DESARROLLO TRABAJO COLABORATIVO 2

INTEGRANTES:

GEIDER ENRIQUE BARIOS

ADRIAN ORLAY MAZO

JONATHAN ROBERTO ORTEGA

YASIRA MOSQUERA

MIRLEVIS AGUALIMPIA

GRUPO 100411_89

ENTREGADO A: WILSON IGNACIO CEPEDA

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

UNAD

20 DE OCTUBRE 2014

NTRODUCCION

El presente trabajo tiene como finalidad que el estudiante practique e interiorice el procedimiento de los ejercicios propuestos en esta segunda fase, como son las integrales indefinidas e integrales impropias, las cuales al desarrollarlos detalladamente, permiten la interiorización de los conceptos propuestos para la segunda unidad. Es importante señalar la necesidad de conocer los diferentes métodos de integración, los cuales se incluyen dentro de este trabajo, como son la resolución de integrales convergentes y divergentes, métodos de integración por sustitución e integración, integración por racionalización, integración por sustitución trigonométrica, integración por partes, integración por fracciones parciales, esta metodología permite adicional al conocimiento matemático, poder resolver diferentes tareas en diferentes áreas.

Adicional a lo anterior, es de vital importancia el manejo de las herramientas para la elaboración de los documentos a partir de los editores de ecuaciones, los cuales permiten interiorizar de una manera didáctica el desarrollo del ejercicio, pues a partir de la creación de los ejercicios de manera manuscrita y luego el paso a editor de ecuaciones se crea un ambiente de estudio agradable y que permite un repaso de las actividades ya hecha de manera escrita.

EJERCICIO 1

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} e^{-x}\, dx$$

$$\lim_{t\to\infty} (-e^{-x})_0^t$$

$$\lim_{t\to\infty} - e^{-\infty} - (-e^{-0}) = 1$$

RESPUESTA

$$1\, u^2$$

EJERCICIO 2

$$\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

$$\int_{-8}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

$$\int_{-8}^{1} 1x^{-\frac{1}{3}}\ dx$$

$$\int_{-8}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\ dx = \lim_{t\to 0^-} \int_{-8}^{t} x^{-\frac{1}{3}}\ dx + \lim_{R\to 0^+} \int_{R}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\ dx$$

$$\lim_{t\to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{-8}^{t} + \lim_{R\to 0^+} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{R}^{1}$$

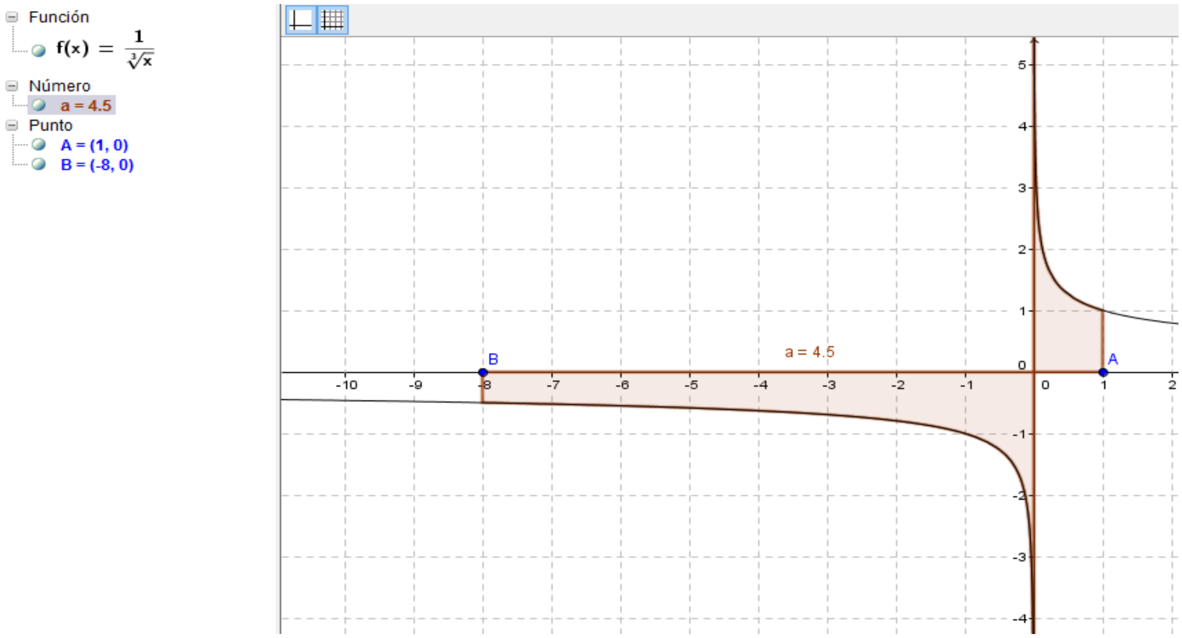
$$= \frac{30^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3(-8)^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3(1)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{30^{\frac{2}{3}}}{2}$$

$$= -6 + \frac{3}{2}$$

Respuesta:

$$4.5\ u^2$$

GRAFICA



Ejercicio 3

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cambio de variable

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x\ dx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

Remplazamos y simplificamos

$$\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1-u}}\ du$$

Cambio de variable

$$s = 1 - u$$

$$\frac{ds}{du} = -1$$

$$ds = -1du$$

Remplazamos y simplificamos

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1-s}{\sqrt{s}}\ ds$$

Transformamos la integral así

$$-\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}\right)\ ds$$

$$-\frac{1}{2}\int s^{-\frac{1}{2}}ds + \int \sqrt{s}\ \ ds$$

$$= \frac{s^{\frac{2}{3}}}{3} - \sqrt{s}\ + c$$

Sustituimos la variable original de $s = 1 - u$

$$\frac{1}{3}\ (1-u)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{1-u}\ + c$$

Por último paso sustituimos la variable original de $u = x^2$

$$\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{1-x^2} + c$$

RESPUESTA

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(x^2+2\right) + c$$

Ejercicio 4

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Cambio de variable

$u = x$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

Remplazamos y simplificamos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u}+1}}\,du$$

Simplificamos el radical

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{u+1}{u}}}\,du$$

Cambio de variable

$$s = \frac{u+1}{u}$$

$$ds = \left(\frac{1}{u} - \frac{u+1}{u^2}\right) du$$

Remplazamos y simplificamos

$$-\int \frac{1}{(1-s)^2\sqrt{s}}\,ds$$

Cambio de variable

$$p = \sqrt{s}$$

$$dp = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds$$

Remplazamos y simplificamos

$$= \ -2\int \frac{1}{(1-p^2)^2}\,dp$$

Aplicamos fracciones parciales

$$-2\int \left(\frac{1}{4(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)^2} + \frac{1}{4(p-1)} + \frac{1}{4(p-1)^2}\right) dp$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{p+1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p+1)^2}\,dp + \frac{1}{2}\int \frac{1}{p-1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

Cambio de variable

$w = p + 1$

$dw = dp$

Remplazamos y simplificamos

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,dw - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p+1)^2}\,dp + \frac{1}{2}\int \frac{1}{p-1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

$$= -\frac{\ln|w|}{1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p+1)^2}\,dp + \frac{1}{2}\int \frac{1}{p-1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

Cambio de variable

$$v = p + 1$$

$$dv = dp$$

$$= -\frac{\ln|w|}{1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2}\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{1}{p-1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

$$= \frac{1}{2v} - \frac{\ln|w|}{1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{p-1}\,dp - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

Cambio de variable

$$z = p - 1$$

$$dz = dp$$

$$= \frac{1}{2v} - \frac{\ln|w|}{1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

$$= \frac{1}{2v} - \frac{\ln|w|}{1} + \frac{\ln|z|}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(p-1)^2}\,dp$$

Cambio de variable

$$l = p - 1$$

$$dl = dp$$

$$= \frac{1}{2v} - \frac{\ln|w|}{1} + \frac{\ln|z|}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{l^2}\, dl$$

$$= \frac{1}{2v} - \frac{\ln|w|}{1} + \frac{\ln|z|}{2} - \frac{l}{2l} + c$$

Remplazamos todas las variables a su estado original

Respuesta

$$= \frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}\left(\sqrt{x}\,(x+1) - \sqrt{x+1}\, sinh^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} + c$$

Límite superior menos límite inferior

$$= \left. \frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}\left(\sqrt{x}\,(x+1) - \sqrt{x+1}\, sinh^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{1+1}}\left(\sqrt{1}\,(1+1) - \sqrt{1+1}\,sinh^{-1}\left(\sqrt{1}\right)\right)}{\sqrt{1}}$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{0}{0+1}}\left(\sqrt{0}\,(0+1) - \sqrt{0+1}\,sinh^{-1}\left(\sqrt{0}\right)\right)}{\sqrt{0}}$$

$$= \sqrt{2} - sinh^{-1}$$

Respuesta

$$0{,}53284\,u^2$$

Ejercicio 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{25 + \ cos^2\ x}\ dx$$

Cambio de variable

$$u = \cos x$$

$$du = \ -\sin x\ dx$$

Simplificamos y remplazamos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{25 + \ u^2}\ du$$

Factor común 25 denominador

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{25\left(\frac{u}{25}^2+1\right)}\,du$$

$$-\frac{1}{25}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{u}{25}^2+1}\,du$$

Cambio de variable

$$s=\frac{u}{5}$$

$$ds=\frac{1}{5}du$$

Remplazamos y simplificamos

$$-\frac{1}{5}\int \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

Nota

$$\int \frac{1}{s^2+1}\,ds = tan^{-1}\,s + c$$

$$-\frac{1}{5}\ tan^{-1}\,s + c$$

$$-\frac{1}{5}\ tan^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) + c$$

$$-\frac{1}{5}\ tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{5}\right) + c$$

Limites superior menos límite inferior

$$-\frac{1}{5}\ tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{5}\right)\Bigg|^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{5}\ tan^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}tan^{-1}\ \left(\frac{\cos(0)}{5}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{5} cot^{-1}(5) = 0{,}039$$

Respuesta

$$= 0{,}039 \, u^2$$

Ejercicio 06

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 - (e^{4x})^2}} \, dx$$

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 - e^{8x}}} \, dx$$

Cambio de variable

$u = e^x$

$du = e^x \, dx$

Remplazamos y simplificamos

$$\int \frac{u^3}{\sqrt{4-u^8}}\,du$$

Cambio de variable

$s = \ u^4$

$ds = 4u^3\ du$

Remplazamos y simplificamos

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}}\,ds$$

La constante sale de la integral

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}}\,ds$$

Cambio de variable

$$p = \frac{s}{2}$$

$dp = \frac{1}{2}\, ds$

Remplazamos y simplificamos

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-p^2}\, dp$$

Nota

$$sin^{-1}\,(p) = \int \frac{1}{1-p^2}\, dp$$

$$= \frac{1}{4}\, sin^{-1}\,(p) + c$$

Cambio de variable a su estado original $p = \frac{s}{2}$

$$= \frac{1}{4} sin^{-1} \left(\frac{s}{2}\right) + c$$

Cambio de variable a su estado original $\quad s = u^4$

$$= \frac{1}{4} sin^{-1} \left(\frac{u^4}{2}\right) + c$$

Cambio de variable a su estado original $\quad u = e^x$

Respuesta

$$= \frac{1}{4} sin^{-1} \left(\frac{e^{4x}}{2}\right) + c$$

Ejercicio 7

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})}$$

Cambio de variable

$u = \sqrt{x} + 1$

$du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

Remplazamos y simplificamos

$$= 2 \int \frac{1}{u} \, du$$

$$2 \int u^{-1} \, du$$

$$2 \ \ln|u| + c$$

Remplazamos la variable a su estado original $u = \sqrt{x} + 1$

Respuesta

$$2 \ \ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + c$$

Ejercicio 08

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx$$

La anterior integral es igual a

$$\cosh^{-1} x$$

Luego que

$$\int \cosh^{-1} x \ dx$$

Respuesta

$$= \ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+C$$

Ejercicio 09

$$\int e^x \sin(x) \ dx$$

Integral por partes

$$\int f \ dg \ = f \ g - \int g \ df$$

Donde

$$f = \sin x$$

$$df = \cos x \ dx$$

$$dg = \ e^x \ dx$$

$$g = \ e^x$$

Remplazamos estos valor por la formula anterior así

$$\int f\,dg\ = f\ g - \int g\,df$$

$$\int e^{x} \sin x\,dx\ \ = e^{x}\ \sin x\ - \int e^{x} \cos x\ dx$$

Ahora la integral que vemos ahí también toca por partes

$$\int e^{x} \cos x\ dx$$

Así

$$\int f\,dg\ = f\ g - \int g\,df$$

Donde

$$f = \cos x$$

$$df = -six\ x$$

$$dg = \ e^{x}\,dx$$

$$g = \ e^{x}$$

Remplazamos estos valor por la formula anterior así

$$\int f\,dg\ = f\ g - \int g\,df$$

$$\int e^x \sin x \, dx \; = e^x \; \sin x \; - e^x \cos x - \int e^x \sin x \; dx$$

Entonces la integral $\int e^x \sin x \, dx$ a ambos lados es

$$2 \int e^x \sin x \, dx \; = e^x \; \sin x \; - e^x \cos x$$

Dividir ambos lados por 2

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x \,) + C$$

Respuesta

$$= \frac{1}{2} \, e^x(\sin x - \cos x) + C$$

Ejercicio 10

$$\int \frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1} \, dx$$

Rescribir la integral así:

$$\frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1} = \frac{5 \, (4x + 1)}{4(2x^2 + x - 1)} - \frac{21}{4(2x^2 + x - 1)}$$

$$\int \frac{5\,(4x+1)}{4(2x^2+x-1)} - \frac{21}{4(2x^2+x-1)}\;dx$$

Integramos por factores y sacamos la constante

$$\frac{5}{4}\int \frac{(4x+1)}{(2x^2+x-1)}\;dx - \int \frac{21}{4(2x^2+x-1)}\;dx$$

Para la integral $\frac{(4x+1)}{(2x^2+x-1)}$ realizamos cambio de variable así

$$u = \;2x^2+x-1$$

$$du = (4x+1)\;dx$$

$$\frac{5}{4}\int \frac{1}{u}\;du - \frac{21}{4}\int \frac{1}{(2x^2+x-1)}\;dx$$

$$\frac{5\ln|u|}{4} - \;\frac{21}{4}\int \frac{1}{(2x^2+x-1)}\;dx$$

Para la integral $\frac{1}{(2x^2+x-1)}$ completamos el cuadrado

$$\frac{5\ln|u|}{4} - \frac{21}{4}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8}}\,dx$$

Para la integral $\left(\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8}$ cambio de variable

$$s = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$ds = \sqrt{2}\,dx$$

$$\frac{5\ln|u|}{4} - \frac{21}{4}\int \frac{1}{s^2 - \frac{9}{8}}\,ds$$

El factor $-\frac{9}{8}$ para el denominador así

$$\frac{5\ln|u|}{4} - \frac{21}{4\sqrt{2}}\int \frac{8}{9\left(1 - \frac{8\,s^2}{9}\right)}\,ds$$

$$\frac{5\ln|u|}{4} - \frac{7\sqrt{2}}{3}\int \frac{8}{1 - \frac{8\,s^2}{9}}\,ds$$

La integral $1 - \frac{8\,s^2}{9}$ cambio de variable así

$$p = \frac{2\sqrt{2}s}{3}$$

$$dp = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ds$$

$$\frac{5\ \ln|u|}{4} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{1-p^2}\ dp$$

La integral $\frac{1}{1-p^2}$ es también $tanh^{-1}(p)$ por lo tanto la nueva integral es

$$\frac{7}{2}\ tanh^{-1}(p) + \frac{5\ \ln|u|}{4} + C$$

Remplazamos el valor de p

$$\frac{7}{2}\ tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}\ s}{3}\right) + \frac{5\ \ln|u|}{4} + C$$

Remplazamos el valor de s

$$\frac{7}{2}\ tanh^{-1}\left(\frac{4x}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5\ \ln|u|}{4} + C$$

Remplazamos el valor de u

$$\frac{7}{2}\ tanh^{-1}\left(\frac{4x}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5\ \ln|2x^2 + x + 1|}{4} + C$$

Respuesta final es

$$3\ \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ \ln|1-2x| + C$$

CONCLUSIONES

El desarrollo del trabajo colaborativo N°02, nos permitió afianzar los conocimientos sobre las integrales indefinidas y sus diferentes propiedades y antiderivada, al igual que la utilización y dominio de las herramientas que permiten realizar los ejercicios a través de editores de ecuaciones. Es importante señalar que es necesario el uso de técnicas que permitan calcular el valor de las integrales, por lo anterior tuvimos la oportunidad de conocer algunas de ellas, deduciendo que algunas de estas son la forma básica de dar solución a las integrales.