UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PLANO DE AULA – Nº 01

1 – Dados de Identificação:
Curso: Licenciatura em Matemática a Distância
Ano: 8º ano do Ensino Fundamental ou Ensino Médio
Data: 21/03/2023 – 23/03/2023 – 24/03/2023
Duração da aula: 5 períodos (250’)
Professor(a): Geilson de Almeida Soares

2 – Objeto do conhecimento:

O princípio multiplicativo da contagem. Resolver problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.

3 – Habilidades:

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação

do princípio multiplicativo.

4 – Desenvolvimento e procedimentos Metodológicos:

1º momento: Realizar uma roda de conversa sobre aplicações do princípio fundamental da contagem no cotidiano do aluno, perguntando-os:

O que vem em mente quando se ouve “princípio fundamental da contagem”?

Se eles conseguem relacionar o tema do conteúdo com alguma aplicação do dia a dia?

Fazendo um raio-x sobre os conhecimentos prévios que os mesmos possam ter sobre o conteúdo.

2º momento: Será apresentado no quadro o conceito do princípio fundamental da contagem conforme a Figura 1, no qual os alunos deverão copiar.

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Figura 1

Em seguida, será apresentado no quadro para os alunos copiarem outra forma de visualização dos pares ordenados, através do diagrama de árvore, conforme Figura 2:

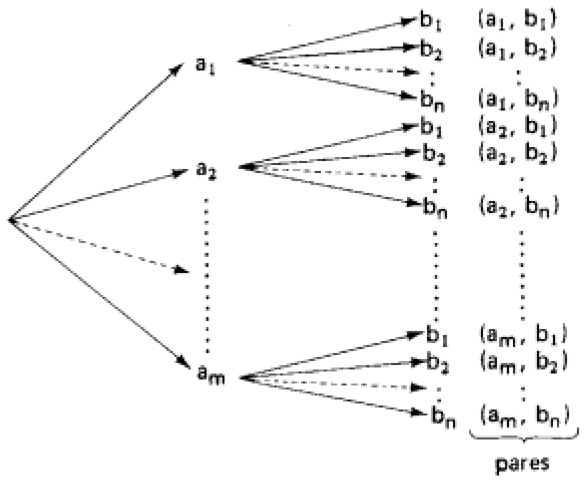


Figura 2

Será dito de forma oral a uma explicação para as formalizações do conteúdo conforme a Figura 1 e Figura 2:

*"O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo, é utilizado para encontrar o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas. Para isso, as etapas devem ser sucessivas e independentes. Se a primeira etapa do evento possui x possibilidades e a segunda etapa é constituída de y possibilidades, então existem x * y possibilidades. Portanto, o princípio fundamental da contagem é a multiplicação das opções dadas para determinar o total de possibilidades.*

Temos também o diagrama de árvore ou árvore de possibilidades é útil para analisar a estrutura de um problema e visualizar o número de combinações."

Logo após a explicação oral acima, os alunos serão questionado novamente:

Quando utilizar o princípio fundamental da contagem?

Dados um período de aproximada 5 min. para que todos alunos possam dar sua visão no que o princípio fundamental da contagem poderia ser utilizado, como algum exemplo da aplicação do conteúdo, o professor falará algumas explicações:

"Existem várias aplicações do princípio fundamental da contagem. Ele pode ser aplicado, por exemplo, em várias decisões da informática. Um exemplo são as senhas que exigem o uso de pelo menos um símbolo, o que faz com que o número de combinações possíveis seja muito maior, deixando o sistema mais seguro. Outra aplicação é no estudo das probabilidades. Para calculá-las, precisamos saber a quantidade de casos possíveis e a quantidade de casos favoráveis. A contagem dessa quantidade de casos possíveis e favoráveis pode ser feita por meio do princípio fundamental da contagem."

3º momento: Será realizado um exercícios como exemplo no quadro pelo professor, onde os alunos não devem copiar, somente prestar atenção na resolução do exercício exemplo e na explicação que será feita de forma oral, conforme abaixo:

Exemplo: Seja X, Y e Z três cidades, no qual existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a cidade Y e cinco rodovias que ligam a cidade Y com a cidade Z, conforme na figura (Figura 3):

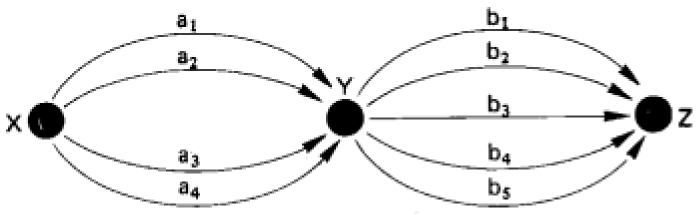


Figura 3

Partindo da cidade X e passando pela cidade Y, de quantas maneiras podemos chegar na cidade Z?

Resolução conforme na figura 4 abaixo:

A o conjunto das rodovias que ligam X com Y e
B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z:

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

Cada modo de efetuar a viagem de X até Z pode ser considerado como um par de estradas (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Logo, o número de pares ordenados (ou de modos de viajar de X até Z) é

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Figura 4

4º momento: Os exercícios abaixo serão passados no quadro para que os alunos copiem e façam a resolução individualmente.

EXERCÍCIOS:

1) Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito. Todos os pratos possuem arroz, e o cliente pode escolher uma combinação entre 3 possibilidades de carne (bovina, de frango e vegetariana), 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro) e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?
   Resposta:
   A o conjunto das possibilidades de carne
   A = {bovina, frango, vegetariana};
   B o conjunto das possibilidade de feijão
   B = {caldo, tropeiro};
   C o conjunto de possibilidades de bebidas
   C = {suco, refrigerante}
   *Possibilidade de carne * tipos de feijão * bebidas ⇒ 3 * 2 * 2 = 12*

2) Quantas senhas com 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,e 9?
Resposta: *9 * 8 * 7 * 6 = 3.024 possibilidades.*

3) De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?
Resposta: *Cada modo representa um tripla ordenada de pessoas. Logo, o resultado possível é: 3 * 2 * 1 = 6*

4) Lucia separou 4 blusas lisas e 2 bermudas em cima da cama para se vestir. Mas não tinha certeza de qual camiseta e bermuda utilizaria. Qual o número de trajes diferentes que Lucia poderá ter, utilizando uma camiseta e uma bermuda entre as que separam?
Resposta: *Total de blusas lisas * total de bermudas ⇒ 4 * 2 = 8*

5) Matheus brincava com um dado e notou que também possuía uma moeda em seu bolso. Como era um garoto muito esperto e amava matemática, decidiu descobrir quantas possibilidades de resultados distintos há ao lançar uma moeda e um dado. Qual foi o número corretamente encontrado por ele?
Resposta: *Fáceis totais do dado * fáceis totais da moeda ⇒ 6 * 2 = 12*

6) O kit de uma lanchonete é formado por suco, sanduíche e sobremesa. As opções de suco são laranja, morango ou uva; os sanduíches podem ser de frango ou boi e a sobremesa é chocolate ou bala. Quantos kits diferentes um cliente pode montar?
Resposta:
A o conjunto dos sucos
A = {laranja, morango, uva};
B o conjunto de sanduíche
B = {frango, boi};
C o conjunto da sobremesa
C = {chocolate, bala}
*A * B * C ⇒ 3 * 2 * 2 = 12.*

5º momento: Os alunos irão formar duplas e irem no quadro fazer a resolução de um dos exercícios.

6º momento: Cada aluno deve fazer no caderno o diagrama da árvore de pelo menos dois exercícios, no qual os exercícios a serem escolhido pelo aluno, é de livre escolha.

Segue abaixo os diagramas respostas de cada exercício:

Figura 5 - Exercício 1

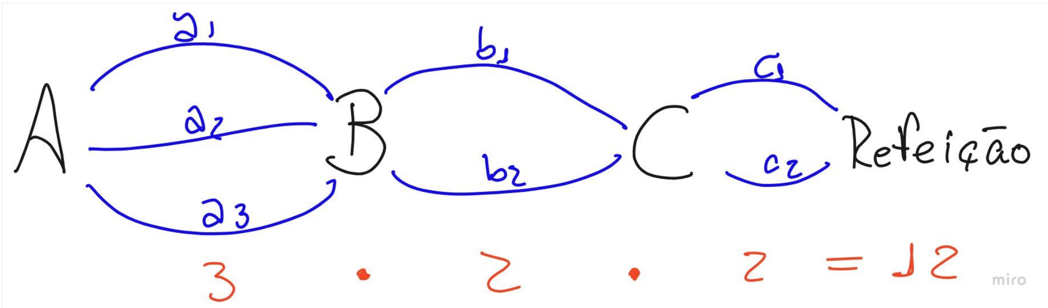


Figura 5

Figura 6 - Exercício 2

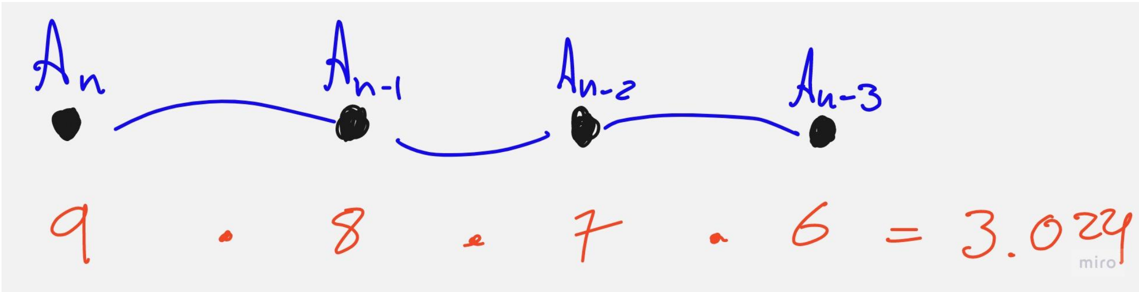


Figura 6

Figura 7 - Exercício 3

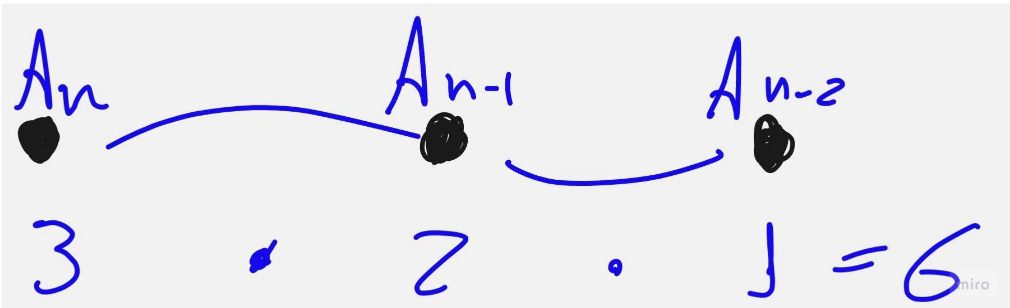


Figura 7

Figura 8 - Exercício 4

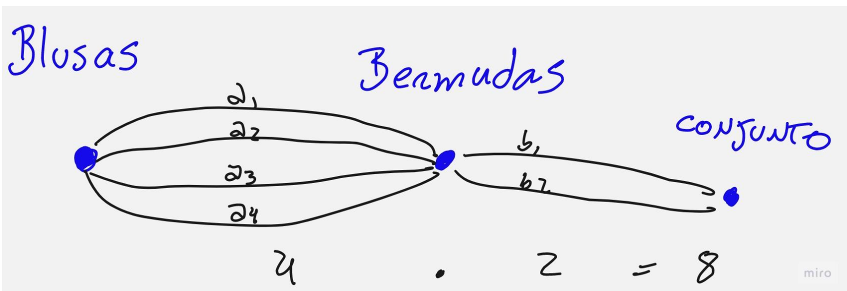


Figura 8

Figura 9 - Exercício 5

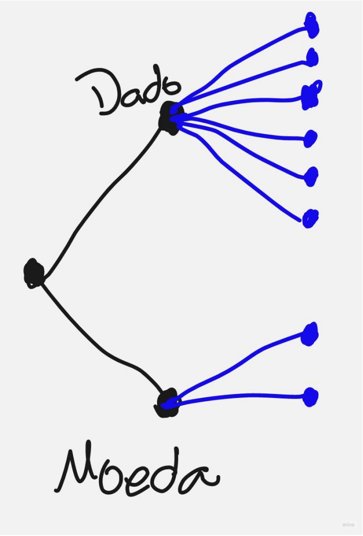


Figura 9

Figura 10 - Exercício 6

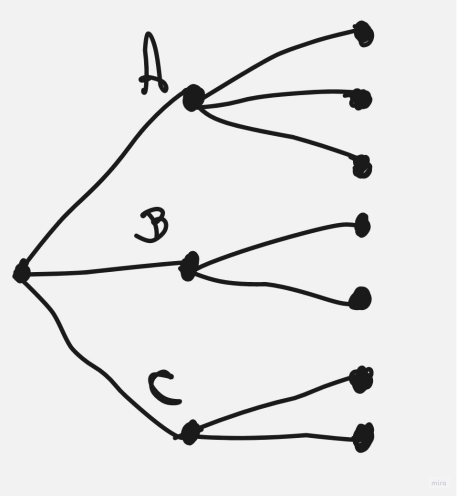


Figura 10

5 – Recursos:

Quadro-branco.

6 – Avaliação:

A aula será satisfatória se:

Os alunos participam da aula tanto indo ao quadro para resolver os exercícios, estando correto ou não, como resolvendo os exercícios em seus cadernos, assim como mostrando o interesse pela aula. Será bastante satisfatório caso os alunos tenham entendido o conteúdo relatando oralmente um exemplo prático da aplicação do conteúdo de princípio fundamental da contagem.

7 – Observações:

8 – Referências:

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 5 3ª Edição - Combinatória e Probabilidade. São Paulo: Editora Atual, 2004.

9 – Anexos:

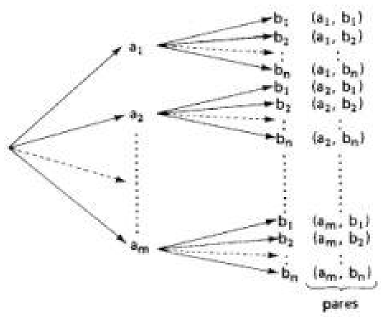
Matemática – 8º ano
Princípio Fundamental da Contagem
Semana 01 (20-Mar à 24-Mar)

Esse princípio conta com duas ou mais partes, geralmente duas. Vamos considerar os conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ $\forall\, m, n \in N$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados, onde m é a quantidade de elementos do conjunto A e n é a quantidade de elementos do conjuntos B.

Vamos fixar o primeiro elemento do conjunto A e variar o elemento do conjunto B. Quando terminamos todos os itens do conjunto B, fixamos o próximo elemento de A e variamos novamente em B, seguindo até o último elemento do conjunto A. Abaixo é mostrado como fazer:

$$\begin{array}{c} m \\ \text{linhas} \end{array} \begin{cases} (a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ \ldots,\ (a_1, b_n) \longrightarrow \text{n pares} \\ (a_2, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_2, b_n) \longrightarrow \text{n pares} \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (a_m, b_1),\ (a_m, b_2),\ \ldots,\ (a_m, b_n) \longrightarrow \text{n pares} \end{cases}$$

Uma outra forma de visualizar é pelo "diagrama da árvore", mostrado abaixo:



<u>Na prática:</u> Em uma lanchonete, olha para o cardápio e bate a vontade de saber quantas possibilidades de lanches podem ser feitas com a opções de comida e bebidas, e quer saber quais são essas opções que formam o par de comida e bebida.

Inicialmente, vamos separar todas as comidas no conjunto comida e bebidas no conjunto de bebidas e aplicar o princípio fundamental da contagem.

COMIDA = { *hambúrguer, cachorro-quente, pastel, pizza* }

BEBIDA = { *refrigerante, suco, água* }

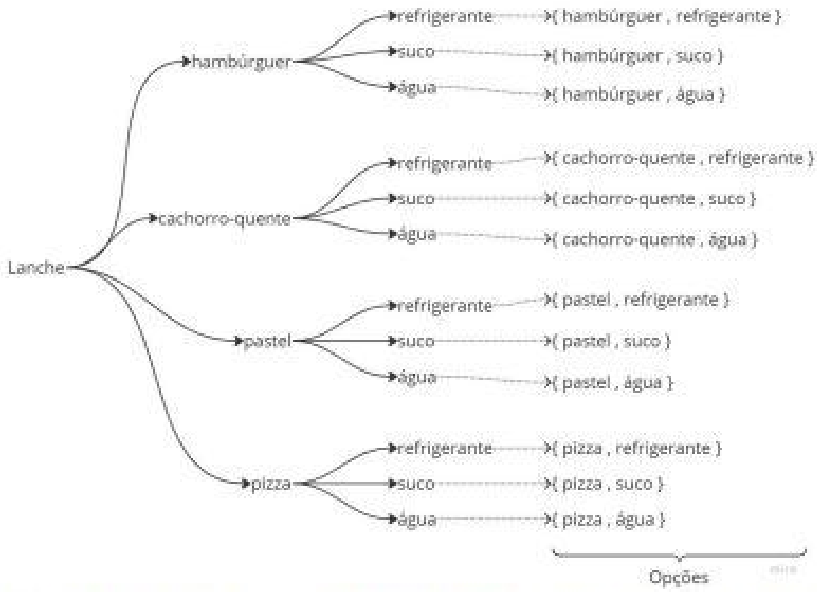
Note que o conjunto *COMIDA* tem 4 elementos e o conjunto *BEBIDA* tem 3 elementos, então basta multiplicar a quantidade dos elementos de cada conjunto entre si para sabermos a quantidade de opções de lanches que podemos pedir:

$$Elementos\ A \cdot Elementos\ B = Total\ de\ elementos$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

1

Anexo pág. 01



Outra forma bem comum de utilização do princípio da contagem, é para contar a ocorrência de um evento. Ou seja, quantas vezes algo pode acontecer.

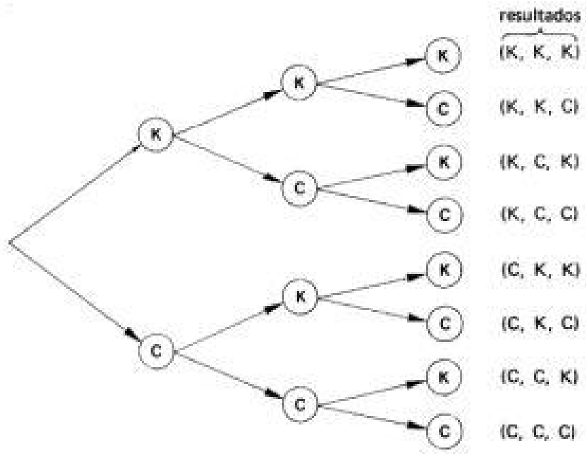
Exemplo: Uma moeda é jogada para cima 3 vezes. Qual o número de sequência possíveis de cara e coroa?

K é o resultado cara e C o resultado coroa.

a é a 1ª vez que vamos jogar a moeda, b a 2ª vez e c a 3ª vez. Ou seja, queremos o número de tripla ordenadas (*a, b, c*) onde $a \in \{K,\ C\}$, $b \in \{K,\ C\}$ e $c \in \{K,\ C\}$, ou seja, para cada vez que jogarmos a moeda pra cima, teremos duas possibilidades, cara ou coroa, então:

$$a \cdot b \cdot c = \ resultado\ possíveis \ \Rightarrow \ 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Podemos visualizar através de um diagrama da árvore:



2

Anexo pág. 02

Também podemos ter restrições no princípio fundamental da contagem. Um dos jeitos mais comuns da restrição aparecer, é que cada elemento é único, isso é, o elemento só pode aparecer uma única vez. Dessa forma, temos a seguinte formação:

Considere o conjunto A com m elementos, $\forall\, m \geq 2$. Então o número r é o tamanho da sequência formada com elementos distintos de A:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}.$$

<u>Na prática:</u> De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Cada modo corresponde a uma tripla ordenada de pessoas, ou seja, temos três pessoas. Se chamarmos A, B e C as pessoas, não podemos ter a tripla (A, A, B) porque a mesma pessoa não pode ocupar duas posições ao mesmo tempo, então ou a pessoa é a 1ª da fila, ou a 2ª ou a 3ª.

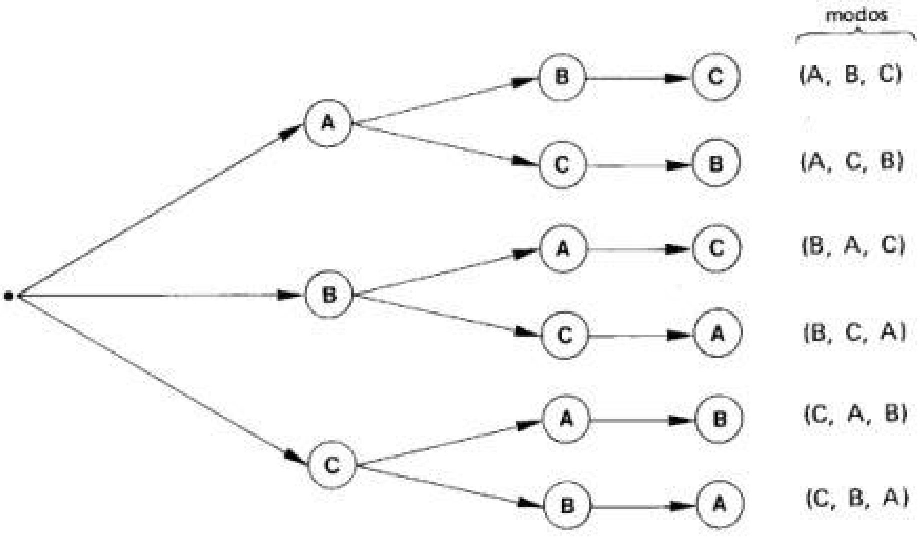
Então:

pra 1ª posição, temos 3 candidatos;
pra 2ª posição, temos 2 candidatos, porque 1 já está ocupando a 1ª posição;
e para 3ª posição, resta apenas 1 candidatos.

ou seja, $m = 3$

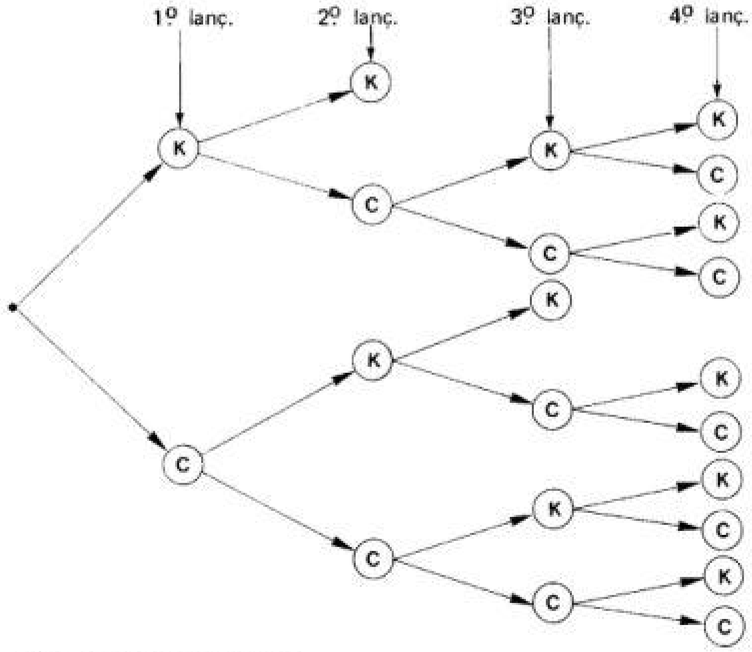
$$\begin{gathered} m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \\ 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) \\ 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 6 \end{gathered}$$

Temos 6 modos para que as pessoas fiquem em fila indiana.
Fazendo o diagrama de árvore, teremos:



Existem outras aplicações mais avançadas, segue um exemplo a fim de curiosidade:

Exemplo: Uma pessoa joga uma moeda pra cima até que ocorra duas caras seguidas, ou que quatro lançamentos sejam feitos. Quais resultados são possíveis?

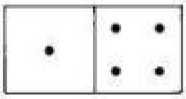
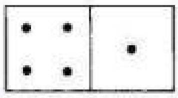


Os resultados possíveis são:

(K, K); (K, C, K, K); (K, C, K, C); (K, C, C, K); (K, C, C, C); (C, K, K); (C, K, C, K); (C, K, C, C); (C, C, K, K); (C, C, K, C); (C, C, C, K); (C, C, C, C);

Exercícios:

01. Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os números 1, 2, 3, 7, 8?
02. Temos um conjunto de 10 nomes e outro de 20 sobrenomes. Quantas pessoas podem receber um nome e sobrenome, com esses elementos?
03. Cinco moedas são jogadas para cima ao mesmo tempo. Quantas sequências possíveis de caras e coroas existem?
04. Quantos números telefônicos com 9 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9, sendo que o primeiro dígito é 9? Ou seja, nº telefone: 9 _ _ _ _ _ _ _ _ .
05. Quantos divisores positivos tem o número 3.888?
06. Cada peça do dominó tem 2 números. As peças são simétricas, de modo que o par de números não é ordenado.
    Exemplo:

 é o mesmo que 

Quantas peças diferentes podem ser formadas, se usarmos os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Boa sorte! Vocês conseguem.