Your Paper

You

February 20, 2023

1 Gestion de Portefeuille

Contents

1.1 Analyse des performances d'un portefeuille

1.1.1 Rentabilité

1.1.1.1 Rentabilité d'un Actif simple

Définition (Rentabilité Net d'un Actif) [Simple net return]. La rentabilité de l'actif (e.g. stock, bond, ETF, mutual fund, option, etc.) entre $t-1$ et t est donnée par :

$$R_t = \frac{S_t + D_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Où S_t le prix de l'actif à l'instant t et D_t le dividende versée entre $t-1$ et t. On appelera durée de détention (Holding period) la durée avant la vente de l'actif. Cette durée peut être de n'importe quel type (secondes, minutes etc) nous considérerons une période de un mois.

- Rentabilité Brut d'un Actif (Simple gross return). On l'obtient en réécrivant $(S_t - S_{t-1})/(S_{t-1}) = S_t/S_{t-1}$ pour obtenir notre formule:

$$1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Ce qu'on peut interpréter (en considérant une vente au bout d'un mois) comme le rendement futur d'un investissement de 1\$ à un taux d'intérêt simple (simple interest rate) R_t, car:

$$S_t = S_{t-1}(1 + R_t)$$

Exemple. Soit un investissement dans le stock Microsoft. On achète un stock en $t-1$ (fin février) à $S_{t-1} = 85\$$ et on le vends le mois prochain (fin mars) pour $S_t = \$90$ avec $D_t = 0$. On obtiendrait:

$$\begin{aligned} R_t =& \frac{90\$ - 85\$}{85\$} = \frac{90\$}{85\$} - 1 = 0.0588 \\ 1 + R_t =& \ 1.0588 \end{aligned}$$

Ainsi notre investissement sur un mois a une rentabilité de 5.88\$. Autrement pour 1\$ investis dans le stock Microsoft au mois $t-1$ sa valeur a augmenté à 1.0588\$ au mois t.

Rentabilité multi-périodes (Simple k-month return). Pour un investissement d'un actif entre les mois $t-2$ et t est définis comme:

$$R_t(k) = R_t(2) = \frac{S_t - S_{t-2}}{S_{t-2}} = \frac{S_t}{S_{t-2}} - 1$$

- Rentabilité brut multi-périodes. En réécrivant $S_t/S_{t-2} = (S_t/S_{t-1}) \cdot (S_{t-1}/S_{t-2})$ la rentabilité à deux mois peut être exprimé comme:

$$\begin{aligned} R_t(2) &= \frac{S_t}{S_{t-1}} \cdot \frac{S_{t-1}}{S_{t-2}} - 1 = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) - 1 \\ 1 + R_t(2) &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) = 1 + R_{t-1} + R_t + R_{t-1}R_t \end{aligned}$$

Ce qui est le produit de deux rentabilité brut de un mois, ce qu'on appelle la moyenne géométrique. On peut ensuite généraliser à k périodes:

$$1 + R_t(k) = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i})$$

Exemple. En continuant avec l'exemple précédent, supposons que le prix du stock microsoft au mois $t-2$ est de \$80 et on le vends le mois prochain (fin mars) pour $S_t = \$90$ avec $D_t = 0$.. La rentabilité dans deux mois est de:

$$R_t(2) = \frac{\$90 - \$80}{\$80} = \frac{\$90}{\$80} - 1 = 1.1250 - 1 = 0.1250,$$

Ou de 12.50% pour deux mois. Les deux rentabilités à un mois sont:

$$R_{t-1} = \frac{\$85 - \$80}{\$80} = 1.0625 - 1 = 0.0625; \quad R_t = \frac{\$90 - 85}{\$85} = 1.0588 - 1 = 0.0588$$

Ainsi la rentabilité passe de 6.25% à 5.8%. Ainsi la moyenne géométrique des deux rentabilités brut à un mois est de:

$$1 + R_t(2) = 1.0625 \times 1.0588 = 1.1250.$$

C'est-à-dire que en ayant investis 1\$ en $t-2$ sa valeur aura augmenté à 1.1250\$ au mois t.

Prise en compte des dividendes. Si un actif paye un dividende, D_t, entre les mois $t-1$ et t, la formule de la rentabilité total net (total net return) devient:

$$R_t^{\text{total}} = \frac{S_t + D_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} + \frac{D_t}{S_{t-1}},$$

où $(S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$ est appelé le gain en capital et D_t/S_{t-1} est appelé le Rendement en dividende (dividend yield) c'est le rapport entre les dividendes versés par une action et le cours de cette action sur le marché.

- Rentabilité brut. Ainsi la rentabilité brut total est:

$$1 + R_t^{\text{total}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}$$

Exemple. Soit un investissement de un mois avec un stock Microsoft. On achète au mois $t-1$ à $S_{t-1} = \$85$ et on vends le stock le mois prochain au prix de $S_t = \$90$ avec $D_t = 1\$$ un dividende de 1\$ qui est versé. Ainsi le gain en capital (capital gain), le Rendement en dividende (dividend yield) et la rentabilité toale (total return) sont:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{\$90 + \$1 - \$85}{\$85} = \frac{\$90 - \$85}{\$85} + \frac{\$1}{\$85} \\ &= 0.0588 + 0.0118 \\ &= 0.0707. \end{aligned}$$

L'investissement de un mois de Microsoft a rapporté 7.07% par mois de rentabilité totale. Le gain en capital (capital gain) est de 5.88% et le Rendement en dividende est de 1.18%.

1.1.1.2 Rentabilité d'un Actif continu

Définition (Rentabilité logarithmique une période). Qui est aussi appelé rentabilité géométrique et aussi rentabilité composé (continously compounded return)

$$r_t = ln(1 + R_t) = ln\Big(\frac{S_t}{S_{t-1}}\Big)$$

Qu'on a dérivé de la façon suivante en utilisant $R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \iff 1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$. Pour comprendre pourquoi r_t est appelé continiously compounded return, on peut prendre l'exponentiel de chaque côté:

$$e^{r_t} = 1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} \iff S_t = S_{t-1}(1 + R_t)$$

Ce qui rappelle la définition des compound interest.

Log rentabilité multi-périodes (log returns). Il a ce qu'on appelle la propriété d'additivité, ici pour k périodes:

$$\begin{aligned} r_t(k) &= log(\prod_{i=0}^{k-1}(1 + R_i); \quad 1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} log(1 + R_t) = r_{k-1} + r_{k-2} + .. + r_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} log(\frac{S_i}{S_{i-1}}) = \sum_{i=0}^{k-1} log(S_i) - log(S_{i-1}) \\ &= log(S_k) - log(S_0) \end{aligned}$$

we calculate the mean of the log returns but it doesn't mean we are going to use it. But now we obtain 89.5899 which is the last value of the time series based on the mean.

- Exemple. Soit un investissement dans le stock Microsoft. On achète un stock en $t - 2$ (fin février) à $S_{t-2} = 80\$$ et on le vends deux mois après (fin avril) pour $S_t = \$90$ avec $D_t = 0$.

$$r_t(2) = \ln(90) - \ln(80) = 4.4998 - 4.3820 = 0.1178$$

The second way uses the sum of the two continuously compounded one-month returns. Here $r_t = \ln(90) - \ln(85) = 0.0571$ and $r_{t-1} = \ln(85) - \ln(80) = 0.0607$ so that:

$$r_t(2) = 0.0571 + 0.0607 = 0.1178.$$

Notice that $r_t(2) = 0.1178 < R_t(2) = 0.1250$.

Propriété (Log-Rentabilité).
- Support. La rentabilité R a une borne basse de -1 car on ne peut pas perdre plus que notre investissement. Cependant la log-rentabilité a un support de $[0, +\infty[$.

- Gaussienne. Les log-rentabilités $r_1, .., r_T$ sont i.i.d. avec $r_1 \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$. Car on considère que la distribution des prix S_t est log-normal en passant en log on obtient la distribution normal des r_t.

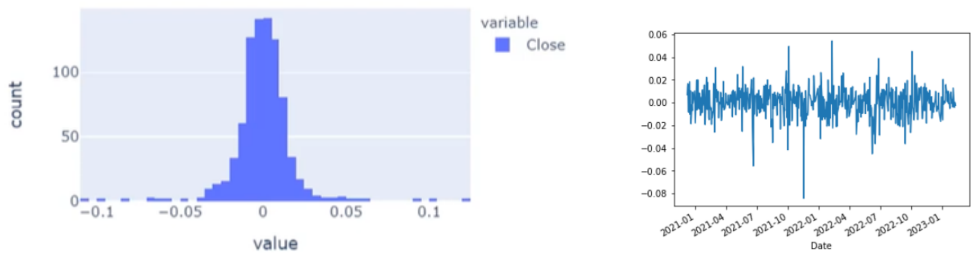


Figure 1: Gauche: distribution des log-rentabilité r_t; Droite: La log-rentabilité

- Gaussian multi-pérriodes. Si je prends la log rentabilité multi-périodes:

$$r_t(k) = r_{k-1} + r_{k-2} + .. + r_0$$

En comparaison pour la rentabilité simple

$$R_t(k) = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}) - 1$$

En considérant que les $r_t(k)$ et $R_t(k)$ suivent une loi gaussienne, on observe que une somme de gaussienne donne une gaussienne mais pas le produit. On perds donc cette propriété.

1.1.1.3 Rentabilité Empirique

Définition (Moyenne Arithmétique).

$$\widehat{R}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_i; \quad T = \text{Nb de périodes d'observation}$$

Exemple. Soit le prix de vente $S_0 = 50$ à $t = 0$ puis $S_1 = 100$ à t=1 et $P_2 = 50$ à $t = 2$:
a) Calculer le rendement sur la période totale et sur les sous périodes.

$$R_{0,2} = 0\%; \quad R_{0,1} = \frac{100 - 50}{50} = 100\%; \quad R_{1,2} = \frac{50 - 100}{100} = -\frac{1}{2} = -50\%$$

b) Calculer les moyennes arithmétiques et géométrique sur $[0, 2]$**.**

$$\widehat{R_2} = \frac{1}{2}\Big(R_1 + R_2\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + (-\frac{1}{2})\Big) = 25\%$$

Puis pour la géométrique:

$$\widehat{R_2}^g =$$

Définition (Variable aléatoire). On peut considérer la rentabilité comme des r.v.

$$(R_i)_{i=1}^T = (R_1, .., R_T) = (R_1(\omega), .., R_T(\omega))$$

-LLN. Ainsi on peut supposer que les $(R_i)_{i=1}^{\infty}$ sont i.i.d. et que

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[R_1] = .. = \mathbb{E}[R_n]$$

- TCL. Supposons que $(R_i)_{i=1}^{\infty}$ avec $\sigma^2 = Var(R_1) < \infty$ dans ce cas:

$$\sqrt{T}\Big(\frac{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i - \mathbb{E}[R_1]}{\sigma}\Big) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} N(0,1)$$

On peut lui associer également une variance:

$$\mathbb{V}[R_1] = \mathbb{E}[R_1 - \mathbb{E}[R_1])]^2$$

Définition (Vecteur aléatoire). Avec différents actifs, la rentabilité devient un vecteur

$$R_t = \{(R_t^1, .., R_t^d), 1 \leq t \leq T\}$$

où d est le nombre d'actifs. Et donc $\widehat{R_t} = (\widehat{R_t}^1, .., \widehat{R_t}^d)$ où d est le nombre d'actifs.

- Hypothèse 1. Les rentabilités simples $R_1, .., R_T$ sont iid de sorte que $R_1 \sim N(\mu, \Sigma)$.

1.1.1.4 Rentabilité d'un portefeuille

Soit $S_t = (S_t^1, S_t^2, .., S_t^d)$ le prix à l'instant t des actifs $1, .., d$ composant le portefeuille. Un portefeuille peut être définie par la stratégie $\theta_t = (\theta_t^1, .., \theta_t^d)$ où θ_t^i est le nombre d'actifs n°i investis.

L'hypothèse fondamentale de la théorie classique est l'absence de coûts de transaction. Alors dans ce cas la valeur liquidative du portefeuille est donnée par

$$V_t^\theta = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i S_t^i$$

Rentabilité d'un portefeuille en $t-1$ à t:

$$R_t^\theta = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{\theta_t S_t - \theta_t S_{t-1}}{\theta_t S_{t-1}} = \frac{\theta_t \Delta S_t}{\theta_t S_{t-1}} = \frac{\theta_t S_{t-1}(\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}})}{V_{t-1}} = \vec{x}_t \cdot \vec{R}_t^T$$

On en déduit que R_t^θ est une moyenne pondéré par les actifs. On aura utilisé le faite que $R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$

Ainsi la proportion investis du portefeuille en $t-1$ est:

$$x_t = \Big(\frac{\theta_t^1 S_{t-1}^1}{V_{t-1}}, .., \frac{\theta_t^d S_{t-1}^d}{V_{t-1}}\Big)$$

Exemple. On va considérer les prix $(S_t^1 = 50, S_t^2 = 75, S_t^3 = 60)$ avec les quantités $(\theta_t^1 = 100, \theta_t^2 = 120, \theta_t^3 = 90)$. Ce qui nous permet de dériver la valeur liquidative $V_t^\theta = \theta_t \cdot S_t = 19400$. On peut également dériver les proportions investis à l'instant t:

$$x_1 = \frac{100 \times 50}{19400} = 0.25; \quad x_2 = 0.46; \quad x_3 = 0.27$$

1

2

3

4

1.1.2 Faits stylisés et efficience

1.1.2.1 Faits stylisés

Stylized facts. They are results of many independent empirical studies on the statistical properties of financial markets that have been proven to be common across financial markets. See e.g. Rydberg (2000).

(i) Stationarité.
- Pour les prix S_t. L'analyse des prix S_t se révèle difficile car elles ne sont pas stationnaires et exhibent une forte autocorrélation. A cause de e.g., l'expension constante de l'économie, l'augmentation de la productivité qui amène à de l'innovation technologique, et les récessions économiques ou crises financières.

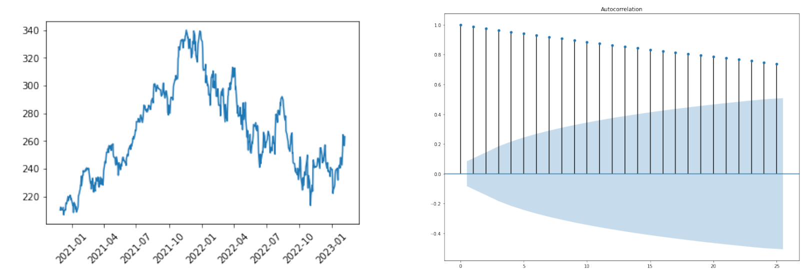


Figure 2: Données du MSFT avec 800 jours

- Pour la rentabilité r_t. On va préférer les rentabilités qui sont imprévisibles et exhibent une très faible autocorrélation, voire une absence d'autocorrélation. Ceci leur confère un aspect de marche aléatoire. ce sont des propriétés qui sont attendus dans un Marché Efficient, car les prix actuels doivent refléter toutes l'information qui est actuellement disponible dans le marché (en supposant que les investisseurs soient rationnels), ce qui rends impossible de faire une prédiction future car.

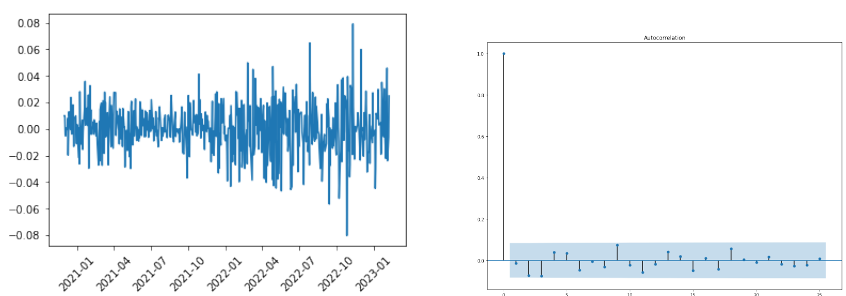


Figure 3: Données du MSFT avec 800 jours

(ii) Heavy tails (Non gaussianité). La distribution de probabilité de la rentabilité r_t a souvent des queue de distributions plus grande qu'une gaussienne.

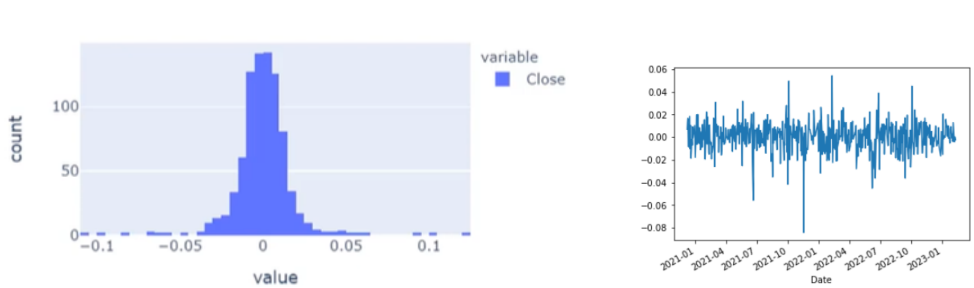


Figure 4: Gauche: distribution des log-rentabilité r_t; Droite: La log-rentabilité

(iii) Asymétrie. La distribution de la rentabilité r_t est souvent skewed négativement, ce qui refléte le faite que les récessions (downturn) des marchés financiers sont souvent forte (steeper) que leurs rétablissement. Les investisseurs ont tendance à réagir plus fortement à une nouvelle négative (negative news) que des nouvelles positives.

(iv) Volatility Clustering (Accumulation des volatilités). Par l'hypothèse que les rentabilité suivent une gaussienne centré, on peut afficher à gauche les r_t^2 aka std; puis sont ACF qu'on dénote: $\rho_{r_t^2}(h)$. On observe de forte corrélations jusqu'à plusieurs semaines. Ceci indique que durant des périodes de faibles/hautes volatilités on observe des plateaux

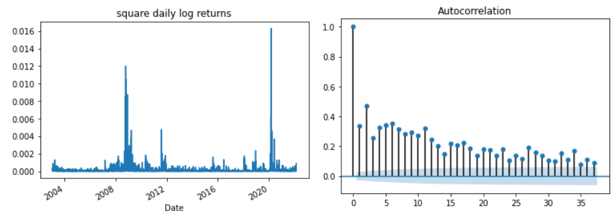


Figure 5: A gauche r_t^2 à droite son ACF correspondant

(vii) Leverage Effect (l'effet de levier). L'effet de levier fait référence à la corrélation négative entre les rentabilités des actifs et les changements de volatilités (Black 1976, Christie 1982). Par conséquence la volatilité augmente suite à des rendements négatifs (de mauvaises nouvelles) mais diminue dans le cas contraire.

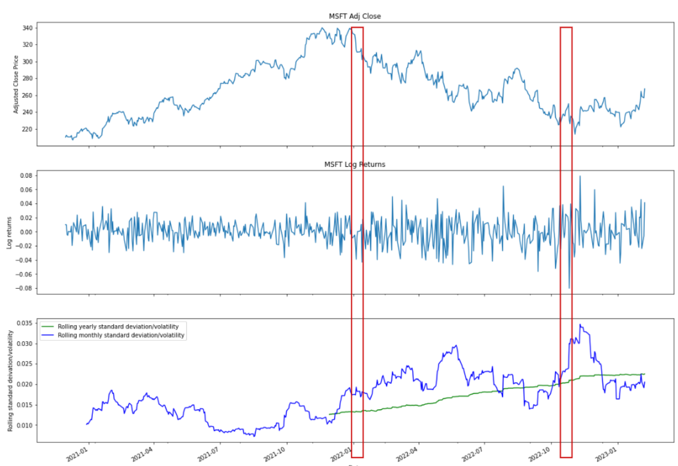


Figure 6: Top: S_t of the MSFT; Middle: log-returns r_t; Bottom: rolling volatility

1.1.2.2 Efficience de marché

Définition (Marché Efficient). If the weak form would hold technical analysis wouldn't make sense; and fundamental analysis wouldn't either on the semi-strong form.

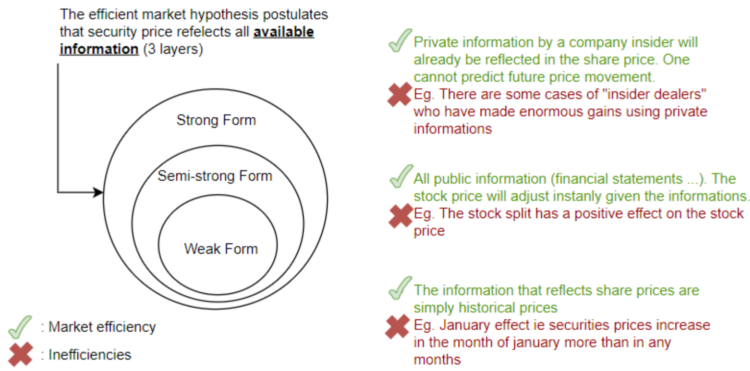


Figure 7: Fama model (1970), the inefficiences could be explained by Behavioral Finance.

- Remarque. On s'accord actuellement à reconnaître que les grands marchés financiers sont efficients. Il peut subvenir des anomalies et des poches d'inefficience. Cependant, elle déclencherait des interventions rapides des gérants. Ce qui ramènerait le cours à l'équilibre et ramène vers l'efficience du marché.

- En pratique. Il y'a plusieurs façons de le vérifier:

- Efficience faible. Le prix est une marche aléatoire ie les variations de prix sont purement aléatoires. Empiriquement on calcul l'ACF qui est censé être nul. Fama (1965) a testé cette hypothèse sur le Dow Jones de 1957 à 1962. Il confirme l'hypothèse d'efficience au sens faible. Solnik (1973) répète la même expérience sur le marché Européen et observe la mêeme caractéristique.
- Efficience semi-forte. On réalise une étude d'événement qui permet de mesurer si: les cours s'ajustent-ils instantanément à l'arrivée d'information publique non prévue. On mesure la rentabilité en excès en mesurant le alpha entre la droite théorique et la réalité. qu'on cumul de jours en jours. (Eg. Le stock split, rachats par la société de ses propres actions...)

Les poches d'inefficience. Ce sont des anomalies ponctuel qui mettent à mal l'efficience des marchés. Eg l'effet janvier (rentabilités anormales en janvier), l'effet taille des entreprises (les small caps on une meilleur rentabilité que les large cap...).. Une explication serait liée à la présence de biais comportementaux des investisseurs. Cela amène au champs de recherche de la finance comportementale.

Contents

1.2 Théorie du portefeuille de Markowitz (1952)

1.2.1 Théorie de l'utilité Von Neumann et Morgenstern (1947)

La théorie de Von Neumann et de Morgenstern est de dire que chaque agent à sa propre fonction d'utilité qu'il va chercher à maximiser.

Exemple.

- Celle de type utilité espérance
$$U(W) = \mathbb{E}[W]$$
- La fonction d'utilité de Markowitz
$$U(W) = f(\mathbb{E}[W], \mathbb{V}[W]) = \mathbb{E}[W] - K\mathbb{V}[W]$$

Définition (Prime de risque).

$$\Pi^u(W) = \mathbb{E}[W] - e^C(W)$$

Ce qui permet de catégoriser les préférences des agents:

- $\Pi^u(W) \geq 0, \forall W$, l'agent est averse au risque $\iff$ u est une fonction concave
- $\Pi^u(W) \leq 0, \forall W$, l'agent aime le risque $\iff$ u est une fonction convexe
- $\Pi^u(W) = 0, \forall W$, l'agent est neutre $\iff$ u est affine

1.2.2 Le modèle de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille (Markowitz 1952) parfois appelés mean-variance analysis est le cadre mathématique qui a formalisé cette intuition: La diversification permet de réduire la probabilité de tout perdre. L'idée principale est que le risque ne dépends pas que des actifs du portefeuille mais aussi des corrélations entre les actifs. Ainsi on ne veut pas que maximiser la rentabilité mais maximiser surtout la rentabilité ajusté au risque.

Remarque. La théorie du portefeuille n'est pas de la prédiction. Il ne va pas suggérer quel stock choisir. Plutôt, cette analyse explique comment construire un portefeuille avec des propriétés désirables sur le risque et la rentabilité.

1.2.3 Frontière efficiente lorsqu'il n'y a pas d'actifs sans risque

1.2.3.1 Cas simple avec deux actifs

Le problème est de déterminer l'allocation optimale du portefeuille x afin de résoudre le problème:

$$\underset{x}{sup}\, U(W^x) = f(\mathbb{E}[W^x] - \mathbb{V}[W^x]); \quad W^x = W_T = W_0(1 + R(x))$$

Où W^x est la richesse terminale du portefeuille opéré par x. Et w_0 est la richesse initiale investie, W_T la richesse totale. Pour maximiser la fonction on le fait soit pour:

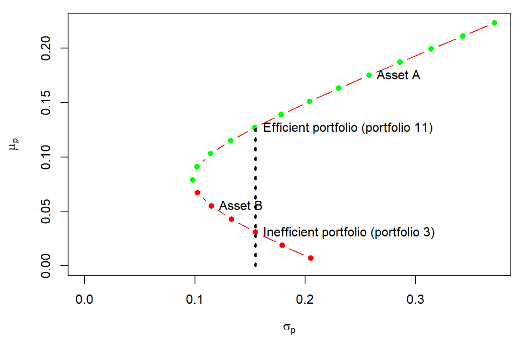
- Soit une variance W^x fixée (on maximise $E[W^x]$)

$$\text{Sup}_x \left\{ER(x) : V(R(x)) = \sigma^2\right\}, \sigma \text{ donné}$$

- Soit une espérance de W^x fixée (on minimiser $Var(W^x)$)

$$\min_x\{\text{var}(R(x)) : E(R(x)) = m\}, m \text{ donné}$$

- Portefeuilles efficients. Il y'aura pour chaque σ, un (ou des) portefeuilles optimaux. On parle de portefeuilles efficients. De façon équivalente ça signifie que le portefeuille n'est pas dominé par un aute portefeuille. Ou de façon équivalente un portefeuille efficient est un portefeuille pour lequel l'espérance est maximisé pour un niveau de risque σ_p fixé



- Fonction d'utilité. En considérant l'ensemble efficient des portefeuilles l'investisseur choisira celui qui corresponds le plus à ses préférences de risques. Un agent averse au risque choisira plutôt un portefeuille proche de la variance minimum. Pour un agent risqué il choisira plutôt proche de l'actif A.

- Frontière efficiente. C'est l'ensemble des couples du type:

$$(\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(R(x))}, m(x) = \mathbb{E}(R(x))); \quad x \text{ est un portefeuille efficient.}$$

Exemple (avec short). On suppose que l'agent investit dans deux actifs risqués S^1, S^2. On note $R = (R^1, R^2)$ les rendements associés sur une période $[0,T]$;$R^i = \frac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}, i = 1, 2$.

$$M = ER = \left(ER^1, ER^2\right)$$

$$\Sigma = \left(\operatorname{cov}\left(R^i, R^j\right)\right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \operatorname{var} R^1 & \operatorname{cov}\left(R^2, R_1\right) \\ \operatorname{cov}\left(R^1, R^2\right) & \operatorname{var} R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

On résume les statistiques:

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

Un portefeuille est définie par une composition $\pi = (x, y)$ tel que $x + y = 1$. Ainsi

$$R(x) = xR^1 + yR^2 = xR^1 + (1-x)R^2 \quad (= \pi \cdot R')$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R(x)) &= R^1\mathbb{E}(x) + R^2\mathbb{E}(1-x)(= \pi E(R)') \\ \mathbb{V}(R(x)) &= \mathbb{E}\left(R(x) - \mathbb{E}(R(x))\right)^2 \\ &= \mathbb{E}[\pi' R - \pi'\mathbb{E}[R(x)]]^2 \\ &= \mathbb{E}[\pi'(R - \mathbb{E}[R(x))]^2 \\ &= \pi\Sigma\pi' \\ V(R(x)) &= \sigma_1^2 x^2 + 2\sigma_{12}xy + \sigma_2^2 y^2 \end{aligned}$$

- Le portefeuille de variance minimale. Ainsi on peut déterminer le portefeuille de variance minimale en posant $y = 1 - x$

$$\begin{aligned} VR(x) &= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2\left(1 - 2x + x^2\right) + 2\sigma_{12}x - 2\sigma_{12}x^2 \\ &= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 - 2x\sigma_2^2 + x^2\sigma_2^2 + 201x - 20 + x^2 \\ &= x^2\left(0_1^2 + 0_2^2 - 2012\right) + x\left(-20_2^2\right) + 1 + \left(0_2^2\right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Where we let $a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$; $b = 2\sigma_{12} - 2\sigma_2^2; c = \sigma_2^2$. Et par définition on sait que le minimum d'une fonction quadratique est $-\frac{b}{a}$. On obtient donc un portefeuille qui minimise la variance :

$$x_{min} = -\frac{\left(\sigma_{12} - \sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

En vert on aura le global minimum variance portfolio qu'on calcule avec notre preuve du dessus.

$$x_A^{\min} = \frac{0.01323 - (-0.004866)}{0.06656 + 0.01323 - 2(-0.004866)} = 0.2021; \quad x_B^{\min} = 0.7979.$$

The expected return, variance and standard deviation of this portfolio are:

$$\begin{aligned} \mu_p^{min} &= (0.2021) \cdot (0.175) + (0.7979) \cdot (0.055) = 0.07925 \\ \sigma_p^2 &= (0.20)^2 \cdot (0.067) + (0.79)^2 \cdot (0.013) + 2 \cdot (0.20)(0.79)(-0.0048) = 0.00975 \\ \sigma_p^{min} &= \sqrt{0.00975} = 0.09782. \end{aligned}$$

On donne un table récapitulative:

$x_A^{\min}$	$x_B^{\min}$	$\mu_p^{\min}$	$\sigma_p^{\min}$
0.202	0.798	0.079	0.098

- Frontière efficiente. La frontière efficiente se détermine par exemple en minimisant $var(R(x))$ lorsque $E(R(x)) = m$ avec m fixé. On peut ensuite tracer la frontière efficiente comme étant $(\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(R(x))}, m(x) = \mathbb{E}(R(x)))$ avec x est un portefeuille efficient. On rappelle que $\sigma_{AB} = cov(R_A, R_B)$ et $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	-0.005	-0.164

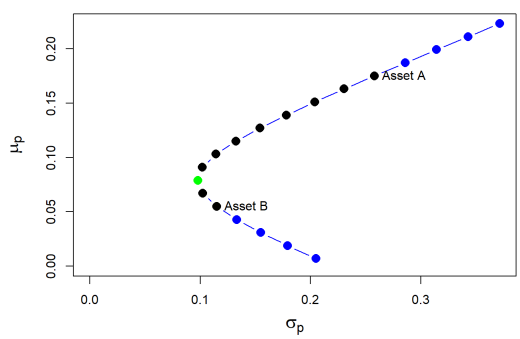
Pour générer l'ensemble des portefeuilles on va générer des $x_A = (-0.4, -0.3, .., 1.3, 1.4)$ avec un pas de 0.1 puis en utilisant le faite que $x_B = 1 - x_A$ ce qui nous permet de calculer le μ_p, σ_p corresponds avec les formules ci-dessus:

$$\mu_p = x_A \mu_A + x_B \mu_B$$

$$\sigma_p = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB}$$

On reporte ensuite l'ensemble des combinaisons dans une table (ici table qui ne corresponds pas au graphe mais donne une idée):

x_A	x_B	μ_p	σ_p
0	1	1.00	6.00
0.25	0.75	1.25	5.86
0.5	0.5	1.50	6.67
0.75	0.25	1.75	8.15
1	0	2.00	10.00
1.25	-0.25	2.25	12.06



Visuellement on observe: l'actif A ($x_A = 1, x_B = 0$) et le B avec ($x_A = 0, x_B = 1$). En noir on a les portfolio long et en bleu les short-longs. Here we define diversification as starting from a portfolio of only B for example and we rebalance it to incorporate asset A.

Correlation ρ. Pour rappel dans l'exercise précédent nous avions la table de données, On rappelle que $\sigma_{AB} = cov(R_A, R_B)$ et $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	-0.005	-0.164

avec

$$\mu_p = x_A \mu_A + x_B \mu_B$$

$$\sigma_p = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB}$$

Dans cet exemple on va voir l'impact de la variation de ρ sur la frontière efficiente. Ici nous illustrons avec $\rho_{AB} = -0.9, -0.5, 0, 0.5, 0.9$, la figure à gauche montre ces portefeuille frontière. La curvature des portefeuilles est déterminé par la valeur de ρ_{AB}.

- Plus ρ_{AB} est proche de 1 plus la frontière ressemble à une ligne qui connecte les deux portefeuilles A et B
- Plus $\rho_{AB} = -1$ alors la frontière touche μ_p est donc il existerait un portefeuille sans risque d'espérance fixe $\mu_p = 0.10$

- Corrélation et diversification. La diversification signifie avoir un portefeuille d'actifs qui ne sont pas corrélés afin de réduire le risque, la situation $\rho_{AB} = 1$ n'est donc pas recommandé

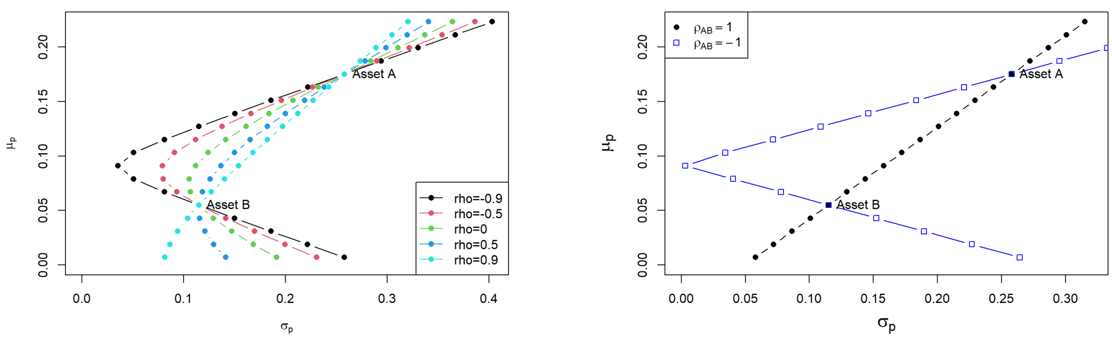


Figure 8: A gauche: on varie ρ; A droite: $\rho \in \{-1, 1\}$

1.2.3.2 Le primal et dual du programme de Markowitz

Solution of the mean-variance model. We can formulate the portfolio optimization problem in two equivalent ways:

- Minimize the portfolio riks. with the constraint expressing a lower bound on the portfolio return which the investor whises to reach

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \\ &\text{subject to } \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} \geq r_{\min}, \\ &\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned}$$

In this problem the objective function is convex quadratic, all the constraints are linear, thus it is a Quadratic optimization problem. Yet even though it is easy to solve this formulation is not ideal. Investors might prefer to specifying an upper bound on the portfolio risk instead of a lower bound on the expected portfolio return.

- Maximize the expected portfolio return. with the constraint expressing an upper bound on the portfolio risk

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} \\ &\text{subject to } \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \leq \gamma^2, \\ &\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1. \end{aligned}$$

In this formulation it is possible to explicitly constrain the risk measure, which makes it more practical. We can also add constraints on multiple types of risk measures more easily.

1.2.3.3 Cas $ER \in vect(1)$: Portefeuille de variance minimale

Setup. Les données sont des actifs risqués $S^1, S^2 \ldots, S^d, d \geq 1$ de rendements $R = \left(R^1, R^2, \ldots, R^d\right)$ sur une période donnée. On suppose donnée $ER = \left(ER^1, ER^2, \ldots, ER^d\right)$ $\Sigma = \left(\mathrm{Cov}\left(R^i, R^j\right)\right)_{ij=1,..,d}^{\text{symétrique}}$.

On pose le produit scalaire $\langle x, y\rangle_{\Sigma^{-1}} = x\Sigma^{-1}y'$ puis

$$
\begin{aligned}
a &= a_\Sigma = ||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1'} = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}} \\
b &= \langle E(R), \mathbf{1}\rangle_{\Sigma^{-1}} = E(R)\Sigma^{-1}\mathbf{1'}
\end{aligned}
$$

puis on va résoudre en utilisant:

$$A_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^d : x\mathbf{1'} = 1; x\Sigma x' = \sigma^2\}$$

Ce qu'il faut faire ensuite c'est de trouver la combinaison de portefeuille x pour se faire:

$$\sigma^2 = x\Sigma x' = (x\Sigma)\Sigma^{-1}(x\Sigma)' = ||x\Sigma||_{\Sigma^{-1}} = \langle x\Sigma, x\Sigma\rangle_{\Sigma^{-1}}$$

Où on va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$
\begin{aligned}
&1 = \mathbf{1'}x = \mathbf{1'}\Sigma^{-1}(\Sigma x) = \langle \mathbf{1}, \Sigma x\rangle_{\Sigma^{-1}} \leq \underbrace{||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}}_{=a} \cdot \underbrace{||x\Sigma||^2_{\Sigma^{-1}}}_{=\sigma^2} \\
&\Rightarrow 1 \leq a\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 \geq \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

Si on prends la variance minimale on obtient $\sigma^2_{min} = \frac{1}{a}$. De plus avec l'inégalité ci-dessus on a la propriété qu'il y'a égalité si $\mathbf{1}$ et $x\Sigma$ sont colinéaires. Ce qu'on écris:

$$x\Sigma = k\mathbf{1} \iff x = k\mathbf{1}\Sigma'$$

Il nous reste à trouver la valeur de k:

$$x\mathbf{1'} = 1 \Rightarrow k\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1'} = 1$$

Or on sait que $\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1'} = a$ on en déduit que $k = \frac{1}{a}$ et donc en reprenant l'exemple on obtient la combinaison minimale:

$$A_\sigma = \{x_{min} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}\}$$

Il reste à trouver le rendement moyen associé à ce portefeuille

$$\mu_{min} = \frac{b}{a}$$

1.2.3.4 Cas $ER \not\in vect(1)$: Approche de Merton

Définition. Supposons que $E(R) \not\in vect(1)$. La frontière efficiente est l'ensemble des couples $(\sigma, m(\sigma))$ où $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$ et

$$\boxed{x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{\|\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}\|_{\Sigma^{-1}}}\Sigma^{-1}}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\left\|ER - \frac{b}{a}\mathbf{1}\right\|_{\Sigma-1}$$

est le rendement maximal pour une variance de σ^2 réalisé par le portefeuille efficient.

- Notations. On pose le produit scalaire $\langle x, y\rangle_{\Sigma^{-1}} = x\Sigma^{-1}y'$ puis

$$a = a_\Sigma = ||\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1'} = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}}$$
$$b = \langle E(R), \mathbf{1}\rangle_{\Sigma^{-1}} = E(R)\Sigma^{-1}\mathbf{1'}$$

Preuve. La preuve se base sur l 'approche de "An alternative proof to Markowitz's model" de Merton, 1972. On va commencer par poser que $x \in \mathbb{R}^d$ avec $x \cdot \mathbf{1} = 1$. On va résoudre le problème de maximization

$$max\ \mathbb{E}[R(x)] = \mathbb{E}[R]x' = g(x)$$
$$s.t.\ D = \{x\mathbf{1} \leq 1;\ x\Sigma x' \leq \sigma^2\}$$

On peut écrire la fonction du lagrangien:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2)g(x) - \lambda_1(x\mathbf{1} - 1) - \lambda_2(x\Sigma x' - \sigma^2)$$

Ce qui nous amène au KKT où x^* est un maximiser On rajoute également deux contraintes des écarts complémentaires (complementary slackness)

$$(KKT): \begin{cases} L_x(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ L_{\lambda_1}(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^*\mathbf{1} \leq 1 \\ L_{\lambda_2}(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^*\Sigma x^{*'} \geq \sigma^2 \\ L_1(x, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \geq 0 \\ L_{\sigma^2}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(x\mathbf{1} - 1) = 0; \quad \lambda_2(x^*\Sigma x^{*'} - \sigma^2) = 0 \end{cases}$$

On peut réécrire le lagrangien:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = E(R)x^T - \lambda_1(x\overrightarrow{1} - 1) - \lambda_2\left(x\Sigma x' - \sigma^2\right) = 0$$

- Dérivé à x. On peut dériver par rapport à x:

$$L_x = E(R) - \lambda_1\mathbf{1} - 2\lambda_2 x^T\Sigma = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{2\lambda_2}\left(E(R) - \lambda_1\mathbf{1}\right)\Sigma^{-1}}$$

- Dérivé à λ_1. On va pouvoir obtenir le premier multiplicateur de lagrange

$$\begin{aligned} L_{\lambda_1} = x\mathbf{1} - 1 = 0 &\iff x\mathbf{1} = 1 \\ &\iff \frac{1}{2\lambda_2}\left(E(R) - \lambda_1\mathbf{1}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 1 \\ &\iff \lambda_1 = \frac{b}{a} - 2\frac{\lambda_2}{a} \end{aligned}$$

- Dérivé à λ_2. Puis le second multiplicateur

$$L_{\lambda_2} = x\Sigma x' = \sigma^2 \iff \lambda_2 = \frac{||\mathbb{E}[R] - \frac{b}{a}||_{\Sigma^{-1}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}$$

- Portefeuille efficient. On obtient l'équation du portefeuille efficient qui est l'ensemble des points critiques de la fonction du lagrangien en fonction de σ:

$$x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{||\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbf{1} \right\|_{\Sigma-1}$$

Exemple. On va considérer trois actifs avec dans l'ordre {MSFT, NORD, SBUX} d'où les rentabilités sont des v.a.; mais on peut dériver ses deux premiers moments: à partir de l'historique:

$$R = \begin{pmatrix} R_M \\ R_N \\ R_S \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[R] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[R]^M \\ \mathbb{E}[R]^N \\ \mathbb{E}[R]^S \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

- Portefeuille minimale. Pour rappel on avait dérivé le portefeuille efficient de variance minimale:

$$[x_{min}]_{3\times 1} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbf{1}; \quad a = ||\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}} = \mathbf{1}\Sigma\mathbf{1}'$$

Dont on peut calculer ses deux moments avec:

$$\mu_{min} = \mathbb{E}[R]^T x_{min}; \quad \sigma_{min} = x_{min}^T \Sigma x_{min}$$

On le représente en vert et on le nomme GMIN.

- Frontière efficiente. Il nous suffit de générer de façon itérative des $\sigma^{(i)} \geq \frac{1}{a}, i = 1, .., n$ car le portefeuille minimale est le premier de la frontière

$$x(\sigma) = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \frac{\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}}{||\mathbb{E}R - \frac{b}{a}\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1}$$

Puis en utilisant $m(\sigma) = \mathbb{E}[R]x(\sigma)' = x(\sigma)\mathbb{E}[R]'$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbf{1} \right\|_{\Sigma-1}$$

L'ensemble des couples $(\sigma^{(i)}, m(\sigma^{(i)})$ est représentés en gris. La Markowitz Bullet dessine une frontière efficiente sur le haut de la bullet (ce sont les portefeuilles efficients)

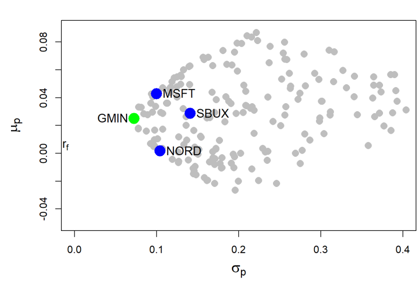


Figure 9: Efficient frontier of N risky assets

1.2.4 Frontière efficiente lorsqu'il y'a un actif sans risque S^0

1.2.4.1 Portefeuille avec un actif risqué et un non-risqué

Soit un investissement dans un actif risqué et un actif sans risque (T-Bill). Soit x la part de richesse dans l'actif risqué, et x_f la part de richesse dans le T-Bills tel que $x + x_f = 1$. En utilisant $x_f = 1 - x$, La rentabilité du portefeuille s'écrit:

$$R_p = x_f r_f + xR = (1 - x)r_f + xR = r_f + x\,(R - r_f)\,.$$

La quantité $R - r_f$ est appelé excess return (over the return on T-bills) sur l'actif risqué. Le portefeuille expected return is then:

$$\mu_p = r_f + x\,(E[R] - r_f) = r_f + x\,(\mu - r_f),$$

où la quantité $(\mu - r_f)$ is called the expected excess return or risk premium on the risky asset. The
On peut montrer que puisque $r_f = cst$, la variance du portefeuille dépendera seulement de l'actif risqué qui est donné par

$$\sigma_p^2 = \mathrm{var}\,(\mathrm{R_p}) = \mathrm{var(xR)} = x^2\sigma^2$$

The portfolio standard deviation is therefore proportional to the standard deviation on the risky asset:

$$\sigma_p = |x|\sigma$$

Exemple. On va considérer un portefeuille avec un T-bills et un actif B. Soit x_B et $1 - x_B$ le part de richesse dans l'actif B et le T-bills respectivement. On fixe que $r_f = 0.03$. Ce qui implique:

$$\text{risk premium} = \mu_B - r_f = 0.055 - 0.03 = 0.025$$

L'interprétation est que cette valeur est généralement > 0. Elle indique que l'investisseur s'attends à un plus grand rendement sur l'actif risqué que le non risqué (T-Bill).

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

x_f	x_B	μ_p	σ_p
0	1	0.055	0.115
1	0	0.03	0
0.5	0.5	0.0425	0.0575

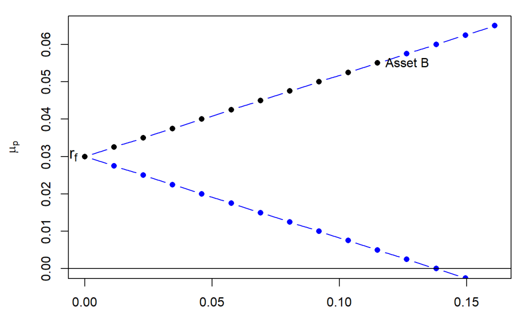


Figure 10: En noir position long et en bleu position short

Le short n'est pas permis. Si on bloque le shorting on aura que $x > 0$ ce qui nous permet de réécrire

$$\sigma_p = |x|\sigma \iff x = \frac{\sigma_p}{\sigma}$$

En remplaçant dans l'expression de l'espérance on obtient que

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu - r_f}{\sigma}\sigma_p$$

Cette expression est celle d'une ligne (μ_p, σ_p) avec intercept r_f et pente $(\mu - r_f)/\sigma$. Cette ligne a une pente positive tant que le risk premium est positif.

- Capital Allocation Line (CAL). Elle porte ce nom car elle décrit comment l'investissement en capital est alloué entre les T-Bills et l'actif risqué. Plus on se rapproche de l'axe y plus le portefeuille alloura de T-Bills et plus on s'éloigne plus on aura d'actif risqués.

La pente du CAL est appelé Sharpe Ratio (SR) il mesure le risk premium de l'actif par unité de risque (mesure par le std de l'actif)

$$SR = \frac{\mu - r_f}{\sigma}$$

On observe notre remarque le point r_f est alloue 100% en T-Bills. Les points Asset A est alloué à 100% dans l'actif A. Un point qui sera à mi-chemin entre l'actif A et le T-bill aurait une allocation de 50% de chaque.

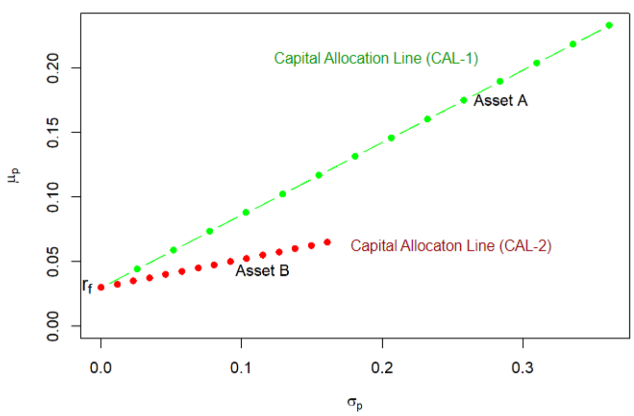


Figure 11: Two capital Allocation Line

Définition (Ratio de Sharpe).

$$SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

- Si le ratio est compris entre 0 et 1 , le rendement obtenu est supérieur à celui d'un placement sans risque (par exemple le livret A), mais il reste insuffisant.
- Si le ratio est supérieur à 1 , tout va bien. La performance dégagée est meilleure que celle du taux du placement sans risque. Le jeu en vaut la chandelle.
- Si le ratio est négatif, c'est que la performance obtenue en prenant des risques est inférieure à celle qui serait dégagée en n'en prenant aucun. Autant dire que le résultat est désastreux.

1.2.4.2 Portefeuille avec deux actifs risqués et un non-risqué

Motivation. Le portefeuille tangentiel part du cas sans short si on teste différente valeur de la tangente $\text{SR}_B = \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B} = 0.217$, $\text{SR}_A = \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A} = 0.562$ on n'obtient pas une combinaison qui maximise le ratio de Sharpe:

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu - r_f}{\sigma}\sigma_p = r_f + SR\sigma_p$$

On va donc résoudre le programme suivant

$$\begin{aligned}
&\max_{x_A, x_B} \text{SR}_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \text{ s.t.} \\
&\mu_p = x_A\mu_A + x_B\mu_B, \\
&\sigma_p^2 = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB}, \\
&1 = x_A + x_B.
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir un portefeuille tangent qui maximise le ratio de sharpe:

x_A^{tan}	x_B^{tan}	μ_{tan}	σ_{tan}	SR_{tan}
0.463	0.537	0.111	0.125	0.644

What's the point of maximizing the Sharpe ratio ????

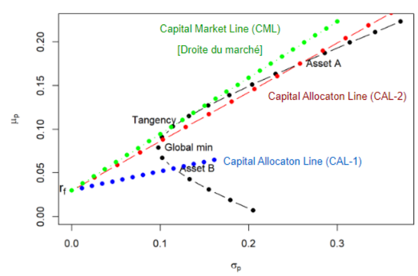


Figure 12: The green line is referred to as the Capital Market Line

Construction des frontières. Soit deux actifs S^1 et S^2 avec leurs statistiques et un taux sans risque $r_f = 0.03$

μ_A	μ_B	σ_A^2	σ_B^2	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.175	0.055	0.067	0.013	0.258	0.115	−0.005	−0.164

- **Frontière efficiente sans actifs sans-risque.** En noir on va tracer la frontière de Markowitz avec uniquement deux actifs risqués A et B. Pour rappel on va générer un ensemble de poids $x_A = (-0.4, -0.3, ..)$ avec un pas de 0.1 pour ensuite calculer les couples

$$\mu_p = x_A\mu_A + x_B\mu_B; \quad \sigma_p = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB}$$

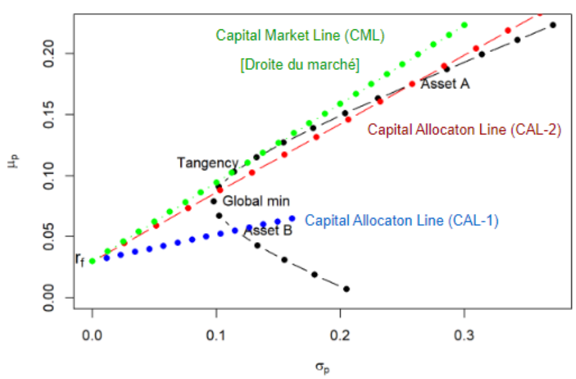
- **Frontière efficiente avec un actif risqué et un sans risque.** En rouge on va retrouver le couple (r_f, x_A) puis en bleu (r_f, x_B).

$$\mu_p = r_f + x\left(\mu - r_f\right); \quad \sigma_p = |x|\sigma$$

- **Le portefeuillle tangentiel.** Ensuite il nous reste le portefeuille tangentiel c'est celui qui a la plus haut niveau du Ratio de Sharpe en actifs risqués (x_A, x_B).

$x_A^{\tan}$	$x_B^{\tan}$	$\mu_{\tan}$	σ_{tan}	$\mathrm{SR}_{\tan}$
0.463	0.537	0.111	0.125	0.644

On peut ensuite tracer ces trois éléments:



Théorème des deux fonds (Mutual Fund Separation). Les portefeuilles efficients sont des combinaisons du portefeuille tangentiel $(0, \xi)$ investis uniquement en actifs risqués et du T-bill. En conséquence on obtiente les combinaisons risque/rentabilité suivante:

$$\mu_p^e = r_f + \xi\left(\mu_{\tan} - r_f\right)$$
$$\sigma_p^e = \xi\sigma_{tan}$$

Où ξ représente la proportion de richesse investis dans le portefeuille tangent, $1-\xi$ est la proportion investis dans le T-Bills. On va considérer ici que le portefeuille tangent est constitué de deux actifs risqués A et B.

Le portefeuille tangenciel peut être considéré comme un mutual fonds (i.e. portefeuille) de deux actifs risqués (x_A, x_B). Et le T-Bill peut être considéré comme un mutual fonds d'actifs non-risqués. Ainsi l'agent en fonction de sa préfèrence pourra choisir une combinaison plus ou moins risqués.

Autrement dit, les investisseurs répartissent leur richesse entre l'actif sans risque et un fond reproduisant l'indice de marché déterminé par ξ. On parle de gestion indicielle ou encore de gestion passive.

Y'a un truc a checker dans une des docs ils disaient que le sharpe ratio est le même pour l'actif sans risque et le tangency portfolio.

1

Fonction d'utilité. Along the linear EF all the pairs have the same Sharp coefficient. It thus depends on the client how much risk they are ready to take

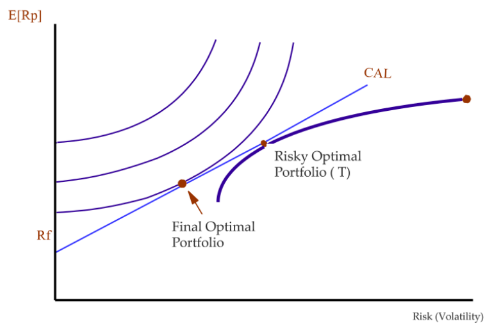


Figure 13: The scheme for the choice of the final optimal portfolio

1.2.4.3 Portefeuille avec N actifs risqués et un non-risqué

Soit un ensemble d'actifs risqués $S^1, .., S^d$ de rentabilités respectives $R = (R^1, .., R^d)$. On ajoute S^0 de rentabilité R^0 l'actif sans risque, déterministe (variance nulle).

On peut aussi modéliser un portefeuille par $x \in \mathbb{R}^d$ mais ici $x\mathbf{1}'$ n'est pas forcément égal à 1. La proportion investit dans S^0 est donc:

$$x^0 = 1 - x\mathbf{1}'$$

Eg. $x = (0.2, 0.3, 0.4) \Rightarrow x\mathbf{1}' = 0.9$ ça implique donc que le poids du sans-risque est $x_0 = 1 - 0.9 = 0.1$. On peut égalemnt réécrire pour le portefeuille:

$$R(x) = x^0R^0 + x^1R^1 + ... + x^dR^d = (1 - x\mathbf{1}')R^0 + xR' = R^0 + x(R - R^0\mathbf{1})'$$

ça implique deux moments:

$$\begin{aligned} E(R(x)) &= R^0 + x(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})' \\ Var(R(x)) &= x\Sigma x' \end{aligned}$$

- Remarque. La variance minimale possible est de zéro i.e. investir seulement dans du sans risque.

Dérivation.

$$\begin{aligned} &\sup_x \; x \cdot v = x \cdot (\mathbb{E}(R) - R^0\mathbf{1}) \\ &s.t. \; x\Sigma x' \leq \sigma^2 \end{aligned}$$

On commence par écrire la fonction du lagrangien:

$$L(x, \lambda) = x \cdot v - \lambda(x\Sigma x' - \sigma^2)$$

On peut écrire le KKT, avec en dernière ligne les écarts complémentaires:

$$(KKT): \quad \begin{cases} L_x(x, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, \lambda) = x\Sigma x' \leq \sigma^2 \\ L_{\sigma^2}(x, \lambda) = \lambda \geq 0 \\ \lambda(x^*\Sigma x^{*'} - \sigma^2) = 0 \end{cases}$$

On peut commencer par réécrire le langagrangien wrt à x

$$L_x(x^*, \lambda) = v - 2\lambda x^*\Sigma = 0 \iff \boxed{x^* = \frac{1}{2\lambda} v\Sigma^{-1}}$$

Puis on exploite L_λ

$$\begin{aligned} x^*\Sigma x^{*'} = \sigma^2 &\iff \frac{1}{4\lambda^2} v\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}v = \sigma^2; \quad v = (\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1}) \\ &\iff 4\lambda^2 = \frac{||v||^2_{\Sigma^{-1}}}{\sigma^2}; \quad v\Sigma^{-1}v' = ||v||^2_{\Sigma^{-1}} \\ &\iff 2\lambda = \frac{||v||_{\Sigma^{-1}}}{\sigma} \end{aligned}$$

Si on peut plug les termes dans x^* on obtient que la valeur critique est:

$$\boxed{x^* = \frac{\sigma}{||ER - R^0\mathbf{1}||}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}$$

Pour ensuite le plug dans l'espérance

$$
\begin{aligned}
E(R(x)) = m(\sigma) &= R^0 + x^*(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})' \\
&= R_0 + \sigma||E(R) - R^0\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}} \\
&= R_0 + \sigma\sqrt{SR}
\end{aligned}
$$

Où $SR = ||E(R) - R^0\mathbf{1}||^2_{\Sigma^{-1}}$ est l'indice de performance de sharp.

Propriétés. Si $ER \neq R^0\mathbf{1}$ la frontière efficiente est $(\sigma, m(\sigma)), \sigma \geq 0$ où $m(\sigma) = R^0 + \sqrt{SR}\sigma$ (appelé droite du marché) est réalisé par le portefeuille efficient:

$$
\boxed{x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}
$$

VOCABLE. Security allocation line et security market line.

Proposition (Théorème des deux fonds). On dit qu'il existe un portefeuille efficient unique $(0, x^M)$ ne dépendant que des caractéristiques du marché, vérifiant $x^M\mathbf{1} = 1$ (en gros ça te dit que y'a pas de sans risque en terme d'allocation). On dit qu'il vérifie:

$$
\boxed{x^M = \frac{1}{b - aR_0}(\mathbb{E}[R] - R_0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}
$$

Avec $a = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}'; b = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}'$.

Preuve (de la variance de marché). On avait vu que le portefeuille efficient pour N actifs risqués et 1 sans risque est:

$$
x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}; \quad SR = ||E(R) - R^0\mathbf{1}||_{\Sigma^{-1}}
$$

On va en extraire x^M le seul portefeuille sans actif sans risque. Pour se faire on peut poser que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}^T x(\sigma) = 1 &\iff \mathbf{1}^T \frac{\sigma}{\sqrt{SH}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1} = 1 \\
&\iff \sigma^M = \frac{\sqrt{SR}}{\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})}
\end{aligned}
$$

Puis en posant que $a = \mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$ et $b = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}'$ on obtient que:

$$
b - aR_0 = \mathbb{E}[R]\Sigma^{-1}\mathbf{1}' - R^0\mathbf{1}\Sigma^{-1}\mathbf{1}' = (\mathbb{E}[R] - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}\mathbf{1}'
$$

Ainsi on peut réécrire le σ^M comme précisé:

$$
\boxed{\sigma^M = \frac{\sqrt{SR}}{b - aR_0}}
$$

Ainsi x^M est bien efficient.

Preuve (de la moyenne de marché). En utilisant une approche similaire à celle qu'on a vu en utilisant notre σ^M:

$$
x(\sigma) = \frac{\sigma^M}{\sqrt{SR}}(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1} = \frac{(ER - R^0\mathbf{1})\Sigma^{-1}}{b - aR_0}
$$

et enfin

$$m(\sigma) = R_0 + \sigma\sqrt{SR} \Rightarrow m(\sigma^M) = R^0 + \sqrt{SR}\sigma^M$$
$$\Rightarrow \sqrt{SR} = \frac{m(\sigma^M) - R^0}{\sigma^M}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la Security Market Line:

$$m(\sigma) = R^0 + \left(\frac{m(\sigma^M) - R^0}{\sigma_M}\right)\sigma$$

On va appeler en bleu le prix du marché du risque aka market risk premium.

Définition (Portefeuille tangent). Le couple $(\sigma^M, \mathbb{E}[R^M])$ appartient aux deux frontières efficientes. On l'appelle le portefeuille tangent. C'est le seul portefeuille qui efficient à la fois dans le marché risqué que dans le marché mixte.

Il faut que la Droite de marché, Capital Market Line (CML) est un cas particulier de Capital Allocation Line (CAL) car il est tangent à la frontière efficiente. On peut avoir 100% dans le risk free rate, où

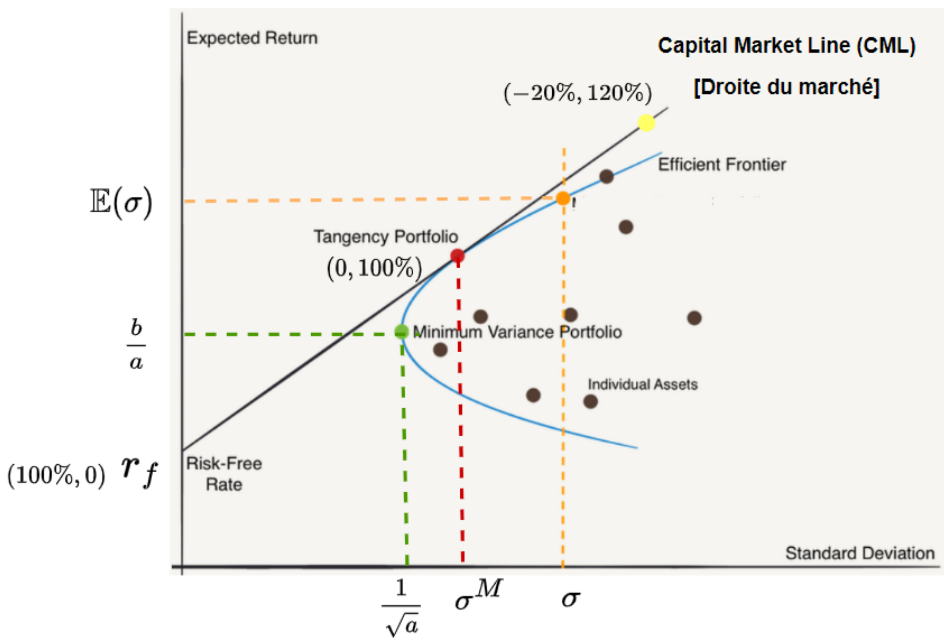


Figure 14: The scheme for the choice of the final optimal portfolio

Remarque:

- Lending
- Borrowing (leverage). If we look at the yellow point we borrow 20% of T-bills to obtain 120% of the risky asset. Effet de levier = achat de titres financé par un emprunt ici au taux sans risque.

Exercice (Théorème des deux fonds).
ici

1.2.5 Additional Constraints

biblio:
1

Contents

1.3 Le MEDAF (1961-)

Le Modèle d'Evaluation des actifs financiers (MEDAF) ou CAPM (Capital Asset Pricing Model) il a d'abord été proposé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966).

1.3.1 Le modèle du MEDAF

1.3.1.1 Le cadre

On suppose un marché financier constitué d'actifs $S^1, S^2, \ldots, S^d$ sur une periode $[0, T]$.S^0 est un actif sans risque de rendement R^0 et $R = \left(R^1 \ldots, R^d\right)$ de rendement sur $[0; T]$ de $\left(S^1, .., S^d\right)$.

On va poser que les quantités $\left(q^i\right)_{i=1,..,d}$ d'actifs risquées du marché: Par définition, le portefeuille de marché, est définie par une quantité $\theta^M = \left(q^1, \ldots, q^d\right)$ ainsi on suppose connues les quantités disponibles de chacun des titres. Et les portefeuille de marché est composé de tous les actifs risqués dans les proportions du marché. On encore en terme de proportions:

$$x^M = \left(q^1 \frac{S_0^1}{W_0^M}, q^2 \frac{S_0^2}{W_0^M}, \cdots, q^d \frac{S_0^d}{W_0^M}\right)$$

ou' W_0^{M} est la richesse totale S_0 est le prix de l'actif n° i à la date 0. $x^M \mathbf{1'} = 1$, ie le portefeuille de marché est totalement investis dans les actifs risqués.

Hypotèse 1. Une des hypothèses du MEDAF est que les agents du marché sont rationnels i.e. qu'ils choisissent des portefeuilles efficients. Ainsi si on a N agents pour chaque $j = 1, 2, .., N$ l'agent n°j a un portefeuille

$$x\left(\sigma_j\right) = \frac{\sigma_j}{\sqrt{\mathrm{sh}}} \left(ER - R_0 \mathbf{1}\right) \Sigma^{-1}, j = 1, .., N$$

Hypothèse 2. On pose que $S = D$ ce qu'on appelle l'équilibre du marché. Ainsi à l'équilibre les prix (aka rentabilité) vérifient:

Demande en actifs par tous les agents = Offre totale d'actifs sur le marché

De façon équivalente:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega^j \times x_i\left(\sigma_j\right) = q^i S_0^i = w_0^M x_i^M; \quad \forall i = 1, .., d$$

Où w_0^j est la richesse de l'argent n°j. et $w_0^j x^i(\sigma_j)$ est la richesse de l'agent j investis dans l'actif i. Ainsi:

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{W_0^M} x(\sigma_j); \quad \sum_{j=1}^{N} w_0^j = w_0^M$$

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_0 j}{\omega_0^M} \frac{\sigma_j}{\sqrt{s^h}} \left(ER - R_0 \mu\right) \Sigma - 1 \Rightarrow x^M = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_0^j}{\omega_j^+} \sigma_j\right)}{\sqrt{sh}} \left(ER - R_0 \mu\right) \Sigma^{-1}$$

On en déduit que x^M est un portefeuille efficient dont le risque est

$$\sigma^M = \sum_{j=1}^{M} \frac{\omega_0^j}{\omega_0} \sigma_j$$

Il faut que toutes les hypothèses du modèles soient claire

Hypothèse. Le choix est fait au début et en fin de période la rentabilité est mesurée ainsi que le risque.

1.3.1.2 Dérivation du CAPM

Preuve.
(a) Covariance actif et marché.

$$\begin{aligned}
cov(R, R^M) &= cov(R^M, R); \quad \text{par symétrie} \\
&= E(R^M - ER^M)(R - ER) \\
&= E(x^M R' - x^M ER')(R - ER); \quad R^M = x'_M R \\
&= x^M E(R - ER)'(R - ER) \\
&= x^M \Sigma
\end{aligned}$$

Nous allons donc devoir dériver la valeur de x^M.

(b) Dérivation de x^M. Comme le portefeuille du marché est uniquement investit dans les actifs risqués, il coincide avec le portefeuille tangent. On va donc pouvoir exploiter $x^M, m(\sigma^M)$ et σ^M qu'on a dérivé dans le précédent chapitre. Entre autre:

$$\xi = x^M = \frac{1}{b - aR_0} (ER - R_0 \mathbf{1}) \Sigma^{-1}$$

On va chercher à réécrire le terme en bleu en utilisant notre connaissance de σ^ξ

$$\begin{aligned}
\sigma^\xi = \frac{\sqrt{SH}}{b - aR^0} \iff \frac{1}{b - aR^0} &= \frac{\sigma^\xi}{\sqrt{SH}} \\
\iff \frac{1}{b - aR^0} &= \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M \sqrt{SH}} = \frac{\mathbb{V}[R^M]}{\sigma_M \sqrt{SH}}
\end{aligned}$$

Il nous reste à réécrire le dénominateur de σ^ξ, on utilise

$$m(\sigma_M) = \mathbb{E}[R^M] = R^0 + \sqrt{SH}\sigma_M \iff \mathbb{E}[R_M] - R^0 = \sqrt{SH}\sigma_M$$

On obtient donc

$$\xi = x^M = \frac{1}{b - aR_0} (ER - R_0 \mathbf{1}) \Sigma^{-1} = \frac{\mathbb{V}[R^M]}{\mathbb{E}[M] - R^0} (ER - R_0 \mathbf{1})$$

(c) Fin de la preuve. En utilisant (b) on obtient:

$$cov(R, R^M) = x^M \Sigma = \frac{Var(R^M)}{E(R^M) - R^0} (E(R) - R^0 \mathbf{1})$$

Puis en réarrangeant les termes on arrive à la proposition suivante:

Proposition. A l'équilibre, les rentabilités $R^i, i = 1, .., d$ des actifs risqués sont telles que

$$\boxed{(SML): \quad \mathbb{E}\left[R^i\right] - R^0 = \beta^i \left(\underbrace{\mathbb{E}\left[R^M\right] - R^0}_{\text{risk premium}} \right) \quad \text{où} \quad \beta^i := \frac{\text{cov}\left(R^i, R^M\right)}{\text{var}\left(R^M\right)}}$$

Le coefficient β^i est appelé le beta de l'actif risqué i. Cette équation est appelé Security Market Line (SML). Elle lie le β aux rendements espérés des actifs.

En français on parle de "prime de risque" quand on parle de "risk premium"

1.3.1.3 Calcul du β

Calculer le β.
(i) En utilisant les données historiques. Soit $d \geq 2$ on a deux actifs S^1, S^2 et un portefeuille de marché avec x^M, R^M de plus un actif sans risque de $R_0 = 2\% = \frac{2}{100}$. De plus en utilisant l'historique on peut calculer directement les $E[R^i]$ par une moyenne empirique:

Actifs	ER	beta	Risque systémique	Risque spécifique
R^M	10%	1	20%	0
R^1	8.4%	0.8	12.8%	10%
R^2	-5%	-$\frac{7}{8}$	15.26%	30%

Pour rappel la formule du beta est:

$$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x); \quad \beta(x) = \frac{cov(R^M, R(x))}{var(R^M)}$$

Ligne 3: $E(R^2) = R_0 + \beta_2(E(R^M) - R^0) + 0$ donne

$$\beta_2 = \frac{E(R^2) - R^0}{E(R^M) - R^0} = \frac{-5/100 - 2/100}{10/100 - 2/100} = -\frac{7}{8}$$

(ii) En utilisant la formule de covariance.

$$\beta_i = \frac{Cov(R^i, R^M)}{Var(R^M)} = 1.851$$

On va pouvoir utiliser la table suivante:

	Monthly Return			
	Bubsy	Market Index	Excess Return (Bubsy)	Excess Return (market)
Jan	11%	8%	8%	5%
Feb	17%	10%	14%	7%
March	21%	13%	18%	10%
April	18%	11%	15%	8%
May	-8%	-3%	-11%	-6%
June	-12%	-5%	-15%	-8%

Table 1: LHS: Dataset of the stock Bubsy; RHS: Excess returns

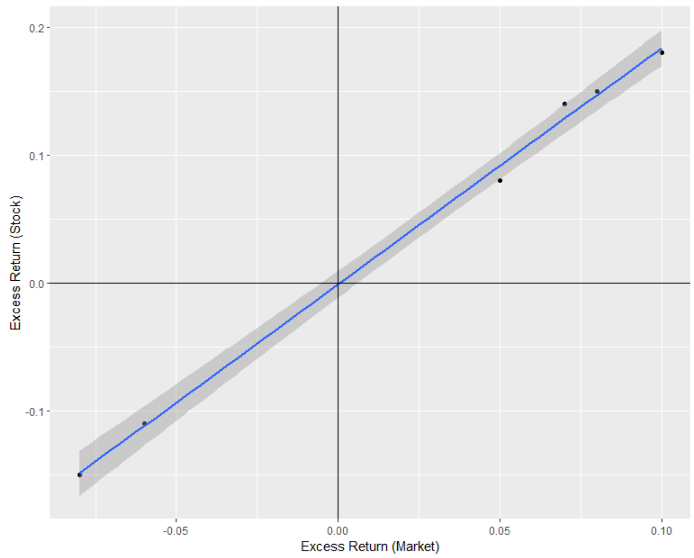
(iii) Par régression linéaire. Beta is the slope of the line when you plot a security excess returns against the market excess returns. Let say we have $r_f = 3\%$ and the same dataset as above

$$\underbrace{R^i - r_f}_{\text{excess return stock i}} = \alpha_i + \beta_i \underbrace{(R_m - r_f)}_{\text{excess return market}} + \varepsilon_i \iff Y = \beta X + \varepsilon$$

How do changes in Exccess return of the market predict changes in the excess return of Bubsy. And the α_i is the intercept.

	Coefficients	p-value
alpha	-0.00102	0.7976
Beta	1.851	3.316e-06

TO DO. Add a linear regression plot of excess return market (x-axis) vs excess return stock i (y-axis)



0.2
0.1
0.0
-0.1
Excess Return (Stock)
-0.05
0.00
0.05
0.10
Excess Return (Market)

Figure 15: ??

Calculer le β d'un portfolio. Let's say we have a portfolio of five assets we have calculated their log-returns r_t. Note that quantpy decided to choose CBA.AX as the Market Portfolio which is included in our portfolio. As a consequence it will bias our portfolio. We can calculate their $\beta's$ in two manners:
- Directly. Looking at historical data we can calculate the ratio of their moments

$$[R_p]_{n\times 1} = [R]_{n\times 5}[w]_{5\times 1} \Rightarrow \beta_p = \frac{cov(R_p, R_M)}{\sigma_M} = 0.9866$$

- By Linear regression. We solve in parallel a LR for all the assets

$$[R^i]_{n\times 1} - r_f = \beta_i([R^M]_{n\times 1} - r_f) + \varepsilon_i; \quad i = 1, ..5$$

We summarize all the results in the table:

(Beta):

	CBA.AX	NAB.AX	WBC.AX	ANZ.AX	WPL.AX
β_i	0.9866	1.0380	0.8711	0.7906	1.3410

- β for the portfolio. We are going to build a DF by first defining the number of units in the portfolio

(Units):

	CBA.AX	NAB.AX	WBC.AX	ANZ.AX	WPL.AX
θ^i	100	250	300	400	200

Thus the proportion invested in the portfolio are: $V^\theta = \sum_{i=1}^{5} \theta^i S^i$ where θ is a strategy of allocation:

$$(Weights): \quad \vec{x} = \Big[\frac{\theta^1 \times S^1}{V^\theta}, \ldots, \frac{\theta^5 \times S^5}{V^\theta}\Big]$$
$$(\text{Weighted beta}): \quad w_\beta^{(i)} = \beta^{(i)} \times x^{(i)}, i = 1, .., 5$$

As such we obtain the β of the portfolio by performing a sum of the weighted betas:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{5} w_\beta^{(i)} = 0.9475$$

	Stock	Direction	Type	Stock Price	Price	Units	Value	Weights	Beta	Weighted beta
CBA.AX	CBA	Long	S	101.91	101.91	100	10191.0	0.25	0.99	0.2475
NAB.AX	NAB	Long	S	26.63	26.63	250	6657.5	0.16	1.04	0.1664
WBC.AX	WBC	Long	S	26.64	26.64	300	7992.0	0.19	0.87	0.1653
ANZ.AX	ANZ	Long	S	28.67	28.67	400	11468.0	0.79	0.79	0.2212
WPL.AX	WPL	Long	S	23.42	23.42	200	4684.0	1.34	1.34	0.1474

1.3.1.4 Les risques

Definition (Risk). The chance a firm's stock return will deviate from what you expect.

Risque spécifique et risque systématique. Le MEDAF implique que pour tout actif risqué $S^i, i = 1, \dots, d$, la rentabilité R^i peut s'écrire

$$\boxed{R^i - R^0 = \beta^i \left(R^M - R^0\right) + \varepsilon^i; \quad i = 1, .., d}$$

où $\mathbb{E}\left[\varepsilon^i\right] = 0$ et $\operatorname{cov}\left(R^\pi, \varepsilon^i\right) = 0$.

- Décomposition du risque. La variance de la rentabilité de l'actif risqué (aka sa volatilité) s'écrit alors

$$\left(\sigma^i\right)^2 = \underbrace{\operatorname{var}\left(R^i\right)}_{\text{Total risk}} = \underbrace{\left(\beta^i\right)^2 \operatorname{var}\left(R^M\right)}_{\text{systematic risk}} + \underbrace{\operatorname{var}\left(\varepsilon^i\right)}_{\text{unsystematic risk}}$$

Ainsi le risque de l'actif S^i se décompose en deux parties

- Risque systématique (Systematic risk)[Market risk]: Ce sont des facteurs qu'on ne peut pas contrôler comme: l'inflation etc. C'est ce risque que le marché rémunère.
- Risque spécifique (Unsystematic risk)[Firm specific]: C'est le risque qui peut être réduis par une diversification du portefeuille. Car typiquement si on a quelques entreprises qui ont des bad news (eg. CEO retires or a scandal) on peut en avoir d'autres avec des bonnes. On obtient un équilibre en diversifiant.

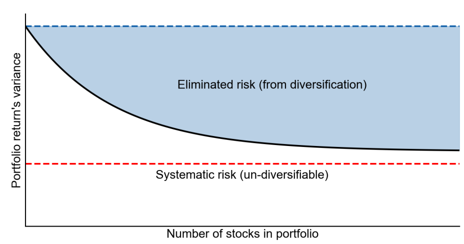


Figure 16: The CAPM only assumes one source of systematic risk: Market Risk

Interprétation du β^i (Systematic risk). On va classifier les actifs dans cinq catégories. Si la droite est croissante, c'est que avec le β qui augmente le risque augmente, ainsi les investisseurs veulent être plus rémunérés car ils augmentent le risque. On peut noter aussi que théoriquement tous les actifs sont censé être sur la SML

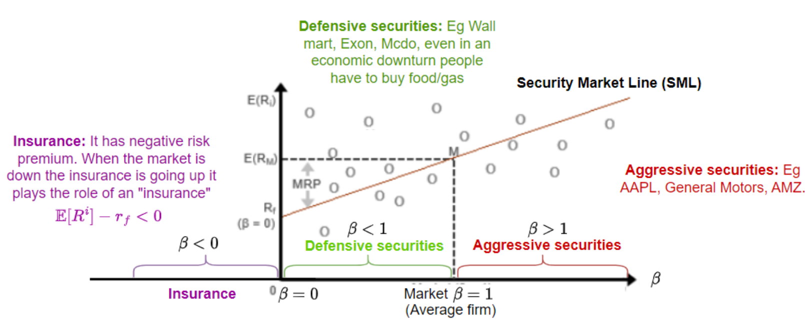


Figure 17: The more we go right the more we increase systematic risk. Investors wants more risk premium (prime de risque) for taking the risk

- Example. Le beta va avoir un rôle de sensbilité wrt à l'actif de marché. if $\beta^i = 2.5$ then given a 1% change in the return of the market portfolio we expect a 2.5% change of return for our stock.

- It means it has more systematic risk than the average firm (aka $\beta^i = 1$)
- So when R_m performs well R^i performs very well
- But when R_m performs bad R^i performs even worst

Relation volatilité et systematic risk. Il faut bien se rappeler que

$$\text{Volatility asset } i = \text{systematic risk} + \text{unsystematic risk}$$

En simplifiant on va poser que le β est le systematic risk.

- Si on voit que $\beta_{AAPL} > volatility_{AAPL}$ it means that AMZ has more market risk, if the market goes up it goes even further
- And MC for the same volatility it is less risky. It means it has higher firm-specific risk

	Beta	Volatility
Mc Donalds	0.70	1.05
Amazon	1.46	1.02

Exercice 2. Soit $d \geq 2$ on a deux actifs S^1, S^2 et un portefeuille de marché avec x^M, R^M de plus un actif sans risque de $R_0 = 2\% = \frac{2}{100}$

Actifs	ER	beta	Risque systémique	Risque spécifique
R^M	10%	1	20%	0
R^1	8.4%	0.8	12.8%	10%
R^2	-5%	-$\frac{7}{8}$	15.26%	30%

Pour rappel la formule du beta est:

$$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x); \quad \beta(x) = \frac{cov(R^M, R(x))}{var(R^M)}$$

Ligne 1: $R(x) = R_0 + 1(R^M - R^0) + 0$.

Ligne 2: $E(R(x)) = R_0 + \beta(x)(E(R^M) - R_0)$ Ainsi pour l'actif 1:

$$E(R^1) = \frac{2}{100} + 0.8(10\% - \frac{2}{100}) = \frac{2}{100} + 0.8 \times \frac{8}{100} = 8.4\%$$

De plus $Var(R(x)) = \beta^2(x)Var(R_M) + var(\varepsilon(x)) = \frac{64}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{12.8}{100}$.

Ligne 3: $E(R^2) = R_0 + \beta(x)(E(R^M) - R^0) + 0$ donne

$$\beta(x) = \frac{E(R^2) - R^0}{E(R^M) - R^0} = \frac{-5/100 - 2/100}{10/100 - 2/100} = -\frac{7}{8}$$

En ce qui concerne le risque systémique:

$$\beta^2(x)Var(R^M) = (-\frac{7}{8})^2 \times \frac{20}{100} = 15.26\%$$

1.3.1.5 Jensen's Alpha

Le alpha. On peut tracer l'ensemble des couples $(\beta, \mathbb{E}[R^i]$ pour chaque stock plus le beta augmente plus le stock est risqué et plus le gain est important. Mais on peut avoir un point qui n'est pas sur la ligne en vert c'est eBay $(1.51, 15\%)$ mais en théorie si les marchés étaient efficient ça devrait être $(1.51, 13\%)$ en passant par la SML. Ici on dit qu'on a un $\alpha > 0$ car la rentabilité est plus importante que celle prédite par la SML donc $\alpha_{ebay} = 2\%$

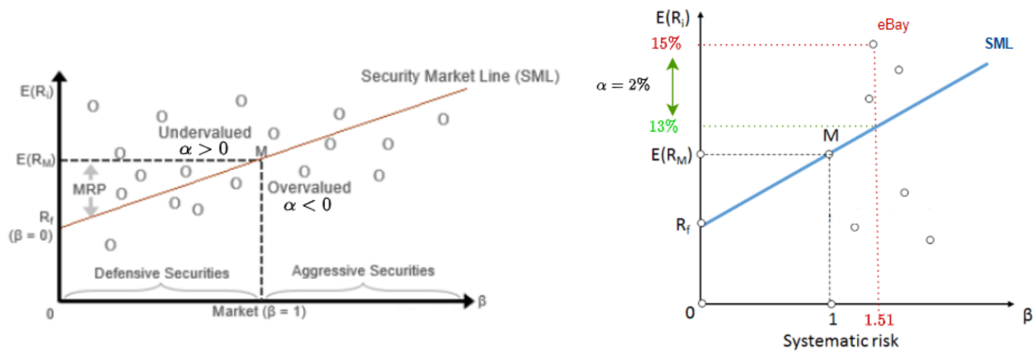


Figure 18: The CAPM only assumes one source of systematic risk: Market Risk

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f)$$

De façon équivalente, si on pose que $r_f = 3\%, r_m = 11\%$ $\beta = 1.5$ et $r_i = 17\%$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= r_i - r_f - \beta_i(r_m - r_f) \\ &= 17\% - 3\% - 1.5(11\% - 3\%) \\ &= 14\% - 12\% = 2\% \end{aligned}$$

On peut ensuite visualiser le α en tant que intercept du problème de régressin linéaire excess return market (x-axis) vs excess return security (y-axis)

1.3.1.6 Les ratios

Treynor ratio. It is a percentage that measures the reward-to-risk (where risk is defined as systematic risk) of a portfolio.

$$T_p = \frac{\text{excess return of the portfolio}}{\text{beta of the portfolio}} = \frac{r_p - r_f}{\beta_p}$$

It makes sense to use it only if we look at a well diversified portfolio. Where all the non-systematic risk was diversified away.

- Example. $\mathbb{E}[R^p] = 14\%, r_f = 2\%, \beta_p = 3.0$ we obtain a ratio of $T_p^{(1)} = 4\%$ for the first portfolio. And let's say for the second one $T_p^{(2)} = 3\%$; if we compare those two it means that $T_p^{(1)}$ gives more reward per unit of systematic risk.

sharpe ratio. In contrast the sharpe ratio look at the excess return of the portfolio divided by volatility (total risk). The Sharpe ratio can be used to compare portfolios

$$R_p = \frac{\text{excess return of the portfolio}}{\text{volatility of the portfolio}} = \frac{r_p - r_f}{\mathbb{V}[R^p]}$$

1.3.1.7 Use case

1

1.3.2 Extension du modèle

Le MEDAF sans actif sans risque (modèle de Black 1972).

Contents

1.4 Les modèles factoriels (1976-)

Initié par Ross en 1976 dans le cadre de l'APT. L'idée est de supposer que les rendements des actifs financiers s'expliquent par des facteurs.

Note. Le systematic risk peut inclure beaucoup plus de choses que les variations du GDP, inflation rate, interest rates .. Tous ces macro-economic factors. Donc différente type of securities reacts in different way. Eg a bank will react more strongly to changes in intersete rate than a grocery store. Eg le 0.2 dit que si on a une augmente de 1% point increase in inflation then that would like to a 0.2% increase in the expected return. Conversely if we have a 1% increase in intereset rate it means we will have a decrease of 0.4% in the expected return

$$r_i = 0.11 + 0.2(inflation) - 0.4(\text{interest rates})$$

Les Modèles Factoriel linéaire. On suppose que le marché est constitué d'actifs financiers $(S^1, S^2, .., S^d)$. Le modèle suppose l'existence de facteurs $F_1, F_2, .., F_k$ tel que

$$R^i = a_i + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} F_j + \varepsilon_i$$

Où les $b_{i,j}$ sont les sensbilités au facteur F_j. De plus:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[F_k] = 0; \quad \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0; \quad (1) \\ cov(\varepsilon_i, F_k) = 0; \quad cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0; \forall i = 1, .., n; k = 1, .., K \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse (1) on obtient que $\mathbb{E}[R^i] = a_i$ ainsi:

$$R^i = \mathbb{E}[R^i] + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} F_j + \varepsilon_i; \quad i = 1, .., n$$

- Généralisation matricielle. On peut également l'écrire sous forme matricielle

$$R = \mathbb{E}[R] + bF + \varepsilon$$

Avec R le vecteur des rentabilités, b est la matrice $b = (b_{i,k})_{1 \le i \le n; 1 \le k \le K}$, F est le vecteur des facteurs et ε le vecteur des risques idiosyncratiques.

- CAPM vs modèle factoriel linéaire. Si on pose que $\forall i$, $b_i = (b_{i1}, .., b_{ik})$ et $F = (F_1, .., F_k)$. On peut réécrire:

$$\begin{aligned} R^i = \mathbb{E}[R^i] + b_i F' + \varepsilon_i \iff \mathbb{V}[R_i] &= Var(b_i F') + var(\varepsilon_i) \\ &= \underbrace{bi \Sigma_F b_i'}_{=\text{risk systematique}} + \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{=\text{risk specifique}} \quad ; \quad \Sigma_F = (cov(F_i, F_j))_{j=1,..,d} \end{aligned}$$

Donc les modèles factoriels linéaires sont une généralisation du CAPM/MEDAF avec un nombre plus importants de facteurs qui représentent le risque systématique.

Nature des facteurs. On peut classer les modèèles factoriels selon trois types:
(a) Les modèles factoriels macroéconomiques. On se fixe des facteurs observables de l'économie comme des indices boursiers sectoriels, taux de change, d'inflation, taux d'intérêts ... Dans ce type de modèles, les facteurs sont observables, mais les sensibilités b_{ik} doivent être estimées.

(b) Les modèles factoriels fondamentaux. Les facteurs proviennent du secteur d'activité d'où les actifs sont issues: taille de la société, taux de dividende, indicateur du secteur d'activité. Eg

- Dans le modèle de type Barra les sensibilités b_{ik} correspondent à des attributs de l'actif et les facteurs sont estimés.

- Dans le modèle de Fama-French, les attributs des actifs sont utilisés pour définir les facteurs, les sensibilités b_{ik} sont alors estimées.

(c) Les modèles factoriels statistiques. On utilise des méthodes statistiques tells que l'ACP pour estimer les facteurs et les sensibilités. Ainsi, les facteurs sont traités comme des variables non-observables ou variables latentes. Ce type d'approche peut aboutir à des facteurs qui peuvent être interprétés commme des indices boursiers, maias parfois l'interprétation économique ou financière des facteurs résultant n'est pas évidente.

1.4.1 Arbitrage Pricing theory (1976)

L'apparition du modèle APT ou Modèle d'évaluation par Arbitrage (MEA), développé par Ross (1976), est l'une des premières réponses aux critiques du MEDAF. Ce modèle multifactoriel admet la présence de plus d'un facteur comme variables explicatives du rendement.

- Hypothèses. De plus il néglige toutes les hypothèses du MEDAF en considérant uniquement l'absence d'opportunité d'arbitrage. Si une opportunité d'arbitrage se produit, alors il sera vite exploité par des agents.

- Modèle. Pour un actif:

$$\mathbb{E}[R^i] = r_f + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + .. + \beta_n f_n$$

Avec β_n la sensbilité au facteur n et f_n le n^{th} factor price. Unlike the CAPM, the APT does not specify the factors.

- Expériences. Selon la recherche de Stephen Ross et Richard Roll les facteurs les plus importants sont: La variation de l'inflation, les changements en production industrielle, variation des risk premiums et les modification de la shape of the term structure of interest rates.

1.4.2 Modèles factoriels fondamentaux

Notes. they realized that if we look historically, two types of portfolios have an $\alpha > 0$ that is the return is better than the CAPM. so they wanted to improve their models by saying that small caps stocks tends to outperform large cap stsocks so there is a size effect. Also companies with a large BTM value stock ¿ growth stocks. So we have two effects that they understood historically. Now we have three factors to study systematic risk.

2:40 - SMB they say what if we puchrase stocks with small caps and we are short with large cap stocks.

HML: long and short

Momentum: He invented the momentum cause we can observe that companies with low returns often remains at a low return and those with high stays with high; so we are long on the highest 30% return and short on the 30% lowest.

Fama-French three factor model (1992) Au cours des années 80 des travaux empiriques sont venus infirmer le modèle de Black. L'un des plus notoires est celui de Fama et French (1992). La conclusion de leur travail est que le bêta ne suffit pas à expliquer les rentabilités des actifs, d'autres éléments interviennent: les effetse de taille (capitalisation des titres), le ratio book to market, le ratio dette/actif ...

$$R_i - R_0 = \alpha + \beta_1(R_M - R_0) + \beta_2 SMB + \beta_3 HML$$

Les trois facteurs sont small minus big (SMB), high minus low (HML) et le β du marché. Le HML represénte le spread in returns between companies with high Book to market and those with low book-to-market ratio.

Database.
- Step 1. We use the CRSP (Center of Research in Security prices) database to get monthly data of securities with their closing price (altprc), shares outstanding (shrout), exchange code aka NYSE/NASDAQ or AMEX (exchd), their industry code which relies on the Standard Industrial Classification codes (siccd), share code aka common stock or preferred stock (shrcd) and finally we have to deal with unlisted stocks, their delisting code (dlstcd) and delisting returns (dlret). We will adjust the returns of those unlisted with ret_adj.

- Step 2. We use the Compustat DB (CCM). It contains thousands of annuals & quarterly income statement, balance sheet ... for active and inactive companies. This will be used to calculate the *book to market* ratio

Les facteurs:
(a) Market Risk.
(b) SMB. We sort all of our company by *Market Cap.* We split in two groups using quantiles (0.5) to obtain two groups {small S et Big B}. Overall the SMB is just the difference of average returns of the big cap companies vs small cap:

$$\begin{aligned} SMB = & \frac{1}{3}(\text{Small value} + \text{Small neutral} + \text{Small Growth}) \\ & - \frac{1}{3}(\text{Big Value} + \text{Big Neutral} + \text{Big Growth}) \end{aligned}$$

(c) HML.
- Book to market ratio (Valeur comptable par action). La Book Value (=Valeur Comptable = Capitaux propres). On a le ratio book to market

$$\text{B/M} = \frac{\text{Common Shareholder Equity}}{\text{Market cap}}$$

On pose que

$$\begin{aligned} & \text{Shareholder Equity} = \text{Total Assets} - \text{Total Liabilities} \\ \iff & \text{Capitaux propres} = \text{Total Actifs} - \text{Total des dettes} \end{aligned}$$

Et pour rappel:

$$\text{Market Cap} = \text{Nb d'actions} \times \text{Closing price}$$

- Lorsque *Book* > Market cap (Value stock): l'entreprise a une valeur comptable plus importante que sa valeur marchande. Le cours de l'action perform à un niveau inférieur, l'entreprise est donc sous-évaluée. En achetant ce genre d'action de potentiels gains sont à prévoir si le cours de l'action revient à son cours normal
- Lorsque *Book* < Market cap (Growth Stock): L'entreprise a une valeur marchande plus importante que celle de ses comptes. Aujourd'hui l'immense majorité des entreprises sont dans ce cas
- Si *Book* = Market cap (Neutral stock)

- HML. En utilisant notre *book to market* ratio on va diviser notre DB en trois groupes $growth \in [0, 30]$; $neutral \in [30, 70]$ et $high \in [70, 100]$. Puis on aura plus qu'à faire la moyenne des rentabilités de ces deux groupes.

$$HML = \frac{1}{2}(\text{Small Value} + \text{Big Value}) + \frac{1}{2}(\text{Small Growth} + \text{Big Growth})$$

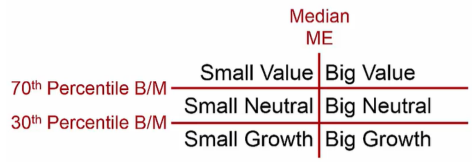


Figure 19: The CAPM only assumes one source of systematic risk: Market Risk

The Carhart four-factor model (1997) The UML factor was firstly studied by Jagadeesh and Titman (1993) and next by Carhart (1997)

$$R_i - R_0 = \alpha + \beta_1(R_M - R_0) + \beta_2 SMB + \beta_3 HML + \beta_4 UMD$$

Où UMD = Up Minus Down measures the difference in expected returns between "winning" securities and "losing" securities (in terms of momentum). Pour le construire on suit la méthodologie de NEFIN au lieu de UMD ils l'appellent WML: Every month t, we (ascending) sort the eligible stocks into 3 quantiles (portfolios) according to their cumulative returns between month $t-12$ and $t-2$. Then we compute the equal-weighted returns of the first portfolio ("Losers") and the third portfolio ("Winners"). The WML Factor is the return of the "Winners" portfolio minus the return of the "Losers" portfolio. ou mean(returns, tercile=3) - mean(returns, tercile=1)

Momentum measures the speed or velocity of price changes in an asset. A stock would be considered to show momentum if its prior 12-month average of returns is positive, or greater. doc

Fama-French five factor model (2015)

$$R_i - R_0 = \alpha + \beta_1(R_M - R_0) + \beta_2 SMB + \beta_3 HML \beta_4 RMW + \beta_5 CMA$$

(a) RMW. the profitability factor aka robust minus weak

$$RMW = \frac{1}{2}(\text{Small robust} + \text{Big Robust}) - \frac{1}{2}(\text{Small weak} + \text{Big weak})$$

- Gross profit. Gross profit will appear on a company's income statement. A company with high gross profit has the opportunity to make wise decisions on how they allocate capital (re-invest, reduce debt, shareholders). A company with low gross profit has a lower probability of being successful

$$\text{Profitability} = \text{revenues - cost of good sales (COS)}$$

Le COS (=Coût/prix de revient) est la sommes des coûts supportés par la production et la distribution d'un bien ou d'un service. C'est une somme de deux coûts:

- En charges directes (eg achats des matières premières, le temps passé pour chaque client aka taux horaire)
- En charges indirectes qui regroupent tous les autres frais: locations, assurances ...

- Profitability (Gross profit to assets).

$$\text{Profitability} = \frac{\text{firm gross profit}}{\text{assets}} = \frac{\text{revenues - cost of good sales (COS)}}{\text{assets}}$$

This ratio measures how productively assets are being used in the company A double digits figure is taken to be indicative of a productive, efficient company that may have a competitive advantage.

(b) CMA. the investment factor

- Investment. The investment ratio is used to rank aggressiveness vs conservativeness of firms:

$$INV = \frac{\text{total assets}_t}{\text{total assets}_{t-1}}$$

This ratio is calculated at the end of each fiscal years.

$$CMA = \frac{1}{2}(\text{Small conservative} + \text{Big conservative}) - \frac{1}{2}(\text{Small aggressive} + \text{Big aggressive})$$

1
2
3
4
5

1.5 Informations complémentaires

According to Cochrane (p. 435, 2005) the difference btw two types of papers are:

- Time series: How average returns change over time
- Cross section: How average returns change across different stock or portfolios

If we study cross section of stock returns, we want to answer the question of why stock A earns higher/lower returns than stock B. Hence the name cross-section: at one point in time, we check the cross section of many stocks. For that you don't need a full time-series but rather one point in time. Eg. the CAPM, Fama-French .. are cross-section models.

biblio other models here

Contents

1.6 Les modèles de risques

Definition (Risk Assessment). Risk assessment is a general term used across many industries to determine the likelihood of loss on an asset, loan, or investment.

Techniques (Risk Assessment). Two types of risk analysis:

- **Quantitative Analysis.** It focus on build risk models and simulations (Monte-Carlo)
- **Qualitative Analysis.** It doesn't rely on numerical or mathematical analysis. Instead it uses a person's subjective judgment and experience (E.g. Assessment of company's management, relation to its vendors, public's perception of the company...)

1.6.0.1 Value at Risk (VaR)

It is a measure to quantify what are the worst outcome could be in a certain confidence interval. Like what is the worst case scenario in a given number of days that my portfolio will drop in value. Eg (others); CFaR Cash flow at risk, EaR Earning at risk, GMaR Gross Margin at Risk

$$GMaR_i = GM\ Expectation - GM_i th\ percentile$$

etc.

Definition (value at risk) is defined as the maximum loss in a given holding period to a certain confidence level.

If X is a r.v. for the PnL, $Y := -X$ (loss distribution), $F_X(x) CDF$ of PnL distributions, $F_Y^{-1}(y)$ inverse CDF of loss distribution. Doing this change of variable means that all the losses are positive and all the gains negatives.

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in R \mid F_X(x) > \alpha\} = F_Y^{-1}(1-\alpha)$$

So we are interested in all the periods where the loss exceeds a value to that percentile we are interested in. We want to say that with 90% certainty our VaR won't exceed a certain value.

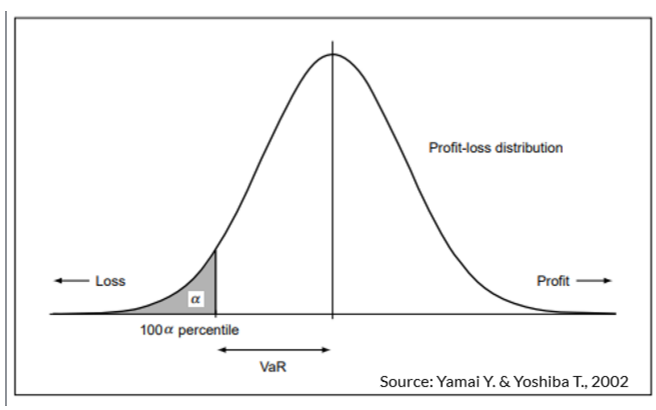


Figure 20: PnL distribution

Strategies:

1. Historical method: we make no assumption about asset distributions.
2. Parametric method (variance-covariance) you have to make an assumption on the distribution of each assets eg gaussian distribution for all the assets returns. It is actually a downside of the models which is too restrictive. We can define a joint probability distributions of all the correlated assets through the variance-covariance matrix.

3. Monte carlo simulation: you simulate scenarios a number of times it means you can find any type of distribution. The downside is that it is computationally expensive.

Downside to VaR. (i) a big one - non-normality of actual market data; and we loose the propriety of subadditivity (a fct if you have two stocks or 2 VaR then the value is going to $\leq$ the summation of both assets individually. For example with gaussian assumption

$$\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \leq \sigma_A + \sigma_B$$

But not possible anymore if there is no subadditivity.

1.6.0.2 Historical VaR

(i) Building the return Matrix. Starting from a matrix of six stocks prices on the range of 2020 to 2023 we build the return matrix $r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100$:

	BHP.AX	CBA.AX	NAB.AX	STO.AX	TLS.AX	WBC.AX
2020-11-04	-0.0121	-0.0201	-0.0106	0.0080	-0.0109	-0.0088
2020-11-05	-0.0012	0.0184	0.0326	-0.0080	0.0183	0.0201
...						
2023-01-12	0.0179	0.0159	0.0246	0.0099	0.0100	0.0085

Table 2: Return matrix r_t for six stocks

(ii) The portfolio vector. Building on our returns we would like to build a linear combination of them to obtain the portfolio:

$$\begin{aligned} \text{portfolio}_t &= \omega_1 \times r_t^{(BHP.AX)} + \omega_2 \times r_t^{(CBA.AX)} + \omega_3 \times r_t^{(NAB.AX)} + \omega_4 \times r_t^{(STO.AX)} + \omega_5 \times r_t^{(TLS.AX)} + \omega_6 \times r_t^{(WBC.AX)} \\ &= \vec{\omega}^T \vec{r}_t \end{aligned}$$

For simplicity the weights are just normalized random variables so that they sum to one:

$$\vec{\omega}_+ = \left[\frac{\omega_1}{\sum_{i=1}^6 \omega_i}, .., \frac{\omega_6}{\sum_{i=1}^6 \omega_i} \right]; \quad \omega_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

It yields

$r_t^{(portfolio)} =$

	2020-11-04	2020-11-05	..	2023-01-12
portfolio	-0.0088	0.0148	..	0.0141

(iii) Historical Value at Risk. Providing an initial investment of $10,000$\$ we would like to know if a 95% CI how much we might loose on a time span of $T = 100$ days.
- VaR. Recollect the VaR formula:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in R \mid F_X(x) > \alpha\} = F_Y^{-1}(1-\alpha)$$

This is the 95% percentile of the empirical distribution of the returns. We obtain $VaR = -0.01697$. We normalize it by doing $-VaR \times \sqrt{T} = 0.01697$

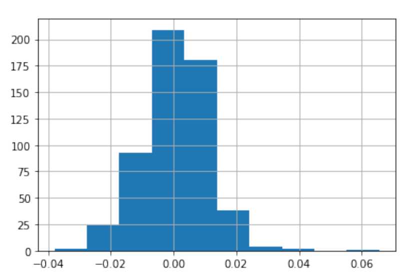


Figure 21: Empirical distribution of the $r_t^{(portfolio)}$

- CVaR. In code we perform two steps: (a) get all the returns that are below the threshold of the VaR. (b) Calculate the average of those returns which again $-CVaR \times \sqrt{T} = 0.21469$

$$\mathrm{CVaR}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}) = E\left[-X \mid -X > \boldsymbol{VaR_{\alpha}}(\boldsymbol{X})\right]$$

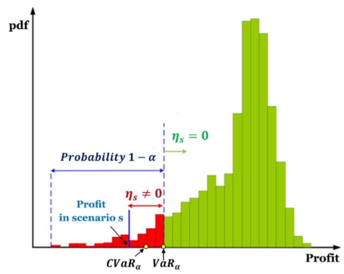


Figure 22: An illustration of the CVaR

(iv) Conclusion. Providing our initial investment of 10,000\$ we can now calculate :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_t^{(portfolio)}] &= 10,000 \times \bar{r}_t \\
VaR^{(portfolio)} &= 10,000 \times VaR = 1696.63 \\
CVaR^{(portfolio)} &= 10,000 \times CVaR = 2146.85
\end{aligned}$$

La VaR nous indique que l'investisseur a un niveau de confiance de 95% que son investissement ne perdra pas plus que 1620.89\$ en un jour. De façon équivalente, la probabilité de subir des pertes supérieur à 1620.89\$ au cours d'une journée n'est que de 1% avec un investissement de 10,000\$.

Le CVaR est la moyenne des observations dans la queue de distribution, i.e. en dessous de la VaR au niveau de confiance spécifié. On l'appelle également déficit attendu (Expected shortfall ES), AVaR (Average value at risk) ou ETL (Expected tail loss). On peut voir la CVaR comme une quantification des pertes attendues qui se produisent au dela du point de rupture de la VaR. Il mesure si la perte est supérieur à la VaR, combien devons-nous nous attendre à perdre ? le cvar donne la perte moyenne conditioneelle attendue si la perte est supérieur à la vAR

1.6.0.3 Parametric VaR

(iii) Parametric Value at Risk. Providing an initial investment of 10,000\$ we would like to know if a 95% CI how much we might loose on a time span of $T = 100$ days.
- VaR. Recollect the VaR formula:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = -\inf\left\{x \in R \mid F_X(x) > \alpha\right\} = F_Y^{-1}(1-\alpha)$$

But this time rather than plotting the empirical distribution we will consider that its distribution follows a gaussian distribution. As a consequence we need to evaluate its two moments:

$$\bar{r}_t = 0.0807; \quad \widehat{sigma}_t = 0.1052$$

Which yield a gaussian distribution of the returns

$$r_t \sim \mathcal{N}(\bar{r}_t, \widehat{sigma_t})$$

On which we can calculate its VaR.

- CVaR. We can prove that for a gaussian distribution

$$\begin{aligned}\text{CVaR}_{h,\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X}) &= E\left[-X \mid -X > \boldsymbol{VaR_{\alpha}}(\boldsymbol{X})\right] \\ &= \alpha^{-1}\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)\sigma_h - \mu_h\end{aligned}$$

Plugging in the moments of the returns into the formula we obtain the CVaR.

(iv) Conclusion. Providing our initial investment of $10,000$$ we can now calculate :

$$\begin{aligned}VaR^{(portfolio)}_{gaussian} &= 10,000 \times VaR = 922.98 \\ CVaR^{(portfolio)}_{gaussian} &= 10,000 \times CVaR = 1362.45\end{aligned}$$

1.6.0.4 Monte-Carlo VaR

(iii) Simulation onward of the portfolio. We will be assuming daily returns are distributed by a Multivariate Normal distribution:

$$r_t \sim MVN(\mu, \Sigma)$$

Cholesky decomposition is used to determine lower triangular matrix where we have J stocks over a period of T days, small t means transpose, M is the total number of simulations:

$$\begin{aligned}L \in LL' &= \Sigma \\ r_t &= \mu + LZ_t, \quad Z_t \sim N(0, I)\end{aligned}$$

As input we need the

$\mu =$

BHP.AX	CBA.AX	NAB.AX	STO.AX	TLS.AX	WBC.AX
0.000843	0.000828	0.000962	0.000875	0.000733	0.000599

Table 3: The μ vector for our six stocks

We perform the same operation to obtain the Σ covariance matrix $[\Sigma]_{6\times 6}$. We have an initial portfolio of $10,000$$

$[L]_{J\times J} = cholesky(\Sigma)$ $[w]_J \sim \mathcal{N}(0,1)$ $m = 0 : M$ $[Z_t]_{T\times J} \sim N(0,1)$ $[r_t]_{J\times T} = [\mu]_{J\times T} + [L]_{J\times J}([Z_t]_{T\times J})^t$
$[r^m_{port}]_{T\times m} = cum_prod([w \cdot r_t]_T) \times 10,000$$
Example of cumprod. Let say we have cum_prod([2,4,-1, 6]) = [2, 8, -8, -48].

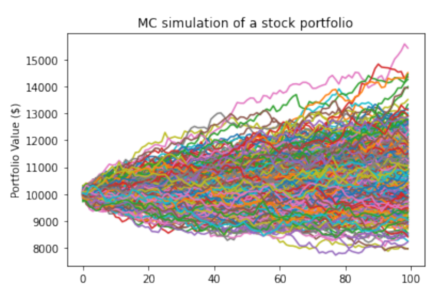


Figure 23: 400 simulations with an initial portfolio of 10,000$ across 100 days.

(iv) Monte-carlo VaR.
- VaR. To calculate the VaR we look only at the last time step $[r^m_{port}]_{1\times m}$. This let us build an empirical distribution and proceed as for the historical VaR

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in R \mid F_X(x) > \alpha\} = F_Y^{-1}(1-\alpha)$$

- CVaR. We get all the returns that are below the threshold of the VaR and we calculate their average.

(v) Conclusion. We obtain a VaR of

$$VaR = 10,000\$ - VaR([r_{port}^m]_{1\times m}) = \$1071.98$$
$$CVaR = 10,000\$ - CVaR([r_{port}^m]_{1\times m}) = \$1463.75$$

here

1.6.1 Risk scenario analysis

Definition (Scenario Analysis). Scenario analysis often starts from some assumptions and then simulates many future scenarios using MC techniques. The higher the number of simulated scenarios, the higher the precision

Example. Typical scenario analysis of a financial portfolio can be related to risk (e.g. what's the probability that our portfolio will lose 3% within 30 days).

Example.
- Input. For each stock {MSFT, AAPL, GOOG } we want to calculate the daily return of the closing price P from day t to $t+1$ which is defined as $r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100$.

- Simulation. If we want to simulate m days in the future we just have to:

- Take the original returns time series of a stock
- Select m values with replacement, taken randomly and uniformly. It's similar to Bootstrap

This method assumes that the future returns are a random resampling from the past returns.

Next we update the returns by

$$R = \sum_i R_i w_i$$

$$w_{MSFT} = 0.5; \quad w_{AAPL} = 0.2; \quad w_{GOOG} = 0.3$$

- What-if analysis. If we perform portfolio simulation as shown before, we are simply saying that the future returns are a random sample of the past returns. We already know this isn't completely true.

What-if analysis would rather asks: "For example, what happens if the average daily return of each stock is lower than its historical value?".

- Confidence interval for future returns. Scenario analysis can be used as a risk management tool. For this purpose, we may want to calculate the 5th and the 95th percentile of the future cumulative return.

- Probability of reaching a target return. Another kind of analysis we can perform is the probability that our portfolio will outperform a target return as a function of the day in the future.

ML and Scenario analysis. Ce que peut apporter le ML

- Pour l'aspect intervalle de confiance, on peut avoir une architecture/algorithme complex avec soit Bayesian credible interval or Prediction sets (conformal prediction if we remain in the frequentist paradigm)
-

here

1.6.2 Analysis Macro Market trend

Definition (Macro Trend). Macroeconomic trends are powerful asset return factors because they affect risk aversion and risk-neutral valuations of securities at the same time. The influence of macroeconomics appears to be strongest over longer horizons. It can be based on three complementary types of information

- **economic data.** Economic data establish a direct link between investment and economic reality
- **financial market data.** market data inform on the state of financial markets and economic trends that are not (yet) incorporated in economic data
- **expert judgment.** expert judgment is critical for formulating stable theories and choosing the right data sets.

Equity & Macro-Trend. research shows a close link between macroeconomic developments and the two key components of stock valuation: earnings and discount rate expectations. here

1.6.3 Operational risk

biblio:

- Management et banque dauphine
- with stochastic programming

References