



UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA  
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA  
PROGRAMA CIENCIAS BÁSICAS

**100411 – Cálculo Integral**

**JORGE ELIÉCER RONDON DURAN**

**Autor**

JOSÉ PEDRO BLANCO ROMEERO

Director Nacional

MARTIN GOMEZ ORDUZ

Acreditador

**Bogotá, D. C Agosto de 2010**

## ASPECTOS DE PROPIEDAD INTELECTUAL Y VERSIONAMIENTO

El presente módulo fue diseñado en el año 2007 por el Ing. JORGE ELIECER RONDON DURAN docente de la UNAD, ubicado en el CEAD de JOSE CELESTINO MUTIS, el Autor es de profesión ingeniero. Se ha desempeñado como tutor de la UNAD desde hace varios años, empezando como tutor hasta el cargo que ocupa en la actualidad de coordinador nacional de Ciencias Básicas.

Como novedades se presentan otros aspectos didácticos que facilitan el estudio autónomo del cálculo integral, así como la estructura y contenidos solicitados por la VIMMEP y la ECBTI.

MARTIN GOMEZ, licenciado en física y matemáticas de la UPTC, tutor de tiempo completo de Yopal – Casanare, apoyó el proceso de revisión de estilo del módulo y dio aportes disciplinares, didácticos y pedagógicos en el proceso de acreditación del material didáctico, este trabajo se llevo a cabo en los meses de Julio y Agosto de 2009.

Este documento se puede copiar, distribuir y comunicar públicamente bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Sin obras derivadas.** No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.
- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los *términos de la licencia* de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor
- Nada en esta menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

## INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia eminentemente teórica, debido a que parte de teorías y definiciones, cuyas demostraciones se soportan en el principio de la lógica, los axiomas y postulados, que permiten el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior, especialmente la Deducción, Inducción y la Abstracción, pero a su vez presenta dificultades para poder desplegar dichas habilidades, ya que se requiere trabajar el sentido de análisis, desarrollo del raciocinio, aspectos no fáciles de activar en la mente humana.

El Cálculo Integral es el área de las matemáticas, que pertenece al campo de formación disciplinar y tiene carácter básico en cualquier área del saber, debido a que los Ingenieros, Administradores, Economistas, Físicos, Químicos, por supuesto los Matemáticos y demás profesionales requieren de esta área del saber.

Un buen conocimiento del cálculo diferencial, permite y facilita trabajar el curso de cálculo integral, en donde se desarrollan teorías, principios y definiciones matemáticas propias del cálculo infinitesimal. El objetivo fundamental es que los estudiantes puedan identificar, comprender e interiorizar las temáticas que cubren el curso, con el fin de adquirir conocimientos matemáticos que le den capacidad de resolver problemas donde el cálculo Univariado es protagonista.

El Cálculo Integral es la rama de las Matemáticas muy utilizadas en Ciencias, Tecnología, Ingeniería e Investigación, que requiere un trabajo sistemático y planificado, para poder cumplir el propósito fundamental que es saber integrar, técnica que permite solucionar problemas de estos campos. Por otro lado, la integración es necesaria para otros escenarios como las Ecuaciones Diferenciales, los Métodos Numéricos, la geometría diferencial, la Probabilidad, la Estadística Avanzada y otras áreas del conocimiento.

Las Unidades Didácticas que conforman el curso son: La Integración, Los Métodos de Integración y Las Aplicaciones de las integrales. En la primera unidad se desarrolla lo referente a la antiderivada o primitiva, la integral indefinida, la integral definida, el teorema fundamental del cálculo y las integrales impropias. La segunda unidad presenta lo relacionado con las técnicas de integración, iniciando con las integrales inmediatas producto de la definición de antiderivada, la integración por cambio de variable o también llamada sustitución, integración por partes, integración por fracciones parciales, integración de funciones trascendentales; tales como, exponencial, logarítmica, trigonométricas e hiperbólicas. La tercera unidad presenta las aplicaciones de la integración, tales como áreas bajo curvas, longitud de una curva, volúmenes de sólidos de revolución, la integración en la física, en la estadística y en la economía.

En los ejercicios propuestos, para las primeras temáticas, no se dan las respuestas ya que éstas son muy obvias, pero para las demás temáticas, se ofrecen las respuestas, con el fin de motivar el procedimiento de los mismos. Es pertinente desarrollarlos de manera metódica y cuidadosa; además, confrontar la respuesta obtenida con la dada en el módulo, cualquier aclaración compartirla con el tutor o el autor a través del correo [jorge.rondon@unad.edu.co](mailto:jorge.rondon@unad.edu.co)

Como el conocimiento se va renovando y actualizando, los aportes que se hagan al presente material serán bien venidos, esperando así una actividad continua de mejoramiento en beneficio de todos los usuarios del material. Como el material presenta las temáticas fundamentales, es pertinente complementar con otras fuentes como libros, de los cuales se presentan en la bibliografía, Internet y otros.

Es recomendable desarrollar el trabajo académico de manera adecuada, como se explicita en el modelo académico – pedagógico que la UNAD tiene, para obtener los mejores resultados del curso. *El estudio independiente*, como primer escenario, es fundamental para la exploración, análisis y comprensión de las temáticas. *El Acompañamiento Tutorial*, debe permitir complementar el trabajo realizado en el escenario anterior, especialmente en la aclaración de dudas, complementación y profundización pertinente. En este aspecto, se deben explorar las herramientas que estén a la mano para aprovechar de la mejor manera dichos recursos, así el grado de aprendizaje es más amplio y se verá mejor reflejado el aprendizaje autónomo.

El autor.

## INDICE DE CONTENIDO

<b>UNIDAD UNO: LA INTEGRACION</b>	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO 1: LA INTEGRAL INDEFINIDA</b>	<b>15</b>
Lección 1: La integración	15
Lección 2: La Antiderivada	16
Lección 3: Integral indefinida	20
Lección 4: Propiedades de las Integrales indefinidas.	22
Lección 5: La constante de integración	23
 <b>CAPÍTULO 2: LA INTEGRAL DEFINIDA</b>	 <b>26</b>
Lección 6: Sumas De RIEMANN	26
Lección 7: Área bajo la curva	29
Lección 8: Estimación por sumas finitas.	30
Lección 9: Definición	31
Lección 10: Integral definida	36
 <b>CAPÍTULO 3: TEOREMAS</b>	 <b>38</b>
Lección 11: Teorema de integrabilidad	38
Lección 12: Valor medio de una función	39
Lección 13: Primer teorema fundamental del cálculo	41
Lección 14: Segundo teorema fundamental del cálculo	45
Lección 15: Teorema de simetría	50
Actividades de autoevaluación de la Unidad 1	52
Laboratorio	56
Fuentes documentales de la Unidad 1	61

<b>UNIDAD DOS: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN</b>	<b>63</b>
<b>CAPÍTULO 4: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN I</b>	<b>66</b>
Lección 16: Integrales Impropias con integrando discontinuo	66
Lección 17: Integrales impropias con límites de integración infinitos	70
Lección 18: Integrales Inmediatas	76
Lección 19: Integrales inmediatas con sustitución	79
Lección 20: Integración por cambio de variable	83
<b>CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN II</b>	<b>88</b>
Lección 21: Integración por racionalización	88
Lección 22: Integración por sustitución trigonométrica caso I	91
Lección 23: Integración por sustitución trigonométrica caso II	94
Lección 24: Integración por sustitución trigonométrica caso III	96
Lección 25: Integración por partes	99
<b>CAPÍTULO 6: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN III</b>	<b>105</b>
Lección 26: Integración por fracciones parciales.	105
Lección 27: Integración de función exponencial	115
Lección 28: Integración de función logarítmica	118
Lección 29: Integración de la función trigonométrica	121
Lección 30: Integración de la función hiperbólica	132
Actividades de autoevaluación de la Unidad 2	136
Laboratorio	139
Fuentes documentales de la Unidad 2	144

<b>UNIDAD TRES: APLICACIONES DE LAS INTEGRALES</b>	<b>146</b>
<b>CAPÍTULO 7: ANÁLISIS DE GRAFICAS</b>	<b>149</b>
Lección 31: Área de regiones planas	149
Lección 32: Área entre curvas	153
Lección 33: Área de superficies de revolución	158
Lección 34: Longitud de una curva	164
Lección 35: Longitud de un arco en forma paramétrica.	169
<b>CAPÍTULO 8: VOLUMEN DE SUPERFICIE DE REVOLUCION.</b>	<b>174</b>
Lección 36: Volumen de sólidos de revolución: Método de arandelas	174
Lección 37: Volumen de sólidos de revolución: Método de casquetes cilíndricos	180
Lección 38: Volumen de sólidos de revolución: Método de rebanadas o discos.	186
Lección 39: Momentos y centros de masa.	192
Lección 40: Volumen.	199
<b>CAPÍTULO 9: EN LAS CIENCIAS</b>	<b>201</b>
Lección 41: Integrales en la física: trabajo y movimiento.	201
Lección 42: Integrales en la hidráulica: bombeo de líquidos.	209
Lección 43: Integrales en la estadística: Función de distribución	214
Lección 44: Integrales en la economía.	219
Lección 45: Integrales en las ciencias sociales.	229
Actividades de autoevaluación de la Unidad	231
Laboratorio	234
Fuentes documentales de la Unidad 3	239



## LISTADO DE TABLAS

Tabla No. 1	Listado de integrales inmediatas.	21
-------------	-----------------------------------	----



## LISTADO DE GRÁFICOS Y FIGURAS

Figura No. 1	Polígonos circunscritos
Figura No. 2	Polígonos inscritos
Figura No. 3	Partición
Figura No. 4	Área
Figura No. 5	Integral impropia
Figura No. 6	Convergencia
Figura No. 7	Sustitución trigonométrica caso 1
Figura No. 8	Sustitución trigonométrica caso 2
Figura No. 9	Sustitución trigonométrica caso 3
Figura No. 10	Aplicación
Figura No. 11	Área bajo la curva
Figura No. 12	Particiones
Figura No. 13	Grafica de $2x$
Figura No. 14	Grafica de $x^3$
Figura No. 15	Grafica de $y=3-x^2$
Figura No. 16	Área entre curvas
Figura No. 17	Grafica solución problema No. 1
Figura No. 18	Solución área bajo curvas
Figura No. 19	Solución problema No. 3
Figura No. 20	Superficie de revolución
Figura No. 21	Superficie de revolución de $y = x^2$

Figura No. 22	Superficie de revolución de $y = \sqrt{x}$
Figura No. 23	Longitud de curva
Figura No. 24	Demostración longitud de curva
Figura No. 25	Longitud de curva paramétrica.
Figura No. 26	Arandelas
Figura No. 27	Solución volumen ejemplo No. 1
Figura No. 28	Solución volumen ejemplo No. 3
Figura No. 29	Casquetes
Figura No. 30	Desarrollo sólidos de revolución
Figura No. 31	Solución ejemplo No. 1
Figura No. 32	Solución ejemplo No. 2
Figura No. 33	Demostración casquetes
Figura No. 34	Rebanadas
Figura No. 35	Discos
Figura No. 36	Solución problema No. 1
Figura No. 37	Solución problema No. 2
Figura No. 38	Centro de masa
Figura No. 39	Centroide
Figura No. 40	Teorema de Pappus
Figura No. 41	Bombeo
Figura No. 42	Bombeo circular
Figura No. 43	Curva oferta - demanda
Figura No. 44	Excedente del consumidor
Figura No. 45	Excedente del productor

## UNIDAD 1: LA INTEGRACION

### Introducción:

Una dificultad que enfrentó a la humanidad desde hace muchos siglos fue el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos conocidos, quien enfrentó primero este problema al parecer fue Eudoxo de Cnido por allá por el siglo IV antes de nuestra era. Eudoxo ideó el método de exhaustión el cual consistía en descomponer en partes muy pequeñas las áreas y los volúmenes para luego componerlas y de esta manera obtener las superficies y los grosores de los cuerpos.

La Geometría griega se interesó pronto por las áreas de figuras en el plano y los volúmenes de cuerpos geométricos. También tempranamente descubrieron que el tratamiento de las figuras de contornos curvilíneos no era sencillo de abordar.

Algunos estudiosos de la antigüedad que se interesaron por el tema fueron:

**KEPLER**<sup>1</sup> Estaba interesado en las cónicas para su aplicación en la astronomía, por lo tanto, plantea el cálculo del área de una órbita considerándola que esta formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol; esto da origen a un cálculo integral rudimentario. El estudio de los volúmenes lo retomó para el cálculo del vino al ver la inexactitud de la capacidad de los toneles.

**GALILEO**<sup>2</sup> Se interesa por la parábola, al estudiar la trayectoria de un proyectil y hallar la integral que expresa el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado.

**LEIBNIZ**<sup>3</sup> Sistematizó y logró un desarrollo eficiente.

Mayor información en el siguiente link:

[http://www.matematicas.profes.net/archivo2.asp?id\\_contenido=45558](http://www.matematicas.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=45558)

<sup>1</sup> Nació en 1571 en WEIL DER STADT y murió en RATISBONA en 1630 (Alemania).

<sup>2</sup> Nació en 1564 en PIZA y murió en FLORENCIA 1642 (Italia).

<sup>3</sup> Por primera vez utilizó el símbolo  $\int$  que aparece estilizado la S de las sumatorias.

### **Justificación:**

Tanto la integral como la derivada son herramientas importantes que ayudan a resolver problemas en la física, la estadística, la probabilidad, la hidráulica y otros campos de las ciencias; es por eso que temas tan importantes son abordados en esta unidad.

En esta primera unidad presentamos tres capítulos en los cuales tratamos las bases de la integración empezando por la integral indefinida, la integral definida y en el tercer capítulo retomamos el tema de los teoremas claves para comprender mejor el estudio de las integrales.

### **Intencionalidades formativas:**

Para esta unidad podemos enumerar como intencionalidades formativas las siguientes:

- Que los estudiantes identifiquen los principios del cálculo integral para asimilar la teoría de las integrales.
- Los estudiantes interpreten las diferentes teorías, definiciones y teoremas del cálculo integral para poder comprender en diversos escenarios su mejor manera de utilizarlos.
- Manejar de manera apropiada las integrales indefinidas, las integrales definidas y los teoremas en los cuales se basan.

Presentamos un cuadro con el resumen del contexto teórico de esta unidad

Denominación de los capítulos	<p>CAPITULO 1: La integral indefinida</p> <p>CAPITULO 2 La integral definida</p> <p>CAPITULO 3 Teoremas que la sustentan</p>
Asimilación de conceptos	<p>Los lectores de la primera unidad la integración, estarán en capacidad de comprender los conceptos fundamentales del cálculo integral en cuanto a sus orígenes, diferentes clases de integración, la apropiación de la simbología empleada, los teoremas que la sustentan y tienen una visión general del curso.</p>
Conceptos	<p>Esta Unidad parte de conceptos elementales para ir adentrando al estudiante en conceptos más amplios y complejos empleados en el Cálculo Integral.</p>
Competencias	<p>De conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir las técnicas propias del cálculo integral.</li> <li>• El conocimiento en matemáticas se adquiere con papel y lápiz en la realización de ejercicios que están propuestos en esta unidad o en la bibliografía y cibergrafía sugeridas.</li> </ul> <p>Contextuales:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir los conocimientos propios del curso académico con el fin de aplicarlos en la solución de problemas de su carrera y de esta manera poner el práctico el aprendizaje significativo.</li> <li>• Los estudiantes deben desarrollar habilidades para aplicar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas prácticos.</li> </ul> <p>Comunicativas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir la jerga propia del lenguaje utilizado en el cálculo integral.</li> <li>• Interpretar y entenderlos la diferente simbología y su aplicación.</li> <li>• Adquirir facilidad de expresión y vencer el miedo en la interacción con las NTIC</li> </ul>



	<p>Valorativas:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Adoptar, identificar y practicar los valores de la UNAD.</li><li>• Adquirir capacidad de valoración y tolerancia con nuestros compañeros virtuales o presenciales.</li></ul>
--	--

## CAPITULO 1: La integral indefinida

### Introducción

La derivada corresponde a la noción geométrica de tangente y a la idea física de velocidad, es decir dada una curva calcular su pendiente o dado el recorrido de un móvil calcular su velocidad, mientras que la idea de integral está relacionada con la noción geométrica de área y la idea física de trabajo, por lo tanto, dada una función se halla el área comprendida bajo la curva o dada una fuerza variable, se calcula el trabajo realizado por dicha fuerza.

Partiendo de este último concepto este capítulo pretender ilustrar el concepto de la integral indefinida, en el cual tenemos que si nos dan la derivada de una función nosotros debemos hallar dicha función.

### Lección 1: La integración

En el mundo de las Matemáticas encontramos que existen operaciones opuestas, como la suma y la resta, el producto y el cociente, donde una deshace o anula la otra. De la misma manera la Integración es una operación opuesta a la Diferenciación. La relación Diferenciación – Integración es una de los conocimientos más importantes en el mundo de las Matemáticas. Ideas descubiertas en forma independiente por los grandes Matemáticos **Leibniz** y **Newton**. Inicialmente Leibniz al proceso de integración lo llamo: “Calculus Summatorius” pero en 1.696 influenciado por Johann Bernoulli, de la dinastía Bernoulli, le cambio el nombre a Calculus Integrelis.



Gran Filósofo, politólogo y matemático.

Precursor de la Lógica Matemática, desarrollo el Cálculo, independiente de Newton, publicando su trabajo en 1.684, su notación es la que se utiliza actualmente. Descubrió el sistema binario, muy utilizado en los sistemas informáticos. Contribuyo a la creación de la Real Academia de Ciencias en Berlín en 1.670, siendo su primer presidente.

Gottfried Wilhelm von Leibniz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Julio de 1646 – Noviembre de 1716 HANNOVER Alemania.

El cálculo ha sido una secuencia de áreas matemáticas entrelazadas, donde se utilizan principios de Álgebra, Geometría, Trigonometría, se debe destacar que para desarrollar el curso de Cálculo Integral, es pertinente tener claros los principios de las áreas nombradas y además los de Cálculo Diferencial, ya que como se dijo en el párrafo anterior, la integración es la opuesta a la diferenciación.

## Lección 2: La Antiderivada

Para conceptualizar la Antiderivada, comencemos por pensar que se tiene una función, digamos  $f(x)$ , el trabajo consiste en encontrar otra función, digamos  $D(x)$  tal que:  $D'(x) = f(x)$ . Así  $D(x)$  es **una** antiderivada de  $f(x)$ . Identificar una función a partir de su derivada, consiste en hallar un “dispositivo” (técnica) que nos de todas las funciones posibles, donde  $f(x)$  es su derivada, a dichas funciones se les llama Antiderivada de  $f(x)$ . El dispositivo para éste proceso es llamado La Integración.

Veamos un ejemplo sencillo: Sea  $f(x) = 2x$ , ¿cual será una función  $D(x)$  cuya derivada es  $2x$ ? Con algo de astucia y conocimientos sólidos en diferenciación podemos identificar que  $D(x) = x^2$ . Veamos: Si derivamos  $D(x) = x^2$  obtenemos  $f(x) = 2x$ .

Otro ejemplo:  $f(x) = \cos(x)$ , ¿cual será un  $D(x)$ ? Debemos buscar una función cuya derivada es  $\cos(x)$ , evidentemente es  $\sin(x)$ , luego  $D(x) = \sin(x)$ .

Para la notación de antiderivada hubo diversas propuestas, pero la del gran Matemático Leibniz es la más utilizada universalmente.  $\int \dots dx$ . Posteriormente se analizará esta notación.

Para los ejemplos anteriores con la notación de Leibniz se tiene:

$$\int (2x)dx = x^2 + c \quad \text{Para el otro: } \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

Posteriormente se aclara el concepto de la  $c$

### DEFINICIÓN No 1:

Una función  $D(x)$  es **una** antiderivada de la función  $f(x)$ , si:

$D'(x) = f(x)$ . Para todo  $x$  en el dominio de  $f(x)$ .



El conjunto de todas las antiderivadas de  $f(x)$  se le llama la **Integral Indefinida** de  $f(x)$  y se puede escribir:  $\int f(x)dx = D(x) + c$

**TEOREMA:**

Sean  $F(x)$  y  $G(x)$  antiderivadas de  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $I$ , entonces:

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para alguna constante } C.$$

**Demostración:**

Como  $G(x)$  y  $F(x)$  son antiderivadas de  $f(x)$ , entonces tenemos que:  $G'(x) = F'(x)$ , por una definición previa que dice: si  $g'(x) = f'(x)$  entonces:  $g(x) = f(x) + c$  para todo  $x$  en el intervalo  $I$  abierto. Por consiguiente:  $G(x) = F(x) + c$ , para alguna constante  $c$ .

**Ejemplo No 1:**

Encontrar todas las funciones cuya derivada es  $f(x) = 4x^3 + 2$ .

**Solución:**

Una función puede ser  $x^4 + 2x + 5$ , ya que al derivarla obtenemos  $4x^3 + 2$ . Luego:  
 Si

$f(x) = 4x^3 + 2$ , entonces  $D(x) = x^4 + 2x + 5$ , pero también puede ser  $D(x) = x^4 + 2x + 12$ . En general cualquier función de la forma  $D(x) = x^4 + 2x + C$ , es antiderivada de la función  $f(x)$ , siendo  $C$  una constante.

**Ejemplo No 2:**

Encontrar todas las funciones cuya derivada es:  $f(x) = \sec^2(x)$ .

**Solución:**

Si recordamos sobre derivadas de funciones trigonométricas, podemos saber que la función cuya derivada corresponde a  $\sec^2(x)$ , es  $\tan(x)$ , luego:

Si  $f(x) = \sec^2(x)$ , entonces  $D(x) = \tan(x) + C$

Por consiguiente, la forma de las funciones cuya derivada corresponde a  $\sec^2(x)$  es:  $D(x) = \tan(x) + c$

Ejemplo No 3:

Hallar algunas funciones cuya derivada es  $g(x) = 12$

Solución:

Cualquier función de la forma  $12x + C$  es antiderivada de  $g(x)$ , luego algunas de estas puede ser:

$$G(x) = 12x + 5, \quad G(x) = 12x + 10, \quad G(x) = 12x + 25$$

En general:  $G(x) = 12x + C$

Los ejercicios propuestos, se deben desarrollar, utilizando las definiciones y teoremas, analizados en este aparte.

### **EJERCICIOS:**

Encontrar la antiderivada  $F(x) + C$  de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = 8$

2.  $f(x) = 3x^2 + 4$

3.  $f(x) = x^{21} - x^{10}$

4.  $f(x) = 3/x^4 - 6/x^5$

5.  $f(x) = (3x^2 - 5x^6) / x^8$

Desarrollar la operación propuesta:

6.  $\int (x^5 - \sqrt{6}) dx$

7.  $\int (3 + 7x^2)^2 dx$



8.  $\int \frac{(y+4y)^3}{y^2} dy$

9.  $\int [\text{sen}(x) - \csc^2(x)] dx$

10.  $\int dx$

### Lección 3: Integral indefinida.

Conociendo el concepto de Antiderivada, podemos formalizar desde el punto de vista matemático la integral indefinida. *Leibniz* (1.646 – 1.716) a la Antiderivada la llamo Integral Indefinida, quizás pensando que este tipo de integrales incluye una constante arbitraria.

Luego podemos definir la integral indefinida de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = D(x) + c$$

Donde:

$\int$  Símbolo de integración.

**f(x)** = Integrand

**dx** = diferencial de la variable,

**D(x)** = La integral de f(x)

**c** = constante de integración.

Veamos un poco esta nomenclatura matemática: Por definición de derivada tenemos:

$$\frac{d}{dx}[D(x)] = f(x) \Rightarrow D'(x) = f(x)$$

La operación opuesta:

$$\frac{d(D(x))}{dx} = f(x) \Rightarrow d(D(x)) = f(x)dx$$

$$\int d(D(x)) = \int f(x)dx \Rightarrow D(x) = \int f(x)dx + c$$

No debemos olvidar la constante de integración.

Con base en las definiciones anteriores y los conceptos analizados, se puede obtener algunas integrales, basado en la teoría de la antiderivada.

### INTEGRALES INMEDIATAS:

INTEGRAL	DERIVADA
$\int dx = x + C$	$\frac{d}{dx}(x + c) = 1$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ para $n \neq -1$	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right] = x^n$
$\int e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n} + c$ para $n \neq 0$	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{e^{nx}}{n} + c \right] = e^{nx}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\text{Log}(a)} + c$ para $a > 0$	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{a^x}{\text{Log}(a)} + c \right] = a^x$
$\int \text{sen}(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + c$ para $k \neq 0$	$\frac{d}{dx} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} + c \right] = \text{sen}(kx)$
$\int \left( \frac{1}{x} \right) dx = \text{Ln}(x) + c$	$\frac{d}{dx} [\text{Ln}(x) + c] = \frac{1}{x}$
$\int \left[ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \text{Sen}^{-1}(x) + c$	$\frac{d}{dx} [\text{Sen}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$	$\frac{d}{dx} [\tan(x) + c] = \sec^2(x)$

Tabla No. 1

<sup>1</sup> Listado de integrales inmediatas.

#### Lección 4: Propiedades de las integrales.

Para las propiedades indefinidas, podemos destacar las siguientes propiedades, consecuencia de las aplicadas en la diferenciación.

$$1. \int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

$$2. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$3. \int kdx = kx + c$$

$$4. \int [kf(x) \pm kg(x)]dx = \int kf(x)dx \pm \int kg(x)dx$$

$$5. \int \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} \right] dx = \ln|f(x)| + c$$

La demostración se puede hacer por medio de sustitución.

$$6. \int [f(x)]^p f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{p+1}}{p+1} + c$$

La demostración se puede hacer por medio de la técnica de sustitución.

Veamos algunos ejemplos:

$$1. \int -4dx = -4 \int dx = -4x + c \quad \text{Aplicando las propiedades 1 y 2.}$$

$$2. \int 5e^{2x}dx = 5 \int e^{2x}dx = \frac{5}{2}e^{2x} + c \quad \text{Aplicando propiedad 3 e integrales inmediatas.}$$

$$3. \int (3x^2 + 4x^3 - 2\sin(x))dx = \int 3x^2dx + \int 4x^3dx - \int 2\sin(x)dx$$

Aplicamos las propiedades 3 y 4, luego:

$$\int 3x^2 dx + \int 4x^3 dx - \int 2 \operatorname{sen}(x) dx = x^3 + x^4 + 2 \cos(x) + c$$

$$4. \int \left( \frac{6x}{3x^2 + 4} \right) dx = \operatorname{Ln}|3x^2 + 4| + c \quad \text{Aplicamos la propiedad 5.}$$

$$5. \int (5x^2 - \operatorname{sen}(2x))^4 (10x - 2 \cos(2x)) dx = \frac{1}{5} (5x^2 - \operatorname{sen}(2x))^5 + c$$

Aplicamos la propiedad 6.

### Lección 5: La constante de integración.

Retomando lo manifestado en el *Teorema No 1*, podemos observar que las antiderivadas de una función sólo se diferencian por una constante **C** dada. Si recordamos el ejemplo  $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$ , podemos especificar algunas antiderivadas.

$$D(x) = \tan(x) + 2, D(x) = \tan(x) + \sqrt{2}, D(x) = \tan(x) + 5, D(x) = \tan(x) + 100, \dots$$

A partir de lo anterior, se afirma que la constante de integración es propia de las integrales indefinidas, ya que son muchas las antiderivadas de una función que contiene el integrando.

Por otro lado, cuando estamos integrando donde hay suma o resta, cada término tendrá su constante de integración, pero todas las constantes obtenidas se pueden agrupar en una sola.

Ejemplo No 1.

$$\text{Desarrollar: } \int (7x^4 + 2e^x - \cos(x)) dx$$

Solución:

Aplicando las propiedades de suma y resta tenemos:

$$\int (7x^4 + 2e^x - \cos(x))dx = \int 7x^4 dx + \int 2e^x dx - \int \cos(x) dx \quad \text{desarrollando cada integral.}$$

$$\frac{7}{5}x^5 + c_1 + 2e^x + c_2 - \text{sen}(x) + c_3, \text{ luego las constantes las podemos agrupar en una}$$

$$\text{sola: } \frac{7}{5}x^5 + c_1 + 2e^x + c_2 - \text{sen}(x) + c_3 = \frac{7}{5}x^5 + 2e^x - \text{sen}(x) + C$$

Ejemplo No 2.

$$\text{Hallar: } \int (2^x + e^{4x}) dx$$

Solución:

Aplicando las propiedades y las integrales inmediatas:

$$\int (2^x + e^{4x}) dx = \int 2^x dx + \int e^{4x} dx = \frac{2^x}{\text{Ln}(2)} + c_1 + \frac{1}{4}e^{4x} + c_2 \quad \text{Agrupado las constantes:}$$

$$\int (2^x + e^{4x}) dx = \frac{2^x}{\text{Ln}(2)} + \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

### EJERCICIOS:

Hallar las antiderivadas de las funciones dadas:

$$1. \quad f(x) = 20$$

$$2. \quad f(x) = x^4 + 2\pi$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$4. \quad f(x) = 3\text{sen}(2x) + 2e^{2x}$$



Aplicando las propiedades, resolver las siguientes integrales.

5.  $\int 6dx$

6.  $\int (25x^3 + 2 \sec^2(3x))dx$

7.  $\int (e^{-t} + 2 \operatorname{sen}(5x) - 7)dx$

8.  $\int \left[ \frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \right] dx$

9.  $\int (\sqrt{4t^2 + 3t - 2})(8t + 3)dx$

10.  $\int \left( \frac{e^x}{e^x + 5} \right) dx$

## CAPITULO 2: La integral definida

### Introducción

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Para analizar las integrales definidas es necesario el estudio de los conceptos de Sumatorias, Sumas de Riemman y áreas bajo la curva. Cada una se irán desarrollando de manera secuencial, para poder interiorizarlas adecuadamente. El tema de Sumatorias, se desarrolló en el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, sin embargo para cualquier duda o aclaración es pertinente consultarlo en dicho curso.

### Lección 6: Sumas de Riemann

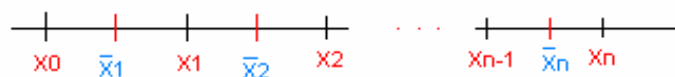
Comencemos por definir una función  $f(x)$  en el intervalo cerrado  $I = [a, b]$ , en dicho intervalo puede haber valores positivos y negativos; incluso, podría ser no continua. Hacemos una partición  $P$  del intervalo  $I$  en  $n$  subintervalos, para facilidad se hace una partición regular, pero no necesariamente debe ser regular, dicha partición debe tener la condición que:

$X_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_{n-1} < X_n$ , donde  $a = X_0$  y  $b = X_n$

Ahora sea  $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$  El tamaño del subintervalo. En cada subintervalo se escoge un “**punto muestra**”, puede ser un punto frontera.  $\tilde{x}_i$ .

$$\Delta X_1 = X_1 - X_0.$$

$$\Delta X_2 = X_2 - X_1$$

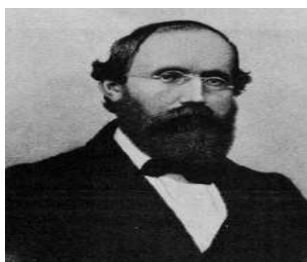


Así para los demás intervalos.

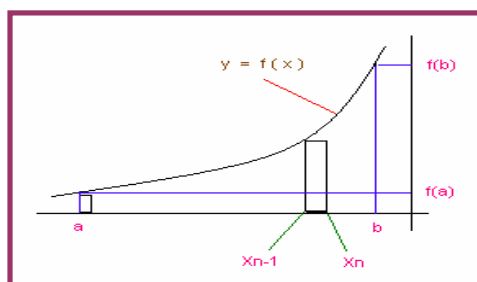
Como la partición se hizo sobre la función  $f(x)$ , entonces:

$$R_p = \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) \Delta x_i \quad \text{Suma de Riemman.}$$

Aquí  $R_p$  es la suma de Riemman para  $f(x)$  en la partición  $P$ .



**Georg Friedrich Bernhard Riemann<sup>1</sup>**



**Fig. No. 1** Polígonos circunscritos.

**Ejemplo No 1:**

Evaluar la suma de Riemman para la función  $f(x) = x^2 + 2$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , la partición es regular, tomando  $P = 8$

**Solución:**

Tomemos  $X_0 = -2$  y  $X_n = 2$ . Se toma  $\tilde{x}_i$  como el punto medio del  $i$ -ésimo intervalo. También:  $\Delta x_i = \frac{2 - (-2)}{8} = \frac{1}{2}$   $\Delta X_i = 0,5$ ; con esto se obtienen 8 subintervalos, cuyos puntos medios son:

<sup>1</sup> 1826 Alemania – 1866 Suiza.

-1.75, -1.25, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75.

Apliquemos la fórmula de sumas de Riemman:

$$R_p = \sum_{i=1}^8 f(\tilde{x}_i) \Delta x_i \quad \text{Entonces:}$$

$$R_p = [f(-1.75)+f(-1.25)+f(-0.75)+f(-0.25)+f(0.25)+f(0.75)+f(1.25)+f(1.75)] * 0.5$$

En la función se reemplaza:  $f(x = -1,75) = (-1,75)^2 + 2 = 5,0625$  y así para los demás.

$$R_p = [5.0625 + 3.5625 + 2.5625 + 2.0625 + 2.0625 + 2.5625 + 3.5625 + 5.0625] * 0.5$$

$$R_p = [25.50] * 0.5 = \mathbf{13.25}$$

Ejemplo No 2:

Evaluar la suma de Riemman para la función  $h(t) = t^3 - 2t$ , en el intervalo  $[1, 2]$ . La partición es regular y los puntos muestra definidos son:  $\tilde{x}_1 = 1,20$ ,  $\tilde{x}_2 = 1,38$ ,  $\tilde{x}_3 = 1,68$ ,  $\tilde{x}_4 = 1,92$

Solución

Tenemos todos los insumos para hacer la suma correspondiente:

$$R_p = \sum_{i=1}^4 f(\tilde{x}_i) \Delta x_i \quad \text{Entonces:}$$

$$R_p = [f(1.20) + f(1.38) + f(1.68) + f(1.92)] * 0.25$$

$$R_p = [-0.672 - 0.131928 + 1.3816 + 3.2779] * 0.25$$

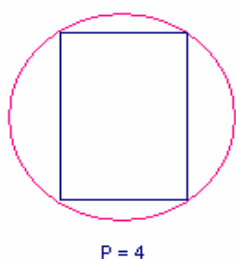
$$R_p = [3.855] * 0.25 = \mathbf{0.9637}$$

Resolver el ejemplo anterior utilizando 8 subintervalos  $P = 8$ , definiendo el tamaño de cada subintervalo y el punto muestra de cada uno.

## Lección 7: Área bajo la curva

### Concepto Intuitivo:

Para hallar el área de una figura con lados rectos, la geometría plana (estudiada en matemática básica) permite calcular dichas áreas, por ejemplo rectángulos, triángulos, paralelogramos, otros. Cuando la frontera de una figura es curva la situación es de un análisis más profundo, ya que se requiere mayor trabajo matemático. El gran matemático de la antigüedad ARQUIMEDES, propuso una solución consistente en que al considerar una sucesión de polígonos inscritos que aproximen la región curva, que puede ser más y más precisa, a medida que el polígono aumenta el número de lados.



Cuando  $P$  tiende a infinito ( $P \rightarrow \infty$ ), el área del polígono se hace semejante a la del círculo.

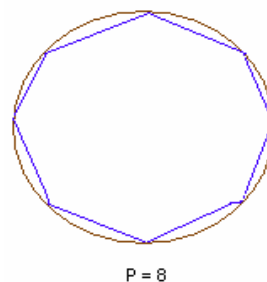
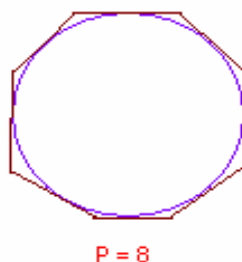
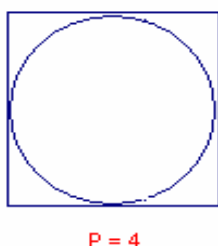


Fig. No. 2 Polígonos inscritos.

Pero la genialidad de Arquímedes, también lo llevo a demostrar que con polígonos circunscritos, se llegaba al mismo resultado.



## Lección 8: Estimación por sumas finitas.

Para determinar cómo se halla el área bajo la curva, utilizaremos el principio de los polígonos inscritos y además una de las funciones más conocidas:  $f(x) = x^2$ . El proceso consiste en hallar el área de la región  $A(R)$  acotada por el intervalo  $[a, b]$ , para nuestro caso tomemos:  $[0, 2]$

La partición  $P$  del intervalo  $[0, 2]$  en  $n$  subintervalos, cuya longitud  $\Delta x$  es:

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n} \quad \text{Partición}$$

regular.

Comencemos:

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = X_0 + \Delta x = \Delta x$$

$$X_2 = X_1 + \Delta x = \Delta x + \Delta x = 2\Delta x$$

$$X_3 = X_2 + \Delta x = 2\Delta x + \Delta x = 3\Delta x$$

$\vdots$

$$X_i = X_{i-1} + \Delta x = (i - 1) \Delta x + \Delta x = i\Delta x$$

$\vdots$

$$X_{n-1} = (n-1) \Delta x$$

$$X_n = n\Delta x$$

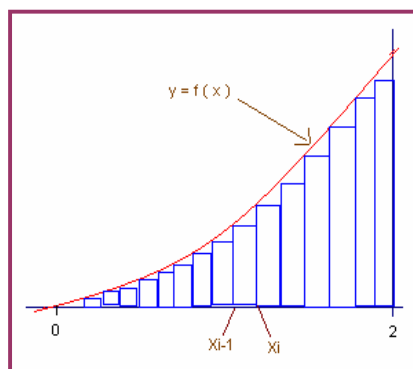


Fig. No. 3 Partición.

Pero  $\Delta x = 2/n$ , entonces:

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 2/n, \quad X_2 = 4/n, \quad \dots, \quad X_i = 2i/n, \\ \dots, \quad X_n = n(2/n) = 2$$

El área de la región  $R_i$  es  $f(x_{i-1}) \Delta x$ .

El área total de la región  $R_n$  será la suma de las áreas de todos los rectángulos inscritos en la curva.

$$A(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Para la función que estamos analizando tenemos:

$$f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 * \frac{2}{n} = \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3} i^2$$

Luego:

$$A(R_n) = \frac{8}{n^3} [0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] = \frac{8}{n^3} \left[ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$

Revisar las propiedades de las sumatorias en el modulo de Álgebra, Trigonometría y Geometría analítica, unidad tres, donde puedes reforzar estos conceptos.

Luego:

$$A(R_n) = \frac{8}{6} \left[ \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{4}{3} \left[ 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right] \quad \text{Entonces:}$$

$$A(R_n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

A medida que **n** se hace más grande, entonces el área de la suma de los rectángulos inscritos es más y más aproximado al área de la curva. Por consiguiente:

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

NOTA: Realice la misma demostración pero usando rectángulos circunscritos.

### Lección 9: Definición

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y continua en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , el área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo definido esta dado por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Ejemplo 1:

Calcular el área bajo la curva de  $f(x) = 3x^2 - x$  en el intervalo  $[1, 3]$ .

Solución:

Comencemos el proceso hallando  $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} = 1 + \frac{4}{n} = \frac{n+4}{n}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = \left(\frac{n+4}{n}\right) + \frac{2}{n} = 1 + \frac{6}{n} = \frac{n+6}{n}$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x = 1 + \frac{2i}{n} = \frac{n+2i}{n}$$

Ahora por la definición:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [3x_i^2 - x_i] \Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ 3 \left( \frac{n+2i}{n} \right)^2 - \left( \frac{n+2i}{n} \right) \right] \frac{2}{n}$$

Desarrollando las potencias y multiplicando, obtenemos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{3n^2 + 12ni + 12i^2}{n^2} - \frac{n+2i}{n} \right]$$



Aplicando las propiedades de las sumatorias, tenemos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{3n^2 + 12ni + 12i^2}{n^2} \right] - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n + 2i}{n} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 3 + \frac{12}{n}i + \frac{12}{n^2}i^2 \right] - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 1 + \frac{2}{n}i \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ 3n + \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right] - \frac{2}{n} * n - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i$$

Recordemos las propiedades de las sumatorias.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ 3n + \frac{12}{n} \left( \frac{n^2 + n}{2} \right) + \frac{12}{n^2} \left( \frac{n^2 + n(2n + 1)}{6} \right) \right]$$

$$- \left[ \frac{2}{n} * n + \frac{2}{n} \left( \frac{n^2 + n}{2} \right) \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ 3n + \frac{6n^2 + 6n}{n} + \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{n^2} \right] - \frac{2}{n} \left[ n + \frac{n^2 + n}{n} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 6 + 12 + \frac{12}{n} + 8 + \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2} - 2 - 2 - \frac{2}{n} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 26 - 4 + \frac{24}{n} - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 22 + \frac{22}{n} + \frac{4}{n^2} \right]$$

Aplicando límite:  $A = 22 + 0 + 0 = 22$  Unidades cuadradas.

#### EJERCICIOS LECCION No. 4:

1. Demostrar que el área bajo la curva para la función  $y = 2x - 2x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$  es  $1/3$ .

SUGERENCIA: Siga el procedimiento anterior, teniendo en cuenta las propiedades de las sumatorias.

Hallar el área del polígono circunscrito para la función propuesta:

2.  $f(x) = x + 1$  donde  $a = -1$  y  $b = 2$  Con partición regular.

3.  $f(x) = x^2 + 4$  donde  $a = 2$  y  $b = 4$  Con partición regular.

4.  $g(x) = x^3$  donde  $a = 0$  y  $b = 2$  Con partición regular.

Para las funciones dadas:

- Determinar los puntos de evaluación, correspondientes a los puntos medios de cada subintervalo dado según el valor de  $n$ .
- Graficar la función de los rectángulos que la aproximan.
- Calcular la suma de Riemman

5.  $f(x) = \sin(x)$   $[0, \pi]$  y  $n = 4$

6.  $g(x) = x^3 - 1$   $[1, 2]$  y  $n = 4$

7.  $h(x) = \sqrt{x+2}$   $[1, 4]$  y  $n = 6$

8.  $P(x) = \frac{2x-1}{x}$   $[2, 4]$  y  $n = 10$

## Lección 10: Integral definida.

Conocidos y estudiados los conocimientos sobre Sumas de Riemman y áreas bajo la curva, podemos hacer una definición formal sobre la integral definida.

### DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , la integral definida de  $f(x)$  que va de  $a$  hasta  $b$  se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad \text{Llamada también la Integral de Riemman}$$

Donde:

$a$  = Límite Inferior

$b$  = Límite Superior

$f(x)$  = El integrando; o sea, la función que se va a integrar.

$dx$  = Diferencial de la variable.

Analizando un poco el límite de la sumatoria, igual que en el caso de la derivación.

$$\lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = L$$

Esto significa que dado un  $\varepsilon > 0$ , tan pequeño como se quiera, existe un  $\delta > 0$  tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x - L \right| = \varepsilon$$

Para todas las sumas de Riemman  $\sum f(x_i)\Delta x$  de la función definida en el intervalo dado, si la norma  $|p|$  de la partición asociada, es menor que  $\delta$ , se dice que el límite dado existe y es  $L$ .

Surge la pregunta: ¿Qué funciones son integrables? La respuesta es que NO todas las funciones son integrables en un intervalo cerrado  $I$ .

Asociado al caso de límite, se requiere que la suma de Riemman tenga límite, ya que hay casos donde esta suma se puede hacer muy grande, como es el caso de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} \right)^2$$

Existen además funciones acotadas que pueden no ser integrables, por el grado de complejidad de la misma, como es el caso de:

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Para esto existe un teorema de integrabilidad que nos garantiza las funciones integrables en un intervalo cerrado I, su demostración NO está al alcance de este nivel ya que requiere cálculo avanzado.

## CAPITULO 3: Teoremas

### Introducción

En este capítulo se presentan tres teoremas o afirmaciones que se pueden demostrar como verdaderas dentro un contexto lógico, esos tres teoremas nos ayudan a comprender los conceptos empleados en el cálculo integral.

El teorema del valor medio, de la integrabilidad, primer y segundo teorema fundamental del cálculo y el teorema de simetría, los cuales pasamos a comprender en el siguiente espacio.

### Lección 11: Teorema de integrabilidad.

*Si  $f(x)$  es acotada en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y si  $f(x)$  es continua excepto en un número finito de puntos, entonces  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ . En particular si  $f(x)$  es continua en todo el intervalo, entonces es integrable en  $[a, b]$ .*

Consecuencia de este teorema podemos ver que las funciones polinómicas, seno y coseno, son integrables en todo el intervalo cerrado  $I$ . Las funciones racionales lo son en  $I$  siempre y cuando dicho intervalo no contenga puntos en donde el denominador es cero.

Ahora podemos hacer la siguiente relación como conclusión de lo que venimos analizando:

Área bajo la curva de  $y = f(x)$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$  es equivalente a

$$\int_a^b f(x)dx$$

### PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

Las propiedades aplicadas a la integral indefinida, también son aplicables a las integrales definidas. Veamos algunas.

$$1. \int_a^b f(x)dx = 0 \quad \text{Para } a = b$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{Para } a < b$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{Para } a < c < b$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$$

$$6. \int_a^b Kdx = K(b - a)$$

7. Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones integrables en el intervalo  $I = [a, b]$  y si  $f(x) \geq g(x)$

Para todo  $x$  en  $[a, b]$ , entonces:  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

## Lección 12: Valor medio de una función.

El concepto de valor medio lo conocemos muy bien, por los principios de Estadística, pero en este caso vamos a calcular el valor promedio de una función  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $I$ . Para este caso escogemos una muestra de puntos en el intervalo  $I$ , construyendo la Partición correspondiente, donde:  $x_0 < x_1 < x_2 \dots$

$< x_n$ ; además,  $x_0 = a$  y  $x_n = b$ . La diferencia entre los puntos es:  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

El valor promedio de la función  $f(x)$  está dado por el promedio de los valores de la función en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Si multiplicamos y dividimos por  $b - a$  tenemos:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \left( \frac{b-a}{n} \right) \quad \text{Recordemos que: } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ luego:}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \text{Corresponde a la suma de Riemman.}$$

DEFINICIÓN:

Para la función  $f(x)$  integrable en  $[a, b]$  y sabiendo que la suma de Riemman tiene límite:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Ejemplo 1:

Hallar el valor promedio de la función  $\text{sen}(x)$  en  $[0, \pi]$

Solución:

Aplicando la definición tenemos:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx = \frac{1}{\pi} (-\cos(x))_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi) - (-\cos(0))]$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} [1 + 1] = \frac{2}{\pi}$$

El proceso requiere la aplicación del teorema fundamental del cálculo, el cual estudiaremos en seguida.

Ejemplo 2:

Cual será el valor promedio de la función  $f(x) = x^2 - 2$  en el intervalo  $[0, 4]$



Solución:

Al igual que en el caso anterior, con la aplicación de la fórmula para valor promedio de la función:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-0} \int_0^4 (x^2 - 2) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - 2x \right)_0^4$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} x^3 - 2x \right)_0^4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{64}{3} - 8 - 0 \right] = \frac{1}{4} \left( \frac{40}{3} \right) = \frac{10}{3}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{10}{3}$$

EJERCICIOS:

1. Hallar el valor promedio para la función  $f(x) = 4x^3$  en el intervalo  $[1, 3]$
2. Cual será el valor promedio de la función  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$  en el intervalo  $[0, 3]$
3. Determinar el valor medio de la función:  $g(x) = \sin^2(x) \cos(x)$  para el intervalo  $[0, \pi/2]$
4. Cual será el valor promedio de la función  $f(x) = \cos(x)$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$

### Lección 13: Primer teorema fundamental del cálculo

Para enunciar el teorema, analicemos la siguiente situación: Sea  $A(x)$  el área bajo la curva de la función  $f(t)$  a dicha función se le llama función acumulada, ya que va acumulando el área bajo la curva dada  $t = a$  hasta  $t = x$ . donde  $x > 1$ .

Sabemos que:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

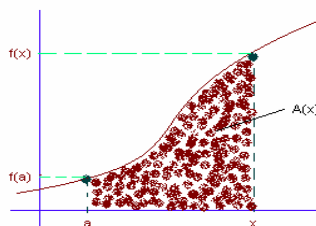


Fig. No. 4 Área bajo la curva

Por otro lado, sabemos por definición de áreas bajo la curva que:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)} \quad A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Al relacionar las ecuaciones anteriores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^x f(t) dt$$

Ahora definamos a  $B(x)$  como el límite de la sumatoria, de tal manera que

$$\frac{dB}{dx} = f(x) \quad \text{Luego: } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

TEOREMA: Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y sea  $x$  un punto en  $(a, b)$ , entonces:

Se debe anotar que  $x$  es variable y que la tasa de acumulación en  $t = x$  es igual al valor de la función  $f(x)$  que se está acumulando en  $t = x$ .

Demostración:

Por la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Si observamos cuidadosamente la última expresión, podemos deducir que corresponde a límite del valor promedio de  $f(x)$  en el intervalo  $[x, x + \Delta x]$ . Como  $\Delta x > 0$ , por teorema de valor medio:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \quad \text{Donde } x < c < x + \Delta x$$

Pero cuando  $\Delta x$  tiende a cero, entonces  $c$  tiende a  $x$ ; además,  $f(x)$  es continua.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Este teorema en su concepto expresa que toda función  $f(x)$  continua en un intervalo cerrado, tiene antiderivada.

Ejemplo 1:

Desarrollar:  $\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x t^4 dt \right]$

Solución:

Por la definición del teorema:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x t^4 dt \right] = x^4$$

Ejemplo 2:

Dado:  $F(x) = \int_1^x (t^2 + 4t - 2) dt$  Hallar  $F'(x)$ .

Solución:

El integrado por definición es  $F'(x) = f(x)$  entonces:  $F'(x) = x^2 + 4x - 2$

Si lo resolvemos por otro lado, tenemos:  $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_1^x (t^2 + 4t - 2) dt$  por definición del

teorema:  $\frac{dF}{dx} = x^2 + 4x - 2$

Ejemplo 3:

Si  $P(x) = \int_1^{x^2} \cos(t) dt$  Calcular  $P'(x)$ .

Solución:

Como el límite superior tiene potencia, hacemos cambio de variable.  $U = x^2$ , luego:

$P(x) = \int_1^u \cos(t) dt$ . Por la regla de la cadena:

$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{du} * \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{d}{du} \left[ \int_1^u \cos(t) dt \right] * \frac{du}{dx}$  Desarrollando:

$\frac{dP}{dx} = \cos(u) * \frac{du}{dx} = \cos(u) * 2x$  recordemos que  $u = x^2$  en este contexto.

$P'(x) = 2x \cos(x^2)$

#### Ejemplo 4

Sea  $H(x) = \int_1^{x^2} (2t - 4)dt$  Hallar  $H'(x)$ .

Solución:

Hacemos cambio de variable así:  $u = x^2$  ahora:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \int_1^u (2t - 4)dt \right] * \frac{du}{dx} = (2u - 4) * (2x) \quad \text{Reemplazando } u \text{ tenemos}$$

$$\frac{dH}{dx} = (2x^2 - 4) * (2x) = 4x^3 - 8x \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\frac{dH}{dx} = 4x^3 - 8x$$

#### Lección 14: Segundo teorema fundamental del cálculo.

En cálculo el estudio de los límites es fundamental, dos límites muy importantes en cálculo son:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i) \Delta x$$

Por medio del teorema fundamental número uno, se estudio la relación que tienen estos dos límites, fundamental para resolver integrales definidas.

La existencia de la antiderivada, lo garantiza el primer teorema fundamental del cálculo, la evaluación de dichas integrales se garantiza por medio del segundo teorema fundamental.

## TEOREMA:

Sea  $f(x)$  una función continua en un intervalo definido, por consiguiente es integrable en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , sea  $P(x)$  una antiderivada de  $f(x)$  en el intervalo dado, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = P(b) - P(a)$$

Demostración:

La demostración requiere los conocimientos de teoremas y definiciones estudiadas anteriormente, por lo cual se debe tener presente estos aspectos.

Sea la función  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  para  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , sabemos que  $G'(x) = f(x)$

Para todo  $x$  en  $[a, b]$ , luego  $G(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$ , pero  $P(x)$  es también antiderivada de  $f(x)$ . Por el teorema de antiderivada, sabemos:

$P'(x) = G'(x)$ , donde  $P(x)$  y  $G(x)$  solo difieren por una constante, luego para todo  $x$  en  $[a, b]$ :  $P(x) = G(x) + C$ , para  $P(x)$  y  $G(x)$  continuas en el intervalo dado, luego:

$P(a) = G(a) + C$  y  $P(b) = G(b) + C$  en el intervalo cerrado definido.

Para  $G(a) = \int_a^{x=a} f(t) dt = 0$  ¿Recuerdas?

$P(a) = G(a) + C$  ¡saber porque verdad!

$P(a) = 0 + C$  entonces:  $P(a) = C$ , por lo tanto:

$P(b) - P(a) = [G(b) + C] - C = G(b)$ . Luego al igual que  $G(a)$ , podemos decir:

$$G(b) = \int_a^{x=b} f(t)dt \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{Así queda demostrado el teorema.}$$

Esta misma demostración se puede hacer por las sumas de Riemman, veamos:

Primero participamos el intervalo  $[a, b]$  en:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  donde  $x_0 = a$  y  $x_n = b$ , además:  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , como  $\Delta x$  es el tamaño de cada subintervalo, entonces:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{Ahora:}$$

$$P(b) - P(a) = [P(x_1) - P(x_0)] + [P(x_2) - P(x_1)] + \dots + [P(x_n) - P(x_{n-1})] \quad \text{resumiendo:}$$

$$P(b) - P(a) = \sum_{i=1}^n [P(x_i) - P(x_{i-1})]$$

Como  $P(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$  derivable en  $(a, b)$  y continua en  $[a, b]$ , por el teorema del valor medio

$$P(x_i) - P(x_{i-1}) = P'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x \quad \text{para } c_i \in (x_{i-1}, x_i) \quad \text{donde } i = 1,$$

2, 3, ... Por asociación de las dos ecuaciones anteriores:

$$P(b) - P(a) = \sum_{i=1}^n [P(x_i) - P(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x \quad \text{Si tomamos limite a ambos lados de}$$

la ecuación cuando  $n$  tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(b) - P(a)) = \int_a^b f(x)dx$$

Por consiguiente:

$$P(b) - P(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 1:

Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo para resolver:  $\int_a^b x dx$

Solución:

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

Ejemplo 2:

Resolver la integral:  $\int_0^2 (x^3 - 4x) dx$

Solución:

$$\int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left( \frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \left[ \frac{1}{4} (2^4) - 2(2^2) \right] - \left[ \frac{1}{4} (0^4) - 2(0^2) \right]$$

$$\int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \frac{16}{4} - 8 = 4 - 8 = -4$$

Ejemplo 3:

Demostrar que:  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{47}{12}$

Solución:

Como  $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$  es continua en  $[1, 4]$ , se puede aplicar el teorema fundamental, luego:



$$\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^4 (x^{1/2} + x^{-2}) dx = \left( \frac{2}{3} x^{3/2} + x^{-1} \right) \Big|_1^4 \quad \text{Evaluando:}$$

$$\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ \frac{2}{3} (4)^{3/2} + (4)^{-1} \right] - \left[ \frac{2}{3} (1)^{3/2} + (1)^{-1} \right] = \frac{16}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{3} = \frac{11}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{11}{3} + \frac{1}{4} = \frac{47}{12}$$

Ejemplo 4:

Hallar el valor de:  $\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx$

Solución:

La función seno es continua en el intervalo propuesto, luego se puede integrar, por medio del teorema fundamental.

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos(0))$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx = 0 + 1 = 1$$

## Lección 15: Teorema de simetría.

Si  $f(x)$  es una función par, entonces:  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Si  $f(x)$  es una función impar, entonces:  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Demostración:

Vamos a demostrar la primera parte del teorema, el segundo se deja como ejercicio.

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad \text{Ahora hacemos una sustitución } u = -x, \text{ luego}$$

$du = -dx$ . Por definición, si  $f(x)$  es par. Se cumple:  $f(-x) = f(x)$ , entonces:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_{-a}^0 f(-x)(-dx) = - \int_a^0 f(u)du \quad \text{Luego:}$$

$$\int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx \quad \text{Por lo tanto:}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

## EJERCICIOS:

1. Escribir las siguientes integrales como una sola:

a-)  $\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

b-)  $\int_0^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$

2. Hallar  $\int_0^4 f(x)dx$ . donde:  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3. Calcular  $\int_0^4 f(x)dx$ . donde:  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 3 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

4: Desarrollar:  $\int_0^1 (x^2 + 1)^{10} (2x) dx$

5. Hallar  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sec(x) + \cos(x))^2 dx$

6. Para un gas ideal, la presión es inversamente proporcional al volumen, el trabajo requerido para aumentar el volumen de un gas particular de  $V = 2$  a  $V = 4$  esta dado por la siguiente expresión:  $\int_{V_1}^{V_2} P(V)dV$  donde la constante de proporcionalidad para este caso es de 12. Cual será el valor de la integral.

7. La temperatura  $T$  en una región particular, está dada por la función

$T(t) = 75 - 20\cos(\pi/6)t$  donde  $t$  = tiempo en meses. Estimar la temperatura promedio

Durante todo el año.

## ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD

### PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

A continuación, usted encontrará preguntas que se desarrollan en torno a un enunciado, problema o contexto, frente al cual, usted debe seleccionar aquella que responde correctamente a la pregunta planteada entre cuatro opciones identificadas con las letras **A, B, C, D**. Una vez la seleccione, márquela en su hoja de respuestas rellenando el óvalo correspondiente.

1. En la suma de Riemman la función se aplica sobre los puntos muestra, éste representa:
  - A. El valor representativo del subintervalo
  - B. El valor representativo del intervalo
  - C. El valor representativo del área
  - D. El valor representativo de la ordenada
  
2. La resolución de integrales indefinidas originan
  - A. Una función
  - B. Un escalar
  - C. Infinito
  - D. Cero
  
3. La resolución de integrales definidas originan
  - A. Un escalar
  - B. Otra función
  - C. Cero
  - D. Uno

4. Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y sea  $x$  un punto en  $(a, b)$ , entonces:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

La definición dada corresponde a:

- A. El primer teorema fundamental del cálculo
- B. El segundo teorema fundamental del cálculo
- C. El teorema del valor medio de una función
- D. La definición de integral impropia

5. Al resolver  $\int_0^{\pi/2} \tan(2x) dx$  Su resultado es:

- A. Diverge
- B.  $1/2$
- C. 2
- D. 0

6. Al resolver  $\int_0^2 y \sqrt{y+1} dy$  se obtiene

- A. 5,276
- B. 2,789
- C. 1,432
- D. 10,450

7. Al resolver  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  se obtiene

- A. 17,293
- B. 20,287
- C. 26.456
- D. 10,345

8. Al resolver  $\int_0^\pi \cos^2(x) \sin^2(x) dx$  se obtiene

- A. 0,3927
- B. 2,453
- C. 0,679
- D. 7,895

9. Al resolver  $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$  se obtiene

- A.  $2\ln(3)$
- B.  $4\ln(4)$
- C.  $5\ln(10)$
- D.  $7\ln(2)$

10. Al resolver  $\int x * 3^{x^2} dx$  se obtiene

- A.  $2 / 2\ln(3)$
- B.  $5 / 3\ln(2)$
- C.  $3 / \ln(7)$
- D.  $7 / 3\ln(6)$



## HOJA DE RESPUESTAS.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

## LABORATORIO

Los estudiantes deben realizar los procedimientos de solución paso a paso para cada punto. Además deben comprobar con un software libre las respuestas. El software libre que pueden utilizar es **SOLVED**, el cual realiza los procedimientos para la solución de integrales, obviamente al programa se le debe colaborar con la simplificación de las integrales.

El software libre **SOLVED** se puede bajar de los links:

[http://rapidshare.de/files/40970684/precalculus\\_Solved\\_.zip.html](http://rapidshare.de/files/40970684/precalculus_Solved_.zip.html)

<http://jose.blancor.googlepages.com/home>

**Ejemplo No. 1** Solucionar la integral  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$

$$u = 1 - \sin x$$

Con la sustitución:  $du = \cos x dx$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

Reemplazando: 
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx = \int \frac{\cos x du}{\sqrt{u} \cos x} = \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Al resolver:



$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{u^{\frac{-1}{2} + \frac{2}{2}}}{\frac{-1}{2} + \frac{2}{2}} + k = 2u^{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{u} + k$$

Reemplazando la sustitución tenemos:  $2\sqrt{u} + k = 2\sqrt{1 - \sin x} + k$

Con la ayuda del software libre SOLVED procedemos hasta la sustitución y luego

insertamos en el software la integral  $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$  Con lo cual obtenemos:

**Problem 1**

---

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

---

Remove all extra parentheses from the expression.

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

---

Rewrite the expression to make the exponent of x negative and move it to the numerator.

$\int x^{-\frac{1}{2}} dx$


---

To find the integral of  $x^{-\frac{1}{2}}$ , find the anti-derivative. The formula for the anti-derivative of a basic monomial is  $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} dx$ .

$2x^{\frac{1}{2}}$

---

The indefinite integral also has some unknown constant. This can be proven by completing the opposite operation (derivative) in which C would go to 0. The value of C can be found in cases when an initial condition of the function is given.

$2x^{\frac{1}{2}} + C$  

Respuesta

La respuesta del software es idéntica a la obtenida manualmente.

**Ejemplo No. 2** Solucionar la integral  $\int \sin(a + bx) dx$

Solución directa con el software:

$$\int \sin((a + bx)) dx$$

Remove the parentheses around the expression  $a + bx$ .

$$\int \sin(a + bx) dx$$

Replace  $(a + bx)$  with  $u$  to simplify the integrand.

$$u = (a + bx)$$

Find an equation relating the value of  $dx$  to  $du$ .

$$du = b dx$$

Since  $du = b dx$ , then  $dx = \frac{du}{b}$ .

$$dx = \frac{du}{b}$$

Replace the value found for  $dx$  so that the integrand is in terms of  $u$ .

$$\int \sin u \cdot \frac{1}{b} du$$

Simplify the integrand.

$$\int \frac{\sin u}{b} du$$

The integral of  $\frac{\sin u}{b}$  is  $-\frac{\cos u}{b}$ .

$$-\frac{\cos u}{b}$$

Replace  $u = (a + bx)$  in the solved integral to find the solution in terms of  $x$ .

$$-\frac{\cos((a + bx))}{b} + C \quad \checkmark$$

**Ejercicios propuestos:** Recuerde simplificar las integrales antes de ingresarlas al software.

Resolver:

- $\int \frac{(x^3 + 3x^2 - 18x)}{(x-3)(x+6)} dx$

- $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

- $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x-1} dx$

- $\int \frac{x-4}{2x} dx$

- $\int \frac{3dx}{\sqrt{x}}$

- $\int \frac{\text{sen} x}{\cos^2 x} dx$

- $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[5]{x^2}}$

- $\int \frac{x+1}{x} dx$

$$\bullet \int 2^x 5^x dx$$

$$\bullet \int \frac{4x^2 - 4x - 8}{x + 1} dx$$

$$\bullet \int \frac{x + 1}{x - 5} dx$$

$$\bullet \int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} dx$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$$

$$\bullet \int \frac{x + 6}{x + 1} dx$$

$$\bullet \int \operatorname{Ctg}(ax) dx + \int \operatorname{Sec}^2(ax) dx$$

$$\bullet \int \frac{x - 3}{x^3} dx$$

$$\bullet \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA UNIDAD 1

RONDON, J.E (2007) Calculo Integral. Primera edición, UNAD Ciencias básicas

PURCELL, E (2001) Cálculo, Pearson Education: Prentice hall, Octava Edición, México.

THOMAS Y FINNEY (1987). Cálculo con Geometría Analítica Vol. 1. Edición sexta, Addison Wesley Iberoamericana. México.

STEWART, J. (2001) Cálculo de una Variable. Thomsom-Learning. Cuarta edición, Bogotá.

LARSON, R. Y HOSTETLER, R. (1998) Cálculo Vol. 1, Mc Graw Hill, sexta edición, México.

SMITH, R. Y MINTON, R. (2002) Cálculo Vol. 1. Segunda Edición, Mc Graw Hill, Bogotá.

BAUM Y MILLES. (1992). Cálculo Aplicado. Limusa, México.

LEYTOLD, L. (1987) El Cálculo con Geometría Analítica. Harla, México.

PITA, C. (1998) Cálculo de una Variable. Pearson educación, México.

DE BURGOS, J. (2007) Cálculo infinitesimal de una Variable. McGraw Hill, Madrid.

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA INTERNET

<http://www.xtec.cat/~jlagares/integral.esp/integral.htm>

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/54-1-p-Integral.html>

[http://sigma.univalle.edu.co/index\\_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf](http://sigma.univalle.edu.co/index_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf)

<http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_fundamental\\_del\\_c%C3%A1lculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo)

<http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm>



<http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml>

<http://www.fata.unam.mx/tecnologia/material/sem-01/Calculo I Historia 1.pdf>

[http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html)

[http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2\\*%28x-4%29%5E0.5&random=false](http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2*%28x-4%29%5E0.5&random=false)

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/tutoriales/integracion/>

<http://www.matematicasypoesia.com.es/ProblIntegral/problema110.htm>

<http://usuarios.iponet.es/ddt/logica1.htm>

## UNIDAD 2: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

### Introducción:

La primera forma de desarrollar integrales, es por medio de las **integrales inmediatas**, donde se resuelven utilizando el principio de la antiderivada. Como

$$\int dx = x + c \quad \int k dx = kx + c \quad \text{para } k = \text{constante} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

La técnica de sustitución por **cambio de variable**, se utiliza cuando la función que conforma el integrando es tal que una parte es la derivada de la otra parte y las dos están en forma de producto. Las condiciones básicas para establecer que se puede aplicar una sustitución es una buena observación de la función a integrar y algo de perspicacia matemática. Cuando el integrando presenta radicales, se puede presentar problemas para resolver la integral, la racionalización puede ser un camino para superar dicho problema. En el mundo matemático, científico y otros, se presentan casos donde la integral es un *Producto de Funciones*, casos donde se aplica la técnica llamada integración por partes. En muchas ocasiones se ha manifestado que toda regla de derivación da origen a una regla de integración. La integración por partes esta relacionada con la regla de la cadena. La sustitución trigonométrica, es una técnica que se puede utilizar cuando en el integrando se presentan expresiones como:  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ; siendo  $a > 0$ . Por un teorema de álgebra avanzada se afirma que toda fracción racional; es decir, el cociente de dos polinomios, se puede descomponer en suma de **fracciones racionales** más simples. Para desarrollar el método de fracciones parciales, se debe tener en cuenta: Para la fracción  $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  con  $g(x) \neq 0$  sea una fracción racional propia; es decir,  $f(x)$  debe tener menor grado que  $g(x)$  y por otro lado, que  $g(x)$  se pueda descomponer en factores primos. Teóricamente cualquier polinomio con coeficientes reales se puede escribir como producto de factores lineales reales y / o factores cuadráticos, es posible que obtenerlos no

sea tarea fácil. Descomposición En Factores Lineales Simples, Descomposición En Factores Lineales Repetidos, Descomposición En Factores Cuadráticos.

### **Justificación:**

Para poder desarrollar las integrales debemos manejar bien las derivadas, realizar muchos ejercicios sobre un papel, tener algo de fortuna, conocer algunas integrales directas y aplicar las técnicas de integración que analizaremos en esta unidad.

Al resolver una integral se pueden presentar dos casos:

- Necesitamos obtener una antiderivada si la integral es indefinida, actividad que nos ocupa en esta unidad y
- Encontrar un número (escalar) si la integral es definida

Debido a la complejidad de las aplicaciones, de los ejercicios de aplicación y de los mismos problemas teóricos, aparecen integrales que no es posible solucionar por los teoremas básicos de las antiderivadas; por lo tanto requerimos de técnicas o metodologías apropiadas para su solución, tal como vamos a detallarlas en las siguientes lecciones.

Para esta **SEGUNDA UNIDAD** tenemos tres capítulos en los cuales tratamos las diferentes técnicas de integración básicas para el entrenamiento de los estudiantes que están tomando el curso.

### **Intencionalidades formativas:**

- Que los estudiantes se familiaricen con los métodos de integración.
- La idea central de la UNIDAD es que los estudiantes al enfrentarse con cualquier tipo de integral, adquieran las habilidades necesarias para su solución, sin aprenderse de memoria los métodos de integración.
- La mejor manera de solucionar integrales es realizando ejercicios, los cuales se encuentran al final de cada lección, al final de la unidad o en la bibliografía y cibergrafía recomendada.

Presentamos un cuadro con el resumen del contexto teórico de esta unidad





Denominación de los capítulos	CAPITULO 1: MÉTODOS de integración I.  CAPITULO 2 Métodos de integración II  CAPITULO 3 Métodos de integración III
Asimilación de conceptos	Apropiarse de los métodos de integración que están al alcance de este módulo, ver sus ventajas y desventajas y aprender a manejarlos.
Conceptos	Los métodos de integración se presentan de una manera sencilla y de menor dificultad a mayor dificultad, para facilitar su asimilación al lector.
Competencias	<p>De conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Adquirir las técnicas propias de los métodos de integración de la unidad.</li><li>• Adquirir conocimiento mediante la realización del mayor número posible de ejercicios.</li></ul> <p>Contextuales:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Adquirir los conocimientos propios de los métodos de integración.</li><li>• Los estudiantes deben desarrollar habilidades para aplicar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas prácticos.</li></ul> <p>Comunicativas:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Adquirir el manejo de los elementos involucrados en los diferentes métodos de solución de integrales.</li><li>• Interpretar y entender la diferente simbología y su aplicación.</li><li>• Adquirir facilidad de expresión y vencer el miedo en la interacción con las NTIC</li></ul> <p>Valorativas:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Adoptar, identificar y practicar los valores de la UNAD.</li><li>• Adquirir capacidad de valoración y tolerancia con nuestros compañeros virtuales o presenciales.</li></ul>

## CAPITULO 4: Métodos de integración I

### Introducción

El teorema fundamental del cálculo se puede aplicar bajo la condición de que la función sea continua en el intervalo de integración. Por lo cual, cuando vamos a integrar lo primero que debemos observar es que se verifique el teorema. Existen casos en que el teorema NO se cumple, dichas situaciones son las que abordaremos en este aparte del curso.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

### Lección 16: Integrales impropias con integrando discontinuo.

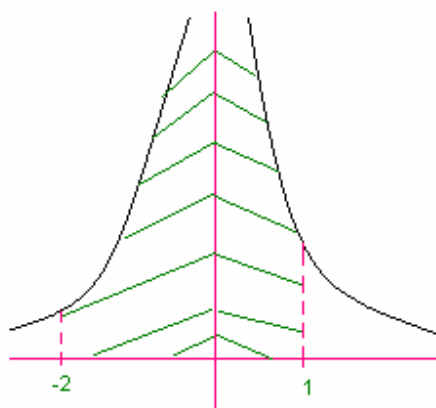


Fig. No. 5 Integral impropia.

La función que observamos es dada por la ecuación:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  y deseamos integrarla en el intervalo  $[1, -2]$ .

Sin pensarlo dos veces lo que haríamos es:

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-2}^1 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^1 = -\frac{3}{2}$$

Obviamente la respuesta NO es correcta. ¿Por qué?

El problema requiere que recordemos dos términos: Continuidad y Acotación.

La integral que estamos analizando se le llama Integral Impropia, debido a que el integrando es discontinuo en el intervalo propuesto.

Considere el caso de:  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  ¡Argumente y comparta con sus compañeros!

DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo semiabierto  $[a, b)$ , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Si el límite existe y es finito, decimos que la integral impropia es convergente, donde el límite es el valor de la integral. Si el límite no existe, decimos que la integral impropia es divergente.

Ejemplo 1:

Integral la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  en el intervalo  $(0, 8]$ .

Solución:

Como la función es discontinua en  $x = 0$ , entonces planteamos una solución aplicando la definición dada anteriormente.

$$\int_0^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^8 x^{-1/3} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} x^{2/3} \right)_t^8 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} (8)^{2/3} - \frac{3}{2} (t)^{2/3} \right]$$

Evaluando obtenemos:

$$\int_0^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{64} - \frac{3}{2} (0)^{2/3} = \frac{3}{2} * 4 = 6 \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\int_0^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 6$$

Ejemplo 2:

Determinar la convergencia o no convergencia de la siguiente expresión:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Solución:

Como la función NO está definida para  $x = 1$ , debemos tomar el límite unilateral, luego el intervalo a tomar será  $[0, 1)$ , entonces:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ -2(\sqrt{1-x}) \right]_0^t$$

Evaluando:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{t \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \Big|_0^t = -2(0 - 1) = 2$$

La integral propuesta es convergente y converge a 2.

Ejemplo 3:

Demostrar que  $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$  es convergente si  $k < 1$ .

Solución:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-k} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right)_t^1 \quad \text{Evaluando:}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right)_t^1 = \left[ \frac{1^{-k+1}}{-k+1} - \frac{t^{-k+1}}{-k+1} \right] = \frac{1}{1-k} \quad \text{Para } k < 1$$

¿Qué pasará si  $k \geq 1$ ? Hacer el análisis con los compañeros del pequeño grupo colaborativo.

DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo semiabierto  $(a, b]$ , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Al igual que en el caso anterior, si el límite existe la integral converge y si el límite no existe, la integral diverge.

Con las definiciones dadas, podemos resolver integrales impropias con integrando discontinuo.

Con el fin de fortalecer el tema, estimado estudiante demostrar que:

$$\text{a-) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{Converge a } \frac{3}{\sqrt{2}}$$

b-)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$  Converge a  $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{101})$

c-)  $\int_0^{\pi/2} \tan(2x) dx$  Diverge.

Estos ejercicios deben desarrollarlos en el pequeño grupo colaborativo y socializarlo con el tutor.

### Lección 17: Integrales impropias con límites de integración finitos

En el campo de las integrales impropias, también podemos encontrar unas integrales impropias donde uno de los límites es infinito, tal es el caso de:

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  muy utilizada en Probabilidad, pero también hay casos en Economía, Administración y otros.

La resolución de este tipo de integrales, utiliza también límites para eliminar una posible indeterminación.

#### DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo semiabierto  $[a, b)$  o  $(-\infty, a]$ , entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x) dx$$

Si los límites existen, entonces las integrales impropias son convergentes. Pero si el límite no existe, entonces la integral impropia diverge.

Ejemplo 1:

Determinar la convergencia o divergencia de:  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

Solución:

Observamos que el límite superior es infinito, entonces aplicando la definición tenemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^R$$

Evaluando el límite, tenemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -\left(R^{-1} - 1\right) = 0 + 1 = 1$$

La integral propuesta converge a 1.

Ejemplo 2:

Demostrar que:  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x}$  es divergente.

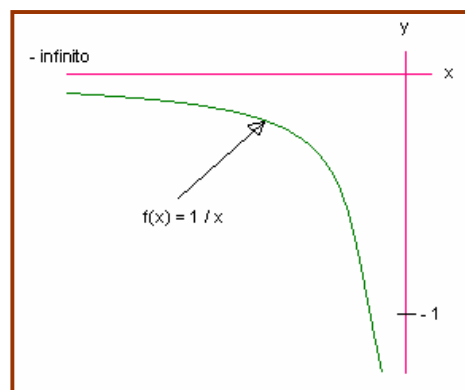


Fig. No. 6 Convergencia.

**Solución:** Siguiendo el mismo procedimiento anterior:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^{-1} \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow -\infty} \ln [x]_R^{-1}$$

Si evaluamos el límite:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln |-1| - \ln |R|] = -\infty$$

Como el límite no existe, la integral diverge.

En estudios matemáticos sobre fenómenos luminosos, electricidad, sonido y en general en fenómenos ondulatorios, se puede encontrar integrales impropias, donde los dos límites de integración son infinitos. Para resolver este tipo de integrales, hacemos uso de la siguiente definición:

### DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , si  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  y  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  son

convergentes, decimos que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  es convergente y su valor se puede hallar por la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Si alguna de las integrales diverge o las dos, entonces la integral total diverge.



Ejemplo 1:

Dada la integral:  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx$  Determinar si converge o diverge.

Solución:

Inicialmente definamos  $a = 0$  y así aplicando la definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_{-\infty}^a \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \int_a^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

En seguida aplicamos el límite:

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx \quad \text{Integrando:}$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \left[ \tan^{-1}(x) \right]_b^a + \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \tan^{-1}(x) \right]_a^c$$

Evaluando el límite:

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \left[ \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b) \right] + \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \tan^{-1}(c) - \tan^{-1}(a) \right]$$

Como  $a = 0$ , entonces:

$$\left[ 0 - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \pi \quad \text{La integral converge.}$$

Ejemplo 2:

Demostrar que:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$  Diverge.

Solución:

Aplicando la definición dada para estos casos tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad \text{Llamemos a la primera integral } \mathbf{A} \text{ y a la segunda } \mathbf{B}$$

Desarrollemos la primera integral:

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \left( -e^{-x} \right)_R^0 = \lim_{R \rightarrow -\infty} \left[ -e^0 - (-e^R) \right]$$

Evaluando:

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = -e^0 + e^{-\infty} = -1 + \frac{1}{e^{\infty}} = -1 + 0 = -1 \quad \text{Converge}$$

Ahora desarrollemos la segunda integral:

$$\mathbf{B} = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \right)_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -e^R - (-e^0) \right] \quad \text{Evaluando:}$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{\infty} + e^0 = -\infty + 1 = -\infty \quad \text{Diverge}$$

Vemos que la primera integral converge, pero la segunda diverge, por consiguiente la integral original diverge.

## EJERCICIOS LECCION No. 2:

Determinar Si la integral converge o diverge, en caso de que converja, hallar el valor correspondiente:

$$1. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

$$3. \int_0^1 \ln(x) dx$$

$$4. \int_0^{\infty} \tan(x) dx$$

$$5. \int_{-\infty}^1 e^{4x} dx$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \cot(x) dx$$

$$9. \int_0^5 x^{-4/5} dx$$

$$10. \int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x^4} dx$$

## Lección 18: Integrales inmediatas.

Inicialmente vamos a hacer un recuento de las integrales que se pueden resolver utilizando el concepto de antiderivada.

Recopilando lo estudiado en integrales indefinidas, las propiedades analizadas, podemos exponer a continuación las integrales obtenidas por definición de la antiderivada o primitiva.

$$1. \int dx = x + c$$

$$2. \int k dx = kx + c \quad \text{para } k = \text{constante}$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{para } n \neq -1$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \text{para } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$6. \int e^{nx} dx = \frac{1}{n} e^{nx} + c \quad n \neq 0$$

$$7. \int \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \cos(nx) + c \quad n \neq 0$$

$$8. \int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + c \quad n \neq 0$$

$$9. \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$$

$$10. \int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + c$$

$$11. \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$$

$$12. \int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + c$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad a \neq 0$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad a \neq 0$$

$$15. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Sec}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c$$

$$16. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{a}{|x|}\right) + c$$

$$17. \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$$

$$18. \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$$

La idea no es memorizar estas fórmulas, solo que con un buen análisis se pueden utilizar en muchas situaciones.

### Ejemplo No 1:

Resolver:  $\int 4^x dx$

Solución:

Como podemos ver se trata de una función exponencial, luego con la fórmula numero 5 se puede resolver esta integral.

$$\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + c$$

### Ejemplo No 2:

Resolver:  $\int 5 dx$

Solución:

En este caso se trata de una constante, luego con la fórmula numero 2 se puede resolver esta integral

$$\int 5 dx = 5x + c$$

### Ejemplo No 3:

Hallar la siguiente integral:  $\int 30e^{4x} dx$

Solución:

Tenemos la integral de una constante por una función, por las propiedades estudiadas, podemos sacar la constante de la integral y luego operar la función, veamos:

$$\int 30e^{4x} dx = 30 \int e^{4x} dx \quad \text{Por la fórmula 6, desarrollamos la integral.}$$

$$30 \int e^{4x} dx = 30 \left( \frac{1}{4} e^{4x} \right) + c = \frac{15}{2} e^{4x} + c \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\int 30e^{4x} dx = \frac{15}{2} e^{4x} + c$$

Ejemplo No 4:

Resolver:  $\int 20 \cos(5x) dx$

Solución:

Se trata de la integral de una constante por una función trigonométrica, la solución es de la siguiente manera:

$$\int 20 \cos(5x) dx = 20 \int \cos(5x) dx = 20 \left( \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x) \right) + c$$

$$\int 20 \cos(5x) dx = 4 \operatorname{sen}(5x) + c + c$$

Ejemplo No 5:

Resolver la siguiente integral:  $\int (x^2 - 4)^2 dx$

Solución:

Vemos que el integrando es un producto notable, es conveniente resolverlo primero para poder luego hacer la integración.

$$\int (x^2 - 4)^2 dx = \int (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \int x^4 dx - \int 8x^2 dx + \int 16 dx$$

Se aplica la linealidad para las integrales, ahora resolvemos cada integral.

$$\int x^4 dx - \int 8x^2 dx - \int 16 dx = \frac{1}{5} x^5 + c_1 - \frac{8}{3} x^3 + c_2 + 16x + c_3$$

Sumando las constantes en una sola, obtenemos:

$$\frac{1}{5}x^5 + c_1 - \frac{8}{3}x^3 + c_2 + 16x + c_3 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x + c \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\int (x^2 - 4)^2 dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x + c$$

### Lección 19: Integrales inmediatas con sustitución

En algunos casos la función NO tiene la forma directa para resolverla como integral inmediata, pero haciendo una pequeña transformación, se puede llevar la función dada a una forma tal que se pueda aplicar alguna de las funciones inmediatas para resolverla.

Ejemplo No 6:

Resolver la integral:  $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

Solución:

Si observamos detalladamente, esta función no tiene una forma conocida de las integrales inmediatas, sin embargo por la forma de la función se puede inferir que podemos llevarla a la forma  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$  Para esto debemos transformar el trinomio

a la forma  $a^2 - x^2$ , entonces:  $3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x + 1) + 1$  organizando:

$4 - (x+1)^2$  ahora incluyámoslo en la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x+1)^2}} dx \quad \text{Ya lo tenemos de la forma}$$

de una integral inmediata, observemos la fórmula 13, luego:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x+1)^2}} dx = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

Ejemplo No 7:

Resolver la integral:  $\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(x)}{16 + \cos^2(x)} dx$

Solución:

La forma de la función no es conocida, pero se puede transformar a la forma

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{según la forma propuesta. Entonces:}$$

Sea  $U = \cos(x)$  luego:  $dU/dx = -\text{sen}(x)$  entonces:  $dU = -\text{sen}(x)dx$ . Apliquemos la integral sin límites, para facilitar el proceso, al final se evalúan los límites.

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{16 + \cos^2(x)} dx = \int \frac{-dU}{16 + U^2} = -\frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{U}{4}\right) \quad \text{Pero } U = \cos(x),$$

Entonces reemplazamos:

$$-\frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{U}{4}\right) = -\frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(x)}{4}\right) \quad \text{Evaluando en los límites propuestos:}$$

$$-\frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{U}{4}\right) = -\frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(x)}{4}\right) \Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} \left[ \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(\pi/2)}{4}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(0)}{4}\right) \right]$$

Resolviendo y simplificando:

$$-\frac{1}{4} \left[ \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(\pi/2)}{4}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos(0)}{4}\right) \right] = -\frac{1}{4} \left[ \text{Tan}^{-1}(0) - \text{Tan}^{-1}(1/4) \right] = \frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$



Luego:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(x)}{16 + \cos^2(x)} dx = \frac{1}{4} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Ejemplo No 8:

Hallar la solución de la integral propuesta:  $\int \frac{3x^2 + 2x}{x+1} dx$

Solución:

La función del integrando No tiene forma conocida, pero es un polinomio que podemos dividir para reducirlo lo más que se pueda.

$$\frac{3x^2 + 2x}{x+1} = 3x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad \text{Apliquémosle la integral.}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x}{x+1} dx = \int \left( 3x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \quad \text{Aplicando la linealidad obtenemos:}$$

$$\int 3x dx - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{3}{2} x^2 - x + \text{Ln}(x+1) + c$$

Un ejemplo más para adquirir destreza en este tipo de situaciones:

Ejemplo No 9:

Resolver la integral dada a continuación:  $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx$

Solución:

Separemos el  $\cos^2(x)$  en  $\cos(x) \cdot \cos(x)$  y reorganizando:

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) \cdot \cos(x)} dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} dx$$

Por identidades trigonométricas:

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} * \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \tan(x) * \sec(x) dx \quad \text{Esta última integral tiene la forma de}$$

la fórmula 11 de las integrales inmediatas, entonces:

$$\int \tan(x) * \sec(x) dx = \sec(x) + c \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx = \sec(x) + c$$

### EJERCICIOS:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$2. \int \frac{\cos(x)}{1 + \text{sen}^2(x)} dx$$

$$3. \int x(x^2 + 2)^2 dx$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$5. \int \frac{4}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$6. \int \sinh(5x) dx$$

## Lección 20: Integración por cambio de variable.

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(U)dU = P(U) + c$$

La técnica de sustitución por cambio de variable, se utiliza cuando la función que se desea integrar NO se le puede aplicar las fórmulas de las integrales inmediatas, pero haciendo un “Truco Matemático” llamado cambio de variable, es posible la resolución de muchas integrales.

Pero la pregunta es *¿Qué funciones se pueden integrar por cambio de variable?* Cuando la función que conforma el integrando es tal que una parte es la derivada de la otra parte y las dos están en forma de producto, se puede aplicar esta técnica. Las condiciones básicas para establecer que se puede aplicar una sustitución es una buena observación de la función a integrar y algo de perspicacia matemática.

Como el método tiene que ver con el producto de una función y su derivada, estaría implícita la regla de la cadena, el siguiente teorema sustenta dicha técnica:

TEOREMA:

Sea  $g(x)$  una función derivable y supongamos que  $P(x)$  es una antiderivada de la función  $f(x)$ . Si además  $U = g(x)$ , entonces:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(U)dU = P(U) + c$$

Por consiguiente:

$$P(U) + C = P[g(x)] + C$$

Demostración:

Podemos demostrar que la derivada de  $P(g(x)) + C$  es la función que conforma el integrando, veamos:

$$\frac{d}{dx}(P(g(x)) + C) = P'(g(x)) * g'(x) \quad \text{Pero por hipótesis } P(x) \text{ es antiderivada}$$

De  $f(x)$ , luego:  $P'(g(x)) * g'(x) = f(g(x)) - g'(x)$

Así queda demostrado el teorema.

Los pasos para aplicar la técnica de sustitución son:

1. elegir una variable digamos  $u, v, w, \dots$  que sustituya parte del integrando.
2. Hallar el diferencial de la variable seleccionada:  $du, dv, dw, \dots$
3. Reemplazar todos los términos en el integrando de tal forma que queden expresados solo en función de la nueva variable
4. Resolver la integral bajo la nueva variable. A veces no se puede hacer esto, lo cual indica que dicha sustitución no es la adecuada y se debe intentar con otra forma de sustituir.
5. Una vez realizada la integración, la nueva variable se reemplaza por la variable original y así obtenemos la integral deseada.

Ejemplo No 1:

Desarrollar:  $\int (x^4 + 10)^{62} 4x^3 dx$

Solución:

Vemos que la función es un producto de dos funciones:  $(x^4 + 10)^{62}$  y  $4x^3$  lo que nos sugiere una sustitución. Definimos la nueva variable  $U = x^4 + 10$ , ahora

derivemos esta función:  $\frac{dU}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dU = 4x^3 dx$  Reemplazando es la integral

Original:  $\int (x^4 + 10)^{62} 4x^3 dx = \int U^{62} dU$  Esta si se puede resolver:

$\int U^{62} dU = \frac{U^{63}}{63} + c$ . Pero la función original es x y no U, por lo cual se hace el

reemplazo de nuevo:  $U = x^4 + 10$  entonces:

$$\int (x^4 + 10)^{62} 4x^3 dx = \frac{(x^4 + 10)^{63}}{63} + c$$

### Ejemplo No 2:

Hallar:  $\int 3x^2 \text{sen}(x^3) dx$

Solución:

Elegimos la nueva variable  $V = x^3$ , ahora derivamos  $\frac{dV}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dV = 3x^2 dx$  Si reemplazamos:

$$\int 3x^2 \text{sen}(x^3) dx = \int \text{sen}(V) dV = -\cos(V) + c \quad \text{Reemplazando el}$$

valor de V en función de x, tenemos:

$$-\cos(V) + c = -\cos(x^3) + c \quad \text{por consiguiente:}$$

$$\int 3x^2 \text{sen}(x^3) dx = -\cos(x^3) + c$$

### Ejemplo No 3:

Desarrollar:  $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos.

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Reemplazando en la integral.

$$\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \text{sen}(u) 2 du = 2 \int \text{sen}(u) du = -2 \cos(u) + c$$

Como  $u = \sqrt{x}$  reemplazamos en la integral obtenida, nos resulta.

$$\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos(\sqrt{x}) + c$$

Ejemplo No 4:

Hallemos la integral de  $\tan(x)$ .

Solución:

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} * \text{sen}(x) dx \quad \text{Hacemos cambio de}$$

variable:  $u = \cos(x)$ , luego:  $\frac{du}{dx} = -\text{sen}(x) \Rightarrow du = -\text{sen}(x) dx$  reemplazando:

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{u} du = -\text{Ln}|u| + c \quad \text{Pero } u = \cos(x) \text{ entonces:}$$

$$\int \tan(x) dx = -\text{Ln}|\cos(x)| + c$$

Ejemplo No 5:

Resolver:  $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}} dx$

Solución:

Observando detenidamente esta integral, vemos que tiene la forma de  $\text{Sen}^{-1}(x)$ , pero primero debemos ajustarlo para poder aplicar este tipo de integral.

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}} dx = \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{2^2 - (e^{3x})^2}} dx$$

Ahora si podemos hacer cambio de

variable.  $w = e^{3x}$  Luego:  $dw = 3e^{3x} dx$  y  $\frac{dw}{3} = e^{3x} dx$  reemplazando en la integral:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}} dx = \int \frac{dw/3}{\sqrt{2^2 - w^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dw}{\sqrt{2^2 - w^2}} = \frac{1}{3} \text{Sen}^{-1}\left(\frac{w}{2}\right) + c$$

Finalmente:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}} dx = \frac{1}{3} \text{Sen}^{-1}\left(\frac{e^{3x}}{2}\right) + c$$

## CAPITULO 5: Métodos de integración II

### Introducción

En este capítulo vamos a detallar los métodos de integración por racionalización, los tres casos de integración por sustitución trigonométrica y la integración por partes temas claves en el desarrollo del curso.

Para este capítulo tenemos que las matemáticas se vuelven una ciencia un poco teórica, debido a que parte de teorías y definiciones cuyas demostraciones se soportan en el principio de la lógica, los axiomas y postulados, que permiten el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior, especialmente la Deducción, Inducción y la Abstracción, pero a su vez presenta dificultades para poder desplegar dichas habilidades, ya que se requiere trabajar el sentido de análisis, desarrollo del raciocinio, aspectos no fáciles de activar en la mente humana.

El manejo complejo del trabajo mental para el estudio de las Matemáticas, requiere un esfuerzo sistemático en el análisis de contenidos, esto indica que para comprender un tema, se debe comprender uno previo que facilite la comprensión del siguiente y de esta forma ir avanzando en el desarrollo de los temas, con la realización de muchos ejercicios, como se ha sugerido en todas las lecciones, esto quiere decir que “trabajando es como aprendemos”, entonces ANIMO y a realizar todas las integrales que se nos presenten.

### Lección 21: Integración por racionalización.

Cuando el integrando presenta radicales, se puede presentar problemas para resolver la integral, la racionalización puede ser un camino para superar dicho problema, veamos algunos casos.

Ejemplo No 1:

Resolver:  $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$

Solución:

Haciendo un cambio de variable:  $u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$  luego reemplazamos:



$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx = \int \frac{2u du}{u^2 - u} = 2 \int \frac{u}{u(u-1)} du = 2 \int \frac{1}{u-1} du = 2 \ln|u-1| + c$$

Reemplazando  $u = \sqrt{x}$  tenemos finalmente:

$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx = 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + c$$

Ejemplo No 2:

Hallar la integral de:  $x^3 \sqrt{x + \pi} dx$

Solución:

Haciendo  $V = \sqrt[3]{x + \pi} \Rightarrow V^3 = x + \pi \Rightarrow x = V^3 - \pi$  derivamos:  $3V^2 dV = dx$ ,

reemplazamos en la integral original:

$$\int x^3 \sqrt{x + \pi} dx = \int (V^3 - \pi)(V)(3V^2) dV = \int (3V^6 - 3\pi V^3) dV$$

Desarrollando:  $\frac{3}{7} V^7 - \frac{3}{4} \pi V^4 + c$  Si volvemos a reemplazar, obtenemos finalmente:

$$x^3 \sqrt{x + \pi} dx = \frac{3}{7} (x + \pi)^{7/3} - \frac{3}{4} \pi (x + \pi)^{4/3} + c$$

Esperamos que estos ejemplos modelos permitan desarrollar destreza para resolver este tipo de integrales.

## EJERCICIOS:

En los siguientes ejercicios desarrollar la integral, indicando paso por paso.

1.  $\int x * 3^{x^2} dx$

Rta:  $\frac{1}{2\ln 3} 3^{x^2} + c$

2.  $\int \frac{3x^2 + 2x}{x+1} dx$

Rta:  $\frac{3}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + c$

3.  $\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x)} dx$

Rta:  $x - \ln|\sin(x)| + c$

4.  $\int \frac{x^3}{(x+3)^4} dx$

Rta:  $\ln|x+3| + \frac{9}{x+3} - \frac{27}{2(x+3)^2} + \frac{9}{(x+3)^3} + c$

5.  $\int_0^1 \frac{3}{4+\sqrt{x}} dx$

Rta:  $6 - 24\ln\left(\frac{4}{5}\right)$

6.  $\int_2^4 \frac{x}{x+2} dx$

Rta:  $2 + 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

7.  $\int x^3 \sqrt{x^3 + 2} dx$

Rta:  $\frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 2)^3} + c$

8.  $\int \cos(x) \sqrt{\sin(x) + 1} dx$

Rta:  $\frac{2}{3} \sqrt{(\sin(x) + 1)^3} + c$

**Lección 22: Integrales por sustitución trigonométrica caso I**

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = 0.5a^2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

La sustitución trigonométrica, es una técnica que se puede utilizar cuando en el integrando se presentan expresiones como:  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ; siendo

$a > 0$ , analicemos los tres casos:

**PRIMER CASO:**

:  $a^2 - x^2$ : La sustitución es de la forma  $x = a \operatorname{sen}(\theta)$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . La restricción se debe a que en este intervalo, la función mantiene sus condiciones para

serlo como tal. Haciendo el reemplazo  $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)$ , organizando:

$a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = a^2(1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) = a^2 \cos^2(\theta)$ . Como  $a^2 - x^2$  está dentro de una raíz, entonces nos resulta  $a \cos(\theta)$ .

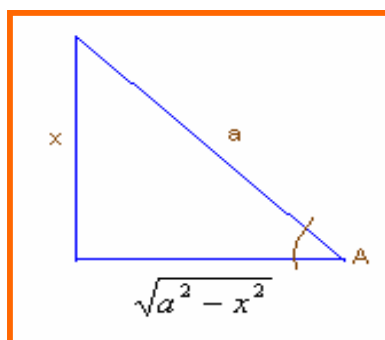


Fig. No. 7 Sustitución trigonométrica caso 1

Pero la expresión final debe expresarse en función de  $x$   
 y no de  $\theta$ , lo que se resuelve usando el siguiente gráfico:

Desarrollemos:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \text{Siendo } x = a \sin(\theta) \text{ entonces:}$$

$$dx = a \cos(\theta) d\theta \quad \text{Haciendo el reemplazo:}$$

$$\int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\theta)} a \cos(\theta) d\theta \text{ esto es equivalente a:}$$

$$\int \sqrt{a^2 (1 - \sin^2(\theta))} a \cos(\theta) d\theta = \int \sqrt{a^2 \cos^2(\theta)} a \cos(\theta) d\theta$$

$$\int a^2 \cos^2(\theta) d\theta = a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta \quad \text{Por la identidad: } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

reemplazamos para poder integrar:

$$a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta = a^2 \int \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{a^2}{2} \int d\theta + \frac{a^2}{2} \int \cos(2\theta) d\theta$$

La última parte si se puede integrar, luego:

$$a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \theta + \frac{a^2}{4} \sin(2\theta) + c$$

Pero la variable original está en función de  $X$  y no de  $\theta$ , luego transformamos a  $\theta$  en  $X$ , la gráfica anterior nos ayuda a hacer dicha transformación.

Por la gráfica:  $\sin(\theta) = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$  Por otro lado, También por la gráfica:

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad \text{Reemplazando:}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \theta + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{a^2}{2} \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} * \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Ejemplo 1:

Desarrollar:  $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

Solución:

Hacemos:  $x = 3\operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dx = 3 \cos \theta d\theta$  Reemplazando:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \int \frac{3 \cos(\theta)}{\sqrt{9 - (3 \cos(\theta))^2}} d\theta = \int \frac{3 \cos(\theta)}{\sqrt{9(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))}} d\theta = \int \frac{3 \cos(\theta)}{3 \sqrt{\cos^2(\theta)}} d\theta$$

Simplificando:  $\int \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta = \int d\theta = \theta + c$  Pero  $\theta$  debemos expresarlo como X,

lo que se hace por medio del cambio que se propuso inicialmente:  
 $x = 3\operatorname{sen}(\theta)$

Despejamos  $\operatorname{sen}(\theta) = \left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow \theta = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$  Finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

### Lección 23: Integrales por sustitución trigonométrica caso II

$a^2 + x^2$  La sustitución es de la forma  $x = a \tan(\theta)$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  El procedimiento es similar al caso anterior, solo que la gráfica cambia:

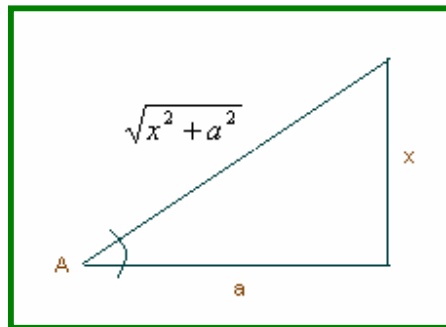


Fig. No. 8 sustitución trigonométrica caso 2

$$\tan(\theta) = \frac{x}{a} \quad \text{Despejando el ángulo:}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ejemplo 2:

Resolver:  $\int \sqrt{16 + x^2} dx$

Solución:

Hacemos el cambio de variable:  $x = 4 \tan(\theta)$  luego:  $dx = 4 \sec^2(\theta) d\theta$  y

reemplazamos:  $\int \sqrt{16 + x^2} dx = \int \sqrt{16 + 4^2 \tan^2(\theta)} * 4 \sec^2(\theta) d\theta$  resolviendo:

$$\int \sqrt{16(1 + \tan^2(\theta))} * 4 \sec^2(\theta) d\theta = \int 4 \sqrt{\sec^2(\theta)} * 4 \sec^2(\theta) d\theta \quad \text{Simplificando:}$$

$16 \int \sec^3(\theta) d\theta$ . Esta integral se puede resolver por la siguiente fórmula.

$$\int \sec^n(u) du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(u) \tan(u) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(u) du$$

Para  $n \neq 1$

Siguiendo con el ejemplo:

$$16 \int \sec^3(\theta) d\theta = 16 \left[ \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \int \sec(\theta) d\theta \right] + c \quad \text{Resolviendo:}$$

$$\left[ 8 \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \int \sec(\theta) d\theta \right] = 8 \sec(\theta) \tan(\theta) + 8 \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + c$$

Debemos transformar el ángulo en la variable x.

$$8 \sec(\theta) \tan(\theta) + 8 \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| = 8 \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} * \frac{x}{4} + 8 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{x}{4} \right| + c$$

$$\text{Resumiendo: } 16 \int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} \right| + c$$

$$\text{Finalmente: } \int \sqrt{16 + x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} \right| + c$$

## Lección 24: Integrales por sustitución trigonométrica caso III

$x^2 - a^2$ : La sustitución es de la forma:  $x = a \sec(\theta)$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Los pasos para desarrollar integrales de este tipo son similares a los casos anteriores.

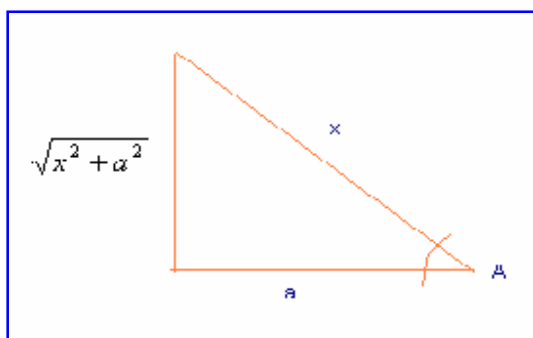


Fig. No. 9 Sustitución trigonométrica caso 3

$$\sec(\theta) = \frac{x}{a} \qquad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ejemplo 3:

Solucionar la integral propuesta:  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$

Solución:

La sustitución:  $x = 2 \sec(\theta) \Rightarrow dx = 2 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$  si reemplazamos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4 \sec^2(\theta) - 4}}{2 \sec(\theta)} 2 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$



Operando:

$$\int \frac{\sqrt{4(\sec^2 - 1)}}{2} 2 \tan(\theta) d\theta = \int 2\sqrt{\tan^2(\theta)} \tan(\theta) d\theta = 2 \int \tan^2(\theta) d\theta = 2 \int (\sec^2(\theta) - 1) d\theta$$

Si aplicamos la linealidad, tenemos:

$$2 \int \sec^2(\theta) d\theta - 2 \int d\theta = 2 \tan(\theta) - 2\theta + c$$

Por la sustitución hecha, reemplazamos el ángulo por x, luego:

Según la gráfica siguiente:

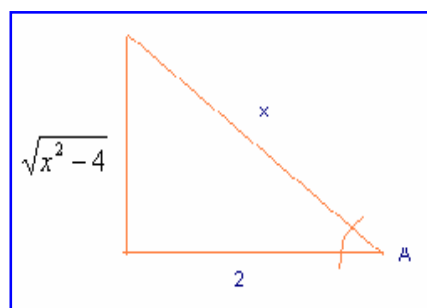


Fig. No. 10 aplicación

$$\sec(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

Si reemplazamos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right) + c$$

El propósito de esta técnica es que cuando se presenten casos de integrales que contengan las formas descritas anteriormente, se utilicen adecuada y correctamente. Esto se adquiere con mucha observación de la integral propuesta y algo de perspicacia. Pero es pertinente que se desarrollen ejercicios sobre el caso para adquirir destreza en la misma.

### EJERCICIOS: Lección No. 4

$$1. \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$$

$$\text{Rta: } 2\text{Ln} \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + \sqrt{4-x^2} + c$$

$$2. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$\text{Rta: } x - \text{Tan}^{-1}(x) + c$$

$$3. \int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Rta: } -2\sqrt{1-x^2} - 3\text{Sen}^{-1}(x) + c$$

$$4. \int \frac{3-x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} - \frac{19}{2}\text{Sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{25}x}{25}\right) + c$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\text{Rta: } \sqrt{3}$$

$$6. \int \frac{2}{x(x^2+16)} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{16} \text{Ln} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \right| + c$$

## Lección 25: Integración por partes.

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

En el mundo matemático, científico y otros, se presentan casos donde la integral es un Producto de Funciones, casos donde se aplica la técnica llamada integración por partes. En muchas ocasiones se ha manifestado que toda regla de derivación da origen a una regla de integración. La integración por partes está relacionada con la regla de la cadena.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}(f(x) * g(x)) = f(x) * \frac{d}{dx}g(x) + g(x) * \frac{d}{dx}f(x) \quad \text{Si integramos las dos ecuaciones:}$$

$$\int \frac{d}{dx}(f(x) * g(x)) = \int \left[ f(x) * \frac{d}{dx}g(x) + g(x) * \frac{d}{dx}f(x) \right] \quad \text{Tenemos:}$$

$$f(x) * g(x) = \int [f'(x) * g(x) + \int g(x) * f'(x)dx] \quad \text{Reorganizando:}$$

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int g(x)f'(x)dx \quad \text{Llamemos a } u = f(x) \text{ y } v = g(x),$$

Si reemplazamos en la ecuación anterior:

$$\int u dv = u.v - \int v du \quad \text{Fórmula para la regla de la cadena.}$$

El éxito de la técnica está en la selección de las función  $u$  y  $v$ , tal que la integral del segundo miembro de la ecuación se pueda integrar fácilmente. La elección debe ser tal que  $u$  se pueda derivar y  $v$  se pueda integrar. Esto se adquiere con la práctica; es decir, haciendo diversos ejercicios, aquí vamos a relacionar algunos modelos que darán las pautas para aplicar esta técnica.

Ejemplo 1:

$$\text{Desarrollar: } \int x \sin(x) dx$$

Solución:

Vemos se presenta un producto, luego se sospecha una integración por partes. Hacemos el cambio de variable.  $u = x$  y  $dv = \text{sen}(x)dx$ , entonces debemos derivar u e integrar v, veamos:  $du = dx$  y  $v = -\cos(x)$

Como ya tenemos todas las partes que necesitamos, reemplazamos en la ecuación:

$$\int u dv = u * v - \int v du = x \text{sen}(x) dx = x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx$$

$$x(-\cos(x)) - \int -\cos(x) dx = -x \cos(x) + \text{sen}(x) + c$$

Finalmente:

$$\int x \text{sen}(x) dx = -x \cos(x) + \text{sen}(x) + c$$

Ejemplo 2:

Resolver:  $\int \text{Ln}(x) dx$

Solución:

Una integral muy conocida, una vez desarrollada podemos asimilarla.

$u = \text{Ln}(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$  Por otro lado:  $dv = dx \Rightarrow v = x$  Si aplicamos la fórmula:

$$\int u dv = u * v - \int v du \Rightarrow x \text{Ln}(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \text{Ln}(x) - x + c$$

Entonces:  $\int \text{Ln}(x) dx = x(\text{Ln}(x) - 1) + c$

Ejemplo 3:

Desarrollar la integral:  $\int x e^x dx$

Solución:

Sea  $u = x \Rightarrow dx = dx$  y  $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$  luego:

$$\int u dv = u * v - \int v du \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx \quad \text{Resolviendo:}$$

$$\int x e^x dx = e^x (x - 1) + c$$

Ejemplo 4:

Resolver:  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \csc^2(x) dx$

Solución:

Elegimos:  $u = x \Rightarrow du = dx$  Por otro lado:  $dv = \csc^2(x) dx \Rightarrow v = -\cot(x)$

Entonces:  $\int x \csc^2(x) dx = -x \cot(x) - \int -\cot(x) dx$  Resolviendo la segunda

integral:  $\int x \csc^2(x) dx = -x \cot(x) + \ln|\sen(x)|$  Ahora evaluemos los límites:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \csc^2(x) dx = \left[ -x \cot(x) + \ln|\sen(x)| \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \quad \text{Desarrollando:}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \csc^2(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi + \ln|2|$$

NOTA: No podemos olvidar que elegir  $u$  debe ser tal que se pueda derivar y  $dv$  tal que se pueda integrar, tengamos esto muy en cuenta.

Fenómeno de Recurrencia: Hay situaciones donde se debe aplicar la integración por partes varias veces. Teniendo en cuenta los principios del método y lo desarrollado sobre integración, se puede resolver cualquier problema de este tipo.

Ejemplo 1:

Desarrollar  $\int x^2 e^x dx$

Solución:

Aplicando la resolución por partes:  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$  y  $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$   
 luego:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

La última integral la resolvemos por el mismo método:

$u = x \Rightarrow du = dx$  y  $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$  Reemplazando de nuevo:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c \quad \text{Reagrupando:}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

El problema exigió aplicar el método dos veces.

Ejemplo 2:

Resolver:  $\int e^x \cos(x) dx$

Solución:

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$  y  $dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x)$  reemplazando:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int \sin(x) e^x dx$$

Debemos integrar esta última expresión:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \quad y \quad dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x) \text{ Reemplazando:}$$

$$\int \sin(x) e^x dx = -\cos(x) e^x - \int -\cos(x) e^x dx = -\cos(x) e^x + \int \cos(x) e^x dx$$

Como esta integral está precedida de un signo negativo, entonces la integral quedaría:

$$\cos(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx. \text{ Agrupando toda la integral, obtenemos:}$$

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int \cos(x) e^x dx \quad \text{La}$$

última integral es similar a la primera, luego las podemos agrupar así:

$$\int e^x \cos(x) dx + \int \cos(x) e^x dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + c$$

Finalmente:

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c$$

### EJERCICIOS:

Resolver las siguientes integrales usando el método de integración por partes, justificar porque se utiliza este método.

1.  $\int x \cos(x) dx$

Rta:  $x \sin(x) + \cos(x) + c$

2.  $\int x^2 \ln(x) dx$

Rta:  $\frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 + c$

3.  $\int x \sec^2(x) dx$

Rta:  $x \tan(x) + \ln|\cos(x)| + c$

4.  $\int_0^2 y \sqrt{y+1} dy$

Rta:  $\frac{48\sqrt{3} - 4}{15}$

5.  $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

Rta:  $2\sqrt{x} \ln(x) - 4\sqrt{x} + c$

6.  $\int x^5 \sqrt{x^3+4} dx$

Rta:  $\frac{2}{3} x^3 (x^3+4)^{3/2} - \frac{4}{45} (x^3+4)^{5/2} + c$

7.  $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$

Rta:  $\frac{\pi}{4}$



## CAPITULO 6: Métodos de integración III

### Introducción

En este capítulo vamos a ver los métodos de integración un poco más complicados debido a los temas a tratar como son las fracciones parciales, la función exponencial, la función logarítmica, la función trigonométrica y la función hiperbólica, sin embargo los temas son tratados con mucho cuidado y con ejercicios muy sencillos fáciles de digerir por el lector. Sin embargo si se presentan dificultades se puede acudir al tutor, se pueden realizar las graficas de cada ejercicio con la ayuda de un graficador (software libre) de los cuales existen páginas web indicadas en la cibergrafía.

La graficacion de los ejercicios facilita y visualiza las cantidades que se están pidiendo, esto y la realización de muchos ejercicios y ejemplos resueltos los prepara con el fin de enfrentar este tipo de problemas.

### Lección 26: Integración por fracciones parciales.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[ \frac{a}{x-\lambda} + \frac{b}{x-\beta} \right] dx$$

En el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, se estudiaron los principios sobre fracciones parciales, se dio el concepto y algunos ejemplos ilustrativos, en este aparte se utiliza esta herramienta para desarrollar un tipo particular de integrales. Profundizaremos un poco sobre las fracciones parciales y luego las llevaremos al mundo de las integrales.

Por un teorema de álgebra avanzada se afirma que toda fracción racional; es decir, el cociente de dos polinomios, se puede descomponer en suma de fracciones racionales más simples. Para desarrollar el método de fracciones parciales, se debe tener en cuenta:

Para la fracción  $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  con  $g(x) \neq 0$  sea una fracción racional propia; es decir,  $f(x)$  debe tener menor grado que  $g(x)$  y por otro lado, que  $g(x)$  se pueda descomponer en factores primos. Teóricamente cualquier polinomio con coeficientes reales se puede escribir como producto de factores lineales reales y / o factores cuadráticos, es posible que obtenerlos no sea tarea fácil.

Veamos a continuación algunos tipos de descomposición en fracciones parciales.

**Descomposición En Factores Lineales Simples:** Cuando  $g(x)$  se puede descomponer fácilmente; digamos por factorización, para obtener factores lineales simples de la forma  $(x - \lambda_1), (x - \lambda_2) \dots$

Ejemplo 1:

Descomponer en fracciones parciales la expresión:  $p(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$

Solución:

El polinomio lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$p(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$$

El trabajo consiste en encontrar los valores de A y B. Veamos cómo se realizaría.

$$\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{Ax - 3A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 3)}$$

Como el denominador es equivalente, entonces se debe igualar los numeradores.

$$3x - 1 = Ax - 3A + Bx + 2B. \text{ Luego hacemos equivalencia entre términos:}$$

$$\text{Para } x: 3 = A + B$$

$$\text{Para términos independientes: } -1 = -3A + 2B$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, que se pueden resolver por los métodos estudiados en el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Resolviendo tenemos que:  $A = 7/5$  y  $B = 8/5$ , reemplazando en las fracciones propuestas obtenemos:

$$p(x) = \frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{7}{5(x+2)} + \frac{8}{5(x-3)}$$

Ejemplo 2:

Descomponer en fracciones parciales  $D(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

Solución:

Factorizando el denominador:

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{(x-2)(x-1)}$$

Expresamos la última fracción como suma e fracciones parciales.

$$\frac{5x-7}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)}$$

Haciendo equivalencia de numeradores:

**Descomposición En Factores Lineales Repetidos:** En algunos casos cuando se busca linealizar el denominador aparece un término lineal al cuadrado, entonces se escribe la suma con dos términos lineales, uno con grado 1 y el otro con grado 2.

$$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax+b}{(x+p)^2} = \frac{A}{(x+\lambda_1)} + \frac{B}{(x+\lambda_1)^2}$$

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 3:

Descomponer en fracciones parciales:  $p(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}$

Solución:

$$\frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

El desarrollo es similar al caso anterior, sumar fracciones e igualar términos:

$$\frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \quad \text{Desarrollando el numerador.}$$

$$\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} \quad \text{Igualamos los numeradores:}$$

$$x-2 = Ax+A+B$$

Para la variable x:  $1 = A$

Para término independiente:  $-2 = A + B$

Desarrollando, obtenemos que  $A = 1$  y  $B = -3$

Entonces:

$$p(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

**Descomposición En Factores Cuadráticos:** Cuando se presentan caso donde el denominador presenta términos cuadráticos que no se pueden reducir, se debe proceder como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4:

Reducir a fracciones parciales:  $\frac{4x+3}{(x^2+1)(x-1)}$

Solución:

La expresión la podemos escribir como:

$$\frac{4x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

Observemos que como el denominador tiene término cuadrático, el numerador debe tener término lineal, entonces:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Como en los casos anteriores, el denominador es similar, luego solo igualamos el numerador:

Para la variable  $x^2$ :  $0 = A + B$

Para la variable  $x$ :  $4 = -B + C$

Para el término independiente:  $3 = a - C$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas, existen varios métodos de resolución, aplique la que desee y debes llegar a :

$$A = 7/3$$

$$B = -7/3$$

$$C = 1/2$$

Reemplazamos en la fracción original:

$$\frac{4x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{7}{3(x-1)} + \frac{-7/3x + 1/2}{x^2+1} \quad \text{Simplificando:}$$

$$\frac{4x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{7}{3(x-1)} + \frac{3-14x}{6(x^2+1)}$$

Como en el caso de los factores lineales, en los cuadráticos, también se pueden encontrar factores repetidos, en este caso el procedimiento es similar a los casos anteriores, veamos un ejemplo.

Ejemplo 5:

Expresar como fracciones lineales:  $\frac{6x^2 - 15x + 12}{(x+3)(x^2+2)^2}$

Solución:

El planteamiento es así:

$$\frac{6x^2 - 15x + 12}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+c}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Realice todo el procedimiento como se ha venido haciendo y debe obtener:

$$A = 1, B = -1, C = 3, D = 5, E = 0$$

Finalmente:

$$\frac{6x^2 - 15x + 12}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+c}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{x+3} + \frac{-x+3}{x^2+2} + \frac{5x}{(x^2+2)^2}$$

Podemos resumir esta temática, diciendo afirmando que las fracciones parciales, es un método algebraico que permite describir expresiones racionales, como fracciones racionales sencillas, de tal forma que permite hacer integraciones para este tipo de expresiones algebraicas.

#### INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES:

Sabiendo como se resuelven las fracciones parciales, ahora apliquémosla para desarrollar integrales:

Ejemplo 1:

Desarrollar:  $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$

Solución:

Debemos tratar de linealizar el numerador, por medio de la factorización: Del ejemplo 1 de fracciones lineales simples, vemos que esta fracción se puede escribir así:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} dx = \int \left( \frac{7}{5(x+2)} + \frac{8}{5(x-3)} \right) dx$$

Aplicando la propiedad de la suma de integrales, podemos hacer:

$$\int \left( \frac{7}{5(x+2)} + \frac{8}{5(x-3)} \right) dx = \int \frac{7}{5(x+2)} dx + \int \frac{8}{5(x-3)} dx = \frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx$$

Desarrollando:

$$\frac{7}{5} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{8}{5} \int \frac{1}{x-3} dx = \frac{7}{5} \ln|x+2| + \frac{8}{5} \ln|x-3| + c$$

Ejemplo 2:

Desarrollar:  $\int \frac{x-2}{(x+1)^2} dx$  para  $x \neq -1$

Solución:

Debemos aplicar fracciones parciales a la fracción dada, en el ejemplo 3 de la descomposición de fracciones parciales, obtuvimos que:

$$\frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{(x-1)^2}$$

Luego a partir de esto podemos aplicar la integral:

$$\int \frac{x-2}{(x+1)^2} dx = \int \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} \right] dx \quad \text{Operando:}$$

$$\int \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} \right] dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{3}{(x-1)^2} dx$$

La primera integral es inmediata, la segunda se puede resolver por cambio de variable, veamos:

$$\int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 3 \int (x-1)^{-2} dx \quad \text{Definimos } u = x - 1 \text{ luego } du = dx, \text{ reemplazando:}$$

$$\int u^{-2} du = \frac{-1}{u} + c \quad \text{Agrupando los términos:}$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| - 3 \left( -\frac{1}{u} \right) = \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + c$$

Finalmente:

$$\int \frac{x-2}{(x+1)^2} dx = \ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + c$$

Como se puede ver en los ejemplos expuestos, la transformación de la expresión racional en fracciones más simples, es con el fin de llevar la función a una forma de integración inmediata. Una vez integrada se hace el cambio de la variable de sustitución a la variable original.

Ejemplo 3:

Integrar la función:  $\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

Solución:

Como se trata de una fracción impropia, primero se debe hacer la división, para obtener una fracción propia y así aplicar el método analizado.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{(x-3)(x+1)} \quad \text{Ahora:}$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \int \left[ 2x + \frac{5x - 3}{(x-3)(x+1)} \right] dx$$



Separando las integrales:

$$\int \left[ 2x + \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} \right] dx = \int 2x dx + \int \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} dx$$

La primera integral es directa, la segunda debemos hacer fracciones parciales, veamos:

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Desarrollando, tenemos que  $A = 3$  y  $B = 2$ . Favor corroborar este resultado:

Entonces:

$$\int \left[ \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right] dx = \int \left[ 2x + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right] dx \quad \text{Aplicando la linealidad:}$$

$$\int 2x dx + \int \frac{3}{x-3} dx + \int \frac{2}{x+1} dx = x^2 + 3Ln|x-3| + 2Ln|x+1| + c \quad \text{Reorganizando:}$$

$$\int \left[ \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right] dx = x^2 + Ln[(x-3)^3(x+1)^2] + c$$

### EJERCICIOS:

En cada caso, resolver la integral aplicando las fracciones parciales.

1.  $\int \frac{3}{4x-1} dx$

Rta:  $\frac{3}{4} Ln|4x-1| + c$

2.  $\int \frac{x-5}{x^2-1} dx$

Rta:  $3Ln|x+1| - 2Ln|x-1| + c$

3.  $\int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx$

Rta:  $\frac{1}{5} Ln|x+2| + \frac{4}{5} Ln|x-3| + c$

$$4. \int \frac{3}{(8x-1)^2} dx$$

$$\text{Rta: } -\frac{3}{64x-8} + c$$

$$5. \int \frac{5x+9}{8x^2+2x+4} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{5}{16} \ln|4x^2+x+2| + \frac{67\sqrt{31}}{248} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{31}}{31}(8x+1)\right) + c$$

$$6. \int \frac{17x-3}{3x^2+x-2} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{5}{3} \ln|3x-2| + 4 \ln|x+1| + c$$

$$7. \int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + c$$

## Lección 27: Integración de función exponencial.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Toda función exponencial tiene una base  $a > 0$  y diferente de uno.

Función:  $y = a^x$

Para definir la integral de este tipo de función, podemos partir de la derivada y proceder a obtener la integral, veamos:

$y = a^x$  Entonces:  $\frac{dy}{dx} = a^x \ln(a)$  para  $a \neq 1$ . Para resolver la integral, hacer

una transformación de la siguiente manera:  $a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x \ln(a)}$   
 Aplicando la integral:

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln(a)} dx \quad \text{Multiplicamos y dividimos por } \frac{1}{\ln(a)} \text{ tenemos:}$$

$$\frac{1}{\ln(a)} \int e^{x \ln(a)} \ln(a) dx \quad \text{Hacemos cambio de variable: } u = x \ln(a) \Rightarrow du = \ln(a) dx$$

$$\frac{1}{\ln(a)} \int e^u du = \frac{1}{\ln(a)} e^u = \frac{1}{\ln(a)} e^{x \ln(a)} + c \quad \text{Pero } e^{x \ln(a)} = a^x,$$

luego hacemos el reemplazo para obtener:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

Ejemplo 1:

Desarrollar:  $\int 2^x dx$

Solución:

Según la fórmula obtenida la integración será de la siguiente manera:

$$\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + c$$

Ejemplo 2:

Resolver  $\int 3^{2x} dx$

Solución:

Para facilitar el proceso hagamos un cambio de variable  $u = 2x$  luego  $du = 2dx$  reemplazando:

$$\int 3^{2x} dx = \int 3^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int 3^u du = \frac{1}{2} * \frac{1}{\ln(3)} 3^u$$

Reemplazando la

variable  $u$  por  $2x$  obtenemos:

$$\int 3^{2x} dx = \frac{1}{2\ln(3)} 3^{2x} + c$$

Ejemplo 3:

Resolver  $\int_0^1 4^{3x} dx$

Solución:

Siguiendo el procedimiento anterior podemos hallar dicha integral, solo que aquí debemos evaluarla.

$$\int_0^1 4^{3x} dx \quad \text{Como } u = 3x, \text{ entonces: } \int_0^1 4^{3x} dx = \int 4^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} * \frac{1}{\ln(4)} 4^u$$

Reemplacemos la variable:  $\frac{1}{3} * \frac{1}{\ln(4)} 4^{3x} = \frac{1}{3 \ln(4)} 4^{3x} \Big|_0^1$  Evaluando:

$$\int_0^1 4^{3x} dx = \frac{4^3}{3 \ln(4)} - \frac{4^0}{3 \ln(4)} = \frac{63}{3 \ln(4)}$$

**Función:**  $y = e^x$

La función exponencial natural tiene como base el número de Euler, para determinar su integral, realizamos el mismo procedimiento que el caso anterior.

$$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow dy = e^x dx \quad \text{Aplicamos la integral a ambos lados:}$$

$$\int dy = \int e^x dx \Rightarrow y = e^x + c \quad \text{Por consiguiente: } \int e^x dx = e^x + c$$

Ejemplo 1:

Hallar la integral de  $e^{3x}$

Solución:

Haciendo cambio de variable  $u = 3x$ , luego  $du = 3dx$ , reemplazando:

$$\int e^{3x} dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c \quad \text{Finalmente reemplazamos } u \text{ por } 3x.$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

Ejemplo 2:

Desarrollar:  $\int e^{3x+1} dx$

Solución:

Definimos  $u = 3x + 1$ , luego  $du = 3dx$ , entonces:

$$\int e^{3x+1} dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c$$
 Reemplazando  $u$  por  $3x + 1$  obtenemos:

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} e^{3x+1} + c$$

## Lección 28: Integración de función logarítmica.

Al igual que en la función exponencial, las funciones logarítmicas tienen su derivada. Es pertinente recordar las propiedades de este tipo de funciones.

**Función:**  $y = \ln(x)$

La integral de esta función se puede hacer por partes.

$\int \ln(x) dx$  donde  $u = \ln(x)$ , luego  $du = dx / x$ .

Por otro lado:  $dv = dx$ , luego  $v = x$

Reemplazando:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx + c$$

Finalmente:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$$

**Función:**  $y = \log_{10}(x)$

Para resolver este tipo de integral, aplicamos la conversión de cualquier logaritmo en logaritmo natural, lo cual se hace de la siguiente manera:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \quad \text{Así, podemos desarrollar la integral.}$$

$$\int \log_{10}(x) dx = \int \frac{\ln(x)}{\ln(10)} dx = \frac{1}{\ln(10)} \int \ln(x) dx \quad \text{La última integral, ya se desarrolló por partes, luego:}$$

$$\int \log_{10}(x) dx = \frac{1}{\ln(10)} [x \ln(x) - x] + c$$

Una forma alternativa para esta integral es:

$$\int \log_{10}(x) dx = x \log_{10}(x) - x \log_{10} e + c$$

Intente demostrar la última igualdad, será muy interesante.

Si la base del logaritmo es cualquier  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , la integral es de la misma manera, solo cambia la base.

Ejemplo 1:

Resolver:  $\int \frac{\log_2(x)}{x} dx$

Solución:

Primero hacemos la transformación a logaritmo natural y luego hacemos una sustitución para poder integrar, veamos:

$$\int \frac{\text{Log}_2(x)}{x} dx = \int \frac{\text{Log}_2(x)}{x \text{Ln}(2)} dx = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \int \frac{\text{Ln}(x)}{x} dx \quad \text{para } x > 0$$

Por sustitución:  $u = \text{Ln}(x)$ ,  $du = (1/x)dx$  Si reemplazamos:

$$\frac{1}{\text{Ln}(2)} \int \frac{\text{Ln}(x)}{x} dx = \frac{1}{\text{Ln}(2)} \int u du = \frac{1}{\text{Ln}(2)} * \frac{1}{2} u^2 + c \quad \text{Reemplazamos u por}$$

$\text{Ln}(x)$ , para obtener:

$$\int \frac{\text{Log}_2(x)}{x} dx = \frac{\text{Ln}^2(x)}{2\text{Ln}(2)} + c$$

Ejemplo 2:

Desarrollar:  $\int_1^4 \frac{\text{Ln}(2)\text{Log}_2(x)}{x} dx$

Solución:

$$\int_1^4 \frac{\text{Ln}(2)\text{Log}_2(x)}{x} dx = \text{Ln}(2) \int_1^4 \frac{\text{Log}_2(x)}{x} dx \quad \text{Esta integral se desarrolló en el ejemplo}$$

anterior, luego:

$$\text{Ln}(2) \int \frac{\text{Log}_2(x)}{x} dx = \text{Ln}(2) * \left. \frac{\text{Ln}^2(x)}{2\text{Ln}(2)} \right|_1^4 = \left. \frac{\text{Ln}^2(x)}{2} \right|_1^4 = \frac{\text{Ln}^2(4)}{2} - \frac{\text{Ln}^2(1)}{2} = \frac{\text{Ln}^2(4)}{2}$$

Ejercicios:

Resolver las siguientes integrales, desarrollando paso por paso, para justificar la respuesta obtenida.

1.  $\int e^{3x+1} dx$

Rta:  $\frac{1}{3} e^{3x+1} + c$



$$2. \int x(2^{x^2}) dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{\ln(2)} 2^{x^2-1} + c$$

$$3. \int (e^{x/2} + 2e^{-x/2})^2 dx$$

$$\text{Rta: } 4x + e^x - 4e^{-x} + c$$

$$4. \int \frac{(\ln(x) + 1)^2}{x} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{3} (\ln(x) + 1)^3 + c$$

$$5. \int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$$

$$\text{Rta: } \frac{1}{3} \ln^3(x) + c$$

### Lección 29: Integración de la función trigonométrica

$$\int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + c$$

Dentro de las funciones trascendentales tenemos las funciones trigonométricas, las cuales también tienen integrales, analizaremos a continuación las integrales de dichas funciones.

**Función:**  $y = \sin(x)$

La integral de la función  $\sin(x)$  la desarrollamos por el concepto de antiderivada, pero es pertinente relacionarla en este momento, ya que estamos analizando la integral de las funciones trigonométricas.

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \cos(nx) + c$$

Demostración:

Tomemos:  $\int \sin(nx)dx$  y hacemos una sustitución:  $u = nx$ ,  $du = ndx$ , luego:

$$\int \sin(nx)dx = \int \sin(u) \frac{du}{n} = \frac{1}{n} \int \sin(u)du \quad \text{La función cuya derivada es } \sin(u), \text{ es el}$$

$$-\cos(u), \text{ por consiguiente: } \int \sin(nx)dx = \frac{1}{n}(-\cos(x)) + c = -\frac{1}{n}\cos(x) + c$$

**Función:**  $y = \cos(x)$

La integral de  $\cos(x)$ , también se desarrolló por el concepto de antiderivada.

$$\int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}\sin(nx) + c$$

Demostración:

Tomemos:  $\int \cos(nx)dx$  y hacemos una sustitución:  $u = nx$ ,  $du = ndx$ , luego:

$$\int \cos(nx)dx = \int \cos(u) \frac{du}{n} = \frac{1}{n} \int \cos(u)du \quad \text{La función cuya derivada es } \cos(u), \text{ es el}$$

$$\sin(u), \text{ luego: } \int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}\sin(nx) + c$$

**Función:**  $y = \tan(x)$

Con los conocimientos sobre identidades trigonométricas y la integración por cambio de variable, podemos hallar la integral de la tangente, veamos:

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

Demostración:

Descomponemos la tangente en su equivalencia con seno y coseno, así:

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \quad \text{Sea } u = \cos(x), \text{ luego } du = -\sin(x)dx, \text{ reemplazando:}$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + c \quad \text{Reemplazando el valor de } u, \text{ obtenemos:}$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

**Funciones:**  $y = \cot(x)$   $y = \sec(x)$   $y = \csc(x)$

Con los conocimientos adquiridos, se pueden obtener las siguientes integrales.

$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + c$$

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x)| + \tan(x) + c$$

$$\int \csc(x) dx = \ln|\csc(x)| - \cot(x) + c$$

Demostración:

Vamos a demostrar la integral de  $\sec(x)$  y las demás se dejan como ejercicio para que lo resuelvan en el pequeño grupo colaborativo y luego lo compartan con el docente.

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) * \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx$$

$$\text{Por sustitución: } u = \sec(x) + \tan(x) \Rightarrow du = (\sec(x) \tan(x) + \sec^2(x)) dx$$

Reemplazando:

$$\int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Como  $u = \sec(x) + \tan(x)$ , reemplazamos para obtener finalmente:

$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c$$

Para la  $\csc(x)$  la demostración es similar.

**Funciones tipo:**  $y = \sec^n(x)$   $y = \csc^n(x)$

Para resolver integrales de este tipo, “echamos mano” de las identidades trigonométricas, las potencias y las técnicas de integración estudiadas. Algunos ejemplos nos ayudarán a comprender la metodología.

Ejemplo 1:

Resolver:  $\int \sec^2(x) dx$

Solución:

Por la identidad:  $\sec^2(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{1}$  Reemplazamos

$$\int \sec^2(x) dx = \int \left( \frac{1 + \tan^2(x)}{1} \right) dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx$$

Por la propiedad de la linealidad:

$$\frac{1}{1} \int dx + \frac{1}{1} \int \tan^2(x) dx = \frac{1}{1} x - \frac{1}{1} \left( \frac{1}{2} \tan(2x) \right) + c \quad \text{Finalmente:}$$

$$\int \sec^2(x) dx = \frac{1}{1} x - \frac{1}{2} \tan(2x) + c$$

Ejemplo 2:

Resolver la siguiente integral:  $\int \cos^4(x) dx$

Solución:

Podemos expresar  $\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))$

Aplicándole la integral:

$$\int \cos^4(x) dx = \int \left[ \frac{1}{4} (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \right] dx =$$

$$\int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx \quad \text{Desarrollando obtenemos:}$$

$$\frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx$$

Para resolver la última integral, utilizamos la identidad siguiente:

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2} \quad \text{luego:}$$

$$\frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x)) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx = \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin(4x) + c \quad \text{Reagrupando los resultados:}$$

$$\frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin(4x) + c \quad \text{Operando términos semejante:}$$

$$\frac{1}{4} x + \frac{1}{8} x = \frac{3}{8} x \quad \text{Finalmente:}$$

$$\int \cos^4(x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + c$$

**Funciones tipo:**  $y = \text{sen}^m(x) \cos^n(x)$

Siendo m y n par. Cuando m y n son pares positivos, usamos las identidades de ángulo mitad, para reducir el grado del integrado.

Recordemos:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad y \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ejemplo 1:

Resolver:  $\int \text{sen}^2(x) \cos^2(x) dx$

Solución:

Aplicando la identidad que se referencia

$$\int \text{sen}^2(x) \cos^2(x) dx = \int \left[ \frac{1 - \cos(2x)}{2} * \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right] dx \quad \text{Desarrollando:}$$

$$\int \frac{1}{4} (1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx$$

$$\text{Por la identidad referenciada anteriormente: } \cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$$

Reemplazamos:

$$\frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \left[ \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right] dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x)) dx$$

Resolviendo la última integral, obtenemos:

$$\frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x)) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \text{sen}(4x) + c$$

$$\text{Simplificando términos semejantes: } \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x = \frac{1}{8} x$$

Finalmente:

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

Ejemplo 2:

Utilizando los argumentos que se han trabajado, mostrar que:

$$\int \sin^2(x) \cos^4(x) dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c$$

Trabájelo con el pequeño grupo colaborativo y luego compártalo con el docente para identificar posibles fallas.

Sugerencia:  $\cos^4(x) = \left[ \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^2 \dots$  Lo demás es como se ha venido trabajando.

**Funciones tipo:**  $y = \sin^m(x) \cos^n(x)$

Siendo m ó n par. Para el caso donde m o n es un entero par y el otro cualquier valor, se utiliza la factorización con la identidad fundamental.

Ejemplo 1:

Desarrollar la integral dada:

$$\int \cos^4(x) \sin^3(x) dx$$

Solución:

Descomponemos el integrando así:  $\int \cos^4(x) (1 - \cos^2) \sin(x) dx$

Por cambio de variable:  $u = \cos(x)$  luego  $du = -\sin(x)dx$ , entonces:

$$\int \cos^4(x) (1 - \cos^2) \sin(x) dx = \int u^4 (1 - u^2) (-du) = - \int (u^4 - u^6) du$$

Operando la integral:

$$-\int (u^4 - u^6) du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c \quad \text{Reemplazando la variable:}$$

$$\int \cos^4(x) \sin^3(x) dx = \frac{1}{7} \cos^7(x) - \frac{1}{5} \cos^5(x) + c$$

Ejemplo 2:

$$\text{Mostrar que } \int \cos^4(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{5} \cos^5(x) + c$$

Solución:

Por cambio de variable  $u = \cos(x)$ , luego  $du = -\sin(x)dx$ , entonces:

$$\int \cos^4(x) \sin(x) dx = \int u^4 (-du) = -\int u^4 du$$

Operando la integral, tenemos:

$$-\int u^4 du = -\frac{1}{5}u^5 + c$$

Reemplazando la equivalencia de  $u$  por  $\cos(x)$ , tenemos:

$$\int \cos^4(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{5} \cos^5(x) + c \quad \text{Así queda demostrada esta integral.}$$

**Funciones tipo:**  $\sin(mx)\cos(nx)dx$   $\sin(mx)\sin(nx)dx$   $\cos(mx)\cos(nx)dx$

Para resolver este tipo de integrales, muy utilizadas en las áreas de ingeniería eléctrica, química, de alimentos y otras, se utilizan identidades trigonométricas que permiten resolver integrales de este tipo.



Las identidades que resuelven el problema son:

$$1. \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$$

$$2. \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) = -\frac{1}{2} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

$$3. \cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Algunos ejemplos modelos nos ilustrarán el proceso.

Ejemplo 1:

Resolver:  $\int \operatorname{sen}(4x) \cos(5x) dx$

Solución:

Utilizando la primera identidad tenemos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(4x) \cos(5x) dx &= -\frac{1}{2} \int (\operatorname{sen}(4+5)x + \operatorname{sen}(4-5)x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\operatorname{sen}(9x) + \operatorname{sen}(-x)) dx \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(9x) - \operatorname{sen}(x)] dx &= -\frac{1}{2} \left[ \int \operatorname{sen}(9x) dx - \int \operatorname{sen}(x) dx \right] \\ -\frac{1}{2} \left[ \int \operatorname{sen}(9x) dx - \int \operatorname{sen}(x) dx \right] &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(9x) dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(x) dx \\ -\frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(9x) dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(x) dx &= -\frac{1}{18} \cos(9x) + \frac{1}{2} \cos(x) + c \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\int \sin(4x) \cos(5x) dx = \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{18} \cos(9x) + c$$

Ejemplo 2:

Resolver:  $\int \cos(x) \cos(4x) dx$

Solución:

Aplicando la identidad 3 de las vistas atrás podemos resolver dicha integral.

$$\int \cos(x) \cos(4x) dx = \frac{1}{2} \int [\cos(1+4)x + \cos(1-4)x] dx$$

$$\frac{1}{2} \int [\cos(1+4)x + \cos(1-4)x] dx = \frac{1}{2} \int [\cos(5x) + \cos(-3x)] dx$$

$$\frac{1}{2} \int [\cos(5x) + \cos(-3x)] dx = \frac{1}{2} \int \cos(5x) dx + \frac{1}{2} \int \cos(3x) dx$$

$$\frac{1}{2} \int \cos(5x) dx + \frac{1}{2} \int \cos(3x) dx = \frac{1}{10} \sin(5x) + \frac{1}{6} \sin(3x) + c$$

Finalmente:

$$\int \cos(x) \cos(4x) dx = \frac{1}{10} \sin(5x) + \frac{1}{6} \sin(3x) + c$$

Ejercicios:

Desarrollar los siguientes ejercicios, identificando con qué principio se está trabajando, para su solución.

1.  $\int \sin^4(x) \cos(x) dx$

Rta:  $\frac{1}{5} \sin^5(x) + c$

2.  $\int \cos^2(x) \sin^2(x) dx$

Rta:  $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4x) + c$

3.  $\int \sin^5(4x) \cos^2(4x) dx$

Rta:  $-\frac{1}{12} \cos^3(4x) + \frac{1}{10} \cos^5(4x) - \frac{1}{28} \cos^7(4x) + c$

4.  $\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Rta:  $\frac{1}{16} x - \frac{1}{32} \sin(2x) - \frac{1}{24} \sin^3(x) + c$

5.  $\int \cos(2x) \cos(x) dx$

Rta:  $\frac{2}{3} \sin(2x) \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x) \sin(x) + c$

6.  $\int \cos(x) \ln(\sin(x)) dx$

Rta:  $\sin(x) \ln(\sin(x)) - \sin(x) + c$

### Lección 30: Integración de la función hiperbólica.

En cursos anteriores se ha analizado las funciones hiperbólicas y sus derivadas, en este aparte se estudiarán las integrales de dichas funciones.

Función  $\sinh(x)$ : Recordemos que el seno hiperbólico es de la forma:

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  y su derivada es el  $\cosh(x)$ , lo que está plenamente demostrado

Entonces para obtener la integral de  $\cosh(x)$ , utilizamos el principio de la primitiva.

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$$

Demostración:

Por el principio de la antiderivada, sabemos que la función cuya derivada es el  $\sinh(x)$  corresponde al  $\cosh(x)$ , así se justifica la integral del  $\sinh(x)$ .

Función  $\cosh(x)$ : El coseno hiperbólico es de la forma  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  y su derivada es  $\sinh(x)$ , luego:

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$$

Demostración:

Se deja como ejercicio para que el estudiante con los principios aprendidos lo demuestre y por supuesto lo comparta con sus compañeros y su tutor.

Función  $\tanh(x)$ : Por definición sabemos que:  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ .

$$\int \tanh(x) dx = \ln|\cosh(x)| + c$$

Demostración:

Aplicémosle la identidad a la integral, entonces:  $\int \tanh(x) dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx$

hacemos cambio de variable:

$u = \cosh(x)$  y  $du = \sinh(x)dx$ , reemplazando:

$$\int \tanh(x)dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \quad \text{Reemplazando el valor de } u$$

tenemos:

$$\int \tanh(x)dx = \ln|\cosh(x)| + c$$

Función  $\coth(x)$ : De la misma manera que la tangente hiperbólica, la cotangente hiperbólica tiene su equivalencia:  $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$  donde:

$$\int \coth(x)dx = \ln|\sinh(x)| + c$$

Demostración:

Se deja como ejercicio para hacer en el pequeño grupo colaborativo.

Función  $\operatorname{sech}(x)$  y  $\operatorname{csch}(x)$ : Al igual que las funciones hiperbólicas anteriores, estas últimas funciones, también tiene su integral. La demostración se recomienda trabajarla con el tutor, para afianzar los conocimientos sobre este tipo de funciones.

$$\int \operatorname{sech}(x)dx = \tan^{-1}|\sinh(x)| + c$$

$$\int \operatorname{csch}(x)dx = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

Ejemplo 1:

Resolver:  $\int \cosh(6x)dx$

Solución:

Hacemos cambio de variable  $u = 6x$ ,  $du = 6dx$ , entonces reemplazamos:

$$\int \cosh(6x) dx = \int \cosh(u) \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \int \cosh(u) du = \frac{1}{6} \sinh(u) + c$$

Como  $u = 6x$ , reemplazamos a  $u$  por  $6x$ , para dejar la integral en función de  $x$  y no de  $u$ .

$$\int \cosh(6x) dx = \frac{1}{6} \sinh(6x) + c$$

Ejemplo 2:

Desarrollar:  $\int \tanh(3x) dx$

Solución:

Como en el caso anterior, hacemos cambio de variable  $u = 3x$ ,  $du = 3dx$ , entonces:

$$\int \tanh(3x) dx = \int \tanh(u) \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \tanh(u) du = \frac{1}{3} \ln|\cosh(u)| + c$$

reemplazando el valor de  $u$  por  $3x$ , obtenemos:

$$\int \tanh(3x) dx = \frac{1}{3} \ln|\cosh(3x)| + c$$

Ejemplo 3:

Resolver:  $\int \sinh^2(x) dx$

Solución:

Para resolver esta integral, primero debemos aplicar la identidad que dice:

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \quad \text{Luego:}$$

$$\int \sinh^2(x) dx = \int \left( \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \right) dx \quad \text{Desarrollando tenemos:}$$

$$\int \left( \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (\cosh(2x) - 1) dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) dx - \frac{1}{2} \int dx$$

Operando tenemos:

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} \sinh(2x) - \frac{1}{2} x + c \quad \text{Resumiendo: } \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2} x + c$$

Finalmente:

$$\int \sinh^2(x) dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2} x + c$$

Ejercicios:

$$1. \int \tanh\left(\frac{x}{7}\right) dx \quad \text{Rta: } 7 \ln \left| e^{x/7} + e^{-x/7} \right| + c$$

$$2. \int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{Rta: } -2 \operatorname{sech} \sqrt{t} + c$$

$$3. \int \sinh(1 - 2x) dx \quad \text{Rta: } -\frac{1}{2} \cosh(1 - 2x) + c$$

$$4. \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} dx \quad \text{Rta: } \ln |\sinh(x)| + c$$

$$5. \int x \cosh(\pi x^2 + 5) dx \quad \text{Rta: } \frac{1}{2\pi} \sinh(\pi x^2 + 5) + c$$

$$6. \int \cos(x) \sinh(\sin(x)) dx \quad \text{Rta: } \cosh(\sin(x)) + c$$

## ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD

### PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

A continuación, usted encontrará preguntas que se desarrollan en torno a un enunciado, problema o contexto, frente al cual, usted debe seleccionar aquella que responde correctamente a la pregunta planteada entre cuatro opciones identificadas con las letras **A, B, C, D**. Una vez la seleccione, márquela en su hoja de respuestas rellenando el óvalo correspondiente.

1. Al resolver las siguientes integrales  $\int 2^x dx$  y  $\int \sec^2(x) dx$ , se obtiene:

A.  $\frac{2^x}{\ln(2)} + c$

B.  $\operatorname{Tg}(x) + c$

C.  $\frac{2x}{\ln(2)} + c$

D.  $\operatorname{Sen}(x) + c$

2. Cuando se desarrolla la expresión  $\int \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx$ , se obtiene:

A.  $x - \ln[\operatorname{sen}(x)] + c$

B.  $2 + \ln[\cos(x)] + c$

C.  $1 + \ln[\cos(x)] + c$

D.  $2 - \ln[\operatorname{sen}(x)] + c$



3. Si se desea resolver la integral de la función  $\sqrt{b^2 - x^2}$  la sustitución mas adecuada es:

A.  $x = b \operatorname{sen}(x)$

B.  $x = b \operatorname{Tg}(x)$

C.  $x = b \sec(x)$

D.  $x = b \cos(x)$

4. El valor de la integral  $\int \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + x)(x - 1)} dx$  ,es:

A.  $\operatorname{Ln}(x - 1) + k$

B.  $\operatorname{Ln}(x + 1)^2 + k$

C.  $\operatorname{Ln}(x^2 + 1) + k$

D.  $\operatorname{Ln}(x) + k$

5. El procedimiento para solucionar la integral  $\int \frac{(x^3 + 3x^2 - 18x)}{(x - 3)(x + 6)} dx$  ,es:

A. Sustitución trigonométrica

B. Por partes

C. Simplificación

D. Racionalización



## HOJA DE RESPUESTAS.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				

## LABORATORIO

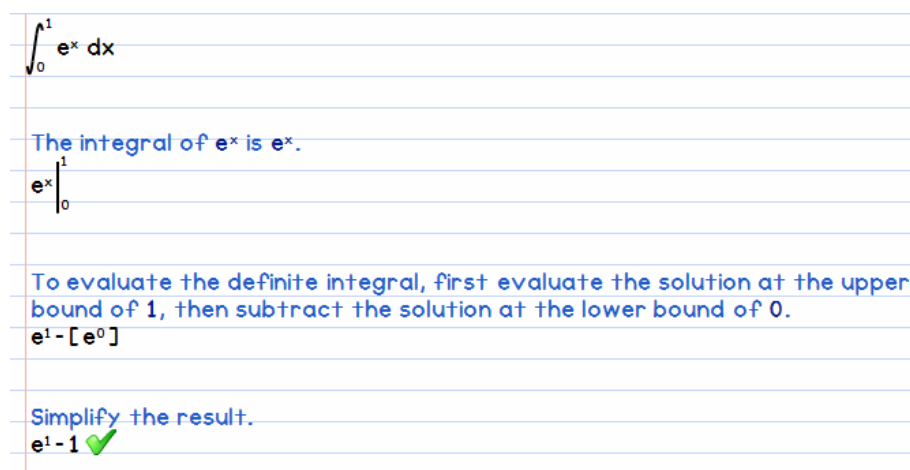
Comprobar las respuestas a las ejercicios planteados, con el software **SOLVED** o con el software **WINPLOT** el cual es libre, de fácil manejo y se puede bajar del link

<http://winplot.softonic.com/>

**Ejemplo No. 1** Solucionar la integral  $\int_0^1 \frac{e^x}{\pi+3} dx$

Entonces: 
$$\int_0^1 \frac{e^x}{\pi+3} dx = \frac{1}{\pi+3} \int_0^1 e^x dx = \frac{e^x}{\pi+3} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{\pi+3}$$

Con SOLVED debemos realizarle una ayuda a la integral, así:



The screenshot shows the SOLVED software interface with the following steps:

- Input the integral:  $\int_0^1 e^x dx$
- Text: "The integral of  $e^x$  is  $e^x$ ."
- Input the limits:  $e^x \Big|_0^1$
- Text: "To evaluate the definite integral, first evaluate the solution at the upper bound of 1, then subtract the solution at the lower bound of 0."
- Input the result:  $e^1 - [e^0]$
- Text: "Simplify the result."
- Final result:  $e^1 - 1$  with a green checkmark.

Para llegar a la solución correcta debemos agregarle el divisor que es una constante.

**Ejemplo No. 2** Hallar el área comprendida entre las curvas  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -\sqrt{x}$  y  $x = 4$

Solución manual:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^4 [x - (-\sqrt{x})] dx = \int_0^4 (x + \sqrt{x}) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{1.5}}{3} \right]_0^4 = \left[ \left( 8 + \frac{16}{3} \right) - \left( 0 + \frac{2(0)^{1.5}}{3} \right) \right] = \frac{8}{3}$$

**Solución con SOLVED:**

$\int_0^4 (x - \sqrt{x}) dx$

Remove the parentheses around the expression  $x - \sqrt{x}$ .

$\int_0^4 x - \sqrt{x} dx$

The integral of a sum of expressions is equal to the sum of the integrals of each expression.

$\int_0^4 x dx - \int_0^4 \sqrt{x} dx$

To find the integral of  $x$ , find the anti-derivative. The formula for the anti-derivative of a basic monomial is  $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} dx$ .

$\frac{x^2}{2}$

To find the integral of  $-\sqrt{x}$ , find the anti-derivative. The formula for the anti-derivative of a basic monomial is  $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} dx$ .

$-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

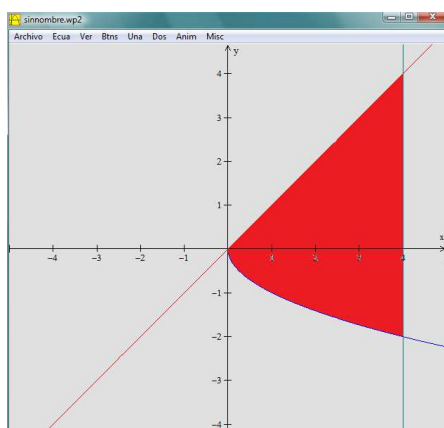
To evaluate the definite integral, first evaluate the solution at the upper bound of 4, then subtract the solution at the lower bound of 0.

$$\frac{(4)^2}{2} - \frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3} - \left[ \frac{(0)^2}{2} - \frac{2(0)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]$$

Simplify the result.

$$\frac{8}{3}$$

La respuesta obtenida es igual. Grafico realizado con **WINPLOT**



**Ejercicios propuestos:** Recuerde simplificar las integrales antes de ingresarlas al software.

Resolver:

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{5}} \operatorname{tg}(9x) \cos(9x) dx$$

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x + 3} dx$$

- Hallar el área bajo la curva indicada en color rojo.

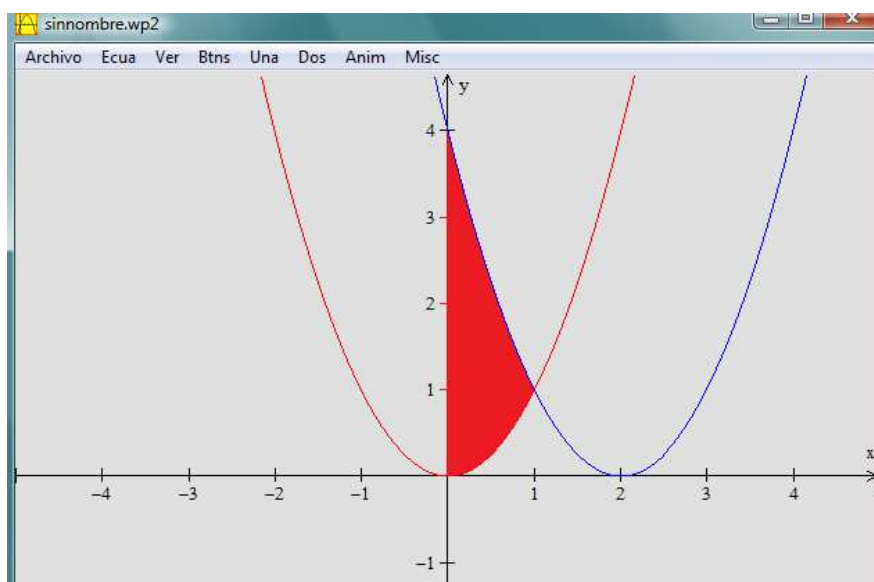


Grafico realizado con **WINPLOT**.

- $\int \cos x \sqrt{\sin x} dx$
- $\int \frac{16-9x^2}{3x-4} dx$
- $\int x^3 e^{x^2} dx$
- El área comprendida entre las líneas  $L_1$  que pasa por los puntos  $A_1 = (4, -4)$  y  $A_2 = (0, 4)$ ,  $L_2$  que pasa por los puntos  $B_1 = (0, 4)$  y  $B_2 = (-4, -4)$  y  $L_3$  que pasa por los puntos  $C_1 = (-4, -4)$  y  $C_2 = (4, -4)$ , Es:
- El área limitada por la curva  $y = x^2 + 2$  y la línea que pasa por los puntos  $A = (1, 4)$  y  $A = (-1, 0)$ , es:

- El área de la función  $y = |x^2 - 4x + 2|$  y el eje x, es
- $\int \frac{2dx}{x^2 - 1}$
- $\int \frac{x^2}{1 + x^6} dx$
- $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$
- $\int x^2 \sqrt{3 - 2x} dx$
- $\int \sec x \cdot \tan x \cdot \cos(\sec x) dx$
- El área bajo la curva de la función  $y = 4 - |x|$ , entre  $x = -4$  y  $x = 4$ , es
- $\int \frac{x dx}{\cos^2(4x^2)}$
- $\int_0^1 (3x^2 + 2)^2 dx$
- $\int_0^1 \sqrt{3x + 2} dx$
- El valor del área entre las funciones  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = 7 - x^2$ , es
- El área limitada por la curva  $xy = 46$ , el eje x y las rectas  $x = 5$ ,  $x = 20$  es aproximadamente

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA UNIDAD 2

RONDON, J.E (2007) Calculo Integral. Primera edición, UNAD Ciencias básicas

PURCELL, E (2001) Cálculo, Pearson Education: Prentice hall, Octava Edición, México.

THOMAS Y FINNEY (1987). Cálculo con Geometría Analítica Vol. 1. Edición sexta, Addison Wesley Iberoamericana. México.

STEWART, J. (2001) Cálculo de una Variable. Thomsom-Learning. Cuarta edición, Bogotá.

LARSON, R. Y HOSTETLER, R. (1998) Cálculo Vol. 1, Mc Graw Hill, sexta edición, México.

SMITH, R. Y MINTON, R. (2002) Cálculo Vol. 1. Segunda Edición, Mc Graw Hill, Bogotá.

BAUM Y MILLES. (1992). Cálculo Aplicado. Limusa, México.

LEYTOLD, L. (1987) El Cálculo con Geometría Analítica. Harla, México.

PITA, C. (1998) Cálculo de una Variable. Pearson educación, México.

DE BURGOS, J. (2007) Cálculo infinitesimal de una Variable. McGraw Hill, Madrid.

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA INTERNET

<http://www.xtec.cat/~ilagares/integral.esp/integral.htm>

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/54-1-p-Integral.html>

[http://sigma.univalle.edu.co/index\\_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf](http://sigma.univalle.edu.co/index_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf)

<http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_fundamental\\_del\\_c%C3%A1lculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo)

<http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm>





<http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml>

<http://www.fata.unam.mx/tecnologia/material/sem-01/Calculo I Historia 1.pdf>

[http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html)

[http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2\\*%28x-4%29%5E0.5&random=false](http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2*%28x-4%29%5E0.5&random=false)

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/tutoriales/integracion/>

<http://www.matematicasypoesia.com.es/ProblIntegral/problema110.htm>

<http://usuarios.iponet.es/ddt/logica1.htm>

## UNIDAD 3: APLICACIÓN DE LAS INTEGRALES.

### Introducción:

Existen múltiples aplicaciones de las integrales en la ingeniería civil, eléctrica, electrónica, industrial, economía, en la hidráulica, en el trabajo, en el movimiento, en la estadística, etc.

En esta unidad se insiste en las técnicas de solución de las integrales vistas en la unidad anterior, sino también en los principios propios de cada tipo de problema de aplicación partiendo del análisis de graficas (área bajo curvas, longitud de curvas), hallar los volúmenes de sólidos de revolución mediante diferentes técnicas, centros de masa y por último la aplicación en la solución de problemas prácticos de la física, la hidráulica, la estadística y la economía.

El manejo de este tipo de problemas su entendimiento y posterior aplicación en la vida profesional del estudiante es clave y fundamental como objetivo del presente modulo.

### Justificación:

En esta unidad nos vamos a concentrar en la realización de ejercicios de aplicación a algunas de las ciencias ya mencionadas y que el lector puede necesitar solucionar en su vida profesional.

Hablemos de la aplicación de las integrales a la astronomía y dentro de ella la velocidad de escape de un objeto para sacarlo de la órbita de la tierra; al lanzar un objeto macizo y metálico al aire esta volverá a caer a la tierra debido a la fuerza de la gravedad, si se lanza con más fuerza volverá a caer más lejos.

Cuál es la velocidad inicial  $v_0$  para sacar ese objeto de la tierra y que permanezca alejándose?

Para esta **TERCERA UNIDAD** tenemos tres capítulos en los cuales tratamos las aplicaciones prácticas de las integrales.

### Intencionalidades formativas:

- Que los estudiantes se observen las aplicaciones en la vida diaria de las integrales.
- La solución de diversos con la ayuda de las matemáticas.
- Nuevamente se recalca en la realización de diversos problemas de aplicación, esto con el fin de adquirir destrezas en el manejo de las múltiples variables que intervienen en la solución de dichos problemas.

Presentamos un cuadro con el resumen del contexto teórico de esta unidad

Denominación de los capítulos	CAPITULO 1: ANÁLISIS DE GRAFICAS.  CAPITULO 2 Volumen de superficies de revolución  CAPITULO 3 En las ciencias.
Asimilación de conceptos	Analizar los caminos adecuados para la solución de problemas de aplicación.
Conceptos	Se presentan problemas de aplicación sencillos y se indican todos los pasos para su realización.
Competencias	<p>De conocimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir las técnicas propias para la solución de problemas prácticos.</li> <li>• Adquirir conocimiento mediante la realización del mayor número posible de ejercicios.</li> </ul> <p>Contextuales:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Adquirir los conocimientos propios de la solución de problemas de aplicación.</li> <li>• Los estudiantes deben desarrollar habilidades para aplicar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas prácticos.</li> </ul> <p>Comunicativas:</p>



- Adquirir el manejo de los elementos involucrados en los diferentes métodos de solución de problemas prácticos.
- Adquirir facilidad de expresión y vencer el miedo en la interacción con las NTIC

Valorativas:

- Adoptar, identificar y practicar los valores de la UNAD.
- Adquirir capacidad de valoración y tolerancia con nuestros compañeros virtuales o presenciales.

## CAPITULO 7: Análisis de graficas.

### Introducción

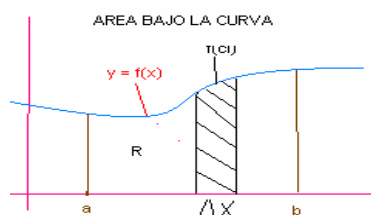


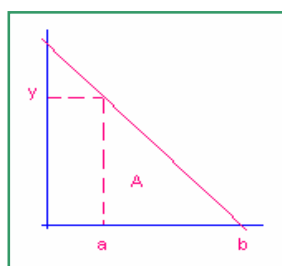
Fig. 11 Área bajo la curva.

Analizados y aprendidos los principios sobre integración; además, estudiadas las diferentes técnicas de integración, estamos en capacidad de realizara diversas aplicaciones que tiene esta maravillosa área de las matemáticas. Las integrales se pueden aplicar y tiene aplicaciones en Ingeniería, Física, Estadística, Economía, Administración, Geometría y otras. Como ejercicio de ilustración vamos a abordar diversos contextos que permitan comprender la amplitud que tiene las integrales como herramienta matemática para resolver problemas de diversa índole.

### Lección 31: Área de regiones planas.

Dentro de las áreas de regiones planas, tenemos dos casos, el área bajo la curva y el área bajo curvas. Analicemos estos casos:

**Área Bajo Una Curva:** Cuando tenemos una línea recta de la forma como se ilustra en la figura, el área se puede calcular por una simple fórmula geométrica.



$$A = \frac{1}{2}b * h = \frac{1}{2}(b-a)y$$

La situación es relativamente fácil de manejar, la situación se dificulta cuando la línea no es recta, sino una curva, para dicho caso el procedimiento es más largo y cuidadoso.

Sea  $y = f(x)$  una función definida en el intervalo  $I = [a, b]$  y continua en el intervalo abierto  $I$ ; además  $f(x) \geq 0$ . Consideremos la región  $R$  acotada por la curva  $y = f(x)$ , las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , la idea es hallar el área de la región  $R$ .

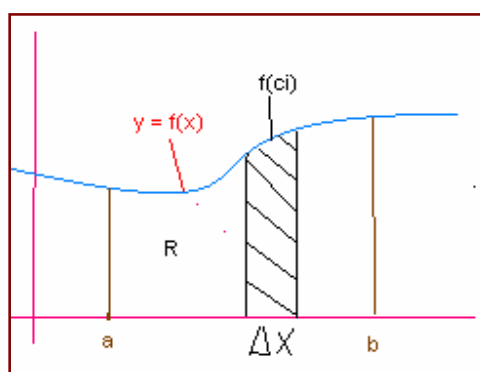


Fig. 12 Particiones.

Primero dividamos el intervalo  $I$  en  $n$  subintervalos iguales  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Los puntos de la partición:

$x_0 = a$ ,  $x_1 = x_0 + \Delta x$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$ , ...,  $x_i = x_{i-1} + \Delta x = x_0 + i\Delta x$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Cada subintervalo será la base de un rectángulo cuya altura será  $f(c_i)$ , para

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . luego se obtienen  $A_i = f(c_i) \Delta x$ , al sumar todas las áreas se obtiene una aproximación al área de la región  $R$  así:

$$A = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Si aumentamos el número de subintervalos; es decir, que  $n$  se haga suficientemente grande, el área de  $R$  será cada vez más exacta.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad \text{Por consiguiente área bajo la curva:}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Ejemplo 1:

Hallar el área bajo la curva para la función  $f(x) = 2x$ , entre  $x = 0$  y  $x = 4$ .

Solución:

Aplicando la fórmula definida podemos hallar el área pedida

$$A = \int_0^4 2x dx = x^2 \Big|_0^4 = 4^2 - 0^2 = 16$$

El área es de 16 unidades cuadradas.

Si resolvemos el problema por el método geométrico; es decir, aplicando la fórmula para un triángulo, obtenemos el mismo resultado.

$$A = \frac{1}{2} b x h = \frac{1}{2} 4 x 8 = 16$$

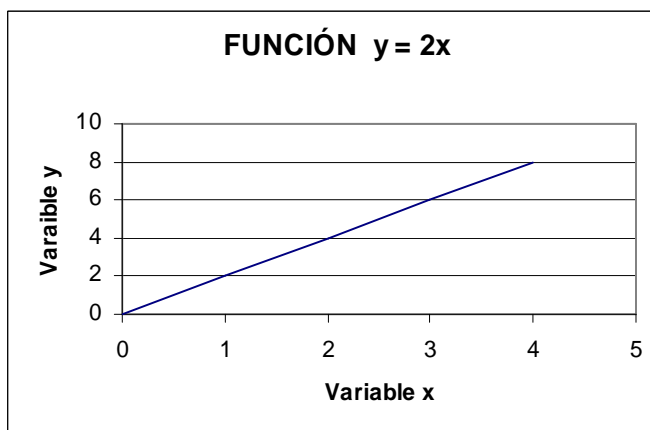
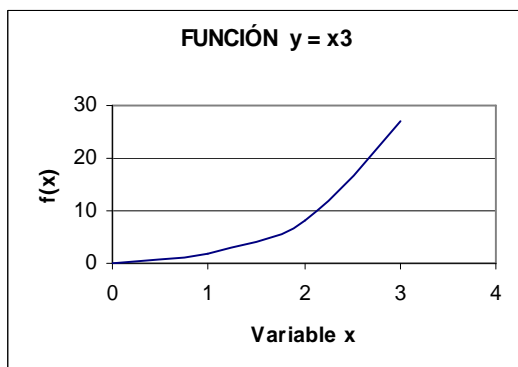


Fig. No 13 Grafica de 2x

Ejemplo 2:

Hallar el área acotada por la curva  $g(x) = x^3$  en el intervalo  $[1, 3]$

Solución:



Por la fórmula tenemos:

Fig. No. 14 Grafica de  $x^3$

$$A = \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^3$$

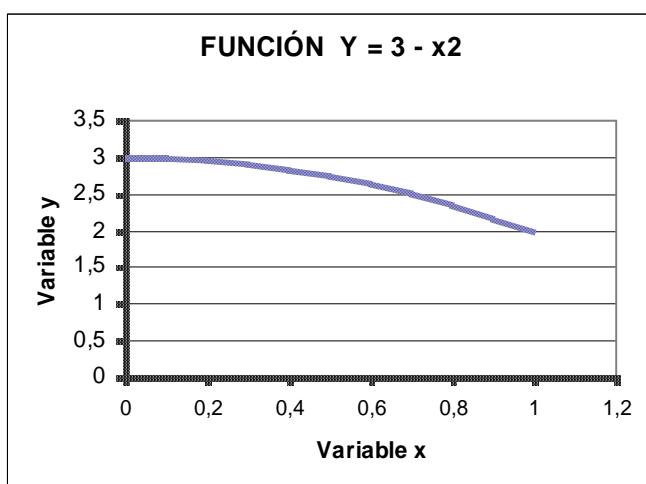
$$A = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4} (3^4 - 1^4) = \frac{1}{4} (81 - 1)$$

$$A = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4} (81 - 1) = \frac{80}{4} = 20 \text{ Unidades cuadradas}$$

Ejemplo 3:

Calcular el área bajo la curva  $f(x) = 3 - x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$

Solución:



$$A = \int_0^1 (3 - x^2) dx$$

$$A = \left( 3x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1$$

Fig. No. 15 Grafica de  $y = 3 - x^2$



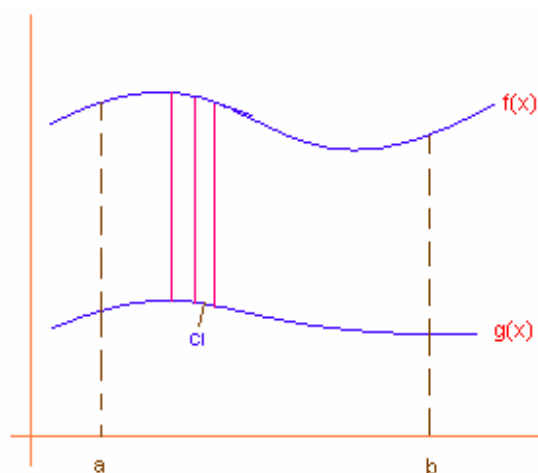
$$A = \left[ 3 - \frac{1}{3} \right] - \left[ 0 - \frac{1}{3} * 0 \right]$$

$$A = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \text{ Unidades cuadradas.}$$

### Lección 32: Área entre curvas.

Para desarrollar esta temática, partimos de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , asumiendo que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , la idea es hallar el área entre las curvas  $f(x)$  y  $g(x)$  sobre el intervalo dado.

El método se hace utilizando rectángulos que aproximen el área de la región descrita.



Dividimos el intervalo en  $n$  subintervalos  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Los puntos de la partición serán:  $x_i = a + i\Delta x$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Forma la base de un rectángulo cuya altura será:  $f(c_i) - g(c_i)$  para  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Fig. No. 16 Área entre curvas.

El área del rectángulo  $i$ -ésimo será:

$$A_i = h_i * \Delta x \text{ reemplazando: } A_i = [f(c_i) - g(c_i)] * \Delta x$$

El área total será la suma de las áreas de los  $n$  rectángulos, luego:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] * \Delta x$$

### DEFINICIÓN:

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ , luego el área de la región acotada por las curvas  $f(x)$  y  $g(x)$  desde  $a$  hasta  $b$  esta dado por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Para hallar el área entre dos curvas se debe:

1. Hacer La gráfica explicativa, para identificar  $f(x)$  y  $g(x)$  y saber cual es la función superior e inferior
2. Identificar los límites de integración
3. Establecer la fórmula de integración
4. Desarrollar la integración y valorar para hallar el área.

### Ejemplo 1:

Hallar el área entre las curvas  $f(x) = 4 - x$  y  $g(x) = x^2 - 16$ .

Solución:

Hallamos los límites, que consiste en buscar en donde  $x$  coinciden:

$$4 - x = x^2 - 16 \Rightarrow x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

uego los límites son:  $x = -5$  y  $x = 4$

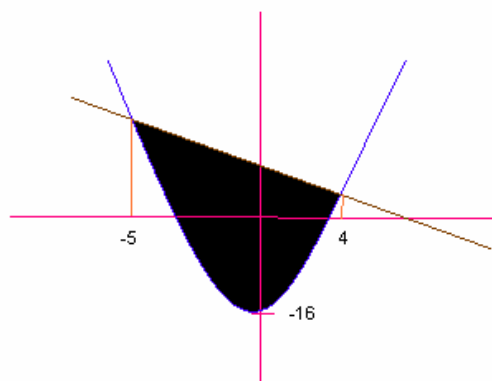


Fig. No. 17 Grafico solución problema

Vemos que la función  $f(x) > g(x)$ , entonces:

$$A = \int_{-5}^4 [(4 - x) - (x^2 - 16)] dx$$

$$A = \int_{-5}^4 (20 - x - x^2) dx = \left( 20x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)_{-5}^4 \quad \text{Evaluando tenemos:}$$

$$A = \left( 20(4) - \frac{1}{2}(4)^2 - \frac{1}{3}(4)^3 \right) - \left( 20(-5) - \frac{1}{2}(-5)^2 - \frac{1}{3}(-5)^3 \right) = \frac{125}{3} + \frac{425}{6} = \frac{675}{6}$$

El área entre las curvas es de  $675/6$  unidades cuadradas.

Ejemplo 2:

Determinar el área comprendida entre las curvas  $f(x) = 2 - x^2$  y  $g(x) = x^2$ , en el intervalo  $[0, 2]$ .

Solución:

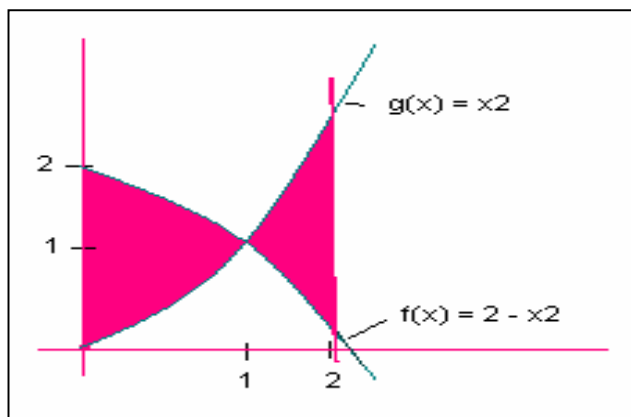


Fig. No. 18 Grafico solución área bajo curvas.

Como se conocen los límites, no hay necesidad de calcularlos, como se pudiera pensar, luego lo que debemos hacer es utilizar la fórmula para obtener el área, solo que se debe establecer cual será la función menor y cual la función mayor.

El problema lo debemos resolver en dos partes: La primera será el intervalo de  $[0, 1]$ , donde la función mayor es  $f(x) = 2 - x^2$  y la menor  $g(x) = x^2$ . La segunda parte será el intervalo  $[1, 2]$ , donde la función mayor es  $g(x) = x^2$  y la menor  $2 - x^2$ .

Para la primera parte:

$$A_1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \quad \text{Reemplazando:}$$

$$A_2 = \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 2 dx - \int_0^1 2x^2 dx$$

Integrando:

$$A_1 = 2x \Big|_0^1 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = (2(1) - 2(0)) - \left( \frac{2}{3} 1^3 - \frac{2}{3} 0^3 \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Ahora hallamos la segunda parte.

$$A_2 = \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)] dx \quad \text{Operando:}$$

$$A_2 = \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)] dx = \int_1^2 (2x^2 - 2) dx = \int_1^2 2x^2 dx - \int_1^2 2 dx \quad \text{Integrando:}$$

$$A_2 = \int_1^2 2x^2 dx - \int_1^2 2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_1^2 - 2x \Big|_1^2 = \left[ \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) \right] - [2(2 - 1)] \quad \text{Desarrollando:}$$

$$A_2 = \left[ \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) \right] - [2(2 - 1)] = \frac{2}{3} * 7 - 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

Finalmente sumamos las dos áreas para hallar el área total:

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

El área entre las curvas es de 4 unidades cuadradas.

Ejemplo 3:

Determinar que el área entre las curvas cuyas funciones son:  $f(x) = x^2 + 2$  y  $g(x) = -x$  en el intervalo  $[-2, 2]$  es  $40 / 3$ .

Solución:

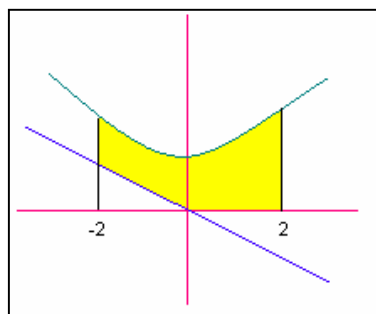


Fig. No. 19 Grafico solución

$$A = \int_{-2}^2 [x^2 + 2 - (-x)] dx$$

$$A = \int_{-2}^2 [x^2 + x + 2] dx \quad \text{Integrando:}$$

$$A = \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-2}^2 \quad \text{Evaluando:}$$

$$A = \left[ \frac{1}{3} 2^3 + \frac{1}{2} 2^2 + 2 * 2 \right] - \left[ \frac{1}{3} (-2)^3 + \frac{1}{2} (-2)^2 + 2 * (-2) \right] = \left[ \frac{8}{3} + 2 + 4 \right] - \left[ -\frac{8}{3} + 2 - 4 \right]$$

$$A = \frac{26}{3} + \frac{14}{3} = \frac{40}{3}$$

Así el área entre las curvas son efectivamente  $40 / 3$  unidades cuadradas.

## EJERCICIOS: Lección No. 2

De los ejercicios propuestos, hallar el área entre las curvas propuestas

1.  $f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{2}$  y  $g(x) = 3$  Rta: 18 unidades cuadradas

2.  $4x^2 + y = 4$  y  $x^4 - y = 1$  Rta:  $\frac{104}{15}$  unidades cuadradas

3.  $f(x) = \cos^2(x)$  y  $g(x) = 1$  Rta:  $\frac{\pi}{2}$  unidades cuadradas

4.  $h(x) = x^2 - 1$  y  $j(x) = 7 - x^2$  Rta:  $\frac{64}{3}$  unidades cuadradas

5. La intersección entre  $p(x) = e^x$  y  $q(x) = 1 - x^2$  Rta: Trabajarla con el Tutor.

## Lección 33: Área de superficies de revolución

$$a = 2\pi \int_A^B f(x) ds$$

Sabemos que toda curva representa una función, que se puede ilustrar en el plano cartesiano. Si giramos la curva alrededor de uno de sus ejes, se genera una Superficie de Revolución, el objetivo es determinar el área de la superficie generada.

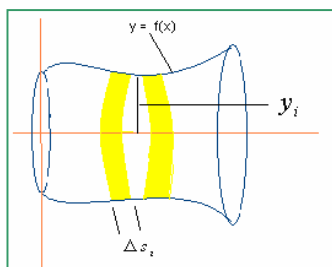


Fig. No. 20 Superficie de revolución

En la gráfica el giro se está realizando alrededor del eje x.  $y = f(x)$  denota una curva suave, con  $a \leq x \leq b$ . Subdividimos el intervalo  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Así la curva se divide en n partes.

Sea  $\Delta s_i$  la longitud de i-ésimo pedazo de la superficie y  $y_i$  la ordenada, al girar se observa la banda de color amarillo que se forma. El área se puede aproximar por la de un cono truncado; es decir,  $2\pi y_i \Delta s_i$

Al sumar las áreas de todas las bandas y tomando el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtenemos lo que llamamos el área de la superficie de revolución.

$$A = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i \Delta s_i \quad \text{Aplicando los principios de sumatorias y límites:}$$

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) ds \quad \text{Como } ds \text{ es el diferencial de longitud y equivale a:}$$

$\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ , reemplazando, obtenemos finalmente la ecuación del área de una superficie de revolución.

Área generada de la curva  $f(x)$  alrededor del eje x:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Para calcular áreas de superficies de revolución, se puede utilizar las integrales ordinarias, pero en muchas ocasiones se requiere un método de aproximación conocido como los métodos numéricos.

Ejemplo 1:

Hallar el área de la superficie generada al rotar sobre el eje x la función  $y = x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$

Solución:

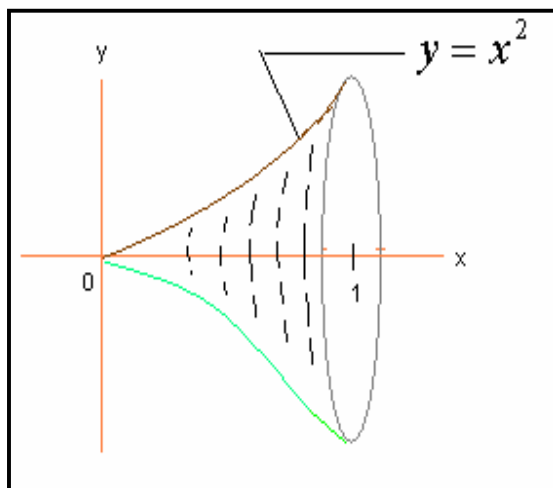


Fig. 21 Superficie de revolución de  $y = x^2$

Como  $y = x^2$  entonces.  $y' = 2x$

Ahora aplicamos la ecuación para obtener

el área.  $y = x^2$  Cuando gira alrededor de x.

$$A = \int_0^1 2\pi * x^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Esta integral no se puede resolver por los métodos tradicionales de integración, por lo cual se recurre a los métodos numéricos, para sí obtener el valor aproximado de: 3,8097.

Ejemplo 2:

Dada la curva  $y = \sqrt{x}$  la cual gira alrededor del eje x, cual será el área de la superficie de revolución generada, para  $0 \leq x \leq 2$



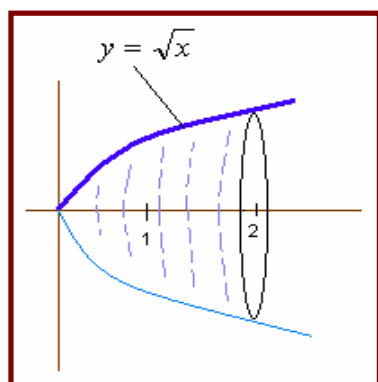


Fig. No. 22 superficie de revolución de  $y = \sqrt{x}$

Solución:

Dado que  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ahora:  $(f'(x))^2 = \frac{1}{4x}$  Luego aplicamos la formula:

$$A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \right) dx$$

$$A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} \right) dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{x(4x+1)}{4x}} dx = \pi \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$$

$$A = \pi \int \frac{1}{4} u^{1/2} du = \pi \left( \frac{1}{2} u^{3/2} \right) \quad \text{Como hicimos cambio de variable, volvemos a cambiar}$$

la variable original. Entonces:

$$A = \frac{\pi}{2} \sqrt{(4x+1)^3} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} (\sqrt{9^3 - 1^3}) = \frac{\pi}{2} \sqrt{729 - 1} = \frac{\sqrt{728}}{2} \pi \cong 42,3825$$

En muchos casos el giro de la curva se hace alrededor del eje  $y$ , luego en estos casos la ecuación cambia en algunos aspectos.

Si  $x = f(y)$ , siendo  $f(y)$  una curva suave y además mayor o igual a cero, el área de la superficie generada al girar la curva  $f(y)$  alrededor del eje  $y$  es de la forma:

Área generada de la curva  $f(y)$  alrededor del eje  $y$ :

$$A = 2\pi \int_a^b f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

Ejemplo 3:

Calcular el área de la superficie generada al girar alrededor del eje  $y$ , de la curva  $x = \frac{1}{3}y^3$  en  $0 \leq y \leq 1$

Solución:

Como  $x = \frac{1}{3}y^3 \Rightarrow x' = y^2$  por otro lado:  $x' = y^2 \Rightarrow (x')^2 = y^4$  Ahora aplicamos la fórmula:

$$A = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}y^3 \sqrt{1 + y^4} dy = \frac{2}{3}\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + y^4} dy \quad \text{Por cambio de variable:}$$

$$u = 1 + y^4 \Rightarrow du = 4y^3 dx \quad \text{Luego: } \frac{2}{3}\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + y^4} dy = \frac{2}{3}\pi \int_1^5 u^{1/2} \frac{du}{4} = \frac{1}{6}\pi \int_1^5 u^{1/2} du$$

Integrando:  $\frac{1}{6}\pi \left( \frac{2}{3}u^{3/2} \right)$  Cambiando de nuevo la variable, tenemos:

$$A = \frac{1}{9}\pi \left( \sqrt{(1 + y^4)^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9} (\sqrt{8} - \sqrt{1}) \quad \text{Por consiguiente: } A = \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1)$$

### EJERCICIOS:

Calcular el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje establecido, de las funciones propuestas.

1.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$  Para  $1 \leq x \leq 2$  Eje Y Rta:  $\frac{253}{20}\pi$

2.  $g(x) = \frac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$  Para  $0 \leq x \leq 2$  Eje Y Rta:  $12\pi$

3.  $h(x) = x^3$  Para  $0 \leq x \leq 1$  Eje X Rta:  $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

4. La parábola  $x^2 = 4py$  En los puntos (0, 0) y (2p, p) Eje Y Rta:  $\frac{8}{3}\pi p^2(2\sqrt{2} - 1)$

5.  $m(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  Para  $-r \leq x \leq r$  Eje X Rta:  $4\pi r^2$

6.  $q(x) = \frac{1}{3}x^3$  Para  $1 \leq x \leq \sqrt{7}$  Eje X Rta:  $28\sqrt{2}\pi$

## Lección 34: Longitud de una curva

$$PQ = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Cuando queremos medir la longitud de una línea recta, solo colocamos una regla o metro y hacemos la medición. La situación cambia cuando la línea que se desea medir es curva, por ejemplo medir la longitud de la cuerda de luz que va de un poste a otro.

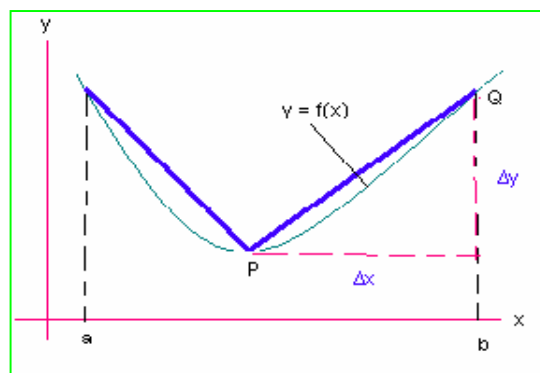


Fig. No. 23 Longitud de curva.

Se desea calcular la longitud de la curva  $y = f(x)$  entre  $[a, b]$ , donde la función es continua. Haciendo la partición de manera usual, y uniendo los puntos de los segmentos de tal forma que se forme una trayectoria poligonal que aproxime la curva.

$$\text{Longitud } \overrightarrow{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Para calcular la longitud del segmento total, se debe hacer la sumatoria de la

partición, es decir: 
$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

La aproximación a la longitud de la curva mejora, si la partición se hace más fina; o sea, la sumatoria tiene límite calculable, cuando la norma de la partición tiende a cero.

### DEFINICIÓN:

Una función  $f(x)$  cuya primera derivada es continua, se denomina SUAVE y su gráfica es una curva suave.

Para una función  $f(x)$  suave, por el teorema del valor medio, existe un punto  $(c_k, f(c_k))$  de la curva  $\overrightarrow{PQ}$  donde la tangente es paralela a dicho segmento.

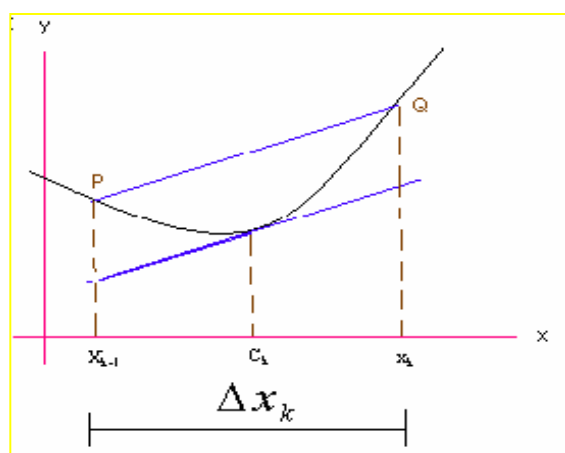


Fig. No. 24 Demostración longitud de curva.

Podemos inferir que:  $f'(x) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$

Luego:

$$\Delta y_k = f'(x) \Delta x_k$$

Si reemplazamos en la fórmula que tenemos para la longitud  $L$ , obtenemos:

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k) \Delta x_k)^2}$$

Reorganizando el radical:

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k \quad \text{Suma de Riemman.}$$

DEFINICIÓN:

Sea  $f(x)$  una función suave en  $[a, b]$ , la longitud de la curva  $y = f(x)$  desde  $a$  hasta  $b$  equivale a:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ejemplo 1:

Hallar la longitud de la curva  $y = x^2$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Solución:

La ecuación para hallar la longitud de la curva, muestra que se debe hallar la derivada de la función y luego elevarla al cuadrado, realicemos esto:

$f(x) = x^2$  luego:  $f'(x) = 2x$  y  $(f'(x))^2 = (2x)^2$ , con estos argumentos podemos aplicar la ecuación para hallar la longitud. De la curva.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \quad \text{Para resolver esta integral}$$

podemos aplicar la fórmula siguiente:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left[ x + \sqrt{a^2 + x^2} \right] + c \quad \text{Reemplazando:}$$

$$L = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \left[ \frac{2x}{2} \sqrt{1 + (2x)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( 2x + \sqrt{1 + (2x)^2} \right) \right]_{-1}^2$$

Simplificando y evaluando:

$$L = \left[ \frac{2x}{2} \sqrt{1 + (2x)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( 2x + \sqrt{1 + (2x)^2} \right) \right]_{-1}^2 = \left[ x \sqrt{1 + (2x)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + (2x)^2 \right) \right]_{-1}^2$$

$$L = \left( 2\sqrt{1+16} + \frac{1}{2} \ln(1+16) \right) - \left( -1\sqrt{1+(-1*2)^2} + \frac{1}{2} \ln(1+(-1*2)^2) \right) \quad \text{Desarrollando:}$$

$$L = 2\sqrt{17} + \frac{\ln(17)}{2} + \sqrt{5} - \frac{\ln(5)}{2} = 11.094$$

Ejemplo 2:

Hallar la longitud de la curva  $f(x) = \sqrt{x^3}$  en el intervalo  $[1, 4]$ .

Solución:

Como en el caso anterior, veamos:

$$f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \quad \text{Ahora aplicamos la fórmula de longitud.}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left( \frac{3}{2} x^{1/2} \right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx$$

Hacemos cambio de variable:

$$u = 1 + \frac{9}{4} x \Rightarrow du = \frac{9}{4} dx \quad \text{Despejamos } dx = (4/9) du, \text{ luego reemplazamos:}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \left( \frac{2}{3} u^{3/2} \right)$$

Como  $u = 1 + \frac{9}{4}x$ , lo sustituimos para que la solución quede en función de x, como se propone originalmente.

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \left( \frac{2}{3} u^{3/2} \right) = \left[ \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4}x \right)^{3/2} \right]_1^4 \quad \text{Evaluando:}$$

$$L = \left[ \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4}x \right)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4} * 4 \right)^{3/2} - \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4} * 1 \right)^{3/2}$$

$$L = \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4} * 4 \right)^{3/2} - \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4} * 1 \right)^{3/2} = \frac{8}{27} (10)^{3/2} - \frac{8}{27} \left( \frac{13}{4} \right)^{3/2}$$

$$L = \frac{8}{27} (10)^{3/2} - \frac{8}{27} \left( \frac{13}{4} \right)^{3/2} = 9.3697 - 1.7360 = 7.634$$



## Lección 35: Longitud de un arco en forma para métrica.

$$x = f(t)$$

En este aparte se analizará la longitud de curvas suaves, donde las funciones están dadas en forma paramétrica. Las funciones paramétricas, definidas en  $x$  y  $y$  dependen de un parámetro  $t$ , según:

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

Para  $a \leq t \leq b$

Al igual que en el caso de la longitud de curvas suaves, la idea es aproximar la curva por medio de un segmento formado por una trayectoria polinomial.

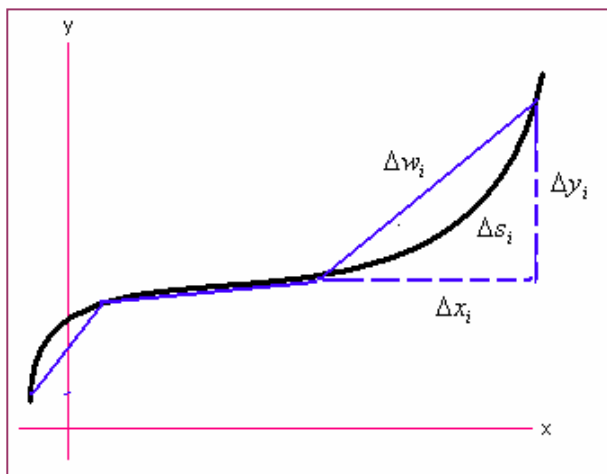


Fig. No. 25 Longitud de curva paramétrica.

$\Delta s_i$  Corresponde al segmento de longitud de la curva.

$\Delta w_i$  Es la proyección de la longitud de la curva en un triángulo rectángulo, del cual es la hipotenusa. La longitud de  $\Delta w_i$  se obtiene de la siguiente manera:

$$\Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Debemos definir  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$ , los cuales son equivalentes a:

$\Delta x_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$  y  $\Delta y_i = g(t_i) - g(t_{i-1})$  Por el teorema del valor medio, sabemos que existen los puntos  $c_i$  y  $k_i$  que pertenecen al intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$  tal que:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)\Delta t_i \quad y \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(k_i)\Delta t_i \quad \text{Luego:}$$

$$\Delta w_i = \sqrt{(f'(c_i)\Delta t_i)^2 + (g'(k_i)\Delta t_i)^2} \quad \text{La longitud total de la trayectoria}$$

Polinomial será:

$$\sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(k_i))^2} \Delta t_i \quad \text{Si observamos bien, deducimos que}$$

corresponde la suma de Riemman.

Por consiguiente, la longitud del arco establecido, será el límite de la ecuación anterior, cuando la norma de la partición tiende a cero, entonces:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Dicho de otra manera:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} dt$$

Así se puede calcular la longitud de una curva con ecuaciones paramétricas.

### Ejemplo 1:

Encontrar el perímetro del círculo  $x^2 + y^2 = 16$ , para  $0 \leq t \leq 2\pi$ . La forma paramétrica de la ecuación es:  $y = 4\sin(t)$  y  $x = 4\cos(t)$

Solución:

Como se sabe como se comporta  $x$  e  $y$  respecto a  $t$ , derivamos las dos variables respecto al parámetro.

$$x = 4\cos(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -4\sin(t) \quad y \quad y = 4\sin(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4\cos(t)$$

Por la fórmula de longitud:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 4 dt = 4t \Big|_0^{2\pi} = 4(2\pi - 0) = 8\pi$$

El perímetro del círculo propuesto tiene como longitud  $8\pi$ .

### Ejemplo 2:

Calcular la longitud de la curva, cuya ecuación paramétrica está dada por:  $x = \frac{1}{3}t^3$

y  $y = \frac{1}{2}t^2$  para  $0 \leq t \leq 1$

Solución:

Primero calculamos las derivadas de las funciones x e y.

$x = \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = t^2$  y  $y = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t$ , ahora aplicamos la ecuación para hallar la longitud.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(t^2)^2 + (t)^2} dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(t^2)^2 + (t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(t^4 + t^2)} dt = \int_0^1 t \sqrt{t^2 + 1} dt$$

Por cambio de variable:  $u = t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t dt$  despejamos  $t dt = \frac{du}{2}$  Luego:

$$L = \int_0^1 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (u)^{1/2} du = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} u^{3/2}$$

No utilizamos los límites, ya que estamos trabajando con la variable u, cuando sustituycamos de nuevo u por x sí hacemos la evaluación de los límites.

Reemplazando obtenemos:

$$L = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{6} \sqrt{(t^2 + 1)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - \sqrt{1}) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

La longitud de la curva paramétrica es de  $\frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

### EJERCICIOS:

Solucionar los siguientes ejercicios.

1. Por integración hallar la longitud de la curva  $f(x) = 2x + 3$  en el intervalo  $[1, 3]$

Rta:  $2\sqrt{5}$

2. Hallar la longitud de la curva  $g(x) = \sqrt{4 - \sqrt[3]{x^2}}$  Entre  $1 \leq x \leq 8$  Rta: 9

3. Cual será la longitud de la curva  $h(x) = 2x - x^2$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 2$

Rta:  $\int_0^2 \sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx$  Por integración numérica se obtiene: 2,9578

4. Cual será la longitud de la curva  $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$  en el intervalo  $[2, 4]$

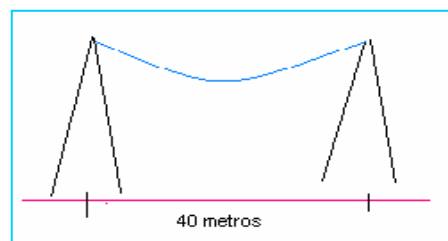
Rta:  $6 + \frac{1}{4} \ln(2) \cong 6,1732$

5. Los hilos de un tendido eléctrico suspendidos entre dos torres tiene la forma de una catenaria, cuya ecuación es:  $f(x) = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right)$ , x e y se miden en metros,

Cual será la longitud de la cuerda que descansa entre los dos postes.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Rta:  $20(\sinh(1) - \sinh(-1)) \cong 47 \text{ metros}$



6. Hallar la longitud de la curva, cuya ecuación paramétrica está dada por:  $x = 4 \sin(t)$

y  $y = 4 \cos(t) - 5$ , en el intervalo  $[0, \pi]$

Rta:  $4\pi$

7. Calcular la longitud de la hipocicloide de cuatro vértices, que tiene como ecuaciones paramétricas:  $x = a \sin^3(t)$  y  $y = a \cos^3(t)$  donde  $0 \leq t \leq 2\pi$

Rta: 6a

## CAPITULO 8: Volumen de superficie de revolución.

### Introducción

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Haciendo un seguimiento a las secciones anteriores, vemos que por medio de integrales podemos hallar áreas bajo la curva, longitud de curvas y área de superficies de una curva al rotar. Ahora nos preguntaremos ¿Que ocurre con el volumen de figuras engendradas al girar una curva? La respuesta está dada también por medio de integrales.

Para hallar el volumen de un sólido de revolución, hay varias técnicas, las cuales analizaremos en seguida, solo es pertinente resaltar que sea el camino que se tome, las demostraciones siguen la línea de las sumas de Riemman.

### Lección 36: Volumen de sólidos de revolución: método de arandelas.

Imaginémonos un tubo macizo, que al hacerle una rebanada por el centro, se nos forma un tubo hueco, al partitionarlo obtenemos arandelas.

Toda arandela tiene un área y un volumen, situación que vamos a analizar.

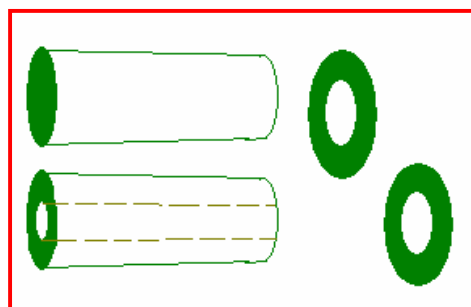
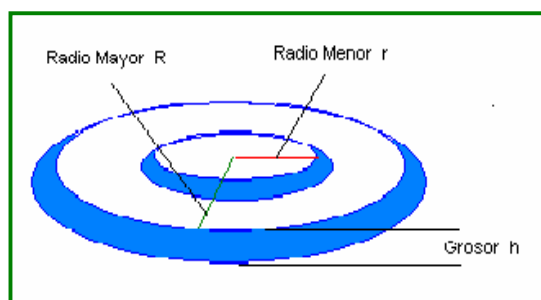


Fig. No. 26 Arandelas

$V$  = Volumen de la arandela

$A$  = Área de la base

$h$  = Grosor

$V = A * h$  Pero:

$A = \pi(R^2 - r^2)$  Luego:

$$V = \pi(R^2 - r^2) * h$$

Utilizando un procedimiento similar al caso de las rebanadas o discos, podemos obtener el volumen del sólido formado por las arandelas.

$$V = \int_a^b \pi \left[ (R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx$$

Podemos ver que  $R$  y  $r$  son funciones de  $x$ .

Ejemplo 1:

Dadas las curvas  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2x$ , ubicadas en el primer cuadrante. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $y$  y acotado por las curvas dadas.

Solución:

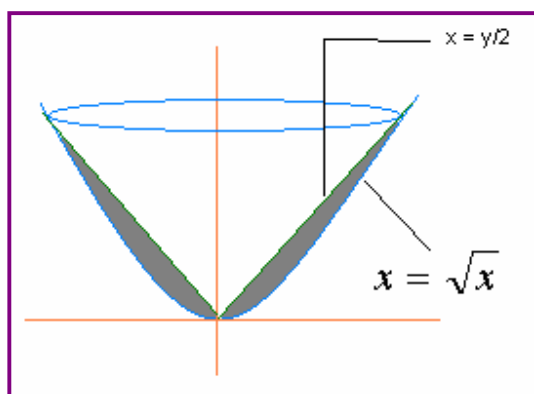


Fig. No. 27 Solución volumen

Como las funciones giran alrededor del eje Y, se debe expresar las funciones así:

$x = f(y)$ , como vemos en la gráfica.

Con estos argumentos podemos hallar el volumen.

$$V = \int_a^b \pi \left[ (R(y))^2 - (r(y))^2 \right] dy \quad \text{Reemplazando:}$$

$$V = \int_0^4 \pi \left[ (\sqrt{y})^2 - \left( \frac{y}{2} \right)^2 \right] dy = \pi \int_0^4 y dy - \pi \int_0^4 \frac{1}{4} y^2 dy \quad \text{Integrando:}$$

$$V = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 - \frac{\pi}{12} y^3 \Big|_0^4 = \frac{\pi}{2} (16) - \frac{\pi}{12} (64) = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

El volumen del sólido generado es de  $\frac{8}{3}\pi$  unidades cúbicas.

NOTA: Si observamos detenidamente, para este tipo de problemas, lo esencial es identificar las funciones  $R(x)$  y  $r(x)$ ; además, sobre cual eje gira. Si es alrededor del eje x se expresa las funciones de la forma  $R(x)$  y  $r(x)$ , pero si es alrededor del eje y se expresa como  $R(y)$  y  $r(y)$ . Importante hacer la gráfica explícita de la situación.

Ejemplo 2:

Hallar el volumen del sólido generado al rotar sobre el eje x las curvas dadas por:

$$y = -x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 1$$

Solución:

Primero hallemos los límites de integración, esto ocurre cuando:  $-x + 3 = x^2 + 1$ , si despejamos x obtenemos:  $x = -2$  y  $x = 1$ . (Por favor corroborar estos límites)

Entonces:  $R(x) = -x + 3$  y  $r(x) = x^2 + 1$

$$V = \int_{-2}^1 \pi \left[ (-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2 \right] dx \quad \text{Desarrollando:}$$



$$V = \int_{-2}^1 \pi [(x^2 - 6x + 9) - (x^4 + 2x^2 + 1)] dx = \pi \int_{-2}^1 (8 - 6x - x^2 - x^4) dx$$

$$V = \pi \left( 8x - 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{117}{5} \pi$$

El volumen del sólido generado es de  $\frac{117}{5} \pi$  unidades cúbicas.

Ejemplo 3:

Hallar el volumen del sólido generado al rotar la curva  $x^2 + y^2 = 4$  alrededor del eje  $x = -1$ .

Solución:

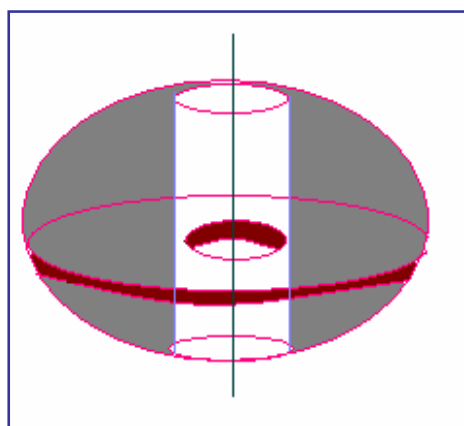
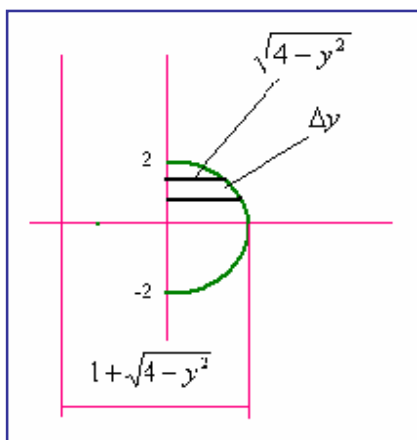


Fig. No. 28 Solución ejemplo 3

Observando las figuras, podemos ver que la curva gira alrededor del eje  $x = -1$ . lo que origina un cilíndrico hueco de radio 1, ahora:

$$R(y) = 1 + \sqrt{4 - y^2} \quad \text{y} \quad r(y) = -1, \text{ luego:}$$

$$V = \int_{-2}^2 \pi \left[ \left(1 + \sqrt{4 - y^2}\right)^2 - (-1)^2 \right] dy \quad \text{Luego: } V = \int_{-2}^2 \pi \left[ \left(1 + 2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2\right) - 1 \right] dy$$

$$V = \int_{-2}^2 \pi \left[ \left(2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2\right) \right] dy = 2\pi \int_0^2 \left( 2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2 \right) dy \quad \text{Por simetría}$$

$$V = 2\pi \int_0^2 \left( 2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2 \right) dy = 4\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy + 8\pi \int_0^2 dy - 2\pi \int_0^2 y^2 dy \quad \text{Integrando:}$$

$$V = 4\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy + 8\pi \int_0^2 dy - 2\pi \int_0^2 y^2 dy = 4\pi \left( \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + \frac{y^2}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left( \frac{y}{2} \right) \right)_0^2 + 8\pi y \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \pi y^3 \Big|_0^2$$

Evaluyendo:

$$V = 4\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy + 8\pi \int_0^2 dy - 2\pi \int_0^2 y^2 dy = 4\pi \left( \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + \frac{y^2}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left( \frac{y}{2} \right) \right)_0^2 + 8\pi y \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \pi y^3 \Big|_0^2$$

$$V = 4\pi \left( \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + \frac{y^2}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left( \frac{y}{2} \right) \right)_0^2 + 8\pi y \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \pi y^3 \Big|_0^2 = 4\pi \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] + 16\pi - \frac{2}{3} \pi (8)$$

$$V = 4\pi \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 0 \right] + 16\pi - \frac{2}{3} \pi (8) = 4\pi^2 + 16\pi - \frac{16}{3} \pi \quad \text{Operando:}$$

$$V = 4\pi^2 + \frac{32}{3} \pi \quad \text{Unidades Cúbicas.}$$

### EJERCICIOS:

1. Sea la región R la cual está delimitada por las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$ , donde  $f(x) > g(x)$ , si R se hace girar alrededor del eje x entre los valores a y b. Cual sería el volumen del sólido generado.

2. Cómo se hallaría el volumen del sólido generado, cuando se hace girar la curva

$y = \frac{1}{x^3}$  alrededor del eje  $y = -1$ , entre  $x = 1$  y  $x = 3$  Rta:

$$V = \pi \int_1^3 \left( \frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^3} \right) dx$$

3. Calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $x$  las curvas:  $y = 1$

$y = \sqrt{\cos(x)}$  entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  Rta:  $\pi^2 - 2\pi$

4. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $y$  las curvas  $x = 1$  y

$x = \tan(y)$  en:  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$  Rta:  $\frac{1}{4}(\pi^2 - 4)$

5. Cual será el volumen del sólido generado por las curvas  $y = x$  y  $y = 1$ , cuando

giran alrededor del eje  $x$ . Rta:  $\frac{2}{3}\pi$

6. Calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $y$  las curvas

$y = x^2$ , la recta  $x = 0$  y la recta  $x = 2$  Rta:  $8\pi$

Todas las respuestas, están dadas en unidades cúbicas.

**Lección 37: Volumen de sólidos de revolución: método de casquetes cilíndricos.**

$$V = \pi(R^2 - r^2)h$$

En muchos problemas de diferentes áreas del saber, el método del casquete cilíndrico es muy adecuado para la solución de la situación presentada. Un cascarón de forma cilíndrica, es un sólido acotado por dos cilindros circulares rectos, de forma concéntrica, con radio interior  $r$  y radio exterior  $R$ ; además, una altura  $h$

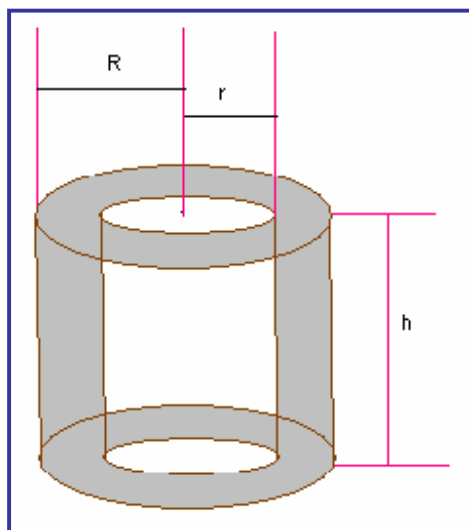


Fig. No. 29 Casquetes.

El volumen será:  $V = A_b * h$  Donde  $A_b$  es el área de la base y  $h$  la altura. Pero el área de la base será:  $A_b = \pi R^2 - \pi r^2$ , luego:

$$V = \pi(R^2 - r^2) * h \quad \text{Desarrollando:}$$

$$V = \pi(R + r)(R - r) * h$$

Para obtener la ecuación que permite hallar el volumen, debemos hacer una transformación:

Multiplicamos y dividimos por 2 la última ecuación, luego:

$$V = 2\pi \left( \frac{R+r}{2} \right) (R-r) h$$

Ahora, definimos radio promedio como:  $\bar{R} = \frac{R+r}{2}$  y cambio del radio como:

$$\Delta r = R - r. \text{ Por consiguiente: } V = 2\pi R h \Delta r$$

Para hallar el volumen del sólido de revolución al girar la región acotada por la curva  $y = f(x)$  al rededor de un eje de coordenadas, hacemos la partición, llevando la norma de ésta a cero y, sumamos las fracciones formadas, de esta manera se logra obtener el volumen del sólido.

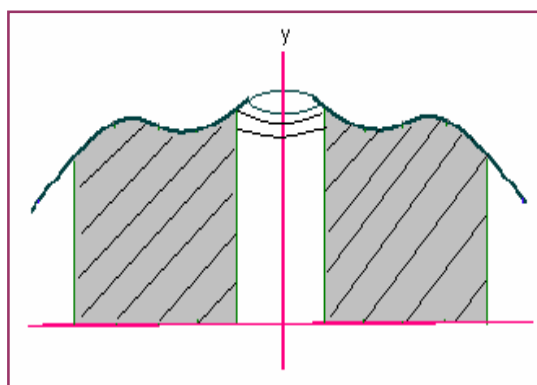
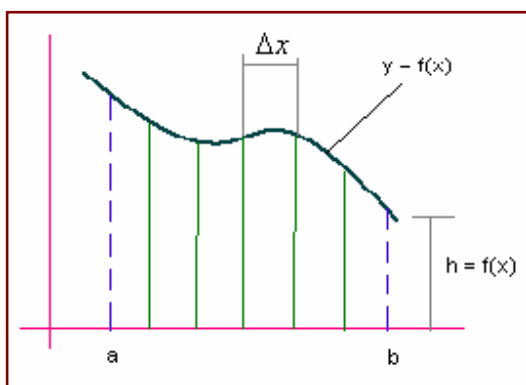


Fig. No. 30 Desarrollo sólidos de revolución.

Según la primera gráfica:  $\Delta V \cong 2\pi x f(x) \Delta x$  Si llevamos la partición a cero y sumamos todas las partes, obtenemos:

La obtención de la ecuación, ha seguido los mismos principios que hemos venido utilizando, o sea por medio de las sumas de Riemman.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

### Ejemplo 1:

Al hacer girar la curva  $y = \sqrt{x}$  alrededor del eje y entre las rectas  $x = 0$  y  $x = 4$ , se genera un sólido de revolución, ilustrar el caso y hallar el volumen del sólido generado.

Solución:

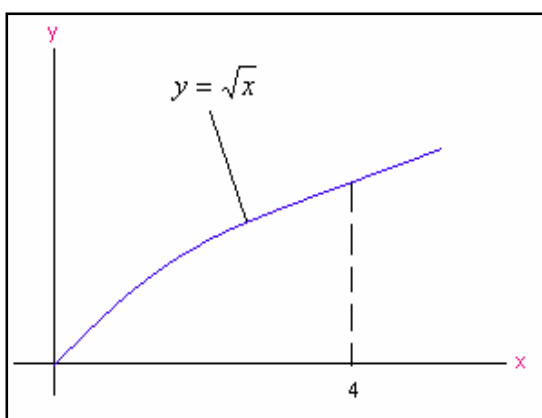
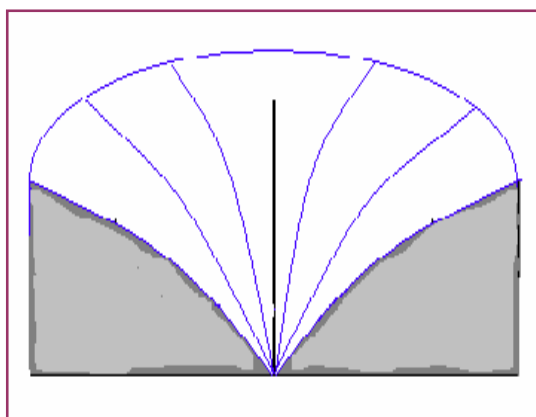


Fig. No. 31 Solución ejemplo 1



Como:  $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$  reemplazamos en los datos que tenemos:

$$V = 2\pi \int_0^4 x * \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x * x^{1/2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \quad \text{Aquí ya podemos integrar:}$$

$$V = 2\pi \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{4}{5} \pi \left[ (4)^{5/2} - 0 \right] = \frac{128}{5} \pi \text{ Unidades cúbicas.}$$

### Ejemplo 2:

Dada la recta  $y = \left(\frac{r}{h}\right)x$  con  $r > 0$  y  $h > 0$ , el eje x y la recta  $x = h$ . La recta y se hace girar alrededor del eje x. Encontrar el volumen del sólido generado.

Resolverlo por:

- a- Método de arandelas
- b- Método de casquetes

Solución:

a- Por el método de arandelas.

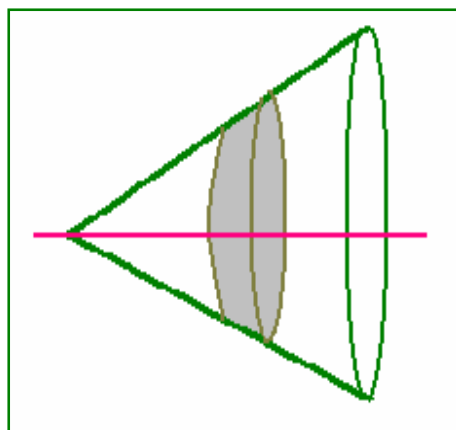
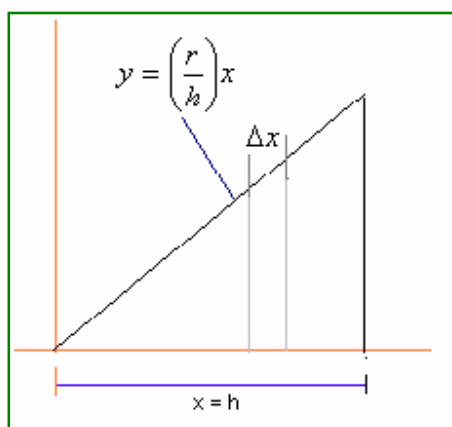


Fig. No. 32 Solución ejemplo 2

$$V = \int_a^b \pi (R^2(x) - r^2(x)) dx \Rightarrow V = \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h} x \right)^2 dx \quad \text{Desarrollando el cuadrado e}$$

integrando:

$$V = \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left( \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^h \quad \text{Evaluando:}$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \left( \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \left( \frac{1}{3} h^3 \right) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{Corresponde al volumen de un cono circular recto.}$$

b- Por el método de casquete:

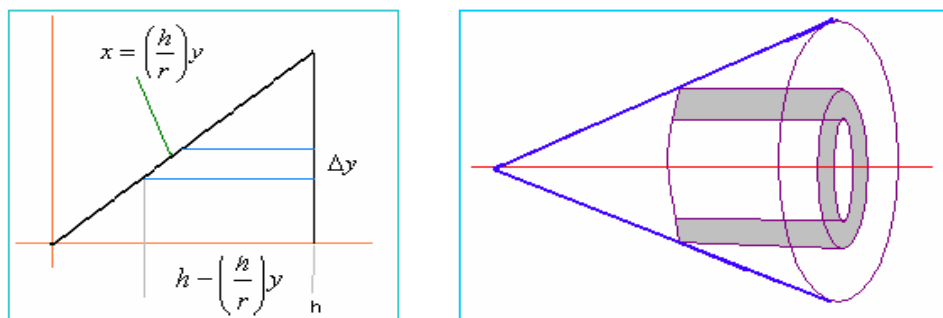


Fig. No. 33 Demostración casquetes.

$$V = \int_a^b 2\pi y f(y) dy = 2\pi \int_0^r y \left( h - \frac{h}{r} y \right) dy = 2\pi h \int_0^r \left[ y - \left( \frac{1}{r} \right) y^2 \right] dy$$

Desarrollando la integral.

$$V = \int_0^r \left[ y - \left( \frac{1}{r} \right) y^2 \right] dy = 2\pi h \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3r} y^3 \right) \Big|_0^r = 2\pi h \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3r} \right) \quad \text{Simplificando:}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{Volumen de un cono circular recto.}$$

Como podemos observar los dos métodos conllevan al mismo resultado.

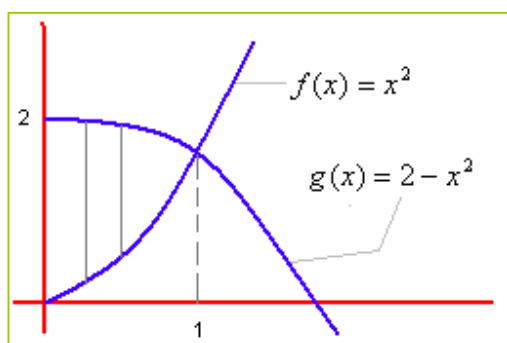
Ejemplo 3:

Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y, la región por encima de la parábola  $f(x) = x^2$  y por debajo de la curva  $g(x) = 2 - x^2$ .

Solución:

Por el tipo de grafica, las rebanadas verticales nos llevan a una buena solución.





$$h = 2 - x^2 - x^2$$

Ahora:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Fig. No. 34 Rebanadas.

$$V = \int_0^1 2\pi x (2 - 2x^2) dx = \int_0^1 4\pi x (1 - x^2) dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$V = \int_0^1 4\pi (x - x^3) dx = 4\pi \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = 4\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 4\pi \left( \frac{1}{4} \right)$$

$V = \pi$  Unidades cúbicas.

Ejercicios:

1. Hallar el volumen del sólido generado por los planos perpendiculares a la recta  $x = -1$  y  $x = 1$ , las secciones transversales perpendiculares al eje entre estos planos son cuadrados verticales cuyas bases van del semicírculo  $y = -\sqrt{1-x^2}$  al semicírculo  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

Rta:  $16/3$

2. Hallar el volumen del sólido generado entre los planos perpendiculares al eje y por  $y = 0$  y  $y = 2$ . Las secciones transversales perpendiculares al eje y son discos circulares cuyos diámetros van desde el eje y hasta la parábola  $x = \sqrt{5}y^2$

Rta:  $8\pi$

3. Encontrar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la curva  $y = \frac{1}{x}$ , con  $x = 2$ ,  $x = 4$  y el eje y.

Rta:  $\frac{\pi}{4}$

4. Encontrar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la curva

$$y = \frac{1}{4}x^3 + 1, \quad y = 1 - x \quad \text{y} \quad x = 1.$$

$$\text{Rta: } \frac{23}{30}\pi$$

5. Se perfora un agujero redondo de radio  $r$  que pasa por el centro de una esfera sólida de radio  $R$ , ( $R > r$ ) encontrar el volumen del sólido producido Rta:

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{(R^2 - r^2)^3}$$

### Lección 38: Volumen de sólidos de revolución: método de rebanadas o discos.

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Para hallar el volumen del sólido descrito en la gráfica, en cada punto  $x$  del intervalo definido, la sección transversal del sólido corresponde a la región  $R(x)$ , cuya área es  $A(x)$ . Luego  $A$  es función de  $x$  de valor real. Las capas o rebanadas formadas se suman para formar el volumen del sólido en el intervalo definido.

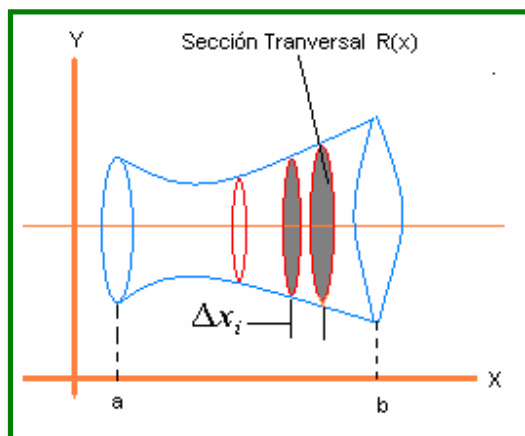


Fig. No. 35 Discos.

$$\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i$$

Donde  $c_i$  es el punto contenido en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . El volumen del sólido será aproximadamente la suma de Riemman, cuando la partición se hace muy pequeña.

$V \approx \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x_i$  Sabiendo que el área se debe obtener según el tipo de figura que

se obtiene, el volumen será de la forma:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$A(x)$  es el área de la figura obtenida.

NOTA: Es pertinente tener presente que para resolver problemas de este tipo, se requieren buenos principios de geometría plana y espacial, por lo cual se recomienda en caso de recordar algo al respecto, consultar el módulo de Matemáticas Básicas de la UNAD.

Ejemplo 1:

Una pirámide de 3 m. de altura tiene base cuadrada de 3 m. de lado, hallar el volumen de la pirámide.

Solución:

El área de la sección transversal es:  $A(x) = x^2$   
 ahora:

$$V = \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{1}{3} (27)$$

Resolviendo:

$$V = \int_0^3 x^2 dx = 9 \text{ Unidades cúbicas.}$$

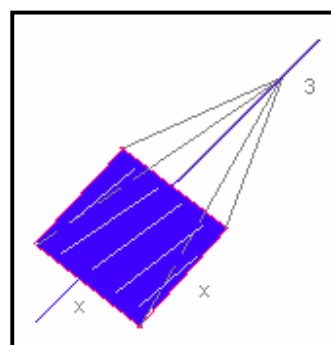


Fig. No. 36 Solución problema 1

El ejercicio fue relativamente fácil, ya que la figura es muy conocida, pero no ocurre siempre así, veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2:

Hallar el volumen del sólido de revolución al hacer girar la región  $R(x)$  alrededor del eje  $X$  y acotada por la curva  $f(x) = \sqrt{x}$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 3$ .

Solución:

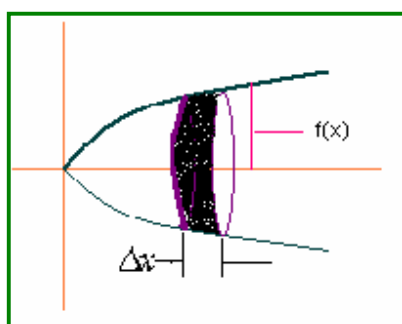


Fig. No. 37 solución problema 2

El área para un círculo es:  $A = \pi R^2$ , como el volumen es área de la base por la altura, entonces:

$$\Delta V = \pi (f(x))^2 \Delta x \quad \text{Luego:}$$

$$V = \int_0^3 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^3 \pi x dx = \pi \int_0^3 x dx$$

Integrando obtenemos:

$$V = \pi \int_0^3 x dx = \frac{1}{2} \pi x^2 \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \pi (3^2 - 0^2) = \frac{9}{2} \pi$$

Luego:  $V = \frac{9}{2}\pi$  unidades cúbicas.

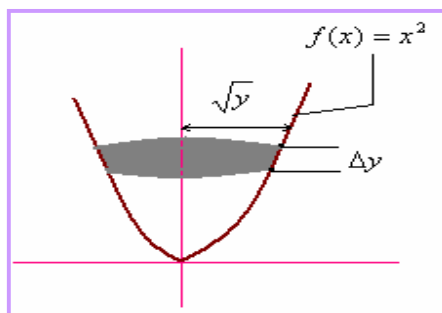
Ejemplo 3:

Encontrar el volumen del sólido generado al rotar sobre el eje Y la región acotada por la curva  $y = x^2$  en el intervalo  $[0, 4]$ .

Solución:

Como  $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

Ya que necesitamos rotarlo alrededor de Y, como



$A = \pi R^2$ , Siendo  $R = \sqrt{y}$ , entonces:

$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y$  Por la suma de Riemman, obtenemos:

$$V = \int_0^4 \pi y dy = \pi \int_0^4 y dy = \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^4 = \frac{1}{2} \pi (4^2 - 0^2)$$

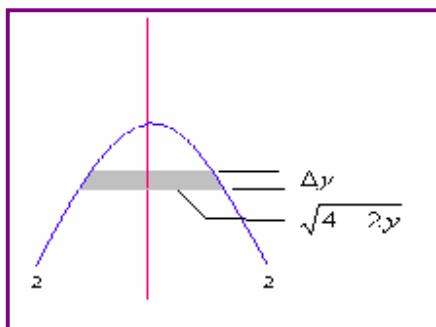
Finalmente:

$$V = \frac{1}{2} \pi (4^2 - 0^2) = 8\pi \text{ Unidades cúbicas.}$$

Ejemplo 4:

Dada la función  $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ . Hallar el volumen del sólido generado por la curva alrededor del eje y para  $0 \leq x \leq 2$ .

Solución:



Como el giro es alrededor del eje  $y$ , despejamos  $x$ ,

luego:  $y = 2 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4 - 2y}$ . En seguida

aplicamos la ecuación para el volumen del sólido alrededor del eje  $y$ , entonces:

$$V = \int_0^2 \pi y dy = \pi \int_0^2 \sqrt{4 - 2y} dy$$

Desarrollando:

$$V = \pi \int_0^2 \sqrt{4 - 2y} dy = \pi \left( 4y - y^2 \right)_0^2 = 4\pi \text{ Unidades cúbicas.}$$

Ejercicios:

1. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por  $y = 2 - x$ , en  $x = 0$  y  $y = 0$ , alrededor del eje  $x$ .

Rta:  $\frac{8}{3}\pi$

2. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva  $y = \sqrt{x}$  para  $y = 2$  y  $x = 0$ , alrededor del eje  $y$ .

Rta:  $\frac{32}{5}\pi$

3. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva  $y = \sqrt{x}$  para  $y = 2$  y  $x = 0$ , alrededor del eje  $x = 4$ .

Rta:  $\frac{224}{15}\pi$

4. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva

$y = x^3$  para  $y = 0$  y  $x = 1$ , alrededor de  $x = 1$       Rta:  $\frac{1}{10}\pi$ .

5. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva

$y = x^2 + 1$  para  $[0, 2]$ , alrededor del eje  $x$ .      Rta:  $\frac{206}{15}\pi$

6. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva

$y = 4 - x^2$  para  $[0, 2]$ , alrededor del eje  $x$ .      Rta:  $\frac{256}{15}\pi$

7. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por la curva

$y = 4 - x^2$  para  $[0, 2]$ , alrededor del eje  $y$ .      Rta:  $8\pi$

8. Una pirámide se levanta 500 metros sobre una base cuadrada de 750 metros de lado. Cual será el volumen de la pirámide.      Rta: 93.750 metros cúbicos

### Lección 39: Momentos y centros de masa

Recordando los principios de dinámica y mecánica, sabemos que el momentum es el producto de la masa y la distancia respecto a un punto de equilibrio.

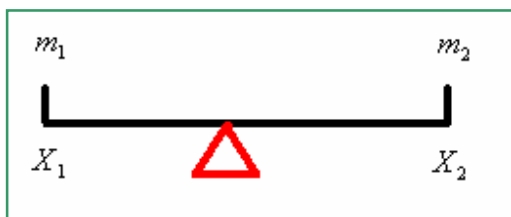


Fig. No. 38 equilibrio

$$\text{Momentum} = x_1 * m_1 + x_2 * m_2$$

El triángulo nos indica el punto de equilibrio.

Para un sistema de masas  $\eta = m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  ubicados en los puntos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  respectivamente a lo largo del eje  $x$ , el momentum total  $M$ , será la suma de los momentum individuales.

$M = \sum_{i=1}^n x_i * m_i$  Cuando  $M = 0$ , se presenta equilibrio si el punto de equilibrio esta en el

origen. Generalmente esto no ocurre, la situación es cómo hallar el punto para que un sistema de masas este en equilibrio. Si llamamos  $C_e$  el punto donde un sistema de masas puede estar en equilibrio, entonces:

$$(x_1 - C_e)m_1 + (x_2 - C_e)m_2 + (x_3 - C_e)m_3 + \dots + (x_n - C_e)m_n = 0 \quad \text{Operando:}$$

$$x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \dots + x_nm_n = m_1C_e + m_2C_e + m_3C_e + \dots + m_nC_e$$

Despejando  $C_e$  obtenemos lo que se conoce como el centro de masa:



$$C_e = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Físicamente el centro de masa es el punto donde concentramos toda la masa del sistema. Si deseamos distribuir dicha masa a lo largo de una recta de alambre con densidad variable, llegamos al siguiente planteamiento:

$\Delta m = \rho(x)\Delta x$ . Siendo  $m$  la masa,  $\rho(x)$  densidad en el punto  $x$  y  $\Delta x$  ubicación de la masa respecto al punto de equilibrio. Luego:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

Corresponde a la masa en un punto dado de la recta

Por otro lado:  $\Delta M = x\rho(x)\Delta x$  Por medio de la teoría de integrales llegamos a:

$$M = \int_a^b x\rho(x) dx$$

Con todo lo anterior, podemos hallar el centro de masa a lo largo de una varilla con densidad variable.

$$C_e = \frac{\int_a^b x\rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$$

Dicho de otra manera:

$$C_e = \frac{M}{m}$$

La parte fundamental para resolver problemas de este tipo, es identificar claramente la función densidad en el punto establecido.

Ejemplo 1:

Una varilla de 20 cm. De longitud presenta una densidad de  $\rho(x) = 2x^2 - 1$ , Hallar el centro de masa.

Solución:

$$C_e = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$$

Aplicando la ecuación:

Reemplazando términos:

$$C_e = \frac{\int_0^{20} x (2x^2 - 1) dx}{\int_0^{20} (2x^2 - 1) dx}$$

Integramos cada parte:

$$\int_0^{20} (2x^3 - x) dx = \left. \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right|_0^{20} = \frac{160.000}{2} - \frac{400}{2} = 79.800$$

$$\int_0^{20} (2x^2 - 1) dx = \left. \frac{2}{3} x^3 - x \right|_0^{20} = \frac{16.000}{3} - 20 = \frac{15.940}{3}$$

Agrupamos los dos resultados:

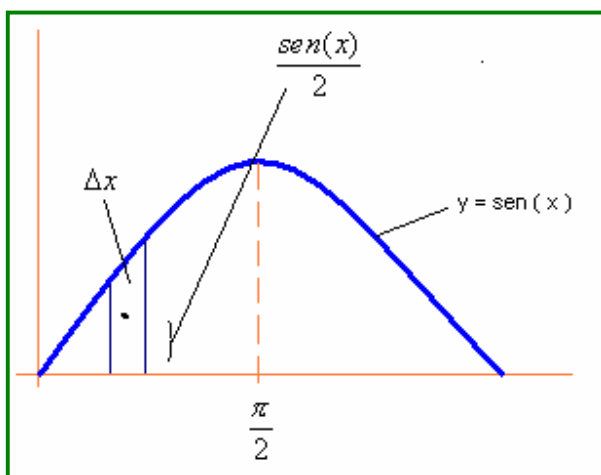
$$C_e = \frac{79 \cdot 800}{15 \cdot 940} \div 3 \cong 14,13 \text{ Centímetros}$$

Ejemplo 2:

Encontrar el centro de masa de una lámina homogénea, cuya forma es una región acotada por la curva  $y = \sin(x)$  para  $0 \leq x \leq \pi$ .

Solución:

Cuando la lámina es homogénea, la densidad es constante, luego el centro de masa de la región, será dada por la forma de la región, para estos casos hablamos de centróides.



La región es simétrica en  $x = \pi/2$ , pero para ya el centro de masa será menor a  $1/2$ , ya que la mayor cantidad está por debajo de  $1/2$ .

Ahora:

$$M_x = \frac{1}{2} f(x) * f(x)$$

Fig. No. 38 Centro de masa

$$m_x = f(x)$$

Aplicando la fórmula obtenida:

$$C_{e(y)} = \frac{\int_0^{\pi} M_x dx}{\int_0^{\pi} m_{(x)} dx} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(x) * \sin(x) dx}{\int_0^{\pi} \sin(x) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx}{\int_0^{\pi} \sin(x) dx}$$

Por identidades tenemos:

$$Ce_{(y)} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx}{\int_0^{\pi} \sin(x) dx} \quad \text{Integremos por separado y al final agrupamos:}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sin(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2 \quad \text{Agrupando:}$$

$$Ce_{(y)} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 3:

Mostrar que el centroide de la región acotada por las curvas  $y = x^3$  y  $y = \sqrt{x}$ , es:

$$Ce_{(y)} = \frac{3}{7} \quad Ce_{(x)} = \frac{12}{25}$$

Solución:

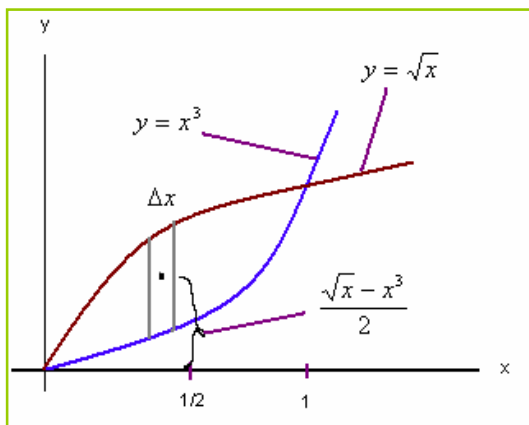


Fig. No. 39 Centroide.

$$Ce_{(x)} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx}$$

$$C_{e(x)} = \frac{\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{5}x^5\right)_0^1}{\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right)_0^1}$$

Desarrollando:

$$C_{e(x)} = \frac{\left(\frac{2}{5}(1) - \frac{1}{5}(1)\right)}{\left(\frac{2}{3}(1) - \frac{1}{4}(1)\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

Referente al eje y tenemos:

$$C_{e(y)} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x^3)(\sqrt{x} - x^3)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2}[(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2]dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx} \quad \text{Desarrollando:}$$

$$C_{e(y)} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^6)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7 \right)_0^1}{\left( \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4 \right)_0^1} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{7}$$

### EJERCICIOS:

1. Hallar el centro de masa de un objeto cuya función densidad es:  $\rho(x) = \frac{x}{6} + 2$  para

$$0 \leq x \leq 6$$

$$\text{Rta: } C_e = 16/5$$

2. Calcular el centro de masa para un objeto que tiene como densidad:

$$\rho(x) = \frac{x^2}{4} + 4$$

para el intervalo:  $-2 \leq x \leq 2$ .

Rta:  $C_e = 0$

3. Tres partículas tienen masas 8, 4 y 6, están ubicadas a lo largo de una recta en 3, -2 y

3 respectivamente, ¿cual será el centro de masa?

Rta:  $C_e = 17/9$

4. Un alambre tiene forma semicircular con radio 10 cm y densidad de  $12 \text{ gr/cm}^3$   
¿Cuál

será el centro de masa del alambre?

Rta:  $C_e = 20/\pi$

## Lección 40: Volumen

### TEOREMA DE PAPPUS:

Pappus, un griego de Alejandría, en el siglo III propuso dos fórmulas para relacionar los centróides de superficies y con sólidos de revolución. Dichas fórmulas simplifican el procedimiento para este tipo de problemas.

#### Teorema Del Volumen:

Si una región plana **R** se gira alrededor de una recta en el plano que no interfecta el interior de la región, entonces el volumen del sólido que se genera es igual al área de la región multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región durante el giro. Si  $D$  es la distancia desde el eje de rotación al centroide, entonces:

$$V = 2\pi D * A$$

Veamos la demostración:

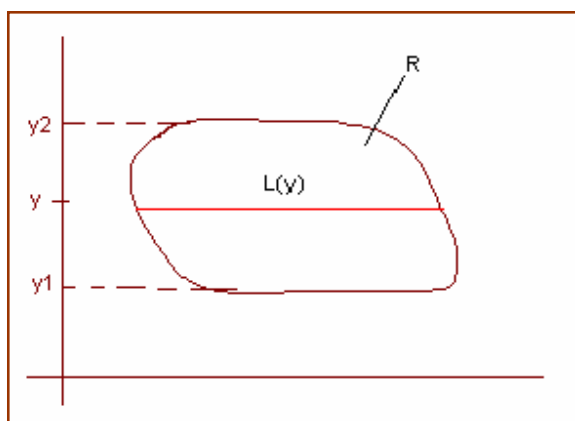


Fig. No. 40 teorema de Pappus

Sea  $L(y)$  = Longitud transversal de la sección  $R$ , perpendicular a  $y$ . Como  $L(y)$  es continua.

$$V = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} yL(y) dy$$

Para  $y_1$  y  $y_2$  dados.

La coordenada en  $y$  del centroide esta dado por :

$$\bar{y} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} yL(y) dy}{A} \quad \text{Luego:} \quad A\bar{y} = \int_{y_1}^{y_2} yL(y) dy$$

Reemplazando  $A\bar{y}$  en la ecuación de volumen, tenemos:

$$V = 2\pi A\bar{y} \quad \text{Pero} \quad \bar{y} = D \quad \text{Por} \quad \boxed{V = 2\pi D * A}$$

consiguiente:

Ejemplo No 1:

La región acotada por  $y = \text{sen}(x)$  para  $0 \leq x \leq \pi$ , se hace girar alrededor de  $x$ . Hallar el volumen por el teorema de Pappus.

Solución:

$$V = 2\pi D * A \quad \text{Como}$$

$$\text{Hallamos el área: } A = \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2$$

El volumen del sólido de revolución será:

$$V = \int_0^{\pi} \pi \text{sen}^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2x)] dx = \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{1}{2} \text{sen}(2x) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^2$$

Si aplicamos Pappus:

$$V = 2\pi DA = 2\pi * 2 * D = 4\pi D$$



## CAPITULO 9: En las ciencias.

### Introducción

Existen numerosas aplicaciones del cálculo integral a las ciencias, aparte de los temas que vamos a estudiar en este capítulo, también existen aplicaciones en el software computacional, como por ejemplo en el diseño de programas graficadores y que solucionan integrales indefinidas y definidas como DERIVE, MAPLE, SOLVED, ETC en los cuales se incluye la integración simbólica y el diseño de graficas.

### Lección 41: Integrales en la física: trabajo y movimiento.

**TRABAJO:** En el curso de Física General, aprendimos que cuando un objeto se mueve una distancia dada, se realiza un trabajo, pero para mover el objeto, se requiere de una fuerza constante  $w = f \cdot d \cdot \cos(\theta)$ , donde  $w$  = trabajo,  $d$  = distancia y  $\theta$  el ángulo entre el vector fuerza y el vector distancia.

La mayoría de los fenómenos de la naturaleza, presentan una característica la cual consiste en que a medida que el objeto se mueve en una trayectoria, la fuerza varia, lo que indica que la fuerza es función de la distancia. Sea  $F(x)$  la fuerza a lo largo de la trayectoria  $x$  y sea  $[a, b]$  un intervalo donde  $x$  es continua. La idea es hallar el trabajo realizado por la fuerza  $F(x)$  en dicho intervalo. Particionamos el intervalo  $[a, b]$  en  $k$  subintervalos y sea el punto  $c_k$  en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ . Tomamos un  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . El trabajo realizado a lo largo del intervalo será aproximadamente  $F(c_k)$  multiplicado por  $\Delta x_k$ , luego el trabajo total será:

Si la partición es grande, y su norma tiende a cero, podemos definir el trabajo  $W$  realizado por una fuerza  $F(x)$  a lo largo del intervalo  $[a, b]$  de la siguiente manera:

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

$$W = \sum_{k=1}^n F(c_k) \Delta x_k$$

La parte crucial para resolver problemas de este tipo es identificar claramente la función fuerza.

Ejemplo 1:

Cual será el trabajo realizado por una fuerza  $F(x) = \frac{2}{x^2}$  a lo largo del intervalo  $[1,5]$

Solución:

Como tenemos la función fuerza, podemos aplicar directamente la ecuación del trabajo.

$$W = \int_1^5 \frac{2}{x^2} dx = \left. -\frac{2}{x} \right|_1^5 = -2 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{1} \right) = -2 \left( -\frac{4}{5} \right) = \frac{8}{5} \text{ Julios}$$

En este ejemplo la función fuerza está definida, pero en muchas ocasiones se debe determinar la función fuerza a partir del análisis del fenómeno presentado.

Ejercicios:

1. Un objeto se mueve a lo largo del eje x debido a una fuerza  $F(x) = (2x+1)^2$  en Newton, cual será el trabajo realizado si el objeto se desplaza de  $x = 1$  metro a  $x = 3$  metros.  
 Rta: 158/3 Julios

2. Una partícula se mueve a lo largo del eje x debido a una fuerza  $F(x) = 4x - 2$  dinas. Si 100 ergios es el trabajo realizado para mover la partícula desde el origen hasta un punto  $x = c$  Hallar c si debe cumplir que  $c > 0$   
 Rta:  $C \approx 7,588$

3. Por la Ley de Gravitación Universal de Newton, cuando dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  se atraen mutuamente, la magnitud de la fuerza de atracción es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.  $F = G \frac{m_1 * m_2}{x^2}$  Donde G es la constante universal de la gravedad y x la distancia entre las masas. Si  $m_1 = 2$  Kg y está en el origen,  $m_2 = 4$  Kg Qué trabajo se realiza para mover  $m_2$  de del primer metro a quinto metro de distancia.

Rta:  $(32/4)G$  Julios.

### LEY DE HOOKE:

Por teoría de la Física general, se sabe la ley de Hooke, la cual establece que para mantener un resorte estirado o comprimido  $x$  unidades de su longitud natural, se requiere una fuerza  $F(x) = kx$ , donde  $k$  es la constante del resorte; además, se ha establecido que a mayor rigidez del resorte, mas alto es el valor de la constante. El trabajo realizado para estirar o comprimir un resorte, se puede calcular con la ecuación definida para trabajo realizado por una fuerza variable.

#### Ejemplo 1:

Un resorte tiene una longitud de 2 metros, al aplicarle una fuerza de 35 Newton, dicho resorte se estira hasta 3,5 metros.

Qué trabajo se requiere para que le resorte se estire 4 metros

Solución:

Como  $W = \int_a^b F(x)dx$  pero  $F(x) = kx$ , luego debemos determinar el valor de la constante, lo cual se puede hacer con los datos del problema.

Al aplicar 35 Newton, el resorte se estira de 2 a 3,5 Metros, entonces  $x = 1,5$  metros. Entonces, por la ley de Hooke:  $35 = k(1,5)$ , despejamos  $k$  y obtenemos:  $k = 23,33$  Nw/m.

Ahora planteamos la función fuerza:  $F(x) = 23,33x$  y así podemos hallar el trabajo.

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^4 23,33x dx = 23,33 \int_0^4 x dx = \frac{23,33}{2} x^2 \Big|_0^4 = 11,665(4^2 - 0^2) = 186,64 \text{ Julios.}$$

Los límites de integración se obtiene sabiendo que el resorte se estira 4 metros desde su posición original; es decir,  $x = 0$ .

### Ejemplo 2:

Un resorte es tal que la fuerza requerida para mantenerlo estirado  $s$  centímetros esta dado por  $F = 12s$ . Si la longitud del resorte es de 30 centímetros y se estira hasta 45 centímetros, cual será el trabajo realizado para estira el resorte.

Solución:

Tenemos la función fuerza  $F = 12s$ , por otro lado el resorte se estira de 30 a 45 centímetros; es decir, 15 centímetros, luego:

$$W = \int_0^{15} 12s ds = 12 * \frac{1}{2} s^2 \Big|_0^{15} = 6(15^2 - 0^2) = 1350 \text{ ergios.}$$

### Ejercicios:

1. La fuerza que mantiene un resorte estirado  $x$  centímetros es  $F(x) = 12x$  dado en dinas, qué trabajo se realiza para estirar dicho resorte 8 centímetros. Rta: 384 ergios

2. El motor de un automóvil ejerce una fuerza  $F(x) = 800x(1 - x)$  en la posición  $x$ , cual será el trabajo realizado para  $0 \leq x$ , Rta: 703.983 pie-Lb

3. Una cuerda tiene 50 metros de longitud, que trabajo se hace para recogerla completamente, si se encuentra completamente vertical Rta: 780 Julios

**Movimiento:** Cuando estudiamos las derivadas, veíamos que a partir de la función posición obteníamos la función velocidad y aceleración.

$$y = s(t)$$

$$y' = v(t)$$

$$y'' = a(t)$$

Ahora la idea es que a partir de la función aceleración obtener la función velocidad y luego la función posición. Así describir el movimiento del cuerpo.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Unos ejemplos nos ayudan a aclarar estos conceptos.

Ejemplo No 1:

Desde una altura de 20 metros, un nadador se lanza con una velocidad de 10 m/seg. en dirección ascendente. ¿Con qué velocidad toca el agua el nadador?

Solución:

$h(t)$  es la altura sobre el nivel del mar.

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g \quad \text{Por la segunda ley de Newton}$$

$h(0) = 20$  metros y  $\frac{dh}{dt}(0) = 10$  metros. Por las condiciones iniciales.

$$\text{Luego: } \frac{d^2h}{dt^2} = -g \Rightarrow \int \frac{dh}{dt} = \int -g dt \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -gt + c$$

$$\text{Como } \frac{dh}{dt} = v(t) \Rightarrow 10 = -g(0) + c \Rightarrow c = 10 \quad \text{por consiguiente:}$$

$$v(t) = -gt + 10 \quad \text{Ahora:}$$

$$h = \int v(t) dt = \int (-gt + 10) dt \Rightarrow h = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + c$$

Para hallar la constante, tenemos:

$$20 = -\frac{1}{2}g(0)^2 + 10(0) + c \Rightarrow c = 20 \quad \text{Luego:}$$

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + 20$$

Ejemplo No 2:

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 m/seg. (se ignora la resistencia el aire) cual será la altura de la pelota cuando han transcurrido 2 seg. del lanzamiento.

Solución:

Por definición:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g \quad \text{Siendo } g = 9,8$$

Ahora:

$$\frac{dh}{dt} = \int -g dt = -gt + c$$

$$\text{Como } \frac{dh}{dt}(0) = 50 \quad \text{Entonces:}$$

$$\frac{dh}{dt} = -gt + 50 = v(t)$$

Pero  $v(0) = 50$  entonces:

$$h = \int (-gt + 50) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + 50t + c$$

Como  $h(0) = 0$ , Luego:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + 50t$$

Cuando  $t = 2$  seg, entonces:

$$h = -\frac{1}{2}g(2)^2 + 50(2) = 100 - 78,4 = 21,6 \text{ metros.}$$

Ejemplo No 3:

Del problema anterior, calcular la velocidad a los 3 seg. de haber sido lanzada la pelota.

Solución:

Como  $v(t) = 50 - 9,8t$  Entonces, reemplazando el tiempo tenemos:

$$v(t) = 50 - 9,8(3) = 50 - 29,4 = 30,6m / seg.$$

Ejercicios:

1. Las condiciones iniciales para un objeto que se deja caer desde una altura de 150 metros son:

a-)  $y(0) = 150$      $y'(0) = 0$

b-)  $y(0) = 0$      $y'(0) = 150$

c-)  $y(0) = 50$      $y'(0) = 15$

d-)  $y(0) = 15$      $y'(0) = 150$

Rta: a

2. Una persona se encuentra a 20 metros de altura de una piscina olímpica, ¿Cuál será la velocidad con que la persona toca el agua al dejarse caer de dicha altura?

$$\text{Rta: } -8\sqrt{20} \text{ m/seg.}$$

3. Un objeto se mueve según la ecuación:  $x''(t) = -25\text{sen}(wt + \theta_0)$ , siendo  $x'(t) = 0$  y

$x(0) = 0$ , además  $\theta_0 = 0$  y  $w = 1$ . Cual será la ecuación de  $x(t)$  para este problema.

$$\text{Rta: } x(t) = \frac{25}{16}\text{sen}(4t) + \frac{24}{4}t$$

4. sabiendo que  $\frac{dv}{dt} = -g$  Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 20 m/seg,

a-) Cual será la altura máxima alcanzada por el cuerpo

b-) El tiempo de vuelo del cuerpo.

$$\text{Rta: a-) 20,408 metros}$$

$$\text{b-) 4,081 segundos}$$



## Lección 42: Integrales en la hidráulica: bombeo de líquidos.

Cuando se desea desplazar un líquido, es necesario hacer un trabajo. Debido a que los recipientes o lugares donde se almacena el líquido no tiene forma regular, la ecuación  $W = F \cdot d$  no aplica directamente, se requiere una transformación según la forma del recipiente, para así poder aplicar dicha ecuación. La resolución se sigue por las sumas de Riemman.

Con algunos ejemplos modelos podemos analizar problemas de este tipo.

Ejemplo 1:

Un tanque esférico de 10 metros de radio y lleno de agua, se desea bombear el agua por la parte superior del tanque. Determinar cuanto trabajo se debe hacer para bombear toda el agua.

Solución:

Se debe hallar  $W = \int_a^b F(x) dx$  La clave está en determinar la función  $F(x)$  para el fenómeno en mención.

Inicialmente sabemos que el intervalo de la variable  $x$  está entre 0 y 20 ¿porqué?

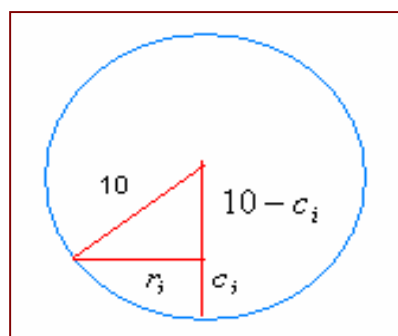
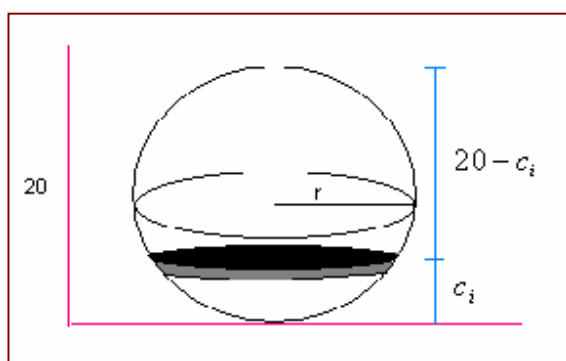


Fig. No. 41 Bombeo.

El radio  $r$  corresponde a la profundidad de  $x = c_i$  y que es la hipotenusa del triángulo, su valor es de 10 metros, la altura es  $10 - c_i$ , luego por Pitágoras:

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2 \Rightarrow r_i^2 = 100 - (10 - c_i)^2 \Rightarrow r_i^2 = 20c_i - c_i^2$$

La fuerza para mover el líquido (agua), es la gravedad sobre el mismo.

$F = m * g = \rho V g = V \rho g = V * peso$  Pero el peso es de  $1.000 \text{ Kg/m}^3$  que corresponde a la densidad del agua. Luego:

$$F = V * peso = \pi r^2 h * 1000 = 1000 \pi r^2 h \text{ Donde ya conocemos } r^2$$

Entonces:  $F = 1000 \pi (20c_i - c_i^2) \Delta x$  Aplicando la teoría de partición y por la sumas de Riemman.

$$W = F * d = 1000 \pi (20c_i - c_i^2) \Delta x (20 - c_i) \text{ Por consiguiente:}$$

$W = F * d = 1000 \pi (20 - c_i)^2 c_i \Delta x$  El trabajo total será el realizado en cada capa.

$$W = \sum_{i=1}^n 1000 \pi (20 - c_i)^2 c_i \Delta x \text{ Si aplicamos límite cuando } n \text{ tiende a infinito:}$$

$$W = \int_0^{20} 1000 \pi (20 - x)^2 dx = 1000 \pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3) dx \text{ Integrando:}$$

$$W = 1000 \pi \left( 200x^2 - \frac{40}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Bigg|_0^{20} = 1000 \pi (13.333,33) \text{ Finalmente:}$$

$$W = 1000 \pi (13.333,33) = 13'333.333,33 \text{ Julios.}$$

### Ejemplo 2:

Un depósito en forma de cono circular recto está lleno de agua, si la altura es de 10 pies y el radio de la parte más ancha es de 4 pies, hallar el trabajo para:

- a-) Bombear el agua del tanque por la parte superior
- b-) Bombear el agua 10 metros por encima del nivel del tanque.

Solución:

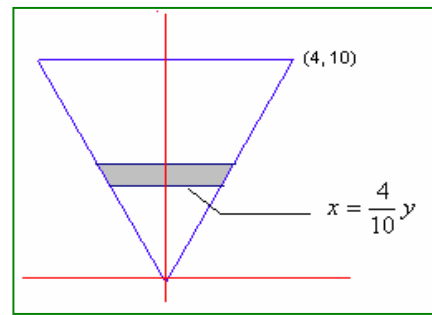
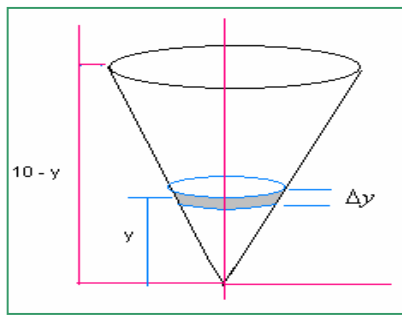


Fig. No. 42 Bombeo circular.

a-) Según la gráfica,  $y = \frac{10}{4}x$ , el disco tiene como grosor  $\Delta y$  y altura  $y$ , tiene un radio  $\frac{4}{10}y$ , luego el volumen será:  $\pi \left( \frac{4}{10}y \right)^2 \Delta y$ , con peso  $\rho \Delta y$ .

La fuerza necesaria para elevar el disco de agua es igual a su peso, entonces el trabajo requerido para elevar el disco de agua será:

$$w = f * d = \left( \rho \pi \left( \frac{4}{10}y \right)^2 \Delta y \right) * (10 - y) \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$w = \int_0^{10} \rho \pi \frac{16}{100} y^2 (10 - y) dy = \frac{16}{100} \rho \pi \int_0^{10} (10y^2 - y^3) dy \quad \text{Resolviendo:}$$

$$w = \frac{16}{100} \rho \pi \int_0^{10} (10y^2 - y^3) dy = \frac{16}{100} \rho \pi \left( \frac{10}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^{10} = 26.137,39 \text{ Lb-pie}$$

Se tomo la densidad como 62,4 Lb/Pie<sup>3</sup>

b-) El razonamiento es similar a la caso anterior, solo que para este caso la altura es 20 – y, luego:

$$w = \int_0^{10} \rho \pi \frac{16}{100} y^2 (20 - y) dy = \frac{16}{100} \rho \pi \int_0^{10} (20y^2 - y^3) dy \quad \text{Los límites no cambian}$$

¿porque?

$$w = \frac{4}{25} \rho \pi \int_0^{10} (20y^2 - y^3) dy = \frac{4}{25} \rho \pi \left( \frac{20}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^{10} \quad \text{Evaluando:}$$

$$w = 130.687,60 \text{ Lb – pie}$$

Ejemplo 3:

Mostrar que para un tanque lleno de agua, de forma cilíndrica vertical de 5 metros de radio y 10 metros de altura, se debe hacer un trabajo de  $69,3 \times 10^6$  Julios para bombear el agua 4 metros por encima del tanque.

Solución:

Por un lado:  $\Delta V = \pi r^2 h$  donde  $h = \Delta y$  Luego:  $\Delta V = \pi (5)^2 \Delta y$ . Por otro lado, como el

peso del agua es de 9.800 N/m<sup>3</sup>, entonces:  $F = \rho \Delta V = 9.800 \Delta V$ , Pero  $\Delta V = 25\pi \Delta y$ .

$$\text{Luego: } F = \rho \Delta V = 9.800 * 25\pi \Delta y = 245.000\pi \Delta y '.$$

Ahora  $\Delta W = F * d = F * (14 - y)$  El tanque mide 10 metros de largo y 4 metros que debe subir demás el líquido hace que la altura sea 14 metros. Ahora si podemos hallar el trabajo:

$$W = \int_0^{10} 245.000\pi(14 - y)dy = 245.000\pi \int_0^{10} (14 - y)dy = 245.000\pi \left( 14y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{10}$$

Evaluando obtenemos:

$$W = 69,3 \times 10^6 \text{ Julios.}$$

Así queda demostrado el problema.

Ejercicios:

1. Un tanque esférico está lleno de agua, el radio es de 10 pies y se desea bombear por la parte superior el agua hasta que el tanque quede a la mitad, que trabajo se realiza en este proceso. Rta:

816.814 pies-libra

2. Un tanque cilíndrico vertical tiene 20 metros de altura y 10 metros de radio, Qué trabajo se realiza para bombear el agua a un nivel de 4 metros por encima del tanque.

$$D_{\text{agua}} = 9.800 \text{ N/m}^3$$

Rta: 862'055.040 Julios

3. Un tanque de almacenamiento de forma cilíndrico vertical tiene Kerosén, cuyo peso es 51,2 Lb/pie<sup>3</sup>, el tanque tiene 30 pies de alto y 20 pies de diámetro. Qué trabajo se necesita para bombear el combustible hasta el nivel superior del tanque.

Rta: 7'238.229,48 pies- libra

4. Un tanque tiene forma de cono circular invertido, 10 metros de altura y 4 metros de radio en la parte más ancha. Es llenado con agua hasta 8 metros de altura, Qué trabajo se requiere para vaciar el tanque hasta la parte superior. Rta: 3,4X10<sup>6</sup> Julios

### Lección 43: Integrales en la estadística: función de distribución.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

En Estadística las integrales son una herramienta para hallar probabilidades de ocurrencia de sucesos de variables aleatorias tipo continuo. Estudiaremos dos casos de los muchos que se presentan, como ilustración de las integrales a la ciencia de la estadística.

#### Función de distribución:

Es la probabilidad de que una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f(x)$  tome un valor menor o igual que  $x$ .

$$P(X \leq x) = F(x)$$

Donde:  $F(x)$  es la función de distribución y  $x$  la variable aleatoria. Este tipo de función no puede ser negativa, ya que corresponde a una función de probabilidad, tampoco puede ser decreciente debido a que es acumulativa; además, es acumulativa.  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Entonces para cualquier  $x$ ,  $F(x) = P(X \leq x)$ , que significa el área bajo la función de densidad de probabilidad sobre el intervalo  $(-\infty, x]$ . Por la notación de integrales:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

De la función de distribución se puede resaltar:

- )  $F(-\infty) = 0$  y  $F(\infty) = 1$
- )  $p(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
- )  $p(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) \geq 0$

### **Función de Densidad de Probabilidad:**

También se le llama Densidad de Probabilidad. Sea  $f(x)$  una función llamada como función de densidad de probabilidad; entonces:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Área bajo la curva:

Donde  $P(a \leq X \leq b)$  significa la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor entre  $a$  y  $b$ , la función  $f(x)$  obviamente debe ser integrable en el intervalo establecido. Al elemento  $f(x)dx$  se le conoce como probabilidad elemental o elemento diferencial de probabilidad.

Algunas propiedades de esta función:

-)  $f(x) \geq 0$  ya que  $p(x) \geq 0$

$$-) p(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$-) 0 \leq p(a \leq x \leq b) \leq 1$$

Ejemplo 1:

Dada una función de distribución  $F(x) = 2x - x^2$  en  $[0, 1]$ . Hallar la función de densidad de probabilidad

Solución:

La función de densidad se obtiene derivando la función de distribución

Como  $f(x) = F'(x)$  entonces:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = 2 - 2x$$

Ejemplo 2:

Para el ejemplo anterior, hallar la probabilidad de que un evento aleatorio sea  $\{X \leq 0,2\}$

Solución:

$$P(X \leq 0,2) = \int_0^{0,2} (2 - 2x) dx = (2x - x^2)_0^{0,2} = 0,4 - 0,04 = 0,36 \quad \text{Por consiguiente:}$$

$$P(X \leq 0,2) = 0,36$$

Ejemplo 3:

Una variable aleatoria tiene como función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otros} \end{cases}$$

Cual será la probabilidad de que la variable tome un valor entre 1 y 3.  $1 \leq X \leq 3$

Solución:

$$\text{Por definición: } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Como X está en la condición para que  $f(x) = 2e^{-2x}$  entonces:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 2e^{-2x} dx = 2 \int_1^3 e^{-2x} dx \quad \text{Operando:}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = 2 \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right)_1^3 = -(e^{-6} - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6} \cong 0,1328$$



Ejemplo 4:

Para el ejemplo anterior, cual es la probabilidad de que la variable tome un valor mayor que  $\frac{1}{2}$ .

Solución:

Siguiendo el procedimiento de la definición:

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 2e^{-2x} dx = 2 \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right)_{\frac{1}{2}}^{\infty} = -e^{-2x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty}$$

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = -(e^{-\infty} - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-\infty} \cong 0,3678$$

Existen muchas funciones de densidad de probabilidad, utilizadas en el mundo de la Estadística, tales como: La Normal, Log normal,  $\chi^2$  de Pearson, otras. Estas se pueden explorar en el curso de Estadística y de Probabilidad.

Ejercicios:

1. La densidad de probabilidad de una variable aleatoria está dada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{para otros casos} \end{cases}$$

a-) Hallar la función de distribución

b-) Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria con esta función de

distribución tome un valor mayor a 1,8

$$\text{Rta: a-)} F(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{b-)} P(X > 1,8) = 0,02$$

2. Para el ejercicio numero 1, determinar la probabilidad de que una variable aleatoria con esta función de distribución, tome un valor entre 0,2 y 0,6

$$\text{Rta: } P(0,2 \leq X \leq 0,6) = 0,16$$

3. La función de distribución de una variable aleatoria está dada por la expresión:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & \text{para } x > 2 \\ 0 & \text{para } x \leq 2 \end{cases}$$

Cual será la probabilidad de que la variable aleatoria:

a-) Tome un valor menor que 3

b-) Tome un valor entre 4 y 5

$$\text{Rta: a-)} P(x < 3) = 0,555 \qquad \text{b-)} P(4 < x < 5) = 0,09$$

4. El consumo de energía de cierta planta es una variable aleatoria, cuya función de

densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{9} x e^{-\frac{x}{3}} \quad \text{Para } x > 0$$

La planta tiene una capacidad diaria de 12 millones de Kw/hr. Cual será la probabilidad de que el suministro de energía sea inadecuado en un día dado.

$$\text{Rta: } P(0 < x < 12) \cong 0,0916$$

5. la vida útil de un artículo electrónico es una variable aleatoria, con función de densidad de probabilidad:  $f(x) = 6e^{-6x}$  ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo dure menos de 3 meses?

$$\text{Rta: } P(0 < x < 3/12) = 0,7768$$

6. Para el caso de la vida útil del artículo electrónico referenciado en el ejercicio anterior, ¿Cuál será la probabilidad de que el artículo electrónico dure entre 2 y 4 años?

$$\text{Rta: } P(2 < x < 4) = 0,000006144$$

## Lección 44: Integrales en la economía.

$$E.C = \int_0^Q D(x)dx - QP$$

En Economía son muy usados los términos demanda y oferta. La curva de demanda del consumidor  $P = D(x)$ , nos da el precio de demanda que el consumidor está dispuesto a pagar por unidad para  $x$  unidades, la curva generalmente es decreciente, debido a que al vender cantidades mayores, el precio baja. La curva de oferta del productor  $P = S(x)$ , nos da el precio por unidad al cual el vendedor está dispuesto a ofrecer  $x$  unidades, la curva es creciente, ya que a mayores cantidades, el precio de venta sube.

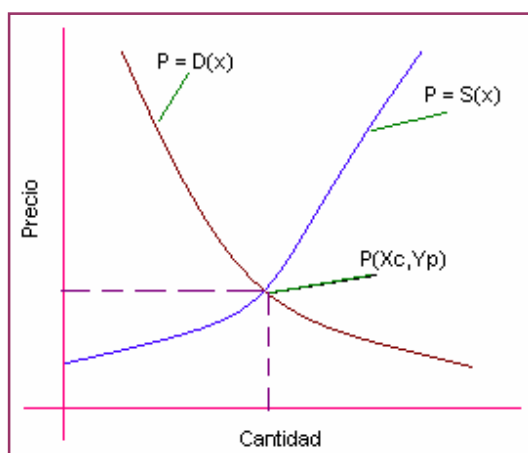


Fig. No. 43 curva oferta – demanda.

### CURVA DE OFERTA – DEMANDA

La gráfica muestra la curva de oferta

$P = S(x)$  y la curva de demanda  $P = D(x)$ .

$P(X_c, Y_p)$  corresponde al punto de equilibrio.

Utilidad: Es el concepto asociado con una función que describe el grado de beneficio o satisfacción, cuando el consumidor recibe  $x$  unidades.

### EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR: (E.C.)

En términos sencillos, el excedente del consumidor E.C. es la cantidad de dinero que ahorra un consumidor cuando compra un artículo a  $P$  precio, para una cantidad  $x$  de artículos. Lo anterior se traduce en la utilidad del consumidor, cuando disminuye el precio a razón de aumentar la compra del artículo.

Para  $Q$  artículos el precio es  $P$ , luego el gasto total será  $QP$ . El área total bajo la curva es la utilidad total  $U$ .

$$U = \int_0^Q D(x)dx$$

$D(x)$  es la función demanda.

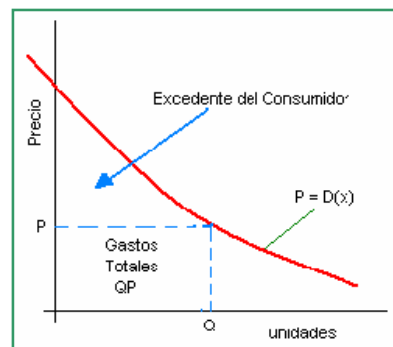


Fig. No. 44 Excedente.

Así, el excedente del consumidor será entonces la utilidad menos los gastos totales.

$$E.C = \int_0^Q D(x)dx - QP \quad \text{Excedente del Consumidor}$$

### EXCEDENTE DEL PRODUCTOR: (E.P.)

Los economistas lo refieren a la utilidad que recibe el productor, cuando se ofrece mayores cantidades del artículo, a razón del aumento del precio. Esto significa los ingresos extras que recibe el productor, cuando el consumidor aumenta la compra del artículo.

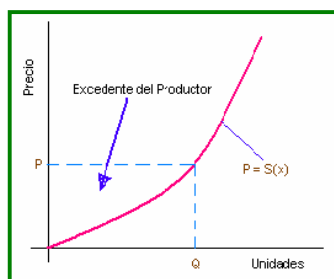


Fig. No 45 Excedente del productor.

Como  $Q$  es la cantidad de artículos ofrecidos a  $P$  precio, la cantidad recaudada será de  $QP$ . El excedente del productor  $E.P$ , será el recaudo total menos el área bajo la curva, que corresponde a la función oferta de producción.

$$E.P = QP - \int_0^Q S(x)dx \quad \text{Excedente del productor.}$$

Ejemplo 1:

Dadas las funciones demanda  $D(x) = (x - 5)^2$  y de oferta  $S(x) = x^2 + x + 3$ , hallar

- a- El punto de equilibrio
- b- El E. C. en el punto de equilibrio
- c- El E. P. en el punto de equilibrio

Solución:

a- El punto de equilibrio es donde  $D(x) = S(x)$ , es decir:  $(x - 5)^2 = x^2 + x + 3$ . Haciendo las operaciones algebraicas:  $x^2 - 10x + 25 = x^2 + x + 3$ , despejamos la variable, luego:  $x_E = 2$ . Ahora podemos hallar el valor de  $y$ , así:  $y_E = (2 - 5)^2 = 9$ , el punto de equilibrio será:  $P(2, 9)$

b- Para calcular el excedente del consumidor, utilizamos la ecuación para E. C.

$$E.C. = \int_0^2 (x - 5)^2 dx - QP = \frac{1}{3} (x - 5)^3 \Big|_0^2 - (2) * (9)$$

Evaluando y simplificando:

$$E.C. = \frac{1}{3} (-27 + 125) - 18 = 32,667 - 18 = 14,667$$

c- De igual manera que en el caso anterior, el excedente del productor se calcula con la ecuación para este fin.

$$E.P = QP - \int_0^2 S(x)dx = 18 - \int_0^2 (x^2 + x + 3)dx \quad \text{Desarrollando tenemos:}$$

$$E.P = 18 - \left( \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) \Big|_0^2 = 18 - \frac{32}{3} = \frac{22}{3} \cong 7,33$$

Ejemplo 2:

La demanda de un producto está gobernada por la función:  
 $D(x) = 1.200 - 0,2x - 0,0001x^2$  ¿Cuál será el excedente del consumidor para un nivel de ventas de 500 unidades?

Solución:

Para este caso  $Q = 500$ , luego  $P = 1.200 - 0,2(500) - 0,0001(500) = 1.075$ ,  
 entonces el gasto total será de  $QP = 500 \cdot 1075 = 537.500$

Ahora calculamos el E. C. utilizando la ecuación correspondiente.

$$E.C. = \int_0^{500} (1.200 - 0,2x - 0,0001x^2) dx - 537.500$$

$$E.C. = \left( 1.200x - 0,1x^2 - 3,33 \times 10^{-5} \right) \Big|_0^{500} - 537.500 = 570.837,5 - 537.500$$

$$E.C. = 570.837,5 - 537.500 = 33.337,5$$

Ejemplo 3:

Determinar el E. P. Para un producto cuya función oferta es:  $S(x) = \frac{1}{2}x + 2x$ ,  
 para  $x = 20$ .

Solución:

Para este caso  $Q = 20$ , luego  $P = 20/2 + 2(20) = 50$ . Entonces:  $QP = 20 \cdot 50 = 1.000$

A continuación se calcula el E. P.

$$E.P. = 1.000 - \int_0^{20} \left( \frac{1}{2}x + 2x \right) dx = 1.000 - \left( \frac{1}{4}x^2 + x^2 \right) \Big|_0^{20} = 1.000 - (100 + 400)$$

$$E.P. = 1.000 - (100 + 400) = 500$$

### EJERCICIOS:

1. La función oferta de cierto artículo está dada por:  $s(x) = \frac{\sqrt{x}}{10} + 5$ . Para un precio de venta de \$10. Calcular el excedente del productor cuando el precio de venta es de \$10.

Rta: E.P. = \$4.166,67

2. La función demanda para un producto es de la forma  $D(x) = \frac{450}{x+8}$ .

a-) Cual será el nivel de venta para un precio de \$10

b-) encontrar el excedente del consumidor para el nivel de ventas de la parte a.

Rta: a-)  $Q = 37$

b-) E.C. = 407,15

3. En un análisis económico, la función demanda y oferta son respectivamente:

$D(x) = (x-4)^2$  y  $S(x) = x^2 + 2x + 6$ . Calcular el excedente del productor en el punto de equilibrio.

Rta: E. P. = \$1,67

4. Para el caso el problema 3, calcular el excedente del consumidor, cuando la venta es de un artículo.

Rta: E. C. = \$3,33

## COSTO TOTAL:

Siguiendo el estudio de las integrales en la economía, se debe hacer notar otros términos que en economía son frecuentes como costo marginal y costo total. El concepto de “Marginal” hace referencia al cambio que manifiesta una cantidad, cuando hay un cambio muy pequeño de una segunda cantidad, en este orden de ideas si conocemos la función costo marginal  $C'(x)$  o  $dC/dx$ , se puede hallar el costo total.  $C(x)$ , entendiendo este último como el costo necesario para producir  $x$  unidades de cierto artículo.

El costo marginal será  $C'(x)$  siendo  $x=x_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Si la derivada existe, entonces a dicha función se le llama función costo marginal.

Con el principio de la antiderivada, podemos inferir que a partir del costo marginal podemos hallar el costo total. Al realizar el proceso de integración, la constante arbitraria, se puede evaluar si se conoce el costo general; es decir, el costo sin producir unidad alguna, entonces:

$$C(x) = \int c'(x)dx \quad \text{Costo total de producción}$$

NOTA: El costo marginal, no puede ser negativo, luego  $c'(x) \geq 0$

Ejemplo 1:

Dad la función costo marginal  $\frac{dC}{dx} = 3x - 12$ . la producción de 4 unidades, origina un costo de \$16. Hallar la función costo total.

Solución:

Como  $\frac{dC}{dx} \geq 0 \Rightarrow 3x - 12 \geq 0$  Luego  $x \geq 4$  Ahora:

$$C(x) = \int (3x - 12)dx = \frac{3}{2}x^2 - 12x + c$$

Pero  $C(4) = 16$ , entonces:  $16 = \frac{3}{2}(4)^2 - 12(4) + c$  despejando  $c$ , se obtiene:  $c = 40$ .

Por consiguiente:  $C(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 40$



Pero la mínima cantidad que se debe producir es de 4 unidades.  $x \geq 4$

Ejemplo 2:

En un proceso de producción la función costo marginal está dada por:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{\sqrt{5x+4}}$$

El costo general es de \$10, ¿Cuál será el costo total?

Solución:

$$C(x) = \int \frac{3}{\sqrt{5x+4}} dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} \quad \text{Aplicando cambio de variable: } u = 5x + 4 \quad \text{entonces}$$

$du = 5dx$ , despejando  $dx = du/5$ , ahora reemplazamos en la integral original.

$$3 \int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} = 3 \int \frac{du/5}{\sqrt{u}} = \frac{3}{5} \int u^{-1/2} du \quad \text{Integrando se obtiene:}$$

$$\frac{3}{5} * \frac{u^{1/2}}{1/2} + c = \frac{6}{5} \sqrt{u} + c \quad \text{Luego:}$$

$$C(x) = \frac{6}{5} \sqrt{5x+4} + c$$

Para hallar el valor de  $c$ , tomamos las condiciones dadas:  $C(0) = 10$ , entonces:

$$10 = \frac{6}{5} \sqrt{5(0)+4} + c \quad \text{Despejando } c \text{ se obtiene: } c = 38/5. \quad \text{Finalmente:}$$

$$C(x) = \frac{6}{5} \sqrt{5x+4} + \frac{38}{5}$$

## INGRESO TOTAL:

Para estudiar el ingreso total, debemos recordar el concepto de ingreso marginal, denotado por  $R'(x)$ , para  $x = x_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots$ . La función  $R'(x_i)$  si existe se le llama ingreso marginal. “Esta función puede ser positiva, negativa o cero” Se interpreta como la tasa de cambio del ingreso total cuando se requieren  $x$  unidades.

A partir del ingreso marginal, podemos obtener el ingreso total, por medio de integrales indefinidas.

Si  $p$  es el precio unitario y  $x$  las unidades vendidas, entonces el ingreso será:

$$R(x) = p \cdot x$$

Según la ecuación anterior, el ingreso total lo podemos obtener a partir del ingreso marginal.

$$R(x) = \int R'(x) dx$$

Ejemplo 1:

Cual será el ingreso total para la función marginal  $R'(x) = 300 - x$

Solución:

$$\text{Por definición: } R(x) = \int R'(x) dx \Rightarrow R(x) = \int (300 - x) dx = 300x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

Para hallar el valor de  $c$ , partimos de la siguiente premisa: El ingreso es cero, cuando el número de unidades es cero; es decir,  $R(0) = 0$

Reemplazando en la función obtenida:  $300(0) - \frac{1}{2}(0)^2 + c = 0$ , despejando  $c$  se obtiene que  $c = 0$ , por consiguiente:

$$R(x) = 300x - \frac{1}{2}x^2$$

Recordemos que cuando  $x = 0$ , no hay ingresos.

Ejemplo 2:

La **utilidad total** se le llama  $P(x)$  y se define como:  $P(x) = R(x) - C(x)$

Una compañía tiene para un artículo el valor de \$100 la unidad; precio de venta. Si produce diariamente  $x$  unidades, el valor por producción marginal es  $2x + 20$ . El costo general es de \$700.

Hallar:

a-) La función utilidad total

b-) La utilidad que se obtiene al producir 40 unidades.

Solución:

a-)  $C'(x) = 2x + 20$  Entonces:  $C(x) = \int (2x + 20)dx = x^2 + 20x + c$

Para  $C(0) = 700$ , luego:  $700 = 0^2 + 20(0) + c$ ,  $c = 700$ , la función costo total será:

$$C(x) = x^2 + 20x + 700$$

La función ingreso será:  $R(x) = 100x$  como tenemos la función costo total  $C(x)$ , entonces podemos calcular la función utilidad.

$$P(x) = 100x - (x^2 + 20x + 700) = -x^2 + 80x - 700$$

Así, la función utilidad total será:  $P(x) = -x^2 + 80x - 700$

b-) Como conocemos la función utilidad, solo reemplazamos para  $x = 40$ , entonces:

$$R(40) = -(40)^2 + 80(40) - 700 \quad \text{Desarrollando:}$$

$$R(x=40) = 3.200 - 2.300 = 900$$

**EJERCICIOS:** Lección No. 4

1. Para cierta mercancía la función ingreso marginal está dada por:  $R'(x) = 20 - 4x$ , cual será el ingreso total cuando se requieren 10 unidades de la mercancía.

Rta:  $R(x=10) = 0$

2. La función costo marginal para cierto artículo está gobernado por:

$$C'(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+4}}$$

Si el costo general es de \$10, cual será el costo total en la producción de 50 artículos.

Rta:  $C(x=50) = 26,725$

3. En la producción de una pasta de jabón para tocador, la función ingreso marginal se determinó como:  $R'(x) = 8 - 2x + x^2$ . ¿Cuál será el ingreso total para 12 unidades?

Rta:  $R(x=12) = 528$

4. La fábrica de bombillas “El Alumbrador” tiene como precio de venta para su artículo el valor de \$700 la unidad. Si produce diariamente  $x$  unidades, el valor por producción marginal es  $5x + 8$ . El costo general es de \$800. ¿Cuál será la utilidad al producir 50 bombillas?

Rta:  $P(x) = \$27.550$

## Lección 45: Integrales en las ciencias sociales.

Vemos los siguientes ejemplos:

### Problema No. 1

La rata a la cual está creciendo la población de cierta ciudad, cambia con el tiempo. Se calcula que dentro de  $t$  meses la rata de crecimiento será de  $3 + 4\sqrt{t}$  personas por mes. La población actual es de 25.000 personas.

Cual será la población dentro de 16 meses?

SOLUCION:

Designemos  $p(t)$  la población dentro de  $t$  meses. La derivada de  $p(t)$  expresa la rata de cambio de la población, es decir  $\frac{dp}{dt} = 3 + 4\sqrt{t}$

Se deduce que la función población  $p(x)$  es una integral, por lo tanto:

$$p(t) = \int (3 + 4\sqrt{t}) dt = 3t + \frac{4\sqrt{t} + 1}{0.5 + 1} + c = 3t + \frac{4t^{3/2}}{1.5} + c = 3t + \frac{8t^{3/2}}{3} + c$$

Para determinar  $t$  usamos la información sobre la población inicial o sea  $t = 0$ .

$$\text{Si } t = 0 \rightarrow P(t) = 25000 = C$$

$$\text{Por lo tanto: } P(t) = 3t + \frac{8t^{1.5}}{3} + 25000$$

Dentro de 16 meses la población será de:  $P(16) = 3(16) + \frac{8(16)^{1.5}}{3} + 25000 = 25216$  personas.

### Problema No. 2

Dentro de  $x$  horas, las bacterias de cierto cultivo estarán creciendo a una rata de  $4x + 5e^{2x}$  por hora. El número de bacterias actual es de 10.000.

Cuántas habrá después de transcurrir 8 horas?

SOLUCION:

La rata de crecimiento se obtuvo de derivar, por lo tanto para hallar la función de crecimiento integramos:

$$\int (4x + 5e^{2x}) dx = 2x^2 + 2.5e^{2x} + c$$

Para determinar  $C$  realizamos  $x=0$  en  $f(x)$ , entonces:  $f(0) = 2.5 + c = 10000$ , por lo tanto:  $c = 9997.5$

$$f(x) = 2x^2 + 2.5e^{2x} + 9997.5$$

## ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD

### PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

A continuación, usted encontrará preguntas que se desarrollan en torno a un enunciado, problema o contexto, frente al cual, usted debe seleccionar aquella que responde correctamente a la pregunta planteada entre cuatro opciones identificadas con las letras **A, B, C, D**. Una vez la seleccione, márquela en su hoja de respuestas rellenando el óvalo correspondiente.

1. El área entre las curvas  $4x^2 + y = 4$  y  $x^4 - y = 1$  es:

A.  $\frac{104}{15}$

B.  $\frac{10}{53}$

C.  $\frac{4}{17}$

D.  $\frac{235}{45}$

2.Cuál será el volumen del solido generado por las curvas  $y = x$  y  $y = 1$  cuando giran alrededor del eje x:

A. 2.094

B. 1.98

C. 4.78

D. 3.61

3. El volumen del solido generado cuando se hace girar alrededor del eje  $y$ , la región por encima de la parábola  $f(x) = x^2$  y por debajo de la curva  $g(x) = 2 - x^2$

- A. 3.1416
- B. 6.287
- C. 2.416
- D. 4.652

4. Si  $\frac{dv}{dt} = -g$ . Entonces un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, con una velocidad de  $\frac{20m}{seg}$ , Que altura alcanza?

- A. 20.408
- B. 13.456
- C. 54.321
- D. 37.98

5. Sea la variable aleatoria  $X$ , que tiene como función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otros} \end{cases}$$

Cuál es la probabilidad de que la variable tome un valor mayor que 0.5





- A. 0.3678
- B. 0.4531
- C. 0.7865
- D. 0.1943

6. La función ingreso marginal está dada por  $R(x) = 20 - 4x$ . Cuál será el ingreso total cuando se requieren 10 unidades de la mercancía?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

### HOJA DE RESPUESTAS.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				

## LABORATORIO

Referido a las aplicaciones podemos realizar una combinación de los dos software anteriores o bajar el software libre más apropiado del link. La idea es comprobar las respuestas a los problemas planteados y realizados manualmente, mediante la utilización de un software libre.

<http://www.pnte.cfnavarra.es/ieszizur/departamentos/matematicas/recursos/infos/index3.html>

**Ejemplo No. 1** Hallar la longitud de la línea generada por  $f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 8}{x + 1}$  entre  $x = 2$  y  $x = 4$

Recordemos que  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

Al simplificar obtenemos:  $f(x) = 4x - 8$   
 $f'(x) = 4$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + 16} dx = \sqrt{17} x \Big|_2^4 = \sqrt{17} * 4 - \sqrt{17} * 2 = \sqrt{68}$$

Con SOLVED:

$$\int_2^4 \frac{4x^2 - 4x - 8}{x+1} dx$$

Set up the polynomials to be divided. If there is not a term for every exponent, insert one with a value of 0.

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8}$$

Divide the highest order term in the dividend  $4x^2$  by the highest order term in divisor  $x$ .

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x \\ \hline \end{array}$$

Multiply the new quotient term by the divisor.

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x \\ \hline 4x^2 + 4x \\ \hline \end{array}$$

The expression needs to be subtracted from the dividend, so change all the signs in  $4x^2 + 4x$ .

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x \\ \hline 4x^2 - 4x - 8 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline \end{array}$$

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x \\ \hline 4x^2 - 4x - 8 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline -8x \end{array}$$

Pull the next term from the original dividend down into the current dividend.

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x \\ \hline 4x^2 - 4x - 8 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline -8x - 8 \end{array}$$

Divide the highest order term in the dividend  $-8x$  by the highest order term in divisor  $x$ .

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x - 8 \\ \hline 4x^2 - 4x - 8 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline -8x - 8 \end{array}$$

Multiply the new quotient term by the divisor.

$$x+1 \overline{) 4x^2 - 4x - 8} \quad \begin{array}{r} 4x - 8 \\ \hline 4x^2 - 4x - 8 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline -8x - 8 \\ -8x - 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x-8 \\ x+1 \overline{) 4x^2-4x-8} \\ \underline{-4x^2-4x} \phantom{-8} \\ -8x-8 \\ \underline{8x+8} \\ 0 \end{array}$$

Subtract the last dividend from the multiplied polynomial to find the new dividend.

$$\begin{array}{r} 4x-8 \\ x+1 \overline{) 4x^2-4x-8} \\ \underline{-4x^2-4x} \phantom{-8} \\ -8x-8 \\ \underline{8x+8} \\ 0 \end{array}$$

The final answer is the quotient plus the remainder over the divisor.  
 $4x-8$

To find the integral of  $4x$ , find the anti-derivative. The formula for the anti-derivative of a basic monomial is  $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} dx$ .

$$2x^2 + \int_2^4 -8 dx$$

The integral of a constant with respect to  $x$  is the constant times  $x$ .  
 $2x^2 - 8x$

bound of 4, then subtract the solution at the lower bound of 2.  
 $2(4)^2 - 8(4) - [2(2)^2 - 8(2)]$

Simplify the result.  
 8 ✓

**Ejercicios propuestos:** Recuerde simplificar las integrales antes de ingresarlas al software.

Resolver:

- Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$ , mediante una fuerza impulsora  $f(x) = x^2 + x - 1$  dada en Newton. Los Julios de trabajo que se realizan con esa fuerza desde  $x = 2$  hasta  $x = 4$ , son:

- La demanda de un producto está gobernada por la función  $D(x) = 1000 - 0.2x - 0.0003x^2$ . Cual será el excedente del consumidor para un nivel de ventas de 500 unidades?
- Una varilla de 20 centímetros de longitud presenta una densidad de  $\rho(x) = 12x^2 - 1$ . El centro de masa es igual a:
- Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas. Si una fuerza de 20 libras estira el resorte 0.5 de pulgada. El trabajo realizado al estirar el resorte de 8 pulgadas a 11 pulgadas, es:
- Se necesita subir una roca que se encuentra a una profundidad de 80 metros. La roca pesa 3000 kilogramos y la guaya que la sostiene de la grúa pesa 10 kg/m. El trabajo para subir la roca es de
- El excedente del consumidor de un producto para un nivel de venta a un precio  $P$  de  $Q$  artículos, está dado por la expresión  $EC = \int_0^Q D(x) dx - QP$ . El excedente del consumidor de un producto a un precio de \$5.000 cuya ecuación de la demanda está dada por  $D(x) = (x + 8)^2$ , es
- La ecuación que mide el caudal de un río, en función de los meses del año, está dada por  $f(x) = 3 + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ . Donde  $f(x)$  está en  $\frac{m^3}{seg}$  y  $x$  en meses. La cantidad de agua que pasa por el río en un año es:
- Si la función demanda es  $D(q) = 1000 - 0.4q^2$  y la función oferta es  $S(q) = 42q$

Calcule el excedente del productor  $EP$  Y el excedente del consumidor  $EC$

- Dadas las funciones demanda  $D(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$  y oferta  $S(x) = 26 + x$ , el excedente del consumidor en el punto de equilibrio es:
- La demanda de un producto está dada por la función  $D(x) = 1000 - 0.2x - 0.0003x^2$ .

El excedente del consumidor (EC) para unas ventas de 500 unidades es:

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA UNIDAD 3

RONDON, J.E (2007) Calculo Integral. Primera edición, UNAD Ciencias básicas

PURCELL, E (2001) Cálculo, Pearson Education: Prentice hall, Octava Edición, México.

THOMAS Y FINNEY (1987). Cálculo con Geometría Analítica Vol. 1. Edición sexta, Addison Wesley Iberoamericana. México.

STEWART, J. (2001) Cálculo de una Variable. Thomsom-Learning. Cuarta edición, Bogotá.

LARSON, R. Y HOSTETLER, R. (1998) Cálculo Vol. 1, Mc Graw Hill, sexta edición, México.

SMITH, R. Y MINTON, R. (2002) Cálculo Vol. 1. Segunda Edición, Mc Graw Hill, Bogotá.

BAUM Y MILLES. (1992). Cálculo Aplicado. Limusa, México.

LEYTOLD, L. (1987) El Cálculo con Geometría Analítica. Harla, México.

PITA, C. (1998) Cálculo de una Variable. Pearson educación, México.

DE BURGOS, J. (2007) Cálculo infinitesimal de una Variable. McGraw Hill, Madrid.

## FUENTES DOCUMENTALES DE LA INTERNET

<http://www.xtec.cat/~ilagares/integral.esp/integral.htm>

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/54-1-p-Integral.html>

[http://sigma.univalle.edu.co/index\\_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf](http://sigma.univalle.edu.co/index_archivos/calculo1y2/formulasdecalculo1y2.pdf)

<http://www.matematicasbachiller.com/temario/calculin/index.html>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_fundamental\\_del\\_c%C3%A1lculo](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo)

<http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm>



<http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml>

<http://www.fata.unam.mx/tecnologia/material/sem-01/Calculo I Historia 1.pdf>

[http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html)

[http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2\\*%28x-4%29%5E0.5&random=false](http://integrals.wolfram.com/index.jsp?expr=x%5E2*%28x-4%29%5E0.5&random=false)

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/tutoriales/integracion/>

<http://www.matematicasypoesia.com.es/ProblIntegral/problema110.htm>

<http://usuarios.iponet.es/ddt/logica1.htm>