Gestion de portefeuille

Chapitre 1: Analyse des performances d'un portefeuille:

-> mesurer la qualité d'un investissement.
-> Comparer des gestionnaires.

1.1) Rentabilité d'un actif:

On appelle P_t le prix de l'actif à l'instant t et D_t la dividende versée entre $t-1$ et t.
La rentabilité de l'actif entre $t-1$ et t est donnée par:

$$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

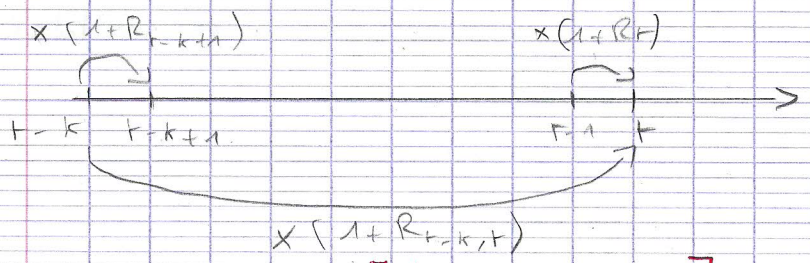
La rentabilité logarithmique

$$r_t = \ln(1+R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Rq: Généralement, on suppose que $D_t = 0$ (inclus dans le prix) et dans ce cas: $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ ou encore $P_t = P_{t-1}(1+R_t)$

ou $P_t = P_{t-1} e^{r_t}$

Rentabilité entre $t-k$ et t:



$$R_{t-k,t} = \left[\prod_{u=t-k+1}^{t} (1+R_u)\right] - 1$$

On en déduit la rentabilité logarithmique correspondante :

$$r_{t-k,t} = \ln(1 + R_{t-k,t})$$
$$= \sum_{u=t-k+1}^{t} r_u$$

$$\log \bar{x} = \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n}$$
$$= \frac{1}{n} \sum \log x_i \xrightarrow{\exp}$$
$$= \left(\prod a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

1.2) Rentabilité empirique :

moyenne arithmétique :

$$\bar{R}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_i \quad , T = \text{nb de périodes d'observation}$$

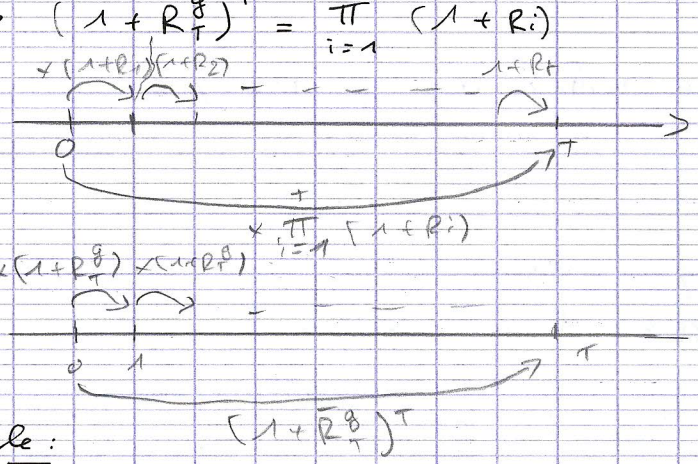
moyenne géométrique :

$$\bar{R}_T^g = \left(\prod_{i=1}^{T} (1 + R_i)\right)^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (1)$$

$$\bar{G} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Donne un résultat + réaliste que l'arithmétique ds le cas de variat° en %

$$(1) \iff (1 + R_T^g)^T = \prod_{i=1}^{T} (1 + R_i)$$



ex : Avec $\bar{R}\%$ la rentabilité moyenne

$$(1+\bar{R}_1)(1+\bar{R}_1)$$
$$= (1+0{,}01)(1+0{,}03)$$
$$\cancel{(1+\bar{R}_{100})^2} = \text{—}$$
$$1+\bar{R} = \sqrt[2]{1.01 \times 1.03}$$
$$\bar{R} = \sqrt{1.01 \times 1.03} - 1$$

Avec
↗ de 1% en 2010
↗ de 3% en 2011

Exemple :

Soit le prix de vente $P_0 = 50$ à $t=0$, $P_1 = 100$, à $t=1$, $P_2 = 50$

a) Calculer le rendement sur la période totale puis sur les sous périodes

$$R_{0,2} = 0\%$$
$$R_{0,1} = \frac{100 - 50}{50} = +100\%$$
$$R_{1,2} = \frac{50 - 100}{100} = -\frac{1}{2} = -50\%$$

b) Calculer les moyennes arithmétiques et géométriques sur $[0;2]$

$T = 2$

- $\overline{R_2} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{4} = 25\%$

- $\overline{R_2^g} = \left[(1+R_1)(1+R_2)\right]^{\frac{1}{2}} - 1$

$= \left[(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 1$

$= \left[2 \times \frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} - 1$

$= 0\%$

ou on sait que $(1+\overline{R_T^g})^T = 0$

<u>Remarque importante</u> :

La moyenne arithmétique prend son sens quand $T \to \infty$

Du point de vue statistique :

$\Omega = \{$ échantillon $\omega \}$

$(R_1, \dots, R_T) = (R_1(\omega), \dots, R_T(\omega))$

Les $(R_i)_{i=1}^{T}$ sont considérées comme des VA.

<u>La loi des grands nombres</u> :

Supposons que les $(R_i)_{i=1}^{\infty}$ sont iid

Dans ce cas :

elles ont ttes la m̂ loi

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i \xrightarrow[T \to +\infty]{ps} \mathbb{E}(R_1) = \dots = \mathbb{E}(R_n)$$

<u>Théorème centrale limite (TCL)</u> :

Supposons $(R_i)_{i=1}^{\infty}$ iid avec $\sigma^2 = \mathbb{V}(R_1) < \infty$

Dans ce cas :

$$\sqrt{T}\left(\frac{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i - \mathbb{E}(R_1)}{\sigma}\right) \xrightarrow[T \to +\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{V}(R_1) = \mathbb{E}(R_1 - E(R_1))^2$$
$$= \mathbb{E}(R_1^2) - \mathbb{E}(R_1)^2$$

Avec différents actifs, la rentabilité devient un vecteur $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^d)$ où d est le nombre d'actifs.

Et donc $\overline{R}_t = (\overline{R}_t^1, \dots, \overline{R}_t^d)$ où d est le nb d'actifs

⚠ On note les vecteurs en lignes.

Variance empirique :

Dans le cas unidimensionel ($d = 1$ actif)

$\mathbb{E}(X - E(X)) \iff \overline{Var}_T \overset{>0}{=} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} (R_i - \overline{R}_T)^2$, T = nb de période

Le $\mathbb{E} \uparrow \iff \frac{1}{T}$ dispersion // à la moyenne

Rq : $\overline{Var}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_i^2 - (\overline{R}_T)^2$

<u>Loi des grands nombres :</u>

$(R_i^2)_{i=1}^T$ i.i.d.

$$\overline{Var}_T \xrightarrow[T \to \infty]{} \mathbb{E}(R_1^2) - \mathbb{E}(R_1)^2 = Var\, R_1$$

Plus généralement avec d actifs, on introduit les covariances :

$$\overline{Cov}_T^{i,j} \overset{<0 \text{ ou } >0}{=} \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} (R_m^i - \overline{R}^i)(R_m^j - \overline{R}^j)$$

Rq : $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - E(X))(Y - E(Y))$

Matrice de variance - covariance empirique :

$$\overline{Cov}_T = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} (R_m - \overline{R}_T)'(R_m - \overline{R}_T)$$

Rq : avec $R_m = (R_m^1, \dots, R_m^d)$, $\overline{R}_T = (\overline{R}_T^1, \dots, \overline{R}_T^d)$

$$(R_m - \overline{R}_T)'(R_m - \overline{R}_T) = \begin{pmatrix} R_m^1 - \overline{R}_T^1 \\ \vdots \\ R_m^i - \overline{R}_T^i \\ \vdots \\ R_m^d - \overline{R}_T^d \end{pmatrix} \left(R_m^1 - \overline{R}_T^1, \dots, R_m^j - \overline{R}_T^j, \dots \right)$$

$$\overline{Cov}_T(i,j) = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{T} (R_m^i - \overline{R}_T^i)(R_m^j - \overline{R}_T^j)$$

Si TLC A comparer à $Cov(R_i, R_j) = (-(R^i - (-R^i))(R^j - (-R^j)))$

1. 3) Rentabilité d'un actif en présence de devise

Le taux de change permet de convertir la valeur d'un actif financier exprimé dans une devise donnée dans la monnaie de référence.

livraisons sous 48h ou 24h pour US/Canada

= → taux spot, taux immédiat de change (marché au comptant)

L'approche théorique usuelle est la suivante :

$$\frac{d_t}{d_{t-1}} = \frac{I_t^{ref} / I_{t-1}^{ref}}{I_t^{dev} / I_{t-1}^{dev}}$$

où $\boxed{d}$ est le prix de la devise dans la monnaie de référence

$\boxed{I}$ l'indice des prix respec. dans la nation de la monnaie de référence et de la devise

Soit l'or un actif de la nation de la devise.

$\begin{cases} P_t^{dev} \\ P_t^{ref} \end{cases}$ son prix dans la devise, son rendement R_t^{dev}, R_t^{ref}

$$P_t^{ref} = P_t^{dev} \, d_t$$

→ En déduire R_t^{ref} :

$$P_{t-1}^{ref} = P_{t-1}^{dev} \, d_{t-1}$$

$$\Rightarrow P_t^{ref} = P_{t-1}^{ref} \times (1 + R_t^{dev}) \times \underbrace{(1 + \text{rendement Devise}_t)}_{\frac{d_t}{d_{t-1}}}$$

$$\Rightarrow (1 + R_t^{ref}) = (1 + R_t^{dev}) \frac{d_t}{d_{t-1}}$$

$$R_t^{ref} = (1 + R_t^{dev}) \frac{d_t}{d_{t-1}} - 1$$

Exemple :

Supposons $R_t^{dev} = 5\%$

la devise ↗ de 10%

$$R_t^{ref} = \left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{10}{100}\right) - 1 \simeq \left(\frac{105}{100} \times \frac{110}{100}\right) - 1$$

$$\simeq 15.5\%$$

Rq : $r_t^{ref} = r_t^{dev} + \ln\left(\frac{d_t}{d_{t-1}}\right)$

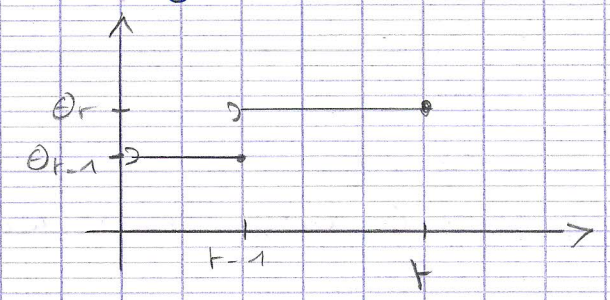
1.4) Rentabilité d'un portefeuille

Soit $S_t = (S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^d)$ le prix à l'instant t des actifs n°1, ..., d composant le portefeuille.

Un portefeuille peut être définie par la Stratégie $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d)$ où

θ_t^i est le nb d'actifs n° i investis.

Du point de vue dynamique et en temps discret, la Stratégie $t \mapsto \theta_t$ est constante par morceaux et continue à gauche



A l'instant $t-1$, strictement après avoir pris connaissance des nouveaux prix S_{t-1}, on rebalance le portefeuille selon la composition θ_t qu'on maintient constante jusqu'à t inclus.

L'hypothèse fondamentale de la théorie classique est l'absence de coûts de transaction.

Alors dans ce cas, la valeur liquidative du portefeuille est donnée par

$$V_t^\theta = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i S_t^i$$

<u>L'hypothèse d'auto-financement :</u>

<u>En $t-1$</u> : Pas d'ajout ni de retrait de richesse quand on change la composition :

$$V_{t-1} = \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot S_{t-1}$$

Rentabilité de portefeuille entre $t-1$ et t :

$$R_t^\theta = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{\theta_t . S_t - \theta_t S_{t-1}}{\theta_t . S_{t-1}}$$

$$= \frac{\theta_t . \Delta S_t}{\theta_t . S_{t-1}}$$

où $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$

Rq :

L'hypothèse d'autofinancement entraine

$$\Delta V_t = V_t - V_{t-1} = \theta_t . \Delta S_t$$

où $\begin{cases} \theta_t . \mathcal{F}_{t-1} \text{ mesurable} \\ \mathcal{F}_{t-1} \text{ information du marché jusqu'à } t-1 . \end{cases}$

Les proportions investies dans le portefeuille sont (en $t-1$) :

$$x_t = \left(\frac{\theta_t^1 S_{t-1}^1}{V_{t-1}}, \frac{\theta_t^2 S_{t-1}^2}{V_{t-1}}, \dots \right)$$

$$x_t = \frac{\theta_t \times S_{t-1}}{V_{t-1}}$$

$a \times b = (a^1 b^1, a^2 b^2, \dots, a^d b^d)$

$\frac{a}{b} = \left(\frac{a^1}{b^1}, \dots, \frac{a^d}{b^d} \right)$

Ainsi on déduit :

$$R_t^\theta = \frac{\theta_t \times S_{t-1} . \left(\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} \right)}{V_{t-1}}$$

scalaire

Rq : $\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} = \left(\frac{S_t^1 - S_{t-1}^1}{S_{t-1}^1}, \dots, \frac{S_t^d - S_{t-1}^d}{S_{t-1}^d} \right)$

$= (R_t^1, \dots, R_t^d)$ $\quad R_t^i = \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}$

rend actif :

$$R_T^{\theta} = x_T \cdot R_T$$

$$\Updownarrow$$

$$R_T(x) = x_T \cdot R_T$$

$$R_T(x) = \sum_{i=1}^{d} x_T^i R_T^i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} x_T^i = 1$$

Ainsi $R_T(x)$ est la moyenne pondéré des actifs.

<u>notation</u> : $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$

de sorte que $x_T \cdot \mathbb{1} = 1$

Rq : Un indice boursier est un indice, moyenne pondérée des indices des actifs le composant.

1.5) Autres indicateurs de performance

Sur une période $[0;T]$

<u>Rentabilité pondérée par les capitaux</u> :

On suppose que s'ajoute du portefeuille des flux $(C_{t_i})_{i \leq n}$, $t_i \in [0;T]$ (non autofinancé)

capital weighted return

$$R_{CWR} = \frac{V_T - V_0 - \sum_{i=0}^{n} C_{t_i}}{V_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{T - t_i}{T} C_{t_i}}$$

on donne + de poid aux produit choisit en début de processus.

Mieux est considérer un taux interne de rentabilité R_I :

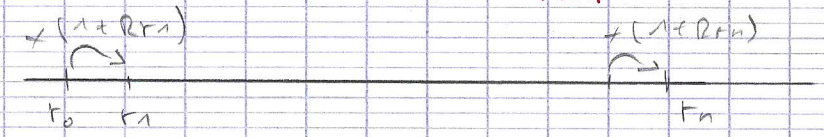
$$V_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{C_{t_i}}{(1+R_I)^{t_i}} = \frac{V_T}{(1+R_I)^T}$$

le taux R_I est le taux comme si à chaque période il donnait le même rendement $\underbrace{R_I}_{?}$ ($\Leftrightarrow$ taux géométrique)

Rentabilité d'un portefeuille pondérée par le temps :

La période totale est divisé en sous période $[t_{i-1}, t_i]$ de sorte qu'il y ait un flux par période C_{t-1} pour chaque période $[t_{i-1}, t_i]$

$$R_{t_i} = \frac{V_{t_i} - V_{t_{i-1}} - C_{t_{i-1}}}{V_{t_{i-1}} + C_{t_{i-1}}}$$



$$R_{TWR} = \left(\prod (1+R_{t_i})\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Comparaison d'un portefeuille à un Benchmark :

Déf: Un Benchmark est un portefeuille de référence

gestion active : on veut faire aussi bien que le Benchmark en terme de rendement

Tracking error :

$$\varepsilon_t = R_t^{\theta} - R_t^{B}$$

où ε_t erreur
R_t^{θ} rendement du portefeuille
R_t^{B} — " — Benchmark

notion de risque :

Cela peut être : on veut θ tel que

ex. $\begin{cases} P(R_t^\theta - R_t^B \geq 0) \geq 90\% \\ \rightarrow \text{risque résumé par } P(R_t^\theta - R_t^B < 0) \end{cases}$

Plus classique est de mesurer le risque par la variance, ie $Var\, R_t^\theta$.

Ex en $t-1$, ce qu'on sait de R_t^θ c'est ER_t^θ (où $E(R_t^\theta \mid \mathcal{F}_{t-1})$)

$$ER_t^\theta = E\, x \cdot R_t, \quad x = \frac{\theta_t \times S_{t-1}}{\theta_t \cdot S_{t-1}}$$
$$= x\, ER_t$$

$$ER_t^i \simeq \underbrace{\frac{R_1^i + \dots + R_n^i}{n}}_{\text{valeurs historiques}}, \quad n \text{ assez grand}$$

en $t-1$, ER_t^i estimé

Pour la période qui suit, on sait uniquement ce qu'on obtiendra en moyenne

défaut Rq : La variance donne le m̂ poids au cas favorable et défavorable.

→ semi-var : mesure que les cas défavorable

$$\text{semiVar}_t = E\left[(R_t - ER_t)^-\right]^2$$

i.i.d. = indépendant et identiquement distribuable

Chapitre 2 : Théorie de portefeuille de Markowitz (1952)

2.1) Théorie de l'utilité Von Neumann et Morgenstern (1947)

L'objectif est de mesurer les préférences des agents qui investissent sur un marché financier. Notamment de mesurer leur goût au risque.

Notion de relation d'ordre (tout au moins préordre)

Soient W_1, W_2 deux richesses terminales sur une période $[0 ; T]$:

$W_1 \gg W_2$: signifie que l'agent considéré préfère W_1 à W_2

On peut exiger :

si $W_1 \gg W_2$ et $W_2 \gg W_3$ alors $W_1 \gg W_3$ (transitivité)

Sous de bonne condition sur cette relation d'ordre (tout au moins préordre), on peut affirmer qu'il existe une fct u à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$W_1 \gg W_2 \Leftrightarrow u(W_1) \gg u(W_2)$$

où u s'appelle une fonction d'utilité.

La théorie de Von Neumann et de Morgenstern, c'est de dire que chaque agent à sa propre fonction d'utilité.

En particulier il y a celles du type utilité espérée :

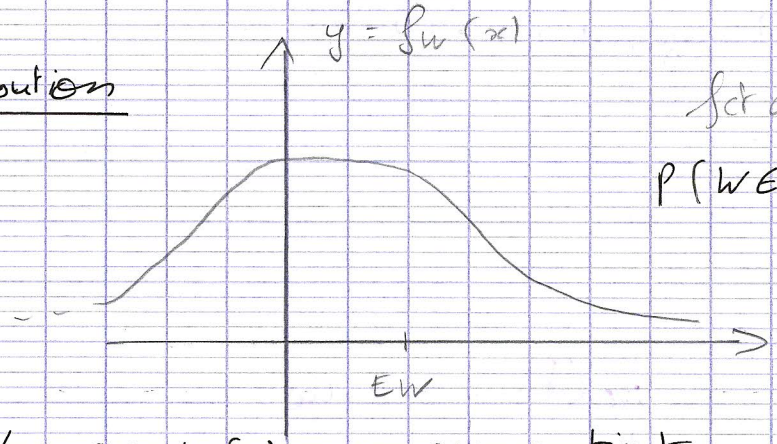
$$u(W) = E_u(W)$$

où u est une fonction d'utilité élémentaire

Rq : L'objectif de l'agent est de maximiser son utilité.

Par exemple, si $u(x) = x$, $U(w) = EW$,
alors l'agent souhaite construire un investissement lui donnant un rendement moyen le plus grand possible

Exemple de distribution



fct de densité

$$P(W \in [a;b]) = \int_a^b f_W(x)\,dx$$

Lorsque $u(x) = x$, on ne tient pas compte du risque.

les fonctions d'utilitées dite de Markowitz sont du type :

$$U(W) = f(EW, \operatorname{var} W)$$

la plus classique étant :

$$U(W) = EW - k \operatorname{var} W, \ \forall k > 0$$

Notion d'équivalent certain :

$e^c(W) \in \mathbb{R}$ est tel que

déterministe (variance = 0)
ex : livret A

$$u(e^c(W)) = E\,u(W)$$

Plus généralement

$$U(e^c(W)) = U(W)$$

On a le choix entre un élt aléatoire et un non aléatoire

$\Rightarrow W \sim e^c(W)$

ie $W \gg e^c(W) \gg W$

Prime de risque :

$$\Pi^u(w) = Ew - e^c(w)$$

On catégorise les préférences des agents :

si $\Pi^u(w) \geq 0 \quad \forall w$, l'agent est averse au risque

l'agent préfère un investissement certains qui rapporte moins que l'espérance

si $\Pi^u(w) \leq 0, \forall w$, " aime le risque

si $\Pi^u(w) = 0, \forall w$, l'agent est neutre au risque

<u>On peut prouver que :</u>

- averse au risque $\Leftrightarrow$ u est une fct concave
- aime le risque $\Leftrightarrow$ u est convexe
- neutre au risque $\Leftrightarrow$ u est affine

Rq : Inégalité de Jensen : si u est convexe alors

$u(Ew) \leq Eu(w)$.

Et donc dans ce cas

$u(Ew) \leq u(w)$ i.e $Ew \preceq w$

<u>Mesure d'aversion au risque ARA :</u>

$$ARA(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Permet de comparer les agents.

<u>Proposition</u> : $\Pi^{u_1} \leq \Pi^{u_2} \Leftrightarrow ARA^{u_1} \leq ARA^{u_2}$

Plus ARA est grand, plus l'agent est averse au risque.

Exercice : Soit une fonction d'utilité élémentaire quadratique $u(w) = aW - bW^2$, $a, b > 0$

a) Mq $U(w) = \mathbb{E}u(w)$ est de type Markowitz

a) $E_u(w) = \mathbb{E}(aW - bW^2)$

$= a\,\mathbb{E}(w) - b\,\mathbb{E}(w^2)$

or $V(w) = \mathbb{E}(W - \mathbb{E}(w))^2$

$= \mathbb{E}(w^2) - \mathbb{E}(w)^2$

$\Rightarrow Eu(w) = a\,E(w) - b\left(V(w) + \mathbb{E}(w)^2\right)$

$= f(\mathbb{E}(w), V(w))$

où $f(x, y) = ax - bx^2 - by$

b) Un agent a pour fonction d'utilité

$$u(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Quel type de richesse accepte t-il ?

$P(W \leq 0) > 0 \Rightarrow P(u(w) = -\infty) > 0$

$\Rightarrow U(w) = Eu(W) = -\infty$

Or l'agent veut maximiser $\mathbb{E}u(w) = U(w)$ donc il ne contient à des richesse $w > 0$.

si $x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{x}$

$u''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\Rightarrow u$ est concave

$\Rightarrow$ l'agent est averse au risque

2.2) Le modèle de Markowitz :

On suppose la fct d'utilité est du type

$$U(W) = f(\mathbb{E}(W), Var(W))$$

le problème est de déterminer l'allocation optimale du portefeuille x afin de résoudre le pb :

$\sup_x U(W^x)$ où W^x est la richesse terminale du portefeuille opéré par x.

Rq1 : Si W_0 est la richesse initiale investie, W_T la richesse totale

$W^x = W_T = W_0 (1 + R(x))$ où $R(x)$ est le rendement du portefeuille de composition x.

$\Rightarrow \mathbb{E} W^x = W_0 (1 + \mathbb{E} R(x))$

$var\, W^x = var(W_0 R(x)) = W_0^2 V(R(x))$

Rq2 : Pour maximiser $f(\mathbb{E} W^x, var\, W^x)$, on le fait pour : - soit une variance de W^x fixée (on maximise $\mathbb{E} W^x$)

- soit une espérance de W^x fixée (on minimise $var(W^x)$)

Il est équivalent de dire que le problème consiste à résoudre :

1) $\sup_x \{ \mathbb{E} R(x) : V(R(x)) = \sigma^2 \}$, σ donné

ou de manière équivalente

2) $\min_x \{ var(R(x)) : \mathbb{E}(R(x)) = m \}$, m donné

Ainsi il y aura pour chaque σ, un (ou des) portefeuilles optimaux.

On va parler de portefeuilles efficients.

Déf : On appelle frontière efficiente l'ensemble des couples du type :

$$\left(\sigma(x) = \sqrt{var(R(x))},\ m(x) = E(R(x))\right)$$ où x est un portefeuille efficient.

Parmi les portefeuilles efficient l'agent choisit celui qui maximise sa fonction d'utilité. Ou bien le niveau de risque qu'il juge acceptable

Exercice : On suppose que l'agent investit dans 2 actifs risqués ($V(S^i) \neq 0$ $\Updownarrow$) S^1, S^2. On note $R = (R^1, R^2)$ les rendements associés sur une période $[0;T]$, $R^i = \dfrac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}$, $i = 1,2$

On suppose donné :

$$M = ER = (ER^1, ER^2)$$

$$\Sigma = \left(cov(R^i, R^j)\right)_{i,j=1,2}$$

$$= \begin{pmatrix} Var\, R^1 & cov(R^2, R_1) \\ cov(R^1, R^2) & Var\, R^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Un portefeuille est définie par une composition

$$\pi = (x, y) \text{ tel que } x + y = 1$$

Ainsi $R(x) = x R^1 + y R^2$

$$= x R^1 + (1-x) R^2 \quad (= \pi R')$$

$$E(R(x)) = R^1 E(x) + R^2 E(1-x) \quad (= \pi\, E(R)')$$

$$V(R(x)) = E(R(x) - E(R(x)))^2$$

$$= E(\underbrace{\pi' R - \pi' ER}_{= \pi'(R - ER)})^2$$

$$= E\, \pi (R - ER)' (R - ER) \pi'$$

$$= \pi \underbrace{\left(E (R - ER)' (R - ER)\right)}_{= \Sigma} \pi'$$

$$\boxed{\forall R(x) = \pi \Sigma \pi'}$$

$\Rightarrow \forall \pi, \ \pi \Sigma \pi' \geq 0$

(car $\pi \Sigma \pi'$ var $R(x) = E(R(x) - E(R(x))^2 \geq 0$)

$\Rightarrow \Sigma$ définit une forme quadratique positive

$$\mathrm{var}(R(x)) = (x, y) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 x + \sigma_{21} y \\ \sigma_{12} x + \sigma_2^2 y \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_{21} xy + \sigma_{12} xy + \sigma_2^2 y^2$$

$$\boxed{\forall (R(x)) = \sigma_1^2 x^2 + 2\sigma_{12} xy + \sigma_2^2 y^2}$$

On suppose en finance que Σ est définie, ie

$$\pi \Sigma \pi' = 0 \iff \pi = (0,0)$$

Pourquoi cette hypothèse ?

si $\pi \Sigma \pi' = 0$ avec $\pi \neq (0,0)$

$\iff \mathrm{var}(R(x)) = 0$

$\iff R(x) = c$, cste

$\iff x R^1 + y R^2 = c$, $y = 1 - x$

Si par exemple $x \neq 0$, $R^1 = \dfrac{c - y R^2}{x}$

$R^1 = \alpha R^2 + \beta$

$\forall x$, $R(x) = x R^1 + (1-x) R^2 = f(R^2) = g(R^1)$

$\rightarrow$ on peut supprimer S^1 ou S^2

En excluant les actifs linéairement dépendant, on peut supposer que Σ est définie positive.

$\pi = x \vec{i} + y \vec{j}$ $\qquad \vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$

$\pi = x' \vec{i} + y' \vec{j}$,

$\pi = (x', y') \longrightarrow$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\Sigma = (A(\vec{i}), A(\vec{j}))$$

$$A(x,y) = \Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A(\pi) = \Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A \text{ appli linéaire}$$

$$A(\pi) = \Sigma' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

matrice de A dans $(\vec{i}', \vec{j}')$

$$\Sigma' = (A(\vec{i}'), A(\vec{j}'))$$

Σ symétrique $\Leftrightarrow \exists\, (\vec{i}', \vec{j}')$ telle que Σ' soit diagonale.

$$\Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= d_1 x' + d_2 y'$$

$$(x', y') \Sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = d_1 (x')^2 + d_2 (y')^2 \geq 0 \quad \forall x', y'.$$

$$\Rightarrow d_1, d_2 \geq 0$$

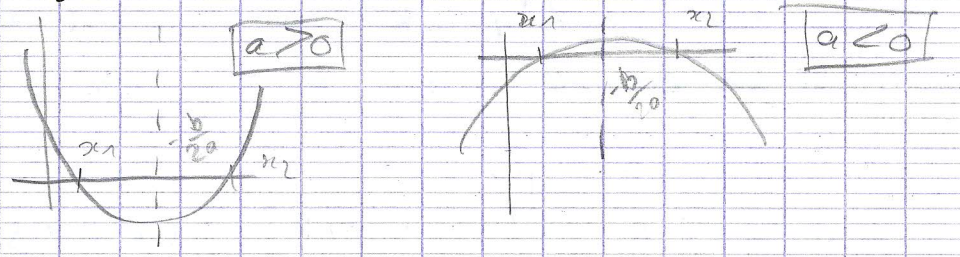
Σ définie positive $\Leftrightarrow d_1, d_2 > 0$ det Σ est le $\hat{m}$ peu importe la base

$$\Rightarrow \det \Sigma > 0$$

Question : Déterminer le portefeuille de variance minimale :

$$\operatorname{var} R(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\sigma_{12}\, x\, (1-x)$$

Rappel : fct du 2nd degré $g(x) = ax^2 + bx + c$



$$V R(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1 - 2x + x^2) + 2\sigma_{12} x - 2\sigma_{12} x^2$$

$$= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 - 2x\sigma_2^2 + x^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} x - 2\sigma_{12} x^2$$

$$= x^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + x \begin{pmatrix} -2\sigma_2^2 \\ +2\sigma_{12} \end{pmatrix} + 1 + (\sigma_2^2)$$

$V(R(x)) = ax^2 + bx + c$ avec $a = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$

$b = 2\sigma_{12} - 2\sigma_2^2$

$c = \sigma_2^2$

le portefeuille minimisant la variance est donc donné par :

$$x = -\frac{(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

<u>Qst</u> : montrer que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > 0$

En effet, $Var\,R(x) > 0$ dès que $x \neq 0$

soit $x = 1$, $y = -1$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > 0$$

<u>Qst</u> : m̂ qst (minimiser la variance)

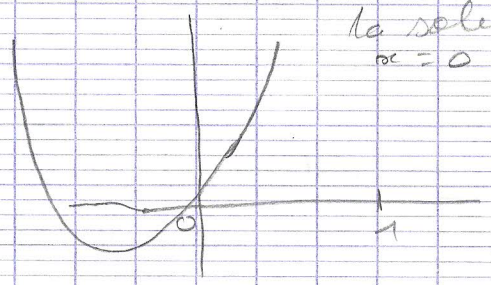
avec la contrainte qu'il n'y ait pas de vente à découvert.

On suppose donc $x \geq 0$, $1 - x \geq 0$ ie $x \in [0;1]$

<u>1er cas</u> : $x^* \in [0;1]$, dans ce cas la solut° est toujours x^*.

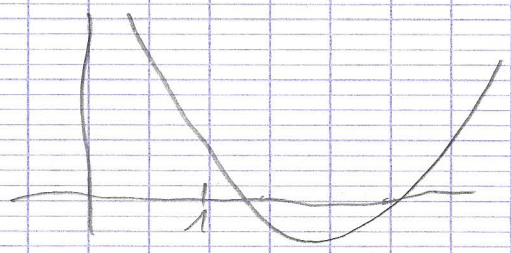
$$x^* = -\frac{(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

<u>2ième cas</u> : $x^* < 0$



la solut° est $x = 0$

<u>3e cas</u> : $x^* > 1$



la solut° est $x = 1$

La frontière efficiente se détermine par exemple en minimisant $\mathrm{Var}\, R(x)$ lorsque $\mathbb{E} R(x) = m$, m fixé

Or ici, $\mathbb{E} R(x) = m$

$$x\, \mathbb{E} R^1 + (1-x)\, \mathbb{E} R^2 = m$$

$\Rightarrow$ x est fixé

$\Rightarrow$ $\mathrm{Var}\, R(x)$ est fixé.

<u>Pb2</u> : Généralisation à 3 actifs :

$R = (R^1, R^2, R^3)$

$\pi = (x, y, z)$ $\quad x + y + z = 1$

$\mathbb{E} R$ donné

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$R(\pi) = \pi R'$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E} R(\pi) = \pi\, \mathbb{E}(R')$

$$\mathrm{Var}\, R(\pi) = \pi \Sigma \pi'$$
$$= \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 y^2 + \sigma_3^2 z^2 + 2\sigma_{12} xy + 2\sigma_{13} xz + 2\sigma_{23} yz.$$

<u>Question</u> : déterminer la frontière efficiente.

Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E} R(\pi) = m$

$$\mathbb{E} R(\pi) = x m_1 + y m_2 + (1-x-y) m_3$$

$$D_m = \{ (x, y) \mid \mathbb{E} R(\pi) = m \}$$

Pb $\quad \min_{(x,y) \in D_m} \mathrm{Var}\, R(x, y)$

$$(x, y) \in D_m \Leftrightarrow (m_1 - m_3) x + (m_2 - m_3) y + m_3 = m$$

$$\underset{m_2 \neq m_3}{\overset{(*)}{\Leftrightarrow}} y = \frac{m - m_3}{m_2 - m_3} + \frac{(m_3 - m_1)}{m_2 - m_3} x$$

(*) Cas où $m_2 = m_3$: x est fixé si $m_1 \neq m_3$

$m_1 = m_2 = m_3 \rightarrow \min \mathrm{Var}\, R(x, y)$

$\nabla \mathrm{Var}\, R(x, y) = 0$

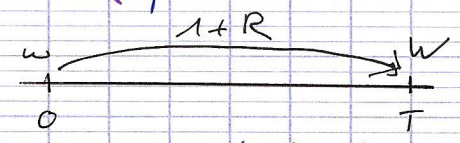
$\rightarrow$ On résoud 1 équation du 2nd ordre en x

$\Rightarrow (x^*(m), y^*(m), z^*(m))$

donne un portefeuille efficient

Cadre de Markowitz :

On mesure le risque d'un portefeuille de rendement R par $\operatorname{var} R$



$W = w(1+R)$, w capital initial à $t=0$, R est aléatoire

$\operatorname{var} W = w^2 \operatorname{var} R$

-> il y a équivalence entre :

minimiser $\operatorname{var} W$ ou $\operatorname{var} R$ une fois w fixé.

De même se fixer EW est équivalent à se fixer ER.

L'objectif c'est d'optimiser le couple (Rendement, risque)

-> $\boxed{\text{frontière efficiente}}$

2.3) Frontière efficiente lorsqu'il n'y a pas d'actif sans risque :

Les données sont des actifs risqués $S^1, S^2, \dots, S^d$, $d \geq 1$ de rendements $R = (R^1, R^2, \dots, R^d)$ sur une période donnée.

On suppose donné $ER = (ER^1, ER^2, \dots, ER^d)$

$$\Sigma = \left(\operatorname{cov}(R^i, R^j)\right)_{i,j=1,\dots,d} \text{ symétrique}$$

On suppose que Σ est inversible, ie $\det \Sigma \neq 0$, ou de manière équivalente $x \Sigma x' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Rappelons que $\Sigma = \mathbb{E}(R-ER)'(R-ER)$

Notations :

produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}} = x \Sigma^{-1} y'$

propriétés : • $x \mapsto \langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}}$ linéaire

• $\langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}} = \langle y, x \rangle_{\Sigma^{-1}}$

car $\langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}} = (\langle x, y \rangle_{\Sigma^{-1}})'$

par symétrie $\left(= y(\Sigma^{-1})'x' = y \Sigma^{-1} x = \langle y, x \rangle_{\Sigma^{-1}} \right.$

- $\langle x, x \rangle_{\Sigma^{-1}} \geq 0 \quad \forall x$

Σ inversible, $\begin{cases} x = z\Sigma \\ z = x\Sigma^{-1} \end{cases}$

$$\langle x, x \rangle = z \Sigma \Sigma^{-1} \Sigma z'$$
$$= z \Sigma z' \geq 0$$

- $\langle x, x \rangle_{\Sigma^{-1}} = 0 \iff x = 0$

Associée à ce produit scalaire, la norme :

$$\|x\|_{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\Sigma^{-1}}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \|x\| \geq 0 \\ \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \end{array} \right)$$

<u>Inégalité de Cauchy-Schwartz</u> :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si x et y sont colinéaires, ie $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ ou $x = k^{-1} y$

On pose $a = a_\Sigma = \|\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}$

$$\boxed{a = \mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'} = \|\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}}$$

avec $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)$

$$b = \langle ER, \mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}}$$

$$\boxed{b = ER \Sigma^{-1} \mathbb{1}'}$$

$\langle x, y \rangle = x \Sigma^{-1} y'$

Les portefeuilles admissibles pour un niveau de risque $\sigma \geq 0$ sont données par :

$$\mathcal{A}_\sigma = \{ x \in \mathbb{R}^d : x \mathbb{1}' = 1 \text{ et } x \Sigma x' = \sigma^2 \}$$

<u>rappel</u> : $R(x) = Rx' = x R' = x \cdot R$

$\mathbb{E}R(x) = \mathbb{E}Rx' = \dots$

$\mathrm{Var}\, R(x) = \mathbb{E}\left(R(x) - \mathbb{E}(R(x))\right)^2$

$= x \Sigma x'$

<u>proposition</u> : l'ensemble $\mathcal{A}_\sigma$ est non vide ssi $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$. De plus, si $\sigma^2 = \frac{1}{a}$ alors

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ \frac{1}{a} \mathbb{1} \Sigma^{-1} \right\}$$

<u>Preuve</u> : $\sigma^2 = x \Sigma x'$ si $x \in \mathcal{A}_\sigma$

$\Rightarrow \quad \sigma^2 = (x \Sigma) \Sigma^{-1} (x \Sigma)' = x \Sigma \Sigma^{-1} x' \Sigma^{-1}$

$\sigma^2 = \| x \Sigma \|^2_{\Sigma^{-1}}$ $\qquad \Sigma^{-1} \Sigma = 1$

Cauchy-Schwartz :

(i) $\quad \langle \mathbb{1}, x \Sigma \rangle_{\Sigma^{-1}} \leq \| \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}} \times \| x \Sigma \|^2_{\Sigma^{-1}}$

avec égalité ssi $\mathbb{1}$ et $x \Sigma$ sont colinéaire

Or $\langle \mathbb{1}, x \Sigma \rangle_{\Sigma^{-1}} = \mathbb{1} \Sigma^{-1} \Sigma x'$ $\quad (x \Sigma = \Sigma x')$

$= \mathbb{1} x' = 1$ (On considère que $x = 1$)

Ainsi (i) $\Leftrightarrow 1 \leq a \sigma^2$ $\qquad a = \| \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}}$

$\Leftrightarrow \sigma^2 \geq \frac{1}{a}$

De plus $\sigma^2 = \frac{1}{a}$ correspond à l'égalité dans (i) i.e :

$\longrightarrow x \Sigma = k \mathbb{1}$, $k \in \mathbb{R}$

$x = k \mathbb{1} \Sigma'$

Or $x \mathbb{1}' = 1 \Rightarrow k \underbrace{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'}_{a} = 1$

$k = \frac{1}{a}$

$x = xy$

$\langle \mathbb{1}, x \Sigma \rangle$

$y = \mathbb{1}$

$x = x \Sigma$

proposition : (Cas trivial)

Si $ER \in \mathrm{Vect}(\mathbb{1})$ ($ER = k\mathbb{1}$, $k \in \mathbb{R}$)

alors, le rendement espéré maximal est $\frac{b}{a}$ et la frontière efficiente est

$$\left\{ \left(\sigma, \frac{b}{a}\right),\ \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{a}} \right\}$$

Preuve : Pour $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ fixé, avec $ER = k\mathbb{1}$, le pb est :

$$\sup \left\{ ER \cdot x : x\mathbb{1}' = 1,\ x \Sigma x' = \sigma^2 \right\}$$

$$= \sup \left\{ k\mathbb{1} \cdot x : \begin{array}{l} \mathbb{1}x = \mathbb{1} \\ x \Sigma x' = \sigma^2 \end{array} \right\}$$

$$= \sup \left\{ k : \text{''} \quad \text{''} \right\}$$

$= k$ $\forall x$, on a la m̂ espérance k.

Or $b = ER\,\Sigma^{-1}\mathbb{1}'$

$b = k\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}' = ka$

$k = \frac{b}{a}$

proposition : (Cas général)

Supposons $ER \notin \mathrm{Vect}(\mathbb{1})$

la frontière efficiente est l'ensemble des couples $(\sigma, m(\sigma))$ où $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$,

et $m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\ \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}$

est le rendement maximal pour une variance de σ^2 réalisé par le portefeuille efficient :

$$\boxed{x(\sigma) = \frac{\mathbb{1}\Sigma^{-1}}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}\ \frac{ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}}{\left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}}\ \Sigma^{-1}}$$

permet d'avoir un vecteur.

<u>Preuve</u> : C'est basé sur la méthode Lagrangienne

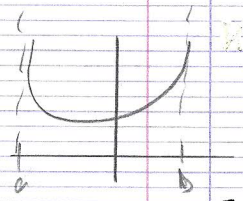
KKT (Karush, Kuhn, Tucker)

$x \in \mathbb{R}^d$ avec $x \cdot \mathbb{1} = 1$

$\mathbb{E} R(x) = \mathbb{E} R x' = g(x)$ linéaire

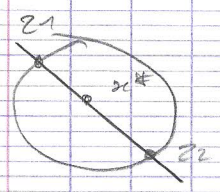
sur la contrainte $x \cdot \mathbb{1} = 1$

$x \Sigma x' = \sigma^2$



Le max d'une fonction convexe g est atteint au bord (ici interval $[a;b]$.

En dimmension $\mathbb{R}^d$



$g(x^*) = \max g(z_i)$

$x^* = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2$

$g(x^*) = g(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) \leq \alpha g(z_1) + (1-\alpha) g(z_2)$

$\leq \max(g(z_1), g(z_2))$ (i)

$\Rightarrow g(x^*) = \max(g(z_1), g(z_2))$

Ainsi le problème se réécrit :

$\max_{x \in D} g(x)$, $g(x) = \mathbb{E} R x'$

où $D = \{x : x \cdot \mathbb{1} \leq 1,\ x \Sigma x' \leq \sigma^2\}$

On la réécrit sous forme d'inégalité

<u>KKT</u> :

$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = g(x) - \lambda_1 (x \cdot \mathbb{1} - 1)$

$- \lambda_2 (x \Sigma x' - \sigma^2)$

Si g admet un max local en un certain x^* alors on a :

$$(KKT) \begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ x^* \cdot 1 \leq 1,\ x^* \Sigma x^{*\prime} \leq \sigma^2 \\ \lambda_1 (x^* \cdot \mathbb{1} - 1) = 0,\ \lambda_2 (x^* \Sigma x^{*\prime} - \sigma^2) = 0 \end{cases}$$

De plus si g est concave, si $x \overset{h_1}{\longmapsto} x \cdot \mathbb{1} - 1$, $x \overset{h_2}{\longmapsto} x \Sigma x' - \sigma^2$ soit 2 fois dérivable, alors x^* sol de KKT réalise le max

h_1 est linéaire donc ok

dl d'une forme quadratique

$$h_2(x) = x \Sigma x' - \sigma^2$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \Sigma_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{i<j} \Sigma_{ij} x_i x_j$$

le terme en x_k :

mat triangle inf — mat triangulaire sup

$$\sum_{1} \Sigma_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{i<k} \Sigma_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{k<j} \Sigma_{kj} x_k x_j$$

$$\partial x_k h_2(x) = 2 \Sigma_{kk} x_k + 2 \sum_{j \neq 1} \Sigma_{j,k} x_j$$ or Σ_{kj} par symétrie

$$= 2\left(\sum_j \Sigma_{k,j} x_j\right) = 2(\Sigma x')_k$$

$$\nabla h_2(x) = 2 \Sigma x'$$

$$\partial x_j \, \partial x_k \, h_2(x) = 2 \Sigma_{j,k}$$
$$\partial x_j \nabla h_2(x)$$
$$\nabla^2 h_2(x) = 2 \Sigma$$

Une fct est convexe ssi sa matrice est positive

la matrice hessienne est positive comme σ donc positive

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = ER x' - \lambda_1 (x \mathbb{1}' - 1)$$
$$- \lambda_2 (x \Sigma x' - \sigma^2)$$

$$\nabla \mathcal{L}_x (x^*, \lambda_1, \lambda_2) = ER - \lambda_1 \mathbb{1} - 2 \lambda_2 x^* \Sigma = 0$$
$$2 \lambda_2 x^* \Sigma = ER - \lambda_1 \mathbb{1}$$
$$x^* = \frac{1}{2\lambda_2} (ER - \lambda_1 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

On trouve λ_1, λ_2 en sachant que $x^* \mathbb{1}' = 1$ On identifie à $x(\sigma)$.

par convexité $x^* = \alpha z_1 + \beta z_2$, $\beta = 1 - \alpha$ $\quad x^* \Sigma x^{*\prime} = \sigma^2$

$$x^* = \alpha \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1}\right) \Sigma^{-1} + \beta \mathbb{1} \Sigma^{-1}$$

$$x^* \mathbb{1}' = \mathbb{1}, \quad x^* \Sigma x^{*\prime} = \sigma^2$$
$$\mathbb{1} = \alpha \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1}\right) \Sigma^{-1} \mathbb{1}' + \beta \mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'$$
$$\mathbb{1} = \alpha (b - b) + \beta \underbrace{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'}_{= a}$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{a}$$

$$x^* \Sigma x^{*\prime} = \sigma^2$$

$$\alpha^2 \left\| ER - \frac{b}{a} \right\|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{1}{a^2} a + 2\frac{\alpha}{a} \underbrace{\left\langle ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}, \mathbb{1} \right\rangle_{\Sigma^{-1}}}_{=0} = \sigma^2$$

$$\langle ER, \mathbb{1} \rangle = b$$

$$\left\| ER - \frac{b}{a} \right\|^2_{\Sigma^{-1}} \alpha^2 + \frac{1}{a} = \sigma^2$$

$$\alpha^2 = \frac{\sigma^2 - \frac{1}{a}}{\left\| ER - \frac{b}{a} \right\|^2_{\Sigma^{-1}}}$$

$$\boxed{x(\sigma) = \frac{\mathbb{1}\Sigma^{-1}}{a} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}} \left(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right) \Sigma^{-1}}$$

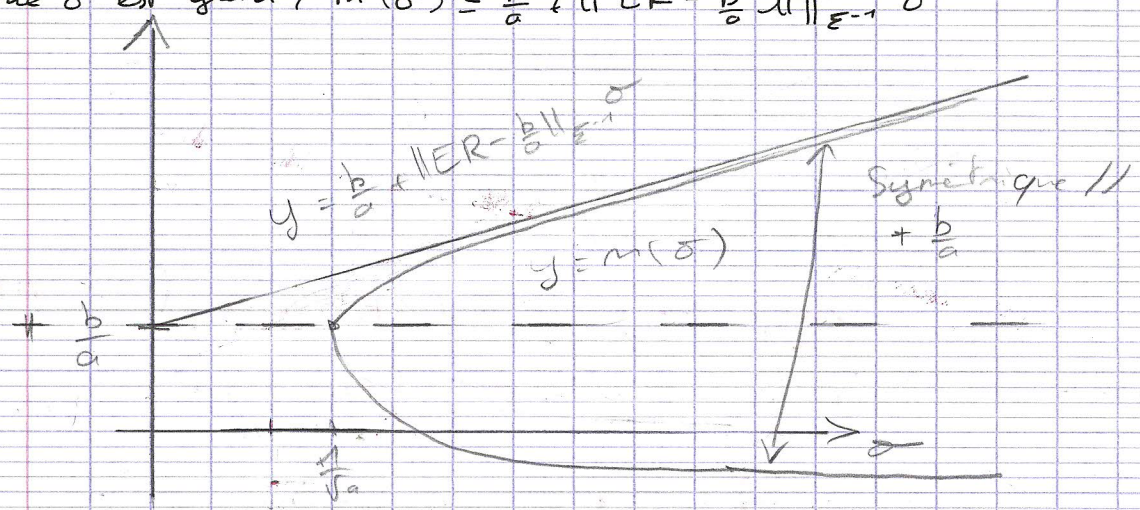
$$m(\sigma) = ER\, x(\sigma)'$$

$$= x(\sigma)\, ER'$$

$$\boxed{m(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}}$$

$$\left(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right) \Sigma^{-1} \left(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right)' + \underbrace{\frac{b}{a} \left(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right) \Sigma^{-1} \mathbb{1}'}_{=0}$$

Dès que σ est grand, $m(\sigma) \simeq \frac{b}{a} + \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}} \sigma$



On peut mq l'espérance minimale :

$$\hat{m}(\sigma) = \frac{b}{a} + \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}} \left\| ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \right\|_{\Sigma^{-1}}$$

2. 4) Frontière efficiente lorsqu'il y'a un actif sans risque S^0

données : $S^1, \dots, S^d \to R = (R^1, \dots, R^d)$

ER, Σ

$S^0 \to R^0$ non risqué, déterministe ($V = 0$)

On peut aussi modéliser un portefeuille par $x \in \mathbb{R}^d$ mais ici $x \mathbb{1}'$ n'est pas forcément égal à 1.

La proportion investit dans S^0 est :

$$x^0 = 1 - x\mathbb{1}'$$

$$\boxed{R(x)} = x^0 R^0 + x^1 R^1 + \dots + x^d R^d$$

$$= (1 - x\mathbb{1}') R^0 + x R'$$

$$\boxed{= R^0 + x (R - R^0 \mathbb{1})'}$$

$$\begin{cases} ER(x) = R^0 + x (ER - R^0 \mathbb{1})' \\ \mathrm{Var}\, R(x) = x \Sigma x' \end{cases}$$

⚠ La variance minimale possible est 0

$\to$ investir seulement sans risque

Rq : $x = \alpha \mathbb{1}$

$\mathrm{Var}\, R(x) = \alpha^2 \mathbb{1} \Sigma \mathbb{1}'$

pour avoir $\mathrm{Var}\, R(x) = \varepsilon^2$ il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathbb{1} \Sigma \mathbb{1}'}}$$

Le problème s'écrit :

$$\sup_x x \cdot v, \quad v = ER - R^0 \mathbb{1} \quad (ER \neq R^0 \mathbb{1})$$

$$\text{sous } x \Sigma x' \leq \sigma^2 \quad (\Leftrightarrow x \Sigma x' = \sigma^2)$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x \cdot v - \lambda (x \Sigma x' - \sigma^2)$$

$$(KKT) \begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda (x^* \Sigma x^{*\prime} - \sigma^2) = 0 \\ x^* \Sigma x^{*\prime} \leq \sigma^2 \end{cases}$$

$\nabla_x \Sigma x' = 2 \Sigma x'$

On sait que $x^* \Sigma x^{*\prime} = \sigma^2$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = v - 2\lambda x^* \Sigma = 0$$

$$x^* = \frac{1}{2\lambda} v \Sigma^{-1}$$

$$x^* \Sigma x^{*\prime} = \sigma^2$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} v \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} v = \sigma^2$$

$$4\lambda^2 = \frac{\|v\|^2_{\Sigma^{-1}}}{\sigma^2}$$

$$2\lambda = \frac{\|v\|_{\Sigma^{-1}}}{\sigma}$$

$$x^* = \frac{\sigma}{\|ER - R_0 \mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

$$m(\sigma) = R_0 + x^* (ER - R_0 \mathbb{1})'$$

$$m(\sigma) = R_0 + \sigma \|ER - R_0 \mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}$$

$$sh = \|ER - R_0 \mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}}$$

indice de performance de sharp

<u>Propriétés</u>: Si $ER \neq R^0 \mathbb{1}$, la frontière efficiente est $(\sigma, m(\sigma))$

$\sigma \geq 0$ où $m(\sigma) = R^0 + \sqrt{SR}\, \sigma$ — droite du marché

Réalisé par le portefeuille efficient

$$\boxed{x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{sh}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}}$$

proposition : Théorème des deux fonds (avec actif sans risque)

Supposons que $\boxed{(ER - R_0 \mathbb{1})\, \Sigma^{-1} \mathbb{1}' \neq 0}$

0 ds le sens risk

ξ ds le risk

Alors, il existe un portefeuille efficient $(0, \xi)$ ne dépendant que des caractéristiques du marché, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^d)$, vérifiant $\xi . \mathbb{1} = 1$.

Investi uniquement dans les actifs risqués et tel que tout autres portefeuilles efficient du type $(\underbrace{1 - x\mathbb{1}}_{x_0}, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$x = (1 - x_0)\, \xi \text{ avec } \xi = \frac{1}{b - aR_0} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

1

Rq : la morale de cette histoire, c'est que tt agent rationnel (suivant 1 portefeuille efficient) partage son investissement entre l'actif sans risque (selon la proportion x_0) et le m̂ fond ξ (selon la proportion $(1 - x_0)$)

Preuve : rappel : $a = \mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'$ $\quad b = ER \Sigma^{-1} \mathbb{1}'$

$$b - aR_0 = ER \Sigma^{-1} \mathbb{1}' - R_0 \mathbb{1} \Sigma^{-1} \mathbb{1}'$$
$$= (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} \mathbb{1}'$$

$$\xi \mathbb{1} = \xi \mathbb{1}' = \frac{1}{(ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} \mathbb{1}'} \underbrace{(ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} \mathbb{1}'}_{1}$$

$$\xi \mathbb{1} = 1$$

On a vu que le portefeuille efficient associé au risque σ est déterminé par :

$$x(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{sh}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

avec

$$sh = \| ER - R_0 \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}}$$

Qst : Est-ce qu'un portefeuille du type :

$$x = \alpha (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} \text{ est efficient si } \alpha \geq 0$$

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{sh'}}$$

ie $\sigma = \alpha \sqrt{sh}$

- $$\text{Var } R(x) = x \Sigma x' = \frac{\sigma^2}{sh} \underbrace{(ER - R_0 \mathbb{1}) \underbrace{\Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1}}_{\Sigma^{-1}} (ER - R_0 \mathbb{1})'}_{\text{même au carré ce qu'on a vu avant}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{sh} \times sh$$

- $$ER(x) = R_0 + x (ER - R_0 \mathbb{1})'$$

$$= R_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1} (ER - R_0 \mathbb{1})'$$

$$ER(x) = R_0 + \sigma \sqrt{sh'}$$

Ainsi ξ est bien efficient avec un risque donné par

$$\boxed{\sigma_\xi = \frac{\sqrt{sh'}}{b - a R_0}}$$

Enfin, considérons un portefeuille efficient (x_0, x) $x \in \mathbb{R}^d$

On a $x_0 = 1 - x \mathbb{1}'$

on sait que $x = \frac{\sigma}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$

$$x = \frac{\sigma}{\sqrt{sh'}} (b - a R_0) \times \xi$$

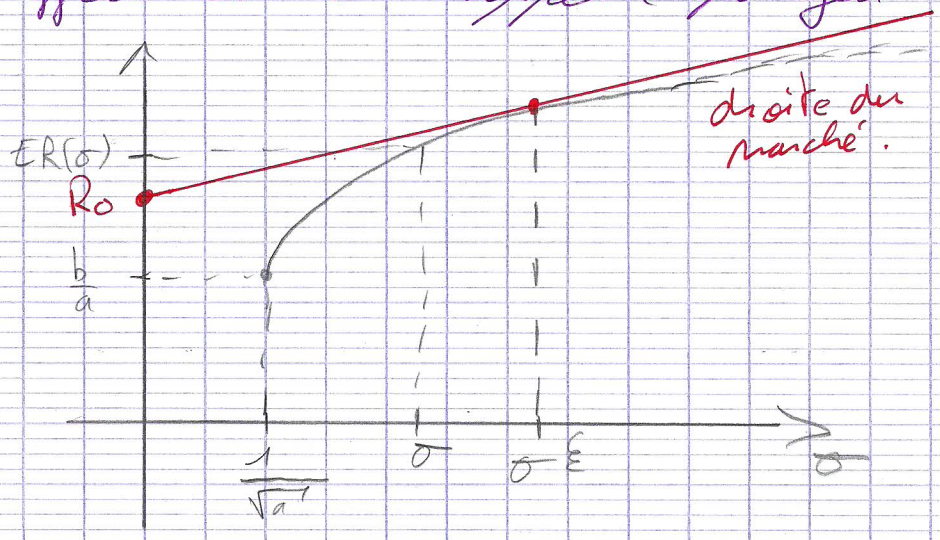
$$x = c\, \xi, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x_0 = 1 - c\, \xi \mathbb{1}' = 1 - c$$

$$\Rightarrow c = 1 - x_0$$

$$\boxed{x = (1 - x_0)\, \xi}$$

Remarque : On note que ξ est efficient aussi dans le marché sans l'actif S° donc le couple $(\sigma^{\xi}, ER(\xi))$ appartient aux deux frontières efficientes. On l'appelle portefeuille tangent.



le seul portefeuille efficient pour les 2 marchés

Chapitre 3 : le MEDAF

3.1) le modèle MEDAF

le modèle d'évaluation des actifs financiers ou CAPM (capital asset pricing model).
Ça a été développé par Treynor, Sharpe, Lintner et Mossin.
Cela se base sur les travaux de Markowitz

On suppose un marché financier constitué d'actifs $S^1, S^2, \dots, S^d$ sur une période $[0;T]$. S^0 est un actif sans risque de rendement R^0 et $R = (R^1, \dots, R^d)$ de rendement sur $[0;T]$ de $(S^1, \dots, S^d)$.
Soit les qt $(q^i)_{i=1,\dots,d}$ d'actifs risqués du marché.
Par déf, le portefeuille du marché, est défini par une qt $\theta^M = (q^1, \dots, q^d)$.
Ou encore en terme de proportions :

$$x^M = \left(q^1 \frac{S_0^1}{W_0^M}, q^2 \frac{S_0^2}{W_0^M}, \dots, q^d \frac{S_0^d}{W_0^M} \right)$$

où W_0^M est la richesse totale
S_0^i le prix de l'actif n° i à la date 0

On a donc $W_0^M = \sum_{i=1}^{d} q^i S_0^i$

d'où $x^M \mathbb{1}' = 1$, ie le portefeuille du marché est totalement investi dans les actif risqués.

hypothèse 1 : Une hypothèse du ~~modèle~~ MEDAF est que les agents du marché sont rationnels, ie sont des portefeuilles efficients.

Donc si N : nb d'agents pour chaque $j = 1, 2, \ldots, N$, l'agent n° j a un portefeuille

$$x(\sigma_j) = \frac{\sigma_j}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}, \quad j = 1, \ldots, N$$

<u>hypothese 2</u> : est $S = D$

$\forall i = 1, \ldots, d$

$$\sum_{j=1}^{N} w^j \times x_i(\sigma_j) = q^i S_0^i = W_0^M x_i^M$$

w_0^j richesse de l'agent n° j.

$w_0^j x^i(\sigma_j)$ = richesse de l'agent j investit ds l'actif i

Ainsi :

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{W_0^M} x(\sigma_j)$$

Rq : $\sum_{j=1}^{N} w_0^j = w_0^M$

$$x^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{w_0^M} \frac{\sigma_j}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

$$x^M = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{w_0^M} \sigma_j \right)}{\sqrt{sh'}} (ER - R_0 \mathbb{1}) \Sigma^{-1}$$

$\Rightarrow$ x^M est un portefeuille efficient dont le risque est

$$\sigma^M = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_0^j}{w_0^M} \sigma_j$$

Comme le portefeuille du marché est uniquement investit dans les actifs risqués, il coïncide avec le portefeuille tangent.

On a donc

$$ER^M = R_0 + \sqrt{Sh}\,\sigma^M \quad (**)$$

portfolio tangent

Comme $\xi = x^M = \frac{1}{b - aR_0}(ER - R_0 \mathbb{1})\Sigma^{-1}$

$$= \frac{\sigma_M}{\sqrt{Sh}}(ER - R_0\mathbb{1})\Sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b - aR_0} = \frac{\sigma_M}{\sqrt{Sh}} \quad (*)$$

En particulier, $\boxed{\sigma_M = \frac{\sqrt{Sh}}{b - aR_0}}$ ie qu'on connait le risque du marché une fois ses paramètre connus.

$\Rightarrow ER^M = R_0 + \sqrt{Sh}\,\sigma_M$

$$\boxed{ER^M = R_0 + \frac{Sh}{b - aR_0}}$$

(*) peut être réécrit

$$\Rightarrow \frac{1}{b - aR_0} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M\sqrt{Sh}}$$

(**)

$$\Rightarrow \frac{1}{b - aR_0} = \frac{Var\,R^M}{ER^M - R^0} \quad (***)$$

$$Cov(R, R^M) = (Cov(R^i, R^M))_{i=1,\dots,d}$$

$$= (Cov(R^1, R^M), \dots, Cov(R^d, R^M))$$

$$= Cov(R^M, R) \text{ par symetrie}$$

$$= E(R^M - ER^M)(R - ER)$$

$$= E(x^M R' - x^M ER')(R - ER)$$

$$= E\,x^M (R - ER)'(R - ER)$$

$$\boxed{Cov(R, R^M) = x^M \Sigma}$$

1er cas : $m \geq \frac{6}{100}$

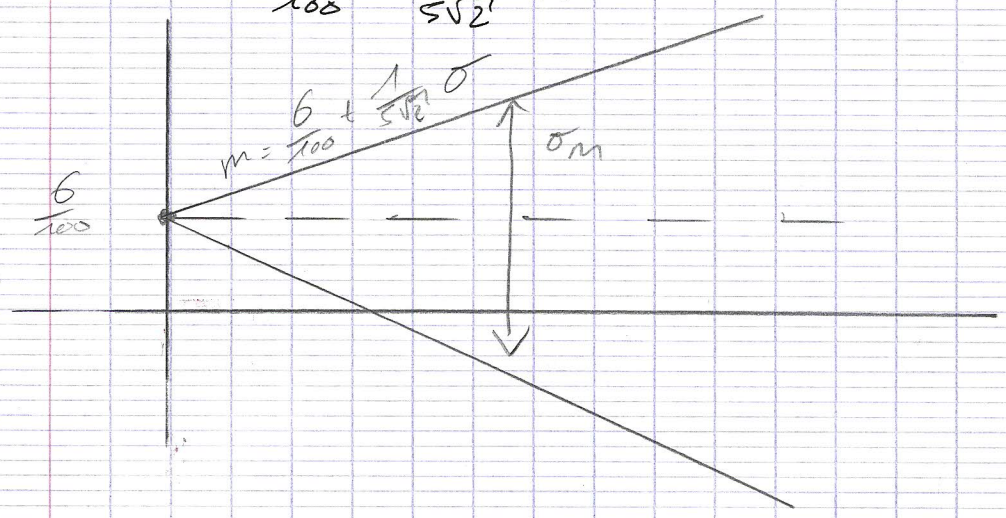
$$\sigma_m = 5\sqrt{2}\left(m - \frac{6}{100}\right)$$

$$m = \frac{6}{100} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\sigma_m \Leftrightarrow m(\sigma) = \frac{6}{100} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\sigma$$

2e cas : $m \leq \frac{6}{100}$

$$\sigma_m = -5\sqrt{2}\left(m - \frac{6}{100}\right)$$

$$m = \frac{6}{100} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\sigma_m$$



$R_0 = \frac{2}{100}$

Exercice 2 : $d \geq 2$, 2 actifs S^1, S^2

Portefeuille du marché x^n, R^n

Actifs	ER	β	risque systémique	risque spécifique
R^M	10%	1	20%	0
R^1	8.4%	0.8	12.8%	10%
R^2	-5%	$-\frac{7}{8}$	15.26 %	30%

=> Calculer les cases manquantes :

$$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x)$$

$$\beta(x) = \frac{cov(R^M, R(x))}{var\, R^M}$$

Ligne 1 : $R(x) = R_0 + 1(R^M - R^0) + 0$

Ligne 2 : $ER(x) = R_0 + \beta(x)(ER^M - R_0)$

$$ER^1 = \frac{2}{100} + 0.8\left(10\% - \frac{2}{100}\right)$$

$$= \frac{2}{100} + 0.8 \times \frac{8}{100} = 8.4\%$$

$$var\, R(x) = \beta^2(x)\, var\, R_M + var\, \varepsilon(x)$$

(var R_M = 20%, car Risque total = Risque systémique + risque spécifique)

$$\beta^2(x)\, var\, R_M = \frac{64}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{12.8}{100}$$

Ligne 3 : $ER^2 = R_0 + \beta(x)(ER^M - R^0) + 0$

$$\beta(x) = \frac{ER^2 - R^0}{ER^M - R^0} = \frac{-5/100 - 2/100}{\frac{10}{100} - \frac{2}{100}}$$

$$= -\frac{7}{100} \times \frac{100}{8} = -\frac{7}{8}$$

Risque systémique : $\beta^2(x)\, var\, R^n = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times \frac{20}{100}$

$$= \left(\frac{49}{64} \times 20\right) \times \frac{1}{100}$$

$$= 15.26\%$$

Construire des portefeuilles efficients ne contenant que S^0, S^1, S^2 :

Un tel portefeuille s'écrit $(x_0 = 1 - x_1 - x_2, x = (\alpha, \beta, 0, 1, -1, 0))$

modèle factoriel : $R^i = R^0 + \beta^i (R^M - R^0) + \varepsilon^i, i = 1, 2$

$R^1 = R^0 + \beta^1 (R^M - R^0) + \varepsilon^1$

$R^2 =$

$R(x) = R_0 + \beta(x)(R^M - R^0) + \varepsilon(x)$

$R(\alpha, \beta) = R^0 + \beta(\alpha, \beta)(R^M - R^0) + \varepsilon(\alpha, \beta)$

on a changé $\beta = \varphi$

$\boxed{\beta(\alpha, \varphi) = \beta \cdot (\alpha, \varphi, 0, 0, -, 0) = \left(0.8\alpha - \frac{7}{8}\varphi\right)}$

$\varepsilon(\alpha, \varphi) = \alpha \varepsilon^1 + \varphi \varepsilon^2.$

Supposons $ER(\alpha, \varphi) = m$, en déduire que

$\beta(\alpha, \varphi) = \beta(m)$

$m = R_0 + \beta(m)(ER^M - R^0)$

$m = \frac{2}{100} + \left[\beta(m)\right]\left(\frac{8}{100}\right)$

$\Rightarrow \beta(m) = \frac{100m - 2}{8}$

(Rq : on avait de 2 degrés de libertés avec α, φ inconnu. Avec ER fixé, il nous reste 1 degré de liberté, m)

> Supposons $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{2}$

En déduire une relation entre α et φ.

$0.8\alpha - \frac{7}{8}\varphi = \frac{100m - 2}{8}$

$\varphi = \frac{6.4}{7}\alpha + \boxed{\frac{2}{7} - \frac{100m}{7}}$ d

$\mathrm{var}\, R(\alpha, \varphi) = \beta^2(m)\, \mathrm{var}\, R^M + \mathrm{var}\, \varepsilon(\alpha, \varphi)$

$\mathrm{var}\, \varepsilon(\alpha, \varphi) = (\alpha, \varphi) M (\alpha, \varphi)'$

$$\Gamma = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -0.85 \\ -0.85 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\varepsilon_1}\sqrt{\mathrm{Var}\,\varepsilon_2}}$

$$\mathrm{Var}(\alpha, \varphi) = \frac{1}{10}(\alpha, \varphi)\begin{pmatrix} 1 & -0.85 \\ -0.85 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha - 0.85\varphi \quad -0.85\alpha + 3\varphi)\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \left[\alpha^2 - 0.85\alpha\varphi - 0.85\alpha\varphi + 3\varphi^2\right]\frac{1}{10}$$

$$= \left[\alpha^2 + 3\varphi^2 - 1.7\alpha\varphi\right]\frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\alpha^2 + 3\varphi^2 - \sqrt{3}\,\alpha\,\varphi\right]$$

remplace par d, page avant

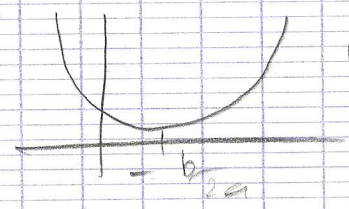
$$= \frac{1}{10}\left[\alpha^2 + 3\left(\frac{6.4}{7}\alpha + d\right)^2 - \sqrt{3}\,\alpha\left(\frac{6.4}{7}\alpha + d\right)\right]$$

$$\frac{1}{10}\left[a\alpha^2 + b\alpha + c\right]$$

$$a = 1 + 3 \times \left(\frac{6.4}{7}\right)^2 - \sqrt{3} \times \frac{6.4}{7}$$

$$b = \left(6 \times \frac{6.4}{7} - \sqrt{3}\right)d$$

$$c = 3d^2$$



Rq : forcément positif car c'est une variance.

$$\alpha_{min} = -\frac{b}{2a}$$

Rq : Ce portefeuille est efficient par rapport au marché restreint à S^0, S^1, S^2.
Mais pas forcément efficient par rapport au marché global.

Chapitre 4 : les modèles factoriels :

Initié par Ross en 1976 dans le cadre de APT. (asset pricing theory). l'idée est de supposer que les rendements des actifs financiers du marchés s'expliquent par des facteurs.

De l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (possibilité d'un gain non nul (en tant que VA) positif sans prendre de risque) avec $K_0 = 0$, $K_t, t \in [0;T]$

On en déduit une relation linéaire, entre les rendements espérés des actifs et les sensibilitées aux facteurs de ces n actifs.

On suppose que le marché est constitué d'actifs financiers $(S^1, S^2, \dots, S^d)$ (éventuellement y compris S_0)

le modèle suppose l'existence de facteurs $F_1, F_2, \dots, F_k$ tel que :

$$\boxed{\forall i = 1, \dots, d, \; R^i = E R^i + \sum_{j=1}^{k} b_{i,j} F_j + \varepsilon^i}$$

sensibilité au facteur F_j

avec $\begin{cases} E F_j = E \varepsilon_i = 0 \\ \mathrm{Cov}(F_j, \varepsilon_i) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases}$

Rq1 : • Il s'agit d'une décomposition orthogonale au sens de la covariance $\langle X, Y \rangle = \mathrm{cov}(X, Y)$.

• ε^i fournit le risque spécifique

Rq2 : $\forall i$: $b_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,k})$

$F = (F_1, \dots, F_k)$

$R^i = E R^i + b_i F' + \varepsilon_i$

$\Rightarrow \mathrm{var}\, R_i = \mathrm{var}(b_i F') + \mathrm{var}(\varepsilon_i)$ $\qquad \Sigma_F = (\mathrm{cov}(F_i, F_j))_{j=1,\dots,d}$

$\mathrm{var}\, R_i = b_i \Sigma_F b_i' + \mathrm{var}(\varepsilon_i)$

donc c'est la généralisation du modèle du CAPM ou MEDAF avec $b_i \Sigma_F b_i'$ risque systématique.

$\mathrm{var}\, \varepsilon_i$ risque spécifique

Rq 3 : b_{ij} sensibilité de R_i au facteur F_j

lorsque tous les autres facteurs sont fixés, si pour j donné, $\Delta F_j = 1$ alors $\Delta R_i = b_{ij}$ | $b_{ij} \simeq \frac{\Delta R_i}{\Delta F_j}$

$\Delta F_j = \delta$ alors $\Delta R_i = b_{ij}\, \varepsilon$.

relation avec les dérivées :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + h^2 \varepsilon(x)$$

$$\Delta f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{sensibilité d'ordre 1}} h + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)}_{\text{d'ordre 2}} h^2 + h^2 \varepsilon(x)$$

Si un portefeuille a pour valeur $V_t = C(t, S_t)$

$S_t \sim (S_t^1, \dots, S_t^d)$

$$C(t_0 + \Delta t_0, S_{t_0} + \Delta S_{t_0}) - C(t_0, S_{t_0})$$

$$= \underbrace{\boxed{C_x(t_0, S_{t_0})}}_{\text{delta}} \Delta S_{t_0} + \boxed{C_t(t_0, S_{t_0})} \Delta t_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{C_{xx}(t_0, S_0)}}_{\text{gamma}} (\Delta S_{t_0})^2 + \dots$$

Rq 4 : Dans le cadre de Markowitz, on a

$$R_i = R_0 + \beta^i (R^M - R^0) + \varepsilon_i$$

de là, on a : $E R_i = R_0 + \beta^i (E R^M - R^0)$

$$R^i = E R^i + \beta_i \underbrace{(R^M - R^0 - E(R^M - R^0))}_{F_1} + \varepsilon^i$$

$\beta_i = b_{i,1} \rightarrow$ modèle à un seul facteur

Rq 5 : $P(|\varepsilon^i| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} E(\varepsilon^i)^2 = \frac{1}{\delta^2} \operatorname{var} \varepsilon_i$

La proba que $\varepsilon_i \in [-\delta; \delta]$ est $\geq \underbrace{1 - \frac{1}{\delta} \operatorname{var} \varepsilon_i}_{\downarrow \text{ qd } \operatorname{var} \varepsilon^i \to 0}$

1

Rq 6 : ACP : analyse en composante principale.
Obj : sélectionner les facteurs prépondérants ; les autres sont expliqués par les prépondérants et donc les ajouter ne réduit pas la variance de l'erreur résiduelle de manière significative.
L'idée sous jacente :
je pars de facteurs $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_N$.
$\text{vect}(\tilde{F}_1, \dots, F_N) \simeq \text{vect}(F_1, \dots, F_K)$ (orthogonalisat°)
où $F_1, F_2, \dots, F_K$ facteurs principaux orthogonaux
où $F_1, F_2, \dots, F_K$ facteurs principaux orthogonaux.
$\Rightarrow \text{cov}(F_i, F_j) = 0 \Rightarrow \Sigma_F$ diagonale.
Et bien sur, chaque F_j est combinaison linéaire des facteurs initiaux.
• Il y'a plusieurs types de modèles factoriels

- <u>les modèles macro-économiques</u> :
Je me fixe les facteurs observables de l'économie comme des indices boursiers sectoriels, taux de change, d'inflat°, taux d'intérêt

- <u>les modèles fondamentaux</u> :
les facteurs proviennent du secteur d'activité d'où les actifs sont issues : taille de la société, taux de dividende, indicateur du secteur d'activité.

- <u>les modèles à facteurs implicites</u> :
les facteurs sont endogènes vous vous donnez une multitude de facteurs et vous essayez de devinez en même temps les sensibilités et les facteurs associés qui minimise la variance des résidus.

a) $\text{vect}(\hat{F_1}, \ldots, \hat{F_N}) = \text{vect}(\underbrace{F_1, \ldots, F_m}_{\text{orthogonaux}})$ (ACP)

b) Analyse factorielle pour récupérer les facteurs principaux

$$R_i - ER_i = \sum_j b_{i,j} F_j + \varepsilon_i$$

$$\text{cov}(R^i, F_k) = b_{i,k} \text{ var } F_k + 0$$

$$b_{i,k} = \frac{\text{cov}(R_i, F_k)}{\text{var } F_k}$$

$$\text{var } R^i = \sum_j (b_{i,j})^2 \text{ var } F_j + \text{var}(\varepsilon_i)$$

Si on a normalisé, ie var $F_j = 1$: var $(R_i) = \sum_j (b_{i,j})^2 + (\text{var } \varepsilon_i)$

On ne conserve que les principaux facteurs, ceux qui contribue le plus au risque systématique

exo : $R^i = ER^i + \sum_{j=1}^{k} b_{i,j} F_j + \varepsilon^i$

Soit un portefeuille de composition $x = (x_1, \ldots, x_d)$

Exprimer $R(x)$

Rq : $R^i = R(x)$ avec $x = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$

$$R(x) = \sum_{i=1}^{d} R_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left(ER^i + \sum_{j=1}^{k} b_{i,j} F_j + \varepsilon_i \right) x_i$$

$$= \sum \left(x_i ER^i + \sum b_{i,j} F_j x_i + \varepsilon_i x_i \right)$$

$$= \left(ER(x) + \underline{\qquad} + \varepsilon(x) \right)$$

$$= ER(x) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k} b_{i,j} F_j x_i + \varepsilon(x)$$

$$= ER(x) + \sum_{j=1}^{k} b_{x,j} F_j + \varepsilon(x)$$

$$b_{x,j} = \sum_{1}^{d} x_i b_{i,j} = x \cdot b_{\cdot,j}$$

$\Leftarrow$ i est fixe et on fait varier j.

Donner une expression de la variance :

$$\text{Var } R(x) = \left(\sum b_{x,j} \right)^2 \text{Var } F_j + \text{Var } \varepsilon(x)$$

Comme $\mathrm{cov}(\varepsilon(x), F_j)$

$$= \mathrm{cov}\left(\sum \varepsilon_i x_i, F_j\right)$$

$$= \sum x_i \cdot \underbrace{\mathrm{cov}(\varepsilon_i, F_j)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}\, R(x) = \mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{k} b_{x,j} F_j\right) + \mathrm{var}\, \varepsilon(x)$$

avec $b_x = (b_{x,1}, \dots, b_{x,k})$

$$= b_x \sum_F b_x' + x \sum_\varepsilon x'$$

<u>Rq</u> : Relat° fondamentale de l'APT :

En absence d'opportunités d'arbitrage, $\exists$ des coeffs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $\forall i = 1, \dots, d$:

$$\boxed{ER^i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{i,j}}$$

<u>Rq</u> : $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ ne dépendent que du marché de ce fait pour

$(b_{i,j})_{j=1}^{k}$ fixé $\Rightarrow ER^i$ fixé.

<u>exo</u> : Généraliser :

$$ER(x) = \left(\lambda_0 + \sum \lambda_j b_{i,j}\right) x$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left(\lambda_0 x_i + x_i \sum \lambda_j b_{i,j}\right)$$

$$= \lambda_0 (x) + \lambda_j (x) \sum \sum b_{i,j}$$

On pose $b_{x,j} = \sum x_i b_{i,j}$

car $\sum x_i = 1$

$$= \lambda_0 + \sum \lambda_j \quad b_{x,j}.$$

Se fixer $ER(x)$ ne donne qu'une relat° linéaire entre les sensibilités $b_{x,j}$.

$$ER(x) = m \iff \lambda_0 + \sum_{j=1}^{d} \lambda_j b_{x,j} = m$$

Le pb d'efficience s'écrit donc

$$\min \left(b_x \Sigma_F b_x' + x \Sigma_\varepsilon x' \right)$$

$$\text{sous} \begin{cases} x \mathbb{1}' = 1 \\ \lambda_0 + \sum_j \lambda_j b_{x,j} = m \end{cases}$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$$b_x = (b_{x,1}, \dots, b_{x,k}) = \left(\sum_{i=1}^{d} b_{i,1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{d} b_{i,k} x_i \right)$$

$$b_x = x B \ , \ B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,k}}$$

$$M = B \Sigma_F B' + \Sigma_\varepsilon$$

$$\min_x \underbrace{\left(x B \Sigma_F B' x' + x \Sigma_\varepsilon x' \right)}_{x M x'}$$

$$\text{sous } (C) \begin{cases} x \mathbb{1}' = 1 \\ \lambda_0 + \lambda B' x' = m \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \gamma_1, \gamma_2) = x M x' - \gamma_1 (x \mathbb{1}' - 1) - \gamma_2 (\lambda_0 + \lambda B' x' - m)$$

$$(KKT) \begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x^*, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ \gamma_1, \gamma_2 \geq 0 \\ \gamma_1 (x \mathbb{1}' - 1) = 0, \ \gamma_2 (\lambda_0 + \lambda B' x' - m) = 0 \end{cases}$$

M définit positive,

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, x_1, x_2) = 2 x M - \gamma_1 \mathbb{1} - \gamma_2 \lambda B' = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} (\gamma_1 \mathbb{1} + \gamma_2 \lambda B') M^{-1}}$$

$$x \mathbb{1}' = \frac{1}{2} (\gamma_1 \mathbb{1} + \gamma_2 \lambda B') M^{-1} \mathbb{1}' = 1$$

$$(e1) = \quad \gamma_1 \| \mathbb{1} \|_{M^{-1}} + \gamma_2 \langle \lambda B', \mathbb{1} \rangle_{M^{-1}} = 2$$

$$\lambda B' x' = m - \lambda_0 \iff x B \lambda' = m - \lambda_0$$

on passe à la transposé

Rq : transposé de $m - \lambda_0$ est $m - \lambda_0$ car + entre 2 nb

$$(\gamma_1 \mathbb{1} + \gamma_2 \lambda B') M^{-1} B \lambda' = 2 (m - \lambda_0)$$

$$(e2) \quad \gamma_1 \langle \mathbb{1}, B \lambda' \rangle_{M^{-1}} + \gamma_2 \| \lambda B' \|_{M^{-1}} = 2 (m - \lambda_0)$$

On a un SL avec 2 lignes (e1) et (e2) et on cherche les γ_1, γ_2.

Chapitre 5 : mesure de risque :

Soit X la valeur liquidative (du marché) des actifs financiers de la firme considérée à la fin d'une période $[0, T]$.
L'objectif est de déterminer à la date 0 une qt $\rho(X)$ déterministe (car définie en $t=0$) telle que $\rho(X) + X$ soit considérée comme acceptable par le régulateur.
Accord de Bâle pour les banques ou Solvency pour les assurances.

Déf : Une position Z sera dite acceptable si $\rho(Z) \leq 0$
$\rho(X)$ est le montant à mettre en réserve.

Déf : On dit que ρ est une mesure de risque monétaire.
a) ρ est décroissante : $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
b) ρ est invariante par translation :
Si $m \in \mathbb{R}$, $\rho(X+m) = \rho(X) - m$

on met (-) d'argent de côté.

Déf : On dit que ρ est convexe si $\forall \lambda \in [0;1]$,
$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$
(mixte avec 2 fonds), en diversifiant, on réduit le risque.
Une mesure de risque convexe favorise la diversification

Déf : On dit que ρ est positivement homogène si $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
$\forall \lambda \geq 0$. Si une boîte est λ fois + grande qu'une autre, elle devra mettre λ x fois + de thune de côté

est une VA

donne un nb

<u>Exemple</u> : Montrer que $\rho_{max}(X) = \max_{\omega \in \Omega} (-X(\omega))$ est une mesure de risque monétaire cohérente

- ρ_{max} est décroissante :

$$X \geq Y \Rightarrow X(\omega) \geq Y(\omega) \quad \forall \omega$$

$$-X(\omega) \leq -Y(\omega) \leq \max_{\omega \in \Omega} (-Y(\omega))$$

$$\Rightarrow \max_{\omega \in \Omega} (-X(\omega)) \leq \max_{\omega \in \Omega} (-Y(\omega))$$

$$\Rightarrow \rho_{max}(X) \leq \rho_{max}(Y)$$

- ρ est invariante par translation :

$m \in \mathbb{R}$, $\rho_{max}(X+m) = \max_{\omega \in \Omega} (-X(\omega) - m)$

$$= \max_{\omega \in \Omega} (-X(\omega)) - m$$

- ρ est positivement homogène :

$X \geq 0$

subtilité $\max = +/- \infty$

$\lambda = 0$, $\rho_{max}(\lambda X) = \rho_{max}(0) = 0$

$$= \lambda \rho_{max}(X) = \lambda \max_{\omega \in \Omega} (-X(\omega))$$

⚠ Une mesure de risque a son propre domaine de définit°, ici le Df est $\mathrm{dom}(\rho_{max}) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, P)$

$= \{X \mid |X| \leq C \ P\text{ps}\}$ pour une cst C

(rappel : $\|X\|_\infty = \inf\{C : |X| \leq C \ P.ps\}$

<u>intuition</u> : sens de $\rho_{max}(X) = \max(-X)$ X est df comme un "gain" net. Associé à la perte.

$L = -X$ est alors considéré comme une perte

<u>ex</u> : $X = -30 \Rightarrow L = 30$ est la perte

$\rho_{max}(X) = \max L$ (max des pertes)

Concrètement, on estime ρ_{max} en observant l'historique. Si possible (si on a un historique suffisament riche $\Leftrightarrow$ existe depuis longtemps) la méthode la plus générale pour estimer $\rho(X)$ c'est d'estimer la distribution de X, par exemple par des simulat° Monte-carlo.

Si par ex $X = \sum_{i=1}^{k} \beta_k F_k$ $\left(X = X_0 (1+R) \right.$

F_k sont des facteurs explicatif, $\left. X = X_0 (1 + \sum x_i R_i) \right)$

soit observé ou soit modélisé par une loi mathématique. (loi expo, normale)

- Quelles sont les positions Z acceptable pour ρ_{max} ? Z doit vérifier $\rho_{max}(Z) \leq 0$ ie $\max(-Z) \leq 0$.

$\Leftrightarrow -Z \leq 0$

$\Leftrightarrow Z \geq 0 \quad \forall \omega$

Rq : $\rho(X) + X$ est acceptable se traduit par $\rho(X + \rho(X)) \leq 0$ mais en fait, si ρ est monétaire : $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$

Par ex, $\rho_{max}(X) + X$ est acceptable signifie : $\rho_{max}(X) + X \geq 0$

$\rho_{max}(X) \geq -X$

ρ monétaire

<u>Exercice:</u> On note $\mathcal{A}_\rho = \{X : \rho(X) \leq 0\}$

Démontrer que $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$

. Soit m tel que $X + m \in \mathcal{A}_\rho$, ie

$\rho(X+m) \leq 0$, $\rho(X) - m \leq 0$

, $\rho(X) \leq m \quad \forall m \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho$

$\Rightarrow \rho(X) \leq \inf\{m : X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$

Or $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$? Oui car $\rho(X + \rho(X)) = 0$

$\Rightarrow$ ——— ≤ 0

$\Rightarrow \inf\{m : X + m \in \mathcal{A}_\rho\} \leq \rho(X)$

$= m\rho(X)$

$= \inf\{\ldots\}$

On peut définir les posit° acceptables à partir de mais réciproquement, à partir d'un ens. de posit° ~~cone~~ acceptable. Je peut build a measure of risk as being the k minimal a add to X afin de rende ma posit° acceptable.

Exemple fondamental : Value at risk :

Pour l'introduire, on a besoin de bien comprendre la not° d'inverse généralisée d'une fct de répartition :

Soit X une VA et sa FDR $F_X(x) = P(X \leq x)$

ex 1 : Soit X une VA prenant 3 valeurs x_i, $i = 1, 2, 3$ avec $0 < x_1 < x_2 < x_3$, $p_i = P(X = x_i)$.

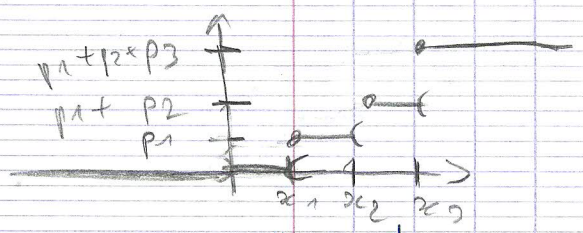
On pose $F_X^-(x) = \lim_{z \nearrow x} F_X(z)$

Déterminer $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$, si $x < x_1$

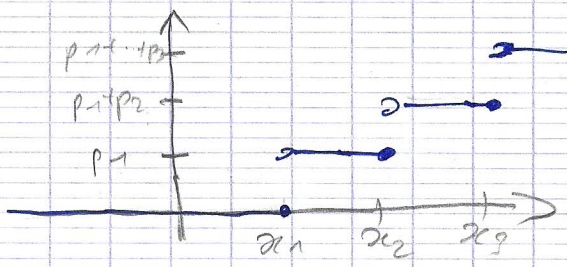
$= P(X = x_1) = p_1$ si $x \in [x_1 ; x_2[$

$= p_1 + p_2$ si $x \in [x_2 ; x_3[$

$= p_1 + p_2 + p_3 = 1$ si $x \in [x_3, \infty[$



continue à droite.



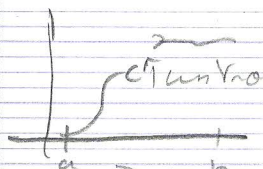
$F_X^-(x)$

continue à gauche

déf : quantile : On dit que $q \in \mathbb{R}$ est un t-quantile (ex : 40%, 20%)

$$F_X^-(q) \leq t \leq F_X(q)$$

Utile car si on a



On ne peut pas calculer easy de médiane

- Soit $Q(t)$ l'ensemble des t-quantiles, $t \in [0 ; 1]$
- Si $t = 0$, $F_X^{-1}(q) \leq 0 \iff q \in]-\infty ; x_1]$

  $F_X(q) \geq 0 \iff q \in]-\infty ; 0]$

  $Q(0) =]-\infty ; x_1]$
- Si $t \in]0 ; p_1]$, $F_X(q) \geq t \iff q \in [x_1 ; +\infty[$

  $F_X^-(q) \leq t \iff q \in]-\infty ; x_1]$

$\Rightarrow Q(t) = x_1$

- Si $r \in [p_1, p_1+p_2[$

$F_X^-(q) \leq r \iff q \leq x_2$

$F_X(q) \geq r$

<u>1er sous cas</u> : $r = p_1$: $F_X(q) \leq r \iff q \geq x_1$

$\Rightarrow Q(p_1) = [x_1 ; x_2]$

$r > p_1$, $F_X(q) \geq r \iff q \geq x_2$

$\Rightarrow Q(r) = \{x_2\}$

<u>2nd cas</u> : <u>$r = p_1 + p_2$</u> $\left.\begin{array}{l} F_X^-(q) \leq r \iff q \leq x_3 \\ F_X(q) \geq r \iff q \geq x_2 \end{array}\right\}$

$Q(p_1+p_2) = [x_2, x_3]$

$r \in]p_1+p_2, 1[$,

$\left.\begin{array}{l} F_X^-(q) \leq r \iff q \leq x_3 \\ F_X(q) \geq r \iff q \geq x_3 \end{array}\right\} Q(r) = \{x_3\}$

Soit l'inverse généralisée :

$F_X^{-1}(r) = \inf \{q : F_X(q) > r\}$

Exprimer $F_X^{-1}(r)$:

$r \in [0 ; p_1]$

$\{q : F_X(q) > r\} = [x_1 ; +\infty[\Rightarrow F_X^{-1}(r) = x_1$

$r \in [p_1 ; p_1+p_2]$

$- - - - - - - = [x_2 ; +\infty[\Rightarrow F_X^{-1}(r) = x_2$

$r \in [p_1+p_2, 1[$, $F_X^{-1}(r) = x_3$

<u>Vérifier</u> : $F_X^{-1}(r)$ est un r-quantile

On doit vérifier que :

$$F_X^-(F_X^{-1}(r)) \leq r \leq F_X(F_X^{-1}(r))$$

• $F_X^{-1}(r) = \inf\{q : F_X(x) > r\}$

$= \lim_n \searrow q_n$ avec $F_X(q^n) > r$

$\Rightarrow F_X(F_X^{-1}(r)) = F_X(\lim \searrow q_n)$

$= \lim_n F_X(q^n)$ car F_X continu à droite.

$\geq r$

• $F_X^-(F_X^{-1}(r)) = F_X^-(\lim \searrow q_n)$

$= F_X^{-+}(\lim \searrow q_n)$

$F_X^{-1}(r) = \inf\{q : F_X(q) > r\}$

$F_X^-(F_X^{-1}(r)) = \lim_{z \nearrow F_X^{-1}(r)} F_X(z)$ par déf de F_X^-.

$z < F_X^{-1}(r) \Rightarrow F_X(z) \leq r$ (car, si $F(z) > r$ donc $F_X^{-1}(r) \leq z$)

$\Rightarrow F_X^-(F_X^{-1}(r)) \leq r$

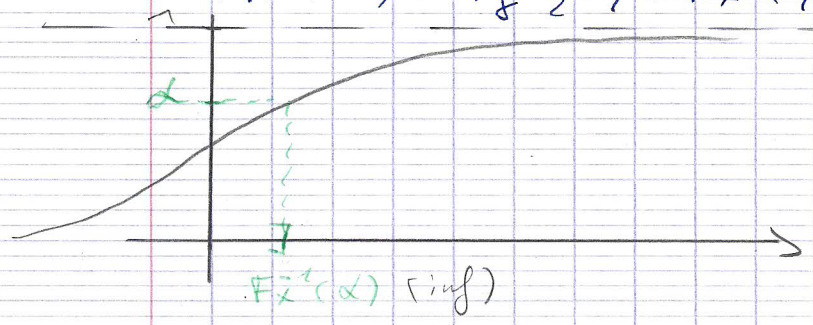
$F_X^{-1}(r)$ est un r-quantile

Déf: Value at risk d'ordre α

$$\boxed{VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha)}$$

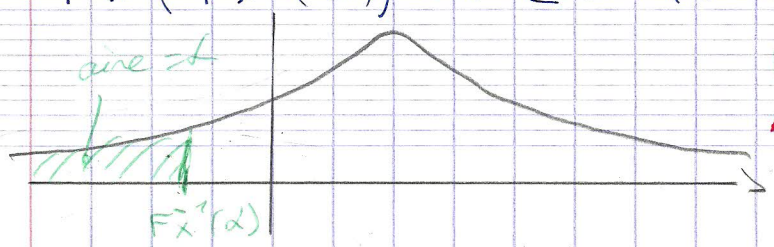
Cas d'une VA X tel que F_X soit continue et strict $\nearrow$

$F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{q : F_X(q) > \alpha\}$



$F_X^{-1}(\alpha)$ est ici la fct réciproque au sens usuel ie $F_X^{-1}(\alpha)$ est l'unique antécédent de α par F_X

$F_X(F_X^{-1}(\alpha)) = \alpha \Leftrightarrow P(X \leq F_X^{-1}(\alpha)) = \alpha$



$P(X \geq F_X^{-1}(\alpha)) = 1 - \alpha$

⚠ En général $P(X \geq F^{-1}(\alpha)) \geq 1 - \alpha$

$P(X - F_X^{-1}(\alpha) \geq 0) \geq 1 - \alpha$

$P(X + Var_\alpha(X) \geq 0) \geq 1 - \alpha$

Ici $\rho(X) = VaR_\alpha(X)$ est une mesure de risque monétaire.

$X \geq Y$, $Var_\alpha(X) \leq Var_\alpha(Y)$

$Var_\alpha(X + m) = Var_\alpha(X) - m$

$F_{\lambda X}^{-1}(\alpha) = \lambda F_X^{-1}(\alpha)$, $\forall \lambda \geq 0$

=> Seul défaut : $\rho(X) = Var_\alpha(X)$ n'est pas convexe

Cas classique $\alpha = 99\%, 95\%$

solut° convexe : Expected Short fall :

(VaR est une perte maximale acceptable)

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_u(X)\,du \geq VaR_\alpha(X)$$

C'est la moyenne des $VaR_\beta(X)$ pour $\beta \in [0;\alpha]$

(la partie en vert, page d'avant)