Contents

0.1 Le MEDAF (1961-)

Le Modèle d'Evaluation des actifs financiers (MEDAF) ou CAPM (Capital Asset Pricing Model) il a d'abord été proposé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966).

0.1.1 Le modèle du MEDAF

0.1.1.1 Le cadre

On suppose un marché financier constitué d'actifs $S^1, S^2, \ldots, S^d$ sur une periode $[0,T]$.S^0 est un actif sans risque de rendement R^0 et $R = \left(R^1 \ldots, R^d\right)$ de rendement sur $[0;T]$ de $\left(S^1, .., S^d\right)$.

On va poser que les quantités $\left(q^i\right)_{i=1,..,d}$ d'actifs risquées du marché: Par définition, le portefeuille de marché, est définie par une quantité $\theta^M = \left(q^1, \ldots, q^d\right)$ ainsi on suppose connues les quantités disponibles de chacun des titres. Et les portefeuille de marché est composé de tous les actifs risqués dans les proportions du marché. On encore en terme de proportions:

$$x^M = \left(q^1 \frac{S_0^1}{W_0^M}, q^2 \frac{S_0^2}{W_0^M}, \cdots, q^d \frac{S_0^d}{W_0^M}\right)$$

ou' W_0^{M} est la richesse totale S_0 est le prix de l'actif n° i à la date 0. $x^M \mathbf{1'} = 1$, ie le portefeuille de marché est totalement investis dans les actifs risqués.

Hypotèse 1. Une des hypothèses du MEDAF est que les agents du marché sont rationnels i.e. qu'ils choisissent des portefeuilles efficients. Ainsi si on a N agents pour chaque $j = 1, 2, .., N$ l'agent n°j a un portefeuille

$$x\left(\sigma_j\right) = \frac{\sigma_j}{\sqrt{\mathrm{sh}}}\left(ER - R_0 \mathbf{1}\right)\Sigma^{-1}, j = 1, .., N$$

Hypothèse 2. On pose que $S = D$ ce qu'on appelle l'équilibre du marché. Ainsi à l'équilibre les prix (aka rentabilité) vérifient:

Demande en actifs par tous les agents = Offre totale d'actifs sur le marché

De façon équivalente:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega^j \times x_i\left(\sigma_j\right) = q^i S_0^i = w_0^M x_i^M; \quad \forall i = 1, .., d$$

Où w_0^j est la richesse de l'argent n°j. et $w_0^j x^i(\sigma_j)$ est la richesse de l'agent j investis dans l'actif i. Ainsi:

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{W_0^M} x(\sigma_j); \quad \sum_{j=1}^{N} w_0^j = w_0^M$$

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_0 j}{\omega_0^M} \frac{\sigma_j}{\sqrt{s^h}}\left(ER - R_0\mu\right)\Sigma - 1 \Rightarrow x^M = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_0^j}{\omega_j^+}\sigma_j\right)}{\sqrt{sh}}\left(ER - R_0\mu\right)\Sigma^{-1}$$

On en déduit que x^M est un portefeuille efficient dont le risque est

$$\sigma^M = \sum_{j=1}^{M} \frac{\omega_0^j}{\omega_0}\sigma_j$$

Il faut que toutes les hypothèses du modèles soient claire

Hypothèse. Le choix est fait au début et en fin de période la rentabilité est mesurée ainsi que le risque.

0.1.1.2 Dérivation du CAPM

Preuve.
(a) Covariance actif et marché.

$$\begin{aligned} cov(R, R^M) &= cov(R^M, R); \quad \text{par symétrie} \\ &= E(R^M - ER^M)(R - ER) \\ &= E(x^M R' - x^M ER')(R - ER); \quad R^M = x'_M R \\ &= x^M E(R - ER)'(R - ER) \\ &= x^M \Sigma \end{aligned}$$

Nous allons donc devoir dériver la valeur de x^M.

(b) Dérivation de x^M. Comme le portefeuille du marché est uniquement investit dans les actifs risqués, il coincide avec le portefeuille tangent. On va donc pouvoir exploiter $x^M, m(\sigma^M)$ et σ^M qu'on a dérivé dans le précédent chapitre. Entre autre:

$$\xi = x^M = \frac{1}{b - aR_0} (ER - R_0 \mathbf{1}) \Sigma^{-1}$$

On va chercher à réécrire le terme en bleu en utilisant notre connaissance de σ^ξ

$$\begin{aligned} \sigma^\xi = \frac{\sqrt{SH}}{b - aR^0} &\iff \frac{1}{b - aR^0} = \frac{\sigma^\xi}{\sqrt{SH}} \\ &\iff \frac{1}{b - aR^0} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M \sqrt{SH}} = \frac{\mathbb{V}[R^M]}{\sigma_M \sqrt{SH}} \end{aligned}$$

Il nous reste à réécrire le dénominateur de σ^ξ, on utilise

$$m(\sigma_M) = \mathbb{E}[R^M] = R^0 + \sqrt{SH}\sigma_M \iff \mathbb{E}[R_M] - R^0 = \sqrt{SH}\sigma_M$$

On obtient donc

$$\xi = x^M = \frac{1}{b - aR_0} (ER - R_0 \mathbf{1}) \Sigma^{-1} = \frac{\mathbb{V}[R^M]}{\mathbb{E}[M] - R^0} (ER - R_0 \mathbf{1})$$

(c) Fin de la preuve. En utilisant (b) on obtient:

$$cov(R, R^M) = x^M \Sigma = \frac{Var(R^M)}{E(R^M) - R^0} (E(R) - R^0 \mathbf{1})$$

Puis en réarrangeant les termes on arrive à la proposition suivante:

Proposition. A l'équilibre, les rentabilités $R^i, i = 1, .., d$ des actifs risqués sont telles que

$$\boxed{(SML): \quad \mathbb{E}\left[R^i\right] - R^0 = \beta^i \left(\underbrace{\mathbb{E}\left[R^M\right] - R^0}_{\text{risk premium}} \right) \quad \text{où} \quad \beta^i := \frac{\operatorname{cov}\left(R^i, R^M\right)}{\operatorname{var}\left(R^M\right)}}$$

Le coefficient β^i est appelé le beta de l'actif risqué i. Cette équation est appelé Security Market Line (SML). Elle lie le β aux rendements espérés des actifs.

En français on parle de "prime de risque" quand on parle de "risk premium"

0.1.1.3 Calcul du β

Calculer le β.
(i) En utilisant les données historiques. Soit $d \geq 2$ on a deux actifs S^1, S^2 et un portefeuille de marché avec x^M, R^M de plus un actif sans risque de $R_0 = 2\% = \frac{2}{100}$. De plus en utilisant l'historique on peut calculer directement les $E[R^i]$ par une moyenne empirique:

Actifs	ER	beta	Risque systémique	Risque spécifique
R^M	10%	1	20%	0
R^1	8.4%	0.8	12.8%	10%
R^2	-5%	-$\frac{7}{8}$	15.26%	30%

Pour rappel la formule du beta est:

$$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x); \quad \beta(x) = \frac{cov(R^M, R(x))}{var(R^M)}$$

Ligne 3: $E(R^2) = R_0 + \beta_2(E(R^M) - R^0) + 0$ donne

$$\beta_2 = \frac{E(R^2) - R^0}{E(R^M) - R^0} = \frac{-5/100 - 2/100}{10/100 - 2/100} = -\frac{7}{8}$$

(ii) En utilisant la formule de covariance.

$$\beta_i = \frac{Cov(R^i, R^M)}{Var(R^M)} = 1.851$$

On va pouvoir utiliser la table suivante:

	Monthly Return			
	Bubsy	Market Index	Excess Return (Bubsy)	Excess Return (market)
Jan	11%	8%	8%	5%
Feb	17%	10%	14%	7%
March	21%	13%	18%	10%
April	18%	11%	15%	8%
May	-8%	-3%	-11%	-6%
June	-12%	-5%	-15%	-8%

Table 1: LHS: Dataset of the stock Bubsy; RHS: Excess returns

(iii) Par régression linéaire. Beta is the slope of the line when you plot a security excess returns against the market excess returns. Let say we have $r_f = 3\%$ and the same dataset as above

$$\underbrace{R^i - r_f}_{\text{excess return stock i}} = \alpha_i + \beta_i \underbrace{(R_m - r_f)}_{\text{excess return market}} + \varepsilon_i \iff Y = \beta X + \varepsilon$$

How do changes in Exccess return of the market predict changes in the excess return of Bubsy. And the α_i is the intercept.

	Coefficients	p-value
alpha	-0.00102	0.7976
Beta	1.851	3.316e-06

TO DO. Add a linear regression plot of excess return market (x-axis) vs excess return stock i (y-axis)

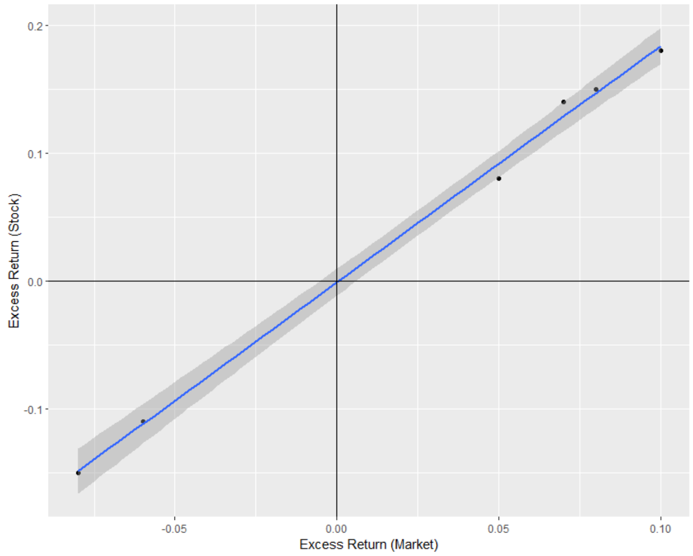
0.2
0.1
0.0
-0.1
Excess Return (Stock)
-0.05
0.00
0.05
0.10
Excess Return (Market)

Figure 1: ??

Calculer le β d'un portfolio. Let's say we have a portfolio of five assets we have calculated their log-returns r_t. Note that quantpy decided to choose CBA.AX as the Market Portfolio which is included in our portfolio. As a consequence it will bias our portfolio. We can calculate their $\beta's$ in two manners:
- Directly. Looking at historical data we can calculate the ratio of their moments

$$[R_p]_{n\times 1} = [R]_{n\times 5}[w]_{5\times 1} \Rightarrow \beta_p = \frac{cov(R_p, R_M)}{\sigma_M} = 0.9866$$

- By Linear regression. We solve in parallel a LR for all the assets

$$[R^i]_{n\times 1} - r_f = \beta_i([R^M]_{n\times 1} - r_f) + \varepsilon_i; \quad i = 1, ..5$$

We summarize all the results in the table:

(Beta):

	CBA.AX	NAB.AX	WBC.AX	ANZ.AX	WPL.AX
β_i	0.9866	1.0380	0.8711	0.7906	1.3410

- β for the portfolio. We are going to build a DF by first defining the number of units in the portfolio

(Units):

	CBA.AX	NAB.AX	WBC.AX	ANZ.AX	WPL.AX
θ^i	100	250	300	400	200

Thus the proportion invested in the portfolio are: $V^\theta = \sum_{i=1}^{5} \theta^i S^i$ where θ is a strategy of allocation:

$$(Weights): \quad \vec{x} = \left[\frac{\theta^1 \times S^1}{V^\theta}, \ldots, \frac{\theta^5 \times S^5}{V^\theta}\right]$$
$$(\text{Weighted beta}): \quad w_\beta^{(i)} = \beta^{(i)} \times x^{(i)}, i = 1, .., 5$$

As such we obtain the β of the portfolio by performing a sum of the weighted betas:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{5} w_\beta^{(i)} = 0.9475$$

	Stock	Direction	Type	Stock Price	Price	Units	Value	Weights	Beta	Weighted beta
CBA.AX	CBA	Long	S	101.91	101.91	100	10191.0	0.25	0.99	0.2475
NAB.AX	NAB	Long	S	26.63	26.63	250	6657.5	0.16	1.04	0.1664
WBC.AX	WBC	Long	S	26.64	26.64	300	7992.0	0.19	0.87	0.1653
ANZ.AX	ANZ	Long	S	28.67	28.67	400	11468.0	0.79	0.79	0.2212
WPL.AX	WPL	Long	S	23.42	23.42	200	4684.0	1.34	1.34	0.1474

0.1.1.4 Les risques

Definition (Risk). The chance a firm's stock return will deviate from what you expect.

Risque spécifique et risque systématique. Le MEDAF implique que pour tout actif risqué $S^i, i = 1, \ldots, d$, la rentabilité R^i peut s'écrire

$$\boxed{R^i - R^0 = \beta^i \left(R^M - R^0\right) + \varepsilon^i; \quad i = 1, .., d}$$

où $\mathbb{E}\left[\varepsilon^i\right] = 0$ et $\operatorname{cov}\left(R^\pi, \varepsilon^i\right) = 0$.

- Décomposition du risque. La variance de la rentabilité de l'actif risqué (aka sa volatilité) s'écrit alors

$$\left(\sigma^i\right)^2 = \underbrace{\operatorname{var}\left(R^i\right)}_{\text{Total risk}} = \underbrace{\left(\beta^i\right)^2 \operatorname{var}\left(R^M\right)}_{\text{systematic risk}} + \underbrace{\operatorname{var}\left(\varepsilon^i\right)}_{\text{unsystematic risk}}$$

Ainsi le risque de l'actif S^i se décompose en deux parties

- Risque systématique (Systematic risk)[Market risk]: Ce sont des facteurs qu'on ne peut pas contrôler comme: l'inflation etc. C'est ce risque que le marché rémunère.
- Risque spécifique (Unsystematic risk)[Firm specific]: C'est le risque qui peut être réduis par une diversification du portefeuille. Car typiquement si on a quelques entreprises qui ont des bad news (eg. CEO retires or a scandal) on peut en avoir d'autres avec des bonnes. On obtient un équilibre en diversifiant.

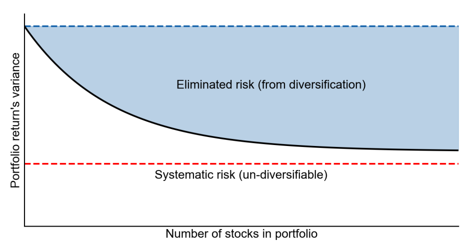

Figure 2: The CAPM only assumes one source of systematic risk: Market Risk

Interprétation du β^i (Systematic risk). On va classifier les actifs dans cinq catégories. Si la droite est croissante, c'est que avec le β qui augmente le risque augmente, ainsi les investisseurs veulent être plus rémunérés car ils augmentent le risque. On peut noter aussi que théoriquement tous les actifs sont censé être sur la SML

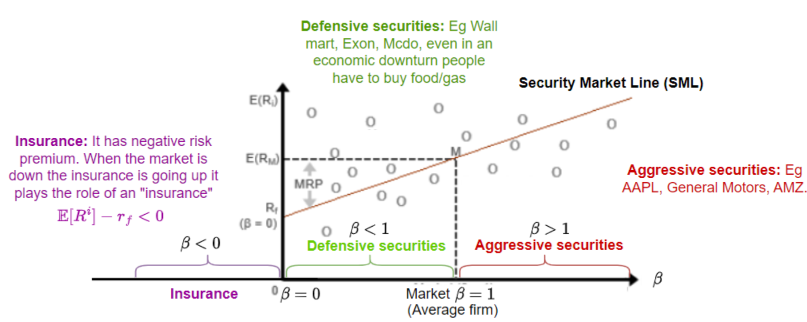

Figure 3: The more we go right the more we increase systematic risk. Investors wants more risk premium (prime de risque) for taking the risk

- Example. Le beta va avoir un rôle de sensbilité wrt à l'actif de marché. if $\beta^i = 2.5$ then given a 1% change in the return of the market portfolio we expect a 2.5% change of return for our stock.

- It means it has more systematic risk than the average firm (aka $\beta^i = 1$)
- So when R_m performs well R^i performs very well
- But when R_m performs bad R^i performs even worst

Relation volatilité et systematic risk. Il faut bien se rappeler que

$$\text{Volatility asset } i = \text{systematic risk} + \text{unsystematic risk}$$

En simplifiant on va poser que le β est le systematic risk.

- Si on voit que $\beta_{AAPL} > volatility_{AAPL}$ it means that AMZ has more market risk, if the market goes up it goes even further
- And MC for the same volatility it is less risky. It means it has higher firm-specific risk

	Beta	Volatility
Mc Donalds	0.70	1.05
Amazon	1.46	1.02

Exercice 2. Soit $d \geq 2$ on a deux actifs S^1, S^2 et un portefeuille de marché avec x^M, R^M de plus un actif sans risque de $R_0 = 2\% = \frac{2}{100}$

Actifs	ER	beta	Risque systémique	Risque spécifique
R^M	10%	1	20%	0
R^1	8.4%	0.8	12.8%	10%
R^2	-5%	-$\frac{7}{8}$	15.26%	30%

Pour rappel la formule du beta est:

$$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x); \quad \beta(x) = \frac{cov(R^M, R(x))}{var(R^M)}$$

Ligne 1: $R(x) = R_0 + 1(R^M - R^0) + 0$.

Ligne 2: $E(R(x)) = R_0 + \beta(x)(E(R^M) - R_0)$ Ainsi pour l'actif 1:

$$E(R^1) = \frac{2}{100} + 0.8(10\% - \frac{2}{100}) = \frac{2}{100} + 0.8 \times \frac{8}{100} = 8.4\%$$

De plus $Var(R(x)) = \beta^2(x)Var(R_M) + var(\varepsilon(x)) = \frac{64}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{12.8}{100}$.

Ligne 3: $E(R^2) = R_0 + \beta(x)(E(R^M) - R^0) + 0$ donne

$$\beta(x) = \frac{E(R^2) - R^0}{E(R^M) - R^0} = \frac{-5/100 - 2/100}{10/100 - 2/100} = -\frac{7}{8}$$

En ce qui concerne le risque systémique:

$$\beta^2(x)Var(R^M) = (-\frac{7}{8})^2 \times \frac{20}{100} = 15.26\%$$

0.1.1.5 Jensen's Alpha

Le alpha. On peut tracer l'ensemble des couples $(\beta, \mathbb{E}[R^i]$ pour chaque stock plus le beta augmente plus le stock est risqué et plus le gain est important. Mais on peut avoir un point qui n'est pas sur la ligne en vert c'est eBay $(1.51, 15\%)$ mais en théorie si les marchés étaient efficient ça devrait être $(1.51, 13\%)$ en passant par la SML. Ici on dit qu'on a un $\alpha > 0$ car la rentabilité est plus importante que celle prédite par la SML donc $\alpha_{ebay} = 2\%$

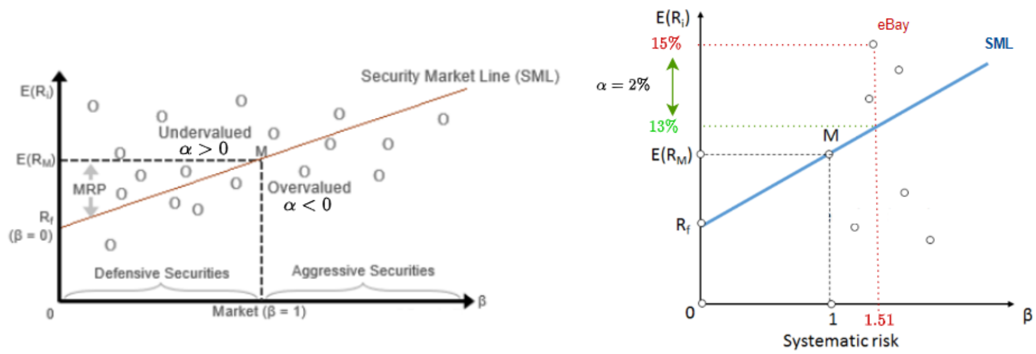

Figure 4: The CAPM only assumes one source of systematic risk: Market Risk

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f)$$

De façon équivalente, si on pose que $r_f = 3\%, r_m = 11\%$ $\beta = 1.5$ et $r_i = 17\%$

$$\begin{aligned}\alpha_i &= r_i - r_f - \beta_i(r_m - r_f)\\ &= 17\% - 3\% - 1.5(11\% - 3\%)\\ &= 14\% - 12\% = 2\%\end{aligned}$$

On peut ensuite visualiser le α en tant que intercept du problème de régressin linéaire excess return market (x-axis) vs excess return security (y-axis)

0.1.1.6 Les ratios

Treynor ratio. It is a percentage that measures the reward-to-risk (where risk is defined as systematic risk) of a portfolio.

$$T_p = \frac{\text{excess return of the portfolio}}{\text{beta of the portfolio}} = \frac{r_p - r_f}{\beta_p}$$

It makes sense to use it only if we look at a well diversified portfolio. Where all the non-systematic risk was diversified away.

- Example. $\mathbb{E}[R^p] = 14\%, r_f = 2\%, \beta_p = 3.0$ we obtain a ratio of $T_p^{(1)} = 4\%$ for the first portfolio. And let's say for the second one $T_p^{(2)} = 3\%$; if we compare those two it means that $T_p^{(1)}$ gives more reward per unit of systematic risk.

sharpe ratio. In contrast the sharpe ratio look at the excess return of the portfolio divided by volatility (total risk). The Sharpe ratio can be used to compare portfolios

$$R_p = \frac{\text{excess return of the portfolio}}{\text{volatility of the portfolio}} = \frac{r_p - r_f}{\mathbb{V}[R^p]}$$

0.1.1.7 Use case

1

0.1.2 Extension du modèle

Le MEDAF sans actif sans risque (modèle de Black 1972).