Actuariat: Master 2 IF
Notes de cours

Emmanuel DENIS
Université Paris Dauphine [1]

[1] emmanuel.denis@ceremade.dauphine.fr

Table des matières.

Chapitre 1

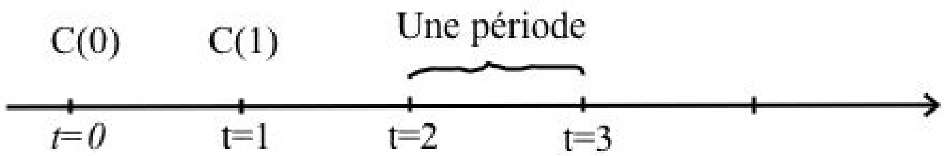
Généralités sur les intérêts

1.1 Principes généraux

Définition 1.1.1. *L'intérêt est ce qu'un emprunteur (le débiteur) doit au prêteur (créancier) à titre de compensation pour la mise à disposition d'un certain capital pour une durée donnée.*
Remarque 1.1.2. *Le montant d'intérêt demandé dépend de plusieurs facteurs :*

- *Le marché, cad les taux d'intérêts en vigueur.*
- *Le risque de défaut de paiement de l'emprunteur.*
- *L'inflation.*
- *Autres conditions liées au type de prêt.*

Remarque 1.1.3. *Du point de vue du créancier, lr prêt est un investissement d'un certain capital. On a le schéma suivant :*



$C(0)$ = Capital initial investi.
$C(t)$ = Capital cumulé =$C(0)+$ intétrêts jusqu'à la date t.

Exemple 1.1.4.
Exemple 1.1.5.
Définition 1.1.6. *Le taux effectif d'intérêt de la n-ième période est défini par :*

$$i_n := \frac{C(n) - C(n-1)}{C(n-1)} := \frac{I_n}{C(n-1)}$$

où I_n est l'intérêt payé lors de la n-ième période.
Proposition 1.1.7.

$$\begin{aligned} C(n) &= (1 + i_n)C(n-1), \\ C(n) &= C(0)(1 + i_1)(1 + i_2) \cdots (1 + i_n). \end{aligned}$$

Définition 1.1.8. *L'actualisation est le procédé qui détermine le capital initial à investir afin d'obtenir un capital donné à un moment futur t. Si $c(t)$ est la fonction de capitalisation donnant le capital cumulé $c(t)$ à la date t lorsque $c(0) = 1$, alors le facteur d'actualisation ou d'escompte est*

$$B(t) = B(0, t) = \frac{1}{c(t)}.$$

Exemple 1.1.9. *taux nominal d'intérêt.*
L'intérêt est capitalisé un nombre k fois sur chaque période. Par exemple, tous les 15 jours avec $i^{(24)} = 2\%$. Alors, au bout d'un an, 1 euro se capitalise en

$$1 \mapsto (1 + \frac{0.02}{24})^{24}.$$

Définition 1.1.10. *Taux instantané d'intérêt.*

$$\delta_t := \frac{c'(t)}{c(t)}, \quad c(t) = \exp\{\int_0^t \delta_u du\}.$$

Définition 1.1.11. *Taux interne de rentabilité.*
Soit un produit financier de prix intial P_0 à la date $t = 0$ et générant les cash-flow $E_1, E_2, \cdots, E_n$ aux dates futures $t = 1, \cdots, t = n$. On appelle taux interne de rentabilité de ce produit le taux r défini par la relation :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{(1+r)^i}.$$

1.2 Taux forward

Définition 1.2.1. *Le taux à terme à la date t pour la date future $t + n$, à l'échéance $t + m$ est le taux de rendement interne du ZC auquel on s'intéresse entre les dates $t + n$ et $t + m$.*

Proposition 1.2.2. *Pour le modèle en continu $B(t, u) := e^{-r_c(t,u)(u-t)}$, le taux à terme à la date t pour la date future $t + n$, à l'échéance $t + m$ est*

$$f(t, t+n, t+m) := \frac{m r_c(t, t+m) - n r_c(t, t+n)}{m-n}.$$

Par récurrence, on montre que
Proposition 1.2.3. *Pour le modèle en continu $B(t, u) := e^{-r_c(t,u)(u-t)}$, les taux à terme vérifient*

$$r_c(t, t+m) := \frac{1}{m}\left(f(t, t, t+1) + f(t, t+1, t+2) + \cdots f(t, t+m-1, t+m)\right).$$

Définition 1.2.4. *Le taux forward instantanné $f(t, u)$ est le taux à terme à la date t sur la période $[u, u + du]$ où $du \to 0$.*
Proposition 1.2.5. *On a*

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

De là, on déduit le taux instantané court :

$$f(t,t) = \frac{\partial_t B(t,T)}{B(t,T)},$$

le taux forward instantané

$$f(t,T) = -\partial_t \ln B(t,T).$$

On retrouve aussi la propriété :

$$r(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du,$$

cad le rendement interne du ZC d'échéance T à la date t est la moyenne des taux forward.

Chapitre 2

Obligations et courbes de taux.

2.1 Obligations

2.1.1 Définitions

Lorsqu'une entreprise souhaite financer un projet d'investissement très grand, une seule banque n'est pas forcément en mesure de prêter la somme requise. Une solution consiste en le découpage de la somme à prêter en de petites sommes (des micro–prêts) et à les soumettre à un marché organisé : le marché obligataire.
Chacun de ces micro–prêts est appelé **obligation** et porte des intérêts appelés **coupon**. Le taux de coupon est négocié à l'émission de l'obligation et les coupons sont distribués à intervalles fixes.
Il existe diverses catégories d'obligations :

• Obligations à taux fixe / variable.
• Obligations d'Etat/ Corporate (privée)
• Obligations à coupons / Zéro-coupon
• Obligations sans clause optionnelle / à clause optionnelle (convertible en options, actions..)
• Obligations AAA/BBB selon la nature du rating de l'émetteur (côte de solvabilité émise par des firmes comme Moody's et Standard&Poor's).

Une obligation est cessible et a donc un prix (du marché) qui évolue tout au long de sa vie.
Caractéristique de l'obligation la plus standard : à taux fixe, AAA, sans clause optionnelle.

2.1.2 Caractéristique d'une obligation à taux fixe.

Une obligation est essentiellement définie par :

• L'emetteur,
• Le montant nominal= taille de l'émission divisée par le nombre total d'obligations.
• Le taux de coupon= le taux d'intérêt versé périodiquement au détenteur de l'obligation.
  Coupon= $N\times i$, N=nominal, i= taux de coupon.
• Fréquence des coupons (1 fois par an, tous les six mois, etc,..)

• L'échéance : date à laquelle l'obligation n'existe plus ; L'emprunteur rembourse alors le nominal.

2.1.3 Exemple : les obligations américaines.

2.1.4 Evaluation d'une obligation.

Il y'a d'abord le prix du marché qui résulte d'un équilibre entre l'offre et la demande. Puis il y'a le prix qu'on est prêt à mettre pour atteindre un objectif. Les obligations peuvent être cotées soit en prix ou encore en taux de rendement, ce qui est équivalent.
a) Evaluation d'un ZC (zéro–coupon).
Le prix d'un ZC est la valeur actualisée de son unique flux de fin de vie. Si N est la valeur nominale, n la durée de vie (nombre de périodes) et r le taux d'actualisation (YTM, yield to maturity), alors son prix est à la date $t = 0$:

$$P_0 := \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Cela signifie qu'en plaçant la somme P_0 au taux composé r pendant n périodes, on obtient N. Une fois acheté un ZC, on est en mesure de calculer r. Connaissant r le taux du marché sur n périodes, on peut évaluer le prix juste d'achat d'un ZC.
On a

$$r = \left(\frac{N}{P_0}\right)^{1/n} - 1.$$

En observant les prix du marché, on peut alors reconstituer la **courbe des taux**, cad le graphe de la fonction $t \mapsto r(0,t)$ où $t = 0$ est la date d'aujourd'hui quand vous observez les prix et $r(0,t)$ est le taux du marché YTM du ZC de fin de vie la date t (Attention, cela ne signfie pas que les ZC ont été émis $t = 0$).
a) Evaluation d'une obligation.
Les flux futurs sont les coupons C, une fois par période jusqu'à l'échéance puis le nominal à l'échéance. Le prix à $t = 0$ est donc la valeur actualisée de ses flux :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r(0,i))^i} + \frac{N}{(1+r(0,n))^n}$$

où $r(0,i)$ est le taux du marché YTM du ZC de fin de vie la date i. Cette formule montre qu'un obligation peut être démembrée en une somme de ZC.
Attention, à ne pas confondre avec :
Définition 2.1.1. *Taux de rendement ou YTM d'une obligation. C'est le taux r défini par*

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{N}{(1+r)^n}.$$

Connaissant P_0, cela vous donne un ordre d'idée du rendement de l'obligation, comme si vous placiez la somme P_0 sur un compte bloqué au taux composé r sur n périodes.
Exemple 2.1.2.

2.2 Reconstitution d'une courbe des taux.

Définition 2.2.1. *Une courbe des taux est le graphe de la fonction $t \mapsto r(0,t)$ où $t = 0$ est la date d'aujourd'hui quand vous observez les prix et $r(0,t)$ est le taux du marché YTM du ZC de fin de vie la date t.*

Il existe trois grands types de courbe des taux ZC :
• La courbe Trésor (d'Etat) (construite par les obligations émises par un Etat).
• La courbe interbancaire.
• Les courbes Corporate (des ZC issus de compagnies privées).

Remarque 2.2.2. *Les données dont on dispose à une date donnée t (généralement on pose $t = 0$, où ici 0 n'est pas la date de l'émission..)*
• *La valeur du coupon,*
• *La valeur nominale,*
• *L'échéance,*
• *Le prix à la date t.*
Si par exemple, si on regarde les prix un 12 du mois et si la date de maturité est le 25/03/2015, alors les coupons sont versés tous les 25 mars..et non pas les 12 mars.

2.2.1 Méthode théorique

On déduit les taux ZC des obligations à coupons ayant les mêmes dates de flux et même maturité.
$\mapsto$ théorique dans le sens où ces conditions sont difficiles à réaliser.

Les données :
• Notons $(P_t^1, \cdots, P_t^n)$ le vecteur des prix de n obligations au temps t
• La maturité maximale est n. Les dates des flux sont $t_1, \cdots, t_n \geqslant t$,
• Les flux sont

$$F := \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nn} \end{pmatrix}.$$

• Les facteurs d'actualisation sont $(B(t,t_1), \cdots, B(t,t_n))$ où

$$B(t,t_i) := \frac{1}{(1 + r(t,t_i))^{t_i - t}}.$$

Les prix vérifient les égalités suivantes :

$$P_t^j = \sum_{i=1}^{n} F_{ji} B(t,t_i), \quad j = 1, \cdots, n$$

d'où la relation ${}^tP_t = F\,{}^tB$ ou bien $P_t = B\,{}^tF$. On en déduit que

$$B = P_t({}^tF)^{-1}.$$

De là, on en déduit les taux par la relation

$$r(t,t_i) = \left(\frac{1}{B(t,t_i)}\right)^{\frac{1}{t_i - t}} - 1.$$

Exemple 2.2.3.

2.2.2 La méthode du Bootstrap

a) On s'intéresse d'abord aux prix des titres ZC du marché d'une durée de vie restante inférieure à une période (un an par exemple). On en déduit une courbe continue par extrapolation sur l'intervalle $[0, 1]$.
b)On s'intéresse aux obligations de maturité $T \in]1, 2]$. Pour cela, on considère l'obligation de maturité la plus petite $T_0 \in]1, 2]$ et de prix P_0. De

$$P_0 = CB(0, t_1) + (N + C)B(0, T_0)$$

on en déduit $B(0, T_0)$ puis $r(0, T_0)$ car $B(0, t_1)$ est connu à l'étape a). On réitère pour d'autres échéances $T \in]1, 2]$. Enfin, on extrapole pour obtenir une courbe continue sur $]1, 2]$.
c) On réitère la procédure sur l'intervalle $]2, 3]$.

2.2.3 Méthodes indirectes

Ce sont les plus utilisées dans la pratique. Il s'agit de minimiser l'écart au carré entre les prix du marché et les prix théoriques issus des taux théoriques des ZC ayant une forme choisie. On se donne un panier de n titres constitué à la date t de :
• prix observés P^j, prix théoriques $\widehat{P^j}$
•flux futur F^j_s du j–ième titre versé à la date $s > t$ (en général F^j_s =coupon annuel +Nominal à l'échéance.)
On utilise la formule théorique

$$\widehat{P}^j_t = \sum_{t_i > t} F^j_{t_i} \widehat{B}(\theta, t, t_i)$$

pour exprimer les prix théoriques en fonction du paramètre θ qui fixe l'expression théorique des taux théoriques d'actualisation. Puis, on détermine θ comme solution du problème de minimisation quadratique suivant :

$$\min{}_\theta \sum_{i=1}^{n} (\widehat{P}^j - P_j)^2.$$

Les méthodes qui suivent s'appuient sur cette minimisation ; elles font le pari d'une forme particulière du facteur d'escompte ou bien du taux.

2.2.4 Méthode indirecte des splines cubiques

On approche $B(0, s)$ par des polynômes de degré 3 (splines cubiques) sur chaque plage considérée. On exige qu'aux raccords $s \mapsto \widehat{B}(0, s)$ soient continue ainsi que ses deux premières dérivées.
Proposition 2.2.4. *Si les plages sont* $[0, T_1], \cdots, [T_{n-1}, T_n]$, *alors*

$$\widehat{B}(0, s) = a_0 s^3 + b_0 s^2 + c_0 s + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i-1}) \left[(s - T_i)^+\right]^3.$$

Le paramètre de la minimisation quadratique est donc $\theta = (a_0, b_0, c_0, a_1, \cdots, a_n)$.

2.2.5 Méthode indirecte des splines exponentielles

Il s'agit d'une méthode suggérée par Vasicek et Fong en 1982. Le taux théorique d'actualisation a la forme suivante :

$$\widehat{B}_i(0,s) = a_i e^{-3us} + b_i e^{-2us} + c_i e^{-us} + d_i, \quad s \in [T_{i-1}, T_i]$$

où u doit d'abord être estimé comme $u := \lim_{s\to\infty} \widehat{B}(0,s)$, cad en estimant le taux à long terme.
Puisqu'on exige aussi la continuité de $\widehat{B}$ et de ses deux premières dérivées, on en déduit :

Proposition 2.2.5. *Si les plages sont* $[0, T_1], \cdots, [T_{n-1}, T_n]$, *alors*

$$\widehat{B}(0,s) = a_0 e^{-3us} + b_0 e^{-2us} + c_0 e^{-us} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \psi_u \left[(s - T_{i-1})^+\right]$$

où

$$\psi_u(s) := 1 - 3e^{-us} + 3e^{-2us} - e^{-3us}$$

est la fonction de V–F.

2.2.6 Le modèle de Nelson et Siegel (1987) adopté par la Banque de France

Ce modèle est en temps continu, cad $B(0,s) = e^{-r_c(0,s)s}$ où $r_c(0,s)$ est le taux instantanné pratiqué sur le marché pour un taux ZC de durée de vie restante s. Le taux théorique correspondant a pour ce modèle la forme suivante :

$$\widehat{r}_c(0,s) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - e^{-\frac{s}{\tau_1}}}{\frac{s}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{s}{\tau_1}}}{\frac{s}{\tau_1}} - e^{-\frac{s}{\tau_1}} \right).$$

Ainsi, $\widehat{r}_c(0,0) = \mu_1 + \mu_2$ est le taux à court terme et $\widehat{r}_c(0,\infty) = \mu_1$ est le taux à long terme.

2.2.7 Le modèle de Nelson et Siegel augmenté (Svensson(1994))

$$\widehat{r}_c(0,s) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - e^{-\frac{s}{\tau_1}}}{\frac{s}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{s}{\tau_1}}}{\frac{s}{\tau_1}} - e^{-\frac{s}{\tau_1}} \right) + \mu_4 \left(\frac{1 - e^{-\frac{s}{\tau_2}}}{\frac{s}{\tau_2}} - e^{-\frac{s}{\tau_2}} \right).$$

Chapitre 3

Les tables de mortalité en Assurance Vie

3.1 Généralités

Par expérience, les actuaires retiennent deux facteurs conditionnant la mortalité :
• Les conditions de vies (âges, professions, pays, $\cdots$)
• Des conditions propres à l'assurance
L'étude de la mortalité se base sur des groupes homogènes présentant donc des risques identiques. Les autres facteurs pouvant différentier les individus d'un même groupe sont inconnus des assureurs.
Pour un groupe homogène, on considère un individu d'âge x. On note T_x sa durée de vie résiduelle comptée à partir de x ; il décède à l'âge $x + T_x$. On définie la fonction de survie par :

$$p_t^x := P(T_x > t).$$

Notant par ω la durée de vie maximale d'un être humain, on a $p_t^x = 0$ si $t > \omega - x$ tandis que $p_0^x = 1$.
Probabilité de décés entre deux dates t_1 et t_2 d'un individu observé à l'âge x. (Rappelons que t_1 signifie que $t = 0$ est la date lorsque l'individu a l'âge x). Il s'agit de

$$q_{t_1/t_2}^x := P(t_1 < T_x \leqslant t_2).$$

On note $q_t^x := q_{0/t}^x$.

Proposition 3.1.1.

$$q_{t_1/t_2}^x = p_{t_1}^x - p_{t_2}^x.$$

Proposition 3.1.2.

$$p_{t_1+t_2}^x = p_{t_1}^x p_{t_2}^{x+t_1}.$$

Corollaire 3.1.3.

$$p_t^y = \frac{p_{t+y-x}^x}{p_{y-x}^x}, \quad y > x,\ t > 0.$$

3.1.1 Estimation du nombre de survivants d'un groupe

Soit un groupe homogène d'individus. On note L_x le nombre d'individus d'âge x. Pour chaque individu i, on note :

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &:= 1, \quad \text{si l'individu est vivant à la date } t, \\ &:= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Proposition 3.1.4. *On a*

$$E\chi_i(t) = p_t^x, \quad \mathrm{Var}\,\chi_i(t) = p_t^x q_t^x.$$

A la date $t = 0$, le nombre d'individus est noté L_x. A la date t, le nombre de survivants est

$$L_{x+t} := \chi_1(t) + \cdots + \chi_{L_x}(t).$$

Ainsi on en déduit :

Définition 3.1.5. *On appelle nombre probable de survivants à l'âge $x + t$ le nombre*

$$l_{x+t} := L_x p_t^x.$$

On a $l_x = L_x$ et

$$p_t^x = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Problème : Peut-on prendre L_{x+t} comme un bon estimateur de l_{x+t} ?

En appiquant l'inégalité de Bienaymé–Tchébychev, on obtient :

$$P\left(\left|\frac{L_{x+t} - l_{x+t}}{l_{x+t}}\right| \geqslant r\sqrt{\frac{q_t^x}{l_{x+t}}}\right) \leqslant \frac{1}{r^2}.$$

3.1.2 Le taux instantanné de mortalité

A partir d'un individu vivant à la date t, on cherche la probabilité qu'il décède dans l'intervalle de temps $]t, t + \Delta t[$ avec $\Delta t \to 0$ soit encore

$$\mu_{x+t} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T_x < t + \Delta t | T_x > t)}{\Delta t}.$$

On trouve

$$\mu_{x+t} = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}.$$

Connaissant le taux de mortalité, on en déduit que

$$p_t^x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y dy}.$$

3.2 Les tables de mortalié

Définition 3.2.1. *Une table de mortalité est un tableau qui fournit le nombre probable de survivants l_x à chaque âge entier pour un même groupe de nouveau–nés.*

3.2.1 Taux annuels de mortalité

Rappelons que $p^x := p_1^x$ et $l_{x+1} = l_x p^x$. On en déduit que

$$l_{x+1} = l_0(1-q^0)\cdots(1-q^x).$$

Pour évaluer q^x, on observe L_x personnes d'âge x pendant un an. Au bout d'un an, les survivants sont au nombre de $L_{x+1} = L_x - D_x$ où D_x est le nombre de décès entre les dates x et $x+1$. Le quotient annuel de décès observé est

$$Q_x = \frac{D_x}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x}$$

où

$$D_x = \sum_{i=1}^{L_x} \chi_i,$$

$$\begin{aligned}\chi_i &:= 1, \quad \text{si l'individu meurt}\\ &:= 0, \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

On a $EQ_x = q^x$ et $\mathrm{Var} Q_x = \frac{p^x q^x}{L_x}$.

Comment évaluer q^x ?

On utilise le théorème Central Limit :

Théoreme 3.2.2. *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n v.a.r. i.i.d. alors*

$$\text{Loi de } \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - EX_1}{\sigma}\right) \to \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty$$

où $\overline{X}_n := (X_1 + \cdots + X_n)/n$ et $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\, X_1}$.

Cela signifie que pour n assez grand, on peut considerer que

$$\text{Loi de } \sqrt{L_x}\left(\frac{Q_x - q^x}{\sqrt{p^x q^x}}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Rappel Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Alors si $G \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\begin{aligned} P(|G| \geqslant a) &= 2 - 2\Phi(a),\\ P(|G| \geqslant a) &= 2\Phi(a) - 1\end{aligned}$$

Problème 1 Déterminer une valeur de L_x (la plus petite possible) afin que Q_x soit un estimateur de q^x à 0.01 près pour un degré de confiance de 95% ?

Problème 2 Donner l'intervalle de confiance de q^x au degré de confiance de 90% lorsque $L_x = 1000$ et $Q_x = 1/1000$.

Chapitre 4

Contrat d'Assurance Vie.

On définit pour chaque police ou contrat d'assurance :
• C_t la somme assurée payable au bénéficiaire du contrat en cas de décès pendant l'année $(t-1, t)$.
• P_{t-1} la prime encaissée par l'assurance à la date $t-1$ pour l'année $(t-1, t)$.
• E_{t-1} les frais de fonctionnement payés par l'assureur.
• S_t la somme assurée payable à l'assuré à l'échéance n en cas de survie, déterminée sur la base de mises à jour jusqu'à t.
• R_t la valeur de rachat payable à l'assuré à la date t en cas de sortie anticipée.
• V_{t-1} la provision mathématique constituée en début d'année $(t-1, t)$ par l'assureur afin de couvrir les dépenses futures.

Base technique de 1er ordre (pour faire la tarification)
• Le taux technique i,
• p_t^x, $q_{t,t+1}^x$ les probabilités de survie et de décès.

Base technique de 2nd ordre (paramètre réels)
• Le taux réaliste des investissements i_t^* pendant l'année $(t-1, t)$,
• p_t^{x*}, $q_{t,t+1}^{x*}$ les probabilités de survie et de décès,
• r_t^* la probabilité réaliste d'abandon à la date t pour une police en exercice à la date t (avec $r_0^* = r_n^* = 0$),
• λ_t^{x*} la probabilité de permanence en portefeuille pendant t années.

Lemme 4.0.3.

$$\lambda_t^{x*} = p_t^{x*}(1-r_1^*)\cdots(1-r_t^*).$$

Soit N_t le nombre moyens de polices restantes à la date t lorsque le nombre initial à la date $t=0$ est N_0 :

$$N_t = N_0\lambda_t^{x*}.$$

Soit $\widehat{C}_t$ la somme totale moyenne payée à la date t :

$$\widehat{C}_t = C_t N_{t-1} q_1^{x+t-1*}.$$

Soit $\widehat{S}_n$ la somme totale moyenne payée à l'échéance n :

$$\widehat{S}_n = N_n S_n.$$

Soit $\widehat{P}_{t-1}$ la prime totale moyenne payée à la date $t-1$ pour l'année $(t-1, t)$:

$$\widehat{P}_{t-1} = P_{t-1} N_{t-1}.$$

Soit $\widehat{E}_{t-1}$ le total moyen des frais encourus par l'assureur à la date $t-1$ pour l'année $(t-1, t)$:

$$\widehat{E}_{t-1} = E_{t-1} N_{t-1}.$$

Soit $\widehat{R}_t$ la somme totale moyenne payée à la date t pour les rachats en fin d'année :

$$\widehat{R}_t = R_t N_{t-1} p_1^{x+t-1*} r_t^*.$$

Soit $\widehat{V}_t$ la provision totale mise de coté à la date t pour l'année à venir :

$$\widehat{V}_t = V_t N_t.$$

Définition 4.0.4. *Le cash–flow industriel annuel espéré F_t^I est la totalité des cash–flow pour les N_{t-1} contrats espérés :*

$$\begin{aligned} F_t^I &= (\widehat{P}_{t-1} - \widehat{E}_{t-1})(1+i^*) - \widehat{C}_t - \widehat{R}_t, \quad t \leqslant n-1 \\ F_n^I &= (\widehat{P}_{n-1} - \widehat{E}_{n-1})(1+i^*) - \widehat{C}_n - \widehat{S}_n. \end{aligned}$$

Définition 4.0.5. *Le cash–flow total industriel est la somme des cash–flow actualisés :*

$$F_{(0,n)}^I := \sum_{t=1}^{n} F_t^I (1+i^*)^{-t}.$$

Définition 4.0.6. *Le bénéfice annuel total espéré pour les contrats en exercice à la date $t-1$ est défini par :*

$$\begin{aligned} U_t^I &:= (\widehat{V}_{t-1} + \widetilde{P}_{t-1} - \widehat{E}_{t-1})(1+i^*) - \widehat{C}_t - \widehat{R}_t - \widehat{V}_t, \quad t \leqslant n-1, \\ U_n^I &:= (\widehat{V}_{n-1} + \widetilde{P}_{n-1} - \widehat{E}_{n-1})(1+i^*) - \widehat{C}_n - \widehat{S}_n. \end{aligned}$$

Remarque 4.0.7.
a) $V_n = S_n$ car il est inutile de réapprovisonner l'année $(n, n+1)$ sauf qu'il faut payer le client.
b) On a

$$\begin{aligned} U_t^I &:= F_t^I + \widehat{V}_{t-1}(1+i^*) - \widehat{V}_t, \quad t \leqslant n-1 \\ U_n^I &:= F_n^I + \widehat{V}_{n-1}(1+i^*). \end{aligned}$$

Définition 4.0.8. *Le bénéfice industriel total est défini par*

$$U_{(0,n)}^I := \sum_{t=1}^{n} U_t^I (1+i^*)^{-t}.$$

Proposition 4.0.9. *Avec $V_0 = 0$ et $V_n = S_n$, on a $U^I_{(0,n)} = F^I_{(0,n)}$.*

Définition 4.0.10. *On appelle prime juste ou d'équilibre la prime P^* telle que*

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} P^* N_{t-1}(1+i^*)^{-(t-1)} &= \sum_{t=1}^{n} \widehat{C}_t(1+i^*)^{-t} + \widehat{S}_n(1+i^*)^{-n} \\ &+ \sum_{t=1}^{n} \widehat{R}_t(1+i^*)^{-t} + \sum_{t=1}^{n} \widehat{E}_{t-1}(1+i^*)^{-(t-1)}.\end{aligned}$$

Proposition 4.0.11. *Si la prime anuelle P est constante alors,*

$$U^I_{(0,n)} := \sum_{t=1}^{n} (P - P^*) N_{t-1}(1+i^*)^{-(t-1)}.$$

Remarque 4.0.12. *Les assureurs calculent la prime P de la même manière qu'on calcule P^* mais dans le cadre de la base technique de première ordre, c'est à dire en sous -estimant (ou sur-estimant) en leur faveur les paramètres d'où $P \geqslant P^*$.*

De manière plus générale, on décompose la prime P_{t-1} comme suit :

$$P_{t-1} = \Pi_{t-1} + \Gamma_{t-1}$$

où Π_{t-1} est appelée prime pure et Γ_{t-1} est le chargement pour frais.
On impose la garantie de l'assureur suivante vis à vis de l'assuré :

$$(V_{t-1} + \Pi_{t-1})(1+i) = (C_t - V_t)q^{x+t-1} + V_t.$$

On en déduit alors que le bénéfice par police d'assurance se décompose en

$$\begin{aligned} u_t^* &= (V_{t-1} + \Pi_{t-1})(i^* - i) + (\Gamma_{t-1} - E_{t-1})(1+i^*) \\ &+ (C_t - V_t)(q^{x+t-1} - q^{x+t-1*}) + (V_t - R_t)p^{x+t-1*} r_t^*, \quad t \leqslant n \end{aligned}$$

où
- $(V_{t-1} + \Pi_{t-1})(i^* - i)$ est la marge sur excès de rendement,
- $(\Gamma_{t-1} - E_{t-1})(1+i^*)$ est la marge sur frais
- $(C_t - V_t)(q^{x+t-1} - q^{x+t-1*})$ est la marge sur mortalité.
- $(V_t - R_t)p^{x+t-1*} r_t^*$ est la marge sur rachat.