitar. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 4|}{x + 4} = \infty$$



### 3. DISCONTINUIDAD POR SALTOS:

Por el tipo de función, se presentan casos donde la discontinuidad es por saltos, caso típico la función parte entera.



Esta función también se puede definir así:  $g(x) = \psi \leq x < \psi + 1$  Para  $\psi$  entero.

En esta función se presenta discontinuidad cada valor entero, por lo cual se le conoce como una función discontinua por saltos. Este tipo de función tampoco se puede redefinir.

## EJERCICIOS

1. Sea la función  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$  Determinar si dicha función es continua en  $x = 0$ .

2. Para la función  $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 3x - 10}$  Determinar si dicha función es continua en  $x = -2$ .

3. Definida la función.

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determinar si la función  $g(x)$  es continua en  $x = 2$ .

4. Sea la función  $f(x) = e^x + 2$  identificar en que intervalo es continua.

5. En que intervalo es continua la función:  $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 16}$

6. Para la función:  $\frac{2}{\sqrt{x} - 1}$  En qué intervalo es continua.

## AUTOEVALUACIÓN UNIDAD DOS

1. Utilizando el método inductivo, demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} [e^x] \cong 2,718$
2. Hallar el valor de  $a$  para  $L = 13$  en el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow a} [2x - 1] = L$  Asumiendo un  $\delta = \varepsilon/2$

3. Resolver los siguientes límites.

a-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6x^3 + 10x^2 - 3}{3x^4 + 2x^2 - 6} \right]$       b-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} * [\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}]$

4. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}(8x) + \text{sen}(4x)}{\text{sen}(6x)} \right]$

5. Sea la función:  $g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1-x| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a-) Hallar los límites unilaterales

b-) determinar si  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  Existe.

6. Hallar las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1}$  Si las tiene. ( $0 \leq x \leq 2\pi$ )

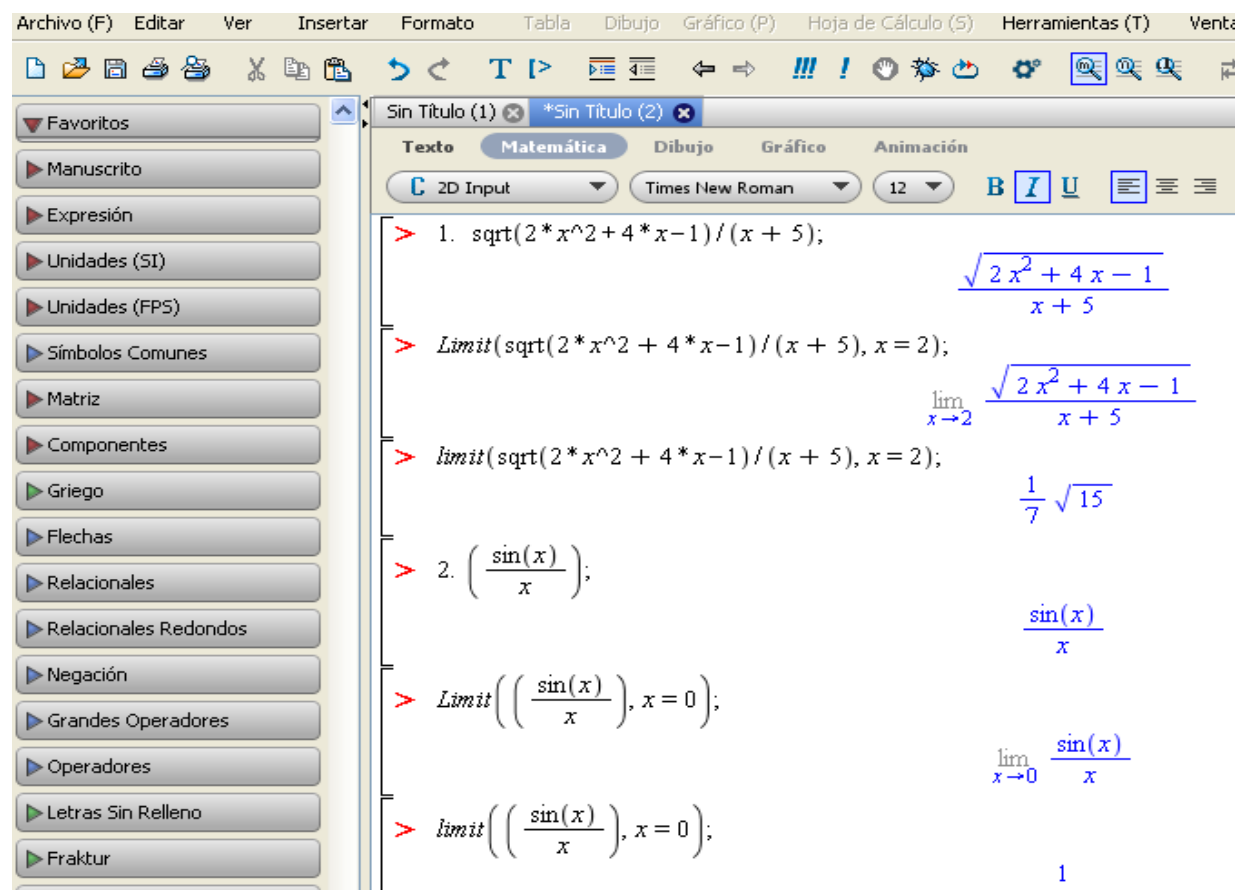
7. Para la función:  $\frac{2}{\sqrt{x-1}}$  En qué intervalo es continua.

## LABORATORIO:

Para realizar este laboratorio, se utilizará el Software **Maple**, versión 13. Al final del modulo se hace una descripción básica sobre la forma de trabajar con este software.

### 1. Resolver Límites:

En la gráfica se observan dos ejemplos. El orden para realizar las simulaciones es: Invocar la función, luego entre paréntesis adicionar la palabra Limit, con la primera letra mayúscula, aparecerá el límite de la función. Finalmente la misma expresión, pero con la primera letra minúscula; limit, así se evalúa dicho límite.



The screenshot shows the Maple software interface with the following content:

- Menu Bar:** Archivo (F), Editar, Ver, Insertar, Formato, Tabla, Dibujo, Gráfico (P), Hoja de Cálculo (S), Herramientas (T), Ventana.
- Toolbox:** Includes icons for file operations, editing, and mathematical functions.
- Left Panel (Favorites):**
  - Manuscrito
  - Expresión
  - Unidades (SI)
  - Unidades (FPS)
  - Símbolos Comunes
  - Matriz
  - Componentes
  - Griego
  - Flechas
  - Relacionales
  - Relacionales Redondos
  - Negación
  - Grandes Operadores
  - Operadores
  - Letras Sin Relleno
  - Fraktur
- Main Window:**
  - Texts:** Sin Título (1), \*Sin Título (2)
  - Mathematics Tab:**
    - 2D Input
    - Times New Roman
    - Font size: 12
    - Buttons: Bold (B), Italic (I), Underline (U), List (≡), Unlist (≡)
- Input and Output:**
  - Input 1:** `> 1. sqrt(2*x^2+4*x-1)/(x+5);`  

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x + 5}$$
  - Input 2:** `> Limit(sqrt(2*x^2+4*x-1)/(x+5), x=2);`  

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{x + 5}$$
  - Input 3:** `> limit(sqrt(2*x^2+4*x-1)/(x+5), x=2);`  

$$\frac{1}{7} \sqrt{15}$$
  - Input 4:** `> 2. (sin(x)/x);`  

$$\frac{\sin(x)}{x}$$
  - Input 5:** `> Limit((sin(x)/x), x=0);`  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$
  - Input 6:** `> limit((sin(x)/x), x=0);`  

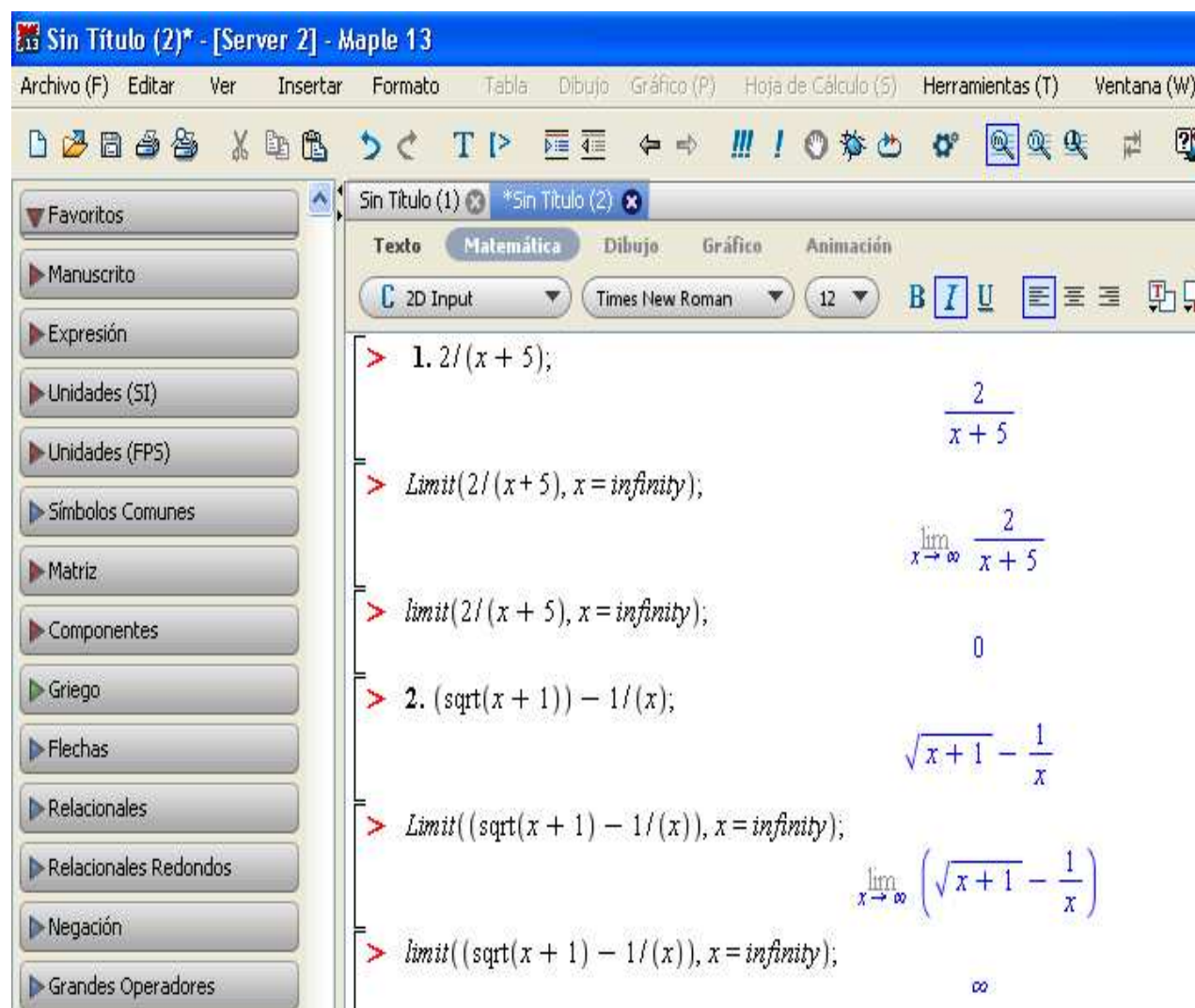
$$1$$

Resolver los siguientes límites:

a.  $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$       c.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{x}$       d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 5x^2 - x + 14}{x+2}$

## 2. Resolver Límites infinitos:

A continuación veremos dos ejemplos modelos para resolver con utilizando los comandos de Maple, límites infinitos. No olvidar que para evaluar el límite se debe escribir limit, con minúscula.



The screenshot shows the Maple 13 interface with the following content:

- Menu Bar:** Archivo (F), Editar, Ver, Insertar, Formato, Tabla, Dibujo, Gráfico (P), Hoja de Cálculo (S), Herramientas (T), Ventana (W).
- Toolbar:** Includes icons for file operations, editing, and mathematical functions.
- Left Panel (Favorites):**
  - Manuscrito
  - Expresión
  - Unidades (SI)
  - Unidades (FPS)
  - Símbolos Comunes
  - Matriz
  - Componentes
  - Griego
  - Flechas
  - Relacionales
  - Relacionales Redondos
  - Negación
  - Grandes Operadores
- Main Window (Sin Título (2) - Maple 13):**
  - Text Area:**

```
> 1. 2/(x + 5);
> Limit(2/(x + 5), x = infinity);
> limit(2/(x + 5), x = infinity);
> 2. (sqrt(x + 1)) - 1/(x);
> Limit((sqrt(x + 1) - 1/(x)), x = infinity);
> limit((sqrt(x + 1) - 1/(x)), x = infinity);
```
  - Output Area:**
    - $\frac{2}{x + 5}$
    - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 5}$
    - 0
    - $\sqrt{x + 1} - \frac{1}{x}$
    - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + 1} - \frac{1}{x} \right)$
    - $\infty$

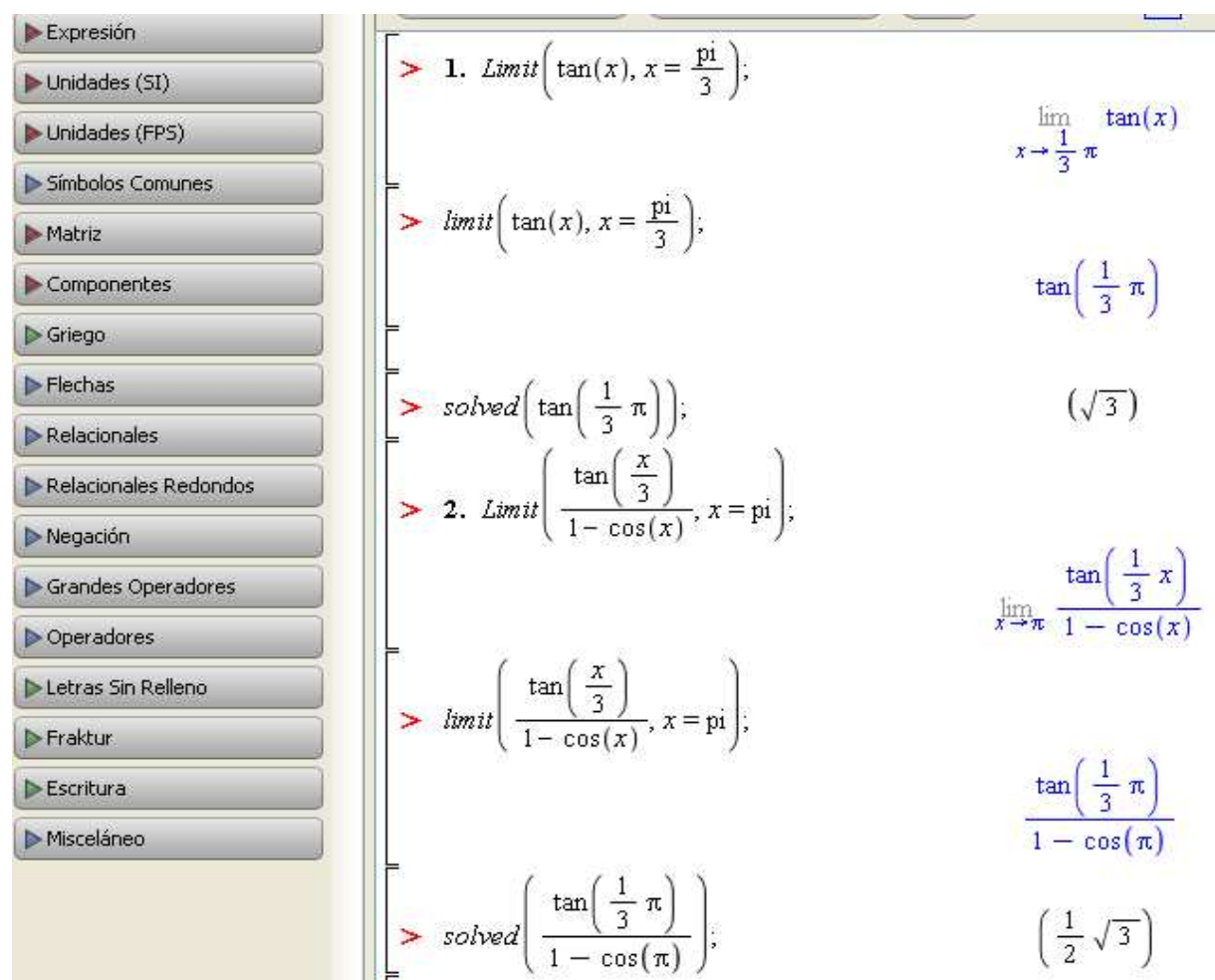
Resolver utilizando Maple:

a.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 5x - 9} \right]$

b.  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} * \left[ \sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2} \right]$

## 3. Límite de funciones trigonométricas.

Para funciones trigonométricas, el proceso es similar, solo que para ver el valor del límite se debe adicionar un paso donde se le pide el valor numérico del límite, utilizando el comando *solved*.



The screenshot shows a software interface with a sidebar on the left containing various tool categories like 'Expresión', 'Unidades (SI)', 'Unidades (FPS)', 'Símbolos Comunes', 'Matriz', 'Componentes', 'Griego', 'Flechas', 'Relacionales', 'Relacionales Redondos', 'Negación', 'Grandes Operadores', 'Operadores', 'Letras Sin Relleno', 'Fraktur', 'Escritura', and 'Misceláneo'. The main workspace displays a sequence of commands and their results:

- Command:  $\text{Limit}\left(\tan(x), x = \frac{\pi}{3}\right);$   
Result:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}\pi} \tan(x)$
- Command:  $\text{limit}\left(\tan(x), x = \frac{\pi}{3}\right);$   
Result:  $\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)$
- Command:  $\text{solved}\left(\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right);$   
Result:  $(\sqrt{3})$
- Command:  $\text{Limit}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{3}\right)}{1 - \cos(x)}, x = \pi\right);$   
Result:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan\left(\frac{1}{3}x\right)}{1 - \cos(x)}$
- Command:  $\text{limit}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{3}\right)}{1 - \cos(x)}, x = \pi\right);$   
Result:  $\frac{\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{1 - \cos(\pi)}$
- Command:  $\text{solved}\left(\frac{\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{1 - \cos(\pi)}\right);$   
Result:  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Hallar los siguientes límites:

a-  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos(x)$       b-  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[ \sin(x) + \frac{\cos(x)}{2} \right]$       c.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[ \frac{\tan(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{4} \right]$

## **UNIDAD TRES**

### **ANÁLISIS DE LAS DERIVADAS Y SUS APLICACIONES**



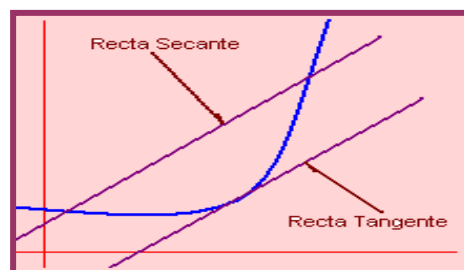
## CAPÍTULO SEIS: FUNDAMENTACIÓN SOBRE LAS DERIVADAS

### Lección 25: Principio Geométrico de la Derivada:

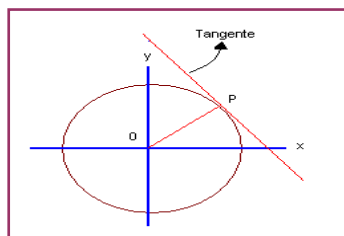
#### PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE

*La recta secante toca la curva en dos puntos*

*La recta tangente toca la curva en un punto*



**Euclides:** En sus estudios geométricos, este sabio de la antigüedad, consideraba la tangente como la recta que tocaba a una curva circular en un punto. El problema era que se limitaba a círculos y no consideraba otro tipo de curvas.

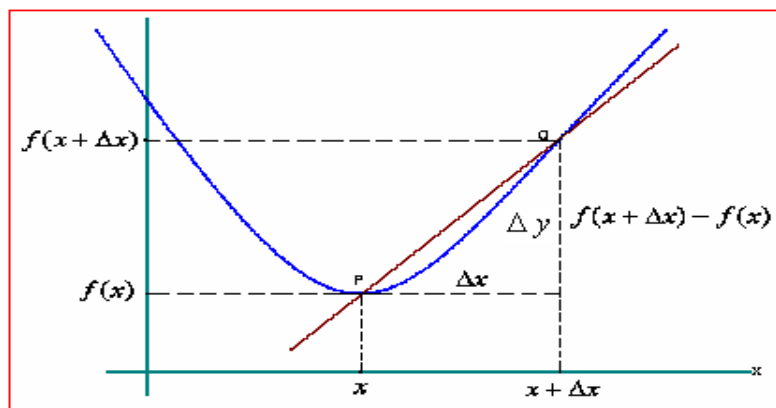


La tangente a un círculo en un punto dado, se construye definiendo un punto P sobre la curva, así se forma el segmento OP, entonces la recta perpendicular al segmento OP, se le llama *recta tangente* a la curva en el punto P.

**Arquímedes:** Otro de los sabios de la antigüedad que se interesó por determinar ¿Cómo se puede obtener la pendiente de una recta tangente de una curva en un punto dado? Los intentos fueron parciales.

En la edad media con la aparición de la *Geometría analítica*, cuyo gestor *Renato Descartes* (1.596 – 1.659) se pudo obtener la tangente de ciertas curvas como la parábola y la elipse, pero dichos métodos fueron muy limitados y vagos como para poder aplicarlos en forma general. La solución dada inicialmente se atribuye a **Leibniz**, quien trabajó en la determinación de la recta tangente de una curva en un punto determinado.

El proceso que vamos a analizar se centra en determinar la pendiente de la recta tangente en un punto dado de cualquier curva que es la gráfica de la función  $y = f(x)$ , la gráfica siguiente nos ilustra dicho análisis.



Como se observa en la gráfica, se presenta una recta secante que pasa por los puntos P y Q. Para hallar la recta tangente, hacemos que el punto P quede fijo y el punto Q se desplace por la curva hasta llegar a P. Cuando P y Q coinciden, se obtiene la recta tangente en el punto P. Para que esto ocurra,  $\Delta x$  se va reduciendo; tendiendo a cero.

Por la definición dependiente:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Según la gráfica:  $y_1 = f(x)$  y  $y_2 = f(x + \Delta x)$   $x_1 = x$  y  $x_2 = x + \Delta x$

Si reemplazamos:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Para obtener la pendiente en el punto P, se debe hacer que  $\Delta x \rightarrow 0$  y aplicar el límite al cociente:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

De esta manera, se resuelve el problema de hallar la pendiente de la recta tangente en un punto de una curva cualquiera.

**Ejemplo 72:**

Hallar la pendiente de la recta tangente de la curva  $f(x) = x^2 + 4$ , en el punto P(1, 5)

### Solución:

Para hallar la pendiente solo se requiere calcular  $m$ , lo cual se puede hacer aplicando la expresión dada anteriormente:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 + 4) - (x^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 4) - x^2 - 4}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 4) - x^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Luego, para hallar la pendiente en el punto establecido, reemplazamos el valor de  $x$  en la ecuación obtenida.

$$m = 2x = 2 * 1 = 2$$

Por consiguiente, la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto  $P(1,5)$  es 2.

### Ejemplo 73:

Hallar la pendiente de la recta tangente de la curva  $f(x) = 1/x$ , en el punto  $P(2, 1/2)$

### Solución:

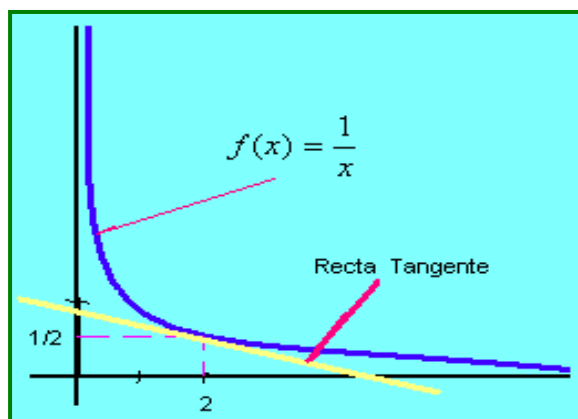
Se calcula  $m$ , al igual que en el caso anterior:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Simplificando:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\text{Luego: } m = -\frac{1}{4}$$



### Ejemplo 74:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x) = x^3$ , para el punto  $P(1,1)$

### Solución:

Primero calculamos la pendiente  $m$ , para luego determinar la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

En el punto  $P(1,1)$ , la pendiente será:  $m = 3(1)^2 = 3$

La ecuación por ser lineal es de la forma:  $y = m x + b$ , como se conoce  $m$ , entonces reemplazamos el punto que se conoce en dicha ecuación para hallar  $b$ , luego:  $(1) = 3(1) + b$ , despejando  $b = -2$ . Entonces la ecuación de la recta tangente de la curva en el punto dado quedará de la forma:

$$y = 3x - 2$$

**NOTA:** Recordemos que la recta tangente se corta con la recta normal, formado un ángulo de  $90^\circ$ , es decir; la recta tangente y la normal son ortogonales.

### Lección 26: Principio Físico de la Derivada



Cortesía: [www.museodelautomovil.com.mx](http://www.museodelautomovil.com.mx)

Desde épocas antiguas, los científicos se han preocupado por analizar la naturaleza y específicamente el movimiento. Por ejemplo Kepler se preocupó por el movimiento de los planetas. Galileo y Newton, se preocuparon por el movimiento de los cuerpos. Todos ellos tuvieron que ver con el concepto de la Velocidad.

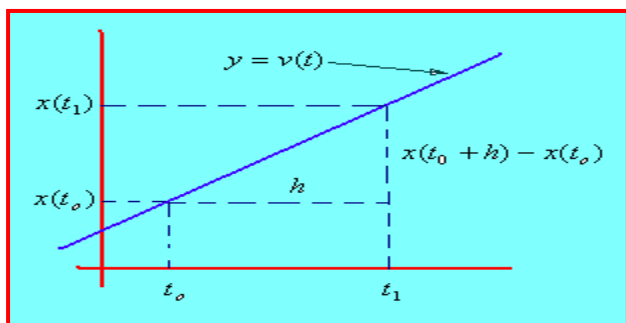
Inicialmente se trabajaba lo que se denomina la velocidad promedio, que se determina conociendo dos puntos de la distancia y el tiempo en recorrer dicha distancia.

$$\bar{v} = \frac{v_o + v_1}{2}$$

o

$$\bar{v} = \frac{x_o + x_1}{\Delta t}$$

La situación se centra en determinar la velocidad en un instante dado; es decir, cuando el cambio en el tiempo sea mínimo, casi cero.



La velocidad instantánea será:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

**x** = Distancia recorrida; **t** = tiempo transcurrido; **h** = Cambio en el tiempo

La gráfica nos ilustra que cuando h (cambio del tiempo) se hace muy pequeña, los dos puntos se acercan de tal manera que coinciden y así se obtiene la velocidad en un punto determinado, lo que se conoce como la velocidad instantánea. El término h es análogo a  $\Delta x$  en el análisis de la pendiente.

Por medio de algunos ejemplos modelos, se puede fortalecer esta temática.

### Ejemplo 75:

Un objeto cae libremente por efecto de la gravedad, la función que gobierna el movimiento está dada por:  $x(t) = 15t^2$  ¿Cuál será la velocidad a los 4 seg. Del inicio de la caída?

### Solución:

Tomando la ecuación de velocidad instantánea, se obtiene la función velocidad y luego, se

reemplaza para el tiempo de 4 seg. Veamos:  $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(t+h)^2 - 16t^2}{h}$

Resolviendo: 
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16t^2 + 32ht + 16h^2 - 16t^2}{h}$$

Simplificando: 
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16t^2 + 32ht + 16h^2 - 16t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{32ht + 16h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (32t + 16h)$$

Evaluando el límite: 
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (32t + 16h) = 32t$$

Por consiguiente la velocidad instantánea tiene como función:  $v(t) = 32t$ .

Reemplazamos en  $t = 4$ , para hallar la velocidad en dicho momento:

$$V(t = 4) = 32(4) = 128 \text{ m/seg.}$$

Esto quiere decir que cuando el objeto va cayendo, la velocidad a los 4 seg. de la caída, su velocidad es de 128 m/seg.

### Ejemplo 76:

Del problema anterior (ejemplo 75), ¿cuanto tardará el objeto en alcanzar una velocidad de 320 m/seg?

### Solución:

Como se conoce la función velocidad, se reemplaza el valor conocido para ésta y se despeja el tiempo, así se puede conocer el tiempo que tarda en adquirir la velocidad dada.

Como  $v(t) = 32t$ . Entonces:  $320 = 32t$ . Despejamos  $t$ , luego:

$$t = 320/32 = 10 \text{ seg.}$$

El objeto adquiere una velocidad de 320 m/seg. a los 10 seg. de iniciar el movimiento.

### Ejemplo 77:

Una partícula se mueve según la función  $x(t) = \sqrt{5t+1}$ . ¿Qué velocidad adquiere la partícula a los 3 seg.?

### Solución:

Por la ecuación de velocidad:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(t+h)+1} - \sqrt{5t+1}}{h}$$

Utilizando racionalización y simplificando:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{5(t+h)+1} - \sqrt{5t+1})(\sqrt{5(t+h)+1} + \sqrt{5t+1})}{h(\sqrt{5(t+h)+1} + \sqrt{5t+1})}$$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5(t+h)+1) - (5t+1)}{h(\sqrt{5(t+h)+1} + \sqrt{5t+1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5t+5h+1-5t-1}{h(\sqrt{5(t+h)+1} + \sqrt{5t+1})}$$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{(\sqrt{5(t+h)+1} + \sqrt{5t+1})} = \frac{5}{\sqrt{5t+1} + \sqrt{5t+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5t+1}}$$

$$v(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t+1}} \Rightarrow V(t=3) = \frac{5}{2\sqrt{5(3)+1}} = \frac{5}{8}$$

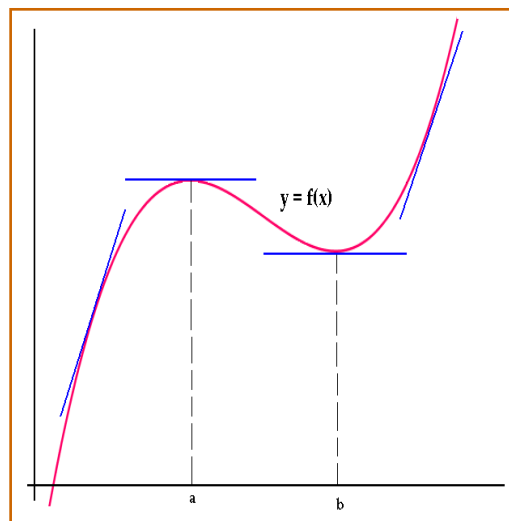
Por consiguiente: La velocidad de la partícula a los 3 seg. es de 5/8 m/seg.

## Lección 27: Incrementos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = D_x y$$

La derivada surge inicialmente por una necesidad de la Geometría: *Determinar la tangente de una curva en un punto*. El Matemático francés Pierre de Fermat en el siglo XVII, intento la determinación de los máximos y mínimos de algunas funciones.

El principio de Fermat era que cada punto de la curva  $y = f(x)$ , presentaría una dirección representada por la tangente en dicho punto. El prominente matemático observó que cuando el punto tenía tangente horizontal, se presentaba un máximo o mínimo. Así la situación se centraba en hallar tangentes horizontales. Luego Fermat fue el primero en dar las ideas primitivas sobre derivada.



La historia afirma que Newton y Leibniz fueron los que dieron importancia al tema de las derivadas. *Newton* en sus estudios sobre movimiento (segundo parte del siglo XVII) observó su utilidad de las derivadas en la solución de problemas de velocidades. *Leibniz* con problemas de geometría, sentó las bases formales del cálculo infinitesimal, dando una serie de reglas sobre el manejo de cantidades infinitesimal, derivada de segundo orden y orden superior, entre sus abundantes aportes a la matemática.

La importancia del concepto de derivada pronto fue identificada, ya que es el camino matemático para analizar fenómenos donde hay variación.

**-) INCREMENTO:** Para conceptualizar la derivada, analicemos inicialmente el concepto de incrementos.

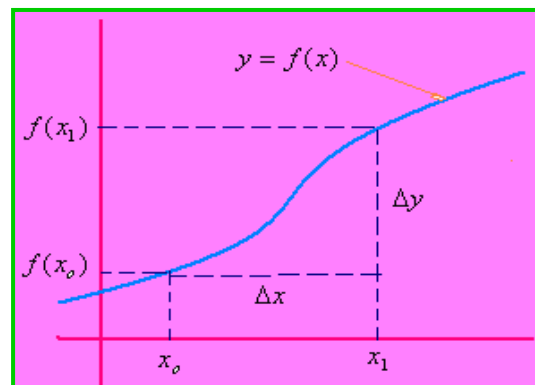
En la gráfica se ilustra el *incremento en x* y el *incremento en y*, para una función  $y = f(x)$ . Luego podemos definir el incremento relativo. Todo esto basado en la distancia euclidia.

**Incremento en x:**  $\Delta x = x_1 - x_0$

Se puede transformar así:  $x_1 = x_0 + \Delta x$

**Incremento en y:**  $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$

Transformado:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



### - ) INCREMENTO RELATIVO:

El incremento relativo se obtiene como el cociente de los incrementos tanto en y como en x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

### Lección 28: Definición Formal de Derivada:

La derivada de una función  $y = f(x)$ , es el incremento relativo de dicha función, cuando el incremento de la variable se hace muy pequeño, casi cero. La siguiente expresión resume simbólicamente el concepto de derivada.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$



La idea anterior se soporta con la siguiente definición formal de derivada.

**DEFINICIÓN:**

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo abierto  $(a, b)$ , sea  $x$  un punto interior contenido en dicho intervalo. La derivada de  $f(x)$  en  $x$  esta dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Si el limite existe en  $x$ , entonces se dice que la función  $f(x)$  es diferenciable o derivable en  $x$ , esto significa que para obtener la derivada en un punto o un intervalo; el límite debe existir en dicho punto o intervalo.

Para representar la derivada existen varias formas, propuestas por deferentes matemáticos:

- **Lagrange** a finales del siglo XVIII propuso la notación:  $f'(x)$  que simboliza la primera derivada, para la segunda y superiores será  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  y así sucesivamente, lo cual aún se conserva en el mundo matemático. En esta se indica que  $f'(x)$  es una nueva función, obtenida a partir de la derivación de la función  $f(x)$ .
- **Arbogast** en 1.800 introdujo la notación  $D_x(y)$  en donde  $D$  significa el operador Derivación. Para la segunda derivada se coloca como exponente dos al operador  $D^2_x(y)$  y así sucesivamente.
- **Leibniz** propone una notación que es la más utilizada en la actualidad,  $\frac{dy}{dx}$  debido a la justificación que tiene, para Leibniz la primera derivada es de la forma  $\frac{dy}{dx}$  donde se indica la derivada de  $y$  respecto a la variable  $x$ . La notación de cociente fortalece el fundamento teórico sobre lo que es la derivada. La segunda derivada se representa  $d^2(y)/dx^2$  y así sucesivamente.

**Principios de Diferenciabilidad:**

**DEFINICIÓN:**

*La función  $f(x)$  es diferenciable en  $c$  (donde  $c$  pertenece al intervalo  $(a, b)$  si  $f'(c)$  existe; además,  $y = f(x)$  es diferenciable en el intervalo  $(a, b)$ , siempre y cuando  $f(x)$  sea diferenciable en todos los puntos del intervalo dado.*

Existe una relación entre la derivación y la continuidad, lo que se puede formalizar con el siguiente teorema.

**TEOREMA:**

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo abierto  $I$  y, sea  $a$  un punto interior contenido en dicho intervalo, si  $f(x)$  es derivable en  $a$ , entonces  $f(x)$  es continua en el punto  $a$ .

**Demostración:**

Para que  $f(x)$  sea continua en el punto  $a$ , solo se debe demostrar:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Entonces: 
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$$

Por la propiedad de los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] * \lim_{x \rightarrow a} [(x - a)]$$

Por definición:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] * \lim_{x \rightarrow a} [(x - a)] = f'(a) * 0 = 0$$

Como vemos el límite existe, luego  $f(x)$  es continua en  $x = a$ .

El recíproco de la anterior definición NO siempre se cumple; es decir, si una función es continua NO necesariamente es derivable.

**Ejemplo 78:**

Sea la función  $f(x) = 2x^2 - 3x$ . Hallar la derivada.

**Solución:**

Por la definición de derivada, aplicamos a ecuación correspondiente en la función dada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - [2x^2 - 3x]}{\Delta x} \right]$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \right]$$

Finalmente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x(4x + 2(\Delta x) - 3)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2(\Delta x) - 3)$$

Como el límite existe, entonces:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2(\Delta x) - 3) = 4x - 3$$

Así, la derivada de la función dada es:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x - 3$$

Vemos que la derivada de una función esta sujeta a que el límite de la función exista, pero dicho límite a su vez, esta relacionado con la continuidad de la función, como se analiza en las anteriores definiciones.

### Ejemplo 79:

Hallar la derivada de la función:

$$f(x) = 4x^3 - 2$$

### Solución:

Aplicando la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{4(x + \Delta x)^3 - 2 - [4x^3 - 2]}{\Delta x} \right]$$

Desarrollando el producto notable y simplificando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[4(x+\Delta x)^3 - 2] - [4x^3 - 2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 2 - 4x^3 + 2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(12x^2 + 12x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(12x^2 + 12x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12x^2 + 12x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2)$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12x^2 + 12x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2) = 12x^2$$

Por consiguiente:

La derivada de la función  $f(x) = 4x^3 - 2$  es  $f'(x) = 12x^2$

**Ejemplo 80:**

Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \frac{1}{x-5}$

**Solución:**

Aplicando la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{x+\Delta x-5} \right] - \left[ \frac{1}{x-5} \right]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{x+\Delta x-5} \right] - \left[ \frac{1}{x-5} \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{(x-5) - (x+\Delta x-5)}{(x+\Delta x-5)(x-5)} \right]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{(x-5) - (x+\Delta x-5)}{(x+\Delta x-5)(x-5)} \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-5)(x-5)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-5)(x-5)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-5)(x-5)}$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-5)(x-5)} = -\frac{1}{(x-5)^2}$$

$$\text{Luego: } f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2}$$

**Ejemplo 81:**

Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \sqrt{x}$  Para  $x > 0$

**Solución:**

Aplicando la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \right]$$

Aplicamos la conjugada para eliminar la indeterminación y simplificando.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\Delta x)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \right]$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \right] = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## Lección 29: Derivadas Básicas:

### - ) LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE

$$f'(k) = 0$$

El fundamento de la derivación es la ocurrencia de un cambio, cuando se tiene una constante no sucede un cambio, luego la derivada en este caso es cero.

#### TEOREMA:

Sea  $f(x) = k$ , siendo  $k$  una constante, se dice que la derivada esta definida de la siguiente manera:

$$f'(x) = 0$$

#### Demostración:

Por definición, aplicamos el principio del límite del incremento relativo de la función y así se busca la derivada de la función propuesta.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

#### Ejemplo No 82:

Sea la función  $f(x) = 4$ . Hallar  $f'(x)$ .

#### Solución:

Por la definición:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Es obvio a que la derivada es cero, ya que la función es una constante.

## - ) LA DERIVADA DE UNA VARIABLE

$$f'(x) = 1$$

La derivada de la variable, también se le conoce como la derivada de la función identidad, ya que la función identidad es donde la variable es la misma función.

### TEOREMA:

Sea  $f(x) = x$ , siendo  $x$  una variable, la derivada de  $f(x)$  esta definida por:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 1$$

### Demostración:

Siguiendo con la definición:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Así queda demostrada la derivada de la función identidad.

### Ejemplo No 83:

Sea la función  $f(v) = v$ , siendo  $v$  la variable, Hallar  $f'(v)$ .

### Solución:

Utilizando la definición:

$$f'(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{v + \Delta v - v}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta v} = 1$$

Por consiguiente:  $f'(v) = 1$

## - ) DERIVADA DE LA POTENCIA

$$D_x (f(x))^n = n f(x)^{n-1}$$

Cuando se tiene una función de la forma  $f(x) = x^n$ , para derivar se hace referencia al desarrollo de la expansión binomial, por medio de lo cual se puede resolver un producto notable cuando el exponente es un entero positivo.

**TEOREMA:**

Sea  $f(x) = x^n$  función diferenciable, con  $n$  un entero positivo, entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

**Demostración:**

Siguiendo la definición:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  luego  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

Desarrollando el producto notable por el binomio de Newton, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right] - x^n}{\Delta x}$$

Simplificando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right]}{\Delta x}$$

Se factoriza  $\Delta x$ , se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x}$$

Simplificando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^{n-1})$$



Desde el segundo término en adelante, aparece el  $\Delta x$ , luego aplicando límite, se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx^{n-1}) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x) \right) + \dots + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx(\Delta x)^n) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^{n-1})$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = nx^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 = nx^{n-1}$$

Por consiguiente:  $f'(x) = nx^{n-1}$  Así queda demostrado el teorema.

#### Ejemplo No 84:

Sea la función:  $f(x) = x^3$ , Hallar  $f'(x)$

**Solución:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

Desarrollando el producto notable:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \right]$$

Simplificando y operando

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x [3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x [3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]$$

Evaluando el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

Si se desarrolla utilizando el teorema:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$$

**Ejemplo No 85:**

Sea la función:  $f(x) = 5x^2$ , Hallar  $f'(x)$

**Solución:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{5(x + \Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 5x^2}{\Delta x} \right]$$

Operando y simplificando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 5x^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [10x + 5\Delta x] = 10x$$

Utilizando el teorema:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 5 * 2x^{2-1} = 10x$

**- ) DERIVADA CONSTANTE POR FUNCIÓN**

$$D_x[kf(x)] = kD_x f(x)$$

Cuando una función esta multiplicada por una constante, la derivada esta definida según el siguiente teorema:

**TEOREMA:**

Sea  $f(x)$  una función diferenciable y sea  $k$  una constante diferente de cero, luego

$$\frac{d}{dx} kf(x) = k \frac{df(x)}{dx}$$

### Demostración:

Expresemos el producto de la función por la variable así:  $F(x) = k \cdot f(x)$  Luego:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{k(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \right]$$

Por la propiedad de los límites:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{k(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\text{Finalmente: } F'(x) = k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k \frac{df(x)}{dx}$$

### Ejemplo No 86:

Sea  $f(x) = 7x$ , Hallar la derivada de  $f(x)$

### Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7(x + \Delta x) - 7x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7[x + \Delta x - x]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7[x + \Delta x - x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7 \frac{[x + \Delta x - x]}{\Delta x} = 7 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 7 * 1 = 7$$

Por consiguiente:  $f'(x) = 7$

Utilizando el teorema:

$$f'(x) = 7x^{1-1} = 7x^0 = 7$$

### Ejemplo No 87:

Sea  $f(x) = 12x^4$ , Hallar la derivada de  $f(x)$

### Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{12(x + \Delta x)^4 - 12x^4}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{12(x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4) - 12x^4}{\Delta x} \right]$$

Aplicando propiedades de límites y simplificando:

$$f'(x) = 12 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(x^4 + 4x^3 \Delta x + 6x^2 (\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4) - x^4}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = 12 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(4x^3 \Delta x + 6x^2 (\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4)}{\Delta x}$$

Factorizando  $\Delta x$  y simplificando obtenemos:

$$f'(x) = 12 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (4x^3 + 6x^2 (\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 12 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4x^3 + 6x^2 (\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3]$$

Evaluando el límite se obtiene:  $f'(x) = 48x^3 + 0 + 0 + 0$

Finalmente:  $f'(x) = 48x^3$

Utilizando el teorema:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 12 * 4x^{4-1} = 48x^3$$

### Generalizando:

Cuando se tiene una función de la forma:

$$f(x) = kx^n$$

Para  $k$  y  $n$  valores diferentes de cero. La derivada es de la forma:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = n * kx^{n-1}$$

**Ejemplo No 88:**

Sea  $f(x) = 15x^8 + 10$ , Hallar la derivada de  $f(x)$

**Solución:**

Aplicando la generalización:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 8 * 15x^{8-1} + 0 = 120x^7$$

*NOTA: Recordemos que la derivada de una constante es cero.*

## EJERCICIOS

1. Cual será la pendiente de la recta tangente en el punto  $P(1, -1)$  para la curva  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$
2. Para la curva  $f(x) = \sqrt{x}$  Hallar la ecuación de la recta tangente que para por el punto  $P(4, 2)$
3. Hallar la ecuación de la recta tangente para el punto  $P(\frac{\pi}{2}, 1)$  de la curva:
4. Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición en  $t$  tiempo esta dada por la ecuación de posición:  $x(t) = 2t^2 + 3$  Donde  $t$  esta en segundos y  $x$  en metros.
  - a-) Cual será la velocidad a los 3 segundos de comenzar el movimiento.
  - b-) En que tiempo la velocidad será de 24 m/seg.
5. El movimiento de un objeto esta gobernado por la ecuación de distancia dad por:  $x(t) = \sqrt{3t + 2}$ 
  - a-) Encontrar la ecuación de velocidad para cualquier instante.
  - b-) Cual será la velocidad inicial del objeto.
6. Un cultivo de bacterias crece de modo que la masa esta dada por  $m = \frac{1}{2}t^2 + 2$  Donde  $m$  se da en gramos y  $t$  en tiempo.
  - a-) Cual es la tasa de crecimiento inicial.
  - b-) Cual es la tasa de crecimiento a los 3 segundos.

En los siguientes ejercicios hallar la derivada de la función propuesta, utilizando el principio de límite del incremento o dicho de otra forma utilizando la definición.

7.  $f(x) = \frac{1}{x}$

8.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

9.  $f(x) = \text{sen}(x)$

En los siguientes ejercicios demuestre que la función  $f(x)$  dada a continuación NO es derivable en el punto  $x_0$  indicado.

10.  $f(x) = |x - 4|$  En  $x_0 = 4$

11.  $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$  Para  $x_0 = 2$

En los siguientes ejercicios hallar la derivada de la función propuesta, utilizando el principio de límite del incremento o dicho de otra forma utilizando la definición.

12.  $f(x) = 6x^7 + 5$

13.  $g(x) = \frac{42}{x^3} + 10$

14.  $h(x) = \frac{4}{7\sqrt[3]{x^5}}$

15.  $s(t) = \frac{6t^4 - 15}{3t^2}$

## CAPÍTULO SIETE: DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAÍCAS

### Lección 30: Derivada de suma y resta de funciones:

#### - ) DERIVADA DE LA SUMA DE FUNCIONES

$$D_x(f + g) = D_x(f) + D_x(g)$$

Como se tiene una suma de varias funciones y se desea obtener la derivada de dicha suma, se procede por la definición formal de derivada.

#### TEOREMA:

Sea  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  funciones diferenciables respecto a  $x$ . Dada la suma:  $p(x) = f(x) + g(x) + h(x)$ , entonces la derivada de la suma esta definida por:

$$p'(x) = \frac{d}{dx}(f + g + h) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

Dicho de manera más explícita, la derivada de una suma de funciones, es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

#### Demostración:

Siguiendo con la definición:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x) + h(x)]}{\Delta x} \right)$$

Reorganizando la expresión anterior:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x) + h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right)$$



Por propiedad de los límites:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right)$$

Luego:  $f'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$

## -) DERIVADA DE LA RESTA DE FUNCIONES

$$D_x(f - g) = D_x(f) - D_x(g)$$

Para la resta de funciones, se trabaja con el mismo principio utilizado en la suma.

### TEOREMA:

Sea  $f(x)$ ,  $g(x)$  funciones diferenciables respecto a  $x$ . Dada la resta:

$R(x) = f(x) - g(x)$ , entonces la derivada esta definida por:

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(f - g) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Dicho de manera más explícita, la derivada de una resta de funciones, es igual a la diferencia de la derivada de las funciones.

### Demostración:

Siguiendo con la definición:

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} \right)$$

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x)] - [f(x) - g(x)]}{\Delta x} \right)$$

Por la propiedad de los límites:

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

Luego:  $R'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$

### Ejemplo No 89:

Dada la función:  $f(x) = 3x^2 + 5x$ . Hallar la derivada de  $f(x)$

### Solución:

Utilizando la definición de derivada:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$

Aplicándola a la función dada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x)] - [3x^2 + 5x]}{\Delta x} \right)$$

Desarrollando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 5(x + \Delta x)] - [3x^2 + 5x]}{\Delta x} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x] - [3x^2 + 5x]}{\Delta x} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 3x^2 - 5x}{\Delta x} \right)$$

Simplificando y factorizando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x(6x + 3(\Delta x) + 5)}{\Delta x} \right)$$

Aplicando propiedad de límites:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3(\Delta x) + 5) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3(\Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5$$

Evaluando los límites:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3(\Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5 = 6x + 0 + 5$$

Finalmente:  $f'(x) = 6x + 5$

**Ejemplo 90:**

Dada la función:  $f(x) = 4x^3 - 10x^2$ . Hallar la derivada de  $f(x)$

**Solución:**

Utilizando la regla de resta de funciones:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (4x^3 - 10x^2) = \frac{d}{dx} (4x^3) - \frac{d}{dx} (10x^2)$$

Por el teorema de la función potencia:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (4x^3) - \frac{d}{dx} (10x^2) = 4 * 3x^{3-1} - 10 * 2x^{2-1}$$

Operando, se obtiene:

$$f'(x) = 12x^2 - 20x$$

**NOTA:** Se observa que para obtener la derivada de una función, se puede utilizar la definición de derivada; es decir, por medio del límite del incremento relativo. Pero si se utiliza los teoremas correspondientes, el proceso es más rápido.

### Lección 31: Derivada de Producto de Funciones

$$D_x(f * g) = f * D_x(g) + D_x(f) * g$$

Para obtener la derivada de un producto, el procedimiento y resultado es muy particular, comparado con el de la suma y resta.

### TEOREMA:

Sea  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones diferenciales en  $x$ , dado:  $p(x) = f(x) * g(x)$ , entonces:

$$p'(x) = f(x) * g'(x) + f'(x) * g(x) = f(x) * \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} * g(x)$$

### Demostración:

Para demostrar la derivada de un producto de dos funciones, se parte de la definición de derivada:

Sea  $p(x) = f(x) * g(x)$ , entonces:

$$p'(x) = \frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x) - f(x) * g(x)}{\Delta x} \right)$$

A la anterior expresión le sumamos y restamos  $f(x + \Delta x) * g(x)$

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x) - f(x) * g(x) + f(x + \Delta x) * g(x) - f(x + \Delta x) * g(x)}{\Delta x} \right)$$

Reorganizamos la expresión:

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) * g(x) + f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x)}{\Delta x} \right)$$

El numerador lo agrupamos en dos expresiones:

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) * g(x)] + [f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x)]}{\Delta x} \right)$$

Ahora, factorizamos  $f(x + \Delta x)$  en el primer sumando y  $g(x)$  en el segundo sumando:

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right)$$

Aplicamos la propiedad de la suma de límites:

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right)$$

En cada sumando tenemos el límite de un producto, luego por la propiedad de este tipo de límite, los reorganizamos:

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x)) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x)) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right)$$

Evaluando los límites:

$$\frac{dp}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Así queda demostrada la derivada de la suma de dos funciones.

### Ejemplo 91:

Se la función:  $p(x) = (3x^6 - 5x)(25x - 4)$ . Hallar la derivada de la función  $p(x)$ .

### Solución:

Se puede observar que es un producto de dos funciones, luego aplicamos la regla para producto.

$$p'(x) = (3x^6 - 5x)(25x - 4)' + (25x - 4)(3x^6 - 5x)'$$

$$p'(x) = (3x^6 - 5x)(25) + (25x - 4)(18x^5 - 5)$$

$$p'(x) = 75x^6 - 125x + 450x^6 - 72x^5 - 125x + 20$$

Simplificando:

$$p'(x) = 525x^6 - 72x^5 - 250x + 20$$

### Ejemplo 92:

Se la función:  $q(x) = (4x^5 + 10x^3)(\sin(x))$  Hallar la derivada de  $q(x)$ .

### Solución:

Se puede observar que es un producto de dos funciones, luego se aplica regla para producto. En el ejercicio No 3 de la sección definición formal de derivada. Allí se demuestra que si  $f(x) = \sin(x)$  entonces  $f'(x) = \cos(x)$ .

$$q'(x) = (4x^5 + 10x^3)\cos(x) + (20x^4 + 30x^2)\sin(x)$$

Se puede hacer la distribución de  $\cos(x)$  en el primer sumando y  $\sin(x)$  en el segundo sumando.

$$q'(x) = 4x^5 \cos(x) + 10x^3 \cos(x) + (20x^4 \sin(x) + 30x^2 \sin(x))$$

### Lección 32: Derivada de Cociente de Funciones

$$D_x(f/g) = \frac{g \cdot D_x(g) - f \cdot D_x(g)}{g^2(x)}$$

Para obtener la derivada de un cociente, el procedimiento tiene los mismos lineamientos que el caso del producto.

#### TEOREMA:

Sea  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones diferenciales en  $x$ , y  $g(x) \neq 0$ , dado:  $c(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  Entonces:

$$c'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

### Demostración 1:

Para demostrar la derivada de un cociente de funciones, se parte de la definición de derivada:

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \right)$$

Operando el numerador:

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) * g(x)}}{\Delta x} \right)$$

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x + \Delta x)}{\Delta x} * \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)} \right)$$

Sumamos y restamos la expresión:  $f(x) * g(x)$

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) * g(x) - f(x) * g(x) + f(x) * g(x) - f(x) * g(x + \Delta x)}{\Delta x} * \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)} \right)$$

Factorizamos  $g(x)$  en el primer sumando y  $f(x)$  en el segundo sumando:

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x) - g(x + \Delta x)]}{\Delta x} * \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)} \right)$$

Separamos sumandos:

$$c'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \frac{f(x)[g(x) - g(x + \Delta x)]}{\Delta x} \right] * \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)}$$

Por propiedad de límites de suma y producto:

$$c'(x) = \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x) - g(x + \Delta x)]}{\Delta x} \right] * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)}$$

Como el límite es con respecto a  $\Delta x$ , reorganizamos:

$$c'(x) = \left[ g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x) - g(x + \Delta x)]}{\Delta x} \right] * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x) * g(x)}$$

Evaluando los límites:  $c'(x) = [g(x)f'(x) + f(x)g'(x)] * \frac{1}{g(x) * g(x)}$

Finalmente: 
$$c'(x) = \frac{g(x)f'(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

### Demostración 2:

Otra forma de demostrar la derivada de un cociente de funciones es a partir de la derivada de un producto, así no se utiliza el límite del incremento relativo.

Dado que:  $c(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  Se puede escribir como:

$$f(x) = c(x) * g(x)$$

Se aplica la derivada para producto de funciones:

$$f'(x) = c(x) * g'(x) + c'(x) * g(x)$$

$$c'(x) * g(x) = f'(x) - c(x) * g'(x)$$

Se resuelve la ecuación para  $c'(x)$ :

$$c'(x) = \frac{f'(x) - c(x) * g'(x)}{g(x)}$$

Pero se sabe que  $c(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , reemplazamos en la ecuación anterior:

$$c'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} * g'(x)}{g(x)}$$

Operando en el numerador y reorganizando:

$$c'(x) = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$$

Así queda demostrada la derivada de un cociente de funciones.



### Ejemplo 93:

Sea la función:  $c(x) = \frac{3x^5 - 4x^3 + 8}{9x^4 - x^2}$  Hallar la derivada de  $c(x)$ .

### Solución:

Se puede observar que se trata de un cociente de dos funciones, entonces aplicando la regla para cociente:

$$c'(x) = \frac{(9x^4 - x^2)(15x^4 - 12x^2) - (3x^5 - 4x^3 + 8)(36x^3 - 2x)}{(9x^4 - x^2)^2}$$

Multiplicamos los términos indicados:

$$c'(x) = \frac{(135x^8 - 108x^6 - 15x^6 + 12x^4) - (108x^8 - 6x^6 - 144x^6 + 8x^4 + 288x^3 - 16x)}{(9x^4 - x^2)^2}$$

Eliminando paréntesis:

$$c'(x) = \frac{135x^8 - 108x^6 - 15x^6 + 12x^4 - 108x^8 + 6x^6 + 144x^6 - 8x^4 - 288x^3 + 16x}{(9x^4 - x^2)^2}$$

Operando términos semejantes:

$$c'(x) = \frac{27x^8 + 27x^6 - 4x^4 - 288x^3 + 16x}{(9x^4 - x^2)^2}$$

### Ejemplo 94:

Se la función:  $c(x) = \frac{\tan(x)}{x^4 - 10}$  Hallar  $c'(x)$ .

### Solución:

Se puede observar que se trata de un cociente de dos funciones, entonces se aplica la regla para cociente. Posteriormente se demuestra que la derivada de  $\tan(x)$  es  $\sec^2(x)$ .

$$\frac{dc}{dx} = c'(x) = \frac{(x^4 - 10)\sec^2(x) - (4x^3)\tan(x)}{(x^4 - 10)^2}$$

Reorganizando:

$$\frac{dc}{dx} = c'(x) = \frac{(x^4 - 10)\sec^2(x)}{(x^4 - 10)^2} - \frac{(4x^3)\tan(x)}{(x^4 - 10)^2} = \frac{\sec^2(x)}{x^4 - 10} - \frac{(4x^3)\tan(x)}{(x^4 - 10)^2}$$

Finalmente:  $\frac{dc}{dx} = c'(x) = \frac{\sec^2(x)}{x^4 - 10} - \frac{(4x^3)\tan(x)}{(x^4 - 10)^2}$

### NOTA:

Para derivar producto y cociente de funciones, se tienen reglas bien definidas, no es necesario memorizarlas, ya que con la práctica se adquiere la destreza de utilizarlas hasta que se interioricen adecuadamente. Solo la práctica permite que los procesos se comprendan y así aprender a derivar, una de las principales competencias del curso de cálculo.

### Lección 33: Derivada de la Función Compuesta

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)][g'(x)]$$

Con lo estudiado en los apartes anteriores, se puede resolver derivadas de funciones muy comunes, como suma, producto, otros. Pero existen muchos casos donde se presentan *funciones dentro de funciones*, es decir como una composición de funciones.

Casos como:

$$f(x) = \sqrt{3x^4 - 5x^3 + 2x} \quad \text{y} \quad h(x) = (5x - 7x^5)^{50}$$

No se pueden resolver fácilmente con las técnicas estudiadas hasta ahora, luego se requiere buscar una alternativa, que en cálculo se llama “Regla de la Cadena”. El fundamento de esta regla es la composición de funciones.

- En el primer caso:

$$f(u) = \sqrt{u} \quad \text{Para} \quad u = 3x^4 - 5x^3 + 2x$$

Así,  $f$  es función de  $u$  a su vez  $u$  es función de  $x$ .

- En el segundo caso:

$$g(v) = v^{50} \quad \text{Para} \quad v = 5x - 7x^5$$

En este caso,  $g$  es función de  $v$  y ésta a su vez  $v$  es función de  $x$ .

### TEOREMA:

Sea  $y = f(u)$  y sea  $u = g(x)$  Si  $g$  es diferenciable en  $x$  y  $f$  diferenciable en  $u$ , entonces  $f \circ g(x)$  es diferenciable en  $x$ . Entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)$$

Haremos la demostración del teorema por dos caminos.

### Demostración 1:

Sea  $D(x) = f(g(x))$  Asumiendo que  $g'(x) \neq 0$  Entonces:

$$D'(x) = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f[g(x+\Delta x)] - f[g(x)]}{\Delta x} \right]$$

Multiplicamos y dividimos la expresión anterior por  $\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f[g(x+\Delta x)] - f[g(x)]}{\Delta x} \right] * \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f[g(x+\Delta x)] - f[g(x)]}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right] * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

Por definición de derivada.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f[g(x+\Delta x)] - f[g(x)]}{g(x+\Delta x) - g(x)} \right] * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = f'[g(x)] * g'(x)$$

### Demostración 2:

La demostración de este teorema, requiere partir de algunos supuestos:

Sea  $h(x) = f(g(x))$ . Vamos a demostrar el teorema para  $x = c$

Partimos de suponer que  $g(x) \neq g(c)$ , para todos los  $x$  diferentes de  $c$ .

Como  $g(x)$  es diferenciable en  $x$ , entonces  $g(x) \rightarrow g(c)$  cuando  $x \rightarrow c$

Con estos argumentos, podemos comenzar:

$$h'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c}$$

Multiplicamos y dividimos la expresión por  $g(x) - g(c)$ , luego:

$$h'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} * \frac{g(x) - g(c)}{g(x) - g(c)}$$

Reorganizando:

$$h'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} * \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right]$$

Por propiedades de los límites:

$$h'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right] \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right]$$

Como se puede observar, el producto corresponde a la derivada de dos funciones,  $f(g(c))$  y  $g(c)$ , por consiguiente:  $h'(c) = f'(g(c)) * g'(c)$

Como la demostración se hizo para  $x = c$ , se puede generalizar:

$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

### Notación de Leibniz:

El gran matemático Gottfried Leibniz en su desarrollo del cálculo propone una nomenclatura para expresar la regla de la cadena. Sea  $y = f(u)$ , donde  $u$  es la variable y sea  $u = g(x)$ , entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

### Ejemplo 95:

Dada la función:  $f(x) = (3x^4 - 5x)^{20}$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

La función  $f(x)$  se puede descomponer en dos funciones.

$$u(x) = 3x^4 - 5x \quad y \quad f(u) = u^{20} \quad \text{Ahora expresando la ultima función así: } y = u^{20}$$

Escribiendo la derivada de las dos formas analizadas:

$$f'(x) = f'(u) * u'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Lo que se debe hacer es derivar  $f$  respecto a  $u$  y a su vez derivar  $u$  respecto a  $x$ , para multiplicar las derivadas obtenidas.

$$f'(u) = 20u^{19} \quad y \quad u'(x) = 12x^3 - 5$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = 20(3x^4 - 5x)^{19} * (12x^3 - 5) = 20(12x^3 - 5)(3x^4 - 5x)^{19}$$

### Ejemplo 96:

Dada la función:  $f(x) = \text{sen}(8x^5 - 4x + 9)$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

$$\text{Se debe calcular: } f'(x) = f'(u) * u'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Descomponemos la función dada en dos funciones:

$$f(u) = \text{sen}(u) \quad y \quad u(x) = 8x^5 - 4x + 9$$

$$\text{Desarrollando las derivadas: } f'(u) = \frac{df}{du} = \cos(u)$$

(En el estudio de las funciones trigonométricas se demostrarán las derivadas de  $\text{sen}(x)$ )

$$\text{Ahora: } u'(x) = \frac{du}{dx} = 40x^4 - 4. \quad \text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = (40x^4 - 4)\cos(8x^5 - 4x + 9)$$

### Ejemplo 97:

Dada la función:  $f(x) = \sqrt{6x^4 - 10x + 9}$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Se debe calcular:  $f'(x) = f'(u) * u'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

Como:  $f(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}$  y  $u(x) = 6x^4 - 10x + 9$  Entonces:

$$f'(u) = \frac{df}{du} = \frac{1}{2} u^{1/2-1} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2u^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 - 10x + 9}}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 24x^3 - 10$$

$$\text{Finalmente: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 - 10x + 9}} (24x^3 - 10) = \frac{(24x^3 - 10)}{2\sqrt{6x^4 - 10x + 9}}$$

$$\text{Simplificando: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{(12x^3 - 5)}{\sqrt{6x^4 - 10x + 9}}$$

### NOTA:

La clave de usar la **regla de la cadena** para derivar funciones compuestas, es definir las funciones externa e interna.

### Lección 34: Derivada de la Función Implícita

$$f(x, y) = k$$

Toda función se puede expresar de dos formas:

- **Explícitamente**  $y = f(x)$ ; es decir, la variable independiente se puede separar de la variable dependiente.

- **Implícitamente**  $f(x, y) = k$ , en este caso la variable independiente NO se puede separa fácilmente o en caso extremos no se puede separa de la variable dependiente.

Las funciones que se presentan a continuación están dadas implícitamente:

$$- x^2y^3 + 4xy - 6x = 2 \quad - y^2 + 7xy - 4y = 0$$

Para hallar la derivada de este tipo de funciones, se utiliza la **REGLA DE LA CADENA**, respetando desde luego los principios de la diferenciación.

### La Derivación Implícita:

Para resolver derivadas de funciones implícitas, se propone a continuación los pasos que se consideran pertinentes realizar:

1. Definir en la ecuación la función y la variable, para saber respecto a que variable se debe derivar.
2. Derivar los dos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta todos los principios de la derivación.
3. Agrupar los términos que contengan el diferencial  $dy/dx$ , para obtener el factor común de dicho diferencial.
4. Despejar de la expresión obtenida  $dy/dx$ .
5. Finalmente se obtiene la derivada  $dy/dx$

La forma de afianzar este principio es con algunos ejemplos:

#### Ejemplo 98:

Dada la expresión:  $x^2y^3 + 4xy - 6x = 2$  Hallar la derivada, para  $x$  la variable.

#### Solución:

Como  $y = f(x)$ , entonces se deriva respecto a  $x$  los dos términos de la ecuación. Vemos que el primero y segundo miembro son productos, luego se deriva como producto, el tercero es una constante por variable y el otro término de la ecuación una constante.

Para  $x^2y^3$ : La derivada es  $x^2 * 3y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right) + 2x * y^3$

Para  $4xy$ : La derivada es  $4x * \left( \frac{dy}{dx} \right) + 4y$

Para  $6x$  La derivada es  $6$

Para  $2$  La derivada es  $0$

Agrupando:

$$x^2 * 3y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right) + 2xy^3 - \left( 4x * \left( \frac{dy}{dx} \right) + 4y \right) - 6 = 0$$

Agrupamos los términos que contienen  $dy/dx$ :

$$3x^2 y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right) + 2xy^3 - 4x \left( \frac{dy}{dx} \right) - 4y - 6 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x^2 y^2 - 4x) = 6 - 2xy^3$$

Finalmente despejamos  $\frac{dy}{dx} = \frac{6 - 2xy^3}{3x^2 y^2 - 4x}$

### Ejemplo 99:

Dada la expresión:  $y^2 + 7xy - 4y = 10$  Hallar la derivada, donde  $y = f(x)$

### Solución:

Se sabe que  $y = f(x)$

Para  $y^2$  La derivada es  $2y * \left( \frac{dy}{dx} \right)$

Para  $7xy$  La derivada es  $7x * \left( \frac{dy}{dx} \right) + 7y$

Para  $4y$  La derivada es  $4 * \left( \frac{dy}{dx} \right)$

Para 10 la derivada es 0

Agrupando:  $2y \left( \frac{dy}{dx} \right) + 7x \left( \frac{dy}{dx} \right) + 7y - 4 \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0$

Factorizando y despejando:  $\frac{dy}{dx} (2y + 7x - 4) + 7y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{7y}{2y + 7x - 4}$

### Ejemplo 100:

Dada la expresión:  $vt^3 + t^4 - \frac{v^3}{4t} = 20$  Hallar  $\frac{dv}{dt}$



### Solución:

Se sabe que  $v = f(t)$

Para  $vt^3$  su derivada es  $v * 3t^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right) * t^3$

Para  $t^4$  su derivada es  $4t^3$

Para  $v^3 / 4t$  su derivada es  $\frac{4t * 3v^2 \left(\frac{dv}{dt}\right) - 4v^3}{16t^2}$

Para 20 su derivada es 0.

$$\text{Ahora: } 3vt^2 + \frac{dv}{dt}t^3 + 4t^3 - \frac{12v^2t \frac{dv}{dt} - 4v^3}{16t^2} = 0$$

Por operación algebraica:

$$\frac{16t^2 \left( 3vt^2 + \frac{dv}{dt}t^3 + 4t^3 \right) - 12v^2t \frac{dv}{dt} + 4v^3}{16t^2} = \frac{48vt^4 + 16t^5 \frac{dv}{dt} + 64t^5 - 12v^2t \frac{dv}{dt} + 4v^3}{16t^2} = 0$$

$$\text{Entonces: } 48vt^4 + 16t^5 \frac{dv}{dt} + 64t^5 - 12v^2t \frac{dv}{dt} + 4v^3 = 0$$

$$\text{Factorizamos: } \frac{dv}{dt}(16t^5 - 12v^2t) = -48vt^4 - 64t^5 - 4v^3$$

$$\text{Finalmente: } \frac{dv}{dt} = \frac{-48vt^4 - 64t^5 - 4v^3}{16t^5 - 12v^2t}$$

## EJERCICIOS

Aplicando los teoremas demostrados, hallar la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = 20x^6 + \frac{5}{2}x^4 - 9x + 4$

2.  $g(x) = \frac{24}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x}$

3.  $h(x) = \frac{11}{12\sqrt[3]{x^7}} - \sqrt{9x}$

4.  $s(t) = \frac{6t^4 - 3t^3 + 12t - 15}{3t^2}$

5. Hallar la derivada de la siguiente función:  $f(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

6. Hallar la derivada de la siguiente función:  $g(x) = x^3 \operatorname{sen}(x)$

7. Hallar la derivada de la siguiente función:  $n(y) = \frac{y+2}{y^3+2y-3}$

8. Hallar la derivada de la siguiente función:  $h(x) = \frac{\sqrt{x}+4x}{x-3}$

9. Dada la función implícita  $7x^4 - 2y^2 + 3y = 10$  Para  $y = f(x)$ , hallar la derivada de dicha función.

10. dada la función  $\sqrt{4xy} + 5y^3 = 16$  Para  $y = f(x)$  hallar la derivada de la función.

11. Hallar la derivada de la función  $y = f(x)$  a partir de:  $\frac{3y-4x}{x+4} = x+10$

12. Hallar la derivada de la función  $y = f(x)$  a partir de:  $\frac{4y-6x}{5x^2+4} = 16$

## CAPÍTULO OCHO: DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

### Lección 35: Derivada De la Función Exponencial y Función Logarítmica

#### - ) DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

En los cursos previos se ha estudiado la función exponencial y sus propiedades, las cuales son muy importantes para poder desarrollar la derivada de éste tipo de funciones. Es pertinente que recordemos algunas de las propiedades de los exponentes.

Para  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $n$  entero positivo; mayor o igual a dos. Además  $x$  e  $y$  números reales:

$$\begin{array}{ll} 1-) a^x * a^y = a^{x+y} & 4-) (a * b)^x = a^x * b^x \\ 2-) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & 5-) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \\ 3-) (a^x)^y = a^{x*y} & 6-) \sqrt[n]{a^x} = a^{x/n} \end{array}$$

#### 1. Derivada de Función Exponencial Base a: $y = a^x$

Dada la función  $f(x) = a^x$  Para  $a > 0$ , Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = a^x \ln(a)$

#### Demostración 1:

Utilizando la definición de derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right]$$

Si reemplazamos  $a$  por cualquier entero positivo, por ejemplo 2, al desarrollar el límite se

obtiene:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) \cong 0,69314$

Veamos:

$\Delta x$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$	0,7177	0,6955	0,6933	0,69317	0,6931

Por otro lado:  $\ln(2) \cong 0,693147$  Por consiguiente:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = \ln(2)$  Así para cualquier valor

de  $a$ . Entonces:  $\frac{dy}{dx} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = a^x \ln(a)$

### Demostración 2:

Otra alternativa para demostrar la derivada de la exponencial, es utilizando propiedades de los exponentes y logaritmos.

Como la función es  $y = a^x$  entonces:  $\frac{d}{dx} (a^x) = \frac{d}{dx} (e^{\ln(a^x)}) = \frac{d}{dx} (e^{x \ln(a)})$

La última expresión se deriva utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} (e^{x \ln(a)}) = e^{x \ln(a)} * \frac{d}{dx} (x \ln(a)) = e^{\ln(a)^x} * \ln(a) * 1 = e^{\ln(a)^x} * \ln(a) = a^x \ln(a)$$

## 2. Derivada de Función Exponencial Natural $e^x$ : $y = e^x$

Dada la función  $f(x) = e^x$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = e^x \ln(e) = e^x$

### Demostración:

Utilizando la definición de derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right]$$

Como en el caso anterior,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = \ln(e) = 1$

Entonces:  $\frac{dy}{dx} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \right] = e^x * 1 = e^x$

### 3. Derivada de Función Exponencial Decimal $10^x$ : $y = 10^x$

Dada la función  $f(x)=10^x$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 10^x \ln(10)$

#### Demostración:

Con las demostraciones anteriores, por favor desarrolle la demostración de esta derivada.

#### Ejemplo 101:

Dada la función  $f(x) = 4^{2x}$  Hallar la derivada.

#### Solución:

Se observa que hay dos funciones:  $y = 4^u$  y  $u = 2x$  Entonces podemos derivar la expresión utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = 4^u \ln(4) * 2$$

Entonces:  $\frac{dy}{dx} = 2 \ln(4) * 4^{2x}$

#### Ejemplo 102:

Dada la función  $g(x) = \frac{6^{3x} + 4}{x - 2}$  Hallar la derivada.

### Solución:

La función presentada es de cociente, donde el numerador tiene una función exponencial. Entonces:

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)(3\ln(6) * 6^{3x}) - (6^{3x} + 4) * 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(3\ln(6) * 6^{3x}) - (6^{3x} + 4)}{(x-2)^2}$$

### Ejemplo 103:

Dada la función  $f(x) = e^{\sqrt{4x+3}}$  Hallar la derivada de f(x).

### Solución:

Se observa que hay tres funciones involucradas, veamos:

$$y = e^u \quad u = \sqrt{v} = (v)^{1/2} \quad v = 4x + 3$$

Entonces, por la regla de la cadena:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = e^u * \frac{1}{2} v^{-1/2} * 4$

Reorganizando y reemplazando cada variable:

$$\frac{dy}{dx} = e^u * \frac{1}{2} v^{-1/2} * 4 = \frac{4e^u}{2v^{1/2}} = \frac{4e^u}{2\sqrt{v}} = \frac{2e^{\sqrt{4x+3}}}{\sqrt{4x+3}}$$

Finalmente:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{\sqrt{4x+3}}}{\sqrt{4x+3}}$

### Ejemplo 104:

Dada la función  $f(x) = 10^{\sqrt{4x^3+2}}$  Hallar la derivada de f(x).

### Solución:

Se observa que hay tres funciones involucradas, veamos:

$$y = 10^u \quad u = \sqrt{v} = (v)^{1/2} \quad v = 4x^3 + 2$$

Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = 10^u \ln(10) * \frac{1}{2} v^{-1/2} * 12x^2$$

Reorganizando y reemplazando cada variable:

$$\frac{dy}{dx} = 10^u \ln(10) * \frac{1}{2v^{1/2}} * 12x^2 = \frac{\ln(10)12x^2 * 10^{\sqrt{4x^3+2}}}{2\sqrt{4x^3+2}}$$

Finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\ln(10)x^2 * 10^{\sqrt{4x^3+2}}}{\sqrt{4x^3+2}}$$

## - ) DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA

$$y = \text{Log}_a(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

De la misma manera que la función exponencial, en los cursos previos se ha estudiado la función logarítmica y sus propiedades.

Veamos algunas de las propiedades de los logaritmos.

1-) $\text{Log}_a(1) = 0$	4-) $\text{Log}_a(x^r) = r \text{Log}_a(x)$
2-) $\text{Log}_a(x * y) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y)$	5-) $\text{Log}_a(x) = y \Rightarrow a^y = x$
3-) $\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y)$	6-) $\text{Log}_a(x) = \frac{\text{Log}_b(x)}{\text{Log}_b(a)}$

Para  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $r$  número racional positivo. Además  $x$  e  $y$  números reales positivos:

## 1. Derivada de Función Logarítmica Base a: $y = \text{Log}_a(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Log}_a(x)$  Para  $a > 0$ , Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln(a)}$

### Demostración:

Por el principio de la función inversa:  $y = \text{Log}_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$  Derivando los dos términos de la última ecuación:

$$\frac{d}{dx}(a^y) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow a^y \ln(a) * \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln(a)}$$

Pero  $a^y = x$ , entonces reemplazando:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln(a)}$

Pero podemos generalizar de la siguiente manera:

$y = \text{Log}_a(u)$  Siendo  $u = f(x)$  Entonces:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \ln(a)} * \frac{du}{dx}$

## 2. Derivada de Función Logarítmica Base e: $y = \text{Log}_e(x) = \ln(x)$

Dada la función  $f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$  Para e el número de Euler, Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

### Demostración:

Por el principio de la función inversa:  $y = \text{Log}_e(x) = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$  Derivando los dos términos de la última ecuación:

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow e^y * \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \text{ Pero } e^y = x \text{ reemplazando: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

**NOTA:** Recordemos que  $\ln(x)$  es el *logaritmo neperiano*, al cual invitamos que investiguemos un poco, para fortalecer este tema.



### Ejemplo 105:

Dada la función  $f(x) = \text{Log}_2(4x)$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Se observa que se trata de una función logarítmica. Planteamos la solución así:  $u = 4x$

Entonces:  $f(u) = \text{Log}_2(u)$  Su derivada:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} f(u) * \frac{d}{dx}(u)$

Desarrollando:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2^x \text{Ln}(2)} * 4 = \frac{4}{2^x \text{Ln}(2)}$

### Ejemplo 106:

Dada la función  $f(x) = \text{Log}_6(4x^2 + 4) + \text{Log}_{10}(\sqrt{x})$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Observamos que se trata de la derivada de una suma, donde los términos son funciones logarítmicas. Entonces derivamos cada término de la suma.

Sea  $f(x) = g(x) + h(x)$ . Se deriva cada función:

- )  $y = g(x) = \text{Log}_6(u)$  Además sea  $u = (4x^2 + 4)$  Entonces:

$$g'(x) = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{u \text{Ln}|6|} * (8x) = \frac{8x}{(4x^2 + 4) \text{Ln}|6|}$$

- )  $y = h(x) = \text{Log}_{10}(u)$  Además sea  $u = \sqrt{x}$  Entonces:

$$h'(x) = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{u \text{Ln}|10|} * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x}) \text{Ln}|10| * 2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \text{Ln}|10|x}$$

Agrupando las dos derivadas, ya que:  $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{8x}{(4x^2 + 4) \text{Ln}|6|} + \frac{1}{2 \text{Ln}|10|x}$$

### Ejemplo 107:

Dada la función  $f(x) = \ln \left| \sqrt{\frac{x^7 - 12}{5x}} \right|$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Planteando la derivada como regla de la cadena:  $f(u) = \ln|u|$  Donde  $u = \sqrt{v}$  y  $v = \frac{x^7 - 12}{5x}$

Por regla de la cadena:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx}$  Derivando:  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^7 - 12}{5x}}} = \sqrt{\frac{5x}{x^7 - 12}}$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^7 - 12}{5x}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5x}{x^7 - 12}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5x * (7x^6) - (x^7 - 12) * 5}{25x^2} = \frac{35x^7 - 5x^7 + 60}{25x^2} = \frac{30x^7 + 60}{25x^2} = \frac{6x^7 + 12}{5x^2}$$

Entonces agrupando:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{5x}{x^7 - 12}} * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5x}{x^7 - 12}} * \frac{6x^7 + 12}{5x} = \frac{6x^7 + 12}{10x} \left( \frac{5x}{x^7 - 12} \right) = \frac{30x^8 + 60x}{10x^8 - 120x} \frac{3x^7 + 6}{x^7 - 12}$$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = \frac{3x^7 + 6}{x^7 - 12}$$

### Lección 36: Derivada de las Funciones Trigonométricas

Muchos fenómenos de la naturaleza son modelados por medio de funciones periódicas como las trigonométricas, por ejemplo el movimiento de un resorte, la forma en que se propaga el sonido, las ondas de luz, los electrocardiogramas y otros. Esto nos da la motivación para estudiar las derivadas de este tipo de funciones.

$y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\sin(x)$

## 1. Derivada de Función Seno: $y = \text{sen}(x)$

$$\text{Dada la función } f(x) = \text{sen}(x) \quad \text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

### Demostración:

Por la definición de derivada:  $y = \text{sen}(x)$  entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \right)$$

Utilizando identidades para suma de seno:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \text{sen}(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \right)$$

Operando términos semejantes y Reorganizando:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} + \frac{\cos(x) \text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(x) [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

Aplicando la propiedad de la suma de límites:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(x) [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

Como el límite es del incremento, entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \right) + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

En las temáticas de límites se demostró dos límites muy importantes en funciones trigonométricas.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right) = 1$$

Entonces, retomando la demostración:  $y' = \frac{dy}{dx} = \text{sen}(x) * 0 + \cos(x) * 1 = \cos(x)$

### Generalizando:

Sea la función  $f(x) = \text{sen}(u)$  donde  $u = f(x)$  entonces por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \cos(u) * \frac{du}{dx}$$

## 2. Derivada de Función Coseno: $y = \cos(x)$

Dada la función  $f(x) = \cos(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x)$

### Demostración:

Por la definición de derivada:  $y = \cos(x)$  entonces:  $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \right)$

Utilizando identidades para suma de coseno:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \text{sen}(x)\text{sen}(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \right)$$

Reorganizando:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \cos(x) - \text{sen}(x)\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)[\cos(\Delta x) - 1] - \text{sen}(x)\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \right) - \text{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right)$$

Finalmente:  $y' = \frac{dy}{dx} = \cos(x) * 0 - \text{sen}(x) * 1 = -\text{sen}(x)$

### Generalizando:

Sea la función  $f(x) = \cos(u)$  donde  $u = f(x)$  entonces por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = -\text{sen}(u) * \frac{du}{dx}$$

Esta generalización aplica a las demás funciones trigonométricas.

### 3. Derivada de Función Tangente: $y = \tan(x)$

Dada la función  $f(x) = \tan(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \sec^2(x)$

### Demostración:

Por identidades de cociente sabemos que:  $y = \tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$  entonces derivamos la función

como cociente:  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x) * \cos(x) - \text{sen}(x) * (-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$

Así queda demostrada la derivada de la tangente. Es pertinente repasar lo referente a identidades trigonométricas, ya que son una herramienta muy útil en este tipo de demostraciones.

### 4. Derivada de Función Cotangente: $y = \cot(x)$

Dada la función  $f(x) = \cot(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\text{csc}^2(x)$

### Demostración:

Por identidades de cociente sabemos que:  $y = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  entonces derivamos la función

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x) * (-\sin(x)) - \cos(x) * \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

Por identidades recíprocas:  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -\cos^2(x)$

### 5. Derivada de Función Secante: $y = \sec(x)$

Dada la función  $f(x) = \sec(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \sec(x) \tan(x)$

### Demostración:

Sabemos que la secante es el recíproco del coseno:  $y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Entonces:  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x) * 0 - 1 * (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} * \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec(x) * \tan(x)$

### 6. Derivada de Función Cosecante: $y = \csc(x)$

Dada la función  $f(x) = \csc(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\csc(x) \cot(x)$

### Demostración:

Sabemos que la cosecante es el recíproco del seno:  $y = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

Entonces:  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}(x) * 0 - 1 * \cos(x)}{\text{sen}^2(x)} = \frac{-\cos(x)}{\text{sen}^2(x)} = -\frac{1}{\text{sen}(x)} * \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = -\csc(x) * \cot(x)$

En seguida vamos a proponer algunos ejemplos modelos sobre derivadas de funciones trigonométricas.

### Ejemplo 108:

Dada la función  $f(x) = \text{sen}(4x) + 5\cos(x)$  hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Se observa que  $f(x)$  se presenta como una suma de dos funciones trigonométricas, así sea  $y = \text{sen}(4x)$  además  $u = 4x$  entonces:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}(4x)] = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \cos(u) * 4 = 4\cos(4x) \quad \text{Además} \quad \frac{d}{dx}[5\cos(x)] = 5(-\text{sen}(x)) = -5\text{sen}(x)$$

Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 4\cos(4x) - 5\text{sen}(x)$

### Ejemplo 109:

Dada la función  $g(x) = \frac{\tan(5x)}{\cos(5x)}$  hallar la derivada de  $g(x)$ .

### Solución:

Se observa que  $g(x)$  se presenta como un cociente de dos funciones trigonométricas, entonces:

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(5x) * 5\sec^2(5x) - \tan(5x) * 5 * (-\text{sen}(5x))}{\cos^2(5x)} = \frac{5\cos(5x) * \frac{1}{\cos^2(5x)} + 5\tan(5x)\text{sen}(5x)}{\cos^2(5x)}$$

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{\cos(5x)} + 5\tan(5x)\text{sen}(5x)}{\cos^2(5x)} = \frac{\frac{5}{\cos(5x)}}{\cos^2(5x)} + \frac{5\tan(5x)\text{sen}(5x)}{\cos^2(5x)} = \frac{5}{\cos^3(5x)} + \frac{5\text{sen}^2(5x)}{\cos^3(5x)}$$

Finalmente:  $g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{5 + 5\text{sen}^2(5x)}{\cos^3(5x)}$

### Ejemplo 110:

Dada la función  $f(x) = \cot(2x) * \sec(4x) + 5$  hallar la derivada de  $g(x)$ .

### Solución:

La función  $f(x)$  corresponde al producto de dos funciones trigonométricas más una constante,

entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2 \csc^2(2x) * \sec(4x) + \cot(2x) * 4 \sec(4x) \tan(4x) + 0$

Finalmente:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2 \csc^2(2x) \sec(4x) + 4 \cot(2x) \sec(4x) \tan(4x) = -\frac{2 \sec(4x)}{\sin^2(2x)} + \frac{4 \cos(2x) \sin(4x)}{\sin(2x) \cos^2(4x)}$

### Lección 37: Derivada de las Funciones Hiperbólicas:

$$y = \sinh(x) \Rightarrow y' = \cosh(x)$$

### Reconocimiento:

Recordando los principios sobre las funciones hiperbólicas, las cuales están definidas a partir de las exponenciales, tales como:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Con algo de conocimientos podemos deducir las tres faltantes.

A continuación vamos a analizar las derivadas de este tipo de funciones.

### 1. Derivada de Función Senh: $y = \sinh(x)$

Dada la función  $f(x) = \sinh(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cosh(x)$

### Demostración:

Utilizando la definición de seno hiperbólico, podemos derivar la función:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Como podemos observar, la última expresión corresponde a la función coseno hiperbólico de la variable, así queda demostrada la derivada de seno hiperbólico.

### Generalizando:

Cuando la variable de la función no es  $x$  sino otra, digamos  $u$ , que a su vez es función de  $x$ , entonces: Sea  $f(x) = \sinh(u)$  y a su vez  $u = f(x)$  Por consiguiente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} \sinh(u) * \frac{d}{dx}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

## 2. Derivada de Función Cosh: $y = \cosh(x)$

Dada la función  $f(x) = \cosh(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \sinh(x)$

### Demostración:

Utilizando la definición de coseno hiperbólico, podemos derivar la función:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Como podemos observar, la última expresión corresponde a la función seno hiperbólico de la variable, así queda demostrada la derivada de coseno hiperbólico.

### Generalizando:

Cuando la variable de la función no es  $x$  sino otra, digamos  $u$ , tal que a su vez es función de  $x$ , entonces:

Sea  $f(x) = \cosh(u)$  y a su vez  $u = f(x)$  Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} \cosh(u) * \frac{d}{dx}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

### 3. Derivada de Función Tanh: $y = \tanh(x)$

Dada la función  $f(x) = \tanh(x)$  Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(x)$$

#### Demostración:

Utilizando la definición de tangente hiperbólico, podemos derivar dicha función:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow \tanh'(x) = \frac{\cosh(x) * \cosh(x) - \sinh(x) * \sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$$

Por identidades de las hiperbólicas.

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$$

La última expresión corresponde a la función secante hiperbólico de la variable, así queda demostrada la derivada de tangente hiperbólico.

#### Generalizando:

La generalización es similar a los casos anteriores. Con el apoyo del Tutor hacer la demostración de la generalización para esta función.

### 4. Derivada de Función Coth: $y = \coth(x)$

Dada la función  $f(x) = \coth(x)$  Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2(x)$$

#### Demostración:

Utilizando la definición de cotangente hiperbólica, podemos derivar dicha función:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \Rightarrow \coth'(x) = \frac{\sinh(x) * \sinh(x) - \cosh(x) * \cosh(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}$$

Por identidades de las hiperbólicas.

$$\tanh'(x) = \frac{-(\cosh^2(x) - \sinh^2(x))}{\sinh^2(x)} = \frac{1}{\sinh^2(x)} = -\operatorname{csc} h^2(x)$$

### 5. Derivada de Función Sech: $y = \operatorname{sech}(x)$

Dada la función  $f(x) = \operatorname{sech}(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x)$

**Demostración:**

Se deja como ejercicio la demostración de la función secante hiperbólica.

### 6. Derivada de Función Csch: $y = \operatorname{csch}(x)$

Dada la función  $f(x) = \operatorname{csch}(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}(x) \coth(x)$

**Demostración:**

Se deja como ejercicio demostrar la derivada de la función cosecante hiperbólica.

**Ejemplo 111:**

Dada la función  $f(x) = \tanh(x^3 + 2)$  hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

La función  $f(x)$  corresponde a tangente hiperbólico. Debemos tener en cuenta que esta operación es válida solo si  $\cosh(x^3 + 2) \neq 0$  Entonces:  $f(u) = \tanh(u)$  y  $u = x^3 + 2$ , aplicando la

$$\text{regla de la cadena: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(\tanh(u)) * \frac{d}{dx}(x^3 + 2) = \operatorname{sech}^2(u) * (3x^2 + 0)$$

$$\text{Simplificando y reorganizando: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \operatorname{sech}^2(x^3 + 2)$$

### Ejemplo 112:

Dada la función  $f(x) = \sinh(\sqrt{2x-4})$  hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

La función  $f(x)$  corresponde a seno hiperbólico. Debemos tener en cuenta que esta operación es válida solo si  $2x - 4 \geq 0$

Entonces:  $f(u) = \sinh(u)$ ,  $u = \sqrt{v}$ ,  $v = 2x - 4$ , aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(\sinh(u)) * \frac{d}{dv}(\sqrt{v}) * \frac{d}{dx}(2x - 4) = \cosh(u) * \frac{1}{2\sqrt{v}} * (2)$$

Simplificando y reorganizando:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cosh(\sqrt{2x-4}) * \frac{1}{\sqrt{2x-4}} * (2) = \frac{\cosh(\sqrt{2x-4})}{\sqrt{2x-4}}$$

### Ejemplo 113:

Dada la función  $g(x) = \tanh[\cos(2x)]$  hallar la derivada de  $g(x)$ .

### Solución:

Sea:  $g(u) = \tanh(u)$ ,  $u = \cos(v)$ ,  $v = 2x$ . Entonces:

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(\tanh(u)) * \frac{d}{dv}(\cos(v)) * \frac{d}{dx}(2x) = \operatorname{sech}^2(u) * (-\sin(v)) * 2$$

$$\text{Simplificando y reorganizando: } g'(x) = \frac{dy}{dx} = -2 \operatorname{sech}^2(\cos(2x)) \sin(2x)$$

**Ejemplo 114:**

Dada la función  $g(x) = \cosh^3(6x - 5)$  hallar la derivada de  $g(x)$ .

**Solución:**

Sea:  $g(u) = [u]^3$ ,  $u = \cosh(v)$ ,  $v = 6x - 5$ . Entonces: Aquí aplicamos la regla de la cadena.

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = 3[u]^2 * \sinh(v) * (6 - 0)$$

Reemplazando y Simplificando:  $g'(x) = \frac{dy}{dx} = 18 \cosh^2(6x - 5) \sinh(6x - 5)$

## EJERCICIOS

1. Dada la función:  $f(x) = 5^x + 4^{2x} + 2^{3x^2-x}$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .
2. Dada la función:  $f(x) = 10^{x-2} e^{2x+3}$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .
3. Dada la ecuación:  $e^{x+y} + 10^y - 4^x = 10$  Si  $y = f(x)$ , Hallar la derivada de  $f(x)$ .
4. Dada la función:  $g(\theta) = \text{Log}_3(5 + 2\theta)$  Hallar la derivada de  $g(\theta)$
5. Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \text{Log}_2(x) * \text{Log}_4(3x)$
6. Sea la función  $s(r) = \text{Ln}|10^r + 4r^2|$  Hallar la derivada de  $s(r)$
7. Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \frac{4 \tan(2x)}{\text{sen}(2x)}$
8. Dada la función:  $f(x) = \sqrt{\text{sen}(4x) + \tan(4x)}$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .
9. Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$
10. dada la función:  $g(x) = 4 \tan(2x) \sec(2x)$  Hallar la derivada de  $g(x)$ .
11. Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \text{senh}(3x^5 + 7x - 5)$
12. Hallar la derivada de la función:  $g(x) = (12x^3 - 2x) \text{senh}(10x)$
13. Sea la función  $f(x) = \tanh[\text{Ln}|4x + 5|]$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .
14. Sea la función  $h(x) = \coth\left(\frac{\sqrt{x+1}}{4}\right)$  Hallar la derivada de  $g(x)$ .

## CAPÍTULO NUEVE: DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR Y DE FUNCIONES INVERSAS

### Lección 38: Derivadas De Orden Superior

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Con lo analizado hasta el momento podemos inferir que la derivada de una función es otra función. La razón de cambio de la función  $f(x)$  respecto a la variable  $x$  está dada por su derivada, definida como  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . De igual manera, la razón de cambio de  $f'(x)$  está dada por su derivada, es decir, por la “derivada de la derivada” de la función original. La derivada de la derivada de la función  $f(x)$  se conoce como **segunda derivada**, la cual se representa por el símbolo  $f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$ . La derivada  $f'(x)$  algunas veces se denomina **primera derivada** para diferenciarla de la segunda derivada  $f''(x)$ . El concepto es secuencial, es decir, la derivada de la segunda derivada, será la tercera derivada y así sucesivamente.

Todo el análisis anterior, parte de la premisa que la función es derivable, la primera derivada es derivable, la segunda derivada es derivable y así sucesivamente. Generalizando que la función original es derivable las veces que sea necesario.

#### Segunda Derivada:

La segunda derivada de la función  $f(x)$  es la derivada de la primera derivada de dicha función, veamos la siguiente definición.

#### DEFINICIÓN:

Sea  $y = f(x)$  entonces la segunda derivada esta dada por:  $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$

Para hallar la segunda derivada basta con calcular la primera derivada y luego derivar la función obtenida.

#### Ejemplo 115:

Dada la función  $f(x) = 8x^5 - 6x^3 + 12x$  hallar la segunda derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

A partir de la función hallamos la primera derivada:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 40x^4 - 18x^2 + 12$

En seguida derivamos  $f'(x)$ .  $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 160x^3 - 36x + 0$

Entonces la segunda derivada de  $f(x)$  es:  $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 160x^3 - 36x$

### Ejemplo 116:

Dada la función  $s(x) = 4\text{sen}(7x) + 3\cos(8x)$  hallar la segunda derivada de  $s(x)$ .

### Solución:

Primero calculamos la primera derivada.

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = 28\cos(7x) - 24\text{sen}(8x)$$

En seguida calculamos la derivada de  $s'(x)$ .

$$s''(x) = \frac{d^2s}{dx^2} = -196\text{sen}(7x) - 192\cos(8x)$$

Así  $s''(x)$  será la segunda derivada de  $s(x)$ .

### Derivada de Orden n:

#### DEFINICIÓN:

Dada la función  $y = f(x)$  entonces la n-ésima derivada:  $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$

Para hallar la n-ésima derivada basta con calcular la primera derivada, la segunda y así hasta la derivada n.



Generalizando sobre la n-ésima derivada vamos a mostrar en el siguiente cuadro, la función, y las diferentes nomenclaturas para definir el orden de la derivada.

Sea la función $y = f(x)$				
Orden Derivada	Notación Uno	Notación Dos	Notación Diferencial	Notación Leibniz
Primera	$y'$	$f'(x)$	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$y''$	$f''(x)$	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Tercera	$y'''$	$f'''(x)$	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$D_x^{(n)} y$	$\frac{d^{(n)} y}{dx^{(n)}}$

### Ejemplo 117:

Dada la función  $g(x) = 2\text{sen}(2x)$  hallar la tercera derivada de  $g(x)$ .

### Solución:

Hallemos la primera derivada:  $g'(x) = \frac{dg}{dx} = 4\cos(2x)$

En seguida calculemos la segunda derivada:  $g''(x) = \frac{d^2 g}{dx^2} = -8\text{sen}(2x)$

Finalmente calculamos la tercera derivada:  $g'''(x) = \frac{d^3 g}{dx^3} = -16\cos(2x)$

### Ejemplo 118:

Dada la función  $n(x) = \ln|x+4|$  hallar la cuarta derivada de  $n(x)$ .

### Solución:

Hallemos la primera derivada:  $n'(x) = \frac{dn}{dx} = \frac{1}{x+4}$

La segunda derivada:

$$n''(x) = \frac{d^2n}{dx^2} = -\frac{1}{(x+4)^2} \quad \text{Recuerde la derivada en un cociente.}$$

La tercera derivada:  $n'''(x) = \frac{d^3n}{dx^3} = \frac{2x+8}{(x+4)^4}$  También se resolvió por la derivada de cociente.

Para obtener la cuarta derivada debemos derivar la función  $n'''(x)$ .

$$n^{(iv)}(x) = \frac{d^{(4)}n}{dx^{(4)}} = \frac{2(x+4)^4 - 4(2x+8) \cdot (x+4)^3}{(x+4)^8} = \frac{2(x+4)^4 - 8(x+4) \cdot (x+4)^3}{(x+4)^8} = \frac{2(x+4)^4 - 8(x+4)^4}{(x+4)^8}$$

$$\text{Simplificando: } n^{(iv)}(x) = \frac{d^{(4)}n}{dx^{(4)}} = \frac{-6(x+4)^4}{(x+4)^8} = -\frac{6}{(x+4)^4}$$

### Ejemplo 119:

Dada la función  $f(x) = e^{x/2}$  hallar la n-ésima derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

$$\text{La primera derivada: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^{x/2}$$

$$\text{La segunda derivada: } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}e^{x/2} = \frac{1}{4}e^{x/2}$$

$$\text{La tercera derivada: } f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2}e^{x/2} = \frac{1}{8}e^{x/2}$$

Se puede observar que la función al derivarla se conserva, solo cambia el coeficiente en el cual, para la primera derivada es de la forma  $\frac{1}{2^1}$  para la segunda derivada es de la forma  $\frac{1}{2^2}$  el de la tercera  $\frac{1}{2^3}$ . Se puede generalizar que para la n-ésima derivada será de la forma:  $\frac{1}{2^n}$

Así la n-ésima derivada de la función será:  $f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = \frac{1}{2^n} e^{x/2}$

### Lección 39: Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

$$y = \text{Sen}^{-1}(x)$$

En el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica se analizó lo referente a las funciones inversas, entre estas las funciones trigonométricas inversas. Con estos conocimientos previos, podemos analizar las derivadas de este tipo de funciones.

Una reflexión, ¿Cuáles son las funciones que tienen inversa?

#### 1. Derivada de Función Arcsen: $y = \text{Sen}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Sen}^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $(-1, 1)$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

#### Demostración:

Partimos por definir  $y = \text{Sen}^{-1}(x) \Rightarrow x = \text{sen}(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = \frac{dy}{dx} \cos(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)}$$

La derivada se debe expresar en función de  $x$ , luego debemos hacer una transformación matemática, veamos: Como  $\text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1 \Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}$  a su vez  $\text{sen}(y) = x$ , entonces  $\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

#### 2. Derivada de Función Arcos: $y = \text{Cos}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Cos}^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $(-1, 1)$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

### Demostración:

Por definición  $y = \cos^{-1}(x) \Rightarrow x = \cos(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = -\frac{dy}{dx} \sin(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)}$$

De igual manera que el caso anterior, la derivada se debe expresar en función de  $x$ , luego hacemos la transformación matemática.

Como  $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \Rightarrow \sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$  a su vez  $\cos(y) = x$ , entonces  $\sin(y) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### 3. Derivada de Función Arctan: $y = \tan^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \tan^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $(-\alpha, \alpha)$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

### Demostración:

A partir de  $y = \tan^{-1}(x) \Rightarrow x = \tan(y)$ . En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = \frac{dy}{dx} \sec^2(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)}$$

Por identidades trigonométricas.  $\tan^2(y) + 1 = \sec^2(y)$  A su vez  $\tan(y) = x$ , entonces  $\sec^2(y) = x^2 + 1$

Finalmente:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$  Así queda demostrado la derivada de la función arctan(x).

### 4. Derivada de Función Arccot: $y = \cot^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \cot^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $(-\alpha, \alpha)$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

### Demostración:

Se deja como ejercicio para desarrollar en el grupo colaborativo, cualquier duda por favor consultar con el Tutor.

### 5. Derivada de Función Arcsec: $y = \text{Sec}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Sec}^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $|x| > 1$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

### Demostración:

A partir de  $y = \text{Sec}^{-1}(x) \Rightarrow x = \sec(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = \frac{dy}{dx} \sec(y) \tan(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec(y) \tan(y)}. \text{ Como } |x| > 1, \text{ además; } \sec(y) \tan(y) \text{ es diferente de cero.}$$

Por identidades trigonométricas.  $\tan^2(y) = \sec^2(y) - 1$ . A su vez  $\sec(y) = x$ , entonces

$$\sec(y) * \tan(y) = x * \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \text{ Así queda demostrado la derivada de la función arcsec}(x).$$

### 6. Derivada de Función Arccsc: $y = \text{Csc}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Csc}^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo  $|x| > 1$ .

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

### Demostración:

Se deja como ejercicio.

### GENERALIZACIÓN:

En muchas ocasiones la variable a su vez es función de otra variable; es decir, se presenta funciones compuestas. De esta manera se puede hacer una generalización.

FUNCIÓN	DERIVADA
$f(x) = \text{Sen}^{-1}(u)$ . Para $u = f(x)$	$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * \frac{du}{dx}$
$f(x) = \text{Cos}^{-1}(u)$ . Para $u = f(x)$	$f'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * \frac{du}{dx}$
...	...
$f(x) = \text{Tan}^{-1}(u)$ . Para $u = f(x)$	$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} * \frac{du}{dx}$

Hacer el análisis para las tres funciones restantes.

### Ejemplo 120:

Dada la función  $f(x) = \text{Sen}^{-1}(4x)$  hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Sea  $f(u) = \text{Sen}^{-1}(u)$  y  $u = 4x$ . Por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} * 4 = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

### Ejemplo 121:

Dada la función  $f(x) = \text{Sen}^{-1}(12x) + \text{sen}(10x)$  hallar la derivada de  $f(x)$ .

### Solución:

Se trata de la suma de dos funciones, una trigonométrica inversa y la otra función trigonométrica. Entonces derivamos  $\text{Sen}^{-1}(12x)$  utilizando regla de la cadena; es decir, la

derivada externa por la derivada interna. Así su derivada es:  $\frac{1}{\sqrt{1-144x^2}} * 12$  De igual manera para la otra función.

Finalmente:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{12}{\sqrt{1-144x^2}} + 10\cos(10x)$

### Ejemplo 122:

Dada la función  $f(x) = \cos^{-1}(2x^2 + 4)$  hallar la derivada de f(x).

### Solución:

Sea  $f(u) = \cos^{-1}(u)$  y  $u = 2x^2 + 4$ . Por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2+4)^2}} * (4x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4-16x-16}} = -\frac{4x}{\sqrt{-15-16x-4x^4}}$$

Factorizando el signo obtenemos:  $f'(x) = -\frac{4x}{-\sqrt{15+16x+4x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{15+16x+4x^4}}$

### Ejemplo 123:

Dada la función  $f(t) = \tan^{-1}(e^{7t-10})$  hallar la derivada de f(t).

### Solución:

Sea  $f(u) = \tan^{-1}(u)$  y  $u = e^v$  y  $v = 7t - 10$

Por la regla de la cadena:  $f'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+u^2} * e^v * (7)$

Reemplazando y ordenando:  $f'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{7e^{7t-10}}{1+e^{14t-20}}$

### Ejemplo 124:

Dada la función  $p(x) = \sec^{-1}[\sin(15x^2 + 7x)]$  hallar la derivada de p(x).

### Solución:

Sea  $p(u) = \sec^{-1}(u)$  y  $u = \sin(v)$  y  $v = 15x^2 + 7x$ . Entonces:

$$p'(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} * \cos(v) * (30x + 7)$$

$$\text{Reemplazando: } p'(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{|\text{sen}(15x^2 + 7x)|\sqrt{\text{sen}^2(15x^2 + 7x) - 1}} * \cos(15x^2 + 7x) * (30x + 7)$$

$$\text{Organizando, se obtiene finalmente: } p'(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{(30x + 7)\cos(15x^2 + 7x)}{|\text{sen}(15x^2 + 7x)|\sqrt{\text{sen}^2(15x^2 + 7x) - 1}}$$

## Lección 40: Derivada de Funciones Hiperbólicas Inversas:

$$y = \text{Senh}^{-1}(x)$$

### 1. Derivada de Función Arcsenh: $y = \text{Senh}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Senh}^{-1}(x)$  Donde  $f(x)$  es derivable en el intervalo de

$$\text{definición, Entonces: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

#### Demostración:

Partimos por definir  $y = \text{Senh}^{-1}(x) \Rightarrow x = \text{senh}(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto

$$\text{a } x: 1 = \frac{dy}{dx} \cosh(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)}$$

La derivada se debe expresar en función de  $x$ , luego debemos hacer una transformación matemática tenemos:  $\cosh(y) = \sqrt{\text{senh}^2(y) + 1}$  a su vez  $\text{senh}(y) = x$ , entonces  $\cosh(y) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Recordemos que  $\text{senh}(x)$  es una función inyectiva, por lo cual es invertible.



## 2. Derivada de Función Arccosh: $y = \text{Cosh}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Cosh}^{-1}(x)$  Como la función NO es inyectiva, entonces debemos restringir le dominio a  $x \geq 0$  y  $y \geq 1$ , Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{Para } |x| > 1$$

### Demostración:

Por definir  $y = \text{Cosh}^{-1}(x) \Rightarrow x = \cosh(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = \frac{dy}{dx} \sinh(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh(y)}$$

La derivada se debe expresar en función de  $x$ , luego:  $\sinh(y) = \sqrt{\cosh^2(y) - 1}$  a su vez  $\cosh(y) = x$ , entonces  $\sinh(y) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

## 3. Derivada de Función Arctanh: $y = \text{Tanh}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Tanh}^{-1}(x)$  Como la función es creciente, por consiguiente

es inyectiva, entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{Para } |x| < 1$$

### Demostración:

Como  $y = \text{Tanh}^{-1}(x) \Rightarrow x = \tanh(y)$  En seguida derivamos a ambos lados respecto a  $x$ :

$$1 = \frac{dy}{dx} \text{sech}^2(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{sech}^2(y)} \quad \text{Pero } \text{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x) \text{ y } x = \tanh(y)$$

Reemplazando:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 h^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$

#### 4. Derivada de Función Arccoth: $y = \text{Coth}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Coth}^{-1}(x)$  Para  $|x| > 1$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$   
 Para  $|x| > 1$

**Demostración:**

Como ejercicios en el grupo colaborativo.

#### 5. Derivada de Función Arcsech: $y = \text{Sech}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Sech}^{-1}(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

**Demostración:**

Como ejercicios en el grupo colaborativo.

#### 6. Derivada de Función Arccsch: $y = \text{Csch}^{-1}(x)$

Dada la función  $f(x) = \text{Csch}^{-1}(x)$  Entonces:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

**Demostración:**

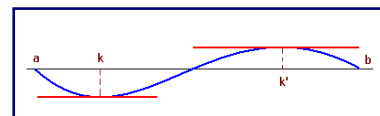
Como ejercicios en el grupo colaborativo.

## EJERCICIOS

1. Hallar la cuarta derivada de la función  $f(x) = 6x^8 + 4x^6 + 10x$
2. Dada la función  $s(t) = -32t^2 + 20t - 40$  Hallar la tercera derivada de  $s(t)$ .
3. Hallar la cuarta derivada de la función:  $g(x) = \frac{4}{x}$
4. Hallar la tercera derivada de la función:  $g(x) = 4^x + \text{Log}_2(x)$
5. Sea la función  $h(x) = xe^x$  Hallar la  $n$ -ésima derivada de  $h(x)$ .
6. Dada la función  $f(x) = \text{Cos}^{-1}[\cos(2x^2 - 10)]$  hallar la derivada de  $f(x)$ .
7. Sea la función  $g(t) = \text{Sen}^{-1}[\sqrt{e^{t+1}}]$  Hallar la derivada.
8. Demuestre que:  $\text{Senh}^{-1}(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$

## CAPÍTULO DIEZ: TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

### Lección 41: Teorema de Rolle:



Los teoremas de los valores extremos conocidos como “*Teoremas de Existencia*” establece que una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  alcanza necesariamente un valor máximo y un valor mínimo en él. Ahora bien, estos valores pueden producirse en los puntos terminales. El teorema de Rolle, llamado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652- 1719), ofrece condiciones suficientes que garantiza la existencia de un valor extremo en el interior de un intervalo cerrado.

#### TEOREMA:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si se cumple la igualdad  $f(a) = f(b)$ , entonces debe existir al menos un punto  $c$  donde  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$

#### Demostración:

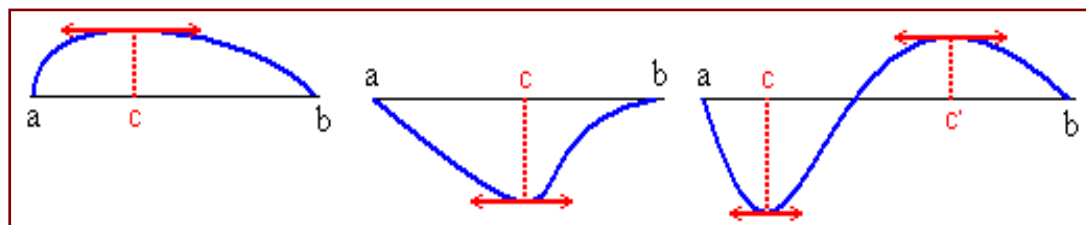
Para demostrar este teorema se puede escoger dos caminos el Geométrico y el Analítico, es pertinente que en el grupo colaborativo analice el que se propone a continuación, o que se investigue sobre la misma en diversos y muy variados libros de cálculo.

- ) Por la continuidad de  $f(x)$ , la imagen de  $[a, b]$ , es un conjunto conexo de  $\mathbf{R}$ , y por lo tanto es un intervalo, el intervalo imagen.
- ) La imagen de una función continua de un [conjunto cerrado](#) es un conjunto compacto, y por lo tanto el intervalo imagen es cerrado y de longitud finita: es de la forma  $[a, b]$ , con  $a$  el valor mínimo y  $b$  su valor máximo.
- ) Si  $a = b$ , la función  $f(x)$  es constante, y cualquier punto  $c \in (a, b)$  es adecuado. Para el caso donde  $a \neq b$ , entonces un de los dos no es igual a  $f(a) = f(b)$ . Asumiendo que sea  $b$ , entonces  $b > f(a) = f(b)$ , y por lo tanto el máximo  $b$  esta alcanzado en el interior del intervalo.
- ) Sea  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = b$ . Por definición del máximo,  $b = f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  de  $[a, b]$ , por consiguiente el cociente  $(f(c) - f(x)) / (c - x)$  es positivo cuando  $x < c$  (porque su numerador es siempre positivo y su denominador es positivo no nulo), y es negativo cuando  $x > c$  (el denominador se vuelve negativo no nulo). Pero  $f'(c)$  es por definición el límite de este cociente

cuando  $x$  tiende hacia  $c$ . El límite por la izquierda,  $f'(c^-)$  es positivo y tiene que ser igual al límite por la derecha,  $f'(c^+)$ . Por lo tanto este límite común es nulo, o sea  $f'(c) = 0$ .

Lo interesante del teorema es que nos hace ver que si una función  $f(x)$  continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ ; además, si  $f(a) = f(b) = 0$ , la grafica será tal que debe haber al menos un punto en dicho intervalo en el cual la recta tangente es horizontal.

Veamos una ilustración gráfica de la situación.



### Ejemplo 125:

Dada la función  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  en el intervalo  $[0, 4]$ . Demostrar que la función definida satisface el teorema de Rolle.

### Solución:

Para hacer la demostración debemos hacer dos cosas, probar que  $f(a) = f(b)$  y que exista un  $c$  entre  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Veamos:

$f(0) = 0^2 - 4(0) + 4 = 4$  y  $f(4) = 4^2 - 4(4) + 4 = 4$ . Así se cumple la condición. Entonces debe existir al menos un valor  $c$  en el intervalo abierto  $(0, 4)$  que cumple  $f'(c) = 0$ . Derivando la función:  $f'(x) = 2x - 4 = 0$  y despejando  $x = 2$ , dicho valor está en el intervalo definido, por lo cual la función  $f(x)$  en el intervalo definido cumple el teorema de Rolle.

### Ejemplo 126:

Dada la función  $f(x) = 2x^4 - 5x^2$  Determinar los valores de  $c$ , si existen en el intervalo  $(-1, 1)$ , para los que  $f'(x) = 0$ .

### Solución:

Verificamos si  $f(a) = f(b)$ :  $f(-1) = 2(-1)^4 - 5(-1)^2 = -3$  y  $f(1) = 2(1)^4 - 5(1)^2 = -3$

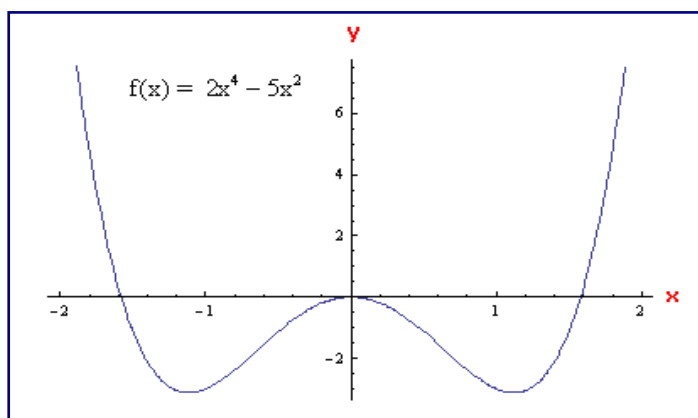
Entonces existe al menos un  $c$  en el intervalo dado, donde  $f'(x) = 0$ .

Derivamos la función:  $f'(x) = 8x^3 - 10x = 0$ . Ahora debemos despejar  $x$ :

$8x^3 - 10x = x(8x^2 - 10) = 0$ . Las soluciones:

$$x = 0 \quad x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

De los valores obtenidos solo  $x = 0$  está en el intervalo dado. Verifiquémosle en la grafica.



### Ejemplo 127:

Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta cuya función de distancia esta dada por:  
 $x(t) = 3t - t^2$  metros / segundo. Demostrar que entre 0 y 3 segundos existe un instante en que la velocidad es cero.

### Solución:

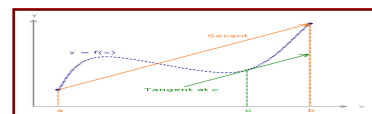
Primero mostremos que  $x(0) = x(3)$ , entonces:  $x(0) = 3(0) - (0)^2 = 0$  y  $x(3) = 3(3) - (3)^2 = 0$

Ahora debe existir un valor entre 0 y 3 donde  $x'(t) = 0$ . Veamos:

$$x'(t) = 3 - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Cuando  $t = 3/2$  seg, la velocidad es cero.

## Lección 42: Teorema del Valor Medio:



El teorema del valor medio también está dentro de los “*Teoremas de Existencia*”. También se le conoce como “**Teorema de los incrementos finitos**” o “**Teorema de Lagrange**”. Se ha considerado este teorema como uno de los importantes del cálculo diferencial.

Geométricamente el teorema nos indica que la gráfica de una función  $f(x)$  continua en  $[a, b]$  y diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$ , tiene una recta tangente; no vertical, en un punto  $c$  que está en dicho intervalo y, la cual es paralela a la recta secante que une los puntos  $a$  y  $b$ .

### TEOREMA:

Sea  $f(x)$  una función que cumple las siguientes condiciones:

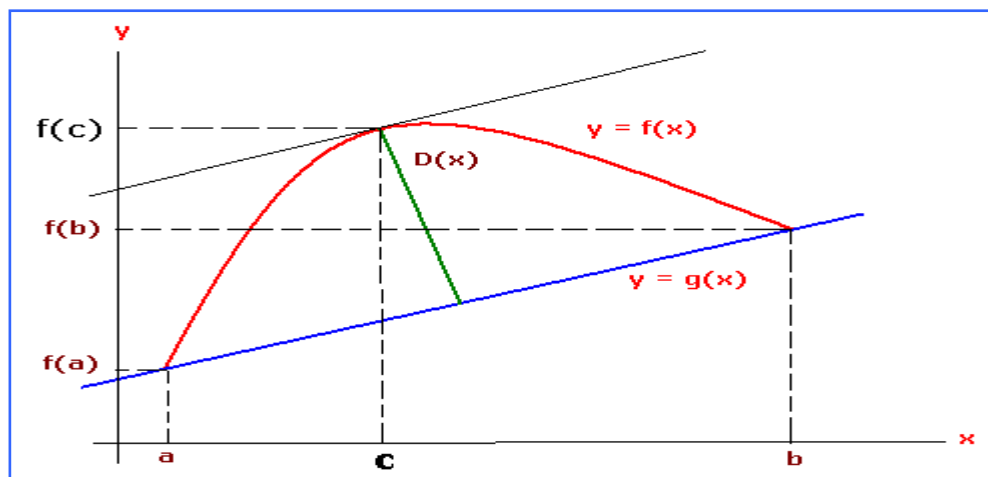
1.  $f(x)$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  Para  $a \neq b$
2.  $f(x)$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces debe existir un punto, digamos  $c$  contenido en el intervalo  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Alternativamente:  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

### Demostración:



A partir de la gráfica podemos realizar la demostración.

Por la ecuación de punto pendiente:  $(y - y_0) = m(x - x_0)$

Donde  $x_0 = b$  y  $y_0 = f(b)$ , Según la gráfica.  $(y - f(b)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$

Ahora:  $D(x) = f(x) - g(x)$ . Donde  $f(x)$  es la función curvilínea y  $g(x)$  la recta secante, la cual se puede escribir de la siguiente manera:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$

De esta manera la ecuación  $D(x)$  se puede expresar como:  $D(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b) \right]$

Derivando respecto a  $x$  esta expresión:  $D'(x) = f'(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$  Como  $D(a) = D(b) = 0$ , por el teorema de Rolle.  $D'(c) = 0$ , luego:  $D'(c) = f'(c) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$

Por consiguiente:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**NOTA:** La pendiente de la recta tangente en  $[c, f(c)]$  es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por  $[a, f(a)]$ .

### Ejemplo 128:

Sea la función  $f(x) = x^3 - 12x$  en el intervalo  $[-1, 3]$  Hallar al menos un valor  $c$  que satisfaga el teorema del valor medio.

### Solución:

Primero debemos verificar que la función es continua y diferenciable en el intervalo propuesto, esto se cumple.

Ahora hallamos la derivada de la función en el punto  $c$ :  $f'(c) = 3c^2 - 12$

Por definición:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  Luego:  $3c^2 - 12 = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$

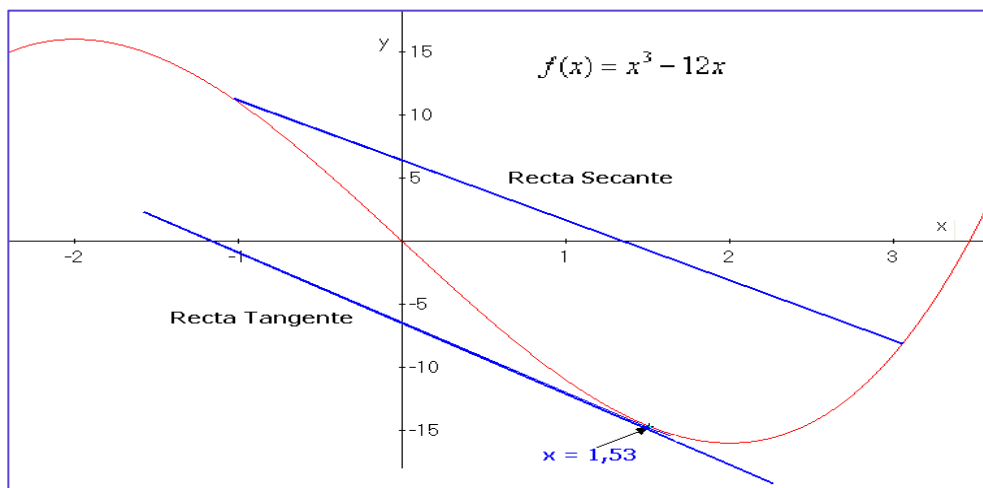
Operando:  $3c^2 - 12 = \frac{-9 - 11}{4} \Rightarrow 3c^2 - 12 = -5 \Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \cong \pm 1,53$

Entonces:  $c = 1,53$  El valor negativo no se toma ya que no está en el intervalo preestablecido.



Veamos la situación gráficamente.

Grafica Ejemplo 128



**Ejemplo 129:**

Encontrar el valor de  $c$  que garantice el teorema del valor medio para la función  $g(x) = 2\sqrt{x}$  en el intervalo  $[1, 4]$ .

**Solución:**

La función es continua en el intervalo definido.

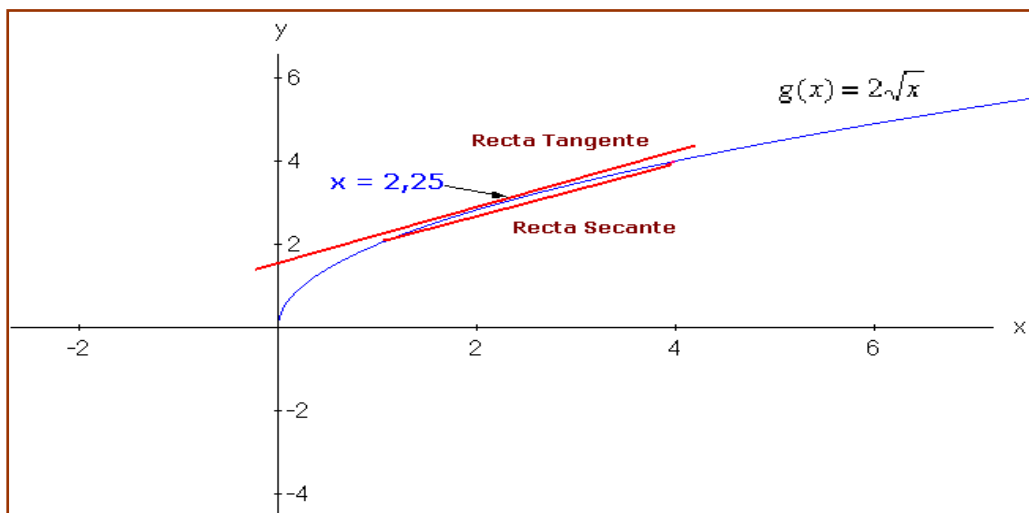
Ahora:  $f(1) = 2$   $f(4) = 4$

En seguida:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{\sqrt{c}}$

Ahora:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{4 - 2}{4 - 1} \Rightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{9}{4}$

Así  $c = 2,25$  Valor que esta en el intervalo preestablecido.

### Grafica Ejemplo 129



### Ejemplo 130:

Para la función  $h(x) = \frac{1}{x}$  en el intervalo  $[-2, 2]$ . Identifique si existe un  $c$  que satisfice el teorema del valor medio.

### Solución:

Primero la función NO es continua en el intervalo definido.

$$\text{Ahora: } f(-2) = -\frac{1}{2} \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{En seguida: } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{c^2}$$

$$\text{Ahora: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow -\frac{1}{c^2} = \frac{1/2 - (-1/2)}{2 - (-2)} \Rightarrow c^2 = -4 \Rightarrow c = \pm 2i$$

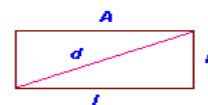
Como la solución es imaginaria, entonces No hay un  $c$  en le intervalo definido.

## EJERCICIOS

1. Dada la función  $f(x) = x^2 + 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$ . Demostrar si cumple el teorema de Rolle.
2. Dada la función  $f(x) = x^3 + x^2$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , demostrar si cumple el teorema de Rolle.
3. Para la función  $g(x) = |x| + 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , mostrar que dicha función No cumple el teorema de Rolle.
4. Sea la función  $f(x) = x^3 + x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . Hallar el valor  $c$  para el cual se cumple el teorema del valor medio.
5. Un cultivo de microorganismos crece a razón de  $g(t) = t^2 + 2$  gramos en  $t$  horas. Muestre que en las dos primeras horas hay un instante  $t_0$  en que la masa alcanza su crecimiento promedio. Identificar el valor  $t_0$ .
6. Por medio del teorema del valor medio, demostrar que la grafica de una función cuya derivada es una constante para todo  $x$  en el dominio de la función, es una recta.

## CAPÍTULO ONCE: APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

## Lección 43: Razones de Cambio Relacionadas:



Cuando tenemos un rectángulo y deseamos saber como cambia el área  $A$  y la longitud de la diagonal  $d$ , respecto al cambio de la longitud de la base  $l$ , estamos ante una razón de cambio relacionadas, debido a que tenemos dos variables; área y longitud de la diagonal, que cambian respecto a una tercera variable; longitud de la base.

Sea  $\frac{dA}{dl}$  el cambio del área respecto al cambio de la longitud de la base, sea  $\frac{d(d)}{dl}$  el cambio de la longitud de la diagonal respecto al cambio de la longitud de la base, entonces  $\frac{dA}{dl}$  y  $\frac{d(d)}{dl}$  son tasas de cambio relacionadas.

**DEFINICIÓN:**

Sean  $x$  e  $y$  dos variables que dependen simultáneamente de una tercera variable digamos  $t$ , la idea es hallar el cambio de la variable  $y$  a partir de la variable  $x$ , es decir calcular  $\frac{dy}{dt}$  a partir de  $\frac{dx}{dt}$  lo cual se puede desarrollar, debido a que las dos variables son tasas de cambio relacionadas.

Por lo general la variable independiente que relaciona las variables dependientes es el **tiempo**.

**Pasos para Resolver Tasa de Cambio Relacionadas:**

Existen muchos fenómenos donde se presentan tasa o razones de cambio relacionadas. Por ejemplo la tasa de llenado de un depósito de líquido, la tasa de valor de la finca raíz, la tasa de volumen de un globo, otros.

Para resolver adecuadamente este tipo de problemas, es pertinente conocer algunas pautas de referencia.

1. Hacer una gráfica que ilustre el fenómeno.
2. Identificar las variables que cambian con el tiempo
3. Analizar la situación, para identificar que razón se conoce y cual se debe calcular.
4. Plantear la ecuación que relaciona las variables.

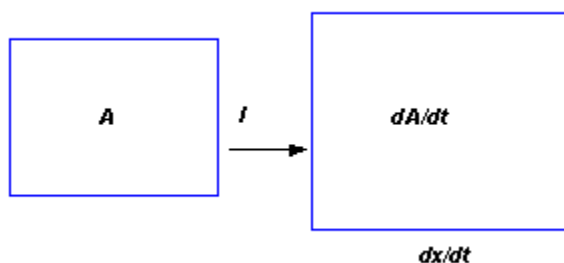
5. Derivar implícitamente la ecuación obtenida, para identificar la ecuación de razón de cambio.
6. Hacer la relación que determine las razones según las cuales las variables van cambiando a través del tiempo.

### Ejemplo 131:

Un cuadrado se expande de tal manera que su longitud aumenta a razón de 3 cm/seg. ¿Cuál será la razón del aumento del área con la razón de aumento de la longitud, cuando la longitud es de 6 cm?

### Solución:

- ) Hacemos la gráfica que nos ilustra el fenómeno



- ) Las variables:

Área de un cuadrado:  $A = x^2$  y  $x = f(t)$  Longitud en función del tiempo.

- ) Las razones:  $dx/dt$  se conoce,  $dA/dt$  no se conoce; es el que se desea hallar.

- )  $f'(t) = dx/dt$  y  $dA/dx = 2x$

$$- ) \frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

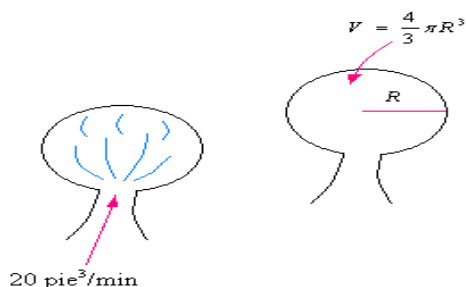
$$- ) \frac{dA}{dt} = 2(6cm)(3cm / seg) = 36cm^2 / seg$$

El área aumenta a razón de 6 cm<sup>2</sup>/seg. Cuando  $x = 3$  cm.

### Ejemplo 132:

A un globo se le inyecta aire a razón de 20 pie<sup>3</sup>/min. ¿A qué razón cambia el radio del globo, cuando éste mide 3 pies?

### Solución:



- ) Las variables:

Volumen de esfera  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  y  $R = f(t)$  Radio en función del tiempo.

- ) Las razones:  $dV/dt$  se conoce,  $dR/dt$  no se conoce; es el que se desea hallar.

- )  $f'(t) = dR/dt$  y  $\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 * \frac{dR}{dt}$

- )  $\frac{dR}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi R^2}$

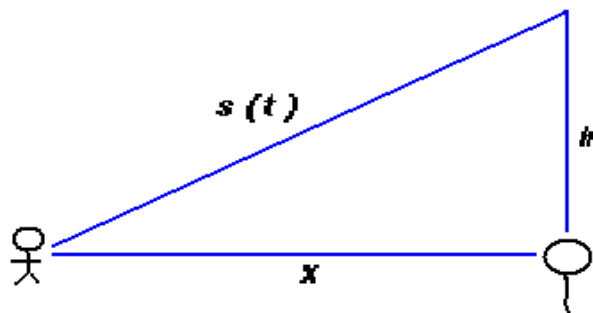
- )  $\frac{dR}{dt} = \frac{20 \text{ pies}^3 / \text{min}}{4\pi (9 \text{ pie}^2)} = 0,18 \text{ pie} / \text{min}$

El radio cambia a razón de 0,18 pie/min. Cuando  $R = 3$  pies.

### Ejemplo 133:

Un globo que esta a nivel del piso y se encuentra a 150 metros de una persona, éste se suelta y se eleva en línea recta a razón de 8 m/seg. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia de la persona al globo, cuando el globo esta a 50 metros de altura?

### Solución:



Donde las variables son:

$h$  = Altura del globo

$x = 150$  metros

$s(t)$  = Distancia del observador al globo

- ) Las razones:  $dh/dt$  se conoce,  $ds/dt$  no se conoce; es el que se desea hallar.
- )  $f'(t) = ds/dt$ . Para la otra ecuación, partimos de que tenemos un triángulo rectángulo por el teorema de Pitágoras:  $s^2 = 150^2 + h^2$ . Para  $h = 50$ , obtenemos:

$$s = \sqrt{150^2 + 50^2} \Rightarrow s = 50\sqrt{10}$$

- ) Para obtener la razón derivamos la ecuación  $s^2 = 150^2 + h^2$  respecto al tiempo.

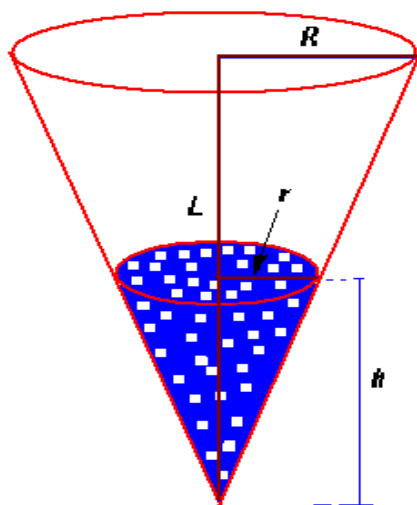
Entonces:  $2s * \frac{ds}{dt} = 2h * \frac{dh}{dt}$  Despejamos  $ds/dt$  que es la pregunta:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2h \frac{dh}{dt}}{2s} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{50 * 8}{50\sqrt{10}} = \frac{4}{5}\sqrt{10} \text{ m/seg}$$

El globo se aleja del observador a razón de  $\frac{4}{5}\sqrt{10} \text{ m/seg}$

### Ejemplo 134:

Un tanque circular cónico se está llenando de agua a razón de  $8 \text{ pie}^3/\text{min}$ . La altura del tanque es de 12 pies y el radio de la parte circular es de 6 pies. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua, cuando la profundidad del agua es de 4 pies?



### Solución:

- ) Las variables:

$R$  = Radio del cono

$L$  = Altura del tanque 12 pies

$h$  = Profundidad del agua

$r$  = Radio del nivel del agua

$$\frac{dV}{dt} = 8 \text{ pie}^3 / \text{min}$$

$$\frac{dh}{dt} = \text{Incognita}$$

Las variables  $r$  y  $h$  se relacionan con el tiempo

Como se tienen tres variables que cambian con el tiempo se debe hacer una relación entre ellas.

Por triángulos semejantes:  $\frac{r}{h} = \frac{R}{L} \Rightarrow r = \frac{h * R}{L} = \frac{6R}{12} = \frac{h}{2}$

Reemplazamos en la ecuación de volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{h}{2} \right)^2 h = \frac{1}{12} \pi h^3$$

Derivamos esta ecuación:

$$V = \frac{1}{12} \pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{3}{12} \pi h^2 * \frac{dh}{dt}$$

Despejando  $dh/dt$  tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\cancel{\frac{dV}{dt}}}{\frac{3}{12} \pi h^2} = \frac{4 * 8 \text{ pie}^3 / \text{min}}{\pi * (4)^2} = \frac{2}{\pi} \cong 0,637 \text{ pie} / \text{min}$$

El nivel del agua se eleva a razón de 0,637 pie / min.

#### Lección 44: Formas Indeterminadas:

$$\frac{0}{0} = ?$$

En la teoría de límites, en muchas ocasiones nos encontramos con situaciones como las siguientes:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0, 0 * \infty,$$



Estos casos se denominan indeterminaciones, ya que no se puede tomar una decisión respecto a la operación. La explicación es relativamente sencilla.

*Para el primer caso, el cero del numerador tiende la operación a cero, mientras que el denominador tiende la operación al infinito, luego “Las fuerzas son contrarias”, por lo cual no se puede tomar una decisión. Igual ocurre con la segunda y tercera opción. La cuarta opción, el infinito de la base hace que la operación sea infinita, mientras que el cero del exponente envía la operación a uno, luego también tienen “fuerzas contrarias”.*

Las herramientas algebraicas y geométricas permiten resolver algunos tipos de límites, como se ha analizado en la temática de límites; Unidad dos. Pero existen diversos tipos de límites donde el álgebra y la geometría NO son suficientes para resolverlos, todos aquellos que conllevan a las formas indeterminadas.

En 1.696 el matemático Francés Guillaume Francois antoine L'Hopital, en su libro de Cálculo; el cual fue el primero en su genero, publico una regla que lleva su nombre y que resolvía el problema de ciertas indeterminaciones donde se presentaban cocientes, diferencias y otros.



### TEOREMA: REGLA DE L'HOPITAL.

Sean Las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  derivables en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Sea un valor  $c$  que pertenece al intervalo  $(a, b)$ . Asumiendo que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$  en dicho

intervalo. Si  $\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{0}{0}$  Entonces:  $\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

### Demostración:

Sea  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  y sea  $g'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$  Entonces:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right]}{\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right]} = \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}} \right] = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)]}{\lim_{x \rightarrow c} [g(x) - g(c)]}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)]}{\lim_{x \rightarrow c} [g(x) - g(c)]} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} f(c)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(c)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$

Por consiguiente:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Es pertinente resaltar que la Regla de L'Hopital solo tiene aplicabilidad en los casos donde se presenta indeterminaciones de la forma:  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$ . Por otro lado, la regla se puede aplicar más de una vez si así se requiere.

### Ejemplo 135:

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

### Solución:

Evaluando directamente tenemos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$ . Observamos que se presenta una indeterminación de la forma que nos permite aplicar L'Hopital. Por la definición:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)] = \cos(0) = 1.$$

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Recordemos que este límite lo demostramos por métodos geométricos.

### Ejemplo 136:

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

### Solución:

Evaluando directamente  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2}$

Observamos que se presenta una indeterminación, de la forma  $0/0$ , lo que nos permite utilizar L'Hopital para eliminar la indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 0}{2x + 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3 * 1^2}{2 * 1} = \frac{3}{2}$$

**Ejemplo 137:**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\ln|1+x|}$

**Solución:**

Evaluando directamente  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\ln|1+x|} = \frac{\tan(0)}{\ln|1|} = \frac{0}{0}$  Una indeterminación.

Aplicando L'Hopital para eliminar la indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\ln|1+x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2(2x)}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2(2x)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{2 * \sec^2(2 * 0)}{\frac{1}{1+0}} = \frac{2}{1} = 2$$

**Ejemplo 138:**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

**Solución:**

Evaluando directamente  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$  Se presenta una indeterminación a la cual le podemos aplicar L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

**Ejemplo 139:**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4^x - 2^x}{x} \right]$

**Solución:**

Evaluando directamente  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4^x - 2^x}{x} \right] = \frac{4^0 - 2^0}{0} = \frac{0}{0}$  Como se forma una indeterminación de la forma 0/0 se puede aplicar L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4^x - 2^x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4^x \ln|4| - 2^x \ln|2|}{1} \right] = 4^0 \ln|4| - 2^0 \ln|2| = \ln|4| - \ln|2| = \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(2)$$

**Ejemplo 140:**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin(x)]^x$

**Solución:**

Evaluando directamente  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin(x)]^x = [\sin(0^+)]^{0^+} = 0^0$  Se observa una indeterminación de la forma  $0^0$ , a lo cual NO se puede aplicar L'Hopital, pero haciendo una transformación matemática se puede desarrollar por L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin(x)]^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ e^{\ln |\sin(x)|^x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ e^{x \ln |\sin(x)|} \right]$$

Trabajemos la parte exponencial y luego lo agrupamos en la expresión dada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln |\sin(x)|] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |\sin(x)|}{1/x}$$

Al evaluar de nuevo:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |\sin(x)|}{1/x} = \frac{\ln |\sin(0^+)|}{1/0^+} = \frac{\ln(0)}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$

Ahora si podemos aplicar L'Hopital, ya que esta de la forma que permite a aplicabilidad de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |\sin(x)|}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot(x)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\tan(x)}$$

Al evaluar se sigue presentando indeterminación, luego podemos volver a aplicar L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sec^2(x)} = \frac{-2 * 0^+}{\sec^2(0^+)} = \frac{0}{1} = 0$$

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin(x)]^x = 0$

### - ) Formas no indeterminadas:

Dentro del álgebra de límites, se presentan situaciones que se consideran no indeterminadas. A continuación se presentan dichos casos, que puede ser de ayuda en diversas situaciones.

$$0^\infty = 0$$

$$\infty * \infty = \infty$$

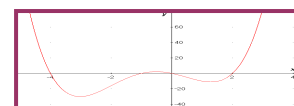
$$\infty^\infty = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

En cada una de ellas, no se presenta ambigüedad, ya que se puede tomar una decisión, que es precisamente lo que se debe hacer al resolver un límite.

### Lección 45: Máximos y Mínimos de una Función:



#### EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN:

Para analizar los máximos y mínimos, inicialmente estudiaremos los llamados extremos.

#### 1. Extremos Absolutos:

Sea la función  $y = f(x)$ , continua en su dominio de definición  $D$ , sea una valor  $c$ , tal que  $c \in D$ , los valores máximos y mínimos en  $D$ , se conocen como extremos de la función.

- **Máximo Absoluto:** Un número  $f(c)$  es un máximo absoluto de la función  $f(x)$  si se cumple:  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f(x)$ .

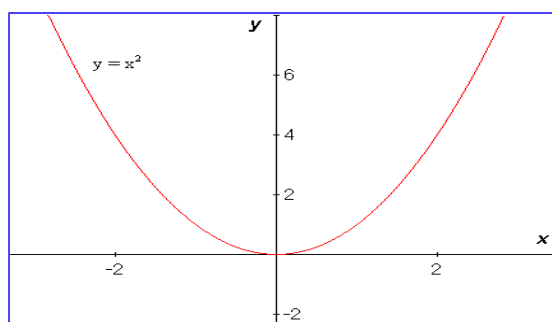
- **Mínimo Absoluto:** Un número  $f(c)$  es un mínimo absoluto de la función  $f(x)$  si se cumple:  $f(x) \geq f(c)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f(x)$ .

#### Ejemplo 141:

Sea  $y = x^2$ . Hallar los máximos y mínimos absolutos, si los tiene.

#### Solución:

La función en estudio es continua en todos los reales, así el dominio es  $(-\infty, \infty)$ , así la solución es muy fácil



observarla gráficamente, veamos:

La gráfica nos muestra que la función analizada NO tiene máximos absolutos.

Pero podemos observar que la función tiene un mínimo absoluto.  $f(0) = 0$

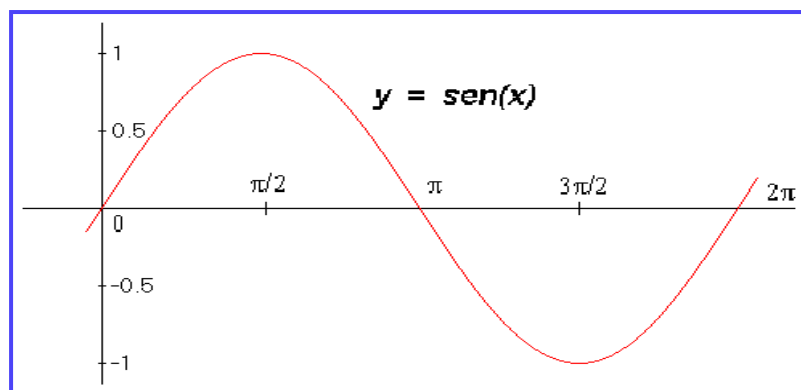
Entonces para cualquier  $x$ ,  $f(x) \geq f(0)$

### Ejemplo 142:

Sea  $y = \sin(x)$ . Hallar los máximos y mínimos absolutos, si los tiene.

### Solución:

La función es continua en todos los reales. Se define el dominio entre  $[0, 2\pi]$ . Al graficar dicha función se puede ver los máximos y mínimos.



Según la gráfica se puede observar que la función tiene un máximo absoluto en  $x = \pi/2$ .  $f(\pi/2) = 1$ . Simultáneamente tiene un mínimo absoluto en  $x = 3\pi/2$ , entonces  $f(3\pi/2) = -1$ .

### TEOREMA:

Sea la función  $f(x)$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f(x)$  SIEMPRE tendrá un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo.

### Demostración:

En el grupo colaborativo buscar la demostración y analizarla, es relativamente sencilla.

## 2. Extremos Frontera:

Cuando un extremo absoluto de la función  $f(x)$  se encuentra en uno de los extremos del intervalo, entonces  $f(x)$  tiene un extremo frontera.

## 3. Extremos Relativos:

Cuando analizamos los extremos absolutos, estamos trabajando en el dominio de la función, pero a veces solo se necesita una parte de dicho dominio, digamos un intervalo. La idea es analizar los valores extremos en el intervalo definido.

- **Máximo Relativo:** Un número  $f(c)$  es un máximo relativo de la función  $f(x)$  si se cumple:  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x$  en algún intervalo abierta de  $f(x)$ , que contenga a  $c$ .

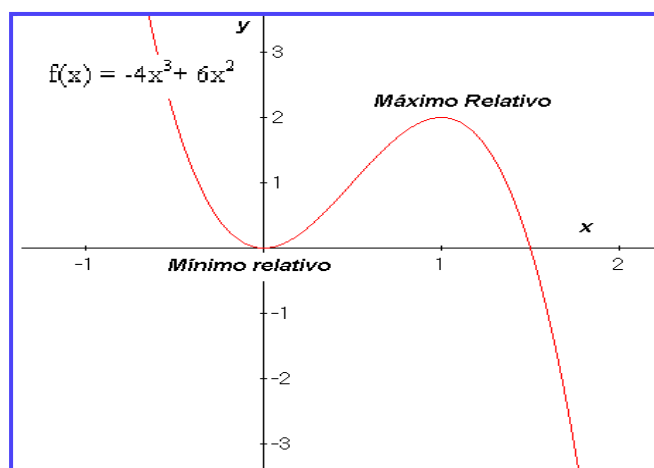
- **Mínimo Relativo:** Un número  $f(c)$  es un mínimo relativo de la función  $f(x)$  si se cumple:  $f(x) \geq f(c)$  para todo  $x$  en algún intervalo abierta de  $f(x)$ , que contenga a  $c$ .

**NOTA:** De acuerdo a las definiciones anteriores, haciendo un análisis de las mismas, podemos afirmar que todos los extremos absolutos; excepto extremos frontera, son también extremos relativos, pero no lo contrario.

Veamos gráficamente extremos relativos.

Sea la función  $f(x) = -4x^3 + 6x^2$

Se observa en la gráfica de la función  $f(x)$  que en  $x = 1$ , hay un máximo relativo y que en  $x = 0$ , hay un mínimo relativo.



## - ) OBTENCIÓN DE VALORES EXTREMOS:

Los únicos puntos del dominio de una función  $f(x)$  donde se pueden tener valores extremos son en los puntos críticos y/o en los puntos extremos frontera.

**VALOR CRÍTICO:** El valor crítico de una función  $y = f(x)$ , es un valor  $c$  de su dominio para el cual:  $f'(c) = 0$  ó  $f'(c) = \text{No exista}$

Para determinar los valores extremos se puede proceder de la siguiente manera:

- a-) Se deriva la función, igualando la derivada a cero, con el fin de encontrar los valores críticos.
- b-) Se evalúa los valores críticos en  $f(x)$ , el valor mayor nos indica un máximo y el valor menor un mínimo.

### Ejemplo 143:

Hallar los valores extremos de la función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[-2, 1]$ .

### Solución:

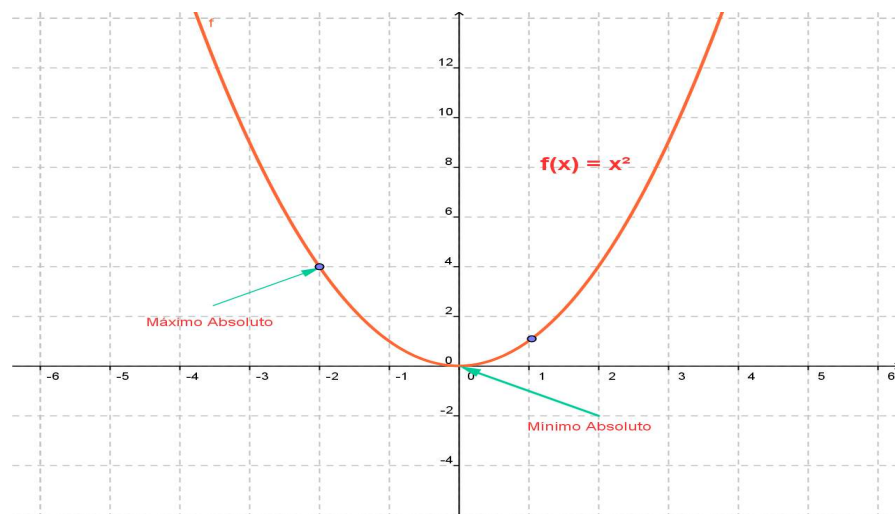
Como  $f(x) = x^2$ , entonces  $f'(x) = 2x$

Ahora:  $2x = 0$ , entonces  $x = 0$ . Valor crítico.

Reemplazamos los valores críticos en la función:

$$f(x = 0) = 0^2 = 0; \quad f(x = -2) = 4; \quad f(x = 1) = 1.$$

Luego hay un mínimo absoluto en  $y = 0$ ; y un máximo absoluto en  $y = 4$ .





### Ejemplo 144:

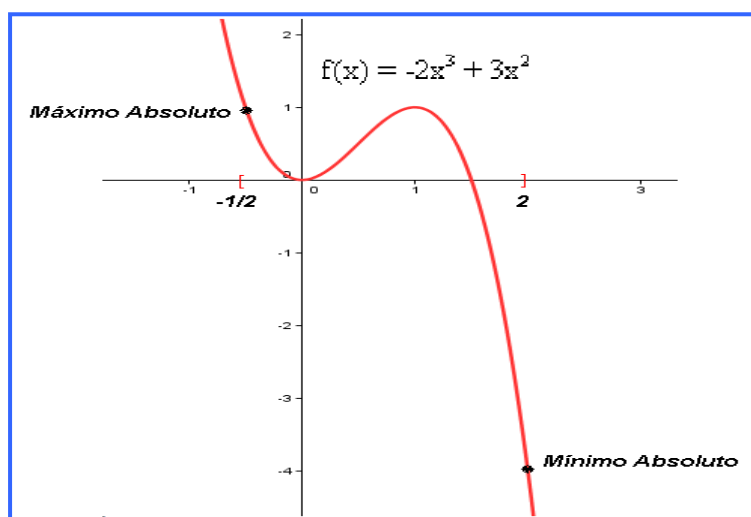
Hallar los valores extremos de la función  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  definida en el intervalo  $[-1/2, 2]$

### Solución:

Como  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ , entonces  $f'(x) = -6x^2 + 6x$

Entonces:  $-6x^2 + 6x = 0$ , despejando  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Entonces los Valores críticos son:  $-1/2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ .

$f(-1/2) = 1$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(1) = 1$ ;  $f(2) = -4$ .



Hay un máximo absoluto en  $y = 1$  y mínimo absoluto en  $y = -4$ .

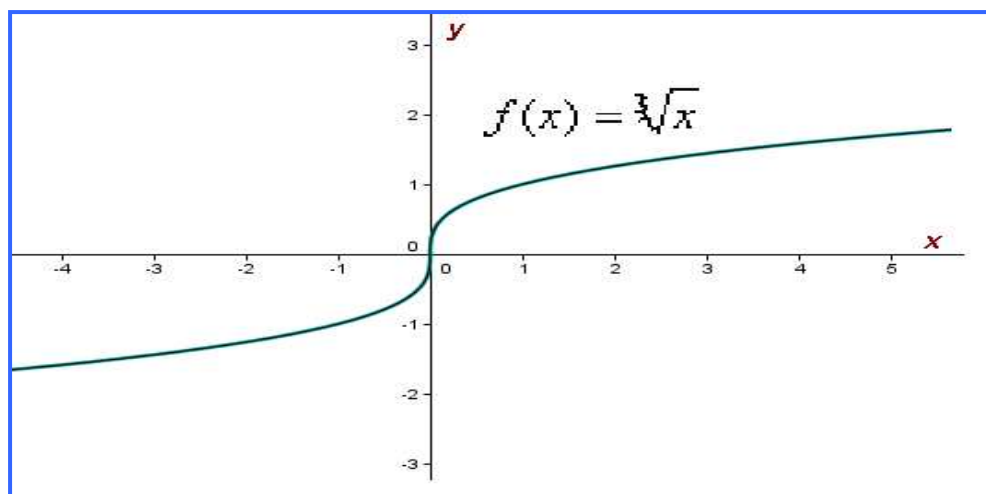
Los valores extremos de la función  $f(x)$  se da en sólo en puntos críticos ó puntos frontera. NO siempre cualquier punto crítico o punto frontera, nos indica la presencia de un Valor Extremo. Veamos un caso.

### Ejemplo 145:

Hallar los valores extremos de la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  En su dominio de definición.

**Solución:**

Como  $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$  la derivada NO esta definida en  $x = 0$ . Por consiguiente la función NO tiene valores extremos en  $x = 0$ .

**TEOREMA:**

Si la función  $f(x)$  definida en el intervalo  $(a, b)$ , tiene un extremo relativo en el valor  $c$  donde  $c \in (a, b)$ , entonces  $c$  es un Valor Crítico.

La demostración, se puede consultar en cualquier libro de cálculo.

**TEOREMA DE FERMAT:**

Sea  $f(x)$  una función definida en un intervalo  $(a, b)$ , el cual contiene al punto  $c$ , si  $f(x)$  tiene un extremo relativo en  $c$  y si  $f'(x)$  existe; entonces  $f'(c) = 0$ .

**Demostración:**

Utilicemos el método de la contradicción para demostrar dicho teorema.

Si  $f(x)$  es derivable en  $c$  entonces  $f'(x)$  tomará un valor positivo, negativo o cero. Asumiendo que  $f'(x) > 0$  entonces:  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$  Esto implica que para  $f(x)$  existe un intervalo  $(a, b)$ , en donde  $c \in (a, b)$ , tal que  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$  para todo  $x \neq c$ , en el intervalo definido.

Veamos el análisis de los posibles resultados.

- Si  $x < c$  y  $f(x) < f(c)$  Entonces  $f(c)$  no es un mínimo relativo.
- Si  $x > c$  y  $f(x) > f(c)$  Entonces  $f(c)$  no es un máximo relativo.

Por consiguiente la Hipótesis de que  $f'(x) > 0$  Contradice la afirmación de que  $f(c)$  sea un extremo relativo. Analizando el caso contrario; es decir,  $f'(c) < 0$  contradice que  $f(c)$  sea un extremo relativo también. Por tanto solo nos queda una posibilidad de las posibles:  $f'(c) = 0$ .

Con los anteriores argumentos se puede confirmar la definición inicial; es decir, que  $c$  es un valor crítico de la función  $f(x)$ .

#### Ejemplo 146:

Hallar los valores extremos de la función  $f(x) = 4x - 5x^{4/5}$  En el intervalo  $[-2, 4]$ .

#### Solución:

$$f(x) = 4x - 5x^{4/5} \Rightarrow f'(x) = 4 - \frac{4}{x^{1/5}} \text{ Igualamos a cero para despejar } x: 4 - \frac{4}{x^{1/5}} = 0$$

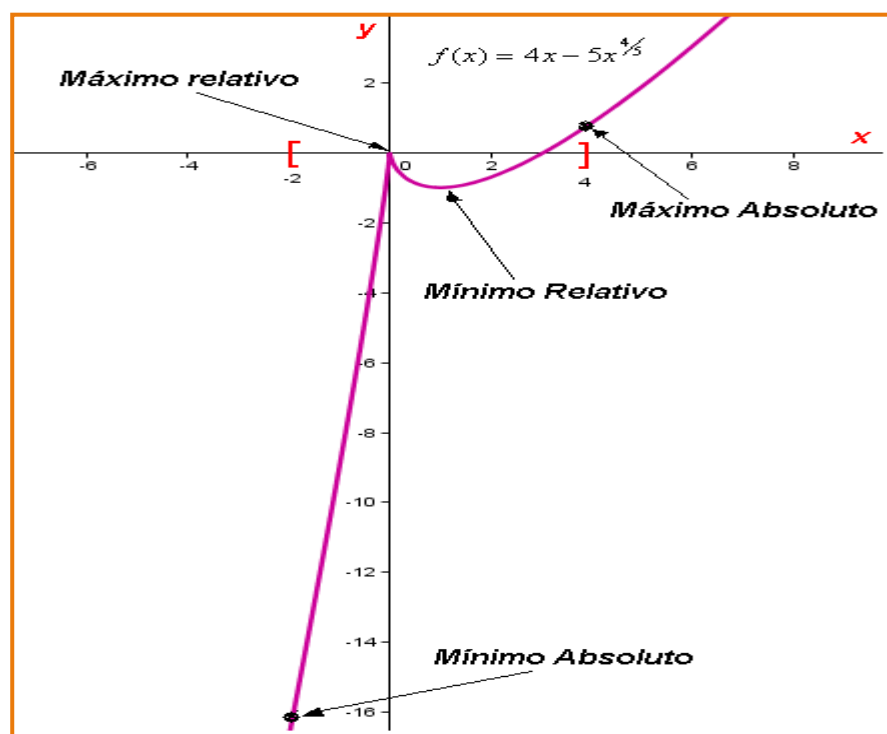
Es evidente que en  $x = 0$ ,  $f'(x)$  no está definida. Entonces:  $\frac{4}{x^{1/5}} = 4 \Rightarrow x = 1$

Los valores críticos de  $x$ : -2, 0, 1, 4.

Reemplazando dichos valores en  $f(x)$ :

$$f(-2) = -16,705; \quad f(0) = 0; \quad f(1) = -1; \quad f(4) = 0,843$$

Por consiguiente en  $x = -2$  hay un mínimo absoluto, en  $x = 4$  hay un máximo absoluto. Además en  $x = 1$ , hay un mínimo relativo.



## Lección 46: Optimización

En todas las áreas del conocimiento se habla de encontrar el modelo óptimo, el modelo que minimice material y/o costos. El análisis de los máximos y mínimos, están asociados a los conceptos de maximización y minimización, lo que se conoce como *Optimización*.

En esta parte del curso, se analizarán problemas de optimización, para resolverlos, requieren buenos conocimientos de derivación; los cuales hemos estudiado a lo largo del curso. También buenos principios de geometría y un buen sentido lógico, el cual todos tenemos y/o estamos desarrollando.

A continuación se presenta una guía para resolver problemas de optimización.

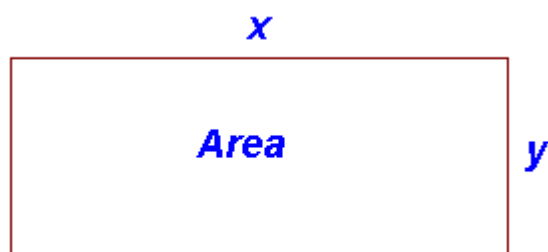
1. Leer muy bien el problema hasta entenderlo completamente.
2. Ilustrar el fenómeno gráficamente, con el fin de tener una idea clara del problema.
3. Identificar las variables involucradas en el problema
4. Identificar lo que se debe optimizar
5. Escribir el modelo matemático que explica el fenómeno
6. Determinar el valor máximo y/o mínimo del problema en cuestión.
7. Responder la pregunta al problema planteado.

### Ejemplo 147:

Un rectángulo tiene 240 cm. de perímetro, ¿Cuáles deben ser las medidas del largo y ancho, de tal manera que se obtenga la máxima área?

### Solución:

El problema es hallar las medidas de los lados del rectángulo, de tal forma que se obtenga la máxima área.



Perímetro:  $P = 2x + 2y = 240$ . Donde  $x$  e  $y$  son las longitudes de los lados. Lo que se debe optimizar son las longitudes.

El modelo: Área de un rectángulo:  $A = x \cdot y$ , pero debemos expresar en función de una sola variable, ya que tenemos dos variables  $x$  e  $y$ . Como conocemos

el perímetro, de esta ecuación despejamos  $y$ :  $P = 2x + 2y = 240$  entonces:

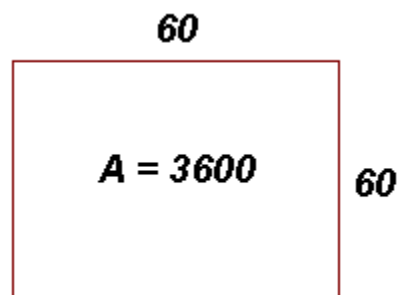
$y = 120 - x$ . Ahora reemplazamos en la ecuación de lo que debemos optimizar en este caso el área:

$$\frac{dA}{dx} = 120 - 2x \text{ Derivamos para identificar los valores críticos.}$$

Igualando a cero:  $120 - 2x = 0$  entonces:  $x = 60$ . Como es el único valor crítico, corresponde aun máximo. Para el área máxima,  $x = 60$ . En seguida debemos hallar el valor de  $y$ :

Como  $P = 2x + 2y = 240$ , reemplazando  $x$ , tenemos:  $2(60) + 2y = 240$ , entonces  $y = 60$ .

Conclusión, la máxima área de un rectángulo se consigue cuando las longitudes de largo y ancho son iguales; es decir, un cuadrado.

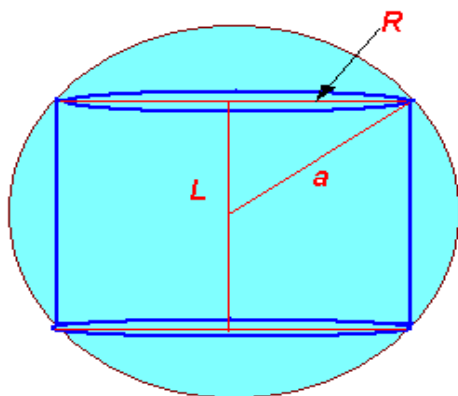


### Ejemplo 148:

Un cilindro circular recto esta inscrito en una esfera de radio  $a$ , cuales serán las dimensiones del cilindro que tenga el volumen máximo.

### Solución:

El problema consiste en hallar el largo y radio del cilindro, que tenga el máximo volumen.



El volumen de un cilindro circular recto:  $V = \pi R^2 L$  Debemos expresar la ecuación en términos de  $L$  o de  $R$ , expresémoslo en función de  $R$ . Para hacerlo debemos hacer la relación que se observa en la gráfica entre  $L$ ,  $R$  y  $a$ , lo cual es de un triángulo rectángulo.

$$a^2 = \frac{L^2}{4} + R^2 \text{ Despejamos } L: L^2 = 4a^2 - 4R^2 \Rightarrow L = \sqrt{4a^2 - 4R^2}$$

$$\text{Reemplazamos en la ecuación del volumen: } V(R) = \pi R^2 \sqrt{4a^2 - 4R^2}$$

$$\text{Reorganizando: } V(R) = \pi \sqrt{4a^2 R^4 - 4R^6} \text{ Derivando: } \frac{dV}{dR} = \frac{\pi(16a^2 R^3 - 24R^5)}{2\sqrt{4a^2 R^4 - 4R^6}}$$

$$\text{Simplificando: } \frac{dV}{dR} = \frac{\pi(8a^2 R^3 - 12R^5)}{\sqrt{4a^2 R^4 - 4R^6}}$$

$$\text{Igualamos a cero tenemos: } \pi(8a^2 R^3 - 12R^5) = 0 \Rightarrow \pi R^3(8a^2 - 12R^2) = 0$$

$$\text{Así } R = 0 \text{ y } 8a^2 - 12R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{4}{6}a^2$$

Los valores críticos son  $R=0$  y  $R=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

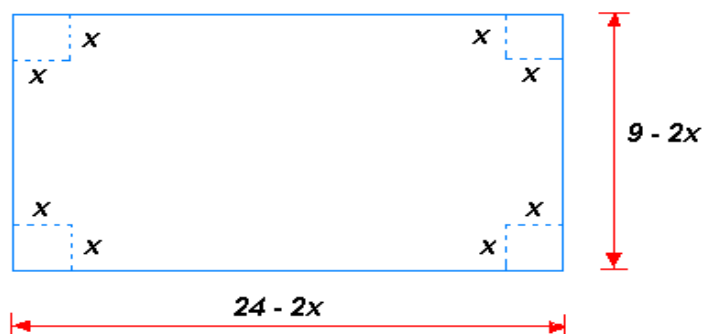
Las dimensiones del cilindro:  $R=\frac{\sqrt{6}}{3}a$  y  $L=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

### Ejemplo 149:

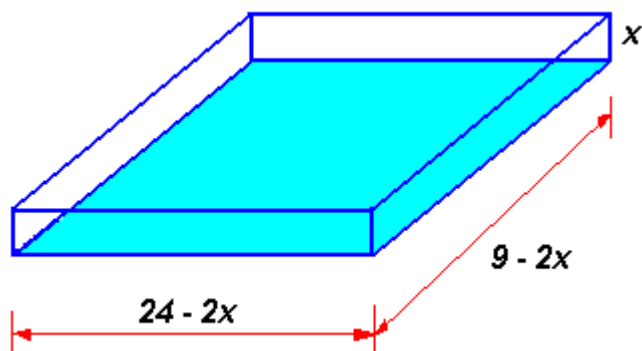
Una industria de empaques debe construir una caja de cartón sin tapa. Para el diseño cuenta con rectángulos de 42 cm. X 9 cm. Se deben cortar pedazos cuadrados idénticos en las esquinas para doblarlos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja, de tal forma que ocupen el máximo volumen?

### Solución:

La situación es hallar el largo L, ancho A y grosor G de una caja que presente el máximo volumen. La longitud de los cuadrados de las esquinas designémosla como x. Veamos la gráfica.



Cuando el material se dobla queda como se muestra a continuación.



El volumen de un paralelepípedo es:  $V = L \cdot A \cdot G$ . Expresemos esta ecuación en función de  $x$ .

$$V = (24 - 2x)(9 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 66x^2 + 216x$$

Aquí hay una restricción:  $0 \leq x \leq 9/2$ . Ya que  $x$  no puede ser mayor que  $9$ .

Para optimizar, derivamos el volumen:  $\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 132x + 216 = 0$

Reorganizando la ecuación:  $12(x^2 - 11x + 18) = 0$

Factorizando:  $12(x - 9)(x - 2) = 0$

Los valores críticos:  $x = 2$  y  $x = 9$ . Como  $9$  no está en el intervalo que puede tomar la variable, entonces el valor a tomar es  $x = 2$ .

Por consiguiente:

Largo:  $L = 24 - 2(2) = 20$  cm.

Ancho:  $A = 9 - 2(2) = 5$  cm.

Volumen de la caja:  $V = 20 \cdot 5 \cdot 2 = 200$  cm<sup>3</sup>.

### Ejemplo 150:

Un Arquitecto construye el frente de una casa en forma parabólica, cuya ecuación es  $y = 12 - x^2$ . El diseño debe ser tal que la puerta de entrada será rectangular y dos de sus vértices deben tocar la curva. El Arquitecto desea que la puerta ocupe la mayor área posible. ¿Cuáles debe ser las dimensiones de la puerta?

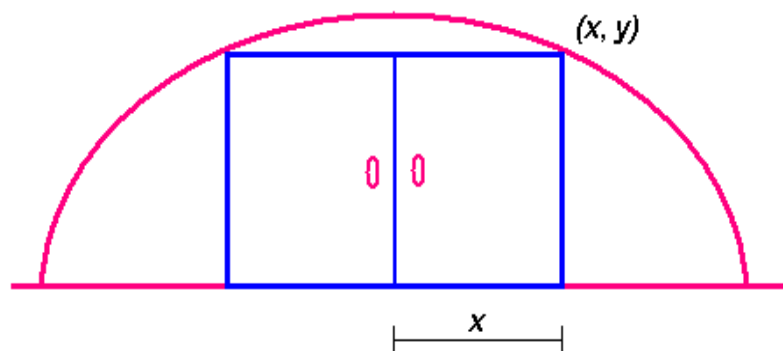
### Solución:

El problema consiste en hallar el largo  $L$  y la altura  $H$  de la puerta, de tal forma que dos de sus vértices toquen la curvatura de la fachada.

Los datos: Forma de la fachada:  $y = 12 - x^2$ . Área de la puerta:  $A = 2x \cdot y$

Veamos la gráfica.





De acuerdo a la situación:  $x \geq 0$ . Pero identifiquemos en qué intervalo puede estar  $x$ :  
 Como  $12 - x^2 = 0$ , factorizando para despejar la variable:  $(\sqrt{12} - x)(\sqrt{12} + x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Así la variable estará entre:  $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$  En el punto  $(x, y)$  la parábola y el rectángulo son equivalentes. Entonces:  $A = 2x * y \Rightarrow A = 2x * (12 - x^2) = 24x - 2x^2$  Derivamos el área respecto a la longitud.  $\frac{dA}{dx} = 24 - 4x$ , igualando a cero:  $24 - 4x = 0$ , entonces:  $6(2 - x) = 0$ , así los valores críticos son 2 y -2, pero el valor que satisface las condiciones del problema es  $x = 2$ .

Las dimensiones de la puerta serán:

Largo de la puerta:  $L = 2 * x = 2 * 2 = 4$ .

Altura de la puerta:  $H = 12 - x^2 = 12 - (2)^2 = 8$ .

Área máxima de la puerta:  $A = 4 * 8 = 32$ .

### Ejemplo 151:

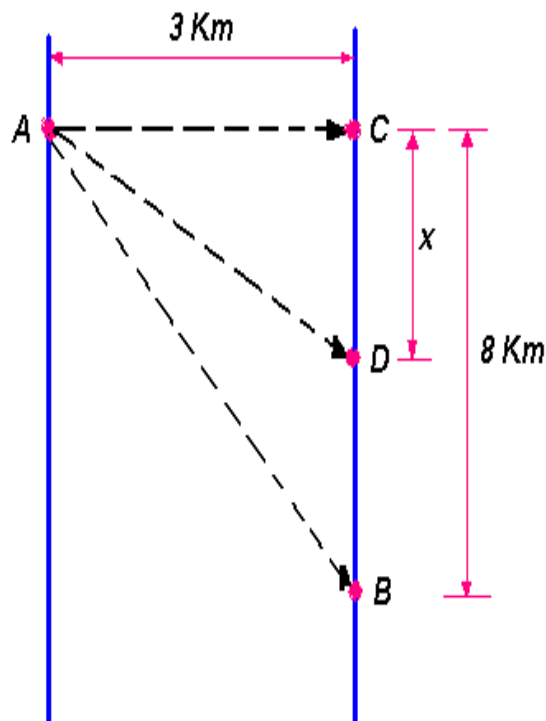
Una persona esta a la orilla de un río (punto A) que tiene 3 Km. de ancho y debe llegar al lado opuesto a 8 Km. orilla debajo de donde partió (punto B). La persona tiene varias opciones.

- a-) Remar en línea recta hasta el lado opuesto (punto C) y correr orilla abajo hasta llegar al destino (puntos B).
- b-) Remar directamente hasta su destino cruzando el río, del punto A al punto B.
- c-) Remar hasta un punto intermedio (punto D) y correr hasta el destino final.

Si la persona rema a razón de 6 km/hr y corre a razón de 8 Km/hr. En donde debe desembarcar la persona para llegar lo más rápido posible a su destino.

### Solución:

Para comprender mejor el problema hagamos la gráfica explicativa.



Como vemos en la gráfica:

$x$  = distancia CD, entonces:  $|DB| = 8 - x$

Asumiendo aguas tranquilas, entonces determinemos el tiempo que tarda en las opciones propuestas:

Recordemos que  $t = x/v$ .

a-)  $t_1 = 3/6 = 0,5$  y  $t_2 = 8/8 = 1$ , así el tiempo que utiliza si toma la opción a será de **1,5 horas**.

b-) La distancia AB se obtiene por Pitágoras,  $AB = 8,54$ .

Como solo rema:  $t = 8,54/6 =$  **1,42 horas**

c-) Para la opción c, debemos hacer un análisis de la siguiente manera: Distancia

$$AD = \sqrt{x^2 + 9}, \text{ entonces } t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} \text{ y } t_2 = \frac{8-x}{8}$$

El dominio de la variable  $x$  es:  $0 \leq x \leq 8$ . El tiempo total del recorrido  $T$  será:

$T = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ . Cuando  $x = 0$ , es porque la persona rema hasta C. Cuando  $x = 8$ , es porque la persona rema directamente a B. Pero si  $x$  está entre 0 y 8, la persona rema hasta un punto y luego corre, para determinar este valor de  $x$  derivemos la función.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8} = 0 \text{ Reorganizamos los términos: } \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8}$$

$$8x = 6\sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow \frac{4}{3}x = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 = x^2 + 9 \text{ Despejamos } x:$$

$$\frac{16}{9}x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 - x^2 = 9 \Rightarrow \frac{7}{9}x^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \cong 3,40$$

$$\text{Evaluando este valor en la función } T: T = \frac{\sqrt{(3,40)^2 + 9}}{6} + \frac{8 - 3,40}{8} = 0,7557 + 0,575 = 1,33 \text{ hr.}$$

Según los resultados la opción más adecuada es la C, remar hasta el punto D; es decir, 3,4 Km. Orilla abajo y luego correr hasta B, tardando **t = 1,33 horas**.

### Lección 47: Análisis de Graficas:



Una de las formas más pertinentes de analizar un fenómeno, es por medio de la curva de la función que modela el mismo. Matemáticamente las curvas son representaciones gráficas de las funciones. En este aspecto, es pertinente estudiar dos características de las mismas, la monotonía y la concavidad.

#### 1. MONOTONÍA:

Una función es monotonía cuando es creciente o decreciente.

- ) Sea la función  $f(x)$ , definida en el intervalo  $I$ , Si para  $x_1 < x_2$ , dado que  $x_1$  y  $x_2 \in I$  se cumple que  $f(x_1) < f(x_2)$ , la función es *creciente*.
- ) Sea la función  $f(x)$  definida en el intervalo  $I$ , Si para  $x_1 < x_2$ , dado que  $x_1$  y  $x_2 \in I$ , se cumple que  $f(x_1) > f(x_2)$ , la función es *decreciente*.

Otra forma de analizar la monotonía de una función es por medio de la derivación.

#### - ) CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA:

La primera derivada permite identificar la pendiente de la curva en un punto determinado, entonces:

- ) Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $f(x)$  es *creciente* en dicho intervalo.

- ) Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $f(x)$  es decreciente en dicho intervalo.

De esta manera se puede establecer en donde una función derivable es creciente y decreciente.

El proceso se inicia con la obtención de la primera derivada, identificación de los valores críticos, ya que antes y después de un valor crítico, la función cambia de monotonía. Conociendo los intervalos, se evalúa un punto de cada uno de los intervalos en la derivada para conocer el signo, si es positivo, entonces la función es creciente en dicho intervalo y viceversa.

### Valores Críticos:

Los valores críticos son aquellos donde la primera derivada es cero o no existe.

$$a) f'(x) = 0$$

$$b) f'(x) = \text{No Existe}$$

La función lineal, no tiene valores críticos, la función cuadrática tiene un valor crítico, la función cúbica tiene dos valores críticos y así sucesivamente.

### Ejemplo 152:

Dada la función  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ . Determinar la monotonía de la función, es decir en qué intervalo de su dominio es creciente y en qué intervalo de su dominio es decreciente.

### Solución:

El dominio de la función son los reales:  $(-\infty, \infty)$ . Derivamos la función:  $f'(x) = 4x - 4$

Buscamos los valores críticos:  $f'(x) = 0$ , luego:  $4x - 4 = 0$  entonces  $x = 1$

Valor crítico: 1. Los intervalos:  $(-\infty, 1)$  y  $(1, \infty)$

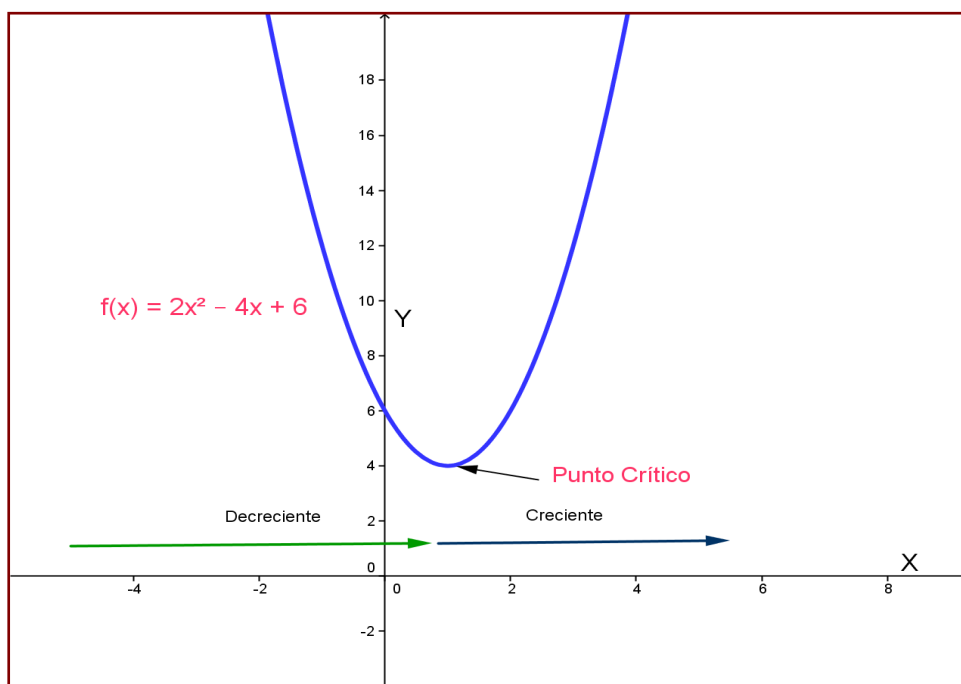
Evaluamos un punto en cada intervalo:

- Tomemos  $x = 0$  para el primer intervalo:  $f'(x = 0) = 4 \cdot 0 - 4 = -4$ .

Como la primera derivada es negativa en el punto escogido, entonces la función es decreciente en  $(-\infty, 1)$ .

- Ahora tomamos  $x = 2$ , que esta en el segundo intervalo:  $f'(x = 2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$ . Como la primera derivada es positiva en el punto escogido, entonces la función es creciente en  $(1, \infty)$ .

Por consiguiente la función es decreciente en  $(-\infty, 1)$  y creciente en  $(1, \infty)$ , veamos la grafica.



### Ejemplo 153:

Dada la función  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ . Determinar la monotonía de la función, es decir en qué intervalo de su dominio es creciente y en qué intervalo de su dominio es decreciente.

### Solución:

El dominio de la función son los reales:  $(-\infty, \infty)$ .

- Primero desarrollamos la derivada:  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

- Identificamos los valores críticos:

$6x^2 - 6x - 12 = 0$ , factorizamos:  $6(x^2 - x - 2) = 0$ . linealizamos  $6(x - 2)(x + 1) = 0$

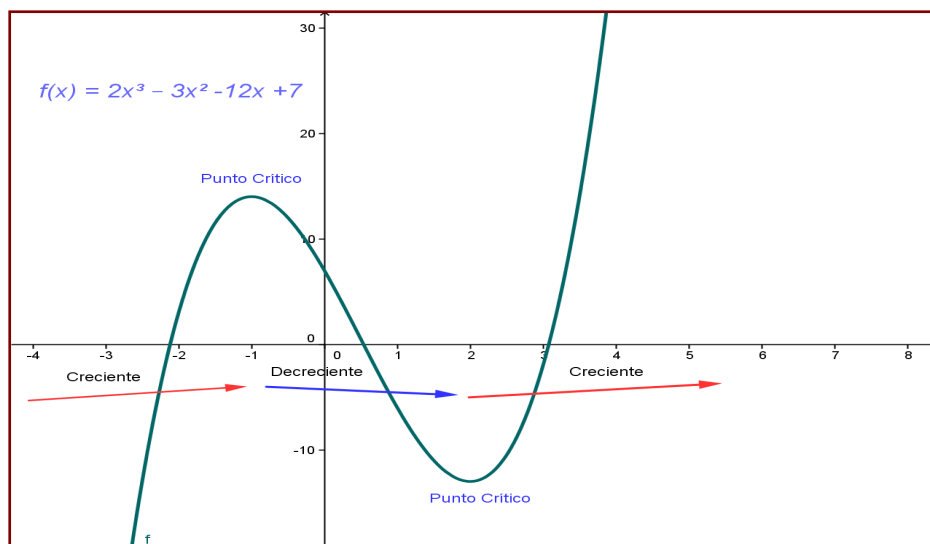
Valores críticos:  $x = -1$  y  $x = 2$ . Los intervalos:  $(-\infty, -1)$ ;  $(-1, 2)$  y  $(2, \infty)$ .

Evaluamos *un valor cualquiera* en cada intervalo para identificar la monotonía.

- Para el primer intervalo:  $f'(x = -2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12 = 24$ . Como la derivada es positiva, la función en el intervalo que contiene a -2 es creciente.

- Para el segundo intervalo:  $f'(x = 0) = 6(0)^2 - 6(0) - 12 = -12$ . En este caso, como la derivada es negativa, la función es decreciente en el intervalo que contiene a cero.

- Para el tercer intervalo:  $f'(x = 3) = 6(3)^2 - 6(3) - 12 = 24$ . Igual que en primer intervalo, como la derivada es positiva, la función en dicho intervalo es creciente. Veamos la gráfica.



### Ejemplo 154:

Dada la función  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ . Determinar la monotonía de la función.

### Solución:

El dominio de la función es todos los reales  $(-\infty, \infty)$ .

Derivamos la función:  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

Como se puede ver en  $x = 0$  la derivada no está definida. La función NO tiene extremos relativos en dicho punto, ni en ningún otro punto.

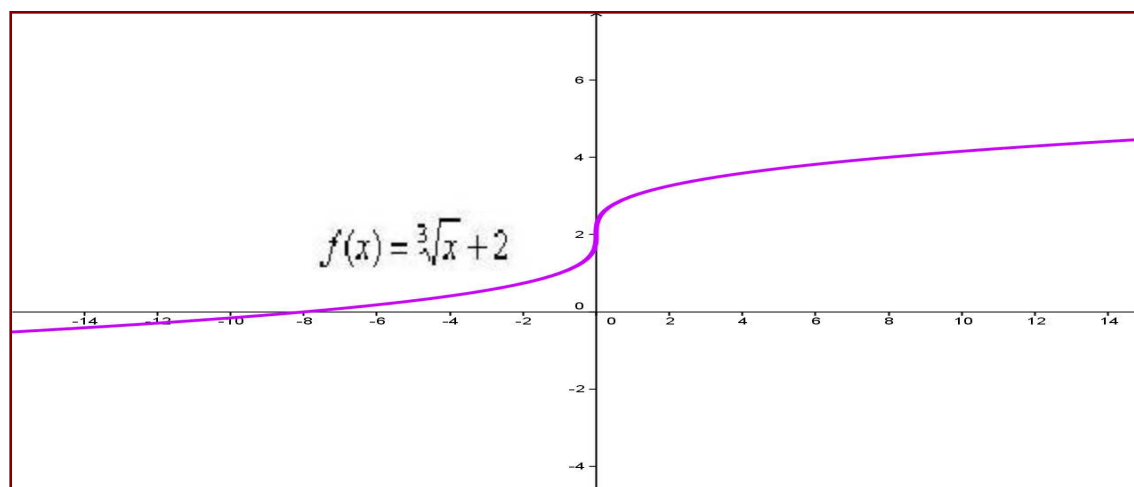
Al reemplazar un valor en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , por ejemplo  $x = -2$ , la primera derivada es positiva:

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(-2)^{\frac{2}{3}}} > 0$$

Lo mismo sucede con un valor en el intervalo  $(0, \infty)$ , por ejemplo  $x = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(3)^{\frac{2}{3}}} > 0$$

Por consiguiente la función es creciente en todo su dominio.



## 2. CONCAVIDAD:

La concavidad esta relacionada con la curvatura de la función.

### - ) CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA:

La segunda derivada permite identificar la curvatura de la función en el intervalo definido.

- ) Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $f(x)$  es cóncava hacia arriba en dicho intervalo.

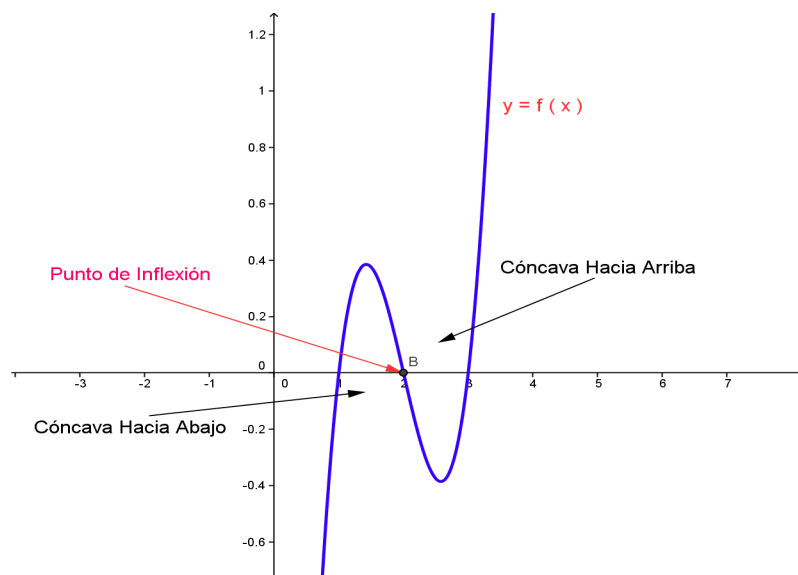
- ) Si  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $f(x)$  es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.

El proceso se inicia con la obtención de la primera y segunda derivada, identificando los *puntos de inflexión*, ya que antes y después de un punto de inflexión, la función cambia su curvatura. Conocidos los intervalos, se evalúa un punto de cada uno de ellos en la segunda derivada, para conocer el signo, si es positivo, entonces la función es cóncava hacia arriba en dicho intervalo y si el signo es negativo la función es cóncava hacia abajo.

### Punto de Inflexión:

#### DEFINICIÓN GRÁFICA:

Un punto de inflexión, es un punto donde la gráfica que representa una función  $f(x)$ , tiene una recta tangente y además la concavidad cambia.



### DEFINICIÓN ANALÍTICA:

Los puntos de inflexión es donde la segunda derivada de una función es cero o no esta definida

Así la función lineal y cuadrática, no tiene puntos de inflexión, la función cúbica tiene un punto de inflexión, la función de grado cuatro tiene dos puntos de inflexión y así sucesivamente.

### Ejemplo 155:

Tomando como ejemplo la función  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ . Analizada anteriormente, identifiquemos su curvatura.

### Solución:

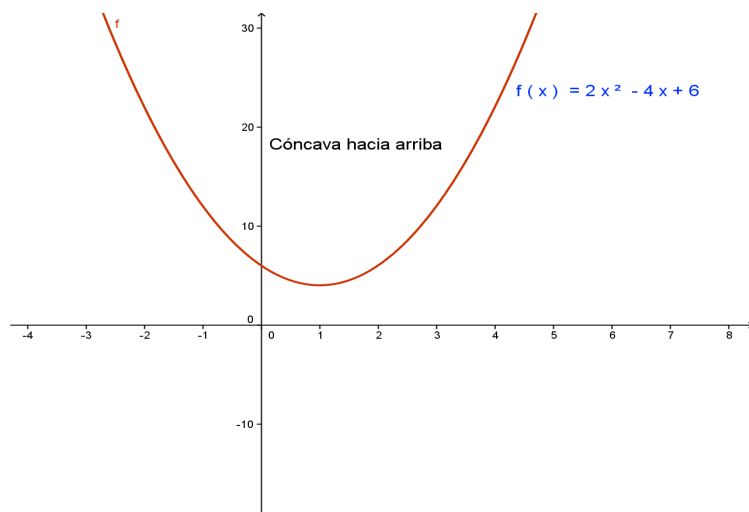
El dominio de la función son los reales  $(-\infty, \infty)$

Primera derivada:  $f'(x) = 4x - 4$

Segunda derivada:  $f''(x) = 4$

Como la segunda derivada es positiva, entonces la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.





### Ejemplo 156:

Para la función  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ . Analizada anteriormente, identificar su curvatura.

### Solución:

El dominio de la función son los reales  $(-\infty, \infty)$ .

- Primera derivada:  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

- Segunda derivada:  $f''(x) = 12x - 6$

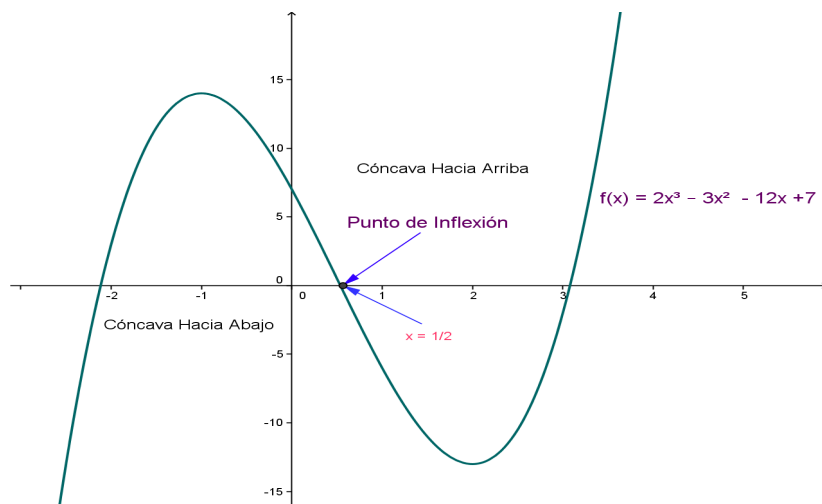
- Identificamos los puntos de inflexión: Para esto se aplica el criterio:  $f''(x) = 0$ .

Entonces:  $f''(x) = 12x - 6 = 0$ . Despejando  $x$ : Entonces:  $x = \frac{1}{2}$ . La función tiene un punto de inflexión en  $x = \frac{1}{2}$ . Así se presentan dos intervalos:  $(-\infty, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, \infty)$ .

- Evaluamos un valor en cada intervalo para identificar la curvatura.

Para el primer intervalo:  $f''(x = 0) = 12(0) - 6 = -6$ . Como la segunda derivada es negativa, la función en el intervalo que contiene a 0 es cóncava hacia abajo.

Para el segundo intervalo:  $f''(x = 1) = 12(1) - 6 = 6$ . Para este caso, la segunda derivada es positiva, luego la función es cóncava hacia arriba en el intervalo que contiene a uno. La grafica.



### Ejemplo 157:

Dada la función  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ . Determinar la concavidad de la función.

### Solución:

El dominio de la función es todos los reales  $(-\infty, \infty)$ .

La primera derivada:  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$

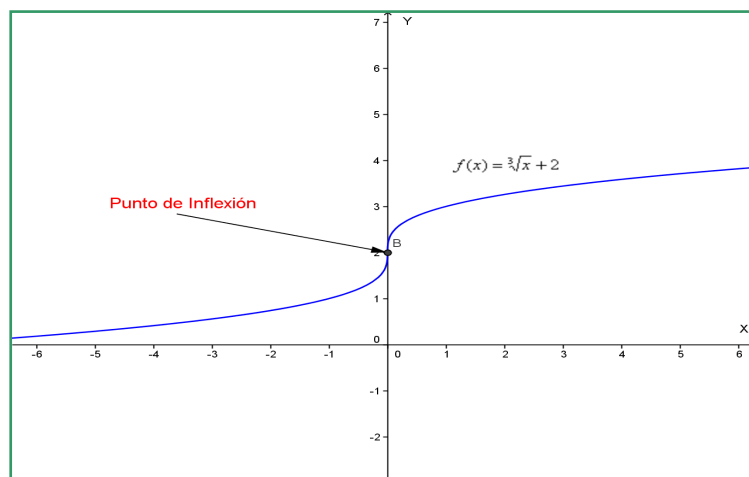
Primero reorganizamos la función que vamos a derivar, luego:  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

La segunda derivada:  $f''(x) = \frac{1}{3} \left[ -\frac{2}{3}x^{-2/3-1} \right] = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$

El punto de inflexión  $x = 0$ .

Se presentan dos intervalos:  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ . Se puede observar que la segunda derivada es positiva en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y negativa en el intervalo  $(0, \infty)$ . (¿Porque?)

Por consiguiente, la curva es cóncava hacia arriba en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y cóncava hacia abajo en el intervalo  $(0, \infty)$ .



## Lección 48: Derivadas en la Física



La derivación como la matemática del cambio, es la herramienta fundamental para el estudio de los diversos fenómenos físicos, tales como la mecánica, trabajo, hidráulica y otros. En este aparte vamos a analizar situaciones sobre movimiento y de trabajo; cuando la fuerza es variable.

### - ) MECÁNICA:

La mecánica es la ciencia que analiza el movimiento y las causas que lo originan. La cinemática es la parte de la mecánica que estudia las variables que explican el movimiento; tales como: Posición, velocidad y aceleración.

Función posición: Sea  $x = f(t)$ , la función que indica la posición de un móvil en el instante  $t$ , por ejemplo:  $x = 2t + 4$ . Es una función posición de índole lineal. Otro ejemplo:  $x = 2t^2 + 4t - 1$ , es una función posición de índole cuadrático.

Función velocidad: Sea  $v = g(t)$ , la función que indica la velocidad de un móvil en el instante  $t$ , donde  $v = f'(x)$ , esto nos indica que la velocidad es la derivada de la función posición.

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

### Demostración:

Por principios físicos se sabe que la *velocidad media*  $\bar{v}$  se define como:

$$\bar{v} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Donde  $x_1$  y  $t_1$  son la distancia y tiempo final y,  $x_0$  y  $t_0$  son la distancia y tiempo inicial. El trabajo era determinar la velocidad en un instante dado; es decir, la velocidad instantánea. Para esto se debe hacer que la diferencia entre  $t_0$  y  $t_1$  sea lo más pequeña posible; es decir, que tienda a cero. Así:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Donde  $v$  es la velocidad instantánea o rapidez dada en m/seg.

Así queda demostrado que la velocidad es la derivada de la función posición.

**Función aceleración:** Sea  $a = h(t)$ , la función que indica la aceleración de un móvil en el instante  $t$ ; dada en m/seg<sup>2</sup>, donde  $a = g'(x)$ , esto nos indica que la aceleración es la derivada de la función velocidad.

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Como la derivada de la velocidad es la aceleración y, a su vez la velocidad es la derivada de la función posición, entonces se puede inferir que la segunda derivada de la posición es la aceleración.

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

### Ejemplo 158:

Sea la función  $x = 2t^2 + 4t - 6$ . Donde  $t$  esta en segundos y  $x$  en metros. Hallar la velocidad que lleva el móvil a los 3 seg. de comenzar el movimiento.

### Solución:

Primero debemos hallar la función velocidad, luego reemplazar el valor de  $t$  en dicha función:

$$dx/dt = v(t) = 4t + 4.$$

$$\text{Ahora: } v(t = 3) = 4(3) + 4 = 16 \text{ m/seg.}$$

### Ejemplo 159:

Dada la función  $v(t) = 5t^2 + 3t$ . Donde  $t$  esta en segundos y  $v$  en m/seg.. Hallar la aceleración inicial del móvil y cuando han transcurrido 5 seg.

### Solución:

Como la aceleración es la derivada de la velocidad, derivamos ésta última respecto al tiempo.

$$dv/dt = a(t) = 10t + 3.$$

La aceleración inicial es cuando  $t = 0$ . Entonces:  $a(t = 0) = 10 \cdot 0 + 3 = 3 \text{ m/seg}^2$ .

A los 5 segundos:  $a(t = 5) = 10 \cdot 5 + 3 = 53 \text{ m/seg}^2$ .

### Ejemplo 160:

Dada la función  $x(t) = 12t + 25$ . Donde  $t$  esta en segundos y  $x$  en metros. Hallar la velocidad y aceleración inicial del móvil y cuando han transcurrido 8 seg.

### Solución:

-)  $v(t) = dx/dt = 12 \text{ m/seg}$ . Vemos que la velocidad es constante, ya que no depende del tiempo.

-)  $a(t) = dv/dt = 0 \text{ m/seg}^2$ . El móvil no tiene aceleración.

Este tipo de movimiento se conoce como movimiento uniforme, el cual tiene velocidad constante y aceleración cero.

### Ejemplo 161:

Un objeto es lanzado verticalmente desde la azotea de un edificio de 60 metros de altura, con una velocidad de 35 m/seg. Si la función que describe la posición del objeto es:  $y(t) = -4.9t^2 + 35t + 60$ .

a-) Hallar la función velocidad y aceleración.

b-) Cual será el dominio de la función posición.

c-) En que tiempo el objeto alcanza la máxima altura

d-) Cual es la máxima altura que alcanza el objeto.

### Solución:

a-)  $v(t) = dy/dt = -9.8t + 35 \text{ m/seg}$ . y  $a(t) = dv/dt = -9.8 \text{ m/seg}^2$ .

b-) El dominio de la función posición es el intervalo de tiempo en el cual se mueve el objeto; es decir, hasta cuando el objeto toca el suelo, ( $y = 0$ ), Entonces:

$y(t) = -4.9t^2 + 35t + 60 = 0$ . Despejando  $t$ :

$$t = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 1176}}{-9.8} = \frac{-35 \pm 49}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = 8,57 \\ t_2 = -1,43 \end{cases}$$

Como es obvio el tiempo es positivo, así el dominio será:  $0 \leq t \leq 8,57$

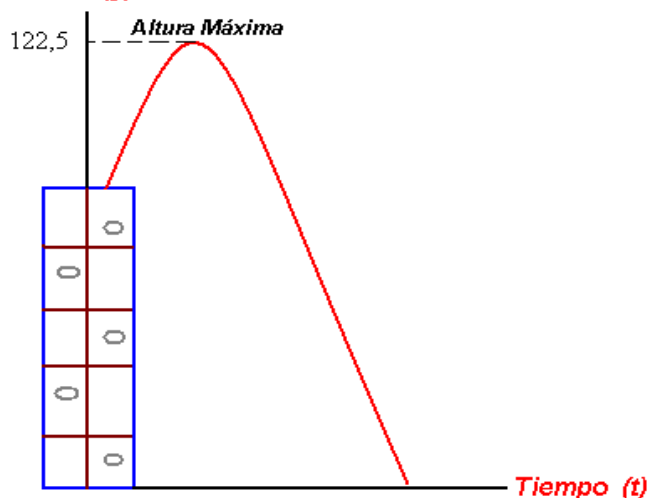
c-) El tiempo en que alcanza la máxima altura es cuando la velocidad se hace cero.

$v(t) = -9.8t + 35 = 0$ . Despejando  $t = 3,57$  seg.

d-) La máxima altura ( $Y_{\max}$ ) será en el tiempo 3,57 seg. Entonces:

$$Y_{\max} = -4.9(3,57)^2 + 35(3,57) + 60 = -62,45 + 124,95 + 60 = 122,5 \text{ metros.}$$

**Distancia ( $y$ )**



## Lección 49: Derivadas en las Ciencias Económicas

En las ciencias económicas se presentan fenómenos de cambio respecto a una variable muy particular, *Las Unidades Producidas*. Son términos muy frecuentes en economía: Costos, Producción, Ingresos, Oferta, Demanda y Utilidad, entre otros.

El propósito en esta parte del curso es conocer algunas aplicaciones que tiene la derivada en fenómenos económicos.



Los fundamentos básicos que se requieren para comprender:

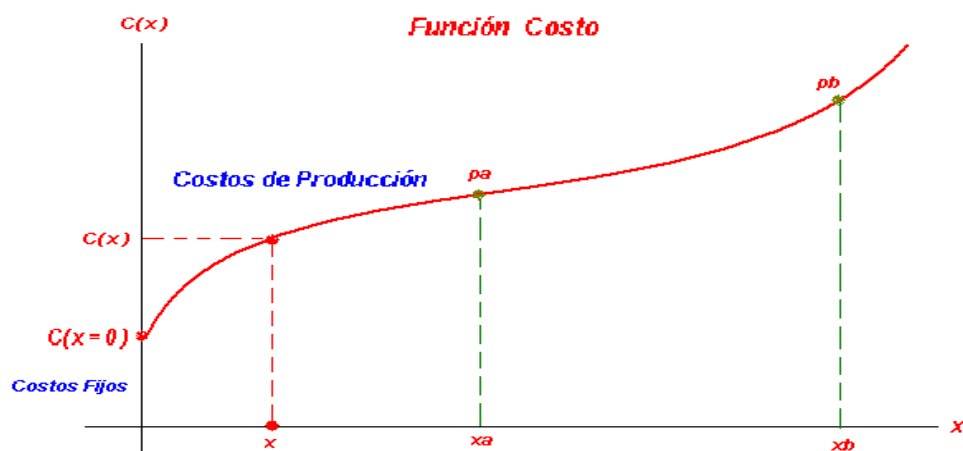
$x$ : Número de unidades a producir o producidas

$P$ : Precio unitario

## 1. FUNCIÓN COSTO:

La función costo  $C(x)$ , denominada como costo total, la conforman los costos fijos y los costos de producción. *Los costos fijos* son los que no dependen de las unidades producidas, entre estos se tiene bienes inmuebles, equipos, herramientas y otros. *Los costos variables*, son los que dependen de las unidades producidas, como materia prima, mano de obra, servicios públicos y otros. De acuerdo a esto,  $C(x) > 0$ .

La siguiente grafica, muestra la curva típica de la función costos.

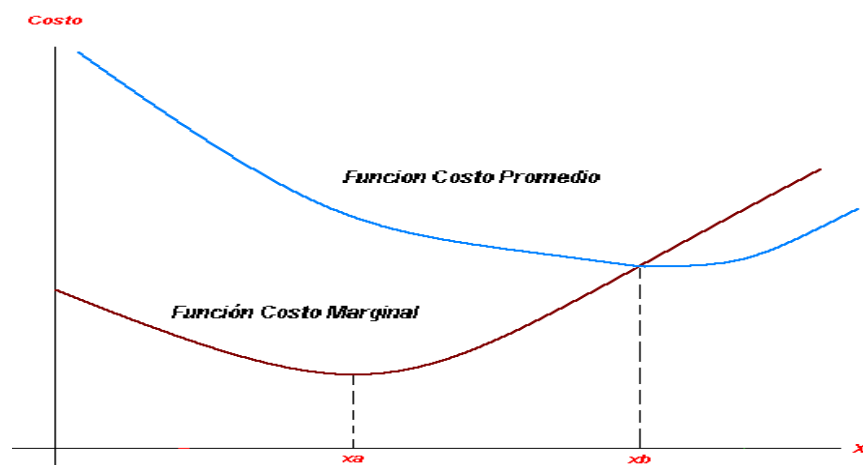


Se observa que es creciente, ya que a mayor producción, mayores serán los costos. Inicialmente la curva es cóncava hacia abajo, debido a que la primera unidad cuesta más que aquella producida cuando hay muchas en producción. A cierto nivel de producción  $x_a$  hay un punto de inflexión  $pa$ , en donde la curva de la función costo se hace cóncava hacia arriba, esto nos indica que al producir una cantidad muy alta, los costos se aumentan si se desea seguir aumentando la producción así sea para cantidades pequeñas.

- ) **Costo Promedio**: El costo promedio se obtiene al dividir el costo total por el número de unidades producidas.  $\bar{C} = \frac{C(x)}{x}$  Cuyo significado es el costo por unidad, cuando se producen  $x$  unidades. Se puede considerar que el nivel de producción más eficiente, sería aquel que minimiza el costo promedio.

- ) **Costo Marginal:** Se considera al costo marginal como el incremento o variación del costo cuando se produce una unidad adicional, de esta manera para hallar el costo marginal se debe derivar la función costo.

Costo Marginal:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta C}{\Delta x} \right) = \frac{dC}{dx}$  Para  $x > 0$ . Luego el costo marginal es la pendiente de la tangente a la curva de la función costo. Este costo es una curva cóncava hacia arriba, con un mínimo en  $x_a$ .



En la grafica se observa que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{C(x)}{x} \right) = +\infty$  Para determinar el mínimo, de interés en economía, derivamos la función costo promedio:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{C(x)}{x} \right) = \frac{x * C'(x) - C(x)}{x^2}$$

En punto crítico se obtiene cuando:  $x * C'(x) - C(x) = 0 \Rightarrow C'(x) = \frac{C(x)}{x}$ , de lo cual surge una de las leyes básicas de economía.

#### Ley Básica de Economía:

**Si el costo promedio es mínimo, entonces el costo marginal es equivalente al costo promedio.**

## 2. FUNCIÓN INGRESO:



En términos económicos, el ingreso es fruto de las ventas realizadas. La función ingreso  $I(x)$  se obtiene a partir de las unidades producidas ( $x$ ) y el precio por unidad ( $p$ ). Normalmente  $x$  y  $p$  son no negativas, ya que la cantidad mínima a producir es una y el precio nunca puede ser negativo.

Sea  $I(x)$  la función ingreso total, originado cuando se tiene una demanda de  $x$  unidades, la cual se puede calcular así:  $I(x) = P \cdot x$



### - ) Ingreso Marginal:

El ingreso marginal es la variación o cambio del ingreso cuando se vende una unidad adicional, éste se obtiene al derivar la función ingreso.

Ingreso Marginal:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta I}{\Delta x} \right) = \frac{dI}{dx}$  Para  $I(x)$  función ingreso y  $x$  unidades vendidas,

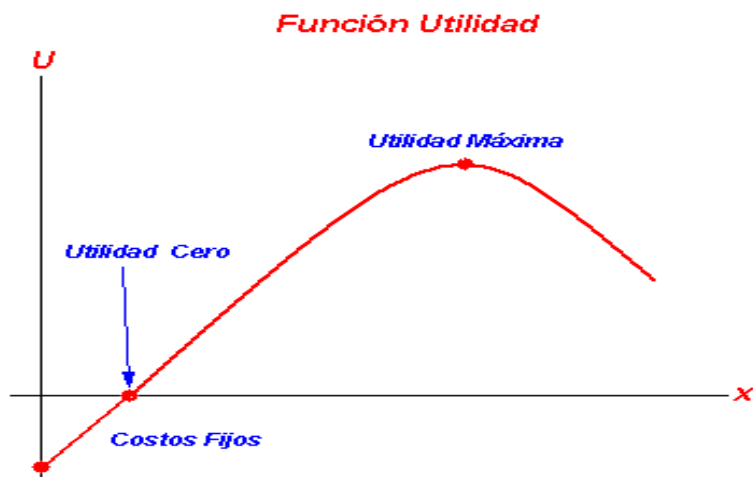
$x \geq 0$ . La interpretación nos permite ver que el ingreso marginal es considerado con un ingreso recibido por la venta de una unidad adicional, así  $\Delta x \rightarrow 1$ , entonces:

$\frac{dI}{dx} = I(x+1) - I(x)$ . El ingreso marginal puede ser positivo, negativo o cero.

### 3. FUNCIÓN UTILIDAD:

La utilidad se obtiene por la producción y venta de  $x$  unidades, la utilidad llamada también Beneficio, es lo que sobra de los ingresos, después de deducir los costos. La utilidad puede ser negativa, si la producción es baja; a causa de los costos fijos. De igual manera puede ser negativa si la producción es muy alta, a causa de los costos marginales.

La función utilidad se expresa con la ecuación:  $U(x) = I(x) - C(x)$



### - ) Utilidad Marginal:

La utilidad marginal es la variación de la utilidad cuando se produce y vende una unidad adicional, éste se obtiene al derivar la función utilidad.

Utilidad Marginal:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta U}{\Delta x} \right) = \frac{dU}{dx}$  Para  $U(x)$  función utilidad y  $x$  unidades producidas y vendidas,  $x \geq 0$ .

Para maximizar la utilidad, se buscan los puntos críticos de  $U(x)$ , es decir donde  $U'(x)$  es cero. Entonces:

$$U'(x) = I'(x) - C'(x) = 0, \text{ luego: } I'(x) = C'(x)$$

De aquí se deriva otra de las leyes básicas de economía:

### **Ley Básica de Economía:**

***Si la utilidad es máxima, entonces el ingreso marginal es equivalente al costo marginal.***

### Ejemplo 162:

En un proceso la función costo esta dada por  $C(x) = 250 + 5x + 2x^2$ . Hallar

- a-) La función costo marginal.  
 b-) El costo marginal para 30 unidades producidas.

**Solución:**

a-) Función costo marginal:  $\frac{dC}{dx} = 5 + 4x$

b-)  $\frac{dC(30)}{dx} = 5 + 4(30) = 125$  Costo para 30 unidades producidas.

**Ejemplo 163:**

La función costo en pesos, para un proceso esta dado es  $C(x) = 3.500 + 12x + x^3$ . Hallar

- a-) El costo promedio y su significado, para  $x = 200$   
 b-) Cuando costaría producir una unidad adicional, después de 200 unidades.

**Solución:**

a-)  $\bar{C} = \frac{C(x)}{x} = \frac{3.500 + 12x + x^3}{x} = \frac{3.500 + 12(2.000) + (200)^3}{200}$

$$\bar{C} = \frac{3.500 + 24.000 + 8'000.000}{200} = 40.137,5$$

En este proceso el costo promedio es de 40.137,5 pesos, para producir las primeras 200 unidades.

b-) El costo por unidad adicional es costo marginal, así debemos hallar primero la función costo marginal y luego determinar el costo adicional para producir más de 200 unidades.

$$\frac{dC}{dx} = 12 + 3x^2 = 12 + 3(200)^2 = 120.012$$

Producir una unidad adicional después de 200, costaría 120.012 pesos.

La otra forma de hallar dicho costo:  $C(x = 201) - C(x = 200)$ .

$$C(x = 201) = 3.500 + 12 \cdot 201 + (201)^3 = 8'126.513$$

$$C(x = 200) = 3.500 + 12 \cdot 200 + (200)^3 = 8'005.900$$

Ahora:  $C(x = 201) - C(x = 200) = 8'126.513 - 8'005.900 = 120.613$

La discrepancia en el valor es dado por que la razón de cambio instantánea  $C(x)$  respecto a un cambio unitario en las unidades producidas.

#### Ejemplo 164:

Un restaurante capitalino vende almuerzos, cuya función demanda por día esta dada por:

$p(x) = 800 - \frac{x}{4.000}$ . Si el restaurante vende en promedio 800 almuerzos diarios.

Determinar:

- a-) Ingreso total en pesos.
- b-) Ingreso marginal en pesos, para 800 almuerzos.

#### Solución:

a-) Ingreso total:  $I = x * p = x * \left( 800 - \frac{x}{4.000} \right) = 800x - \frac{x^2}{4.000}$

b-) Ingreso marginal:  $\frac{dI}{dx} = 800 - \frac{x}{2.000}$

Ahora determinamos cuando hay de ingreso, si se produjera una unidad adicional de las 800 dadas como promedio.

$$\frac{dI}{dx} = 800 - \frac{800}{2.000} = 799,6$$

Si se fabrica un almuerzo adicional, la utilidad será de 799,6 pesos.

#### Ejemplo 165:

Para el ejemplo anterior (ejemplo 164):

- a-) Cual será la utilidad total. Si  $C(x) = 80.000 + 0,65x$
- b-) Cual será la utilidad marginal, para 800 almuerzos.

#### Solución:

a-) Como  $U(x) = I(x) - C(x)$ , donde  $C(x) = 80.000 + 0,65x$

Primero calculamos el ingreso:  $I(x = 800) = 640.000 - 160 = 639.840$  pesos

$C(x) = 80.000 + 0,65 \cdot 8.000 = 80.520$  pesos

Finalmente:  $U(x = 800) = 639.840 - 80.520 = 559.320$  pesos

Otra forma es obtener la función utilidad y luego reemplazar el valor de la variable.

$$U(x) = \left( 800x - \frac{x^2}{4.000} \right) - (80.000 + 0,65x) = 799,35x - \frac{x^2}{4.000} - 80.000$$

Reemplazando  $x = 800$ , tenemos:

$$U(x) = 799,35 \cdot 800 - \frac{(800)^2}{4.000} - 80.000 = 639.480 - 160 - 80.000 = 559.320$$

El valor es similar al obtenido por el método anterior.

b-) La utilidad marginal se obtiene a partir del ingreso marginal y el costo marginal:

$$\frac{dI}{dx} = 800 - \frac{x}{2.000} \quad \text{y} \quad \frac{dC}{dx} = 0,65$$

$$\frac{dU}{dx} = 800 - \frac{x}{2.000} - 0,65 = 800 - \frac{800}{2.000} - 0,65 = 798,95$$

## Lección 50: Derivadas en la Estadística:

$$m_x(t) = E[\exp(tX)]$$

De las muchas aplicaciones que tienen las derivadas, una muy importante es en la Estadística y más específicamente en la teoría de probabilidad, vamos a analizar dos aspectos de la probabilidad donde las derivadas son fundamentales para su desarrollo teórico.

### 1. FUNCIONES GENERADORAS DE MOMENTOS:

El insumo fundamental de la probabilidad son las variables aleatorias, las cuales si son discretas tienen su distribución de probabilidad y si son continuas; entonces deben tener su función de densidad de probabilidad.

#### - ) Los Momentos:

Las variables aleatorias tienen definidos los llamados momentos, éstos son dados como los valores esperados de ciertas funciones de la variable aleatoria.

### DEFINICIÓN:

Si  $X$  es una variable aleatoria, el momento de orden  $C$  de dicha variable, se define de la siguiente manera:

Los cuatro primeros momentos, dado por los valores esperados de una variable aleatoria, se definen así:

- *Primer momento:*  $E(X)$ . Asociado con la media  $\mu$
- *Segundo momento:*  $E(X^2)$ . Asociado con la varianza  $V(X)$
- *Tercer momento:*  $E(X^3)$ . Asociado con la Asimetría
- *Cuarto momento:*  $E(X^4)$ . Asociado con la kurtosis o apuntamiento.

La varianza se obtiene así:  $V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$

Entendiendo los momentos como ciertas características que tienen las variables aleatorias, ahora se analizará la función que los genera.

### La Función Generadora de Momentos:

#### DEFINICIÓN:

Sea  $X$  una variable aleatoria, la función generadora de momentos de dicha variable, se define como:

$$m_X(t) = E[e^{tX}]$$

Si la variable es discreta la función generadora de momentos se desarrolla por medio de sumatorias y si la variable aleatoria es continua, la función generadora se desarrolla por medio

de integrales, según:  $m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} p(x)$  y  $m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{tx} f(x) dx$

Lo anterior es cierto siempre que el valor esperado  $E[e^{tX}]$  exista para todo valor que este en  $-c \leq t \leq c$ . Como  $c > 0$ , es una condición necesaria para que la función generadora de momentos sea diferenciable en  $t = 0$ .

**NOTA:** Por ahora no es necesario desarrollar las operaciones de la sumatoria e integrales expresadas anteriormente, ya que son temáticas del curso siguiente, solo se nombran como parte de la definición.

### Unicidad de la Función Generadora de Momentos:

Se puede demostrar que si la función generadora de momentos existe, es única y determina completamente a la distribución de probabilidad o a la función de densidad, según el tipo de variable aleatoria  $X$ . Esto significa que dos variables aleatorias; digamos  $X$  e  $Y$ , que tienen la misma función generadora de momentos, entonces dichas variables aleatorias tendrán la misma función de distribución o de densidad, según el caso.

Por otro lado, si la función generadora de momentos existe, dicha función es derivable en  $t = 0$ , indefinidamente; así se garantiza que la función genera todos los momentos de la variable aleatoria  $X$ , para  $t = 0$ .

**Principio:** Los momentos de una variable aleatoria se pueden obtener a partir de la **derivada** de la función generadora de momentos, de ahí su nombre.

Para el momento  $n$ , se tiene: 
$$\left. \frac{d^n}{dt^n} m_X(t) \right|_{t=0} = E[X^n]$$

El principio se basa en un lema de cálculo avanzado, el cual por ahora no es pertinente analizarlo.

A continuación analicemos algunos ejemplos modestos sobre cómo obtener los momentos a partir de la función generadora de momentos.

### Ejemplo 166:

Demostrar que el primer momento respecto al origen; para variable aleatoria  $X$ , es la media  $\mu$ .

### Solución:

Por definición:

$$\left. \frac{d}{dt} m_X(t) \right|_{t=0} = E[X] \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} E[e^{tX}] \right|_{t=0} = E\left( \left. \frac{d}{dt} [e^{tX}] \right|_{t=0} \right) = E(Xe^{tX}) \Big|_{t=0}$$

Evaluando para  $t = 0$ , tenemos:

$$E \left( X e^{tX} \right) \Big|_{t=0} = E \left( X e^{0 \cdot X} \right) = E(X)$$

Recordemos que el primer momento esta asociado a la media:  $E(X) = \mu$

**Ejemplo 167:**

Sea la función generadora de momentos dada por:  $m_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$  Para  $t < \beta$ . Hallar

a-) Primer momento X:  $E(X)$

b-) Segundo momento X:  $E(X^2)$

**Solución:**

a-) Por la definición, para el primer momento.

$$\frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} = E[X] \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\beta}{(\beta - t)^2} \Big|_{t=0}$$

Evaluando en  $t = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\beta}{(\beta - t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{\beta}{(\beta - 0)^2} = \frac{\beta}{\beta^2} = \frac{1}{\beta}$$

Entonces:  $E[X] = \frac{1}{\beta}$

b-) Para el segundo momento:

$$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \Big|_{t=0} = E[X^2] \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta}{(\beta - t)^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{-2\beta(t - \beta)}{(\beta - t)^4} \Big|_{t=0}$$

Evaluando en  $t = 0$ , tenemos:

$$\frac{-2\beta(t - \beta)}{(\beta - t)^4} \Big|_{t=0} = \frac{-2\beta(0 - \beta)}{(\beta - 0)^4} = \frac{2\beta^2}{\beta^4} = \frac{2}{\beta^2}$$



Entonces:  $E[X^2] = \frac{2}{\beta^2}$

### Ejemplo 168:

A partir del ejemplo anterior (ejemplo 167) hallar la varianza de la variable aleatoria.

### Solución:

Recordemos que la varianza se define como:  $V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$  Como se conocen los dos términos, reemplazando:

$$V(X) = \frac{2}{\beta^2} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{2-1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

### Ejemplo 169:

Una variable aleatoria X tiene distribución de probabilidad Binomial, cuya función generadora de momentos esta dada por:  $m_X(t) = E[e^{tX}] = (e^t p + 1 - p)^n$  Para n entero positivo. Hallar la media y varianza de dicha variable aleatoria.

### Solución:

- ) La media se obtiene cuando hallamos la primera derivada de  $m_X(t)$ .

$$\left. \frac{d}{dt} m_X(t) \right|_{t=0} = E[X] \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} (e^t p + 1 - p)^n \right|_{t=0}$$

$$\text{Derivando: } \left. \frac{d}{dt} (e^t p + 1 - p)^n \right|_{t=0} = n p e^t (e^t p + 1 - p)^{n-1} \Big|_{t=0}$$

Evaluyendo en  $t = 0$ .

$$n p e^t (e^t p + 1 - p)^{n-1} \Big|_{t=0} = n p e^{t0} (e^0 p + 1 - p)^{n-1} = n p (1)^{n-1} = n * p$$

Por consiguiente:  $E[X] = \mu = n * p$

- ) Por definición:  $V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$

Luego debemos hallar primero  $E(X^2)$ .

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}(m_X(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[ n p e^t (e^t p + 1 - p)^{n-1} \right] \Big|_{t=0}$$

Derivando:

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}(m_X(t)) \Big|_{t=0} = n p e^t (n-1)(e^t p + 1 - p)^{n-2} * e^t p + (e^t p + 1 - p)^{n-1} n p e^t \Big|_{t=0}$$

Simplificando

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}(m_X(t)) \Big|_{t=0} = n(n-1) p^2 e^{2t} (e^t p + 1 - p)^{n-2} + n p e^t (e^t p + 1 - p)^{n-1} \Big|_{t=0}$$

Evaluando en  $t = 0$ :

$$E[X^2] = n(n-1) p^2 e^{2*0} (e^0 p + 1 - p)^{n-2} + n p e^0 (e^0 p + 1 - p)^{n-1} = n(n-1) p^2 + n p$$

Como ya se conoce  $E(X)$  y  $E[X^2]$  entonces reemplazamos para hallar varianza:

$$V(X) = [n(n-1) p^2 + n p] - [n p]^2 = n^2 p^2 - n p^2 + n p - n^2 p^2 = n p - n p^2$$

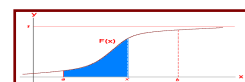
Finalmente:  $V(X) = n p - n p^2 = n p (1 - p)$

En el siguiente cuadro se presentan algunas funciones y la función generadora de momentos:

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD	FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS
Binomial: $B(n,p)$	$m_X(t) = (e^t p + 1 - p)^n$
Poisson: $P(\lambda)$	$m_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$

Normal: $N(\mu, \sigma^2)$	$m_X(t) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$
Exponencial: $E(\lambda)$	$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
Gamma: $G(\alpha, \lambda)$	$m_X(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha$
Uniforme: $U(a, b)$	$m_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}$
Binomial Negativa: $BN(r, p)$	$m_X(t) = \left( \frac{e^t p}{1 - (1 - p)e^t} \right)^r$
Exponencial Negativa: $EN(\theta)$	$m_X(t) = \frac{1}{1 - \theta t}$

## 2. FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

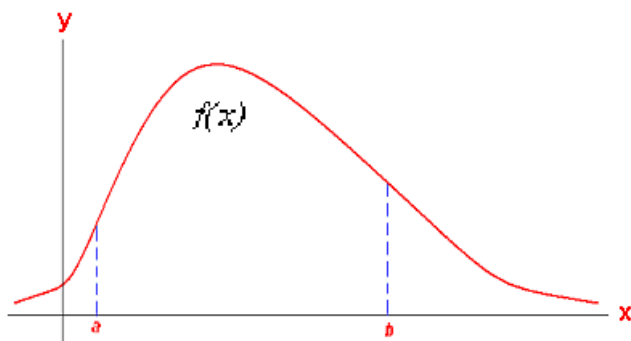


En el aparte anterior se comentó que las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas. Si la variable aleatoria  $X$  es discreta, entonces tendrá asociada una Distribución de Probabilidad  $P(X)$ , pero si la variable aleatoria  $X$  es continua, entonces tendrá asociada una Función de Densidad de Probabilidad  $f(x)$ .

### - ) Función de Densidad de Probabilidad:

La función  $f(x)$  se considera como la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua, la cual se define sobre los reales. Dicha función cumple:

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$  Para  $a < b$ . Donde  $P(a < X < b)$  es el valor de probabilidad de la variable aleatoria.



Esta función tiene dos propiedades importantes:

1.  $f(x) \geq 0$  y 2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

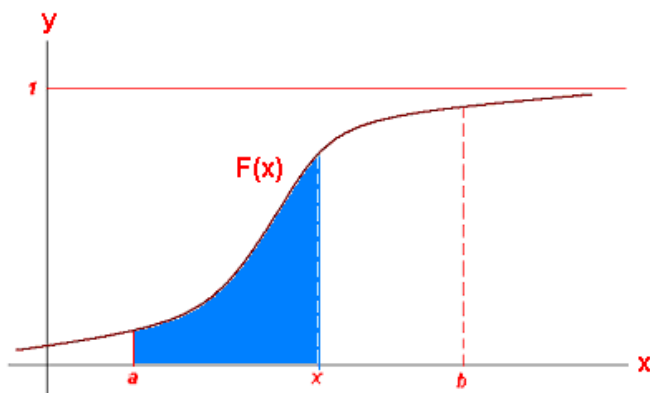
**NOTA:** Recordemos que el operador integral  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$  solo se nombra por definición, ya que su desarrollo es tema de cursos posteriores.

### - ) Función de Distribución Acumulada:

La función  $F_X(x)$  se define como la función de distribución acumulada para una variable aleatoria continua, la cual acumula el valor de la variable desde  $a$  hasta  $x$ . Es decir:  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

Esta función tiene dos características importantes.

- a-) Es continua por la derecha
- b-) Es monótona no decreciente



Cuatro propiedades fundamentales de este tipo de función:

$$- ) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$- ) \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$- ) \text{ Si } a < b, \text{ entonces } F_X(a) \leq F_X(b)$$

$$- ) P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) \text{ Para } a \leq b.$$

Con los principios básicos expuestos anteriormente, podemos hacer el estudio de la relación entre estos tipos de funciones de probabilidad.

### DEFINICIÓN:

Sea  $F_X(x)$  una función de distribución acumulada de la variable aleatoria  $X$ , definida en un intervalo  $[a, b]$ . La función de densidad de probabilidad  $f(x)$ , se puede obtener a partir de la función de distribución acumulada  $F_X(x)$ , por medio de la siguiente

expresión: 
$$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

La definición significa que derivando la función de distribución acumulada, se puede obtener la función de densidad de probabilidad, para una variable aleatoria continua.

### Ejemplo 180:

Sea la función de distribución acumulada de la variable aleatoria  $X$ :  $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$  Para  $x > 0$ . Hallar la función de densidad de probabilidad de dicha variable.

### Solución:

Por la definición: 
$$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \left( 1 - e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0 - e^{-\frac{x}{2}} * \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

Entonces:  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$

### Ejemplo 181:

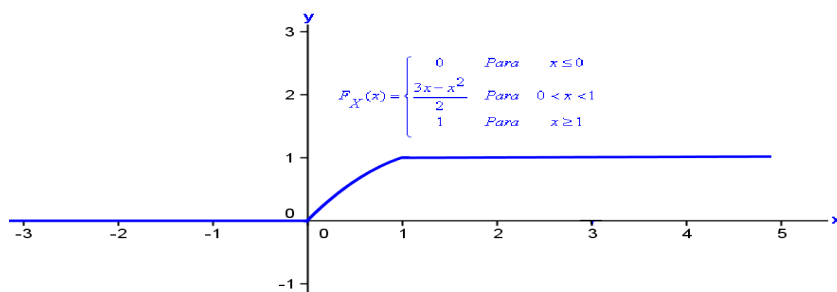
Dada la función de distribución acumulada de la variable aleatoria  $X$ , definida así:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } x \leq 0 \\ \frac{3x - x^2}{2} & \text{Para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{Para } x \geq 1 \end{cases}$$

a-) Graficar la función de distribución acumulada.

b-) Hallar la función de densidad de probabilidad  $f(x)$ .

### Solución:



a-)

b-) Para hallar  $f(x)$  derivamos  $F_X(x)$ .

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } x \leq 0 \\ \frac{3}{2} - x & \text{Para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Para } x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x & \text{Para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Otros Casos} \end{cases}$$

### Ejemplo 182:

La función de distribución acumulada de una variable con distribución uniforme esta dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{Para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{Para } x > b \end{cases}$$

Hallar:

a-) La función de densidad de probabilidad  $f(x)$ .

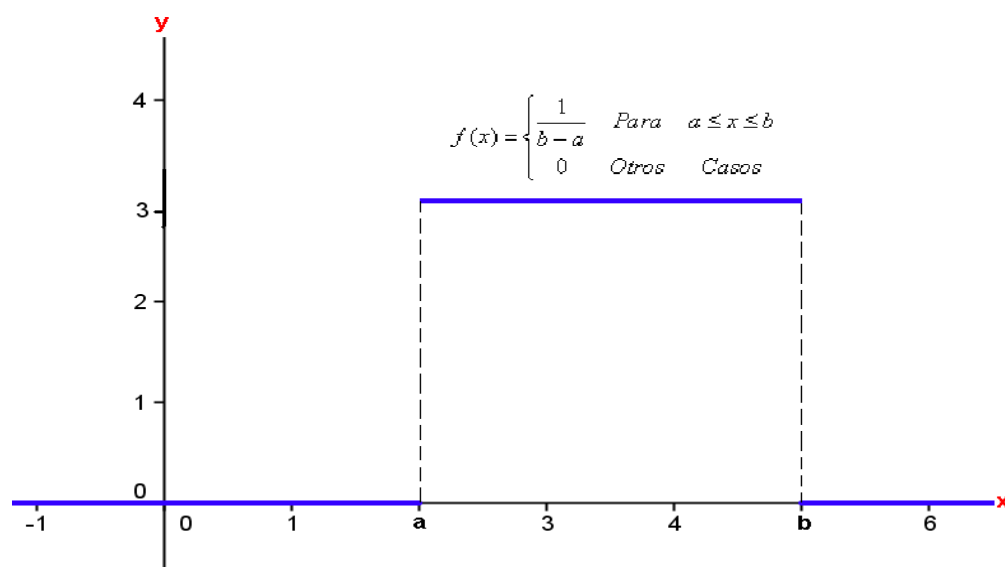
b-) La grafica de  $f(x)$ .

**Solución:**

$$a-) f(x) = \frac{d}{dx}[F_X(x)] = \begin{cases} 0 & \text{Para } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{Para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{Para } x > b \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{Para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{Otros Casos} \end{cases}$$

b-)



### Ejemplo 183:

La distribución de probabilidad Weibull, muy utilizada para analizar procesos de resistencia de materiales, tiene como función de distribución acumulada  $F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}$

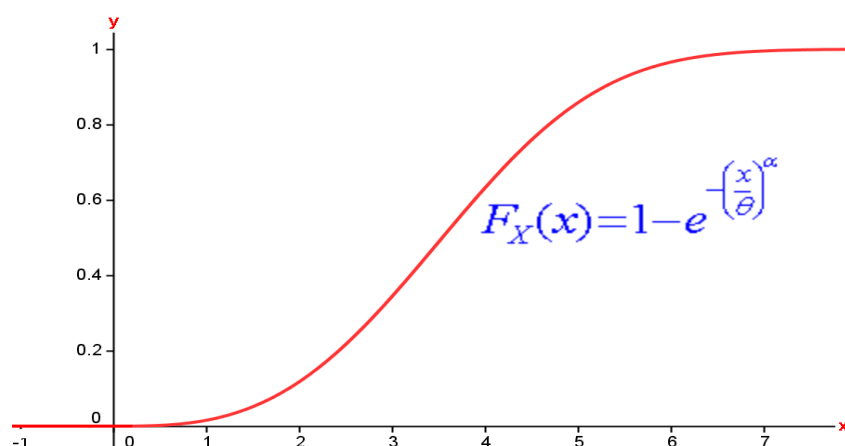
Para  $x \geq 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

Determinar:

- a-) La grafica de la función de distribución acumulada.
- b-) la función de densidad de probabilidad.

### Solución:

a-) Asumiendo que  $\theta = 4$  y  $\alpha = 3$ , tenemos:



$$b-) f(x) = \frac{d}{dx} [F_X(x)] = \frac{d}{dx} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha} \right] = 0 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha} \left( -\frac{1}{\theta^\alpha} * \alpha x^{\alpha-1} \right) \text{ Para } x \geq 0, \theta > 0, \alpha > 0.$$

Reorganizando y simplificando:

$f(x) = \left( \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \right) e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha}$  Correspondiente a la función de densidad de probabilidad para la distribución Weibull.



### AUTOEVALUACIÓN UNIDAD TRES

1. Para las funciones presentadas a continuación, donde  $x$  e  $y$  son funciones derivables, hallar el valor de la incógnita.

	<b>FUNCIÓN</b>	<b>INCÓGNITA</b>	<b>RAZÓN CONOCIDA</b>
a-)	$f(x) = \sqrt{2x}$	$\frac{dy}{dx}$ Cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dx} = 5$
b-)	$x^2 + y^2 = 36$	$\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 4, y = 2$	$\frac{dx}{dx} = 6$

2. Un cohete despegue a 2.000 metros de una cámara de video que esta filmando el despegue. El aparato se eleva verticalmente a razón de  $50t^2$  ¿Cuál será el ritmo de cambio del ángulo de elevación  $\alpha$  de la cámara a 10 segundos del despegue?

3. ¿Cual será el ritmo de cambio del área de un círculo, si el radio esta cambiando a razón de 4 cm/seg. En  $r = 8$ .

4. Por una transportadora esta cayendo granos de cereal a razón de  $10 \text{ cm}^3 / \text{min}$ . El diámetro de la base del montón es tres veces la altura. ¿A que ritmo cambiará la altura del montón, si esta es de 15 cm.?

5. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(6x)}{x}$

6. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\text{Ln}|x| - \text{sen}\pi(x)}$

7. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Ln}|x+1|}{\text{Log}_2(x)}$

8. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}|e+x| - \text{Ln}|e|}{x}$

9. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3x)^{\frac{5}{3x}}$

10. Dada la función  $f(x) = \frac{x^2}{4 + x^2}$  Identificar los máximos y mínimos si los tiene.

11. Dada la función  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 240x + 10$  Identificar los máximos y mínimos si los tiene.

12. Para la función dada:  $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$  Determinar los valores críticos.

13. Para la función dada:  $f(x) = (4x + 3)^{2/5}$  Determinar los valores críticos, si tiene.

14. Se desea construir un círculo y un cuadrado con 4 metros de lámina. ¿Cuanto del metal se debe usar para construir cada figura, para que entre los dos se consiga el área máxima?

15. Dada la parábola  $y = 9 - x^2$  y el punto  $P(3,9)$ . Hallar el punto de la parábola más cercano al punto de referencia.

16. Dado un cono circular recto inscrito en una esfera de radio  $a$ , hallar las dimensiones del cono de tal manera que ocupe el máximo volumen inscrito.

17. Dos números naturales suman 20 y si la suma de sus recíprocos es máxima, cuales serán dichos números.

18. Dada la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a-) Hallar la monotonía de la función

b-) Determinar la concavidad de la función

19. Dada la función:  $f(x) = \sinh(x)$

a-) Hallar la monotonía de la función

b-) Determinar la concavidad de la función

20. Dada la función  $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$  Determinar:

a-) La monotonía de la función

b-) La concavidad.

**21.** Un cuerpo cae según la función posición  $y(t) = 16t^2$  Donde  $y$  se da en metros y  $t$  en segundos.

- a-) Qué tanto caerá el cuerpo entre  $t = 0$  y  $t = 1$ .
- b-) Cual será la velocidad promedio entre los instantes 3 y 3,01 seg.
- c-) Cual será la rapidez a los 3 seg. de iniciar el movimiento.

**22.** Una partícula se mueve a lo largo de un eje según la función:  $f(t) = -t^4 + 4t$  (metros). En qué momento la partícula estará detenida.

**23.** Un objeto se mueve según el modelo:  $x(t) = \sqrt{2t-1}$  (metros)

- a-) Cual será la velocidad del objeto a los 4 seg.
- b-) En que tiempo el objeto alcanza una velocidad de 2 m/seg.

**24.** El alcance horizontal de un movimiento parabólico esta dado por la ecuación dada a continuación:  $x = \frac{v_o^2 \sin(2\theta)}{g}$  Donde  $v_o$  es la velocidad inicial,  $g$  la gravedad y  $\theta$  el ángulo. Con qué ángulo se debe lanzar un objeto, para que su alcance sea el máximo.

**25.** Dos objetos se mueven de tal forma que la función posición esta dada por:

$$x(t) = 2t^2 - 6t + 3 \quad y \quad y(t) = t^2 - 4t + 1 \quad \text{En qué tiempo los dos objetos tiene la misma velocidad.}$$

**26.** La función costo en la fabricación de artículos de lujo para damas esta dada por:  $C(x) = 4x^2 + 3x + 2.400$ . Hallar:

- a-) El costo marginal para la unidad 50.
- b-) El costo total para la unidad 45.

**27.** Una industria trabaja con las siguientes condiciones:  $C(x) = 0,02x^2 + 25x + 60$ , dado en pesos. El precio de venta por unidad es de 30 pesos. Hallar:

- a-) La función utilidad.
- b-) Cual será la cantidad de unidades producidas que maximice la utilidad.

**28.** Dada la función de demanda  $x = 800 - 25p$ . Cual será el precio de venta que maximiza los ingresos.

**29.** La función costo en un proceso de manufactura esta dado por:  $C(x) = 32\sqrt{2x} + 10$

a-) Cuantas unidades se deberán producir para que el costo marginal sea de 4.

b-) Cuantas unidades debe producir mínimo para que la utilidad sea positiva, si el precio por unidad es de 6.

**30.** El costo de producción de  $x$  unidades de un bien inmueble esta dado por la siguiente función:  $C(x) = 8x + 60$ , la función demanda medida en quincena, esta dada por  $x = 36 - \frac{p}{2}$

a-) Cual debe ser el precio de venta para obtener la máxima utilidad

b-) De cuanto sería la dicha utilidad

c-) Cual sería el precio que da dicha utilidad.

**31.** Sea la variable aleatoria  $X$ , cuya función generadora de momentos dada por  $m_X(t)$ . Si  $Y = aX + b$ . Demostrar que  $m_Y(t) = e^{bt} m_X(at)$ .

**32.** Sea la variable aleatoria  $X$ , con función de densidad de probabilidad normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Hallar

a-) El primer momento de la variable  $X$ .

b-) El segundo momento de la variable aleatoria  $X$ .

c-) la varianza de la variable  $X$ .

**33.** Sea la función generadora de momentos  $m_X(t) = \frac{1}{1-\psi t}$  Para  $\psi > 0$  y que origina los momentos de la variable aleatoria  $X$ . Identificar:

a-) La media de la variable aleatoria.

b-) La varianza de dicha variable.

c-) La asimetría de la variable aleatoria

**34.** La distribución exponencial negativa tiene como función de distribución acumulada.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \text{Para } x > 0 \text{ y } \theta > 0. \text{ Hallar la función de densidad de probabilidad.}$$

**35.** El tiempo de almacenamiento de un objeto de uso relativamente frecuente, esta modelado por una función de distribución  $f(x)$ , cuya función de distribución acumulada es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & \text{Para } x > 2 \\ 0 & \text{Otros Casos} \end{cases}$$

a-) Hacer la gráfica de la función de distribución acumulada.

b-) Hallar la función de distribución  $f(x)$ .

**36.** El tiempo que una persona tarda en explorar en una página de videos, esta modelado por una función de densidad  $f(x)$  cuya función de distribución acumulada se define como:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2} \quad \text{Para } x > 0, \text{ Hallar:}$$

a-) La grafica de  $F_X(x)$ .

b-) La función de densidad de probabilidad

b-) La grafica de  $f(x)$ .

**37.** La distribución logística es un modelo para curvas de crecimiento, muy utilizado en Medicina y Biología; como es el caso de medir los niveles de tolerancia. La función de distribución acumulada esta dada por el modelo.

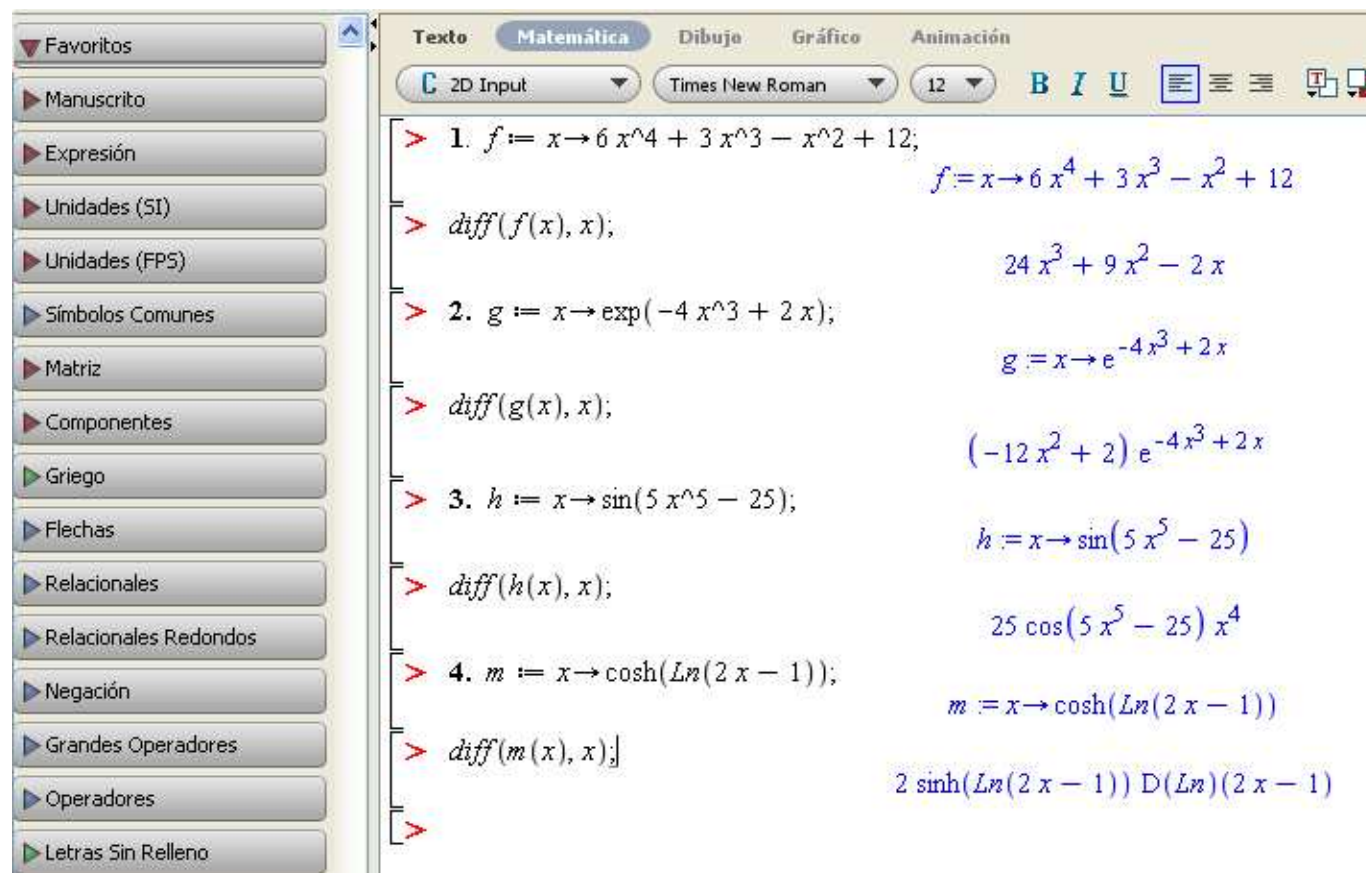
$$F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}} \quad \text{Para } \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Hallar la función de densidad de probabilidad.

[http://www.analyzemath.com/function/logistics\\_function.html](http://www.analyzemath.com/function/logistics_function.html)

## LABORATORIO:

1. En la grafica se observan 4 ejemplos donde se presenta la función y se desarrolla su derivada. Para desarrollar la derivada se utiliza el comando **diff**



The screenshot shows a software interface with a sidebar on the left containing various tool categories like 'Favoritos', 'Manuscrito', 'Expresión', etc. The main area displays a list of commands and their corresponding mathematical results:

- 1.  $f := x \rightarrow 6x^4 + 3x^3 - x^2 + 12;$   
 $\text{diff}(f(x), x);$   
 $24x^3 + 9x^2 - 2x$
- 2.  $g := x \rightarrow \exp(-4x^3 + 2x);$   
 $\text{diff}(g(x), x);$   
 $(-12x^2 + 2)e^{-4x^3 + 2x}$
- 3.  $h := x \rightarrow \sin(5x^5 - 25);$   
 $\text{diff}(h(x), x);$   
 $25 \cos(5x^5 - 25) x^4$
- 4.  $m := x \rightarrow \cosh(\ln(2x - 1));$   
 $\text{diff}(m(x), x);$   
 $2 \sinh(\ln(2x - 1)) D(\ln)(2x - 1)$

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2.  $f(x) = |x - 4|$

3.  $s(t) = \frac{6t^4 - 15}{3t^2}$

4.  $n(y) = \frac{y + 2}{y^3 + 2y - 3}$

5.  $\sqrt{4xy} + 5y^3 = 16$

6.  $f(x) = 10^{x-2} e^{2x+3}$

7.  $s(r) = \ln|10^r + 4r^2|$

8.  $f(x) = \sqrt{\sin(4x) + \tan(4x)}$

9.  $f(x) = \tanh[\ln|4x + 5|]$

## INFORMACIÓN DE RETORNO

### UNIDAD UNO:

1. Para la sucesión  $W_n = \left\{ \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n + 10 \right\}_{n \geq 0}$  Establecer si es acotada en tal caso identificar la mínima cota superior y la máxima cota inferior.

**Solución:**

Identificando los primeros valores de la sucesión:

$$W_n = \left\{ 10, \frac{59}{6}, \frac{32}{3}, \frac{25}{2}, \frac{46}{3}, \dots \right\}$$

Se observa que el mínimo valor es  $59/6$ , es decir tiene máxima cota inferior ( $59/6$ ), pero se observa tendencia a infinito cuando  $n$  crece. Así la sucesión no tiene una cota superior, por consiguiente la sucesión NO es acotada.

2. Demostrar que la sucesión  $U_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{n \geq 1}$  Converge a cero. Para  $k \in \mathbb{R}^+$

**Solución:**

Por la definición:  $\left| \frac{k}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{k}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{k} > \varepsilon \Rightarrow n > k\varepsilon$

Vemos que  $n$  está relacionado con  $\varepsilon$ . Por otro lado, tomando el mayor entero contenido en  $k\varepsilon$  como el valor de  $N$ , la condición se cumple.

Conclusión  $U_n = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{n \geq 1} \rightarrow 0$  Para  $k$  real positivo.

3. Dada la sucesión  $U_n = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n$  Dado un número real positivo  $\varepsilon$ , hallar un natural  $N$  tal que si  $n > N$  entonces

$$|U_n| < \varepsilon \text{ si } \varepsilon = 0,01$$

**Solución:**

Aplicando la sucesión a la condición:  $\left| \frac{3}{n^2 + 3} \right| < 0,01$  Por la propiedad del valor absoluto.  $\frac{3}{n^2 + 3} < 0,01$  Aplicando

recíproco:  $\frac{n^2 + 3}{3} < 100$  Despejamos  $n$ :  $n^2 + 3 < 300 \Rightarrow n = \sqrt{297}$  Así  $N = 17$  cumple la condición.

La conclusión: Si  $n > N$  entonces  $|U_n| < 0,01$

4. Determinar si la sucesión  $V_n = \left\{ \frac{2^n(n+1)}{3^n * n} \right\}$  converge a cero.

**Solución:**

Reorganizado la sucesión original así:

$$V_n = \left\{ \frac{2^n(n+1)}{3^n * n} \right\} \Rightarrow V_n = \left\{ \frac{2}{3} \right\}^n \left\{ \frac{n+1}{n} \right\} \Rightarrow V_n = \{W\}^n \{U\}$$

Analizamos cada sucesión por separado y al final la agrupamos:

$W_n = \left\{ \frac{2}{3} \right\}^n$  Se trata de una progresión geométrica con razón  $2/3$  que por ser menor que la unidad, hace que la sucesión converja a cero.

$U_n = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n \geq 1} = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$  Podemos observar que la sucesión tiene como mínima cota superior  $M = 2$  y además tiene como máxima cota inferior  $N = 1$ . Por consiguiente la sucesión es acotada.

Entonces por el teorema 3, el producto de una sucesión que converge a cero y una sucesión acotada es cero.

$$\{W_n\} \{U_n\} \rightarrow 0$$

5. Sea la sucesión  $U_n = \left\{ \frac{4n}{3n+2} \right\}_{n \geq 0}$  Demostrar que convergente a  $4/3$ .

**Solución:**

Debemos hallar una número natural  $N$  tal que  $n > N$  entonces  $|U_n - L| < \varepsilon$

$$\left| \frac{4n}{3n+2} - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-8}{3(3n+2)} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{8}{3(3n+2)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3(3n+2)}{8} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 3(3n+2) > \frac{8}{\varepsilon}$$



Despejando n:  $n > \frac{8-6\varepsilon}{9\varepsilon}$  Se observa que hay una relación entre n y  $\varepsilon$ .

Entonces se cumple que  $\left| \frac{4n}{3n+2} - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon$  para todo  $n > \frac{8-6\varepsilon}{9\varepsilon}$

6. Investigar a que converge la sucesión:  $U_n = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n$

**Solución:**

Esta es la famosa sucesión que Euler desarrollo y demostró que converge a aproximadamente 2,71828... el numero de Euler  $e$ . Muy usado como en las bases de las funciones exponenciales de base natural y los logaritmos neperianos.  $U_n = \{2,2.250,2,370,2,441,...,2,7182819...\}$

7. La sucesión:  $U_n = \{-2,2,-2,2,-2,...\}$  Hallar el producto de los 3 primeros términos.

**Solución:**

Observando la progresión podemos saber:

$$U_1 = -2, \quad q = -1$$

Hallemos en seguida el n-ésimo término:

$$U_n = q^{n-1} * (-2) = -2 * q^{n-1}$$

$$\text{Para } n = 3, \text{ tenemos: } U_3 = -2 * (-1)^2 = -2$$

Ahora podemos hallar la productoria:

$$\pi_3 = \sqrt{(U_1 * U_3)^3} = \sqrt{[(-2) * (-2)]^3} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

8. La canasta familiar de los empleados asistentes de un país es de \$120.000 a primero de enero, si la tasa de inflación mensual es del 2,05%. Hallar:

a-) Costos de la canasta a los 3 meses del año.

b-) Costo de la canasta a los n meses.

c-) Cuanto gasta un empleado de nivel asistencial en un año.

**Solución:**

a-)  $U_1 = 120.000$

$$U_2 = 120.000 + (120.000 * 0,0205) = 122.460$$

$$U_3 = 122.460 + (122.460 * 0,0205) = 124.970,43$$

b-)  $U_1 = 120.000$

$$U_2 = 120.000 + (120.000 * 0,0205) = 122.460$$

$$U_3 = 122.460 + (122.460 * 0,0205) = 124.970,43$$

$$U_4 = 124.970,43 + (124.970,43 * 0,0205) = 127.532,324$$

La razón será:  $q = 1,0205$ , entonces:

$$U_n = q^{n-1} * U_1 = 120.000 * (1,0205)^{n-1} = 117,589,417 * (1,0205)^n$$

Así el término general:  $U_n = 117,589,417 * (1,0205)^n$

c-) En un año  $n = 12$ , entonces debemos hallar la sumatoria para  $n = 12$ .

$$U_{12} = 117,589,417 * (1,0205)^{12} = 150.011,4282$$

Conociendo el término general, podemos hallar la sumatoria:

$$S_n = \frac{U_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{Entonces:}$$

$$S_{12} = \frac{120.000((1,0205)^{12} - 1)}{1,0205 - 1} = \frac{33.086,6624}{0,0205} = 1'613.983,532$$

En un año gasta 1'613.983,532

**UNIDAD DOS:**

1. Utilizando el método inductivo, demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} [e^x] \cong 2,718$

**Solución:**

Acerquemos la variable por la izquierda:

x	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999
e <sup>x</sup>	2.2255	2.4596	2.6912	2.7155	2.718

Acerquemos la variable por la derecha:

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
e <sup>x</sup>	3.0041	2.7456	2.721	2.718	2.718

Podemos concluir que e<sup>x</sup> **tiende** a 2,718; cuando x **tiende** a 1.

2. Hallar el valor de a para L = 13 en el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow a} [2x - 1] = L$  Asumiendo un  $\delta = \varepsilon/2$

**Solución:**

Partiendo de  $\lim_{x \rightarrow a} [2x - 1] = L$  Existe un  $\varepsilon > 0$  tan pequeño como se quiera, además un,  $\delta > 0$  el cual vale  $\varepsilon/2$  según

el planteamiento. Entonces:  $[2x - 1 - L] < \varepsilon \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta$  resolviendo:

$[2x - (L + 1)] < \varepsilon \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta$  Factorizando 2 en el valor absoluto:

$$2 \left[ x - \frac{L+1}{2} \right] = |x - a| \text{ Por equivalencia: } \frac{L+1}{2} = a \text{ Como } L = 13 \text{ entonces: } a = \frac{13+1}{2} = 7$$

3. Resolver los siguientes límites.

a-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6x^3 + 10x^2 - 3}{3x^4 + 2x^2 - 6} \right]$       b-)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} * [\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}]$

**Solución:**

$$a-) \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6x^3 + 10x^2 - 3}{3x^4 + 2x^2 - 6} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6x^3/x^4 + 10x^2/x^4 - 3/x^4}{3x^4/x^4 + 2x^2/x^4 - 6/x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{6/x + 10/x^2 - 3/x^4}{3 + 2/x^2 - 6/x^4} \right]$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ 6/x + 10/x^2 - 3/x^4 \right]}{\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ 3 + 2/x^2 - 6/x^4 \right]} = \frac{0 + 0 - 0}{3 + 0 - 0} = 0$$

$$b-) \lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{x} * [\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}] = \lim_{x \rightarrow \alpha} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+2x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{(x^2+3x) - (x^2+2x)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+2x}} \right] \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+2x}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} (1)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} (\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}})}$$

Finalmente:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} (1)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} (\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}})} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

4. Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(8x) + \sin(4x)}{\sin(6x)} \right]$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(8x) + \sin(4x)}{\sin(6x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(8x)/x + \sin(4x)/x}{\sin(6x)/x} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(8x)/x + \sin(4x)/x]}{\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(6x)/x]}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(8x)/x) + \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(4x)/x)}{\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(6x)/x]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (8\sin(8x)/8x) + \lim_{x \rightarrow 0} (4\sin(4x)/4x)}{\lim_{x \rightarrow 0} [6\sin(6x)/6x]}$$

Cuando  $x \rightarrow 0 \Rightarrow 8x \Rightarrow 0$  Así para los demás.

$$\frac{\lim_{h \rightarrow 0} (8\sin(h)/h) + \lim_{h \rightarrow 0} (4\sin(h)/h)}{\lim_{h \rightarrow 0} [6\sin(h)/h]} = \frac{8 \lim_{h \rightarrow 0} (\sin(h)/h) + 4 \lim_{h \rightarrow 0} (\sin(h)/h)}{6 \lim_{h \rightarrow 0} (\sin(h)/h)} = \frac{8+4}{6} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(8x) + \sin(4x)}{\sin(6x)} \right] = 2$$

5. Sea la función:  $g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1-x| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a-) Hallar los límites unilaterales

b-) determinar si  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  Existe.

**Solución:**

a-)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = |1 - (-1)| = |2| = 2$     y     $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = |-1 - 1| = |-2| = 2$

b-) Como  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$  Entonces  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  Existe y es 2.

6. Hallar las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1}$  Si las tiene. ( $0 \leq x \leq 2\pi$ )

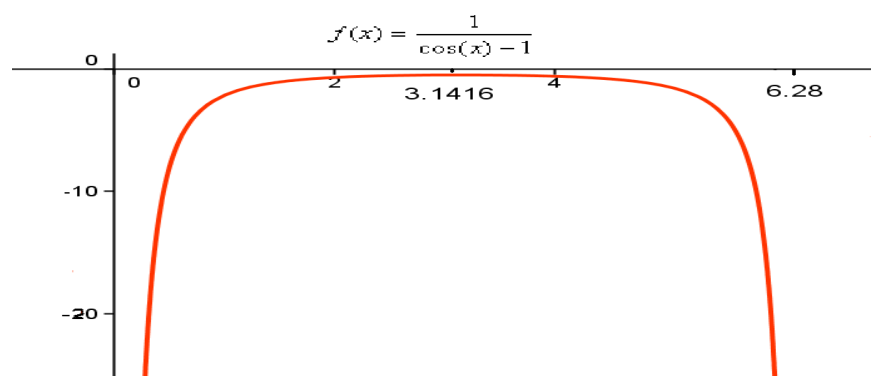
**Solución:**

a-) Horizontales:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\cos(x) - 1} \right) = \frac{1}{\cos(\infty) - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$

Entonces  $y = 0$  es asíntota horizontal de la función.

b-) Verticales:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos(0) - 1} \right) = \frac{1}{\cos(0) - 1} = \frac{1}{0} = \infty$

Existe una asíntota vertical en  $x = 0$  y  $2\pi$



7. Para la función:  $\frac{2}{\sqrt{x-1}}$  En qué intervalo es continua.

**Solución:** La función tiene doble restricción, ya que tiene raíz y cociente, luego para que la función quede determinada, se debe cumplir:  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$  entonces el intervalo donde la función esta definida es:  $(1, \infty)$

## UNIDAD TRES:

1. Para la curva  $f(x) = \sqrt{x}$  Hallar la ecuación de la recta tangente que para por el punto P(4, 2)

**Solución:**

Primero se halla la pendiente.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

Evaluando el límite:

$$m = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces la pendiente será:  $m = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Como ya tenemos la pendiente, ahora planteamos la ecuación de la recta tangente.  $y = m x + b$ , reemplazando el punto y la pendiente:

$$2 = \frac{1}{4}(4) + b \Rightarrow b = 1 \quad \text{Por consiguiente la ecuación de la recta será: } y = \frac{1}{4}x + 1$$

2. Un cultivo de bacterias crece de modo que la masa esta dada por  $m = \frac{1}{2}t^2 + 2$  Donde  $m$  se da en gramos y  $t$  en tiempo.

a-) Cual es la tasa de crecimiento inicial.

b-) Cual es la tasa de crecimiento a los 3 segundos.

**Solución:**

a-) La tasa de crecimiento  $C(t)$  esta dada por la derivada de la masa, entonces:

$$C(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2 + 2 - (\frac{1}{2}t^2 + 2)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{2}t^2 + t\Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 + 2 - \frac{1}{2}t^2 - 2}{\Delta t} \right)$$

$$C(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{t\Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( t + \frac{1}{2}(\Delta t) \right) = t$$

$C(t) = t$ . Así la tasa de crecimiento inicial, será cuando  $t = 0$ .

$$C(t = 0) = 0.$$

b-)  $C(t = 3) = 3$  Entonces a los 3 segundos de inicio del fenómeno, la tasa de crecimiento es de 3 gr./seg.

3. Hallar la derivada de la función  $f(x)$ , utilizando la definición de derivada.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \right]$$

Aplicando la conjugada para la raíz cúbica.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \right] \left[ \frac{(\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \right]$$

Operando

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt[3]{x + \Delta x})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{\Delta x \left( (\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \left( (\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta x}{\Delta x \left( (\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\left( (\sqrt[3]{x + \Delta x})^2 + (\sqrt[3]{x + \Delta x})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right]$$

Evaluando el límite:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \left[ \frac{1}{\left( (\sqrt[3]{x + 0})^2 + (\sqrt[3]{x + 0})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right] = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \left[ \frac{1}{\left( (\sqrt[3]{x + 0})^2 + (\sqrt[3]{x + 0})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right)} \right] = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

4. Demostrar que la función  $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$  Para  $x_0 = 2$ , NO es derivable en el punto  $x_0$  indicado.

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Hallamos los límites unilaterales.}$$

Por la derecha:  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{5-5}{\Delta x} = \frac{0}{5} = 0$

Por la izquierda:  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{3-(x+\Delta x)-(3-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{3-x-\Delta x-3+x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

Como los límites unilaterales son diferentes, entonces el límite de la función en el incremento no existe, por consiguiente la función  $f(x)$   $x_0 = 2$  no es derivable.



5. Hallar la derivada de las funciones propuestas, utilizando las propiedades.

$$\text{a-)} h(x) = \frac{11}{12\sqrt[3]{x^7}} - \sqrt{9x}$$

**Solución:**

Primero ajustamos la función a una forma derivable.

$$h(x) = \frac{11}{12\left(x^{\frac{7}{3}}\right)} - 3(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{12}x^{-\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{11}{12}\left(-\frac{7}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}-1} - 3\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{77}{36}x^{-\frac{10}{3}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{77}{36x^{\frac{10}{3}}} - \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{77}{36\sqrt[3]{x^{10}}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Finalmente: } h'(x) = -\frac{77}{36x^3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{b-)} g(x) = x^3 \text{sen}(x)$$

**Solución:**

Por el teorema de producto:

$$g'(x) = (x^3)\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) + (\text{sen}(x))\frac{d}{dx}(x^3)$$

Desarrollando las derivadas:

$$g'(x) = (x^3)(\cos(x)) + (\text{sen}(x))(3x^2)$$

Factorizando se obtiene:

$$g'(x) = (x^2)[x \cos(x) + 3 \text{sen}(x)]$$

6. Dada la función  $\sqrt{4xy} + 5y^3 = 16$  Para  $y = f(x)$  hallar la derivada de dicha función.

**Solución:**

Primero ajustamos la expresión para poder derivar:

$$2(xy)^{1/2} + 5y^3 = 16 \Rightarrow 2(x)^{1/2}(y)^{1/2} + 5y^3 = 16$$

$$\text{Entonces: } 2 \left[ x^{1/2} * \frac{1}{2} y^{-1/2} * \left( \frac{dy}{dx} \right) + y^{1/2} * \frac{1}{2} x^{-1/2} + 15y^2 * \left( \frac{dy}{dx} \right) \right] = 0$$

$$\text{Organizando: } 2 \left[ \frac{x^{1/2}}{2y^{1/2}} * \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{y^{1/2}}{2x^{1/2}} + 15y^2 * \left( \frac{dy}{dx} \right) \right] = 0$$

$$\text{Transformando: } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} * \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + 15y^2 * \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\text{Factorizando: } \left( \frac{dy}{dx} \right) \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + 15y \right) = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Organizando: } \left( \frac{dy}{dx} \right) \left( \frac{\sqrt{x} + 15y^2 \sqrt{y}}{\sqrt{y}} \right) = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Despejando: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 15y^2 \sqrt{y})} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + 15y^2 \sqrt{xy}}$$

$$\text{Finalmente: } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + 15y^2 \sqrt{xy}}$$

7. Dada la ecuación:  $e^{x+y} + 10^y - 4^x = 10$  Si  $y = f(x)$ , Hallar la derivada de  $f(x)$ .

**Solución:**

Se observa que se trata de una función implícita, pero antes de derivar, hacemos un ajuste a la expresión:

$$e^{x+y} + 10^y - 4^x = 10 \Rightarrow e^x e^y + 10^y - 4^x = 10$$

Ahora derivamos como función implícita:

$$e^x \left( e^y \frac{dy}{dx} \right) + e^y (e^x) + \ln(10) * 10^y * \frac{dy}{dx} - \ln(4) * 4^x = 0$$

$$\text{Agrupando y simplificando: } \frac{dy}{dx} (e^x e^y + \ln(10) * 10^y) + e^x e^y - \ln(4) * 4^x = 0$$

Despejando el diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(4) * 4^x - e^x e^y}{e^x e^y + \ln(10) * 10^y} = \frac{\ln(4) * 4^x - e^{x+y}}{e^{x+y} + \ln(10) * 10^y}$$

8. Sea la función  $s(r) = \ln|10^r + 4r^2|$  Hallar la derivada de  $s(r)$

**Solución:**

Por la definición de derivada de función exponencial y logarítmica:

$$s'(r) = \frac{ds}{dr} = \frac{1}{10^r + 4r^2} * (10^r \ln|10| + 8r) = \frac{(10^r \ln|10| + 8r)}{10^r + 4r^2}$$

9. Hallar la derivada de la función:  $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

**Solución:**

Inicialmente transformemos la función que esta al cuadrado en funciones lineales:

$$f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} - \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(0 - 2\sin(2x)) - \frac{1}{2}(0 + 2\sin(2x)) = -\sin(2x) - \sin(2x)$$

Finalmente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2\sin(2x)$$

10. Sea la función  $f(x) = \tanh[\ln|4x + 5|]$  Hallar la derivada de  $f(x)$ .

**Solución:**

Se trata de una composición de funciones. Definiendo:

$$f(u) = \tanh(u), \quad u(v) = \ln(v), \quad v(x) = 4x + 5$$

Entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = \sec^2(u) * \frac{1}{v} * (4 + 0)$$

Reemplazando y organizando:

$$f'(x) = \sec^2(\ln|4x+5|) * \frac{1}{4x+5} * 4 = \sec^2(\ln|4x+5|) * \frac{4}{4x+5}$$

Finalmente:

$$f'(x) = \frac{4}{4x+5} \sec^2(\ln|4x+5|)$$

**11.** Hallar la tercera derivada de la función:  $g(x) = 4^x + \log_2(x)$

**Solución:**

Derivamos secuencialmente:

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = 4^x \ln(4) + \frac{1}{x \ln(2)}$$

$$g''(x) = \frac{d^2g}{dx^2} = \ln(4) * (4^x \ln(4)) - \frac{1}{x^2 \ln(2)} = 4^x \ln^2(4) - \frac{1}{x^2 \ln(2)}$$

$$g'''(x) = \frac{d^3g}{dx^3} = \ln^2(4) * 4^x \ln(4) + \frac{2x}{x^4 \ln(2)} = 4^x \ln^3(4) + \frac{2}{x^3 \ln(2)}$$

**12.** Sea la función  $h(x) = xe^x$  Hallar la n-ésima derivada de  $h(x)$ .

**Solución:**

Para hallar la primera derivada debemos aplicar regla de producto.

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x+1)$$

Ahora derivamos la nueva función.

$$h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2} = e^x * 1 + (x+1) * e^x = (x+2) * e^x$$

La tercera derivada se obtiene así:

$$h'''(x) = \frac{d^3 h}{dx^3} = (x+2) * e^x + e^x * 1 = (x+3) * e^x$$

Si observamos se puede inferir que el polinomio tiene una constante cuyo valor corresponde a la derivada obtenida. Entonces:

$$h^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)} h}{dx^n} = (x+n) * e^x$$

**13.** Para la función  $g(x) = |x| + 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , mostrar que dicha función No cumple el teorema de Rolle.

**Solución:**

La función  $g(x)$  es continua en  $[-2, 2]$ .

Ahora probemos que  $g(a) = g(b)$ .  $g(-2) = |-2| + 2 = 4$  y  $g(2) = |2| + 2 = 4$

Debe existir un  $c$  en el intervalo dado tal que  $g'(x) = 0$ . Pero por análisis de la función valor absoluto, se sabe que  $g(x)$  NO es diferenciable en el intervalo  $[-2, 2]$ , ya que  $g(x)$  no es diferenciable en  $x = 0$ .

**14.** Por medio del teorema del valor medio, demostrar que la grafica de una función cuya derivada es una constante para todo  $x$  en el dominio de la función, es una recta.

**Solución:**

Según la hipótesis:  $f'(x) = k$ . Una función cuya derivada sea  $k$ , debe ser de la forma:  $f(x) = kx + c$ . Sea el intervalo  $[a, b]$  donde  $f(x)$  es continua.

Luego:  $f(a) = ka + c$  y  $f(b) = kb + c$ .

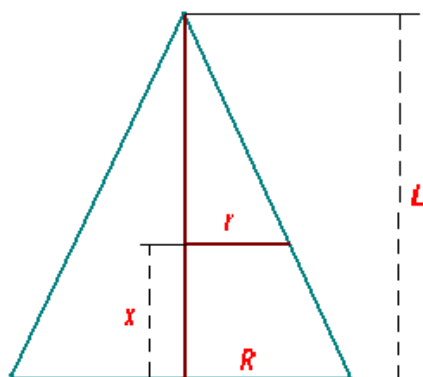
Por el teorema de valor medio:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  reemplazando:

$$k = \frac{kb + c - ka - c}{b - a} \Rightarrow k = \frac{k(b - a)}{b - a} \Rightarrow k = k$$

Demostramos que la igualdad se cumple, así queda demostrada la hipótesis propuesta.

15. Por una transportadora esta cayendo granos de cereal a razón de  $10 \text{ cm}^3 / \text{min}$ . El diámetro de la base del montón es tres veces la altura. ¿A que ritmo cambiará la altura del montón, si esta es de 15 cm.?

**Solución:**



El volumen formado por el montón es de la forma de Cono Circular Recto Truncado.

$$V = \frac{1}{3} \pi * x [R^2 + r^2 + R * r]$$

$$\frac{dV}{dt} = 10 \text{ cm}^3 / \text{min} \quad \text{Según el problema.}$$

$$R = \frac{3}{2} L \quad \text{Según el problema.}$$

$x = 15 \text{ cm}$ .

Dando un valor de L superior de 15; por supuesto, podemos obtener R, por ejemplo si  $L = 20$ ,  $R = 30$

De esta manera se puede hallar el valor de r para el punto dado. Por triángulos semejantes.

$$\frac{L}{R} = \frac{L-x}{r} \Rightarrow r = \frac{R(L-x)}{L} = \frac{30(20-15)}{20} = 7,5$$

Ahora debemos expresar el volumen del cono en función de L, veamos:

$$V = \frac{1}{3} \pi * x [R^2 + r^2 + R * r] = \frac{1}{3} \pi * x \left[ \left( \frac{3}{2} L \right)^2 + r^2 + \left( \frac{3}{2} L \right) * r \right]$$

Organizando:

$$V = \frac{1}{3} \pi * x \left[ \frac{9}{4} L^2 + r^2 + \frac{3}{2} L * r \right] = \frac{\pi * x}{12} [9 L^2 + 4 r^2 + 6 L * r]$$

Ahora derivamos V y L respecto a t.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi * x}{12} \left[ 18 L * \frac{dL}{dt} + 0 + 6 r * \frac{dL}{dt} \right] = \frac{\pi * x}{12} \left[ \frac{dL}{dt} (18 L + 6 r) \right]$$

Según el problema, para  $L = 20$ ,  $r = 7,5$  y  $x = 15$ . Reemplazando:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi * 15}{12} \left[ \frac{dL}{dt} (18(20) + 6(7,5)) \right] = \frac{\pi * 15}{12} \left[ \frac{dL}{dt} (405) \right]$$

Como nuestra incógnita es  $dL/dt$ , despejamos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dV / dt * 12}{15 * 405 * \pi} = \frac{10 * 12}{15 * 405 * \pi} = \frac{8}{405 \pi}$$

Entonces la altura del montón va creciendo a razón de  $\frac{8}{405 \pi}$  cm. / min.

16. Hallar el límite si existe.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |e + x| - \ln |e|}{x}$

**Solución:**

Evaluando  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |e + 0| - \ln |e|}{0} = \frac{0}{0}$

Como se presenta la indeterminación  $0/0$  se puede aplicar L'Hopital.

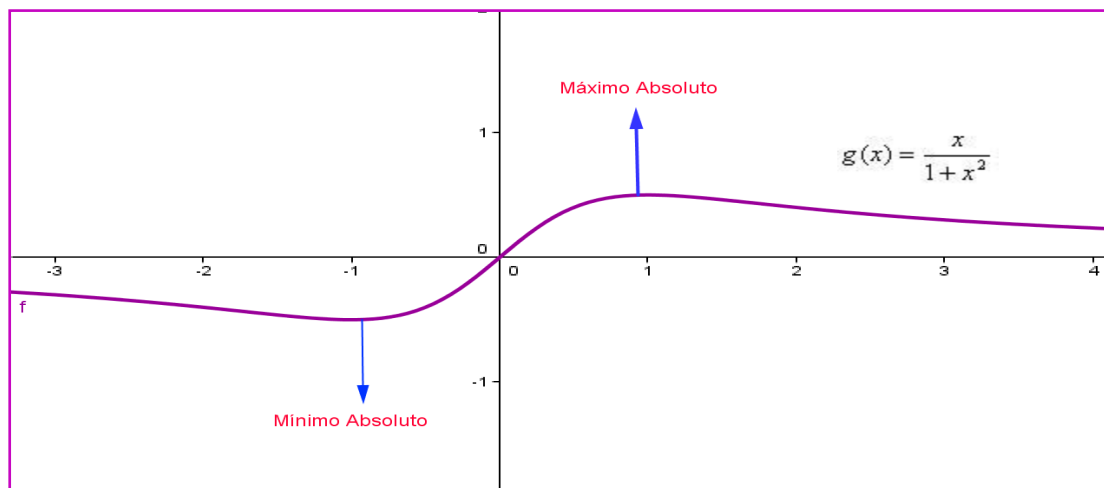
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |e + x| - \ln |e|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e + x} - 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e + x} = \frac{1}{e + 0} = \frac{1}{e}$$

17. Para la función dada:  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$  Determinar los valores críticos.

**Solución:**

Derivamos la función:  $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$  Igualamos a cero:  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0$

$1-x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0$  Valores críticos:  $x = 1$  y  $x = -1$ . Entonces: en  $x = -1$  hay un mínimo absoluto y en  $x = 1$  hay un máximo absoluto.

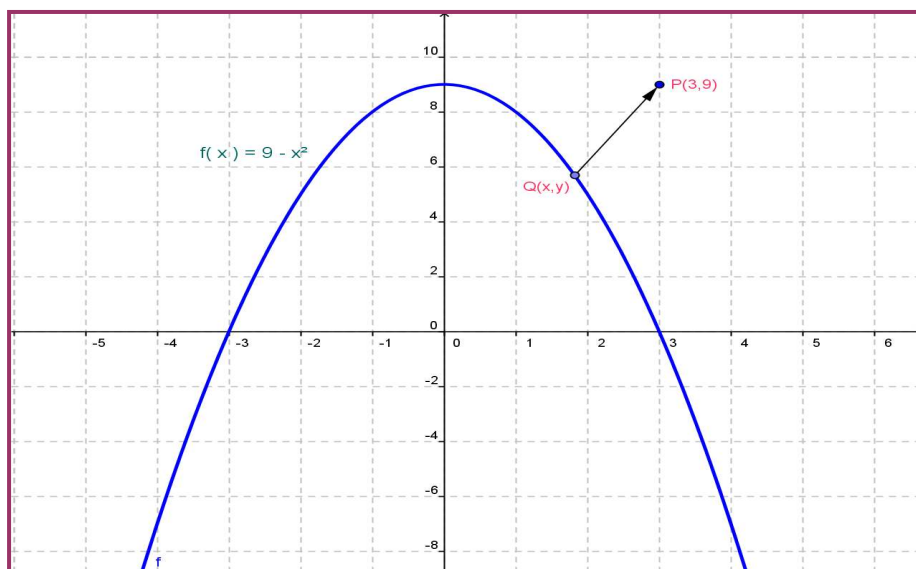


Así los valores extremos son:  $g(x = -1) = -\frac{1}{2}$  y  $g(x = 1) = \frac{1}{2}$

**18.** Dada la parábola  $y = 9 - x^2$  y el punto  $P(3,9)$ . Hallar el punto de la parábola más cercano al punto de referencia.

**Solución:**

La gráfica nos ilustra el fenómeno y nos da una luz a su solución.





Por medio de la fórmula de distancia entre dos puntos, sea  $P(3, 9)$  y  $Q(x, y)$  cualquier punto de la curva.

Distancia entre dos puntos:  $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-9)^2}$  Pero según la gráfica:  $y = 9 - x^2$ , reemplazando:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + ([9-x^2]-9)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (-x^2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

Como se puede observar en la gráfica el dominio de  $x$  es:  $0 \leq x \leq 3$ .

Derivamos la distancia respecto a  $x$ .

$$\frac{d(d)}{dx} = \frac{2(x-3) \cdot 1 + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}$$

Igualando a cero y despejando la variable:

$$\frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0 \Rightarrow 4x^3 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow (4x+6)(x-1) = 0$$

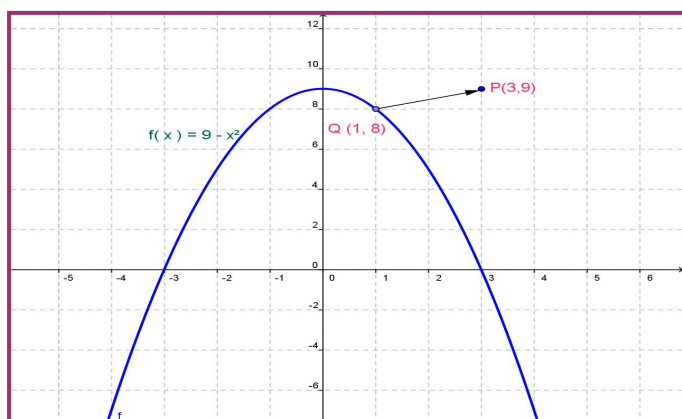
$x = 1$  y  $x = -3/2$ . El segundo valor NO está en el intervalo de la variable, luego los valores críticos serán:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ . Debemos buscar el que origine un valor mínimo:

$$d(x=0) = \sqrt{(0-3)^2 + 0^4} = 3$$

$$d(x=1) = \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5} \cong 2,236$$

$$d(x=3) = \sqrt{(3-3)^2 + 3^4} = 9$$

El valor mínimo es 2,236 que corresponde al valor  $x = 1$ . Por consiguiente el punto  $Q(x, y)$  más cercano de la parábola al punto  $P(3, 9)$  es  $Q(1, 8)$ .



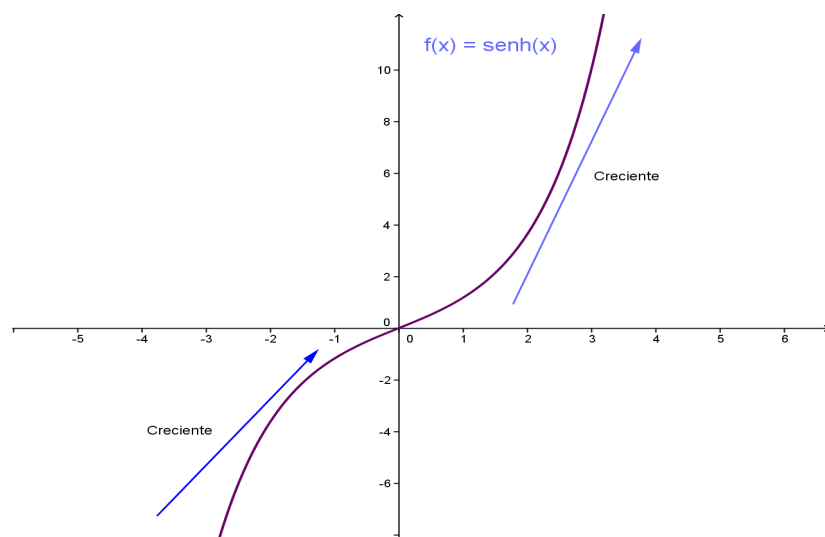
19. Dada la función:  $f(x) = \sinh(x)$

a-) Hallar la monotonía de la función

b-) Determinar la concavidad de la función

**Solución:**

a-) Derivamos la función  $f'(x) = \cosh(x)$ . Para esta función,  $x$  nunca se hace cero. Para cualquier valor de  $x$ ; la función  $\cosh(x)$  siempre será positiva. Por consiguiente  $f(x)$  es creciente en todo su dominio.

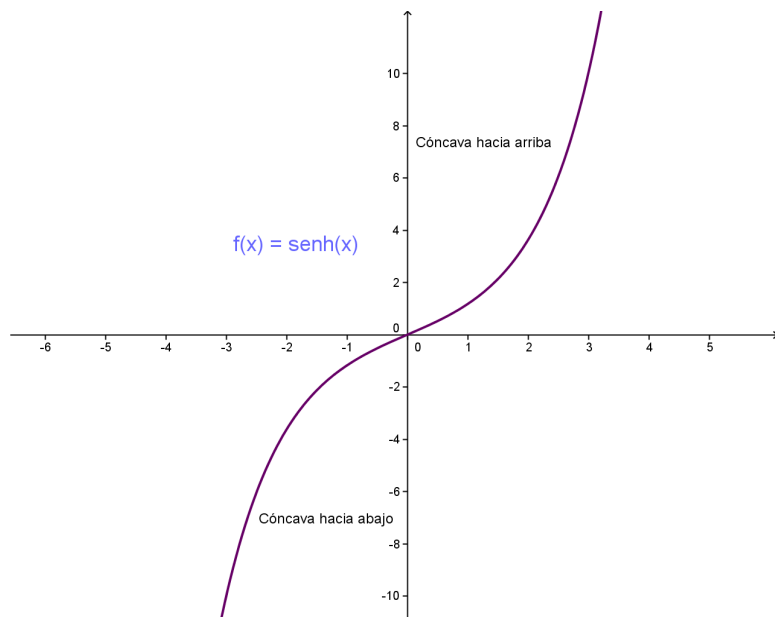


b-) Para la concavidad debemos hallar la segunda derivada:  $f''(x) = \sinh(x)$

La función se hace cero cuando  $x = 0$ . Hay un punto de inflexión en  $x = 0$ .

Cuando  $x$  es negativo,  $f''(x) < 0$ , entonces  $f(x)$  es cóncava hacia abajo.

Si  $x$  es positivo,  $f''(x) > 0$ , luego  $f(x)$  será cóncava hacia arriba.



20. Dada la función  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$  Determinar:

a-) La monotonía de la función

b-) La concavidad.

**Solución:**

a-) Para la monotonía debemos determinar en qué intervalo la función es creciente y en intervalo es decreciente. Entonces derivamos:

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \text{ Los puntos críticos:}$$

Cuando la derivada se hace cero.  $x = 0$   $x = \sqrt{3}$   $x = -\sqrt{3}$

Cuando la derivada no esta definida:  $x = 1$   $x = -1$

Los intervalos:  $(-\infty, -\sqrt{3})$   $(-\sqrt{3}, -1)$   $(-1, 0)$   $(0, 1)$   $(1, \sqrt{3})$   $(\sqrt{3}, \infty)$

Reemplazamos en cada intervalo, para identificar la monotonía.

En el primer intervalo:  $f'(-2) = -4/9$ .  $f(x)$  decreciente.

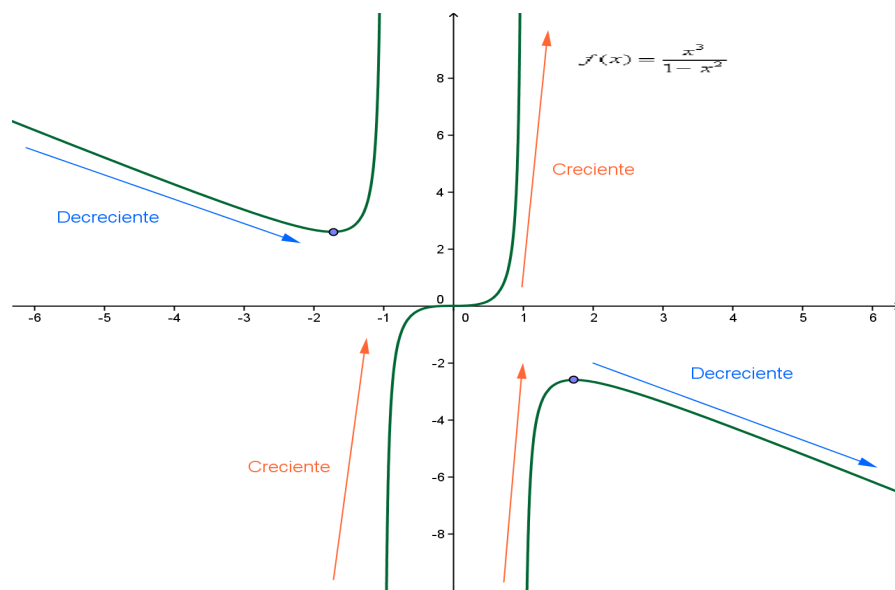
En el segundo intervalo:  $f'(-3/2) = 27/25$ .  $f(x)$  es creciente

En el tercer intervalo:  $f'(-1/2) = 11/9$ .  $f(x)$  es creciente

En el cuarto intervalo:  $f'(1/2) = 11/9$ .  $f(x)$  es creciente

En el quinto intervalo:  $f'(3/2) = 27/25$ .  $f(x)$  es creciente

En el sexto intervalo:  $f'(2) = -4/9$ .  $f(x)$  es decreciente



b-) -) Para la concavidad debemos hallar la segunda derivada:  $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$

Despejando:  $x = 0$ , entonces hay un punto de inflexión en:

$(-\alpha, -1)$   $(-1, 0)$   $(0, 1)$   $(1, \alpha)$

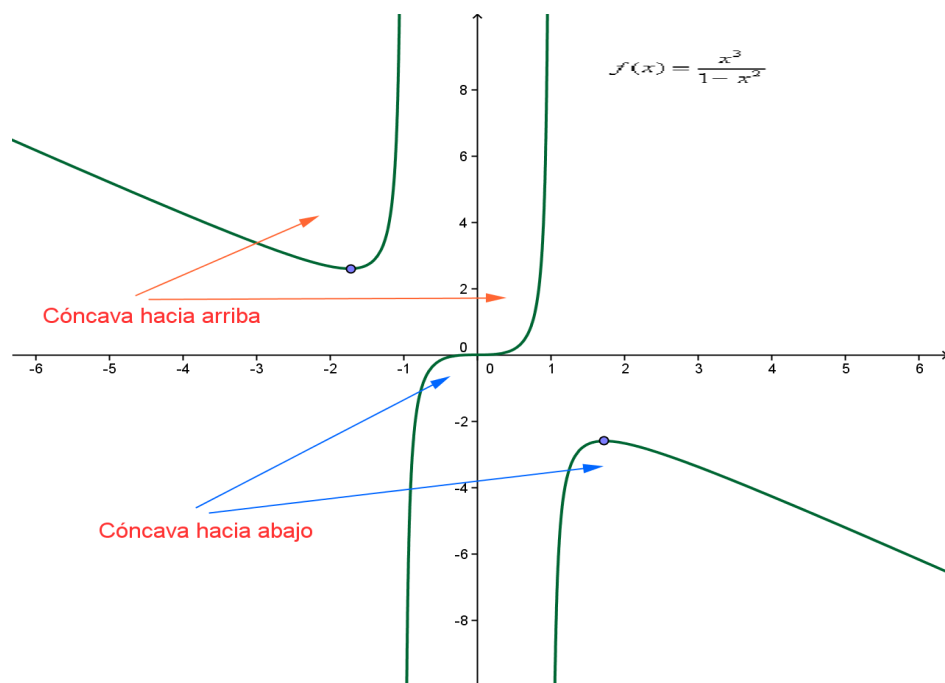
Evaluado en cada intervalo para determinar la concavidad.

En el primer intervalo:  $f''(-2) = 28/27$ .  $f(x)$  cóncava hacia arriba.

En el segundo intervalo:  $f''(-1/2) = -208/27$ .  $f(x)$  cóncava hacia abajo.

En el tercer intervalo:  $f''(1/2) = 208/27$ .  $f(x)$  cóncava hacia arriba.

En el cuarto intervalo:  $f''(2) = -28/27$ .  $f(x)$  cóncava hacia abajo



**21.** El alcance horizontal de un movimiento parabólico está dado por la ecuación dada a continuación:  
 $x = \frac{v_o^2 \sin(2\theta)}{g}$  Donde  $v_o$  es la velocidad inicial,  $g$  la gravedad y  $\theta$  el ángulo. Con qué ángulo se debe lanzar un objeto, para que su alcance sea el máximo.

**Solución:**

Un máximo se encuentra cuando  $d x / d \theta = 0$ . Entonces:  $\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_o^2}{g} [2 \cos(2\theta)]$  Pero

$d x / d \theta = 0$ , cuando  $\cos(2\theta) = 0$ , luego:  $2\theta = \cos^{-1}(0)$ ,  $\theta = \pi/2 = 45^\circ$

**22:** Dos objetos se mueven de tal forma que la función posición está dada por:

$x(t) = 2t^2 - 6t + 3$  y  $y(t) = t^2 - 4t + 1$  En qué tiempo los dos objetos tienen la misma velocidad.

**Solución:**

Primero derivamos la función posición:

$$\frac{dx}{dt} = 4t - 6 \quad y \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 4$$

Los dos objetos tendrán la misma velocidad, igualamos las dos velocidades y despejamos el tiempo:

$$4t - 6 = 2t - 4, \text{ entonces: } 2t = 2, \text{ entonces } t = 1 \text{ seg.}$$

Los dos objetos tendrán la misma velocidad en el primer segundo.

**23.** La función costo en un proceso de manufactura esta dado por:  $C(x) = 32\sqrt{2x} + 10$

a-) Cuantas unidades se deberán producir para que el costo marginal sea de 4.

b-) Cuantas unidades debe producir mínimo para que la utilidad sea positiva, si el precio por unidad es de 6.

**Solución:**

a-) A partir de la función costo total hallamos costo marginal.

$$\frac{dC}{dx} = 32 \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{32}{\sqrt{2x}}$$

Como el costo marginal debe ser de 4, entonces:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{32}{\sqrt{2x}} = 4 \Rightarrow 32 = 4\sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{2x} = 8 \Rightarrow 2x = 64 \Rightarrow x = 32$$

Para que el costo marginal sea de 4, se deben producir 32 unidades.

b-) Como  $I(x) = x \cdot p = 6x$ , ahora:  $U(x) = 6x - 32\sqrt{2x} - 10$  Para que la utilidad sea positiva,  $U(x) > 0$ , entonces hacemos  $U(x) = 0$  y despejamos x:

$$6x - 32\sqrt{2x} - 10 = 0 \Rightarrow (6x - 10) = 32\sqrt{2x} \Rightarrow 36x^2 - 120x - 100 = 2048x$$

$$\text{Reorganizando: } 36x^2 - 2168x - 100 = 0$$

$$\text{Por la cuadrática: } x = \frac{2168 \pm \sqrt{4100224 + 14400}}{72} = \frac{2168 \pm 2028,45}{72}$$

$$x_1 = 1,94 \approx 2 \text{ y } x_2 = 58,28 \approx 59.$$

Probemos la utilidad con os dos valores:

$$U(x = 2) = 6 \cdot 2 - 32\sqrt{2 \cdot 2} - 10 = -62$$

$$U(x = 59) = 6 \cdot 59 - 32\sqrt{2 \cdot 59} - 10 = 354 - 357,608 = -3,068$$

$$U(x=60) = 6 \cdot 60 - 32\sqrt{2 \cdot 60} - 10 = 360 - 360,54 = -0,54$$

$$U(x=61) = 6 \cdot 61 - 32\sqrt{2 \cdot 61} - 10 = 366 - 363,45 = 2,55$$

La cantidad mínima para que la utilidad sea positiva debe ser de 61.

**24.** Sea la variable aleatoria  $X$ , con función de densidad de probabilidad normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Hallar

a-) El primer momento de la variable  $X$ .

b-) El segundo momento de la variable aleatoria  $X$ .

c-) la varianza de la variable  $X$ .

**Solución:**

$$a-) E(X) = \left. \frac{d}{dt} m_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} \right] \right|_{t=0} = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} \left[ \frac{1}{2}\sigma^2 2t + \mu \right]_{t=0}$$

Evaluyendo en  $t=0$ .

$$E(X) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} \left[ \frac{1}{2}\sigma^2 2t + \mu \right]_{t=0} = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 * 0 + \mu * 0} \left[ \frac{1}{2}\sigma^2 2 * 0 + \mu \right] = \mu$$

Entonces para una función de densidad normal:  $E(X) = \mu$

$$b-) E(X^2) = \left. \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} (\sigma^2 t + \mu) \right] \right|_{t=0}$$

$$\text{Derivando: } E(X^2) = \left( \sigma^2 t + \mu \right)^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} + \sigma^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t} \Big|_{t=0}$$

Evaluyendo para  $t=0$ .

$$E(X^2) = (\sigma^2 * 0 + \mu)^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 * 0^2 + \mu * 0} + \sigma^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 * 0^2 + \mu * 0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

c-) Como  $V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$  Entonces:

$$V(X) = [\mu^2 + \sigma^2] - [\mu]^2 = \sigma^2 \Rightarrow V(X) = \sigma^2$$

**25.** Sea la variable aleatoria  $X$ , cuya función generadora de momentos dada por  $m_X(t)$ . Si  $Y = aX + b$ . Demostrar que  $m_Y(t) = e^{bt} m_X(at)$ .

**Solución:**

Partiendo de la definición:

$$m_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{taX} * e^{tb}]$$

Por las propiedades de valor esperado:  $m_Y(t) = E[e^{taX} * e^{tb}] = E[e^{taX}] E[e^{tb}] = e^{tb} E[e^{taX}]$

Finalmente:  $m_Y(t) = e^{tb} E[e^{taX}] = e^{tb} m_X(at)$

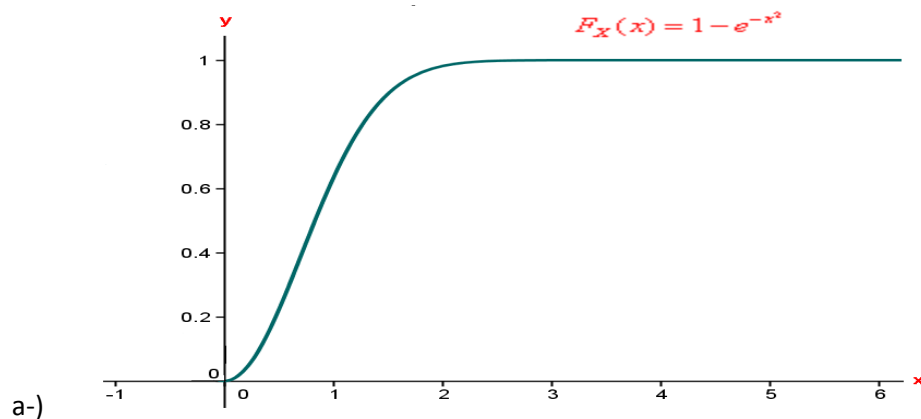
**26.** El tiempo que una persona tarda en explorar en una página de videos, esta modelado por una función de densidad  $f(x)$  cuya función de distribución acumulada se define como:  $F_X(x) = 1 - e^{-x^2}$  Para  $x > 0$ , Hallar:

a-) La grafica de  $F_X(x)$ .

b-) La función de densidad de probabilidad

b-) La grafica de  $f(x)$ .

**Solución:**



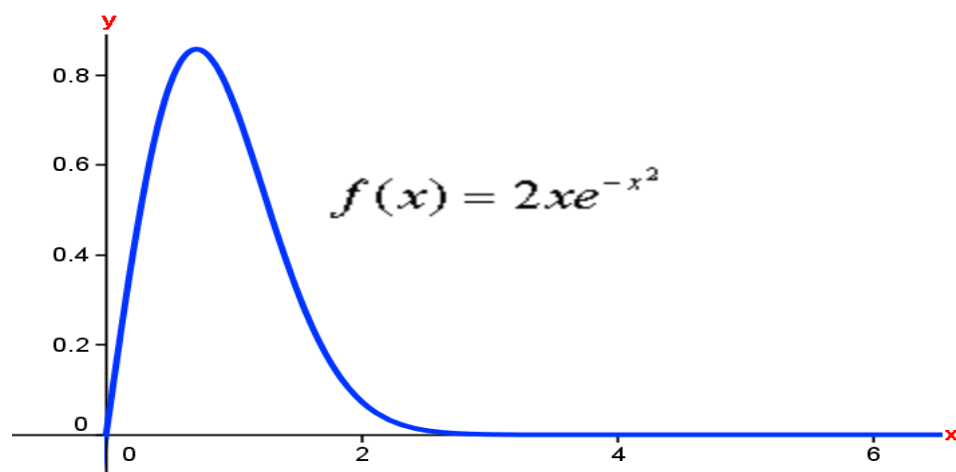


$$b-) f(x) = \frac{d}{dx} [F_x(x)] = \frac{d}{dx} (1 - e^{-x^2}) = 0 - [e^{-x^2}(-2x)]$$

Reorganizando:

$$f(x) = 2xe^{-x^2}$$

c-)



## BIBLIOGRAFÍA

- BAUM, Alan, MILLES, Stephen, SCHULTZ, Henry. Cálculo Aplicado. Limusa, México, 1992.
- DE BURGOS, Juan. Cálculo Infinitesimal de Una Variable. Mc Graw Hill. Madrid, 2.007
- LARSON, Ronald, HOSTETLER, Robert. Cálculo Vol. 1, Mc Graw Hill, sexta edición, México, 1.998.
- LEYTOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Harla, México, 1.987.
- PITA, Claudio. Cálculo de una Variable, Prentice hall, Única Edición, México, 1.998
- PURCELL, Edwin y Otros. Cálculo, Prentice hall, Octava Edición, México, 2.001
- RONDON, Jorge Eliecer. Calculo Integral. Primera edición, UNAD Ciencias básicas 2007
- SMITH, Robert y MINTON, Ronald. Cálculo Vol. 1. Mc Graw Hill, Bogotá. 2000.
- STEWART, James, Cálculo de una Variable. Thomsom-Learning. Cuarta edición, Bogotá, 2001.
- THOMAS, George, FINNEY, Ross. Cálculo con Geometría Analítica Vol. 1. Edición sexta, Addison Wesley Iberoamericana. México, 1987.

## CIBERGRAFÍA

- <http://www.acienciasgalilei.com/videos/4matematicas.htm>
- <http://www.math2.org/math/derivatives/es-identities.htm>
- <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/25-1-u-derivadas.html>
- <http://webs.ono.com/usr011/siglo21/derivadas.htm>
- [http://personal5.iddeo.es/ztt/For/F1\\_Tabla\\_Derivadas.htm](http://personal5.iddeo.es/ztt/For/F1_Tabla_Derivadas.htm)
- <http://soko.com.ar/matem/matematica/Derivada.htm>
- <http://enciclopedia.us.es/index.php/Derivada>
- [http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/derivadas\\_de\\_orden\\_superior.htm](http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/derivadas_de_orden_superior.htm)
- [http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap\\_07/cap7\\_7-4.html](http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_07/cap7_7-4.html)
- [http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Autoformacion/Archivos\\_comunes/Tangente\\_a\\_una\\_curva.htm](http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Autoformacion/Archivos_comunes/Tangente_a_una_curva.htm)