Contents

0.1 Théorie du portefeuille de Markowitz (1952)

0.1.1 Théorie de l'utilité Von Neumann et Morgenstern (1947)

La théorie de Von Neumann et de Morgenstern est de dire que chaque agent à sa propre fonction d'utilité qu'il va chercher à maximiser.

Exemple.

- Celle de type utilité espérance
$$U(W) = \mathbb{E}[W]$$
- La fonction d'utilité de Markowitz
$$U(W) = f(\mathbb{E}[W], \mathbb{V}[W]) = \mathbb{E}[W] - K\mathbb{V}[W]$$

Définition (Prime de risque).

$$\Pi^u(W) = \mathbb{E}[W] - e^C(W)$$

Ce qui permet de catégoriser les préférences des agents:

- $\Pi^u(W) \geq 0, \forall W$, l'agent est averse au risque $\iff$ u est une fonction concave
- $\Pi^u(W) \leq 0, \forall W$, l'agent aime le risque $\iff$ u est une fonction convexe
- $\Pi^u(W) = 0, \forall W$, l'agent est neutre $\iff$ u est affine

0.1.2 Le modèle de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille (Markowitz 1952) parfois appelés mean-variance analysis est le cadre mathématique qui a formalisé cette intuition: La diversification permet de réduire la probabilité de tout perdre. L'idée principale est que le risque ne dépends pas que des actifs du portefeuille mais aussi des corrélations entre les actifs. Ainsi on ne veut pas que maximiser la rentabilité mais maximiser surtout la rentabilité ajusté au risque.

Remarque. La théorie du portefeuille n'est pas de la prédiction. Il ne va pas suggérer quel stock choisir. Plutôt, cette analyse explique comment construire un portefeuille avec des propriétés désirables sur le risque et la rentabilité.

0.1.3 Frontière efficiente lorsqu'il n'y a pas d'actifs sans risque

0.1.3.1 Cas simple avec deux actifs

Le problème est de déterminer l'allocation optimale du portefeuille x afin de résoudre le problème:

$$\underset{x}{sup}\, U(W^x) = f(\mathbb{E}[W^x] - \mathbb{V}[W^x]); \quad W^x = W_T = W_0(1 + R(x))$$

Où W^x est la richesse terminale du portefeuille opéré par x. Et w_0 est la richesse initiale investie, W_T la richesse totale. Pour maximiser la fonction on le fait soit pour:

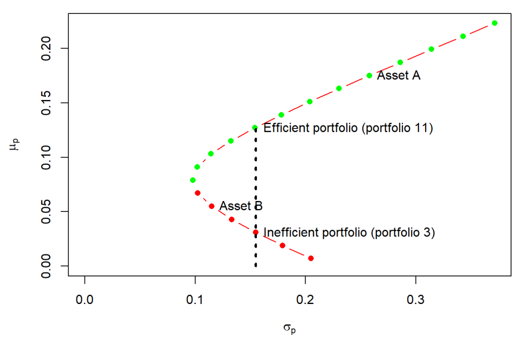
- Soit une variance W^x fixée (on maximise $E[W^x]$)

$$\text{Sup}_x \left\{ER(x) : V(R(x)) = \sigma^2\right\}, \sigma \text{ donné}$$

- Soit une espérance de W^x fixée (on minimiser $Var(W^x)$)

$$\min_x \{\text{var}(R(x)) : E(R(x)) = m\}, m \text{ donné}$$

- Portefeuilles efficients. Il y'aura pour chaque σ, un (ou des) portefeuilles optimaux. On parle de portefeuilles efficients. De façon équivalente ça signifie que le portefeuille n'est pas dominé par un aute portefeuille. Ou de façon équivalente un portefeuille efficient est un portefeuille pour lequel l'espérance est maximisé pour un niveau de risque σ_p fixé



- Fonction d'utilité. En considérant l'ensemble efficient des portefeuilles l'investisseur choisira celui qui corresponds le plus à ses préférences de risques. Un agent averse au risque choisira plutôt un portefeuille proche de la variance minimum. Pour un agent risqué il choisira plutôt proche de l'actif A.

- Frontière efficiente. C'est l'ensemble des couples du type:

$$(\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(R(x))}, m(x) = \mathbb{E}(R(x))); \quad x \text{ est un portefeuille efficient.}$$

Exemple (avec short). On suppose que l'agent investit dans deux actifs risqués S^1, S^2. On note $R = (R^1, R^2)$ les rendements associés sur une période $[0,T]$;$R^i = \frac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}, i = 1,2$.

$$M = ER = \left(ER^1, ER^2\right)$$

$$\Sigma = \left(\operatorname{cov}\left(R^i, R^j\right)\right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \operatorname{var} R^1 & \operatorname{cov}\left(R^2, R_1\right) \\ \operatorname{cov}\left(R^1, R^2\right) & \operatorname{var} R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

On résume les statistiques:

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

Un portefeuille est définie par une composition $\pi = (x,y)$ tel que $x + y = 1$. Ainsi

$$R(x) = xR^1 + yR^2 = xR^1 + (1-x)R^2 \quad (= \pi \cdot R')$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R(x)) &= R^1\mathbb{E}(x) + R^2\mathbb{E}(1-x)(= \pi E(R)') \\
\mathbb{V}(R(x)) &= \mathbb{E}\left(R(x) - \mathbb{E}(R(x))^2\right. \\
&= \mathbb{E}[\pi' R - \pi'\mathbb{E}[R(x)]]^2 \\
&= \mathbb{E}[\pi'(R - \mathbb{E}[R(x))]^2 \\
&= \pi\Sigma\pi' \\
V(R(x)) &= \sigma_1^2 x^2 + 2\sigma_{12}xy + \sigma_2^2 y^2
\end{aligned}$$

- Le portefeuille de variance minimale. Ainsi on peut déterminer le portefeuille de variance minimale en posant $y = 1 - x$

$$\begin{aligned}
VR(x) &= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2\left(1 - 2x + x^2\right) + 2\sigma_{12}x - 2\sigma_{12}x^2 \\
&= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 - 2x\sigma_2^2 + x^2\sigma_2^2 + 201x - 20 + x^2 \\
&= x^2\left(0_1^2 + 0_2^2 - 2012\right) + x\left(-20_2^2\right) + 1 + \left(0_2^2\right) \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Where we let $a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$; $b = 2\sigma_{12} - 2\sigma_2^2; c = \sigma_2^2$. Et par définition on sait que le minimum d'une fonction quadratique est $-\frac{b}{a}$. On obtient donc un portefeuille qui minimise la variance :

$$x_{min} = -\frac{\left(\sigma_{12} - \sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

En vert on aura le global minimum variance portfolio qu'on calcule avec notre preuve du dessus.

$$x_A^{\min} = \frac{0.01323 - (-0.004866)}{0.06656 + 0.01323 - 2(-0.004866)} = 0.2021; \quad x_B^{\min} = 0.7979.$$

The expected return, variance and standard deviation of this portfolio are:

$$\begin{aligned}
\mu_p^{min} &= (0.2021)\cdot(0.175) + (0.7979)\cdot(0.055) = 0.07925 \\
\sigma_p^2 &= (0.20)^2\cdot(0.067) + (0.79)^2\cdot(0.013) + 2\cdot(0.20)(0.79)(-0.0048) = 0.00975 \\
\sigma_p^{min} &= \sqrt{0.00975} = 0.09782.
\end{aligned}$$

On donne un table récapitulative:

$x_A^{\min}$	$x_B^{\min}$	$\mu_p^{\min}$	$\sigma_p^{\min}$
0.202	0.798	0.079	0.098

- Frontière efficiente. La frontière efficiente se détermine par exemple en minimisant $var(R(x))$ lorsque $E(R(x)) = m$ avec m fixé. On peut ensuite tracer la frontière efficiente comme étant $(\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(R(x))}, m(x) = \mathbb{E}(R(x)))$ avec x est un portefeuille efficient. On rappelle que $\sigma_{AB} = cov(R_A, R_B)$ et $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

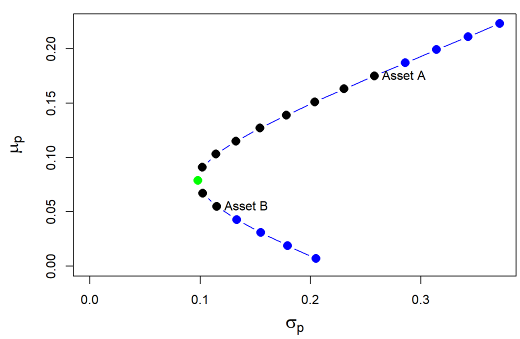
Pour générer l'ensemble des portefeuilles on va générer des $x_A = (-0.4, -0.3, .., 1.3, 1.4)$ avec un pas de 0.1 puis en utilisant le faite que $x_B = 1 - x_A$ ce qui nous permet de calculer le μ_p, σ_p corresponds avec les formules ci-dessus:

$$\mu_p = x_A \mu_A + x_B \mu_B$$

$$\sigma_p = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB}$$

On reporte ensuite l'ensemble des combinaisons dans une table (ici table qui ne corresponds pas au graphe mais donne une idée):

x_A	x_B	μ_p	σ_p
0	1	1.00	6.00
0.25	0.75	1.25	5.86
0.5	0.5	1.50	6.67
0.75	0.25	1.75	8.15
1	0	2.00	10.00
1.25	−0.25	2.25	12.06



Visuellement on observe: l'actif A ($x_A = 1, x_B = 0$) et le B avec ($x_A = 0, x_B = 1$). En noir on a les portfolio long et en bleu les short-longs. Here we define diversification as starting from a portfolio of only B for example and we rebalance it to incorporate asset A.

Correlation ρ. Pour rappel dans l'exercise précédent nous avions la table de données, On rappelle que $\sigma_{AB} = cov(R_A, R_B)$ et $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

avec

$$\mu_p = x_A \mu_A + x_B \mu_B$$

$$\sigma_p = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB}$$

Dans cet exemple on va voir l'impact de la variation de ρ sur la frontière efficiente. Ici nous illustrons avec $\rho_{AB} = -0.9, -0.5, 0, 0.5, 0.9$, la figure à gauche montre ces portefeuille frontière. La curvature des portefeuilles est déterminé par la valeur de ρ_{AB}.

- Plus ρ_{AB} est proche de 1 plus la frontière ressemble à une ligne qui connecte les deux portefeuilles A et B
- Plus $\rho_{AB} = -1$ alors la frontière touche μ_p est donc il existerait un portefeuille sans risque d'espérance fixe $\mu_p = 0.10$

- Corrélation et diversification. La diversification signifie avoir un portefeuille d'actifs qui ne sont pas corrélés afin de réduire le risque, la situation $\rho_{AB} = 1$ n'est donc pas recommandé

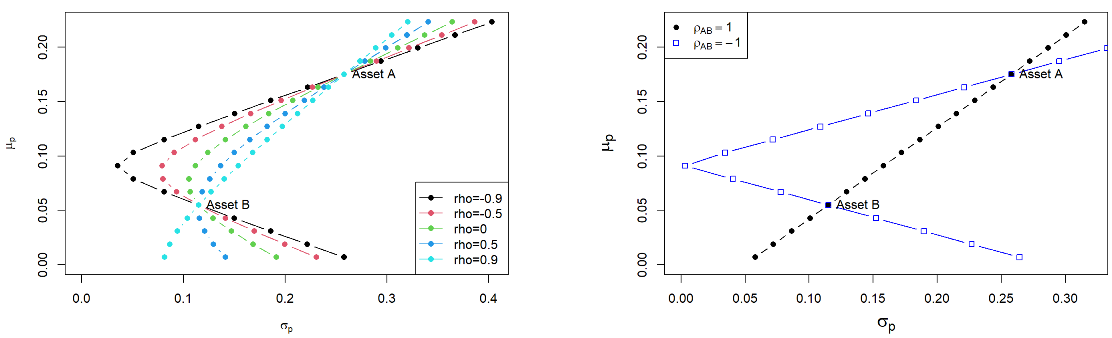


Figure 1: A gauche: on varie ρ; A droite: $\rho \in \{-1, 1\}$

0.1.3.2 Le primal et dual du programme de Markowitz

Solution of the mean-variance model. We can formulate the portfolio optimization problem in two equivalent ways:

- Minimize the portfolio riks. with the constraint expressing a lower bound on the portfolio return which the investor whises to reach

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \\ &\text{subject to } \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} \geq r_{\min}, \\ &\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned}$$

In this problem the objective function is convex quadratic, all the constraints are linear, thus it is a Quadratic optimization problem. Yet even though it is easy to solve this formulation is not ideal. Investors might prefer to specifying an upper bound on the portfolio risk instead of a lower bound on the expected portfolio return.

- Maximize the expected portfolio return. with the constraint expressing an upper bound on the portfolio risk

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} \\ &\text{subject to } \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \leq \gamma^2, \\ &\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned}$$

In this formulation it is possible to explicitly constrain the risk measure, which makes it more practical. We can also add constraints on multiple types of risk measures more easily.

0.1.3.3 Cas $ER \in vect(1)$: Portefeuille de variance minimale

Setup. Les données sont des actifs risqués $S^1, S^2 \ldots, S^d, d \geq 1$ de rendements $R = \left(R^1, R^2, \ldots, R^d\right)$ sur une période donnée. On suppose donnée $ER = \left(ER^1, ER^2, \ldots, ER^d\right)$ $\Sigma = \left(\text{Cov}\left(R^i, R^j\right)\right)_{ij=1,..,d}^{\text{symétrique}}$.

On pose le produit scalaire $\langle x, y\rangle_{\Sigma^{-1}} = x\Sigma^{-1}y'$ puis

$$
\begin{aligned}
a &= a_\Sigma = ||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}' = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}} \\
b &= \langle E(R), \mathbf{1}\rangle_{\Sigma^{-1}} = E(R)\Sigma^{-1}\mathbf{1}'
\end{aligned}
$$

puis on va résoudre en utilisant:

$$A_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^d : x\mathbf{1}' = 1; x\Sigma x' = \sigma^2\}$$

Ce qu'il faut faire ensuite c'est de trouver la combinaison de portefeuille x pour se faire:

$$\sigma^2 = x\Sigma x' = (x\Sigma)\Sigma^{-1}(x\Sigma)' = ||x\Sigma||_{\Sigma^{-1}} = \langle x\Sigma, x\Sigma\rangle_{\Sigma^{-1}}$$

Où on va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$
\begin{aligned}
&1 = \mathbf{1}'x = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\Sigma x) = \langle \mathbf{1}, \Sigma x\rangle_{\Sigma^{-1}} \leq \underbrace{||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}}_{=a} \cdot \underbrace{||x\Sigma||^2_{\Sigma^{-1}}}_{=\sigma^2} \\
&\Rightarrow 1 \leq a\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 \geq \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

Si on prends la variance minimale on obtient $\sigma^2_{min} = \frac{1}{a}$. De plus avec l'inégalité ci-dessus on a la propriété qu'il y'a égalité si $\mathbf{1}$ et $x\Sigma$ sont colinéaires. Ce qu'on écris:

$$x\Sigma = k\mathbf{1} \iff x = k\mathbf{1}\Sigma'$$

Il nous reste à trouver la valeur de k:

$$x\mathbf{1}' = 1 \Rightarrow k\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}' = 1$$

Or on sait que $\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}' = a$ on en déduit que $k = \frac{1}{a}$ et donc en reprenant l'exemple on obtient la combinaison minimale:

$$A_\sigma = \{x_{min} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}\}$$

Il reste à trouver le rendement moyen associé à ce portefeuille

$$\mu_{min} = \frac{b}{a}$$

0.1.3.4 Cas $ER \not\in vect(1)$: Approche de Merton

Définition. Supposons que $E(R) \not\in vect(1)$. La frontière efficiente est l'ensemble des couples $(\sigma, m(\sigma))$ où $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$ et

$$\boxed{x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1}}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbf{1} \right\|_{\Sigma-1}$$

est le rendement maximal pour une variance de σ^2 réalisé par le portefeuille efficient.

- Notations. On pose le produit scalaire $\langle x, y\rangle_{\Sigma^{-1}} = x\Sigma^{-1}y'$ puis

$$\begin{aligned} a = a_\Sigma &= ||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1'} = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}} \\ b &= \langle E(R), \mathbf{1}\rangle_{\Sigma^{-1}} = E(R)\Sigma^{-1}\mathbf{1'} \end{aligned}$$

Preuve. La preuve se base sur l 'approche de "An alternative proof to Markowitz's model" de Merton, 1972. On va commencer par poser que $x \in \mathbb{R}^d$ avec $x \cdot \mathbf{1} = 1$. On va résoudre le problème de maximization

$$\begin{aligned} max\ \mathbb{E}[R(x)] &= \mathbb{E}[R]x' = g(x) \\ s.t.\ D &= \{x\mathbf{1} \leq 1;\ x\Sigma x' \leq \sigma^2\} \end{aligned}$$

On peut écrire la fonction du lagrangien:

$$\mathscr{L}(x, \lambda_1, \lambda_2)g(x) - \lambda_1(x\mathbf{1} - 1) - \lambda_2(x\Sigma x' - \sigma^2)$$

Ce qui nous amène au KKT où x^* est un maximiser On rajoute également deux contraintes des écarts complémentaires (complementary slackness)

$$(KKT) : \begin{cases} \mathscr{L}_x(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \mathscr{L}_{\lambda_1}(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^*\mathbf{1} \leq 1 \\ \mathscr{L}_{\lambda_2}(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^*\Sigma x^{*'} \geq \sigma^2 \\ \mathscr{L}_1(x, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \geq 0 \\ \mathscr{L}_{\sigma^2}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(x\mathbf{1} - 1) = 0; \quad \lambda_2(x^*\Sigma x^{*'} - \sigma^2) = 0 \end{cases}$$

On peut réécrire le lagrangien:

$$\mathscr{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = E(R)x^T - \lambda_1(x\overrightarrow{1} - 1) - \lambda_2\left(x\Sigma x' - \sigma^2\right) = 0$$

- Dérivé à x. On peut dériver par rapport à x:

$$\mathscr{L}_x = E(R) - \lambda_1\mathbf{1} - 2\lambda_2 x^T\Sigma = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{2\lambda_2}\left(E(R) - \lambda_1\mathbf{1}\right)\Sigma^{-1}}$$

- Dérivé à λ_1. On va pouvoir obtenir le premier multiplicateur de lagrange

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\lambda_1} = x\mathbf{1} - 1 = 0 &\iff x\mathbf{1} = 1 \\ &\iff \frac{1}{2\lambda_2}\left(E(R) - \lambda_1\mathbf{1}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 1 \\ &\iff \lambda_1 = \frac{b}{a} - 2\frac{\lambda_2}{a} \end{aligned}$$

- Dérivé à λ_2. Puis le second multiplicateur

$$\mathscr{L}_{\lambda_2} = x\Sigma x' = \sigma^2 \iff \lambda_2 = \frac{||\mathbb{E}[R] - \frac{b}{a}||_{\Sigma^{-1}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}$$

- Portefeuille efficient. On obtient l'équation du portefeuille efficient qui est l'ensemble des points critiques de la fonction du lagrangien en fonction de σ:

$$x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{||\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}}\Sigma^{-1}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbf{1} \right\|_{\Sigma-1}$$

Exemple. On va considérer trois actifs avec dans l'ordre {MSFT, NORD, SBUX} d'où les rentabilités sont des v.a.; mais on peut dériver ses deux premiers moments: à partir de l'historique:

$$R = \begin{pmatrix} R_M \\ R_N \\ R_S \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[R] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[R]^M \\ \mathbb{E}[R]^N \\ \mathbb{E}[R]^S \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

- Portefeuille minimale. Pour rappel on avait dérivé le portefeuille efficient de variance minimale:

$$[x_{min}]_{3\times 1} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}; \quad a = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma\mathbf{1}'$$

Dont on peut calculer ses deux moments avec:

$$\mu_{min} = \mathbb{E}[R]^T x_{min}; \quad \sigma_{min} = x_{min}^T \Sigma x_{min}$$

On le représente en vert et on le nomme GMIN.

- Frontière efficiente. Il nous suffit de générer de façon itérative des $\sigma^{(i)} \geq \frac{1}{a}, i = 1, .., n$ car le portefeuille minimale est le premier de la frontière

$$x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{||\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}}\Sigma^{-1}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbf{1} \right\|_{\Sigma-1}$$

L'ensemble des couples $(\sigma^{(i)}, m(\sigma^{(i)})$ est représentés en gris. La Markowitz Bullet dessine une frontière efficiente sur le haut de la bullet (ce sont les portefeuilles efficients)

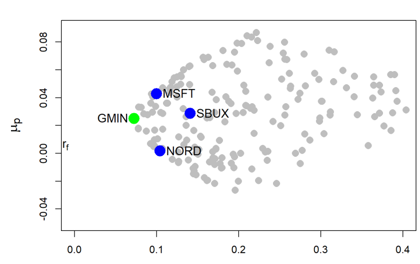


Figure 2: Efficient frontier of N risky assets

0.1.4 Frontière efficiente lorsqu'il y'a un actif sans risque S^0

0.1.4.1 Portefeuille avec un actif risqué et un non-risqué

Soit un investissement dans un actif risqué et un actif sans risque (T-Bill). Soit x la part de richesse dans l'actif risqué, et x_f la part de richesse dans le T-Bills tel que $x + x_f = 1$. En utilisant $x_f = 1 - x$, La rentabilité du portefeuille s'écrit:

$$R_p = x_f r_f + xR = (1-x)r_f + xR = r_f + x\,(R - r_f)\,.$$

La quantité $R - r_f$ est appelé excess return (over the return on T-bills) sur l'actif risqué. Le portefeuille expected return is then:

$$\mu_p = r_f + x\,(E[R] - r_f) = r_f + x\,(\mu - r_f),$$

où la quantité $(\mu - r_f)$ is called the expected excess return or risk premium on the risky asset. The
On peut montrer que puisque $r_f = cst$, la variance du portefeuille dépendera seulement de l'actif risqué qui est donné par

$$\sigma_p^2 = \mathrm{var}\,(\mathrm{R_p}) = \mathrm{var(xR)} = x^2\sigma^2$$

The portfolio standard deviation is therefore proportional to the standard deviation on the risky asset:

$$\sigma_p = |x|\sigma$$

Exemple. On va considérer un portefeuille avec un T-bills et un actif B. Soit x_B et $1 - x_B$ le part de richesse dans l'actif B et le T-bills respectivement. On fixe que $r_f = 0.03$. Ce qui implique:

$$\text{risk premium} = \mu_B - r_f = 0.055 - 0.03 = 0.025$$

L'interprétation est que cette valeur est généralement > 0. Elle indique que l'investisseur s'attends à un plus grand rendement sur l'actif risqué que le non risqué (T-Bill).

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

x_f	x_B	μ_p	σ_p
0	1	0.055	0.115
1	0	0.03	0
0.5	0.5	0.0425	0.0575

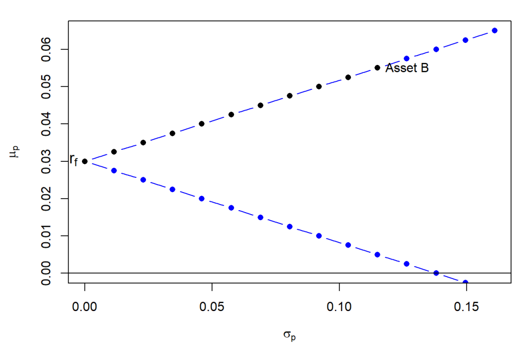


Figure 3: En noir position long et en bleu position short

Le short n'est pas permis. Si on bloque le shorting on aura que $x > 0$ ce qui nous permet de réécrire

$$\sigma_p = |x|\sigma \iff x = \frac{\sigma_p}{\sigma}$$

En remplaçant dans l'expression de l'espérance on obtient que

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu - r_f}{\sigma}\sigma_p$$

Cette expression est celle d'une ligne (μ_p, σ_p) avec intercept r_f et pente $(\mu - r_f)/\sigma$. Cette ligne a une pente positive tant que le risk premium est positif.

- Capital Allocation Line (CAL). Elle porte ce nom car elle décrit comment l'investissement en capital est alloué entre les T-Bills et l'actif risqué. Plus on se rapproche de l'axe y plus le portefeuille alloura de T-Bills et plus on s'éloigne plus on aura d'actif risqués.

La pente du CAL est appelé Sharpe Ratio (SR) il mesure le risk premium de l'actif par unité de risque (mesure par le std de l'actif)

$$SR = \frac{\mu - r_f}{\sigma}$$

On observe notre remarque le point r_f est alloue 100% en T-Bills. Les points Asset A est alloué à 100% dans l'actif A. Un point qui sera à mi-chemin entre l'actif A et le T-bill aurait une allocation de 50% de chaque.

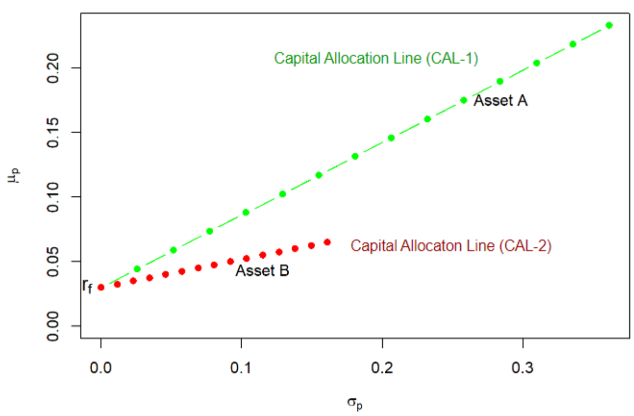


Figure 4: Two capital Allocation Line

Définition (Ratio de Sharpe).

$$SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

- Si le ratio est compris entre 0 et 1 , le rendement obtenu est supérieur à celui d'un placement sans risque (par exemple le livret A), mais il reste insuffisant.
- Si le ratio est supérieur à 1 , tout va bien. La performance dégagée est meilleure que celle du taux du placement sans risque. Le jeu en vaut la chandelle.
- Si le ratio est négatif, c'est que la performance obtenue en prenant des risques est inférieure à celle qui serait dégagée en n'en prenant aucun. Autant dire que le résultat est désastreux.

0.1.4.2 Portefeuille avec deux actifs risqués et un non-risqué

Motivation. Le portefeuille tangentiel part du cas sans short si on teste différente valeur de la tangente $\text{SR}_B = \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B} = 0.217$, $\text{SR}_A = \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A} = 0.562$ on n'obtient pas une combinaison qui maximise le ratio de Sharpe:

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu - r_f}{\sigma}\sigma_p = r_f + SR\sigma_p$$

On va donc résoudre le programme suivant

$$\begin{aligned}
&\max_{x_A, x_B} \text{SR}_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \text{ s.t.}\\
&\mu_p = x_A\mu_A + x_B\mu_B,\\
&\sigma_p^2 = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB},\\
&1 = x_A + x_B.
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir un portefeuille tangent qui maximise le ratio de sharpe:

x_A^{tan}	x_B^{tan}	μ_{tan}	σ_{tan}	SR_{tan}
0.463	0.537	0.111	0.125	0.644

What's the point of maximizing the Sharpe ratio ????

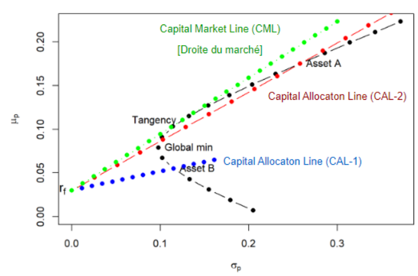


Figure 5: The green line is referred to as the Capital Market Line

Construction des frontières. Soit deux actifs S^1 et S^2 avec leurs statistiques et un taux sans risque $r_f = 0.03$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	-0.005	-0.164

- **Frontière efficiente sans actifs sans-risque.** En noir on va tracer la frontière de Markowitz avec uniquement deux actifs risqués A et B. Pour rappel on va générer un ensemble de poids $x_A = (-0.4, -0.3, ..)$ avec un pas de 0.1 pour ensuite calculer les couples

$$\mu_p = x_A\mu_A + x_B\mu_B; \quad \sigma_p = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB}$$

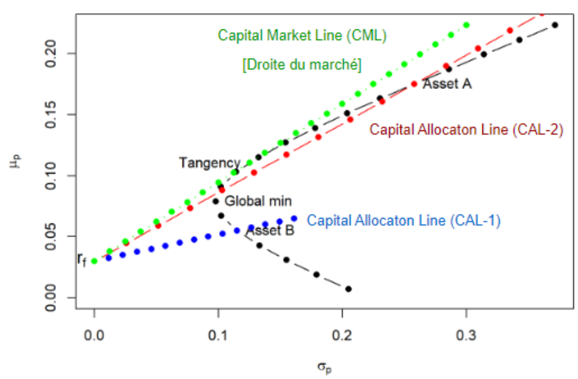
- **Frontière efficiente avec un actif risqué et un sans risque.** En rouge on va retrouver le couple (r_f, x_A) puis en bleu (r_f, x_B).

$$\mu_p = r_f + x\left(\mu - r_f\right); \quad \sigma_p = |x|\sigma$$

- **Le portefeuille tangentiel.** Ensuite il nous reste le portefeuille tangentiel c'est celui qui a la plus haut niveau du Ratio de Sharpe en actifs risqués (x_A, x_B).

$x_A^{\tan}$	$x_B^{\tan}$	$\mu_{\tan}$	σ_{tan}	$\mathrm{SR}_{\tan}$
0.463	0.537	0.111	0.125	0.644

On peut ensuite tracer ces trois éléments:



Théorème des deux fonds (Mutual Fund Separation). Les portefeuilles efficients sont des combinaisons du portefeuille tangentiel $(0, \xi)$ investis uniquement en actifs risqués et du T-bill. En conséquence on obtiente les combinaisons risque/rentabilité suivante:

$$\mu_p^e = r_f + \xi\left(\mu_{\tan} - r_f\right)$$
$$\sigma_p^e = \xi\sigma_{tan}$$

Où ξ représente la proportion de richesse investis dans le portefeuille tangent, $1-\xi$ est la proportion investis dans le T-Bills. On va considérer ici que le portefeuille tangent est constitué de deux actifs risqués A et B.

Le portefeuille tangenciel peut être considéré comme un mutual fonds (i.e. portefeuille) de deux actifs risqués (x_A, x_B). Et le T-Bill peut être considéré comme un mutual fonds d'actifs non-risqués. Ainsi l'agent en fonction de sa préfèrence pourra choisir une combinaison plus ou moins risqués.

Autrement dit, les investisseurs répartissent leur richesse entre l'actif sans risque et un fond reproduisant l'indice de marché déterminé par ξ. On parle de gestion indicielle ou encore de gestion passive.

Y'a un truc a checker dans une des docs ils disaient que le sharpe ratio est le même pour l'actif sans risque et le tangency portfolio.

1

Fonction d'utilité. Along the linear EF all the pairs have the same Sharp coefficient. It thus depends on the client how much risk they are ready to take

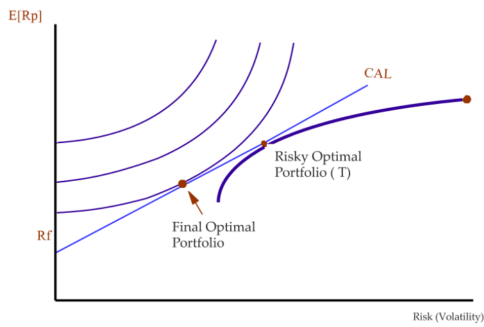


Figure 6: The scheme for the choice of the final optimal portfolio

0.1.4.3 Portefeuille avec N actifs risqués et un non-risqué

Soit un ensemble d'actifs risqués $S^1, .., S^d$ de rentabilités respectives $R = (R^1, .., R^d)$. On ajoute S^0 de rentabilité R^0 l'actif sans risque, déterministe (variance nulle).

On peut aussi modéliser un portefeuille par $x \in \mathbb{R}^d$ mais ici $x\mathbf{1}'$ n'est pas forcément égal à 1. La proportion investit dans S^0 est donc:

$$x^0 = 1 - x\mathbf{1}'$$

Eg. $x = (0.2, 0.3, 0.4) \Rightarrow x\mathbf{1}' = 0.9$ ça implique donc que le poids du sans-risque est $x_0 = 1 - 0.9 = 0.1$. On peut égalemnt réécrire pour le portefeuille:

$$R(x) = x^0R^0 + x^1R^1 + ... + x^dR^d = (1 - x\mathbf{1}')R^0 + xR' = R^0 + x(R - R^0\mathbf{1})'$$

ça implique deux moments:

$$\begin{aligned} E(R(x)) &= R^0 + x(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})' \\ Var(R(x)) &= x\Sigma x' \end{aligned}$$

- Remarque. La variance minimale possible est de zéro i.e. investir seulement dans du sans risque.

Dérivation.

$$\begin{aligned} &\sup_x \, x \cdot v = x \cdot (\mathbb{E}(R) - R^0\mathbf{1}) \\ &s.t. \; x\Sigma x' \leq \sigma^2 \end{aligned}$$

On commence par écrire la fonction du lagrangien:

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = x \cdot v - \lambda(x\Sigma x' - \sigma^2)$$

On peut écrire le KKT, avec en dernière ligne les écarts complémentaires:

$$(KKT): \quad \begin{cases} \mathscr{L}_x(x, \lambda) = 0 \\ \mathscr{L}_\lambda(x, \lambda) = x\Sigma x' \leq \sigma^2 \\ \mathscr{L}_{\sigma^2}(x, \lambda) = \lambda \geq 0 \\ \lambda(x^*\Sigma x^{*'} - \sigma^2) = 0 \end{cases}$$

On peut commencer par réécrire le langagrangien wrt à x

$$\mathscr{L}_x(x^*, \lambda) = v - 2\lambda x^*\Sigma = 0 \iff \boxed{x^* = \frac{1}{2\lambda} v\Sigma^{-1}}$$

Puis on exploite $\mathscr{L}_\lambda$

$$\begin{aligned} x^*\Sigma x^{*'} = \sigma^2 &\iff \frac{1}{4\lambda^2} v\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}v = \sigma^2; \quad v = (\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1}) \\ &\iff 4\lambda^2 = \frac{||v||^2_{\Sigma^{-1}}}{\sigma^2}; \quad v\Sigma^{-1}v' = ||v||^2_{\Sigma^{-1}} \\ &\iff 2\lambda = \frac{||v||_{\Sigma^{-1}}}{\sigma} \end{aligned}$$

Si on peut plug les termes dans x^* on obtient que la valeur critique est:

$$\boxed{x^* = \frac{\sigma}{||ER - R^0\mathbf{1}||}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}$$

Pour ensuite le plug dans l'espérance

$$
\begin{aligned}
E(R(x)) = m(\sigma) &= R^0 + x^*(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})' \\
&= R_0 + \sigma||E(R) - R^0\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} \\
&= R_0 + \sigma\sqrt{SR}
\end{aligned}
$$

Où $SR = ||E(R) - R^0\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}}$ est l'indice de performance de sharp.

Propriétés. Si $ER \neq R^0\mathbf{1}$ la frontière efficiente est $(\sigma, m(\sigma)), \sigma \geq 0$ où $m(\sigma) = R^0 + \sqrt{SR}\sigma$ (appelé droite du marché) est réalisé par le portefeuille efficient:

$$
\boxed{x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}
$$

VOCABLE. Security allocation line et security market line.

Proposition (Théorème des deux fonds). On dit qu'il existe un portefeuille efficient unique $(0, x^M)$ ne dépendant que des caractéristiques du marché, vérifiant $x^M\mathbf{1} = 1$ (en gros ça te dit que y'a pas de sans risque en terme d'allocation). On dit qu'il vérifie:

$$
\boxed{x^M = \frac{1}{b - aR_0}(\mathbb{E}[R] - R_0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}
$$

Avec $a = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}'; b = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}'$.

Preuve (de la variance de marché). On avait vu que le portefeuille efficient pour N actifs risqués et 1 sans risque est:

$$
x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}; \quad SR = ||E(R) - R^0\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}
$$

On va en extraire x^M le seul portefeuille sans actif sans risque. Pour se faire on peut poser que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}^T x(\sigma) = 1 &\iff \mathbf{1}^T \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1} = 1 \\
&\iff \sigma^M = \frac{\sqrt{SR}}{\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})}
\end{aligned}
$$

Puis en posant que $a = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$ et $b = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}'$ on obtient que:

$$
b - aR_0 = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}' - R^0\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}' = (\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}\mathbf{1}'
$$

Ainsi on peut réécrire le σ^M comme précisé:

$$
\boxed{\sigma^M = \frac{\sqrt{SR}}{b - aR_0}}
$$

Ainsi x^M est bien efficient.

Preuve (de la moyenne de marché). En utilisant une approche similaire à celle qu'on a vu en utilisant notre σ^M:

$$
x(\sigma) = \frac{\sigma^M}{\sqrt{SR}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1} = \frac{(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}{b - aR_0}
$$

et enfin

$$m(\sigma) = R_0 + \sigma\sqrt{SR} \Rightarrow m(\sigma^M) = R^0 + \sqrt{SR}\sigma^M$$
$$\Rightarrow \sqrt{SR} = \frac{m(\sigma^M) - R^0}{\sigma^M}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la Security Market Line:

$$m(\sigma) = R^0 + \left(\frac{m(\sigma^M) - R^0}{\sigma_M}\right)\sigma$$

On va appeler en bleu le prix du marché du risque aka market risk premium.

Définition (Portefeuille tangent). Le couple $(\sigma^M, \mathbb{E}[R^M])$ appartient aux deux frontières efficientes. On l'appelle le portefeuille tangent. C'est le seul portefeuille qui efficient à la fois dans le marché risqué que dans le marché mixte.

Il faut que la Droite de marché, Capital Market Line (CML) est un cas particulier de Capital Allocation Line (CAL) car il est tangent à la frontière efficiente. On peut avoir 100% dans le risk free rate, où

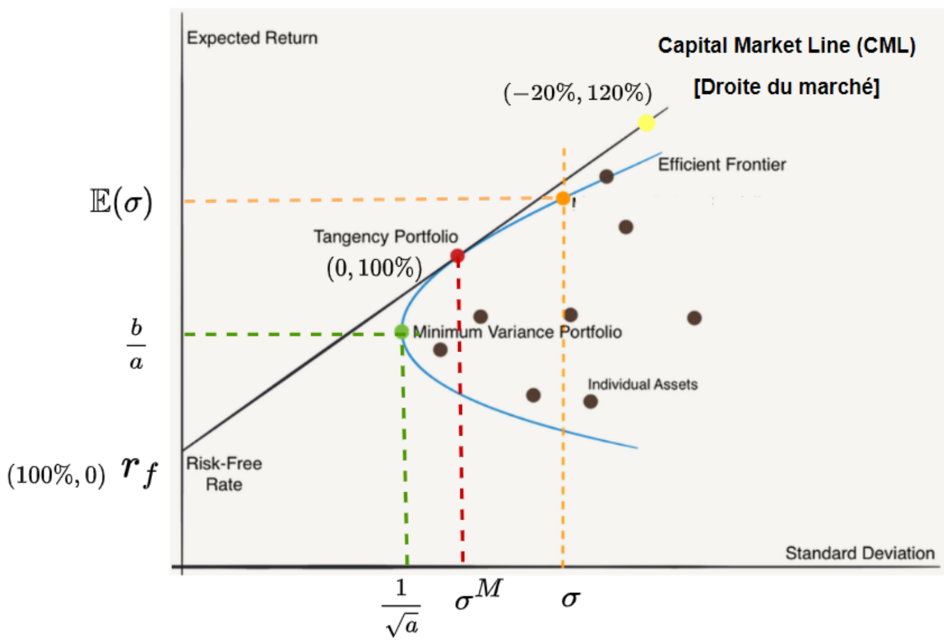


Figure 7: The scheme for the choice of the final optimal portfolio

Remarque:

- Lending
- Borrowing (leverage). If we look at the yellow point we borrow 20% of T-bills to obtain 120% of the risky asset. Effet de levier = achat de titres financé par un emprunt ici au taux sans risque.

Exercice (Théorème des deux fonds).
ici

0.1.5 Additional Constraints

biblio:
1