



HOVEDOPPGAVE

Passivitetsbasert observer for robotstyring

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_p \\ & \mathbf{K} \\ & \mathbf{D} \quad \mathbf{K}_1 \\ & \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \quad \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d \quad \mathbf{M}(\mathbf{q}) \quad \tau^* \\ & 0 \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \end{aligned}$$

Geir Edvin Hovland

h

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

Trondheim
Desember 1993

f

HOVEDOPPGAVE

Eksamens 2. del 1993

Kandidatens navn: Geir Edvin Hovland

Fag: Teknisk kybernetikk

Oppgavens tittel (norsk): Passivitetsbasert observer for robotstyring.

Oppgavens tittel (engelsk): Passivity based observer for robot control.

Oppgavens tekst:

Bevegelsesligningene til en manipulator er ulineære, men har visse passivitetsegenskaper. Ved robotstyring uten hastighetsmåling er det interessant å benytte en hastighetsobserver. I denne oppgaven skal passivitetsbaserte observere studeres.

1. Gi en oversikt over metoder for bruk av observere i styring av stive manipulatorer.
2. Undersøk en passivitetsbasert observer basert på bruk av en virtuell manipulator koplet til den fysiske manipulatorene.
3. Vurder muligheten for adaptiv observerbasert styring.

Oppgaven gitt: 23. august 1993.

Besvarelsen leveres innen: 21. desember 1993.

Besvarelsen levert: 17. desember 1993.

Utført ved Institutt for Teknisk kybernetikk.

Trondheim, den 17. desember 1993

Olav Egeland
Faglærer

EIENDOMSRETT

Denne hovedoppgaven er Norges tekniske høgskoles eiendom, og kan av høgskolen benyttes til undervisning og forskningsformål. Arbeidet kan ikke utnyttes til andre formål, f.eks. økonomiske uten etter avtale mellom de interesserte parter.

ERKLÆRING

Jeg erklærer herved at hovedoppgaven er utført selvstendig, og i samsvar med eksamensreglementet ved Norges tekniske høgskole.

Trondheim, 17. desember 1993

Geir Edvin Hovland

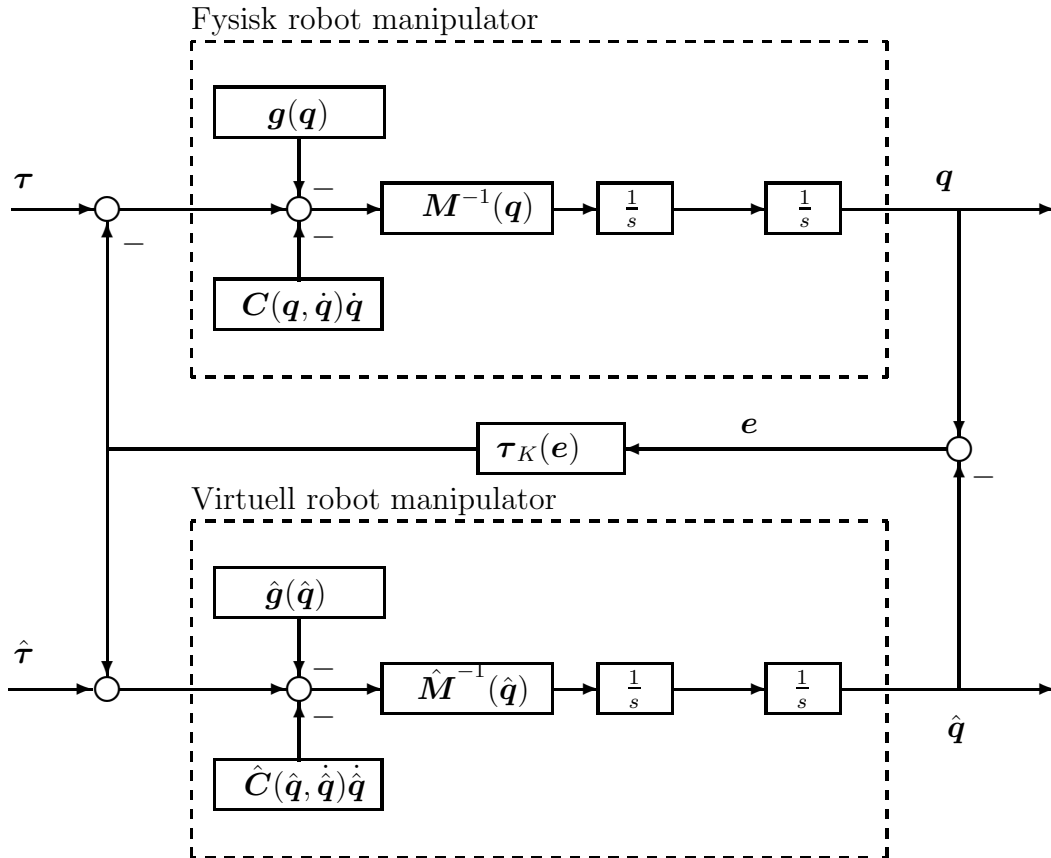
Forord

Denne hovedoppgaven ble utført ved Institutt for teknisk kybernetikk i perioden 23. august til 17. desember 1993. Jeg ønsker å takke min faglærer Professor Olav Egeland for faglige råd og støtte i hele denne perioden.

Jeg har valgt å føre utledninger og beviser i detalj, og dette har ført til at rapporten inneholder mange ligninger. Jeg håper likevel rapporten er oversiktlig da teoremer presenteres først, og det går klart fram hvor bevisene starter og slutter. For leseren som bare er interessert i resultatene skulle det derfor være lett å sløyfe de matematiske detaljene.

Sammendrag

I denne hovedoppgaven er en passiv hastighetsobserver studert. Vi har kommet fram til observeren i figur 0.1.



Figur 0.1: *Hastighetsobserver.*

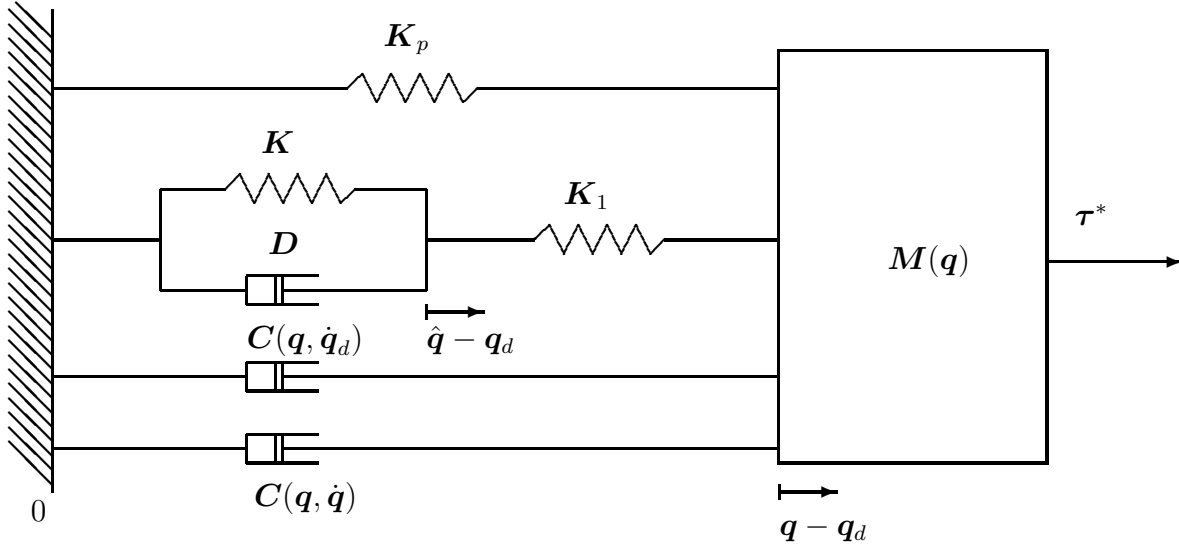
Observeren er en virtuell manipulator med sin egen dynamikk og sitt eget pådrag. De to manipulatorne er koblet sammen med fjærer. Hovedideen er nå å bruke en PD-regulator på den virtuelle manipulatoren og en P-regulator på den fysiske manipulatoren. Dette er mulig da vi kjenner hastigheten til den virtuelle manipulatoren mens vi bare kjenner posisjonen til den fysiske manipulatoren. I tillegg til disse regulatorne, brukes en foroverkobling på begge manipulatorne.

Siden vi ikke kjenner hastigheten til den fysiske manipulatoren, kan ikke koriolis og sentripetal kreftene (eller momentene) kanselleres av foroverkoblingen. For den virtuelle manipulatoren derimot, kjenner vi hastigheten. Foroverkoblingen for den virtuelle manipulatoren kan derfor velges slik at dynamikken

kanselleres. Dersom dette gjøres, og foroverkoblingen for den fysiske manipulatoren velges

$$\tau_F = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q) \quad (0.1)$$

da kan totalsystemet med fysisk manipulator, observer, foroverkoblinger og tilbakekoblinger illustreres som i figur 0.2.



Figur 0.2: Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator. Fjærene og demperene er tegnet lineære for enkelhets skyld. Legg merke til at figuren illustrerer et multivariabelt system. Legg også merke til at koriolis-leddene er tegnet som tids-varierende dempere, som kan bli negative. Kraften τ^* velges som en funksjon av den estimerte hastigheten, og blir en slags derivatvirkning på den fysiske manipulatoren.

Den mekaniske ekvivalenten som gir hastigheten $\dot{q} - \dot{q}_d$ gjenkjenner vi som en begrenset derivatvirkning. På grunn av dette har denne reguleringsstrukturen gode støyegenskaper, dvs. innvirkningen i en eventuell høyfrekvent målestøy i posisjonen q vil ha liten innvirkning på hastighetsestimaten \dot{q} .

Dersom total-systemet i figur 0.2 skal være passivt, må dempeleddet $C(q, \dot{q}_d)$ være et passivt element. Det er fremdeles et uløst problem å vise dette.

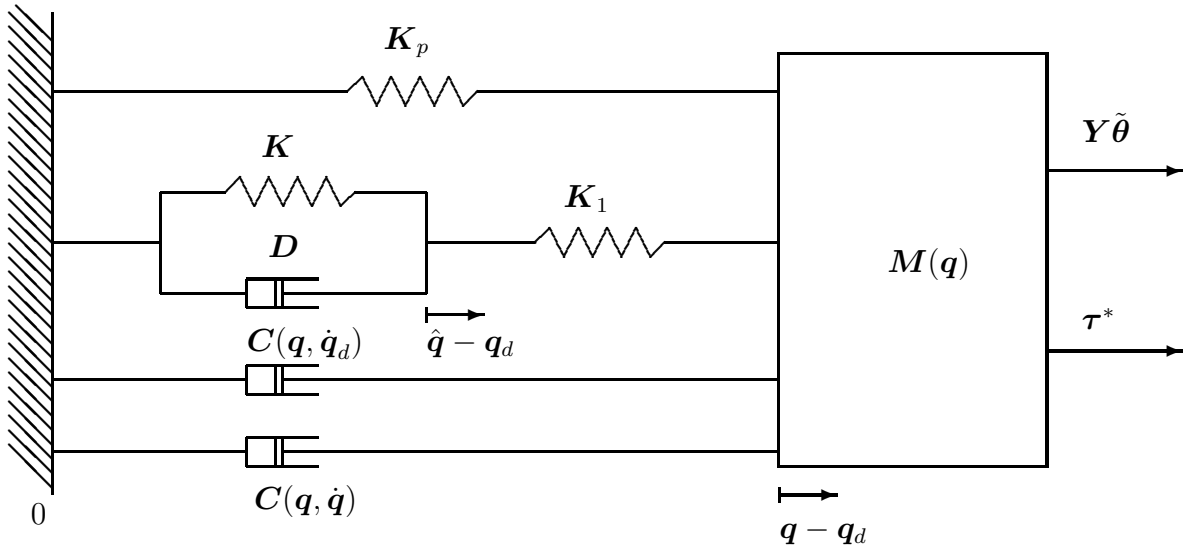
Det andre tilfellet som studeres er at parameterene i systemet er ukjente. Observeren velges som før, og pådraget til den virtuelle manipulatoren kansellerer dynamikken til den virtuelle manipulatoren. Foroverkoblingen til den fysiske manipulatoren derimot, kan ikke velges som før. Nå får vi

$$\tau_F = \hat{M}(q)\ddot{q}_d + \hat{C}(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \hat{g}(q) \quad (0.2)$$

der $\hat{M}(q)$, $\hat{C}(q, \dot{q}_d)$ og $\hat{g}(q)$ er de estimerte system-matrisene. For dette systemet blir den mekaniske ekvivalenten som vist i figur 0.3. Matrisen Y er en regressor-matrise og $\tilde{\theta}$ er differensen mellom estimerte parametere og virkelige parametere. Adapsjonsloven velges slik at kraften $Y\tilde{\theta}$ er begrenset, og dermed kan det vises at tilstandene i systemet (dvs. hastigheter og posisjoner) er begrenset.

Originalitet

Hva er så nytt med denne løsningen i forhold til de eksisterende løsningene basert på hastighetsobservere? Når det gjelder stabilitet, så finnes det allerede løsninger som er lokalt asymptotisk stabile



Figur 0.3: *Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator når system-parameterene er ukjente.*

når man kjenner system-parameterene. Vi har altså ikke oppnådd et bedre resultat når det gjelder stabilitetsegenskaper.

Fordelen med å bruke løsningen presentert i denne hovedoppgaven, er støyegenskapene. På dette området er løsningen i denne hovedoppgaven bedre enn eksisterende løsninger, f.eks. løsningene av [Nicosia og Tomei, 1990] og [Berghuis, 1993]. Med regulator/observer-strukturen presentert her vil høyfrekvent målestøy bli dempet i hastighetsestimatet. Det samme gjelder når parameterene i systemet er ukjente. Ved å velge adaptasjonsloven som en funksjon av den virtuelle manipulatorens posisjon i stedet for den fysiske manipulatorens posisjon, kan parameterestimatene gjøres lite følsomme for målestøy.

Grunnen til de gode støyegenskapene er at hastighetsestimatet er fremkommet ved en høypass-filtrering av posisjonsmålingen, dvs. først lavpass-filtreres målingen og deretter deriveres signalet. Lavpass-filteret vil fjerne høyfrekvente komponenter.

Notasjon

\mathbf{A} : Stor bokstav med uthevet skrift brukes **kun** for matriser.

\mathbf{a} : Liten bokstav med uthevet skrift brukes **kun** for vektorer.

k, K : Store og små bokstaver uten uthevet skrift brukes for monovariabel størrelser, f.eks. skalarer eller skalare funksjoner.

(\cdot) : Vanlige parenteser brukes for å angi parametere. F.eks. $\sin(x)$ betyr at x er en parameter til funksjonen $\sin(\cdot)$.

$[\cdot], \{\cdot\}$: Disse parentesene brukes for å angi multiplikasjon. F.eks. $[a + b]c$ betyr at c multipliseres med summen $a + b$.

\mathbb{R} : Brukes for mengden av de reelle tall.

\mathbb{R}^+ : Brukes for mengden av positive reelle tall.

\mathcal{A} : Stor bokstav med kaligrafisk skrift brukes for andre mengder.

\in : $x \in \mathcal{A}$ betyr at størrelsen x er med i mengden \mathcal{A} .

\forall : For alle. $\forall t > 0$ betyr “for alle t større enn null.”

∞ : Uendelig.

\mathbf{q} : Brukes for de leddvariable i en robot-manipulator.

$\dot{\mathbf{q}}$: Brukes for å angi tids-derivasjon, dvs. $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\mathbf{q}$.

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$: En manipulators massematrise. Vektoren \mathbf{q} er en parameter.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: En matrise som beskriver koriolis og sentripetal krefter og momenter. Matrisen har to parametere, vektorene \mathbf{q} og $\dot{\mathbf{q}}$.

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$: En vektor som beskriver tyngdekraftene. Vektoren \mathbf{q} er en parameter.

$\boldsymbol{\tau}$: En vektor som beskriver krefter og momenter.

$\boldsymbol{\theta}$: En vektor som beskriver parameterene i de dynamiske bevegelsesligningene for en robot manipulator.

\mathbf{Y} : En manipulators regressormatrise.

■ : Brukes for å angi slutten på et bevis.

□ : Brukes for å angi slutten på definisjoner, eksempler etc.

\triangleq : Definisjon.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	ii
Notasjon	v
1 Innledning	1
2 Passivitetsteori	2
2.1 Innledning	2
2.2 Definisjoner	2
3 Lyapunovteori	7
3.1 Innledning	7
3.2 Definisjoner	7
3.3 Lyapunov stabilitet for autonome systemer	8
3.4 Ikke-autonome systemer	9
3.5 Begrenset tilstandsvektor	12
4 Robot dynamikk	14
4.1 Innledning	14
4.2 Bevegelsesligninger	14
4.3 Matrise egenskaper	18
4.4 Passivitetsegenskaper	21
4.5 Linearitet i parameterene	22
5 Bruk av hastighetsobservere i robotstyring	23
5.1 Innledning	23
5.2 Metoder for bruk av hastighetsobservere	23

5.2.1	Pseudolinearisering	23
5.2.2	Variabel-struktur systemer	24
5.2.3	Passiv observer/regulator	25
5.2.4	Generell ulineær observer	25
5.3	Observer-baserte sett-punkts regulatorer	25
5.3.1	Observer av [Ailon og Ortega, 1992]	26
5.3.2	Observer av [Kelly og Ortega, 1993]	29
5.4	Observer-baserte regulatorer for følgende	32
5.4.1	Observer av [Nicosia og Tomei, 1990]	32
5.4.2	Observer av [Berghuis, 1993]	37
5.5	Støybetraktninger	43
6	Observer basert på virtuell manipulator	44
6.1	Innledning	44
6.2	Mekanisk ekvivalent	44
6.3	Passivitetsegenskaper	45
7	Observerbasert regulator for følgende av varierende referanse	48
7.1	Innledning	48
7.2	Regulator	48
7.3	Stabilitetsbevis	52
7.4	Støybetraktninger	60
8	Adaptiv observerbasert styring	62
8.1	Innledning	62
8.2	Observerbasert regulator med adaptasjon	62
8.3	Stabilitetsanalyse	63
8.4	Støybetraktninger	67
8.5	Sammenligning mot eksisterende løsninger	68
9	Diskusjon og forslag til videre arbeid	71
9.1	Diskusjon	71
9.2	Forslag til videre arbeid	71
	Bibliografi	72
A	Lineær algebra	i

A.1	Innledning	i
A.2	Definisjoner	i
B	Betingelser for Matrosovs teorem	iv
C	Matlab program	vi
C.1	Observerbasert regulator uten adapsjon	vi
C.2	Observerbasert regulator med adapsjon	viii

Figurer

0.1	<i>Hastighetsobserver.</i>	ii
0.2	<i>Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator. Fjærene og demperene er tegnet lineære for enkelhets skyld. Legg merke til at figuren illustrerer et multivariabelt system. Legg også merke til at koriolis-leddene er tegnet som tidsvarierende dempere, som kan bli negative. Kraften τ^* velges som en funksjon av den estimerte hastigheten, og blir en slags derivatvirkning på den fysiske manipulatorens.</i>	iii
0.3	<i>Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator når systemparameterene er ukjente.</i>	iv
2.1	<i>Passivt system bestående av en fjær.</i>	2
2.2	<i>Strengt passivt system bestående av en fjær og en demper.</i>	3
2.3	<i>En parallell kobling av to passive systemer.</i>	4
2.4	<i>Passivitet vist ved induksjon.</i>	5
2.5	<i>En kombinasjon av to passive systemer med tilbakekobling.</i>	5
2.6	<i>En seriekobling av to passive sub-systemer.</i>	6
3.1	<i>Illustrasjon av stabilt og ustabilt likevektspunkt. \mathcal{B}_r er en ball med radius r, \mathcal{B}_R er en ball med radius R. Det ene tilfellet er stabilt, det andre ustabilt.</i>	8
4.1	<i>Albue manipulator som opererer i det horisontale plan.</i>	16
5.1	<i>Passiv manipulator-dynamikk med passiv regulator/observer struktur.</i>	25
5.2	<i>Observer-struktur av [Nicosia og Tomei, 1990]</i>	26
5.3	<i>Mekanisk ekvivalent av den observer-baserte sett-punkts regulatoren presentert av [Ailon og Ortega, 1992]. (Illustrert med lineære fjærer og dempere for enkelhets skyld.) Merk at figuren illustrerer et multivariabelt system. \mathbf{I} er enhetsmatrisen.</i>	27
5.4	<i>Mekanisk ekvivalent for den observer-baserte sett-punkts regulatoren av [Kelly og Ortega, 1993].</i>	29
5.5	<i>Mekanisk ekvivalent for den observer-baserte sett-punkts regulatoren av [Kelly og Ortega, 1993]. Merk at figuren illustrerer et multivariabelt system.</i>	31
5.6	<i>Observer-struktur av [Berghuis, 1993]</i>	37
5.7	<i>Passivitetsbetraktning av observerstrukturen.</i>	40

5.8	Observer-struktur av [Berghuis, 1993] for bruk med regulator.	41
6.2	Mekanisk ekvivalent for den passive sammenkoblingen mellom fysisk manipulator (\mathbf{q}) og virtuell manipulator ($\hat{\mathbf{q}}$) for leddvariablene. (Illustrert med en lineær fjær for enkelhets skyld, leddene kan gjerne være rotasjonsledd.) Dersom matrisen \mathbf{K}_1 er diagonal, er det en fjær for hver leddvariabel.	44
6.1	Hastighetsobserver basert på en virtuell manipulator. Den fysiske manipulatorens og den virtuelle manipulatorens er koblet sammen med et passivt element, gitt av $\tau_K(e)$. Vi ser at den virtuelle manipulatorens ikke trenger å ha samme dynamikk som den fysiske manipulatorens.	45
6.3	To sammenkoblede manipulatorer.	45
7.1	Regulator basert på observer (virtuell manipulator). Vi har PD-regulator på den virtuelle manipulatorens og P-regulator på den fysiske manipulatorens. De to manipulatorene er sammenkoblet med fjærer K_1 . Merk at $\dot{\mathbf{q}}$ ikke er en måling, men figuren er tegnet på denne måten for å illustrere passivitets-egenskapene, se senere i kapittelet.	49
7.2	Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator. Fjærene og demperene er tegnet lineære for enkelhets skyld. Legg merke til at figuren illustrerer et multivariabelt system. Legg også merke til at koriolis-leddene er tegnet som tidsvarierende dempere, som kan bli negative.	50
7.3	To passive sub-systemer der det ene er i tilbakekoblingen.	51
7.4	Mekanisk ekvivalent dersom referansen er konstant. For dette systemet kan global asymptotisk stabilitet vises på samme måte som i [Kelly og Ortega, 1993].	52
7.5	Mekanisk ekvivalent for systemet hvor lokal stabilitet skal vises.	53
7.6	Følgefeilen med varierende referanse.	60
7.7	Følgefeilen med varierende referanse og målestøy.	61
8.1	Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator når parameterene i manipulatorens bevegelsesligninger er ukjente.	63
8.2	Følgefeil med adaptasjon.	68
8.3	Parameterestimatene.	69
8.4	Følgefeil med adaptasjon og støy i posisjonsmålingen.	69
8.5	Parameterestimatene med støy i posisjonsmålingen.	70

Kapittel 1

Innledning

Tradisjonelle regulatorer for robotstyring benytter både posisjonsmålinger og hastighetsmålinger for hvert ledd i en robot. Selv om posisjonsmålingene ofte er nøyaktige, er hastighetsmålingene (f.eks. fra tachometere) ofte unøyaktige på grunn av målestøy. Dette kan skyldes blant annet diskontinuiteter i det magnetiske statorfeltet til tachometere, særlig ved lave hastigheter. På grunn av denne støyen er det interessant å studere regulatorer som ikke benytter seg av hastighetsmålingene. En annen grunn for å utelate tachometere, er at man kan spare mye i kostnader, volum og vekt ved selve konstruksjonen av robot manipulatorer, [Berghuis, 1993].

Ved konstruksjon av regulatorer som ikke benytter seg av hastighetsmålinger, må man lage et estimat av hastigheten basert på posisjonsmålingene. En slik hastighetsestimator kalles observer eller observator. Den enkleste måten å få et hastighetsestimat på er ved en første ordens numerisk derivasjon av posisjonsmålingen. Denne løsningen har en stor ulempe, nemlig at selv om posisjonsmålingen ofte er nøyaktig, så vil en liten målestøy gi store utslag i hastighetsestimatet.

I denne hovedoppgaven skal en passiv observerstruktur studeres. Passive systemer kan illustreres med mekaniske ekvivalenter som fjærer, masser og dempere, og slike systemer har ofte gunstige stabilitetsegenskaper. Målet med å bruke en passiv observerstruktur er å oppnå gode stabilitetsegenskaper samtidig som hastighetsestimatet er lite påvirket av støy i posisjonsmålingen.

Det finnes allerede løsninger på dette problemet, og i kapittel 5 gis en oversikt over disse. Enkelte av løsningene studeres mer i detalj, og disse skilles i to kategorier, sett-punkts regulatorer og regulatorer for følging av en varierende referanse. For sett-punkts regulatorer skal vi se at det finnes løsninger som er globalt stabile og som har meget gode støyegenskaper. For regulatorer for følging av varierende referanser derimot, har ikke de eksisterende løsninger de samme gode egenskapene. For det første er de bare lokalt stabile og for det andre så er de følsomme overfor støy i posisjonsmålingen. Det finnes også lokalt stabile regulatorer for følging av varierende referanse basert på variabel-struktur systemer. Ulempen med disse systemene er, som vi skal se, at de selv genererer støy. (eng. chattering.)

I praksis kjenner man ikke en robot manipulator sin dynamiske modell perfekt. Man kjenner som regel strukturen på systemet, mens parameterene så som masser og treghetsmomenter ofte er ukjente. Det kan også tenkes at robot manipulatoren skal plukke opp gjenstander med ukjente masser. I slike tilfeller må man i tillegg til å estimere hastigheten til manipulatoren også estimere de ukjente parameterene i den dynamiske modellen. I kapittel 8 skal en regulator for dette tilfellet studeres. Målet er også her å oppnå gode stabilitetsegenskaper og god støyundertrykkelse både i hastighetsestimatet og parameterestimatene.

I kapittel 2 presenteres grunnleggende passivitetsteori, i kapittel 3 presenteres grunnleggende stabilitetsteori basert på Lyapunovteori og i kapittel 4 presenteres teori for å finne de dynamiske ligningene for en robot manipulator, samt en del interessante egenskaper ved disse ligningene.

Kapittel 2

Passivitetsteori

2.1 Innledning

Dette kapitlet inneholder den nødvendige bakgrunn i passivitetsteori. Dette inkluderer **passivitet**, **streng passivitet** og **y-streng passivitet** for generelle ulineære systemer. Passivitet er også vist for sammenkoblede passive systemer. Teorien er hentet fra [Egeland, 1993, Kapittel 5].

2.2 Definisjoner

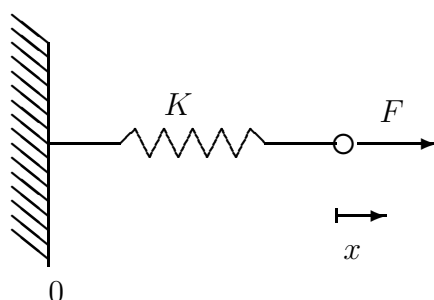
Definisjon 2.1 *Et system med pådragsvektor $\mathbf{u}(t)$ og målevektor $\mathbf{y}(t)$ er **passivt** dersom det eksisterer en konstant β slik at*

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \geq \beta \quad \forall \mathbf{u} \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.1)$$

der $\dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y}$.

Konstanten β er relatert til systemets initielle energi og integralet er energien inn på systemet.

Eksempel 2.1 *Denne definisjonen illustreres med et eksempel. Systemet som studeres består av en fjær koblet til en vegg i den ene enden og til en kraft F i den andre enden, som vist i figur 2.1.*



Figur 2.1: Passivt system bestående av en fjær.

Kraften F på fjæren er gitt av

$$F = Kx \quad (2.2)$$

Systemet med pådrag F og måling \dot{x} er passivt.

$$\int_0^T F \dot{x} dt = \int_0^T Kx \dot{x} dt = \frac{1}{2}Kx^2(T) - \frac{1}{2}Kx^2(0) \geq -\frac{1}{2}Kx^2(0) = \beta \quad (2.3)$$

Fra dette uttrykket ser vi at dersom den initielle energien i fjæren er lik null, så er $\beta = 0$. Fysisk betyr dette at det ikke kan tas energi ut av systemet. Energien inn på systemet er positiv eller null dersom $\beta = 0$. \square

Definisjon 2.2 Et system med pådragsvektor $\mathbf{u}(t)$ og målevektor $\mathbf{y}(t)$ er **strengt passivt** hvis det eksisterer en konstant β og en konstant $\delta > 0$ slik at

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \geq \beta + \delta \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \quad \forall \mathbf{u} \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.4)$$

Ofte er det siste leddet i ligning 2.4 på formen $\int_0^T \left\{ \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}_\delta \mathbf{u}(t) \right\} dt$, der \mathbf{K}_δ er en symmetrisk positiv definit matrise. δ kan da velges mindre eller lik minste egenverdi til \mathbf{K}_δ , som er positiv når \mathbf{K}_δ er positiv definit.

$$0 < \delta \leq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\delta) \quad \text{dersom } \mathbf{K}_\delta \text{ positiv definit.} \quad (2.5)$$

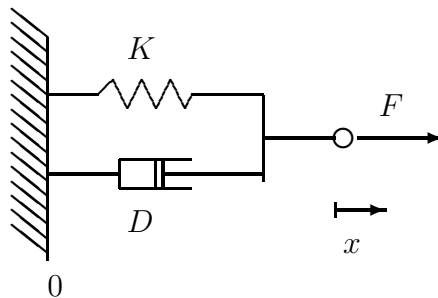
Dette kan vises med Rayleighs prinsipp, se teorem A.1.

Definisjon 2.3 Et system med pådragsvektor $\mathbf{u}(t)$ og målevektor $\mathbf{y}(t)$ er **y-strengt passivt** hvis det eksisterer en konstant β og en konstant $\delta > 0$ slik at

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \geq \beta + \delta \int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \quad \forall \mathbf{u} \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.6)$$

Hvis det siste leddet i ligning 2.6 er på formen $\int_0^T \left\{ \mathbf{y}^T(t) \mathbf{K}_\delta \mathbf{y}(t) \right\} dt$, så kan δ velges mindre eller lik den minste egenverdien til \mathbf{K}_δ som i ligning 2.5.

Eksempel 2.2 Systemet i figur 2.2 består av en fjær og en demper koblet til en vegg i den ene enden og en kraft F i den andre enden.



Figur 2.2: Strengt passivt system bestående av en fjær og en demper.

Kraften F på fjæren og demperen er gitt av

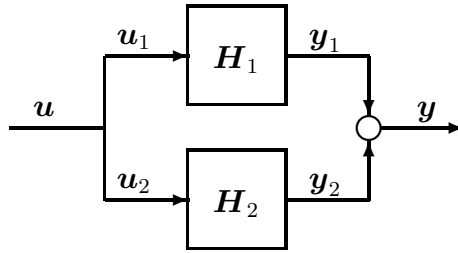
$$F = Kx + D\dot{x} \quad (2.7)$$

Systemet med pådrag F og måling \dot{x} er streng passivt, dvs.

$$\begin{aligned} \int_0^T F \dot{x} dt &= \int_0^T Kx\dot{x} + D\dot{x}^2 dt \\ &= \frac{1}{2}K[x^2(T) - x^2(0)] + D \int_0^T \dot{x}^2 dt \\ &\geq -\frac{1}{2}Kx^2(0) + D \int_0^T \dot{x}^2 dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

I følge definisjon 2.3, så er systemet y -strengt passivt. Vi ser at streng passivitet innebærer at det finnes element som dissiperer energi i systemet. \square

Teorem 2.1 En parallell kobling av to passive systemer, se figur 2.3, er passiv.



Figur 2.3: En parallell kobling av to passive systemer.

Bevis: De to sub-systemene er passive eller strengt-passive, dvs. fra definisjon 2.2

$$\int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt \geq \beta_1 + \delta_1 \int_0^T \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt \quad \forall \mathbf{u}_1 \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\int_0^T \mathbf{y}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \geq \beta_2 + \delta_2 \int_0^T \mathbf{u}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \quad \forall \mathbf{u}_2 \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.10)$$

der $\delta_1 \geq 0$ og $\delta_2 \geq 0$. Pådrag og måling av total systemet er gitt av ligningene

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \quad (2.11)$$

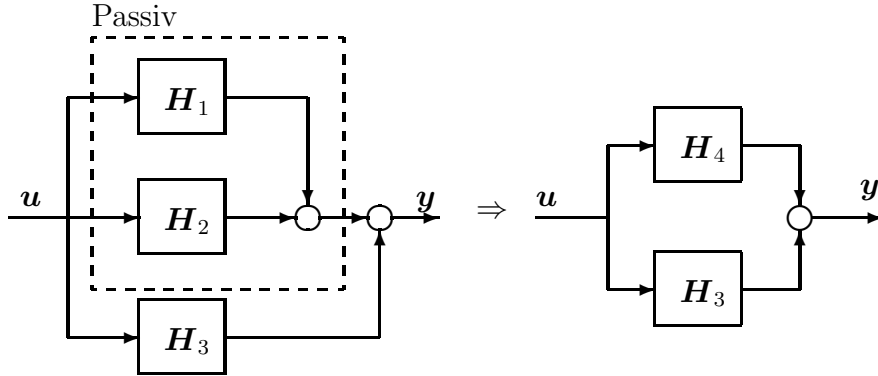
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) \quad (2.12)$$

Dette gir for total systemet

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_T &= \int_0^T [\mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)]^T \mathbf{u}(t) dt \\ &= \int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \int_0^T \mathbf{y}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \\ &\geq \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 \int_0^T \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \delta_2 \int_0^T \mathbf{u}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \quad \forall \mathbf{u} \text{ og } \forall T \geq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Total systemet er **passivt** og i tillegg **strengt passivt** som definert i definisjon 2.2 hvis $\delta_1 > 0$ eller $\delta_2 > 0$. \blacksquare

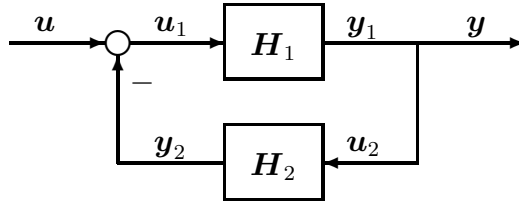
Korollar 2.1 Ved induksjon er det mulig å vise at alle kombinasjoner av parallelle passive systemer er passiv. I figur 2.4 er H_4 det passive systemet bestående av parallell koblingen av H_1 og H_2 . Enhver



Figur 2.4: Passivitet vist ved induksjon.

parallell kombinasjon av to passive systemer kan erstattes av et passivt system. Dette gjentas helt til systemet er på formen vist i figur 2.3.

Teorem 2.2 En kombinasjon av to passive sub-systemer der det ene systemet er i tilbakekoblingen som vist i figur 2.5, er passiv.



Figur 2.5: En kombinasjon av to passive systemer med tilbakekobling.

Bevis: De to sub-systemene er passive eller strengt passive, dvs. fra definisjon 2.2

$$\int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt \geq \beta_1 + \delta_1 \int_0^T \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt \quad \forall \mathbf{u}_1 \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.14)$$

$$\int_0^T \mathbf{y}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \geq \beta_2 + \delta_2 \int_0^T \mathbf{u}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \quad \forall \mathbf{u}_2 \text{ og } \forall T \geq 0 \quad (2.15)$$

der $\delta_1 \geq 0$ og $\delta_2 \geq 0$. Pådrag og måling til systemet er gitt av ligningene

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \quad (2.17)$$

Vi har også at

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) \quad (2.18)$$

Dette gir for totalsystemet.

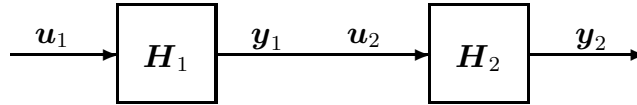
$$\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_T = \int_0^T \mathbf{y}(t)^T \mathbf{u}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) [\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)] dt \\
 &= \int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{y}_2(t) dt \\
 &= \int_0^T \mathbf{y}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \int_0^T \mathbf{u}_2^T(t) \mathbf{y}_2(t) dt \\
 &\geq \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 \int_0^T \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \delta_2 \int_0^T \mathbf{u}_2^T(t) \mathbf{u}_2(t) dt \\
 &= \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 \int_0^T \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_1(t) dt + \delta_2 \int_0^T \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Total systemet er **passivt** og i tillegg **y-strengt passivt** som definert i definisjon 2.3 hvis $\delta_2 > 0$. ■

Korollar 2.2 Ved induksjon er det mulig å vise at enhver kombinasjon av tilbakekoblede passive systemer er passiv.

Kommentar 2.1 En seriekobling av to passive systemer, som vist i figur 2.6 er ikke nødvendigvis passiv.



Figur 2.6: En seriekobling av to passive sub-systemer.

Indreproduktet $\langle \mathbf{y}_2(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle_T$ er ikke nødvendigvis nedre begrenset selv om indreproduktene $\langle \mathbf{y}_1(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle_T$ og $\langle \mathbf{y}_2(t), \mathbf{u}_2(t) \rangle_T$ er nedre begrenset ($\forall T \geq 0$).

Kapittel 3

Lyapunovteori

3.1 Innledning

I dette kapitlet presenteres grunnleggende Lyapunovteori. Stoffet er hovedsaklig hentet fra [Slotine og Li, 1993] og [Vidyasagar, 1993]. Det gis her kun en kort presentasjon av de viktigste begreper og teoremer. Disse vil i utstrakt grad bli brukt i senere kapitler.

3.2 Definisjoner

Definisjon 3.1 (Likevektspunkt) *Gitt det autonome systemet*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

Dersom tilstandsvektoren $\mathbf{x}(t)$ er lik \mathbf{x}^ og forblir i dette punktet for all framtid, så sies \mathbf{x}^* å være et likevektspunkt (eller likevektstilstand) for systemet. Med andre ord*

$$f(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (3.2)$$

□

Definisjon 3.2 (Stabilitet) *Likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sies å være stabilt dersom for en vilkårlig $R > 0$ finnes en $r > 0$ slik at dersom*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad (3.3)$$

så medfører dette

$$\|\mathbf{x}(t)\| < R \quad \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

Dersom dette ikke er tilfelle, sies likevektspunktet å være ustabilt. Stabilitet sier altså at tilstandsvektoren kan holdes vilkårlig nær origo ved å starte tilstrekkelig nær.

□

Definisjon 3.2 illustreres i figur 3.1.

Definisjon 3.3 (Asymptotisk stabilitet) *Et likevektspunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er asymptotisk stabilt dersom det er stabilt og det i tillegg eksisterer en $r > 0$ slik at*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < r \quad (3.5)$$



ustabil

$\mathbf{x}(0)$

stabil \mathcal{B}_r

\mathcal{B}_R

Figur 3.1: Illustrasjon av stabilt og ustabil likevektspunkt. \mathcal{B}_r er en ball med radius r , \mathcal{B}_R er en ball med radius R . Det ene tilfellet er stabilt, det andre ustabil.

impliserer at

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.6)$$

når $t \rightarrow \infty$. □

Definisjon 3.4 (Eksponensiell stabilitet) Et likevektspunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er **eksponensielt stabilt** dersom det finnes to positive konstanter α og λ slik at

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0 \quad (3.7)$$

i en ball \mathcal{B}_r (dvs. $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r$) om origo. □

Definisjon 3.5 (Global stabilitet) Dersom asymptotisk (eller eksponensiell) stabilitet gjelder for enhver initial-tilstand, så sies likevektspunktet å være **globalt** asymptotisk (eller eksponensielt) stabilt. □

3.3 Lyapunov stabilitet for autonome systemer

I dette avsnittet presenteres Lyapunovs direkte metode (eller 2.metode) for autonome systemer.

Definisjon 3.6 (Positiv definit funksjon) En skalar funksjon $V(\mathbf{x})$ sies å være **lokalt positiv definit** dersom $V(\mathbf{0}) = 0$ og i en ball \mathcal{B}_{R_0} gjelder

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0 \quad (3.8)$$

Dersom $V(\mathbf{0}) = 0$ og ligning 3.8 gjelder i hele tilstandsrommet, sies funksjonen $V(\mathbf{x})$ å være **globalt positiv definit**. □

Definisjon 3.7 (Lyapunov funksjon) Gitt det autonome systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

Dersom det finnes en ball \mathcal{B}_{R_0} der $V(\mathbf{x})$ er positiv definit, der $V(\mathbf{x})$ har kontinuerlige partiell deriverte og den tidsderivate av $V(\mathbf{x})$ er negativ semi-definit for alle tilstandsspor for systemet i ligning 3.9, dvs

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.10)$$

da sies $V(\mathbf{x})$ å være en **Lyapunov funksjon** for systemet i ligning 3.9. \square

Teorem 3.1 (Lokal stabilitet) Dersom det finnes en skalar funksjon $V(\mathbf{x})$ med kontinuerlige første ordens partiell deriverte slik at

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\text{ er positiv definit i en ball } \mathcal{B}_{R_0} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\text{ er negativ semi – definit i en ball } \mathcal{B}_{R_0} \end{aligned}$$

da er likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabilt. Dersom $\dot{V}(\mathbf{x})$ er lokalt negativ-definit i \mathcal{B}_{R_0} da er likevektspunktet asymptotisk stabilt.

Bevis: Se f.eks. [Slotine og Li, 1993][Side 62–63]. \blacksquare

Teorem 3.2 (Global stabilitet) Anta at det finnes en skalar funksjon $V(\mathbf{x})$ med kontinuerlige første ordens partiell deriverte slik at

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\text{ er positiv definit} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\text{ er negativ semi – definit} \\ \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Da sies likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ å være **globalt asymptotisk stabilt**.

Bevis: Se [Slotine og Li, 1993][Side 65]. \blacksquare

Definisjon 3.8 (Invariant mengde) En mengde \mathcal{G} er en **invariant mengde** for et dynamisk system dersom alle tilstandsspor som starter fra et punkt i \mathcal{G} blir værende i \mathcal{G} i all framtid. \square

Teorem 3.3 (LaSalles teorem) Betrakt systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

La $V(\mathbf{x})$ være en Lyapunov funksjon for systemet når $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ La \mathcal{R} være mengden av alle punkter i \mathcal{E} der $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, og la \mathcal{M} være den største invariante mengden i \mathcal{R} . Da vil $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}$ gå mot \mathcal{M} når $t \rightarrow \infty$.

Bevis: Se [Slotine og Li, 1993][Side 69–70]. \blacksquare

3.4 Ikke-autonome systemer

For ikke-autonome systemer må definisjonene av likevektspunkter og positiv definite funksjoner endres.

Definisjon 3.9 (Likevektspunkt) Gitt det ikke-autonome systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

Dersom tilstandsvektoren $\mathbf{x}(t)$ er lik \mathbf{x}^* og forblir i dette punktet for all framtid, så sies \mathbf{x}^* å være et **likevektspunkt** (eller likevektstilstand) for systemet. Med andre ord

$$f(\mathbf{x}^*, t) = 0 \quad (3.13)$$

□

Definisjon 3.10 (Positiv definit funksjon) En skalar tids-varierende funksjon $V(\mathbf{x}, t)$ sies å være **lokalt positiv definit** dersom det eksisterer en tids-uavhengig skalar funksjon $V_0(\mathbf{x})$ slik at når $\mathbf{x} \in B_{R_0}$ så er

$$V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x}) \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.14)$$

Funksjonen sies å være **globalt positiv definit** dersom ligning 3.14 gjelder for alle \mathbf{x} . □

Definisjon 3.11 (Klasse K) En kontinuerlig funksjon $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sies å være av klasse K dersom

(1) $\alpha(p)$ er strengt voksende.

(2) $\alpha(0) = 0$.

□

Lemma 3.1 (Positiv definit funksjon) En funksjon $V(\mathbf{x}, t)$ er **lokalt (globalt) positiv definit** hvis og bare hvis det eksisterer en funksjon α av klasse K slik at $V(\mathbf{0}, t) = 0$ og

$$V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall t \geq 0 \text{ og } \forall \mathbf{x} \in B_{R_0} \text{ (eller hele tilstandsrommet)} \quad (3.15)$$

Bevis: Se [Slotine og Li, 1993][Side 108]

Teorem 3.4 (Lyapunov stabilitet) Dersom det finnes en skalar funksjon $V(\mathbf{x}, t)$ i en ball B_{R_0} med kontinuerlige første ordens partiell deriverte slik at

V er positiv definit

\dot{V} negativsemi – definit

da er likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Lyapunov stabilt.

Bevis: Se [Slotine og Li, 1993][Side 107–111]. ■

Stabilitetsbeviset for den observerbaserte regulatoren i et senere kapittel baserer seg på Matrosov's teorem. Dette teoremet presenteres her. (Hentet fra [Paden og Panja, 1988].)

Definisjon 3.12 En funksjon f er kontinuerlig deriverbar n ganger. Dette betegnes

$$f \text{ er } C^n \quad (3.16)$$

□

Definisjon 3.13 Avstanden fra punktet \mathbf{x} til mengden \mathcal{G} betegnes

$$d(\mathbf{x}, \mathcal{G}) \quad (3.17)$$

□

Teorem 3.5 (Matrosov) Gitt et ikke-autonomt system på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (3.18)$$

La \mathcal{G} være et åpent sammenhengende område i \mathbb{R}^n som inneholder origo. Dersom det eksisterer to C^1 funksjoner $V : [t_0, \infty) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, W : [t_0, \infty) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$; en C^0 funksjon $V^* : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$; tre funksjoner a, b, c av klasse K slik at, for alle $(\mathbf{x}, t) \in [t_0, \infty) \times \mathcal{G}$,

- (1) $a(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{x}\|)$
- (2) $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq V^*(\mathbf{x}) \leq 0$. Definer $\mathcal{E} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid V^*(\mathbf{x}) = 0\}$
- (3) $|W(\mathbf{x}, t)|$ er begrenset
- (4) $\max(d(\mathbf{x}, \mathcal{E}), |\dot{W}(\mathbf{x}, t)|) \geq c(\|\mathbf{x}\|)$
- (5) $\|f(\mathbf{x}, t)\|$ er begrenset.

Definerer nå delmengden $\mathcal{V}_{t,\alpha}^{-1}$. For alle $t \in [t_0, \infty)$ gjelder

$$\mathcal{V}_{t,\alpha}^{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} : V(\mathbf{x}, t) \leq a(\alpha)\} \quad (3.19)$$

der α er en positiv skalar. Da har vi

- (a) For alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}_{t_0,\alpha}^{-1}$ går $\mathbf{x}(t)$ uniformt mot null i t_0, \mathbf{x}_0 når t går mot uendelig.
- (b) Origo er uniformt asymptotisk stabilt.

Bevis: Beviset finnes i [Rouche N., Habets P. og Laloy M., 1977]. ■

Lemma 3.2 Betingelse (4) over er oppfylt dersom følgende betingelser gjelder

- 4'(a) $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ er kontinuert i begge argumentene og avhengigheten av tiden er gitt av en kontinuert begrenset funksjon.
- 4'(b) Det eksisterer en funksjon k av klasse K slik at $|\dot{W}(\mathbf{x}, t)| \geq k(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall \mathbf{x} \in E \text{ og } t \geq t_0$.

I appendix A vises det at Lyapunov-funksjonen definert for robot manipulatoren med regulator og observer i kapittel 7 tilfredsstiller kravene (1–5) dersom man velger

$$W(\mathbf{x}, t) \triangleq \dot{V}(\mathbf{x}, t) \quad (3.20)$$

der \ddot{V} er den dobbelt-tidsderiverte av Lyapunov funksjonen V .

3.5 Begrenset tilstandsvektor

Det finnes en del systemer som ikke er stabile i henhold til definisjon 3.2, men der tilstandsvektoren er begrenset. Et eksempel på et slikt system er et stabilt system påvirket av en begrenset forstyrrelse. Her skal to teoremer for slike systemer presenteres.

Teorem 3.6 (Begrenset tilstand) *Anta at det finnes en Lyapunov funksjons-kandidat for et system der den tidsderivate av Lyapunov funksjonen er lik*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \nu \quad (3.21)$$

der \mathbf{A} er en positiv definit matrise og ν er begrenset, dvs.

$$\|\nu\| < \nu_{\max} \quad (3.22)$$

Da vil tilstandsvektoren \mathbf{x} være begrenset.

Bevis: For at $\dot{V}(\mathbf{x})$ skal være negativ semi-definit, må vi ha at

$$\|\mathbf{x}\| > \frac{\|\nu\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (3.23)$$

Dette betyr at når $t \rightarrow \infty$ så vil tilstandsvektoren være begrenset av

$$\|\mathbf{x}\| \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (3.24)$$

Se [Craig, 1988][Eksempel B.2]. I [Canudas de Wit og Fixot, April 1991] kalles dette for “practical stability”. ■

Lemma 3.3 *Gitt en funksjon $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$g(y) = \alpha_0 - \alpha_1 y + \alpha_2 y^2, \quad y \in \mathbb{R}^+ \quad (3.25)$$

der $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, 2$. Da har vi at $g(y) \leq 0$ dersom $y_1 \leq y \leq y_2$ der

$$y_1 = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}, \quad y_2 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2} \quad (3.26)$$

□

Teorem 3.7 (Lokalt uniformt endelig begrenset) *Gitt systemet*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (3.27)$$

La funksjonen $V(\mathbf{x}, t)$ tilfredsstill

$$P_m \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq P_M \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, t) &\leq \|\mathbf{x}(t)\| \cdot g(\|\mathbf{x}(t)\|) \\ &\leq 0 \quad \forall y_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq y_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

der P_m og P_M er positive konstanter, $g(\cdot)$ er definert i ligning 3.25 og y_1 og y_2 er definert i ligning 3.26. Definer

$$\delta \triangleq \sqrt{\frac{P_M}{P_m}} \quad (3.30)$$

Dersom $y_2 > \delta y_1$, da er $\mathbf{x}(t)$ **lokalt uniformt endelig begrenset** (eng. *locally uniformly ultimately bounded*). Gitt $d_m = \delta y_1$. Da eksisterer det en skalar d slik at $d \in (d_m, y_2)$ og slik at

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq r \rightarrow \|xv(t)\| \leq d \quad \forall t \geq t_0 + T(d, r) \quad (3.31)$$

der

$$T(d, r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{P_M r^2 - P_m R^2}{-\alpha_0 R + \alpha_1 R^2 - \alpha_2 R^3} & R < r < \delta^{-1} y_2 \end{cases} \quad (3.32)$$

der $\|\mathbf{x}_0\|$ er initial-tilstanden og $R = \delta^{-1} d$. Se [Berghuis, 1993][Side 57]. ■

Kapittel 4

Robot dynamikk

4.1 Innledning

I dette kapittelet gis den nødvendige teori for å finne bevegelsesligningene for stive robot manipulatorer. Kapittelet inneholder også en liste over egenskaper ved bevegelsesligningene til robot manipulatorer. Denne listen refereres hyppig i de etterfølgende kapitlene. Teorien er hentet fra [Spong og Vidyasagar, 1989].

4.2 Bevegelsesligninger

Det finnes flere metoder for å finne bevegelsesligningene for mekaniske systemer. Metoden presentert her er Euler-Lagrange's metode.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{q}}} \right\} - \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1)$$

hvor $L \equiv K - P$. K er den kinetiske energien, P er den potensielle energien, \mathbf{q} er vektoren av generaliserte koordinater og $\boldsymbol{\tau}$ er vektoren av generaliserte krefter. Bevegelsesligningene for en stiv robot manipulator skrives på formen

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

hvor \mathbf{M} er systemets massematrise, \mathbf{C} er matrisen som beskriver koriolis og sentripetal krefter, \mathbf{g} er en vektor som beskriver tyngdekraftene og $\boldsymbol{\tau}$ er vektoren som beskriver momenter og krefter som virker på de forskjellige leddene.

[Spong og Vidyasagar, 1989] har spesialisert Euler-Lagrange ligningene til spesialtilfellet der to betingelser er oppfylt: 1) den kinetiske energien er en kvadratisk funksjon av vektoren \mathbf{q} , dvs.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.3)$$

der $n \times n$ massematrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er symmetrisk og positiv definit for alle $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. 2) Den potensielle energien $P = P(\mathbf{q})$ er uavhengig av $\dot{\mathbf{q}}$. Euler-Lagrange ligningene for et slikt system kan finnes som følger. Siden

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - P(\mathbf{q}) \quad (4.4)$$

har vi at

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} = \sum_j^n m_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \quad (4.5)$$

og

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} &= \sum_j^n m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_j^n \frac{d}{dt} m_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \\ &= \sum_j^n m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j\end{aligned}\quad (4.6)$$

Vi har også at

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\delta P}{\delta q_k} \quad (4.7)$$

Euler-Lagrange ligningene, 4.1, kan derfor skrives

$$\sum_j^n m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \dot{q}_i \right\} \dot{q}_j + \frac{\delta P}{\delta q_k} = \tau_k \quad (4.8)$$

der $k = 1, \dots, n$. Ved å bytte summasjonsrekkefølgen og utnytte symmetrien, har [Spong og Vidyasagar, 1989] vist at

$$\sum_{i,j}^n \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.9)$$

Derfor har vi

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &= \sum_{i,j}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j\end{aligned}\quad (4.10)$$

Leddene

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \quad (4.11)$$

kalles Christoffel symboler (av første orden.) dersom vi definerer

$$\phi_k = \frac{\delta P}{\delta q_k} \quad (4.12)$$

så kan Euler-Lagrange ligningene skrives

$$\sum_j^n m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + \phi_k(\mathbf{q}) = \tau_k \quad (4.13)$$

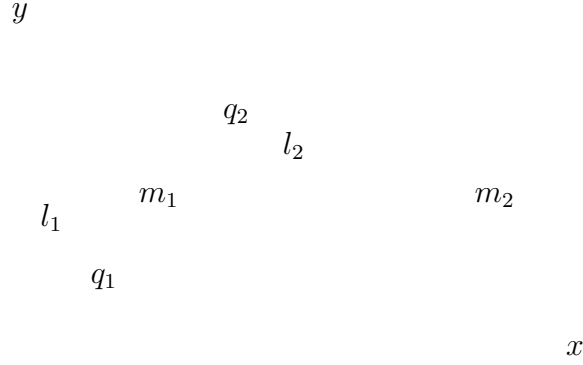
der $k = 1, \dots, n$. Element nr. k, j i matrisen $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ er definert som

$$\begin{aligned}c_{kj} &= \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \dot{q}_i\end{aligned}\quad (4.14)$$

Framgangsmåten med å finne bevegelsesligningene for en stiv robot manipulator illustreres med et eksempel.



Eksempel 4.1 Manipulatoren som studeres i dette eksempelet er en forenklet versjon av manipulatoren studert i [Spong og Vidyasagar, 1989, eksempel 6.4.2]. Manipulatoren i dette eksempelet opererer i det horisontale plan, og er derfor ikke påvirket av gravitasjonen. Det antas også for enkelhets skyld at forbindelsene mellom leddene er masseløse. Manipulatoren er illustrert i figur 4.1.



Figur 4.1: Albue manipulator som opererer i det horisontale plan.

Den kinetiske energien til denne manipulatoren er gitt av

$$K = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 \quad (4.15)$$

hvor \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er hastighetsvektorene til de to leddene. Posisjonen til massen m_1 er gitt av

$$x_1 = l_1 \cos q_1 \quad (4.16)$$

$$y_1 = l_1 \sin q_1 \quad (4.17)$$

Ved å derivere disse ligningene med hensyn på tiden, får vi

$$\dot{x}_1 = -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \quad (4.18)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \quad (4.19)$$

Uttrykket $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1$ er nå gitt av

$$\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 = (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = l_1^2\dot{q}_1^2(\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1) = l_1^2\dot{q}_1^2 \quad (4.20)$$

Uttrykket $\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2$ finnes på samme måte.

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (4.21)$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \quad (4.22)$$

Ved å derivere med hensyn på tiden, får vi

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2)[\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \quad (4.23)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)[\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \quad (4.24)$$

Uttrykket $\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2$ er gitt av

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 &= [\dot{\mathbf{x}}_2^2 + \dot{y}_2^2] \\ &= l_1^2 \sin^2 q_1 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2)[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2l_1l_2 \sin q_1 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_1[\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
& +l_1^2 \cos^2 q_1 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2)[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \\
& +2l_1l_2 \cos q_1 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_1[\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
= & l_1^2 \dot{q}_1^2 [\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1] + l_2^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 [\sin^2(q_1 + q_2) + \cos^2(q_1 + q_2)] \\
& +2l_1l_2 \dot{q}_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] [\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_1 \cos(q_1 + q_2)]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De standard trigonometriske identitetene

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \tag{4.26}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \tag{4.27}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \tag{4.28}$$

benyttes i ligning 4.25. Dette gir

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \\
&+ 2l_1l_2 \dot{q}_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] [\sin q_1 [\sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2]] \\
&+ 2l_1l_2 \dot{q}_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] [\cos q_1 [\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2]] \\
= & l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \\
&+ 2l_1l_2 \dot{q}_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \cos q_2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Den kinetiske energien til robot manipulatoren er gitt av

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \tag{4.30}$$

I dette eksempelet er $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ en 2×2 matrise

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} [m_{11} \dot{q}_1^2 + m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{21} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{22} \dot{q}_2^2] \\
&= \frac{1}{2} [m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2] \\
&= \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \cos q_2]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Fra dette ser vi at elementene i matrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ blir

$$m_{11} = m_1 l_1^2 + m_2 [l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2] \tag{4.33}$$

$$m_{22} = m_2 l_2^2 \tag{4.34}$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2] \tag{4.35}$$

Nå kan Christoffel symbolene finnes, se [Spong og Vidyasagar, 1989, side 147].

$$\begin{aligned}
c_{111} &= \frac{1}{2} \frac{\delta m_{11}}{\delta q_1} = 0 \\
c_{121} &= c_{211} = \frac{1}{2} \frac{\delta m_{11}}{\delta q_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \\
c_{221} &= \frac{\delta m_{12}}{\delta q_2} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_{22}}{\delta q_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \\
c_{112} &= \frac{\delta m_{21}}{\delta q_1} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_{11}}{\delta q_2} = m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \\
c_{122} &= c_{212} = \frac{1}{2} \frac{\delta m_{22}}{\delta q_1} = 0 \\
c_{222} &= \frac{1}{2} \frac{\delta m_{22}}{\delta q_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Bevegelsesligningene er nå gitt av

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_2\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2^2 &= \tau_1 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{112}\dot{q}_1^2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ved å sette inn uttrykkene for Christoffel symbolene og elementene i $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, får vi

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.38)$$

hvor matrisene $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ er gitt av

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 [l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2] & m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2] \\ m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2] & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

□

4.3 Matrise egenskaper

Matrisene $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ og vektoren $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ har en del egenskaper. En liste over noen av disse presenteres her.

Egenskap 4.1 $\mathbf{M}(\mathbf{q}) > 0$ Positiv definit

Egenskap 4.2 $\alpha \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq \beta$
der α og β er positive konstanter.

Egenskap 4.3 $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq \delta_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$
der δ_1 er en positiv konstant.

Egenskap 4.4 $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq \delta_2$
der $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ er en vektor som beskriver tyngdekraftene og δ_2 er en positiv konstant.

Egenskap 4.5 Det finnes en parameterisering for $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ slik at: $\mathbf{z}^T [\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{z} = 0$ der \mathbf{z} er en vilkårlig vektor.

Bevis: Tatt fra [Spong og Vidyasagar, 1989, Teorem 6.3.1]. Gitt massematrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$. Komponent nr. kj til $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ er gitt av

$$\dot{m}_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} \dot{q}_i \quad (4.41)$$

derfor er komponent nr. kj til $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ gitt av

$$\begin{aligned} \dot{m}_{kj} - 2c_{kj} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} - \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \right] \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} - \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} \right] \dot{q}_i \end{aligned} \quad (4.42)$$

Siden massematrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er symmetrisk, dvs. $m_{ij} = m_{ji}$, så følger det fra 4.42 ved å bytte indeksene k og j at

$$\dot{m}_{kj} - 2c_{kj} = -[\dot{m}_{jk} - 2c_{jk}] \quad (4.43)$$

Resultatet er dermed vist. ■

Fysisk kan denne egenskapen forstås som følger: Den deriverte av manipulatorens kinetiske energi $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ må være lik effekten fra aktuatorer og tyngdekraftene.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}] = \dot{\mathbf{q}}^T [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}(\mathbf{q})] \quad (4.44)$$

som impliserer at til enhver tid

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right\} \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \quad (4.45)$$

Bevis: Utfører derivasjonen i ligning 4.44 og setter inn for $\boldsymbol{\tau}$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \\ \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right\} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Se [Slotine og Li, 1987]. ■

Egenskap 4.6 Vektoren $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ har elementer $\dot{\mathbf{q}}^T N_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ der N_i matrisene er symmetriske og består av symmetriske og begrensede periodiske elementer.

En interessant konsekvens av egenskap 4.3 og egenskap 4.6 gis i følgende lemma:

Lemma 4.1 La $\hat{\dot{\mathbf{q}}}$ være et estimat av $\dot{\mathbf{q}}$, og la $\hat{\dot{\mathbf{q}}}$ være den deriverte av avviksvektoren, dvs. $\hat{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}$. Vektoren $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ kan da uttrykkes som

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}) \hat{\dot{\mathbf{q}}} - \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}) \hat{\dot{\mathbf{q}}} \quad (4.47)$$

der

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}) = \frac{\delta}{\delta \hat{\dot{\mathbf{q}}}} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}) \hat{\dot{\mathbf{q}}} \Big|_{\hat{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}} \quad (4.48)$$

Bevis: Som antydnet av egenskap 4.6, er elementene til vektoren $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ gitt av $\dot{\mathbf{q}}^T N_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, og er derfor lineære i $\dot{\mathbf{q}}$. Ved en Taylor-rekke utvikling av $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ om $\hat{\dot{\mathbf{q}}}$ får vi direkte resultatet i Lemma 4.1. Merk at rekkeutviklingen er eksakt, siden $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ ikke inneholder kvadratiske ledd i $\dot{\mathbf{q}}$. Se [Canudas de Wit og Slotine, 1991].

Kommentar 4.1 Jakobi matrisen $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}})$ er da gitt av:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}) &= \frac{\delta}{\delta \hat{\dot{\mathbf{q}}}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}^T N_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T N_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T N_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right\}_{\hat{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}} \\ &= 2 [N_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, N_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \dots, N_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Siden $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}})$ er lineær i $\hat{\dot{\mathbf{q}}}$, så eksisterer det en positiv definit matrise π_0 slik at $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}})$ er begrenset som følger:

Egenskap 4.7 $\|\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| < \pi_0 \|\dot{\mathbf{q}}\|$

Egenskap 4.8 Den tidsderiverte av massematrisen kan skrives

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.50)$$

Bevis: Siden massematrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er symmetrisk, så er $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ også symmetrisk. Dermed har vi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T \\ &= -\dot{\mathbf{M}}^T(\mathbf{q}) + 2\mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= -\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) + 2\mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ved å samle $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ på den ene siden og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ på den andre får vi

$$2\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + 2\mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.52)$$

og resultatet er bevist. ■

For manipulatorer med få frihetsgrader kan denne egenskapen være den raskeste måten å finne matrisen $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Egenskap 4.9 Gitt to $n \times 1$ vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} . Vi har at

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (4.53)$$

Bevis: [Nicosia og Tomei, 1990]. Fra ligning 4.14 har vi at

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\delta m_{kj}}{\delta \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} \dot{q}_i \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Definer vektoren $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$. Siden $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er symmetrisk så kan vi skrive, for komponent k av \mathbf{h} .

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{x}^T \frac{\delta m_{kj}}{\delta \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} x_i \right] y_j \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} + \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} x_i y_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{y}^T \frac{\delta m_{ki}}{\delta \mathbf{q}} + \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\delta m_{kj}}{\delta q_i} - \frac{\delta m_{ij}}{\delta q_k} \right\} y_j \right] x_i \end{aligned}$$

Ved å bytte om indeksene j og i , så har vi at

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{y}^T \frac{\delta m_{kj}}{\delta \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\delta m_{ki}}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{ji}}{\delta q_k} \right\} y_i \right] x_j \\ &= h_k(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dermed er resultatet bevist. ■

4.4 Passivitetsegenskaper

Bevegelsesligningene for en stiv robot manipulator har visse passivitetsegenskaper.

Egenskap 4.10 *En stiv robot manipulator er passiv med pådrag τ og måling \dot{q} .*

Bevis: Hentet fra [Kelly, Carelli og Ortega, 1989]. Bevegelsesligningene er gitt av

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \langle \tau, \dot{q} \rangle_T &= \int_0^T \dot{q}^T \tau dt \\ &= \int_0^T \left\{ \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T C(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{q}^T g(q) \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{q}^T M(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + \dot{q}^T C(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{q}^T g(q) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \dot{q}^T M(q)\dot{q} + \dot{q}^T g(q) dt + \int_0^T \dot{q}^T \left\{ C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}(q) \right\} \dot{q} dt \end{aligned} \quad (4.57)$$

Anta at $C(q, \dot{q})$ velges slik at $C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}(q)$ er skjev-symmetrisk. Vi har også at den potensielle energien $V \geq 0$ tilfredsstiller

$$\frac{dV}{dq} = g(q) \quad (4.58)$$

Vi får da

$$\begin{aligned} \langle \tau, \dot{q} \rangle_T &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \dot{q}^T M(q)\dot{q} + \dot{q}^T g(q) dt \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}(T)^T M(q(T))\dot{q}(T) - \frac{1}{2} \dot{q}(0)^T M(q(0))\dot{q}(0) + V(T) - V(0) \\ &\geq -\frac{1}{2} \dot{q}(0)^T M(q(0))\dot{q}(0) - V(0) = \beta \end{aligned} \quad (4.59)$$

Systemet er passivt i følge definisjon 2.1. ■

Egenskap 4.11 *Et system gitt av ligningen*

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s = \tau \quad (4.60)$$

der

$$s \in \mathbb{R}^n \quad (4.61)$$

er passivt med pådrag τ og måling s .

Bevis:

$$\begin{aligned} \langle \tau, s \rangle_T &= \int_0^T s^T \tau dt \\ &= \int_0^T \left\{ s^T M(q)\dot{s} + s^T C(q, \dot{q})s \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^T M(q)s - \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q)s + s^T C(q, \dot{q})s \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} s^T M(q)s dt + \int_0^T s^T \left\{ C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}(q) \right\} s dt \end{aligned} \quad (4.62)$$

Anta at $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ velges slik at $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ er skjev-symmetrisk. Vi får da

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{s} \rangle_T &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s} dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{s}(T)^T \mathbf{M}(\mathbf{q}(T)) \mathbf{s}(T) - \frac{1}{2} \mathbf{s}(0)^T \mathbf{M}(\mathbf{q}(0)) \mathbf{s}(0) \\ &\geq -\frac{1}{2} \mathbf{s}(0)^T \mathbf{M}(\mathbf{q}(0)) \mathbf{s}(0) = \beta\end{aligned}\quad (4.63)$$

Systemet er dermed passivt i følge definisjon 2.1. ■

4.5 Linearitet i parameterene

Bevegelsesligningene for en stiv robot manipulator kan omskrives slik at system parameterene er lineære funksjoner av de ledd-variable \mathbf{q} .

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} \quad (4.64)$$

der $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ er en matrise av kjente funksjoner og $\boldsymbol{\theta}$ er en parameter vektor. Denne egenskapen studeres i følgende eksempel.

Eksempel 4.2 Robot manipulatoren fra eksempel 4.1 studeres her. Bevegelsesligningene var funnet å være

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.65)$$

der matrisene $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ og vektoren $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ er som følger

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 [l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2] & m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2] \\ m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2] & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Vektoren $\boldsymbol{\theta}$ defineres nå lik

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 \\ m_2 l_1^2 \\ m_2 l_2^2 \\ m_2 l_1 l_2 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Matrisen $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ kan nå finnes

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 2 \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \cos(q_2) \ddot{q}_2 - 2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Vi ser at $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ er en matrise av kun kjente funksjoner, og at $\boldsymbol{\theta}$ er en vektor av system parametere, dvs. massene og lengdene. □

Egenskapen med linearitet i parameterene vil bli brukt når adaptiv regulering studeres.

Kapittel 5

Bruk av hastighetsobservere i robotstyring

5.1 Innledning

Tradisjonelle regulatorer for robotstyring krever at alle tilstander, dvs. posisjon og hastighet, er tilgjengelige for tilbakekobling. To eksempler på slike regulatorer er regulatoren presentert av [Paden og Panja, 1988] og sett-punkts regulatoren av [Takegaki og Arimoto, 1981].

I praksis er ikke hele tilstandsvektoren tilgjengelig av to grunner. Selv om robot systemer har sensorer med høy presisjon for måling av posisjonen, så inneholder hastighetsmålingene, f.eks. fra tachometere, mye støy. En annen grunn er at hastighetssensorene ofte utelates fordi man da kan spare mye i kostnader, volum og vekt. ([Berghuis, 1993]).

Motivert av dette har hastighetsobservere blitt konstruert for å estimere de manglende tilstandsvariable. Bruk av hastighetsobservere finnes både sammen med regulatorer for sett-punkts regulering og regulatorer forfølging av varierende referanse. I dette kapitlet studeres flere av disse regulatorene. Først gis en oversikt over forskjellige metoder for bruk av hastighetsobservere. De observerene som ligner mest på den virtuelle manipulatorene som skal presenteres i kapittel 6 skal så studeres i detalj senere i dette kapitlet.

5.2 Metoder for bruk av hastighetsobservere

I dette avsnittet skal en kort oversikt over følgende metoder presenteres: Pseudolineariseringsteknikker, variabel struktur systemer, passiv observer/regulator for sett-punkts regulering og generelle ulineære observere som etterligner robot-dynamikken.

5.2.1 Pseudolinearisering

Flere forfattere har studert løsninger basert på denne teknikken. Eksempler finnes i [Reboulet og Champetier, 1984] og [Nicosia, Tomei og Tornambè, 1987].

Metoden er som følger. Gitt et ulineært system på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{5.2}$$

der \mathbf{x} er tilstandsvektoren, \mathbf{u} er pådragsvektoren og \mathbf{y} er målevektoren. Nå innføres et variabelskifte slik at det ulineære systemet blir delvis lineært (herav pseudolinearisering.)

$$\mathbf{z} = T_z(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{w} = T_w(\mathbf{y}) \quad (5.4)$$

der \mathbf{z} er den nye tilstandsvektoren, \mathbf{w} er den nye målevektoren og funksjonene T_z og T_w utfører et variabelskifte slik at

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} \quad (5.6)$$

der $\boldsymbol{\beta}$ er en ulineær funksjon og matrisene \mathbf{A} og \mathbf{C} er gitt av

$$\mathbf{A} = \text{block diag}[\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{C} = \text{block diag}[\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_p] \quad (5.8)$$

og

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i} \quad \mathbf{C}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times k_i} \quad (5.9)$$

der k_i er observerbarhets indeksene. La tilstandsestimatet betegnes $\hat{\mathbf{z}}$. Nå velges observeren på formen

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = [\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}]\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{K}\mathbf{w} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (5.10)$$

Definerer nå feilen mellom estimert tilstand og virkelig tilstand i det pseudolineariserte systemet.

$$\mathbf{e} \triangleq \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z} \quad (5.11)$$

Vi har dermed at

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}]\mathbf{e} \quad (5.12)$$

Eigenverdiene for denne feildynamikken kan nå velges vilkårlig ved et fornuftig valg av matrisen \mathbf{K} . Vi kan derfor sikre at \mathbf{e} konvergerer mot null ved å bruke analyseteknikker for lineære systemer, dvs. at alle eigenverdiene til matrisen $\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}$ ligger i venstre halvplan. Til slutt utføres inverstransformasjonen

$$\hat{\mathbf{x}} = T_z^{-1}(\hat{\mathbf{z}}) \quad (5.13)$$

for å få et tilstandsestimat i de opprinnelige tilstandskoordinatene.

Tilstandsestimatet fremkommet på denne måten har en stor ulempe. I ulineære systemer kan ikke regulatoren og observeren generelt konstrueres uavhengig av hverandre, siden separasjonsprinsippet bare gjelder for lineære systemer. Når regulator og observer konstrueres uavhengig, er det ingen garanti for at totalsystemet er stabilt i lukket sløyfe. For ulineære systemer må man altså ta i betraktning interaksjonen mellom observer og regulator; observeren må ikke kun ta hensyn til estimeringsfeilen og regulatoren må ikke kun ta hensyn til reguleringsavviket. ([Canudas de Wit, Fixot og Åström, 1991])

5.2.2 Variabel-struktur systemer

Løsninger basert på variabel-struktur systemer kjennetegnes ved at differensial-ligningene for observeren inneholder dis-kontinuerlige ledd. Et eksempel finnes i [Canudas de Wit og Slotine, 1991]. De har valgt følgende observer struktur.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = -\Gamma_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 - \Lambda_1 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (5.14)$$

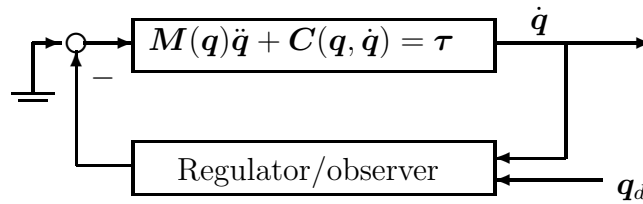
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = -\Gamma_2 \tilde{\mathbf{x}}_1 - \Lambda_2 \text{sgn}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1} \boldsymbol{\tau} \quad (5.15)$$

der $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{q}}$ (estimert posisjon), $\hat{\mathbf{x}}_2 = \dot{\hat{\mathbf{q}}}$ (estimert hastighet), $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1$ (estimeringsavvik), Γ_1 , Γ_2 er positiv definit konstante diagonale matriser, β er en ulineær funksjon og $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ er manipulatorens massematrise. Vi ser at ligningene inneholder den dis-kontinuerlige fortegnssfunksjonen $\text{sgn}(\cdot)$ på høyresiden. Matrisene Λ_1 og Λ_2 velges på en spesiell måte for å oppnå stabilitet. Vi skal ikke gå inn på dette i detalj, men [Canudas de Wit og Slotine, 1991] bruker Lyapunov-teori for å vise at den estimerte hastigheten konvergerer asymptotisk mot manipulatorens hastighet. Forfatteren har kun studert observeren, så det sies ingenting om selve reguleringen.

[Canudas de Wit og Fixot, Desember 1991] har studert den samme observer-strukturen med regulator. Forfatterene har vist lokal eksponensiell stabilitet. Regulatoren er robust overfor modell-usikkerhet. Ulempen med denne type systemer, er at på grunn av de dis-kontinuerlige leddene, så genereres det høyfrekvente signaler (eng. chattering) i den estimerte hastigheten. Dette kan eksitere umodellert høy-frekvent dynamikk og de høy-frekvente signalene kan også gi uheldige utslag i pådragsbruk, [Berghuis, 1993][side 58].

5.2.3 Passiv observer/regulator

Ved sett-punkts regulering, dvs. at referanse-hastigheten er null, er det mulig å konstruere en regulator/observer struktur slik at total-systemet blir passivt, og global asymptotisk stabilitet kan vises. Strukturen på systemet er vist i figur 5.1. Påvirkningen fra tyngdekraften kan kompenseres av regula-



Figur 5.1: *Passiv manipulator-dynamikk med passiv regulator/observer struktur.*

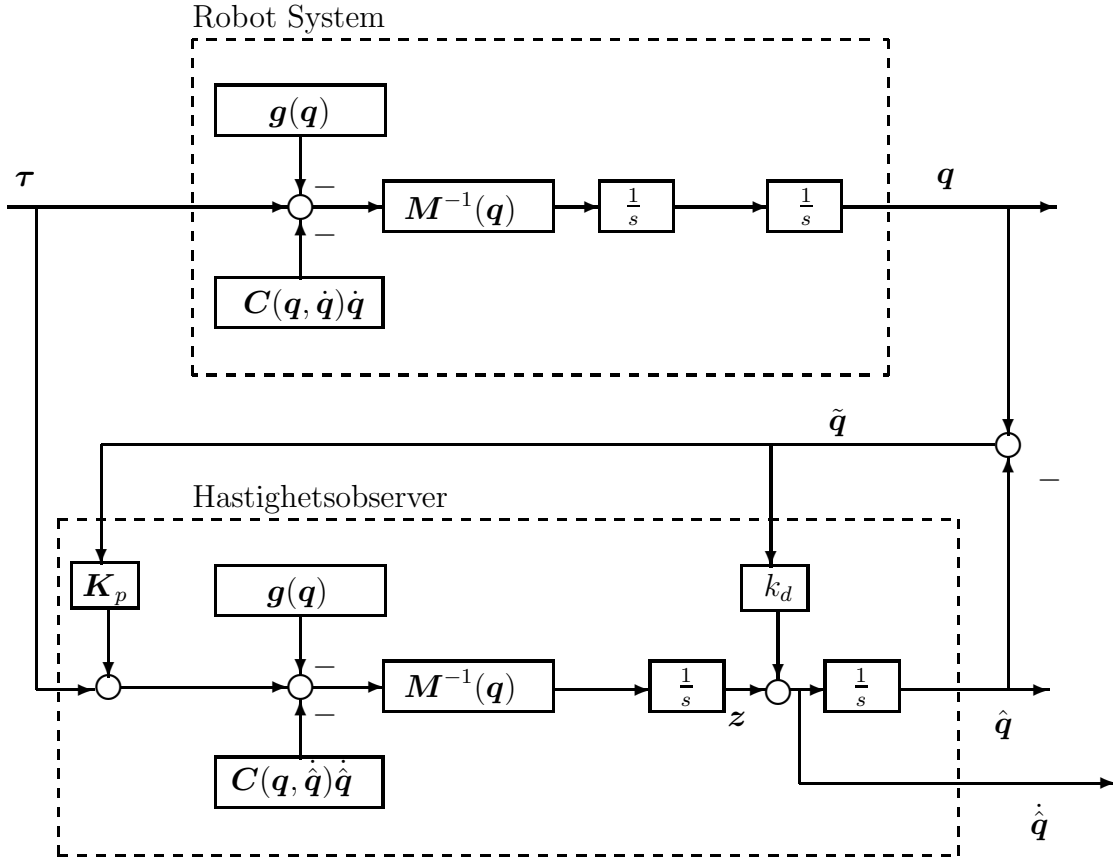
toren. Dynamikken til manipulatoren er passiv som vist i egenskap 4.10. Dersom nå regulator/observer er passiv, vil total-systemet være passivt, i følge teorem 2.2. To eksempler på slike systemer finnes i [Ailon og Ortega, 1992] og [Kelly og Ortega, 1993] og disse skal studeres i detalj senere i dette kapittelet.

5.2.4 Generell ulineær observer

Observer-strukturen ved denne metoden etterligner dynamikken til manipulatoren. Strukturen kan se ut som i figur 5.2, tatt fra [Nicosia og Tomei, 1990]. Vi ser at dynamikken til hastighetsobserveren ligner veldig på dynamikken til den fysiske manipulatoren. Observeren og manipulatoren har det samme pådraget og i tillegg har observeren tilbakekobling fra feilen mellom virkelig posisjon og estimert posisjon. To løsninger basert på denne metoden skal studeres i detalj senere i kapittelet, [Berghuis, 1993] og [Nicosia og Tomei, 1990].

5.3 Observer-baserte sett-punkts regulatorer

I forrige avsnitt ble en passiv regulator/observer struktur presentert. Her skal to slike løsninger presenteres i detalj, der begge er globalt asymptotisk stabile. Begge systemene illustreres med mekaniske ekvivalenter. Begge regulatorene som skal presenteres har den fordelen at de ikke krever kjennskap



Figur 5.2: Observer-struktur av [Nicosia og Tomei, 1990]

til systemparameterene, bortsett fra tyngdekraften i ønsket posisjon. Imidlertid vil båndbredden i systemene bli dårlig dersom fjærkreftene er for små i forhold til manipulatorens massematrise.

5.3.1 Observer av [Ailon og Ortega, 1992]

Disse forfatterene har studert både stive og fleksible robot manipulatorer. Her studeres kun løsningen med stiv manipulator.

Bevegelsesligningen for en stiv manipulator er gitt av

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (5.16)$$

Forfatterene foreslår følgende observer.

$$\ddot{\hat{q}} + D\dot{\hat{q}} + K[\hat{q} - \alpha] = -\tau \quad (5.17)$$

der α er ønsket posisjon med kompensasjon av tyngdekraften. Observeren og manipulatoren er sammenkoblet med fjærer.

$$\tau = -K_1[q - \hat{q}] \quad (5.18)$$

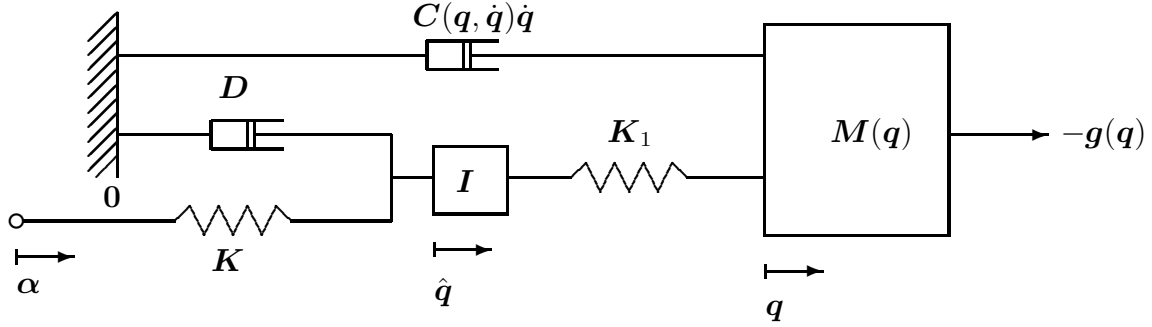
(Dersom matrisen K_1 er diagonal, så er det en fjær i hvert ledd.) Posisjonen α er gitt av

$$\alpha = q_d + \{K^{-1} + K_1^{-1}\}g(q_d) \quad (5.19)$$

Ønsket posisjon for observeren er gitt av

$$\hat{q}_d = q_d + K_1^{-1} g(q_d) \quad (5.20)$$

Dette systemet er illustrert i figur 5.3.



Figur 5.3: Mekanisk ekvivalent av den observer-baserte sett-punkts regulatoren presentert av [Ailon og Ortega, 1992]. (Illustrert med lineære fjærer og dempere for enkelthets skyld.) Merk at figuren illustrerer et multivariabelt system. \mathbf{I} er enhetsmatrisen.

Posisjonen α justeres slik at tyngdekraften kan kompenseres.

For å bevise global asymptotisk stabilitet for dette systemet, har forfatterene studert følgende Lyapunov funksjon.

$$V(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) = H(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) - H(q_d, 0, \hat{q}_d, 0) \quad (5.21)$$

der energi funksjonen H er gitt av

$$H = \frac{1}{2} \left[\dot{q}^T M(q) \dot{q} + \dot{\hat{q}}^T \mathbf{I} \dot{\hat{q}} + [\hat{q} - \alpha]^T K [\hat{q} - \alpha] + [\hat{q} - q]^T K_1 [\hat{q} - q] \right] + u_g(q) \quad (5.22)$$

der

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad \text{er manipulatorens kinetiske energi.} \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\hat{q}}^T \mathbf{I} \dot{\hat{q}} \quad \text{er observerens kinetiske energi.} \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{2} [\hat{q} - \alpha]^T K [\hat{q} - \alpha] \quad \text{er den potensielle energien i fjæren } K \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{2} [\hat{q} - q]^T K_1 [\hat{q} - q] \quad \text{er den potensielle energien i fjæren } K_1 \quad (5.26)$$

$$u_g(q) \quad \text{er den potensielle energien fra tyngdekraften.} \quad (5.27)$$

og

$$g(q)^T = \frac{\delta u_g(q)}{\delta q} \quad (5.28)$$

Lyapunov-funksjonen deriveres med hensyn på tiden.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{q}^T \left\{ M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \right\} + \dot{\hat{q}}^T \mathbf{I} \ddot{\hat{q}} \\ & + [\dot{\hat{q}} - \dot{\alpha}]^T K [\hat{q} - \alpha] + [\dot{\hat{q}} - \dot{q}]^T K_1 [\hat{q} - q] + \dot{q}^T g(q) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Fra ligningene 5.16 og 5.17 har vi at

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = -\mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}[\boldsymbol{\alpha} - \hat{\mathbf{q}}] + \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \quad (5.31)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] \quad (5.32)$$

Ved å sette disse ligningene inn i ligning 5.29 og bruke at $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ kan velges slik at $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ er skjev-symmetrisk har vi at

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{q}}^T \{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{g}(\mathbf{q})\} + \dot{\hat{\mathbf{q}}}^T \{-\mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}[\boldsymbol{\alpha} - \hat{\mathbf{q}}] + \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}]\} \\ &\quad + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\alpha}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &= -\dot{\hat{\mathbf{q}}}^T \mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\alpha}] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Fra ligning 5.19 har vi at $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$ når $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$. Dette gir

$$\dot{V} = -\dot{\hat{\mathbf{q}}}^T \mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (5.34)$$

Dermed kan vi konkludere med at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.35)$$

Ved å sette $\dot{\hat{\mathbf{q}}} = 0$ inn i ligning 5.17 har vi at

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\alpha}] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

Siden $\hat{\mathbf{q}}$ og $\boldsymbol{\alpha}$ blir konstante, så vil også \mathbf{q} bli konstant. Dermed har vi at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.37)$$

Systemet er autonomt og LaSalle's teorem brukes. Ved å sette $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ inn i ligning 5.16 har vi at

$$\mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] - \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

Vi ser at energien fra tyngdekraften blir lagret i fjæren. Når $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \equiv \mathbf{0}$ har vi at

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\alpha}] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

Ved å sette ligning 5.38 inn i ligning 5.39 får vi

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\alpha}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

Setter inn ligning 5.19 og får

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \left\{ \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d - \left\{ \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{K}_1^{-1} \right\} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \right\} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d - \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)] - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Anta at

$$\beta \geq \left\| \frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\delta \mathbf{q}} \right\|, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (5.42)$$

Fjær stivhetene dominerer tyngdekraftene, dvs.

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}\} > \beta \quad \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_1\} > \beta \quad (5.43)$$

der $\lambda_{\min}\{\cdot\}$ betyr minste egenverdi. Når fjærstivhetene dominerer tyngdekraftene på denne måten, har forfatterene vist at det finnes et unikt likevektspunkt, og dette likevektspunktet er

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_d \quad (5.44)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_d \quad (5.45)$$

Fra ligningene 5.35 og 5.37 og ved å benytte LaSalle's teorem, konkluderer forfatterene med at systemet er globalt asymptotisk stabilt.

5.3.2 Observer av [Kelly og Ortega, 1993]

Disse forfatterene har presentert en global asymptotisk stabil regulator for fleksible robot manipulatorer. Resultatene gjelder også for stive manipulatorer, som studeres her.

Bevegelsesligningene for robot manipulatoren er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.46)$$

Forfatterene foreslår følgende regulator.

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_P[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - \mathbf{K}_D\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (5.47)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \text{diag}\left\{\frac{b_i s}{s + a_i}\right\} \mathbf{q} \quad (5.48)$$

der a_i og b_i er positive konstanter, \mathbf{q}_d er ønsket posisjon, \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_D er konstante positiv definite matriser og s er Laplace operatoren. Dersom \mathbf{K}_d er en diagonal matrise, ser vi at vi kan slå sammen b_i og K_{Di} . I det som følger studeres derfor følgende regulator

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_P[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - \boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (5.49)$$

Denne regulatoren har tre ukjente parametere, a , b og K_P . Anta at

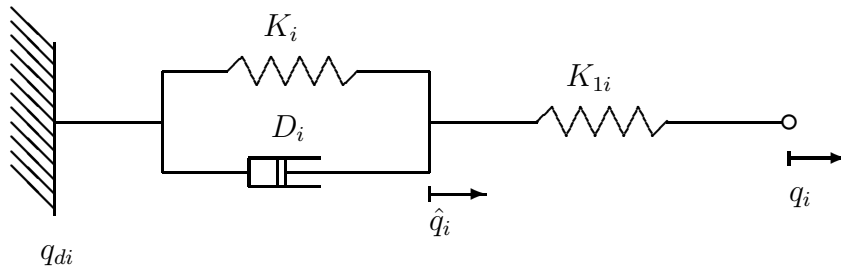
$$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}\}, \lambda_{\min}\{\mathbf{K}\} > \beta \geq \left\| \frac{\delta \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\delta \mathbf{q}} \right\|, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (5.50)$$

Denne ligningen vil bli brukt sammen med LaSalles teorem for å vise global asymptotisk stabilitet.

Det skal nå vises at regulatoren kan illustreres med en mekanisk ekvivalent. Dersom matrisene \mathbf{K}_P og \mathbf{K}_D velges diagonale, har vi for hver leddvariabel, siden q_{di} er konstant.

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{K_{Pi}a_i + [K_{Pi} + b_i]s}{s + a_i} [q_{di} - q_i] \\ &= K_{Pi} \frac{1 + [\frac{1}{a_i} + \frac{b_i}{K_{Pi}a_i}]s}{1 + \frac{1}{a_i}s} [q_{di} - q_i] \end{aligned} \quad (5.51)$$

[Egeland, 1993][side 122] har vist at denne regulatoren kan illustreres med den mekaniske regulatoren i figur 5.4. Bevegelsesligningen for det masseløse punktet \hat{q}_i er gitt av



Figur 5.4: Mekanisk ekvivalent for den observer-baserte sett-punkts regulatoren av [Kelly og Ortega, 1993].

$$K_{1i}[\hat{q}_i - q_i] + K_i[\hat{q}_i - q_{di}] + D_i[\dot{\hat{q}}_i - \dot{q}_{di}] = 0 \quad (5.52)$$

Kraften τ_i er gitt av

$$\tau_i = K_{1i}[\hat{q}_i - q_i] \quad (5.53)$$

Ved å løse ut $\hat{q}_i(s)$ fra denne ligningen får vi at

$$\hat{q}_i(s) = q_i(s) + \frac{\tau_i(s)}{K_{1i}} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \tau_i(s) &= K_{1i}[\hat{q}_i(s) - q_i(s)] \\ &= K_i[q_{di}(s) - \hat{q}_i(s)] + D_i s[q_{di}(s) - \hat{q}_i(s)] \\ &= [K_i + D_i s][q_{di}(s) - \hat{q}_i(s)] \end{aligned} \quad (5.55)$$

Ved å sette ligning 5.54 inn i ligning 5.55 har vi at

$$\tau_i(s) = [K_i + D_i s][q_{di}(s) - q_i(s) - \frac{1}{K_{1i}}\tau_i(s)] \quad (5.56)$$

Ved å løse ut $\tau_i(s)$ får vi

$$\begin{aligned} \tau_i(s) &= K_{1i} \frac{K_i + D_i s}{K_{1i} + K_i + D_i s} [q_{di}(s) - q_i(s)] \\ &= \frac{K_{1i} K_i}{K_{1i} + K_i} \frac{1 + \frac{D_i}{K_i} s}{1 + \frac{K_i}{K_{1i} + K_i} \frac{D_i}{K_i} s} [q_{di}(s) - q_i(s)] \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ved å sammenligne ligningene 5.51 og 5.57 ser vi at

$$K_{Pi} = \frac{K_{1i} K_i}{K_{1i} + K_i} \quad (5.58)$$

$$\frac{1}{a_i} + \frac{b_i}{K_{Pi} a_i} = \frac{D_i}{K_i} \quad (5.59)$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{K_i}{K_{1i} + K_i} \frac{D_i}{K_i} \quad (5.60)$$

Ved å sette ligningene 5.58 og 5.60 inn i ligning 5.59 kan uttrykket for b_i forenkles til

$$b_i = \frac{K_{1i} K_{1i}}{K_{1i} + K_i} \quad (5.61)$$

Vi ser at konstantene a_i , b_i og K_{Pi} er funksjoner av K_i , K_{1i} og D_i og av dette kan vi konkludere med at de to system representasjonene (figur 5.4 og ligningene 5.46–5.48) er ekvivalente. Total-systemet kan dermed illustreres som i figur 5.5.

For dette systemet skal global asymptotisk stabilitet vises ved hjelp av Lyapunov-teori. Fremgangsmåten er litt forskjellig fra det som er presentert i [Kelly og Ortega, 1993]. Her tar vi utgangspunkt i den mekaniske ekvivalenten i figur 5.5. Vi definerer den positiv definite energifunksjonen.

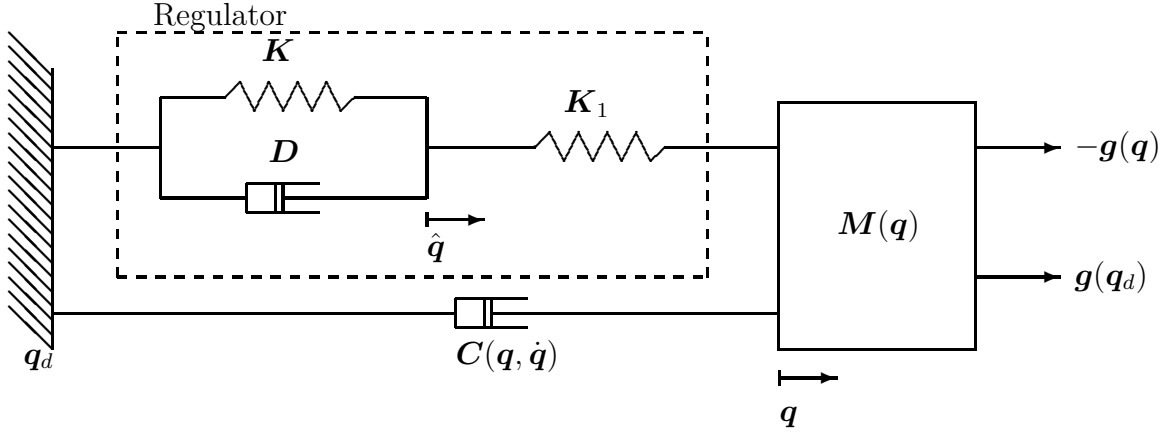
$$V = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K} [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1 [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \right\} + \mathbf{u}_g(\mathbf{q}) - \mathbf{q}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{u}_g(\mathbf{q}_d) + \mathbf{q}_d^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (5.62)$$

der

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\delta \mathbf{u}(\mathbf{q})}{\delta \mathbf{q}} \quad (5.63)$$

Ved å derivere denne med hensyn på tiden får vi at

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right\} + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K} [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1 [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + \dot{\mathbf{q}}^T \{\mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)\} \quad (5.64)$$



Figur 5.5: Mekanisk ekvivalent for den observer-baserte sett-punkts regulatoren av [Kelly og Ortega, 1993]. Merk at figuren illustrerer et multivariabelt system.

Fra ligning 5.46 har vi at

$$M(q)\ddot{q} = \tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) \quad (5.65)$$

Ved å sette denne ligningen inn i ligning 5.64 får vi

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T \left\{ \tau + \frac{1}{2} \dot{M}(q)\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) \right\} \\ &\quad + [\dot{q} - \dot{q}_d]^T K[\hat{q} - q_d] + [\dot{q} - \dot{q}]^T K_1[q - \hat{q}] + \dot{q}^T \{g(q) - g(q_d)\} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Kraften τ er gitt av

$$\tau = K_1[\hat{q} - q] + g(q_d) \quad (5.67)$$

Ved å sette denne inn i ligning 5.66 og velge $C(q, \dot{q})$ slik at $C(q, \dot{q})$ kan velges slik at $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ er skjev-symmetrisk, har vi at

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T K_1[\hat{q} - q] + [\dot{q} - \dot{q}_d]^T K[\hat{q} - q_d] + [\dot{q} - \dot{q}]^T K_1[q - \hat{q}] \\ &= \dot{q} K_1[\hat{q} - q] + [\dot{q} - \dot{q}_d]^T K[\hat{q} - q_d] \end{aligned} \quad (5.68)$$

Siden referanse vektoren er konstant har vi at $\dot{q}_d = 0$. Dette gir

$$\dot{V} = \dot{q} \{K_1(\hat{q} - q) + K[\hat{q} - q_d]\} \quad (5.69)$$

Siden \hat{q} er et masseløst punkt har vi at

$$K_1[\hat{q} - q] + K[\hat{q} - q_d] + D\dot{q} = 0 \quad (5.70)$$

Ved å sette dette inn i ligning 5.69 får vi endelig

$$\dot{V} = -\dot{q}^T D\dot{q} \quad (5.71)$$

Fra dette kan vi konkludere med at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q} \rightarrow 0 \quad (5.72)$$

Systemet er autonomt og LaSalle's teorem brukes. Ved å sette inn $\dot{q} = 0$ inn i ligning 5.70 får vi at

$$K_1[\hat{q} - q] + K[\hat{q} - q_d] = 0 \quad (5.73)$$

Siden $\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]$ er konstant når $t \rightarrow \infty$, så har vi at $\mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}]$ også må være konstant. Fra dette har vi at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.74)$$

Ved å sette dette inn i bevegelsesligningen, 5.46, har vi at

$$\mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (5.75)$$

når $t \rightarrow \infty$. Fra ligning 5.50 sikrer forfatterene at fjær stivheten dominerer tyngdekraftene. På samme måte som regulatoren i forrige avsnitt, finnes det nå et unikt likevektspunkt og dette er gitt av

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d \quad (5.76)$$

dvs, dette er den eneste løsningen av ligning 5.75. Forfatterene konkluderer med at systemet er globalt asymptotisk stabilt.

5.4 Observer-baserte regulatorer for følging

Her skal observer-strukturen presentert i avsnitt 5.2.4 studeres i detalj. De regulatorene som presenteres her, krever eksakt kjennskap til system-parameterene. I tillegg må man anta at hastighetene i systemet er begrensede, siden koriolis-kraftene ikke kan kanselleres uten å kjenne manipulatorens hastigheter. På grunn av denne antagelsen kan bare lokal stabilitet vises.

5.4.1 Observer av [Nicosia og Tomei, 1990]

Disse forfatterene har presentert to regulatorer basert på bruk av hastighetsobserver. Den ene regulatoren er for sett-punkts regulering, mens den andre er for følging av varierende referanse. Kun den siste studeres her. I begge tilfeller har forfatterene vist lokal asymptotisk stabilitet.

Konstruksjon av observer-struktur

Robot dynamikken er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.77)$$

Definer

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} \quad (5.78)$$

Observerstrukturen er gitt av ligningene

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{z} + k_d \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.79)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \quad (5.80)$$

der k_d er en positiv konstant og matrisen \mathbf{K}_p er positiv definit. Denne observer-strukturen er illustrert i figur 5.2. Ligning 5.79 deriveres med hensyn på tiden, slik at

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{z}} + k_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.81)$$

Dette gir ved innsetting av ligning 5.80.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + k_d \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.82)$$

Uttrykket for vektoren $\boldsymbol{\tau}$ er gitt av ligning 5.77. Denne settes inn i ligning 5.82 slik at vi får.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} = -\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - k_d \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.83)$$

Ved   bruke egenskap 4.9 har vi at

$$\begin{aligned} C(q, \dot{q})\dot{q} - C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} &= C(q, \dot{q})\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{\hat{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\hat{q}} - C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} \\ &= C(q, \dot{q})\ddot{\hat{q}} + C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Dette gir

$$M(q)\ddot{\hat{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\hat{q}} = -K_p\tilde{q} - k_dM(q)\dot{\hat{q}} - C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} \quad (5.85)$$

Teorem 5.1 *Anta at*

$$\|\dot{q}(t)\| \leq k_q \quad \forall t \geq 0 \quad (5.86)$$

$$\|C(q, \dot{q})\dot{q}\| \leq k_c\|\dot{q}\| \quad (5.87)$$

der k_q og k_c er positive konstanter. Definer tilstandsvektoren

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T \quad (5.88)$$

Dersom

$$k_d > \frac{k_c k_q}{M_m} \quad (5.89)$$

så er likevektspunktet $x = 0$ asymptotisk stabilt med attraksjonsområde

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\| < \sqrt{\frac{L_m}{L_M}} \left[\frac{M_m - k_d}{k_c} - k_q \right] \right\} \quad (5.90)$$

der M_m er den minste verdien til normen til massematrisen og L_m og L_M er gitt av

$$\frac{1}{2}L_m\|x\|^2 \leq V \leq \frac{1}{2}L_M\|x\|^2 \quad (5.91)$$

der V er Lyapunov funksjonen definert i ligning 5.92.

Bevis: Definerer følgende Lyapunov-funksjonskandidat

$$V = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T M(q)\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p\tilde{q} = \frac{1}{2}x^T Lx \quad (5.92)$$

der matrisen L er gitt av

$$L = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

Denne funksjonen deriveres med hensyn p  tiden.

$$\dot{V} = \dot{\tilde{q}}^T M(q)\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q)\dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T K_p\dot{\tilde{q}} \quad (5.94)$$

Ved   sette inn ligning 5.85 i ligning 5.94 f r vi at

$$\dot{V} = \dot{\tilde{q}}^T \left[-C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} - k_dM(q)\dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{\tilde{q}} \right] + \tilde{q}^T K_p\dot{\tilde{q}} \quad (5.95)$$

Ved   bruke at $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ kan velges skjev-symmetrisk, se egenskap 4.5, har vi at

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}^T \left[-K_p\tilde{q} - k_dM(q)\dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} \right] + \tilde{q}^T K_p\dot{\tilde{q}} \\ &= -\dot{\tilde{q}}^T k_dM(q)\dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T C(q, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Ved å bruke egenskapene 4.3 og 4.9 har vi at

$$|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| = |-\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 k_c [\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_q] \quad (5.97)$$

Dette gir

$$\dot{V} \leq -\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 [k_d M_m - k_c (\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_q)] \quad (5.98)$$

Vi har altså at dersom

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| < \frac{k_d M_m}{k_c} - k_q \quad (5.99)$$

så har vi at

$$\dot{V} \leq -\beta \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (5.100)$$

der β er en positiv konstant når høyresiden av ligning 5.99 er positiv. Forfatteren bruker nå ligning 5.85 og LaSalles teorem for å vise at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.101)$$

og forfatteren konkluderer med at likevektspunktet $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ er uniformt stabilt. Siden $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ vet vi at følgende krav er tilstrekkelig for å tilfredsstille ligning 5.99.

$$\|\mathbf{x}\| < \frac{k_d M_m}{k_c} - k_q \quad (5.102)$$

Den største verdien for initialverdien $\|\mathbf{x}(0)\|$ finnes ved å bruke at

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}(0), 0) \quad (5.103)$$

I det verste tilfellet har vi at

$$\mathbf{L}_m \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{L}_M \|\mathbf{x}(0)\|^2 \quad (5.104)$$

For at kravet i ligning 5.103 skal være oppfylt må vi ha at

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \sqrt{\frac{\mathbf{L}_m}{\mathbf{L}_M}} \left[\frac{k_d M_m}{k_c} - k_q \right] \quad (5.105)$$

■

Forfatteren studerer nå to regulatorer, en for sett-punkts regulering og en for følging av varierende referanse. Kun den siste studeres her.

Observer-basert regulator for følging av varierende referanse

I forrige avsnitt viste forfatteren at den estimerte posisjonen $\hat{\mathbf{q}}$ konvergente asymptotisk mot manipulatorens posisjon \mathbf{q} . I dette avsnittet skal en regulator konstrueres. Målet er å oppnå at \mathbf{q} konvergerer asymptotisk mot ønsket posisjon, \mathbf{q}_d .

Regulatoren velges

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{H}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{H}_d [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \quad (5.106)$$

der matrisene \mathbf{H}_p og \mathbf{H}_d er positiv definit. Definer vektoren

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (5.107)$$

Ligningen 5.106 settes inn i ligning 5.77 og vi får på samme måte som for ligning 5.85.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{H}_p \mathbf{e} - \mathbf{H}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{H}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.108)$$

Teorem 5.2 Definer tilstandsvektoren

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}^T \quad \dot{\mathbf{e}}^T \quad \tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T \quad (5.109)$$

Definer matrisen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}(\mathbf{q}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

Anta som før at

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\| \leq k_q \quad \forall t \geq 0 \quad (5.111)$$

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (5.112)$$

Dersom

$$k_d > \frac{k_c}{M_m} \left[k_q + \frac{1}{4} \frac{[\mathbf{H}_{dM} + k_c k_q]^2}{\mathbf{H}_{dm} k_c} \right] \quad (5.113)$$

da er likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lokalt asymptotisk stabilt og attraksjonsområdet er gitt av

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L_m}{L_M}} \left[\frac{k_d M_m}{k_c} - k_q - \frac{1}{4} \frac{[\mathbf{H}_{dM} + k_c k_q]^2}{\mathbf{H}_{dm} k_c} \right] \right\} \quad (5.114)$$

Bevis: Forfatteren definerer følgende Lyapunov-funksjonskandidat.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{H}_p \mathbf{e} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Denne deriveres med hensyn på tiden og vi får.

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{H}_p \dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.116)$$

Nå settes ligningene 5.85 og 5.108 inn i ligning 5.116 og vi får

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}^T \mathbf{H}_p \dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}^T \left[-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{H}_p \mathbf{e} - \mathbf{H}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{H}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} \right] \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - k_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \\ &= \dot{\mathbf{e}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{H}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{H}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \\ &\quad + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - k_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \end{aligned} \quad (5.117)$$

Ved å bruke at matrisen $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ kan velges skjev-symmetrisk, har vi at

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{e}}^T \left[-\mathbf{H}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{H}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[-k_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \\ &\leq - \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{e}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{dm} & -\frac{1}{2}[\mathbf{H}_{dm} + k_c k_q] \\ -\frac{1}{2}[\mathbf{H}_{dm} + k_c k_q] & [k_d M_m - k_c [k_q + \|\dot{\mathbf{e}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|]] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{e}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.118)$$

\dot{V} er en negativ definit funksjon dersom matrisen på høyresiden av ligning 5.118 er positiv definit, dvs.

$$\|\dot{\mathbf{e}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| < k_d \frac{M_m}{k_c} - k_q - \frac{1}{4} \frac{[\mathbf{H}_{dM} + k_c k_q]^2}{\mathbf{H}_{dm} k_c} \quad (5.119)$$

Vi kan altså konkludere med at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.120)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.121)$$

Forfatteren bruker nå ligningene 5.85 og 5.108 og LaSalles teorem for å vise at perfekt følging oppnås. Attraksjonsområdet finnes på følgende måte. Vi har at

$$\|\mathbf{x}\|^2 \geq \|\dot{\mathbf{e}}\|^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (5.122)$$

Siden $\|\dot{\mathbf{e}}\|$ og $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ er positive tall, har vi at

$$\|\dot{\mathbf{e}}\|^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - 2\|\dot{\mathbf{e}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| > 0 \quad (5.123)$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{x}\|^2 &> \|\dot{\mathbf{e}}\|^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + 2\|\dot{\mathbf{e}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ 2\|\mathbf{x}\|^2 &> \left[\|\dot{\mathbf{e}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \right]^2 \\ \|\mathbf{x}\| &> \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\|\dot{\mathbf{e}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \right] \end{aligned} \quad (5.124)$$

Da har vi at kravet i ligning 5.119 er oppfylt dersom

$$\|\mathbf{x}\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k_d \frac{M_m}{k_c} - k_q - \frac{1}{4} \frac{[H_{dM} + k_c k_q]^2}{H_{dm} k_c} \right] \quad (5.125)$$

På samme måte som for observer-strukturen i forrige avsnitt, får vi at systemet er lokalt asymptotisk stabilt med attraksjonsområde

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L_m}{L_M}} \left[k_d \frac{M_m}{k_c} - k_q - \frac{1}{4} \frac{[H_{dM} + k_c k_q]^2}{H_{dm} k_c} \right] \quad (5.126)$$

■

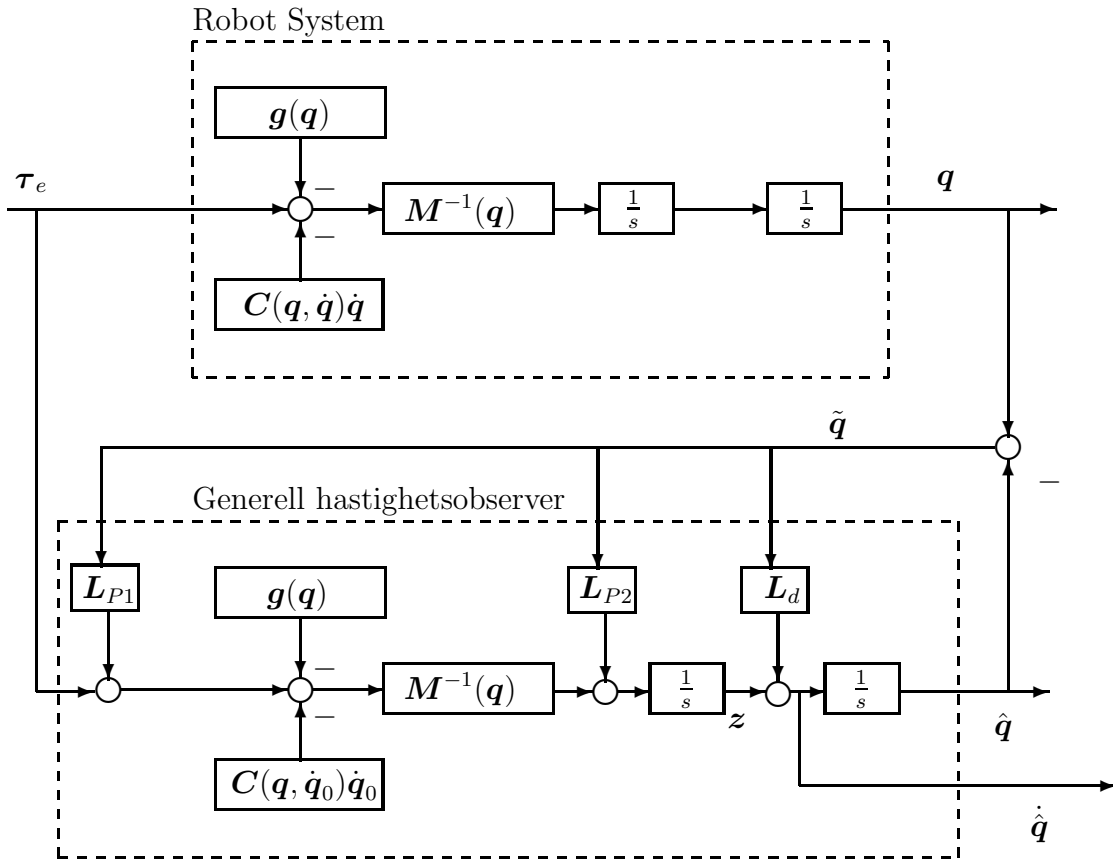
Kommentar

Forfatteren konkluderer fra ligning 5.120, 5.121, 5.85 og 5.108 ved å bruke LaSalles teorem at posisjonen \mathbf{q} konvergerer mot ønsket posisjon \mathbf{q}_d . Ligningene 5.85 og 5.108 beskriver to ikke-autonome systemer. For at LaSalles teorem skal kunne brukes for å vise at posisjonen konvergerer mot ønsket posisjon, må man først kontrollere at denne tilstanden er den største invariante mengden når ligningene 5.120 og 5.121 gjelder. Dette er ikke gjort i artikkelen til [Nicosia og Tomei, 1990] og det er generelt vanskelig å vise. I neste avsnitt skal en annen løsning studeres. Denne løsningen innfører en “glideflate” variabel, \mathbf{s} , som beskrevet i [Slotine og Li, 1987]. Dermed blir den tids-deriverte av Lyapunov-funksjonen en funksjon av både posisjon og hastighet og problemet med LaSalles teorem og ikke-autonome systemer unngås. NB: For sett-punkts regulatorene presentert tidligere i kapittelet beskriver feil-dynamikken et autonomt system. For disse systemene er det relativt lett å vise at ønsket posisjon er den største invariante mengden når hastigheten konvergerer mot ønsket hastighet, slik at LaSalles teorem kan brukes.

5.4.2 Observer av [Berghuis, 1993]

Denne forfatteren presenterer observerstrukturen i figur 5.6. For denne observeren vises lokal eksponensiell stabilitet, dvs. det vises at \tilde{q} (posisjonsfeilen mellom observer og manipulator) går mot null når man antar at hastighetene i systemet er begrenset. (Herav lokal stabilitet.) Når så regulatoren skal konstrueres, endres observeren noe men bevisførselen er den samme.

Observer-strukturen ligner veldig på strukturen presentert av [Nicosia og Tomei, 1990]. Den største forskjellen er at i denne løsningen unngår forfatteren å bruke LaSalles teorem for å vise at posisjonen konvergerer mot ønsket posisjon.



Figur 5.6: Observer-struktur av [Berghuis, 1993]

Konstruksjon av observeren

Forfatteren definerer følgende størrelser

$$e \triangleq q - q_d \quad (5.127)$$

$$\tilde{q} \triangleq q - \hat{q} \quad (5.128)$$

$$\dot{q}_0 \triangleq \dot{\hat{q}} - \Lambda_2 \tilde{q} \quad (5.129)$$

$$\dot{q}_r \triangleq \dot{q}_d - \Lambda_1 [\hat{q} - q_d] \quad (5.130)$$

$$s_1 \triangleq \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{e} + \Lambda_1 [e - \tilde{q}] \quad (5.131)$$

$$s_2 \triangleq \dot{q} - \dot{q}_0 = \dot{\hat{q}} + \Lambda_2 \tilde{q} \quad (5.132)$$

Der \mathbf{A}_1 og \mathbf{A}_2 er positiv definite matriser. Legg merke til at $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ er en funksjon av kjente størrelser, dvs.

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 &= \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}_1[\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{q}}] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{q}} \\ &= [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{A}_1[\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{q}}] - \mathbf{A}_2\tilde{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (5.133)$$

[Berghuis, 1993] gjør følgende antagelse.

Antagelse 5.1 *Matrisene \mathbf{L}_d og \mathbf{L}_{P2} kan velges*

$$\mathbf{L}_d = l_d \mathbf{I} + \mathbf{A}_2 \quad (5.134)$$

$$\mathbf{L}_{P2} = l_d \mathbf{A}_2 \quad (5.135)$$

der l_d er en positiv skalar. □

Bevegelsesligningene for robot manipulatorene er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_e \quad (5.136)$$

Fra figur 5.6 ser vi at ligningene for observeren blir

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{z} + \mathbf{L}_d \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.137)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{L}_{P1}\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{L}_{P2}\tilde{\mathbf{q}} \quad (5.138)$$

der \mathbf{L}_d , \mathbf{L}_{P1} og \mathbf{L}_{P2} er symmetrisk positiv definite matriser.

Ligning 5.137 deriveres, løses med hensyn på $\dot{\mathbf{z}}$ og settes inn i ligning 5.138.

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{L}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{L}_{P1}\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{L}_{P2}\tilde{\mathbf{q}} \quad (5.139)$$

Ved å sette inn ligning 5.136 inn i ligning 5.139 får vi at

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{L}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{L}_{P1}\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{L}_{P2}\tilde{\mathbf{q}} \quad (5.140)$$

Ved å for-multiplisere med $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ får vi at

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] - \mathbf{L}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{L}_{P2}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{L}_{P1}\tilde{\mathbf{q}} \quad (5.141)$$

Ved å bruke antagelse 5.1 får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_2 + l_d \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{s}_2 + \mathbf{L}_{P1}\tilde{\mathbf{q}} &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_2 \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s}_2)[\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{s}_2] \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2)[\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}]\end{aligned}\quad (5.142)$$

Nå skal lokal asymptotisk stabilitet vises.

Antagelse 5.2 *Manipulatorens hastighet $\dot{\mathbf{q}}$ er begrenset av V_P , dvs.*

$$V_P = \sup_t \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (5.143)$$

Det er denne antagelsen som gjør at lokal og ikke global stabilitet kan vises. □

Påstand 5.1 Feildynamikken til observeren gitt i ligning 5.142 er lokal eksponensiell stabil under følgende betingelse

$$l_d > M_m^{-1} C_M V_P \quad (5.144)$$

der konstantene M_m og C_M er gitt av (se egenskapene 4.2 og 4.3)

$$M_m \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq M_M \quad (5.145)$$

$$C_m \leq \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}})\| \leq C_M \quad (5.146)$$

Kravet i ligning 5.146 er oppfylt når antagelse 5.2 gjelder. Lokal eksponensiell stabilitet vil si at det finnes positive konstanter m og ρ slik at

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq m e^{-\rho t} \|\mathbf{x}(0)\|^2 \quad t \geq 0 \quad (5.147)$$

der

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{s}_2^T \quad \tilde{\mathbf{q}}^T] \quad (5.148)$$

Attraksjonsområdet er gitt av

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\mathbf{x}\| < [l_d M_m C_M^{-1} - V_P] \sqrt{\frac{P_m}{P_M}} \right\} \quad (5.149)$$

der P_m og P_M er definert som

$$P_m = \min \{M_m, L_{P1,m}\}, \quad P_M = \max \{M_M, L_{P1,M}\} \quad (5.150)$$

der $L_{P1,m}$ og $L_{P1,M}$ er gitt av

$$L_{P1,m} \leq \|\mathbf{L}_{P1}\| \leq L_{P1,M} \quad (5.151)$$

Bevis: Se [Berghuis, 1993, Side 61] for detaljene i dette beviset. Definerer Lyapunovfunksjonen

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.152)$$

Denne ligningen tilfredsstiller

$$\frac{1}{2} P_m \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2} P_M \|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.153)$$

der P_m og P_M er definert i ligning 5.150. Ved å derivere med hensyn på tiden får vi

$$\dot{V} = -\mathbf{s}_2^T l_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_2 - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2) [\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] \quad (5.154)$$

Nå brukes egenskap 4.9 for å vise at

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2) [\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_2 \quad (5.155)$$

Ved å benytte antagelse 5.2 og egenskap 4.2 har vi at

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{s}_2) \leq -[l_d M_m - C_M (\|\mathbf{s}_2\| + V_P)] \|\mathbf{s}_2\|^2 - \Lambda_{2,m} L_{P1,m} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (5.156)$$

Denne ligningen viser at dersom

$$\|\mathbf{s}_2\| < l_d M_m C_M^{-1} - V_P \quad (5.157)$$

så eksisterer det en konstant $\kappa > 0$ slik at

$$\dot{V} \leq -\kappa \|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.158)$$

Fra ligning 5.157 finnes attraksjonsområdet, dvs.

$$\|\mathbf{x}\| < l_d M_m C_M^{-1} - V_P \quad (5.159)$$

som impliserer

$$\|\mathbf{x}(0)\| < [l_d M_m C_M^{-1} - V_P] \sqrt{\frac{P_m}{P_M}} \quad (5.160)$$

Fra ligning 5.153, 5.158 og 5.159 har vi endelig

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) \quad \forall t \geq 0 \quad (5.161)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\kappa \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (5.162)$$

■

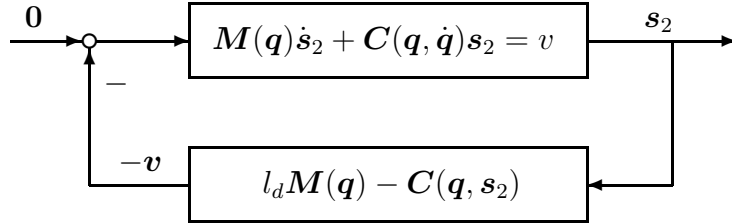
Passivitet

Stabilitet kan også vises med passivitetsbetraktninger. Feildynamikken i ligning 5.142 kan deles opp i to under-systemer.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_2 = \mathbf{v} \quad (5.163)$$

$$\mathbf{v} = -l_d \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{s}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_2 \quad (5.164)$$

Dette er illustrert i figur 5.7. Passivitet for forovergrenen kan vises med egenskap 4.11. Dersom nå



Figur 5.7: Passivitetsbetraktning av observerstrukturen.

tilbakekoblingsgrenen er passiv, så er totalsystemet passivt i følge teorem 2.2. Indreproduktet for tilbakekoblingsgrenen er gitt av

$$\begin{aligned} \langle -\mathbf{v}, \mathbf{s}_2 \rangle_T &\triangleq \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{s}_2 dt \\ &= \int_0^T \left\{ \mathbf{s}_2^T l_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_2 \right\} dt \end{aligned} \quad (5.165)$$

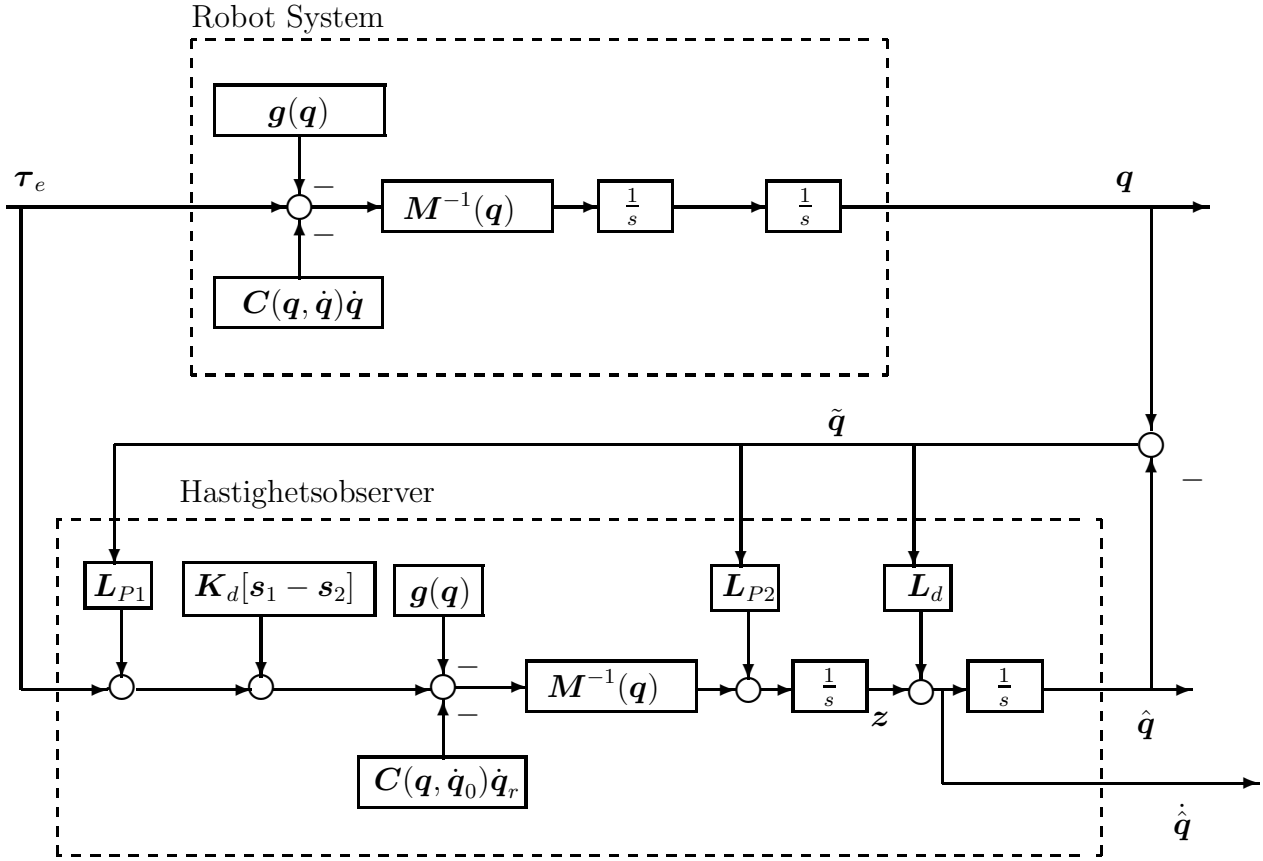
Under antagelsen 5.157 er dette indreproduktet nedre begrenset og dermed er $\mathbf{s}_2 \mapsto -\mathbf{v}$ passiv.

Konstruksjon av både regulator og observer.

I forrige delkapittel ble det vist at observeren sin posisjon $\hat{\mathbf{q}}$ gikk lokalt asymptotisk mot manipulatoren sin posisjon \mathbf{q} . Det vi ønsker er at manipulatoren sin posisjon skal gå asymptotisk mot referansen \mathbf{q}_d . For å få til dette endres observeren fra forrige delkapittel noe. [Berghuis, 1993] velger nå regulatoren

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d[\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2] - \mathbf{K}_P \mathbf{e} \quad (5.166)$$

Observeren velges nå som i figur 5.8. Dette gir følgende ligninger for observeren.



Figur 5.8: Observer-struktur av [Berghuis, 1993] for bruk med regulator.

$$\dot{\hat{q}} = z + L_d \tilde{q} \quad (5.167)$$

$$\dot{z} = \ddot{q}_r + M^{-1}(q)[L_{P1}\tilde{q} - K_P e] + L_{P2}\tilde{q} \quad (5.168)$$

der matrisene L_d og L_{P2} er gitt i antagelse 5.1.

Manipulatorens bevegelsesligninger er gitt av

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau_e \quad (5.169)$$

Ved å sette inn uttrykket for regulatoren i ligning 5.166 får vi at

$$M(q)[\ddot{q} - \ddot{q}_r] + C(q, \dot{q})[\dot{q} - \dot{q}_r] = -K_d[s_1 - s_2] - K_P e + C(q, \dot{q}_0)\dot{q}_r - C(q, \dot{q})\dot{q}_r \quad (5.170)$$

Dette kan omskrives til

$$\begin{aligned} M(q)\dot{s}_1 + C(q, \dot{q})s_1 &= -K_d[s_1 - s_2] - K_P e + C(q, \dot{q}_0)[\dot{q}_0 - \dot{q}] \\ &= -K_d[s_1 - s_2] - K_P e - C(q, \dot{q}_r)s_2 \end{aligned} \quad (5.171)$$

Ved å derivere ligning 5.167 med hensyn på tiden og sette inn ligning 5.168 har vi at

$$\ddot{\hat{q}} - L_d \dot{\hat{q}} = \ddot{q}_r + M(q)^{-1}[L_{P1}\tilde{q} - K_P e] + L_{P2}\tilde{q} \quad (5.172)$$

Ved å for-multplisere med $M(q)$ får vi

$$M(q)[\ddot{\hat{q}} - \ddot{q} - L_d \dot{\hat{q}} - L_{P2}\tilde{q}] = L_{P1}\tilde{q} - K_P e \quad (5.173)$$

Ved å bruke antagelse 5.1 kan dette omskrives til

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{s}}_2 + l_d \mathbf{s}_2] + \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{K}_P \mathbf{e} \quad (5.174)$$

Ved nå å sette inn for $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_1$ fra ligning 5.171 har vi endelig at

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_2 + [l_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d] \mathbf{s}_2 + \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}_d \mathbf{s}_1 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_1)[\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] \quad (5.175)$$

For å vise lokal asymptotisk stabilitet av dette systemet, betraktes energifunksjonen til systemet, og denne velges som Lyapunov funksjonskandidat.

$$V(\mathbf{e}, \mathbf{s}_1, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.176)$$

Den tidsderiverte av denne funksjonen er gitt ved

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}, \mathbf{s}_1, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{s}_2) = & -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_d [\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2] - \mathbf{s}_2^T l_d \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_d [\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1] \\ & + \mathbf{s}_1^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_2) [\mathbf{s}_1 - \dot{\mathbf{q}}] + \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s}_1) [\mathbf{s}_2 - \dot{\mathbf{q}}] \\ & - \mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda}_1^T \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{K}_P \mathbf{e} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.177)$$

der egenskap 4.5 er benyttet. Dersom man velger $\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Lambda}$ og $\mathbf{K}_P = \mathbf{L}_{P1}$ har vi at

$$-\mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{K}_P \mathbf{e} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{L}_{P1} \tilde{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_P \mathbf{e} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.178)$$

Ved å benytte dette sammen med egenskapene 4.2, 4.3 og 4.4 kan det vises at

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}, \mathbf{s}_1, \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{s}_2) \leq & -\{K_{d,m} - C_M[V_M + \|\mathbf{\Lambda} \mathbf{e}\| + \|\mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}\| + \|\mathbf{s}_2\|]\} \|\mathbf{s}_1\|^2 \\ & -\{l_d M_m - K_{d,m} - C_M[V_M + \|\mathbf{\Lambda} \mathbf{e}\| + \|\mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}\| + \|\mathbf{s}_1\|]\} \|\mathbf{s}_2\|^2 \\ & -\frac{1}{2} K_{p,m} \mathbf{\Lambda}_M^{-1} \|\mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{1}{2} K_{p,m} \mathbf{\Lambda}_M^{-1} \|\mathbf{\Lambda} \mathbf{e}\|^2 \end{aligned} \quad (5.179)$$

Under betingelsene

$$K_{d,m} > C_M V_M \quad (5.180)$$

$$l_d > M_m^{-1} (K_{d,m} + C_M V_M) \quad (5.181)$$

er systemet lokalt asymptotisk stabilt med attraksjonsområde

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \delta \sqrt{\frac{P_m}{P_M}} \right\} \quad (5.182)$$

der

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{s}_1^T \quad (\mathbf{\Lambda} \mathbf{e})^T \quad \mathbf{s}_2^T \quad (\mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}})^T] \quad (5.183)$$

og

$$\delta = \min \left\{ \frac{l_d M_m - K_{d,m}}{C_M} - V_M, \frac{K_{d,m}}{C_M} - V_M \right\} \quad (5.184)$$

$$P_m = \min \left\{ M_m, \mathbf{\Lambda}_M^{-2} K_{p,m} \right\} \quad (5.185)$$

$$P_M = \max \left\{ M_M, \mathbf{\Lambda}_m^{-2} K_{p,M} \right\} \quad (5.186)$$

Bevis: Fremgangsmåten er som i forrige delkapittel. For mer informasjon se [Berghuis, 1993, side 75-77].

5.5 Støybetraktninger

For observerene til [Nicosia og Tomei, 1990] og [Berghuis, 1993] har vi at hastighetsestimatet kan skrives

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{z} + \mathbf{L}_d \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.187)$$

Vi ser at en eventuell målestøy i \mathbf{q} vil forsterkes opp av matrisen \mathbf{L}_d i hastighetsestimatet. Matrisen \mathbf{L}_d kan heller ikke velges liten, da stabilitetskravet nettopp var at denne matrisen var større enn en verdi bestemt av systemparameterene, se ligningene 5.181 og 5.134. [Berghuis, 1993] konkluderer derfor med at disse observerene er følsomme overfor støy i posisjonsmålingen, se [Berghuis, 1993][side 71–72].

Observerene til [Ailon og Ortega, 1992] og [Kelly og Ortega, 1993] er mindre følsomme overfor støy i posisjonsmålingen. Dette kan f.eks. sees fra figur 5.4. Dempren \mathbf{D} i denne figuren vil “låse” punktet $\hat{\mathbf{q}}$ dersom bevegelsen blir høyfrekvent. Hastighetsestimatet til [Kelly og Ortega, 1993] er fremkommet ved først å lavpassfiltrere posisjonsmålingen og deretter derivasjon av det lavpassfiltrerte signalet. Dette vil redusere innvirkningen av høyfrekvent målestøy.

Kapittel 6

Observer basert på virtuell manipulator

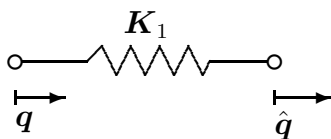
6.1 Innledning

En virtuell robot manipulator skal brukes som hastighetsobserver for den fysiske manipulatoren. Den virtuelle manipulatoren skal ha sitt eget pådrag, og de to manipulatorene skal sammenkobles med et passivt element. Systemet er illustrert i figur 6.1.

Ideen er tatt fra observeren til [Berghuis, 1993] og [Nicosia og Tomei, 1990], men der er ikke sammenkoblingen et passivt element.

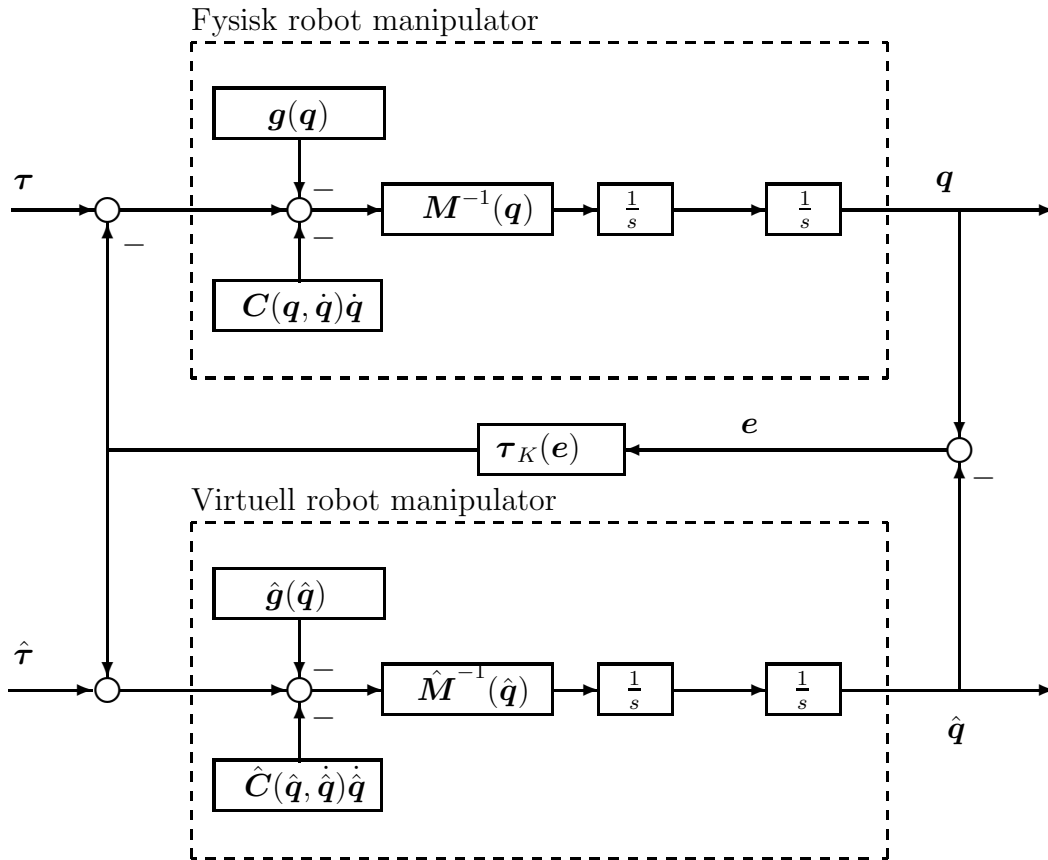
6.2 Mekanisk ekvivalent

Sammenkoblingen mellom de to manipulatorene skal altså være et passivt element. Det enkleste en kan velge, er da fjærer mellom leddene som illustrert i figur 6.2.



Figur 6.2: Mekanisk ekvivalent for den passive sammenkoblingen mellom fysisk manipulator (\mathbf{q}) og virtuell manipulator ($\hat{\mathbf{q}}$) for leddvariablene. (Illustrert med en lineær fjær for enkelhets skyld, leddene kan gjerne være rotasjonsledd.) Dersom matrisen \mathbf{K}_1 er diagonal, er det en fjær for hver leddvariabel.

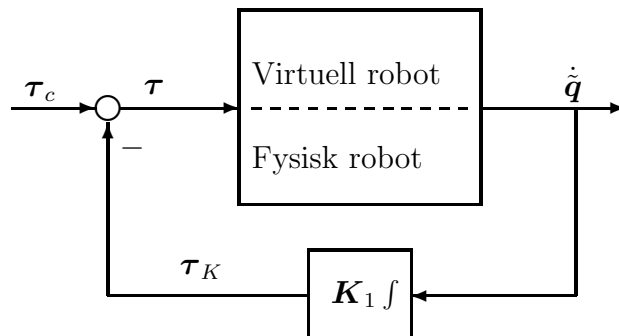
Legg merke til at det ikke er damping i sammenkoblingen mellom den virtuelle og den fysiske manipulatoren. Det er ingen ting i veien for å legge inn dempere, bare en husker på at den fysiske manipulatorens hastighet ikke er tilgjengelig. Ved å kun bruke fjærer i sammenkoblingen mellom de to manipulatorene, blir det regulatoren sin oppgave å legge inn damping. Dette er temaet for neste kapittel, kapittel 7.



Figur 6.1: Hastighetsobserver basert på en virtuell manipulator. Den fysiske manipulatorene og den virtuelle manipulatorene er koblet sammen med et passivt element, gitt av $\tau_K(e)$. Vi ser at den virtuelle manipulatorene ikke trenger å ha samme dynamikk som den fysiske manipulatorene.

6.3 Passivitetsegenskaper

Grunnen til at manipulatorene kobles sammen med et passivt element, er at da kan totalsystemet med manipulatorene og sammenkobling bli passiv. Passivitet er en nyttig egenskap når stabilitet skal vises i neste kapittel.



Figur 6.3: To sammenkoblede manipulatorene.

Systemet i figur 6.3 er en sammenkobling av to passive systemer der det ene systemet er i tilbakekoblingen. Total systemet er da passivt, se teorem 2.2.

For å vise at total systemet er passivt, må det vises at de to under-systemene er passive, dvs. vi må vise at

$$\boldsymbol{\tau} \mapsto \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \text{ passiv.} \quad (6.1)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \mapsto \boldsymbol{\tau}_K \text{ passiv.} \quad (6.2)$$

Dynamikken for en robot manipulator, $\boldsymbol{\tau} \mapsto \dot{\mathbf{q}}$, er passiv.

Bevis: Se egenskap 4.10. ■

Egenskap 6.1 (Passivitet) Det kombinerte systemet, $\boldsymbol{\tau} \mapsto \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, som består av fysisk og virtuell manipulator er passivt.

Bevis: Total systemet er gitt av ligningen

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.3)$$

der matrisene og vektorene er gitt som følger

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Den potensielle energien for total systemet tilfredsstiller

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (6.9)$$

Egenskapen $\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}}$ skjev-symmetrisk gjelder fortsatt.

$$\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C} & 0 \\ 0 & \dot{\hat{\mathbf{M}}} - 2\hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Bevis: En matrise \mathbf{A} er skjev-symmetrisk når

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} -\{\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}}\}^T &= \begin{bmatrix} -\{\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}\}^T & 0 \\ 0 & -\{\dot{\hat{\mathbf{M}}} - 2\hat{\mathbf{C}}\}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}\} & 0 \\ 0 & \{\dot{\hat{\mathbf{M}}} - 2\hat{\mathbf{C}}\} \end{bmatrix} \\ &= \{\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}}\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

■

Vi skal nå vise passivitet.

$$\langle \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\tau} \rangle_T = \int_0^T \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{q}}) \right] dt \quad (6.13)$$

$$(6.14)$$

Ved å bruke at $\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}}) - 2\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ kan velges skjev-symmetrisk og får vi på samme måte som for egenskap 4.10

$$\langle \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\tau} \rangle_T \geq -\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)^T \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}}(0)) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) - V(0) \quad (6.15)$$

der $V(0)$ er den initielle potensielle energien.

■

Egenskap 6.2 (Passiv sammenkobling) Sammenkoblingen mellom manipulatorene, fjæren \mathbf{K}_1 , $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \mapsto \boldsymbol{\tau}_K$, er passiv.

Bevis: Matrisen \mathbf{K}_1 er positiv definit, dvs.

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad (6.16)$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\tau}_K, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle_T &= \int_0^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \boldsymbol{\tau}_K dt \\ &= \int_0^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}} dt \\ &\geq -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T(0) \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}}(0) = \beta \quad \forall T > 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

■

Total systemet som er en sammenkobling av disse to systemene, se figur 6.3 er altså passivt.

I neste kapittel skal en regulator basert på denne observerstrukturen studeres.

Kapittel 7

Observerbasert regulator for følging av varierende referanse

7.1 Innledning

I dette kapitlet vil en regulator basert på observeren fra forrige kapittel bli presentert. Målet er å påvise global asymptotisk stabilitet. Vi skal se at dette er vanskelig, da koriolis-kreftene ikke kan kanselleres uten å kjenne den fysiske manipulatorens hastighet. Regulatoren må også innføre demping i systemet.

7.2 Regulator

Regulator, observer og fysisk manipulator vil ha en struktur som vist i figur 7.1. Vi ser fra figur 7.1 at regulatoren består av to foroverkoblinger og to tilbakekoblinger. Vi ser at tilbakekoblingene er en PD-regulator på den virtuelle manipulatoren og en P-regulator på den fysiske manipulatoren. Dynamikken til de to manipulatorene er gitt av

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (7.1)$$

$$M(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + C(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + g(\hat{q}) = \hat{\tau} \quad (7.2)$$

Regulatoren er beskrevet av ligningene

$$\tau = \tau_F - K_1[q - \hat{q}] - K_p[q - q_d] \quad (7.3)$$

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_F - K[\hat{q} - q_d] - D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[q - \hat{q}] \quad (7.4)$$

der foroverkoblingsvektorene i første omgang velges

$$\tau_F = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q) \quad (7.5)$$

$$\hat{\tau}_F = M(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + C(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + g(\hat{q}) \quad (7.6)$$

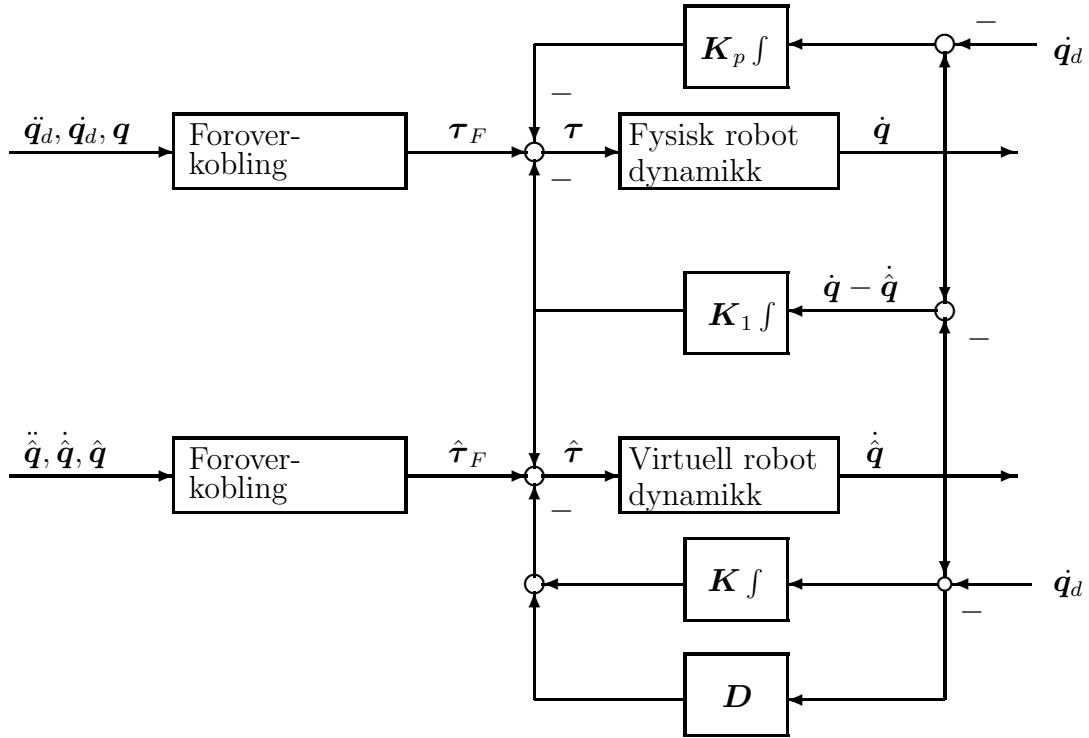
Vi legger nå merke til at $\hat{\tau}$ vil kansellere dynamikken til den virtuelle manipulatoren. Dersom vi setter uttrykkene i ligning 7.3 og 7.4 inn i ligning 7.1 og 7.2, får vi

$$M(q)[\ddot{q} - \ddot{q}_d] + C(q, \dot{q})[\dot{q} - \dot{q}_d] = -K_1[q - \hat{q}] - K_p[q - q_d] + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d - C(q, \dot{q})\dot{q}_d \quad (7.7)$$

$$K[\hat{q} - q_d] + D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[\hat{q} - q] = 0 \quad (7.8)$$

Ved å bruke egenskap 4.9 har vi at

$$C(q, \dot{q})\dot{q}_d = C(q, \dot{q}_d)\dot{q} \quad (7.9)$$



Figur 7.1: Regulator basert på observer (virtuell manipulator). Vi har PD-regulator på den virtuelle manipulatoren og P-regulator på den fysiske manipulatoren. De to manipulatorene er sammenkoblet med fjærer K_1 . Merk at $\dot{\mathbf{q}}$ ikke er en måling, men figuren er tegnet på denne måten for å illustrere passivitets-egenskapene, se senere i kapittelet.

Dermed har vi

$$M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = -K_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - K_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}] \quad (7.10)$$

$$K[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + D[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + K_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (7.11)$$

Den mekaniske ekvivalenten for dette systemet er illustrert i figur 7.2. Dette systemet har en del interessante egenskaper. Vi ser at strukturen i figur 7.2 ligner veldig på strukturen til regulator og observer presentert av [Kelly og Ortega, 1993]. Det vil derfor være interessant å se om vår regulator har de samme gode støyegenskapene som denne regulatoren.

Systemet har også følgende interessante passivitetsegenskaper.

Egenskap 7.1 Systemet gitt av ligningen

$$M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = \boldsymbol{\tau}_T \quad (7.12)$$

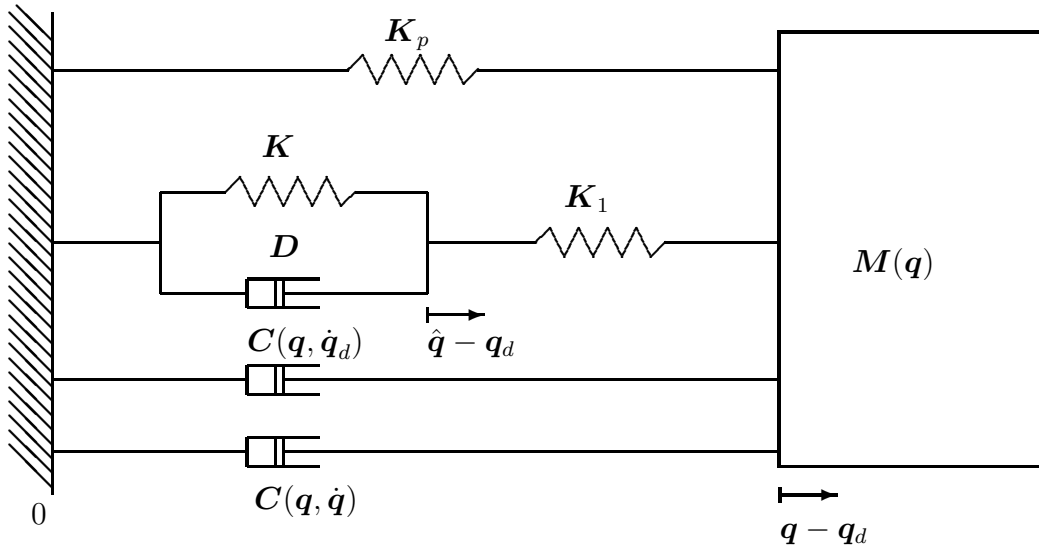
der vektoren $\boldsymbol{\tau}_T$ er gitt av

$$\boldsymbol{\tau}_T = -K_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - K_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \quad (7.13)$$

er passivt med pådrag $\boldsymbol{\tau}_T$ og måling $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d$.

Bevis:

$$\langle \boldsymbol{\tau}_T, [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T = \int_0^T [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}_T dt$$



Figur 7.2: Mekanisk  kvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator. Fjærene og demperene er tegnet lineære for enkelhets skyld. Legg merke til at figuren illustrerer et multivariabelt system. Legg også merke til at koriolis-leddene er tegnet som tids-varierende dempere, som kan bli negative.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \left\{ [\dot{q} - \dot{q}_d]^T M(q) [\ddot{q} - \ddot{q}_d] + [\dot{q} - \dot{q}_d]^T C(q, \dot{q}) [\dot{q} - \dot{q}_d] \right\} dt \\
 &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{q} - \dot{q}_d]^T M(q) [\dot{q} - \dot{q}_d] - \frac{1}{2} [\dot{q} - \dot{q}_d]^T \dot{M}(q) [\dot{q} - \dot{q}_d] + [\dot{q} - \dot{q}_d]^T C(q, \dot{q}) [\dot{q} - \dot{q}_d] \right\} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} [\dot{q} - \dot{q}_d]^T M(q) [\dot{q} - \dot{q}_d] dt + \int_0^T [\dot{q} - \dot{q}_d]^T \left[C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}(q) \right] [\dot{q} - \dot{q}_d] dt \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

Anta at $C(q, \dot{q})$ velges slik at $C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{M}(q)$ er skjev-symmetrisk. Vi f r da

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_T, [\dot{q} - \dot{q}_d] \rangle_T &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} [\dot{q} - \dot{q}_d]^T M(q) [\dot{q} - \dot{q}_d] dt \\
 &= \frac{1}{2} [\dot{q}(T) - \dot{q}_d(T)]^T M(q(T)) [\dot{q}(T) - \dot{q}_d(T)] - \frac{1}{2} [\dot{q}(0) - \dot{q}_d(0)]^T M(q(0)) [\dot{q}(0) - \dot{q}_d(0)] \\
 &\geq -\frac{1}{2} [\dot{q}(0) - \dot{q}_d(0)]^T M(q(0)) [\dot{q}(0) - \dot{q}_d(0)] = \beta \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

■

Dette er det samme som i egenskap 4.11 n r $s = q - q_d$.

Egenskap 7.2 Systemet gitt av ligningene

$$\tau_K = K_1[q - \hat{q}] + K_p[q - q_d] \quad (7.16)$$

$$K[\hat{q} - q_d] + D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[\hat{q} - q] = 0 \quad (7.17)$$

er y-strengt passivt med p drag τ_K og m ling $\dot{q} - \dot{q}_d$.

Bevis:

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_K, \dot{q} - \dot{q}_d \rangle_T &= \langle K_1[q - \hat{q}], \dot{q} - \dot{q}_d \rangle_T + \langle K_p[q - q_d], \dot{q} - \dot{q}_d \rangle_T \\
 &= \langle K_1[q - \hat{q}], \dot{q} - \dot{\hat{q}} \rangle_T + \langle K_1[q - \hat{q}], \dot{\hat{q}} - \dot{q}_d \rangle_T + \langle K_p[q - q_d], \dot{q} - \dot{q}_d \rangle_T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}], \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}} \rangle_T + \langle \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d], \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \rangle_T + \langle \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d], \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \rangle_T \\
 &\quad + \langle \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d], \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \rangle_T \\
 &\geq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \delta \int_0^T [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] dt
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

hvor

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}[\mathbf{q}(0) - \hat{\mathbf{q}}(0)]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q}(0) - \hat{\mathbf{q}}(0)] \tag{7.19}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{q}_d(0)]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{q}_d(0)] \tag{7.20}$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{2}[\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_d(0)]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_d(0)] \tag{7.21}$$

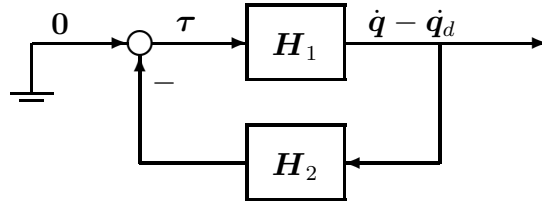
$$\delta = \lambda_{\min}\{\mathbf{D}\} \tag{7.22}$$

($\lambda_{\min}\{\mathbf{D}\}$ er minste egenverdi til \mathbf{D} .) ■

Dersom total-systemet i figur 7.2 skal være passivt, må den tidsvarierende demperen $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)$ være et passivt element, dvs.

$$\langle \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T \geq \beta \tag{7.23}$$

Dette lar seg vanskelig bevise. Et mulig utgangspunkt kan være å betrakte det generelle systemet i figur 7.3. Gitt at \mathbf{H}_1 er et passivt system. Da har vi at



Figur 7.3: To passive sub-systemer der det ene er i tilbakekoblingen.

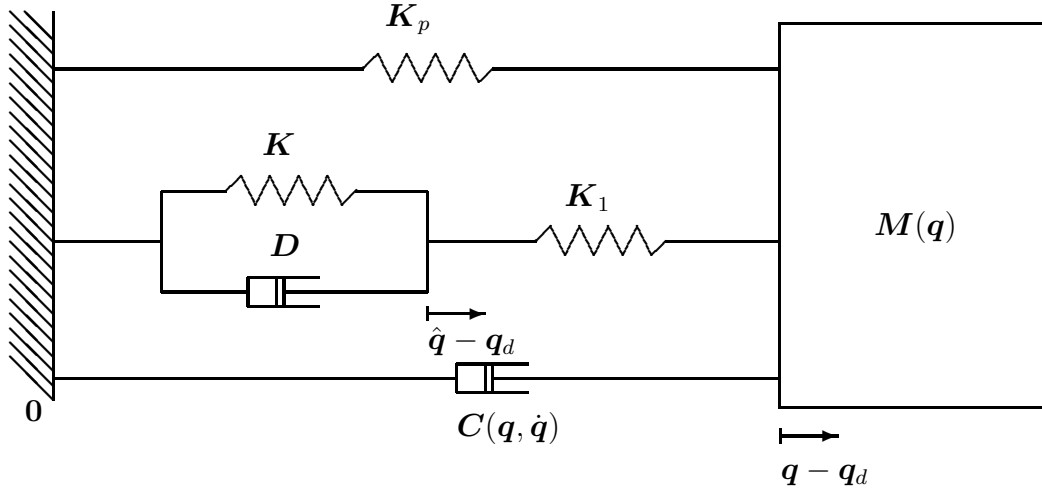
$$\begin{aligned}
 \langle \tau, \mathbf{H}_1[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T &\geq \beta \\
 \langle -\mathbf{H}_2[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d], [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T &\geq \beta \\
 \langle \mathbf{H}_2[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d], [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T &\leq -\beta
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

I vårt tilfelle har vi altså at

$$\langle \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T \leq -\beta \tag{7.25}$$

der β er initial-energien i fjærene og den kinetiske energien i massene. Denne ligningen kan kanskje brukes for å vise kravet i ligning 7.23, men dette er fortsatt et ul st problem.

Kommentar 7.1 Legg merke til at dersom referansen er konstant, dvs. $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$, reduseres systemet til den mekaniske ekvivalenten i figur 7.4. For dette systemet kan global asymptotisk stabilitet vises. Legg merke til at uten fjæren \mathbf{K}_p , reduseres regulatoren til sett-punkts regulatoren av [Kelly og Ortega, 1993].



Figur 7.4: Mekanisk ekvivalent dersom referansen er konstant. For dette systemet kan global asymptotisk stabilitet vises på samme måte som i [Kelly og Ortega, 1993].

7.3 Stabilitetsbevis

Her skal lokal stabilitet bevises. Vi gjør følgende antagelse

Antagelse 7.1 Hastighetene \dot{q} og \dot{q}_d er begrenset slik at

$$\|C(q, \dot{q} + \dot{q}_d)\| \leq C_M \quad (7.26)$$

$$\|C(q, \dot{q}_d)\| \leq C_{Md} \quad (7.27)$$

$$\|\dot{M}(q)\| \leq M_{\dot{M}} \quad (7.28)$$

der C_M , C_{Md} og $M_{\dot{M}}$ er positive konstanter. Fra egenskap 4.2 har vi at

$$M_m \leq \|M(q)\| \leq M_M \quad (7.29)$$

dvs. normen til massematrisen er øvre og nedre begrenset. \square

Teorem 7.1 (Lokal asymptotisk stabilitet) Gitt dynamikken for fysisk og virtuell robot manipulator

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (7.30)$$

$$M(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + C(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + g(\hat{q}) = \hat{\tau} \quad (7.31)$$

der regulatoren velges

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q) - K_1[q - \hat{q}] - K_p[q - q_d] - e_a M(q)[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] \quad (7.32)$$

$$\hat{\tau} = M(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + C(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + g(\hat{q}) - K[\hat{q} - q_d] - D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[q - \hat{q}] \quad (7.33)$$

Regulatorparameterene velges diagonale, dvs.

$$K = kI \quad (7.34)$$

$$K_1 = k_1I \quad (7.35)$$

$$K_p = k_pI \quad (7.36)$$

$$D = dI \quad (7.37)$$

der k , k_1 , k_p og d er positive konstanter. Definerer

$$\mathbf{A} = a\mathbf{I} \triangleq \mathbf{K}_1^{-1}[\mathbf{K} + \mathbf{K}_1] = \frac{k + k_1}{k_1}\mathbf{I} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{B} = b\mathbf{I} \triangleq \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{D} = \frac{d}{k_1}\mathbf{I} \quad (7.39)$$

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I} \triangleq -[k_1 - a[k_1 + k_p]]\mathbf{I} \quad (7.40)$$

der \mathbf{I} er enhetsmatrisen. Siden $a > 1$ så er p positiv. Dette systemet er **lokalt asymptotisk stabilt** dersom følgende krav er oppfylt

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{k_p+k_1}{2} & -\frac{k_1}{2} & -\frac{M_M e}{2} \\ -\frac{k_1}{2} & \frac{k+k_1}{2} - \frac{bep}{2} & -\frac{M_M ea}{2} \\ -\frac{M_M e}{2} & -\frac{M_M ea}{2} & \frac{M_m}{2} \end{bmatrix} \quad \text{positiv definit} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} d - eb^2[k_1 + k_p] - e^2abM_M & -\frac{be}{2}[M_M + C_M] \\ -\frac{be}{2}[M_M + C_M] & M_m e - C_{Md} \end{bmatrix} \quad \text{positiv definit} \quad (7.42)$$

Disse kravene kan oppfylles ved riktige valg av regulatorparametere. Vi ser at flere av regulatorparameterene inngår i matrisene \mathbf{X} og \mathbf{Z} . I eksempel 7.1 skal en fremgangsmåte for valg av regulatorparametere presenteres slik at kravene i ligningene 7.41 og 7.42 oppfylles. \square

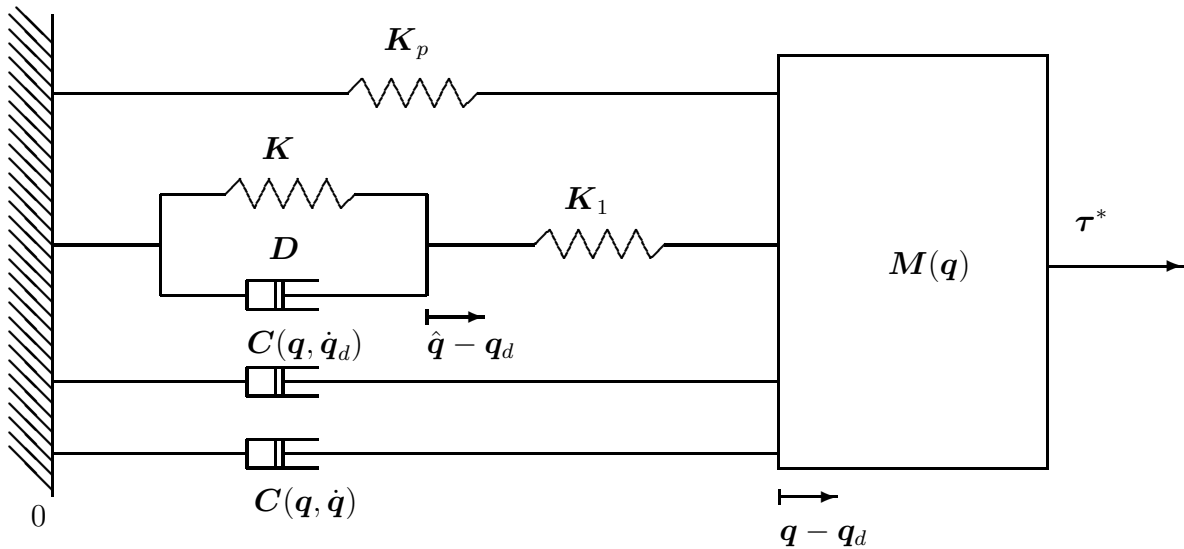
Bevis: Pådraget til den fysiske manipulatorens er gitt av

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] + \boldsymbol{\tau}^* \quad (7.43)$$

der $\boldsymbol{\tau}^*$ er

$$\boldsymbol{\tau}^* = -ea\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \quad (7.44)$$

Dette systemet kan illustreres som i figur 7.5. Energifunksjonen til systemet er gitt av



Figur 7.5: Mekanisk ekvivalent for systemet hvor lokal stabilitet skal vises.

$$H = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \frac{1}{2}[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \frac{1}{2}[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] & \quad \text{kinetisk energi} \\
\frac{1}{2}[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] & \quad \text{potensiell energi i fjæren } \mathbf{K}_1 \\
\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] & \quad \text{potensiell energi i fjæren } \mathbf{K} \\
\frac{1}{2}[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] & \quad \text{potensiell energi i fjæren } \mathbf{K}_p
\end{aligned}$$

Energifunksjonen deriveres med hensyn p  tiden. Vi f r

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\
&\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \\
&= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d] \\
&\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Robot dynamikken er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{7.47}$$

Denne ligningen innsettes i ligning 7.46 og vi f r

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \\
&\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]
\end{aligned} \tag{7.48}$$

N  innsettes ligning 7.43 i ligning 7.48 og vi f r

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d] \\
&\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^* \\
&= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d] \\
&\quad + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^*
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Ligningen for det masseløse punktet $\hat{\mathbf{q}}$ er gitt av

$$\mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] + \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = \mathbf{0} \tag{7.50}$$

Denne ligningen innsettes i ligning 7.49 og ved   bruke at $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ kan velges skjev-symmetrisk, f r vi endelig at

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= -[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)]\dot{\mathbf{q}}_d + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^* \\
&= -[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^*
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Dette uttrykket skal brukes n r en Lyapunov-funksjonskandidat skal defineres.

Fra ligningen for det masseløse punktet har vi

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \tag{7.52}$$

Dette kan skrives

$$\mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] = [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1][\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \tag{7.53}$$

Ved å bruke definisjonene for \mathbf{A} og \mathbf{B} matrisene i ligningene 7.38 og 7.39 har vi at

$$\mathbf{q} - \mathbf{q}_d = a[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + b[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \tag{7.54}$$

Definerer nå følgende Lyapunov-funksjonskandidat

$$V = H - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \frac{bep}{2} [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \quad (7.55)$$

der e er en positiv konstant og p er definert i ligning 7.40. Ved   bruke ligning 7.54 har vi at

$$[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e\mathbf{M}(\mathbf{q})[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T ea\mathbf{M}(\mathbf{q})[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \quad (7.56)$$

N  bruker vi at

$$\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \geq \frac{M_m}{2} \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} eb[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] &\geq -eb\|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]\| \\ &\geq -ebM_M \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \end{aligned} \quad (7.58)$$

der vi har brukt Schwarz ulikheten, se teorem A.2, og ligning A.5. Fra ligning 7.56 har vi da ved   bruke trekantulikheten, se teorem A.3.

$$[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \geq -eM_M \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\| - eaM_M \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\| \quad (7.59)$$

Vi har da at

$$\begin{aligned} V &\geq \frac{M_m}{2} \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 + \frac{k}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\|^2 + \frac{k_p}{2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|^2 \\ &\quad - eM_M \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\| - aeM_M \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\| - \frac{bep}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\|^2 \end{aligned} \quad (7.60)$$

Leddet $\frac{k_1}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\|^2$ kan skrives p  formen

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\|^2 &= \frac{k_1}{2} \|[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] - [\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]\|^2 \\ &= \frac{k_1}{2} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|^2 - k_1 \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\| \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\| \end{aligned} \quad (7.61)$$

Lyapunov-funksjonskandidaten kan da skrives

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\| \\ \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\| \\ \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{k_p+k_1}{2} & -\frac{k_1}{2} & -\frac{M_M e}{2} \\ -\frac{k_1}{2} & \frac{k+k_1}{2} - \frac{bep}{2} & -\frac{M_M ea}{2} \\ -\frac{M_M e}{2} & -\frac{M_M ea}{2} & \frac{M_m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\| \\ \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\| \\ \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Vi ser at dersom matrisen \mathbf{F} er positiv definit, så er V en positiv definit funksjon. Dette kan oppnås ved passende valg av regulatorparametere. Lyapunov-funksjonskandidaten deriveres med hensyn p  tiden og vi f r.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{H} - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d]^T eb\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T bep[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \\ &= -[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{D}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^* \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d]^T eb\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T eb\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T bep[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \end{aligned} \quad (7.63)$$

Vi har at uttrykket for vektoren $\boldsymbol{\tau}^*$ er

$$\boldsymbol{\tau}^* = -ea\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \quad (7.64)$$

Dette uttrykket blir en slags derivatvirkning på den fysiske manipulatorens. Vi har at uttrykket $[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^*$ kan skrives på formen

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \boldsymbol{\tau}^* &= -[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e a \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &= -[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e b \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] \end{aligned} \quad (7.65)$$

Dette innsettes i ligning 7.63 og ved å bruke at $\mathbf{D} = d\mathbf{I}$ får vi

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T d [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d]^T e b \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e b \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T b e p [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \end{aligned} \quad (7.66)$$

Systemets bevegelsesligninger er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) [\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] = \mathbf{K}_1 [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_1 [\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - e a \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_p [\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \quad (7.67)$$

Ved å bruke ligning 7.53 har vi at

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d &= \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \left[[k_1 - a[k_1 + k_p]] [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - b[k_1 + k_p] [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - e a \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \left[-p [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - b[k_1 + k_p] [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - e a \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \end{aligned} \quad (7.68)$$

Dette innsettes i ligning 7.66 og vi får

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T d [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e b \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e b^2 [k_1 + k_p] [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e b \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e^2 a b \mathbf{M}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\leq -d \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 - [M_m e - C_{Md}] \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 + M_{\dot{\mathbf{M}}} e b \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \\ &\quad + e b^2 [k_1 + k_p] \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 + b e C_M \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| + e^2 a b M_M \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 \\ &= - \begin{bmatrix} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \\ \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d - e b^2 [k_1 + k_p] - e^2 a b M_M & -\frac{b e}{2} [M_{\dot{\mathbf{M}}} + C_M] \\ -\frac{b e}{2} [M_{\dot{\mathbf{M}}} + C_M] & M_m e - C_{Md} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \\ \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Kravet for stabilitet er altså at matrisen \mathbf{J} er positiv definit. Dette kan oppnås med passende valg av regulatorparametere. Vi har altså at

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [d - e b^2 [k_1 + k_p]] \mathbf{I} - e^2 a \mathbf{M}(\mathbf{q}) & b e \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) \\ b e \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) & e \mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{u}^T \mathbf{N} \mathbf{u} \leq 0 \end{aligned} \quad (7.70)$$

Vi har altså at når matrisen \mathbf{J} er positiv definit, så er matrisen \mathbf{N} positiv definit. Fra dette kan vi konkludere med at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.71)$$

dvs.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.72)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.73)$$

Systemet er ikke-autonomt. I stedet for å bruke LaSalles teorem for å si noe om $\mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, benyttes et teorem hentet fra [Paden og Panja, 1988], Matrosov's teorem. Teoremet er gitt i teorem 3.5. Det som

må sjekkes er at $V^{(3)}$ er en negativ definit funksjon i posisjonsavviket n r hastighetene går mot ønsket hastighet som i ligningene 7.72 og 7.73. (Se Appendix B).

Vi deriverer nå \dot{V} to ganger med hensyn på tiden og f r.

$$\dot{V} = -2\mathbf{u}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \mathbf{u} \quad (7.74)$$

$$V^{(3)} = -2\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{N}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{N}} \mathbf{u} \quad (7.75)$$

Ved   sette inn $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ f r vi at

$$\begin{aligned} V^{(3)} &= -2\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} \\ &= -2 \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.76)$$

Bevegelsesligningen for det masseløse punktet $\hat{\mathbf{q}}$ er

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (7.77)$$

Ved å sette inn at $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$ f r vi

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (7.78)$$

og dermed

$$\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1]^{(-1)} [\mathbf{K}_1 \mathbf{q} + \mathbf{K} \mathbf{q}_d] \quad (7.79)$$

Ved å derivere ligning 7.79 to ganger og sette den inn i ligning 7.76 har vi

$$V^{(3)} = -2\mathbf{w}^T \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (7.80)$$

der vektoren \mathbf{w} er gitt av

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1]^{(-1)} [\mathbf{K}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \ddot{\mathbf{q}}_d] - \ddot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

Dette uttrykket kan forenkles til

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1]^{(-1)} \mathbf{K}_1 [\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] \\ \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

Systemets bevegelsesligninger er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = -\mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - e\mathbf{a}\mathbf{M}(\mathbf{q})[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \quad (7.83)$$

Ved   sette inn $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$ og $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$ f s

$$[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] = -\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \quad (7.84)$$

Fra ligning 7.78 har vi at

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] &= [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1][\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_d &= \mathbf{A}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \end{aligned} \quad (7.85)$$

Dette gir at

$$[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] = -\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p \mathbf{A}][\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \quad (7.86)$$

Ved   sette dette inn i uttrykket for vektoren \mathbf{w} i ligning 7.82 f r vi endelig

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} -[\mathbf{K} + \mathbf{K}_1]^{(-1)} \mathbf{K}_1 \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p \mathbf{A}] [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \\ -\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p \mathbf{A}] [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{k+k_1} [k_1 + ak_p] \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \\ -k_1 [k_1 + ak_p] \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.87)$$

Vi har at

$$V^{(3)} = -2\mathbf{w}^T \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (7.88)$$

Fra ligning 7.87 ser vi nå at $V^{(3)}$ er en negativ definit funksjon i $\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$. Vi kan derfor konkludere med at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.89)$$

Ved å bruke ligning 7.78 har vi endelig at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.90)$$

og perfekt følging oppnås. ■

Eksempel 7.1 *Fremgangsmåten for å bestemme regulatorparameterene skal illustreres i dette eksempelet. Den stive robot manipulatoren i eksempel 4.1 studeres. Dynamikken for denne manipulatoren var funnet   v re*

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (7.91)$$

der

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

Referanse trajektoren velges lik

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \sin(t) \\ \frac{1}{10} \cos(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \cos(t) \\ -\frac{1}{10} \sin(t) \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}}_d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \sin(t) \\ -\frac{1}{10} \cos(t) \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

System-parameterene settes i dette eksempelet lik

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 & m_2 &= 10 \\ l_1 &= 1 & l_2 &= 1 \end{aligned} \quad (7.96)$$

Systemets båndbredde er gitt av fj rkonstantene og maksimalverdien til normen til massematrisen. I dette tilfellet er

$$M_m \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq M_M \quad (7.97)$$

der $M_m = 10$ og $M_M = 60$. Velger derfor P -regulatoren på den fysiske manipulatoren lik

$$\mathbf{K}_p = 200\mathbf{I} \quad (7.98)$$

Dersom systemet kun bestod av en fjær og en masse, ville egenfrekvensen for dette systemet bli

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_p}{M_M}} = \sqrt{\frac{200}{60}} \approx 1.8 \quad (7.99)$$

Hastighetsestimatet fremkommet fra det masseløse punktet, er fremkommet ved å lavpassfiltrere og derivere posisjonsmålingen. (Se neste avsnitt.) Ønsket båndbredde for lavpassfilteret settes lik

$$\omega = 8 \quad (7.100)$$

Ønsker forsterkningen i lavpassfilteret lik

$$K = \frac{5}{6} \quad (7.101)$$

Fjærkonstanten \mathbf{K} velges i samme størrelsesorden som \mathbf{K}_p . Vi får

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_p \quad (7.102)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\frac{5}{6} * 200}{1 - \frac{5}{6}} \mathbf{I} = 1000 \mathbf{I} \quad (7.103)$$

$$\mathbf{D} = \frac{k + k_1}{\omega} \mathbf{I} = 150 \mathbf{I} \quad (7.104)$$

der \mathbf{I} er “2x2” enhetsmatrisen. (Se ligningene 7.117 og 7.118.) Fra ligning 7.95 ser vi at $\|\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq \frac{1}{10}$. Matrisen $C_M \mathbf{I}$ skal være en øvre grense for $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d)$. Antar nå at $\|\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d\| \leq 3$. Har da at

$$C_M \geq \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, 3)\| \quad (7.105)$$

Vi har at

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, 3)_{\max} = \begin{bmatrix} 30 & 60 \\ -30 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.106)$$

Ved å velge $C_M = 60$ og $C_{Md} = \frac{3}{2}$ er dermed kravene i ligningene 7.26 og 7.27 oppfylt. Vi har også at

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})_{\max} = \begin{bmatrix} 60 & 30 \\ 30 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.107)$$

Ved å velge $M_{\dot{\mathbf{M}}} = 80$ er kravet i ligning 7.28 oppfylt.

Massematrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er begrenset av

$$M_m \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq M_M \quad (7.108)$$

og i dette tilfellet er $M_m = 10$ og $M_M = 60$. For at matrisen i ligning 7.42 skal være positiv definit, må vi i alle fall ha at

$$e\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| > C_{Md} \quad (7.109)$$

Den minste verdien for $\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\|$ er 10, så e velges lik $\frac{1}{5}$. Nå kontrolleres kravene i ligningene 7.41 og 7.42.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 600 & -500 & -6 \\ -500 & 593.4 & -7.2 \\ -6 & -7.2 & 5 \end{bmatrix} \quad (7.110)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 144.168 & -2.1 \\ -2.1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (7.111)$$

Begge disse matrisene er positiv definit. Vi har dermed at kravene i ligningene 7.41 og 7.42 er oppfylt.

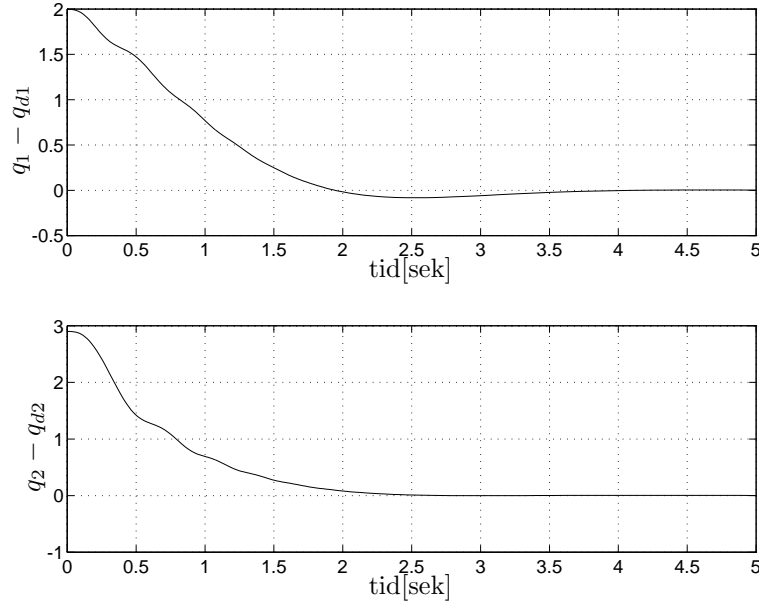
Systemet simuleres med initialverdier

$$q_1(0) = \hat{q}_1(0) = 2 \quad (7.112)$$

$$q_2(0) = \hat{q}_2(0) = 3 \quad (7.113)$$

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0 \quad (7.114)$$

□



Figur 7.6: Følgefeilen med varierende referanse.

7.4 St ybetragtninger

Det er interessant å studere hvordan regulatoren oppfører seg dersom posisjonsmålingen inneholder målestøy. Hastighetsestimatet bør være mindre påvirket av målestøy enn det man f r ved numerisk derivasjon av posisjonsmålingen.

Når matrisene i regulatoren velges diagonale, er hastighetsestimatene for hvert ledd dekkoblet. Vi kan derfor enkelt studere transferfunksjonen fra $q - q_d$ til $\dot{q} - \dot{q}_d$ for hvert ledd. Fra ligningen for det masseløse punktet har vi for hvert ledd

$$k_1[q - q_d] = [k + k_1][\hat{q} - q_d] + d[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] \quad (7.115)$$

Dette gir

$$\begin{aligned} [\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d](s) &= \frac{k_1 s}{k + k_1 + ds} [q - q_d](s) \\ &= K \frac{s}{1 + Ts} \end{aligned} \quad (7.116)$$

der

$$K = \frac{k_1}{k + k_1} \quad (7.117)$$

$$T = \frac{d}{k + k_1} \quad (7.118)$$

Vi ser at hastighetsestimatet består av et lavpassfilter og en derivasjon som er det samme som et høypassfilter. Dette viser at målestøy i posisjonsmålingen kan undertrykkes fra hastighetsestimatet. Vi ser at forsterkningen K alltid er mindre enn 1. Tidskonstanten T må velges ut fra et kompromiss mellom ønsket båndbredde i systemet og ønsket om best mulig støyundertrykkelse.

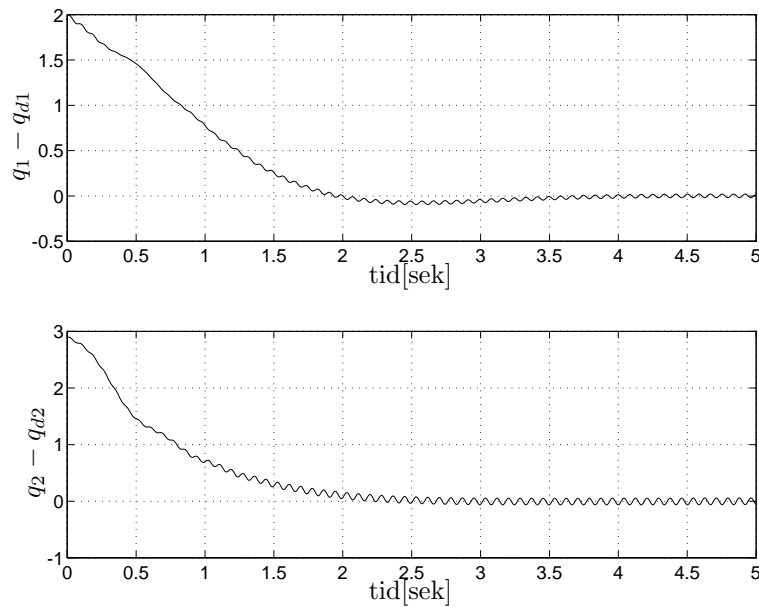
Eksempel 7.2 I dette eksempelet studeres manipulatoren fra eksempel 7.1, men nå er systemet utsatt for målestøy. Regulatorparameterene og referansetrajektoren velges som før. Posisjonsmålingen betegnes \mathbf{q}_m og er i dette eksempelet gitt av

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q} + \sin(75t) \quad (7.119)$$

Målestøyen har altså en frekvens på 75 rad/s og amplitude 1. Knekkfrekvensen for lavpassfilteret er i dette eksempelet lik

$$\omega_L = \frac{1}{T} = \frac{k + k_1}{d} = \frac{1200}{150} = 8 \quad (7.120)$$

Vi kan derfor regne med god damping av målestøyen. Tidsresponsen er vist i figur 7.7. □



Figur 7.7: Følgefeilen med varierende referanse og målestøy.

Kapittel 8

Adaptiv observerbasert styring

8.1 Innledning

Den observerbaserte regulatoren fra forrige kapittel krever eksakt kunnskap om systemets parametre, så som masser og lengder. I praksis kjenner man ikke alle systemparametre eksakt, og det kan også tenkes at de varierer med tiden. For eksempel kan det tenkes at robot manipulatoren skal plukke opp gjenstander med ukjente masser. I slike tilfeller er det interessant å estimere systemets parametre. En estimeringsalgoritme skal studeres i dette kapitlet.

8.2 Observerbasert regulator med adaptasjon

Vi tar utgangspunkt i regulatorstrukturen fra forrige kapittel, se figur 7.1. Nå kjenner vi ikke parametrene til den fysiske manipulatoren, slik at dynamikken til den virtuelle manipulatoren ikke kan velges lik dynamikken til den fysiske manipulatoren. Dette spiller ingen rolle, da dynamikken til den virtuelle manipulatoren kanselleres av pådraget. Vi har nå

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (8.1)$$

$$\bar{M}(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + \bar{C}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + \bar{g}(\hat{q}) = \hat{\tau} \quad (8.2)$$

der $\bar{M}(\hat{q})$, $\bar{C}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})$ og $\bar{g}(\hat{q})$ beskriver dynamikken til den virtuelle manipulatoren. Pådragene τ og $\hat{\tau}$ velges nå

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_d + \hat{C}(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \hat{g}(q) - K_1[q - \hat{q}] - K_p[q - q_d] + \tau^* \quad (8.3)$$

$$\hat{\tau} = \bar{M}(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + \bar{C}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + \bar{g}(\hat{q}) - K[\hat{q} - q_d] - D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[\hat{q} - q] \quad (8.4)$$

Dersom vi setter ligningene 8.3 og 8.4 inn i ligningene 8.1 og 8.2 får vi

$$M(q)[\ddot{q} - \ddot{q}_d] + C(q, \dot{q})[\dot{q} - \dot{q}_d] = -K_1[q - \hat{q}] + C(q, \dot{q}_d)[\dot{q}_d - \dot{q}] - K_p[q - q_d] + \tau^* \\ + [\hat{M}(q) - M(q)]\ddot{q}_d + [\hat{C}(q, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}_d)]\dot{q}_d + [\hat{g}(q) - g(q)] \quad (8.5)$$

$$K[\hat{q} - q_d] + D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[\hat{q} - q] = 0 \quad (8.6)$$

der vektoren τ^* velges

$$\tau^* = -eA[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] \quad (8.7)$$

der e er en positiv konstant og matrisen A er definert i ligning 7.38. Fra robot-dynamikk kapitlet vet vi at vi har linearitet i parameterene. Vi kan derfor skrive

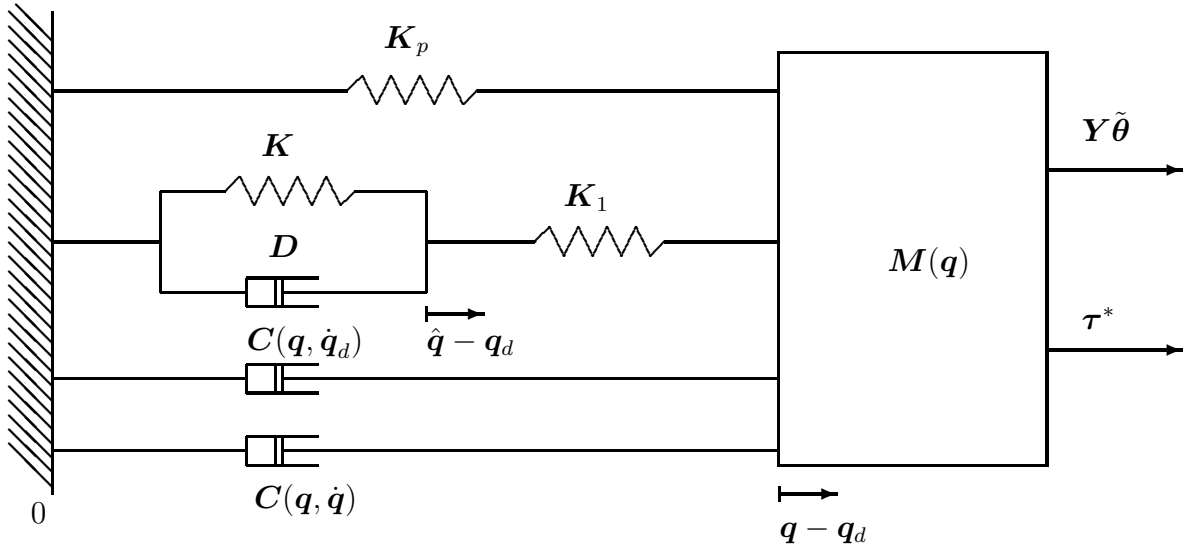
$$M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q) = Y(q, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\theta \quad (8.8)$$

Merk at \mathbf{Y} er en funksjon av den fysiske manipulatorens posisjon, men ikke manipulatorens hastighet eller akselerasjon. Dette skal vi utnytte når adaptasjonsloven skal utledes. Ved å utnytte denne egenskapen kan vi skrive

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] = -\mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] + \boldsymbol{\tau}^* + \mathbf{Y}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (8.9)$$

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (8.10)$$

der $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$. Systemet kan illustreres med den mekaniske ekvivalenten i figur 8.1.



Figur 8.1: Mekanisk ekvivalent av regulator, virtuell manipulator og fysisk manipulator når parameterene i manipulatorens bevegelsesligninger er ukjente.

8.3 Stabilitetsanalyse

Vi gjør følgende antagelse

Antagelse 8.1 Akselerasjonene i systemet, $\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d$ og $\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d$, er begrenset slik at

$$\|\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d\| \leq A_{\hat{\mathbf{q}}} \quad (8.11)$$

$$\|\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d\| \leq A_{\mathbf{q}} \quad (8.12)$$

der $A_{\hat{\mathbf{q}}}$ og $A_{\mathbf{q}}$ er positive konstanter. □

Antagelse 8.2 Referansehastigheten er begrenset slik at

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\| < C_{Md} \quad (8.13)$$

□

Antagelse 8.3 Parameter estimatene er begrenset slik at

$$\hat{\theta}_{im} \leq \hat{\theta}_i \leq \hat{\theta}_{iM} \quad (8.14)$$

$$\|Y(q, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\tilde{\theta}\| < Y\tilde{\theta}_M \quad (8.15)$$

□

Teorem 8.1 (Begrenset tilstandsvektor) Gitt dynamikken for fysisk og virtuell robot manipulator

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (8.16)$$

$$\bar{M}(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + \bar{C}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + \bar{g}(\hat{q}) = \hat{\tau} \quad (8.17)$$

der regulatoren velges

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_d + \hat{C}(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \hat{g}(q) - K_1[q - \hat{q}] - K_p[q - q_d] - eA[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] \quad (8.18)$$

$$\hat{\tau} = \bar{M}(\hat{q})\ddot{\hat{q}} + \bar{C}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + \bar{g}(\hat{q}) - K[\hat{q} - q_d] - D[\dot{\hat{q}} - \dot{q}_d] + K_1[q - \hat{q}] \quad (8.19)$$

Definer

$$f(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) \triangleq -\Gamma Y^T(\hat{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)[\hat{q} - q_d] \quad (8.20)$$

der Γ er en positiv definit matrise og $Y(\hat{q}, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ er gitt av

$$Y(q, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\tilde{\theta} = [\hat{M}(q) - M(q)]\ddot{q}_d + [\hat{C}(q, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}_d)]\dot{q}_d + [\hat{g}(q) - g(q)] \quad (8.21)$$

Adapsjonsloven velges lik, se [Qu, Dawson og Dorsey, 1992].

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \begin{cases} 0 & \text{dersom } \hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_{iM} \text{ og } f_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) > 0 \\ f_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) & \text{dersom } \begin{cases} \hat{\theta}_i \geq \hat{\theta}_{iM} \text{ og } f_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) \leq 0 \\ \hat{\theta}_{im} < \hat{\theta}_i < \hat{\theta}_{iM} \\ \hat{\theta}_i \leq \hat{\theta}_{im} \text{ og } f_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) \geq 0 \end{cases} \\ 0 & \text{dersom } \hat{\theta}_i \leq \hat{\theta}_{im} \text{ og } f_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{q}) < 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

Funksjonen f kan i følge [Qu, Dawson og Dorsey, 1992] velges lik en vilkårlig vel-definert funksjon. En skulle likevel tro at det er fornuftig å velge adapsjonsloven på formen presentert i [Slotine og Li, 1987], dvs.

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma Y^T(\cdot)[x] \quad (8.23)$$

der x er en kombinasjon av tilstandene i systemet. Her er f valgt lik en funksjon av referanse-trajektoren og den virtuelle manipulatorens posisjon. Grunnen til at den virtuelle manipulatorens posisjon og ikke hastighet benyttes, er at den estimerte posisjonen er mindre følsom for støy i posisjonsmålingen til den fysiske manipulatorens, se etterfølgende avsnitt.

Med dette valg av adapsjonslov, har vi at antagelse 8.3 er oppfylt. For dette systemet er tilstanden begrenset.

Bevis: Setter opp energifunksjonen for systemet.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}[\dot{q} - \dot{q}_d]^T M(q)[\dot{q} - \dot{q}_d] + \frac{1}{2}[q - \hat{q}]^T K_1[q - \hat{q}] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\hat{q} - q_d]^T K[\hat{q} - q_d] + \frac{1}{2}[q - q_d]^T K_p[q - q_d] \end{aligned} \quad (8.24)$$

Den tidsderiverte av denne blir

$$\begin{aligned}\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] \\ &\quad + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]\end{aligned}\quad (8.25)$$

Dynamikken for den fysiske manipulatorene er gitt av

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (8.26)$$

Denne ligningen settes inn i ligning 8.25. Vi får

$$\begin{aligned}\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]\end{aligned}\quad (8.27)$$

Nå settes inn uttrykket for regulatoren i ligning 8.18.

$$\begin{aligned}\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - e\mathbf{A}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \\ &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - e\mathbf{A}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]\end{aligned}\quad (8.28)$$

der vi ser at $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ er gitt av

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{M}(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_d + [\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)]\dot{\mathbf{q}}_d + [\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \quad (8.29)$$

Ved å bruke at $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ kan velges skjev-symmetrisk, har vi at

$$\begin{aligned}\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[-\mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - e\mathbf{A}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \\ &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e\mathbf{A}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]\end{aligned}\quad (8.30)$$

der ligningen for det masseløse punktet, ligning 8.6 er brukt i den siste overgangen. Ved å bruke ligning 8.11 kan dette skrives som

$$\begin{aligned}\dot{H} &= [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \left[\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \right] \\ &\quad - [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e\mathbf{B}[\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] \\ &\leq -d\|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 - [e - \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\|] \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 \\ &\quad + \|\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\tilde{\boldsymbol{\theta}} + e\mathbf{A}\dot{\hat{\mathbf{q}}} - e\mathbf{B}\ddot{\hat{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| \\ &\leq -d\|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 - [e - C_{Md}] \|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|^2 \\ &\quad + Y\tilde{\theta}_M \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| + eA_{\hat{\mathbf{q}}}b \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|\end{aligned}\quad (8.31)$$

der trekant-ulikheten er brukt i den siste overgangen. Matrisen \mathbf{B} er definert i ligning 7.39. Den tidsderivate av energifunksjonen er negativ dersom

$$[e - C_{Md}]\|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| > Y\tilde{\theta}_M + eA_{\dot{\mathbf{q}}}b \quad (8.32)$$

dvs. den tidsderivate av energifunksjonen er negativ når

$$\|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| > \frac{Y\tilde{\theta}_M + eA_{\dot{\mathbf{q}}}b}{e - C_{Md}} \quad (8.33)$$

Vi har da på samme måte som i teorem 3.6 at hastighetsvektoren vil være begrenset av

$$\|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d\| < \frac{Y\tilde{\theta}_M + eA_{\dot{\mathbf{q}}}b}{e - C_{Md}} \quad (8.34)$$

når $t \rightarrow \infty$. Den tids-derivate av bevegelsesligningen for det masseløse punktet $\hat{\mathbf{q}}$ er gitt av

$$\mathbf{K}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{D}[\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] = \mathbf{0} \quad (8.35)$$

Fra antagelse 8.11 og ligning 8.34 har vi at hastigheten $\|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d\|$ er begrenset. Fra ligningene 8.9 og 8.10 har vi dermed at

$$\|[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p]\mathbf{q} - \mathbf{K}_1\hat{\mathbf{q}}\| \quad \text{begrenset.} \quad (8.36)$$

$$\|[\mathbf{K} + \mathbf{K}_1]\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_1\mathbf{q}\| \quad \text{begrenset.} \quad (8.37)$$

Disse to ligningene impliserer at $\|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\|$ er begrenset. Fra ligning 8.10 har vi dermed at $\|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d\|$ er begrenset, og dette gir endelig at $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|$ er begrenset. Vi har altså at tilstandsvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} [\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]^T & [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T & [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \end{bmatrix}^T \quad (8.38)$$

er begrenset. ■

Eksempel 8.1 I dette eksempelet skal adaptasjonsloven studeres. Manipulatoren fra eksempel 7.1 studeres her. Parameterene til manipulatoren er

$$m_1 = 10 \quad l_1 = 1 \quad (8.39)$$

$$m_2 = 10 \quad l_2 = 1 \quad (8.40)$$

Regulatorparameterene var funnet å være

$$\mathbf{K}_p = 200\mathbf{I} \quad (8.41)$$

$$\mathbf{K} = 200\mathbf{I} \quad (8.42)$$

$$\mathbf{K}_1 = 1000\mathbf{I} \quad (8.43)$$

$$\mathbf{D} = 150\mathbf{I} \quad (8.44)$$

$$(8.45)$$

Referansevektoren velges nå lik

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin(t) \\ \frac{1}{2} \cos(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos(t) \\ -\frac{1}{2} \sin(t) \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}}_d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin(t) \\ -\frac{1}{2} \cos(t) \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

Regulatorparameteren e må velges slik at

$$e > C_{Md} \quad (8.47)$$

Velger $e = 10$. Regulatoren blir

$$\tau = \hat{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - e\mathbf{A}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \quad (8.48)$$

mens hastighetsestimatet er gitt av det masseløse punktet, dvs.

$$\mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad (8.49)$$

Matrisen $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ var funnet i robot-dynamikk kapittelet. I dette tilfellet blir \mathbf{Y} lik (ved å bytte $\dot{\mathbf{q}}$ og $\ddot{\mathbf{q}}$ med $\dot{\mathbf{q}}_d$ og $\ddot{\mathbf{q}}_d$.)

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} & \ddot{q}_{d1} & \ddot{q}_{d1} + \ddot{q}_{d2} & 2\cos(q_2)\ddot{q}_{d1} + \cos(q_2)\ddot{q}_{d2} - 2\sin(q_2)\dot{q}_{d1}\dot{q}_{d2} - \sin(q_2)\dot{q}_{d2}^2 \\ 0 & 0 & \ddot{q}_{d1} + \ddot{q}_{d2} & \cos(q_2)\ddot{q}_{d1} + \sin(q_2)\dot{q}_{d1}^2 \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

Vi ser at elementene i \mathbf{Y} er funksjoner av kjente signaler. Parametervektoren $\boldsymbol{\theta}$ er

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 \\ m_2 l_1^2 \\ m_2 l_2^2 \\ m_2 l_1 l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

Setter nå følgende begrensninger på parameterestimatene

$$0 < \hat{\boldsymbol{\theta}}_i < 20 \quad (8.52)$$

Velger adaptasjonsloven som i ligning 8.22 med

$$\boldsymbol{\Gamma} = 100\mathbf{I} \quad (8.53)$$

Systemet simuleres med initialverdier lik

$$\mathbf{q}_1(0) = \hat{\mathbf{q}}_1(0) = 2 \quad (8.54)$$

$$\mathbf{q}_2(0) = \hat{\mathbf{q}}_2(0) = 3 \quad (8.55)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_1(0) = \dot{\mathbf{q}}_2(0) = 0 \quad (8.56)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = 0 \quad (8.57)$$

Tidsresponsen for følgefeilen er vist i figur 8.2 mens parameterestimatene er vist i figur 8.3. Vi ser at følgingen er god. \square

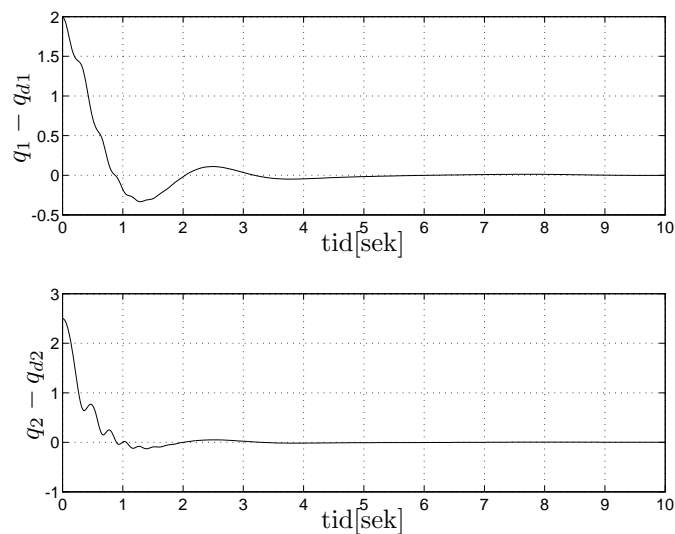
8.4 Støybetraktninger

Siden hastighetsestimatet er fremkommet på samme måte som i forrige kapittel, er det interessant å studere hvordan regulatoren med observer og adaptasjonsalgoritme fungerer når posisjonsmålingen inneholder målestøy.

Eksempel 8.2 Vi studerer den samme manipulatoren, den samme observeren og den samme adaptasjonsalgoritmen som i eksempel 8.1. Nå er posisjonsmålingen gitt av

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q} + \sin(75t) \quad (8.58)$$

Målestøyen har altså amplitude 1 og frekvens 75 rad/s. Initialtilstandene velges de samme som i eksempel 8.1. Tidsresponsen for systemet er vist i figurene 8.4 og 8.5. Vi ser at støyen gir utslag i både parameterestimatene og tilstandene, men innvirkningen er liten. Dette skyldes at observeren sin posisjon og hastighet er lite påvirket av støy i posisjonsmålingen til den fysiske manipulatoren. \square



Figur 8.2: Følgefeil med adaptasjon.

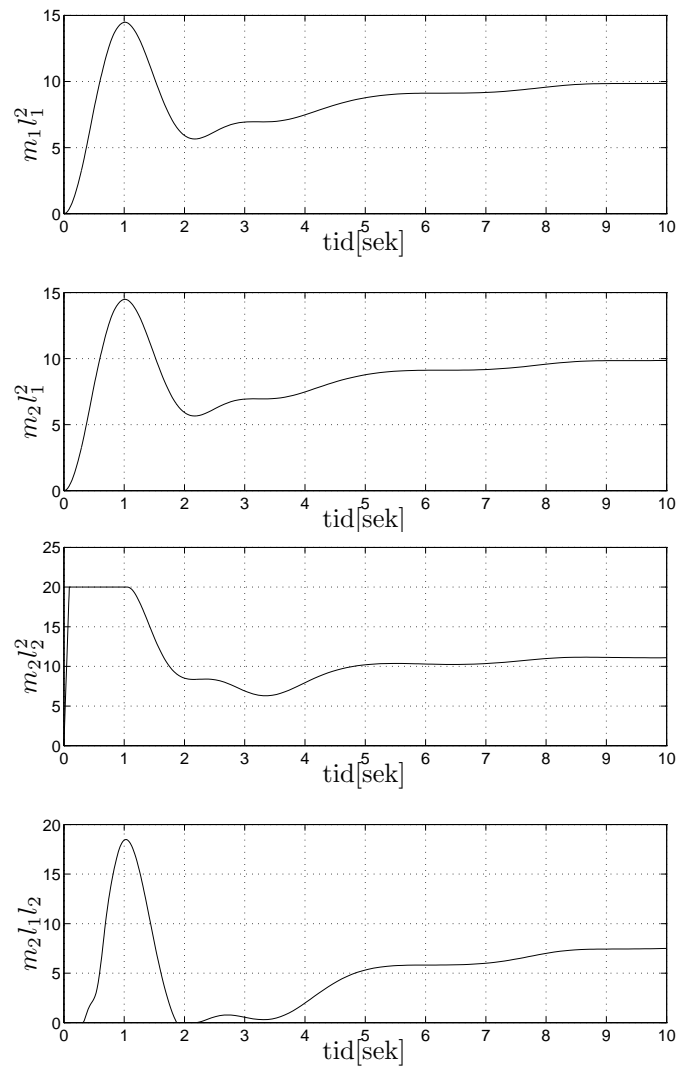
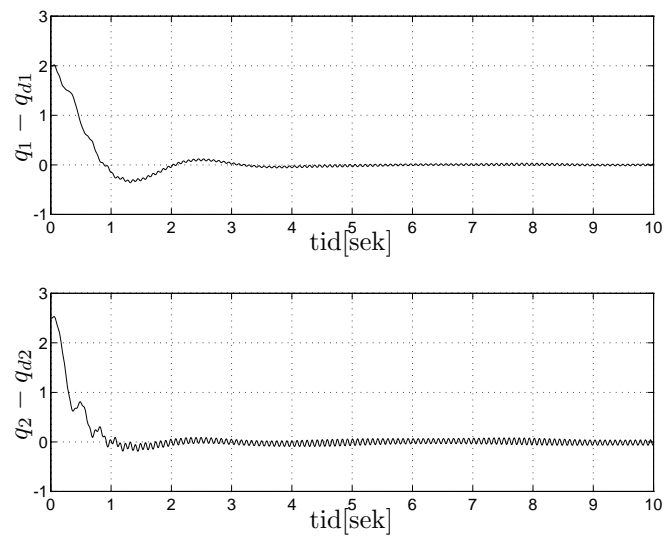
8.5 Sammenligning mot eksisterende løsninger

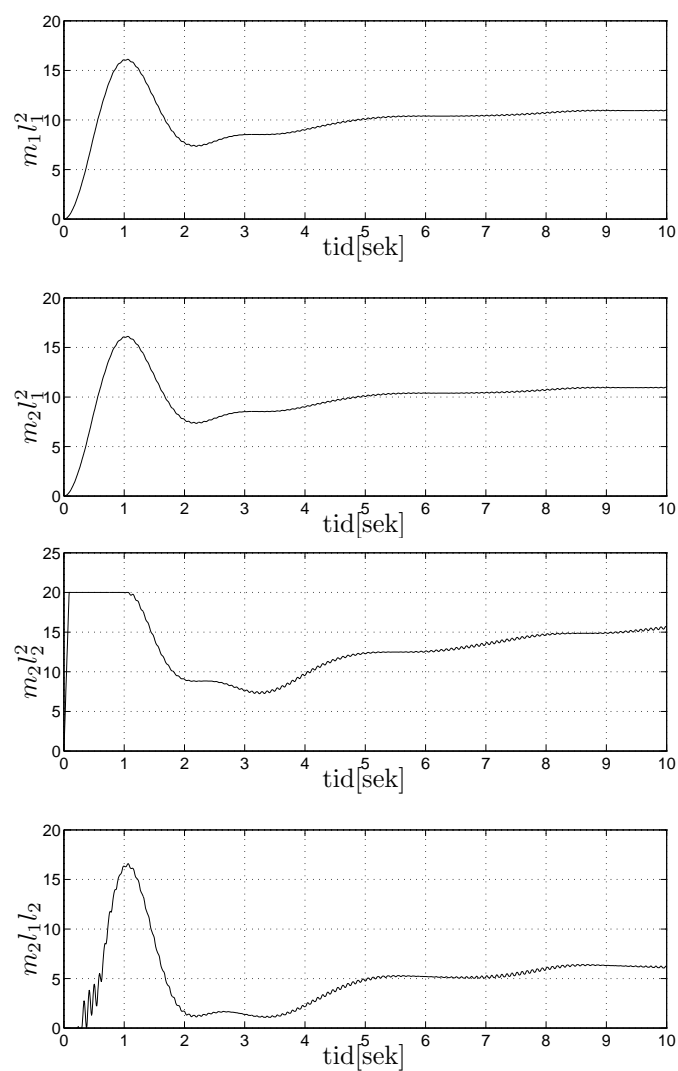
Det finnes allerede løsninger på observer-basert adaptiv styring. Løsninger finnes i [Canudas de Wit og Fixot, 1992] og [Berghuis, 1993]. Den første av disse baserer seg på en variabelstruktur observer. Forfatterene viser lokal eksponensiell stabilitet dersom svitsje-frekvensen på glideflaten er uendelig stor. Dersom svitsje-frekvensen ikke kan antas uendelig stor, viser forfatterene at tilstandene i systemet er lokalt uniformt endelig begrenset, som i teorem 3.7.

[Berghuis, 1993] bruker en generell ulineær observer, som i figur 5.6, sammen med en adaptasjonslov som ligner den som er brukt i dette kapitlet. Forfatteren viser også her at tilstanden i systemet er lokalt uniformt endelig begrenset.

I dette kapitlet er det vist at energifunksjonen er negativ når hastigheten er større enn en verdi og akselerasjonen er øvre begrenset. Hastigheten til den fysiske manipulatoren trenger altså ikke å være øvre begrenset i dette tilfellet.

Den store fordelen med den observer-baserte adaptive regulatoren studert i dette kapitlet, er som for regulatoren i forrige kapittel, støyegenskapene. Parameterestimatenes er lite påvirket av en målestøy i den fysiske manipulatorens posisjon i forhold til eksisterende løsninger, se figur 8.5.


 Figur 8.3: *Parameterestimatenene.*

 Figur 8.4: *Følgefeil med adaptasjon og støy i posisjonsmålingen.*



Figur 8.5: Parameterestimaterne med støy i posisjonsmålingen.

Kapittel 9

Diskusjon og forslag til videre arbeid

9.1 Diskusjon

I denne hovedoppgaven er en passiv observer-struktur brukt i observer-basert styring av en stiv robot manipulator. Vi har også studert adaptiv observer-basert styring. I forhold til eksisterende løsninger er stabilitetsegenskapene de samme, dvs. lokal asymptotisk stabilitet vises for det ikke-adaptive tilfellet, og begrensede tilstander vises for det adaptive tilfellet.

Nyhetsbidraget med observer-strukturen presentert her, er som vi har sett flere ganger, støyegenskapene. Siden den mekaniske ekvivalenten for hastighetsestimatet reduseres til løsningen presentert av [Kelly og Ortega, 1993] for sett-punkts regulering, vil løsningene i denne hovedoppgaven ha de samme støyegenskapene som regulatoren til [Kelly og Ortega, 1993]. Posisjonsestimatet er fremkommet ved en lavpass-filtrering av den fysiske manipulatorens posisjon, og dette vil redusere innvirkningen av høyfrekvent målestøy. Hastighetsestimatet er fremkommet ved en derivasjon av posisjonsestimatet, dvs. først en lavpass-filtrering og deretter en derivasjon (som er det samme som en høypass-filtrering) av fysisk posisjon. Det betyr at en eventuell målestøy vil være mest dempet i posisjonsestimatet, og derfor brukes dette i stedet for hastighetsestimatet i adaptasjonsloven.

9.2 Forslag til videre arbeid

I denne hovedoppgaven er kun stive robot manipulatorer studert. Det kan være interessant å studere denne type observer-basert regulator på manipulatorer med fleksible ledd. De fleksible leddene kan f.eks. modelleres med en fjær mellom hvert ledd og aktuatorene til manipulatoren. Denne fjæren er også et passivt element, og dette bør kunne utnyttes.

I kapittel 7 fant vi at kravet for at total-systemet skulle være passivt, var at det tids-varierende dempeleddet $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)$ er et passivt element, dvs.

$$\langle \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d, C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T \geq \beta_1 \quad (9.1)$$

Vi viste også at vi har

$$\langle \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d, C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \rangle_T \leq -\beta_2 \quad (9.2)$$

Dersom det er mulig å vise ligning 9.1 kan passivitet for total systemet vises, og dette ville være en vesentlig forbedring fra eksisterende løsninger. Det ville da være mulig å vise global stabilitet samtidig med at systemet har meget gode støyegenskaper.

Bibliografi

- [Ailon og Ortega, 1992] Ailon A., Ortega R., *An Observer Based Set-Point Controller for Robot Manipulators with Flexible Joints*. Université de Technologie de Compiègne, France, Tech. Report, November, 1992.
- [Berghuis, 1993] Berghuis, Harry. *Model Based Robot Control: From Theory to Practice*. Enschede, The Netherlands, 1993.
- [Brogliato, Landau og Lozano-Leal, 1991] Brogliato B., Landau I., Lozano-Leal R. *Adaptive Motion Control of Robot Manipulators: A Unified Approach Based on Passivity*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 1, 187–202, John Wiley and Sons, 1991.
- [Canudas de Wit og Fixot, April 1991] Canudas de Wit C., Fixot N., *Adaptive Control of Robot Manipulators via Velocity Estimated Feedback*. Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California, April 1991, pp. 16–21.
- [Canudas de Wit og Fixot, Desember 1991] Canudas de Wit C., Fixot N., *Robust Control Via Robust Estimated State Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 12, December 1991, pp. 1497-1501.
- [Canudas de Wit og Fixot, 1992] Canudas de Wit C., Fixot N., *Adaptive Control of Robot Manipulators via Velocity Estimated Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, pp. 1234-1237.
- [Canudas de Wit, Fixot og Åström, 1991] Canudas de Wit C., Fixot N., Åström K.J., *Trajectory Tracking in Robot Manipulators via Nonlinear Estimated State Feedback*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 8, No. 1, pp. 138-144, February 1992.
- [Canudas de Wit og Slotine, 1991] Canudas de Wit C., Slotine J.-J. E., *Sliding Observers for Robot Manipulators*. Automatica, Vol. 27, No. 5, pp. 859-864, 1991.
- [Craig, 1988] Craig John J., *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*. Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
- [Egeland, 1993] Egeland O., *Servoteknikk*. Tapir, 1993.
- [Kelly, Carelli og Ortega, 1989] Kelly R., Carelli R., Ortega R., *Adaptive Motion Control Design of Robot Manipulators: an Input-Output Approach*. Int. J. Control, 1989, Vol. 50, No. 6, pp. 2563-2581.
- [Kelly og Ortega, 1993] Kelly R., Ortega R., *Global Regulation of Flexible Joint Robots Using Approximate Differentiation*. IEEE Transactions on Automatic Control, to be published.
- [Nicosia og Tomei, 1990] Nicosia S., Tomei P., *Robot Control by Using Only Joint Position Measurements*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 9, pp. 1056-1061, September 1990.

- [Nicosia, Tomei og Tornambè, 1987] Nicosia S., Tomei P., Tornambè A., *Approximate Asymptotic Observers for a Class of Nonlinear Systems*. Proc. 26th Conf. Decision Control (Los Angeles), Dec. 1987.
- [Paden og Panja, 1988] Paden B., Panja R., *Globally asymptotic stable 'PD+' controller for robot manipulators*. Int. J. Control, 1988, Vol. 47, No.6, pp. 1697-1712.
- [Qu, Dawson og Dorsey, 1992] Qu Z., Dawson D.M., Dorsey J.F., *Exponentially Stable Trajectory Following of Robotic Manipulators Under a Class of Adaptive Controls*. Automatica, Vol.28, No.3, pp. 579-586
- [Reboulet og Champetier, 1984] Reboulet C., Champetier C., *A new method for linearizing non-linear systems: the pseudolinearization*. Int. J. Control, 1984, Vol. 40, No. 4, pp. 631-638
- [Rouche N., Habets P. og Laloy M., 1977] *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*. New York: Springer-Verlag.
- [Slotine og Li, 1987] Slotine, J.J.E. and Li, W. *On the Adaptive Control of Robot Manipulators*. Int. J. Robotics Research, Vol. 6, No. 3, pp. 49-59, Fall 1987.
- [Slotine og Li, 1993] Slotine, J.J.E. and Li, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc. 1991.
- [Spong og Vidyasagar, 1989] Spong, M.W. and Vidyasagar, M. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, 1989.
- [Strang, 1988] Strang, G. *Linear Algebra and its Application, third edition*. Harcourt Brace Jovanovich, international edition, 1988.
- [Takegaki og Arimoto, 1981] Takegaki M., Arimoto S., *A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, June 1981, Vol. 102, pp. 119-125.
- [Vidyasagar, 1993] Vidyasagar M., *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Inc. 1993.

Appendix A

Lineær algebra

A.1 Innledning

I dette kapittelet gis en kort beskrivelse av nyttige begreper i lineær algebra, så som vektor normer og matrise normer. Stoffet er hentet fra [Strang, 1988].

A.2 Definisjoner

Definisjon A.1 (Positiv definit) *En matrise \mathbf{A} er positiv definit dersom*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (\text{A.1})$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

For reelle symmetriske matriser er dette ekvivalent med

Alle egenverdiene til \mathbf{A} er positive.

Alle øvre venstre under-matriser har positive determinanter.

Definisjon A.2 (Vektor norm) *Normen til en vektor betegnes*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.2})$$

og oppfyller følgende krav.

$$(1) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ og } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| > 0$$

$$(2) \quad \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(3) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Det finnes mange funksjoner $\|\cdot\|$ som tilfredstiller disse kravene. Et eksempel er den Euklidske normen

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad (\text{A.3})$$

□

Definisjon A.3 (Matrise norm) Normen til en matrise \mathbf{A} er definert av

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\text{A.4})$$

Vi har altså at

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \quad (\text{A.5})$$

□

Teorem A.1 (Rayleighs prinsipp) Kvotienten $R(\mathbf{x})$ minimeres av den første egenvektoren $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ og minimumsverdien er lik den minste egenverdien λ_1 :

$$R(\mathbf{x}_1) = \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} = \frac{\mathbf{x}_1^t \lambda_1 \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} = \lambda_1 \quad (\text{A.6})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

der \mathbf{A} er en symmetrisk positiv definit eller semi-definit matrise. ■

Kommentar A.1 Normen til en matrise \mathbf{A} kan dermed finnes på følgende måte.

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (\text{A.8})$$

Matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ er symmetrisk og vi gjenkjenner det siste uttrykket som Rayleigh kvotienten til $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Normen til matrisen \mathbf{A} er altså kvadratroten til den største egenverdien til den symmetriske matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. □

Teorem A.2 (Schwarz ulikheten) Gitt to vilkårlige vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Da gjelder

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A.9})$$

Bevis: Dersom \mathbf{x} og \mathbf{y} normaliseres, slik at begge er enhetsvektorer, da har vi at

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^T \mathbf{y}| &= \left| \sum_j x_j y_j \right| \\ &\leq \sum_j |x_j| |y_j| \\ &\leq \sum_j \frac{|x_j|^2 + |y_j|^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

der vi har brukt at

$$|x_j|^2 + |y_j|^2 - 2|x_j| |y_j| \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

Se [Strang, 1988][side 151]. ■

Teorem A.3 (Trekant ulikheten) Gitt to vilkårlige vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Da gjelder

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A.12})$$

Bevis: Ved å kvadrere begge sidene i ligning A.12 har vi at

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq [\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|]^2 \\ \Rightarrow [\mathbf{x} + \mathbf{y}]^T [\mathbf{x} + \mathbf{y}] &\leq [\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|]^2 \\ \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \\ \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{y} &\leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Den siste ligningen er oppfylt i følge Schwarz ulikheten. ■

Appendix B

Betingelser for Matrosovs teorem

Matrosovs teorem er benyttet i kapittel 7 i stedet for LaSalles teorem for å vise at posisjonsfeilen går mot null. Teoremet brukes på bevegelsesligningene for en robot manipulator med regulator og observer. Systemet som ble studert er gitt av ligningene

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] &= \mathbf{K}_1[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d)[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] \\ &\quad - e\mathbf{a}M(\mathbf{q})[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_1][\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \mathbf{D}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

der $M(\mathbf{q})$ og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d)$ er tidsvarierende matriser, \mathbf{K}_1 , \mathbf{K} og \mathbf{D} er konstante matriser mens e og a er positive konstanter. Definerer nå tilstandene

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{x}_2 = \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{x}_3 = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

Vi har da at systemet kan skrives på tilstandsromformen

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_3 \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{D}^{-1} \{ \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 - [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1] \mathbf{x}_2 \} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_3 &= M(\mathbf{q})^{-1} \{ -[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_p] \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_2 - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{x}_3 \} \\ &\quad + M(\mathbf{q})^{-1} \{ e\mathbf{a}M(\mathbf{q})\mathbf{D}^{-1}[\mathbf{K} + \mathbf{K}_1] \mathbf{x}_2 - e\mathbf{a}M(\mathbf{q})\mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 \} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Vi ser at systemet er ikke-autonomt, siden matrisene $M(\mathbf{q})$ og $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d)$ er tids-avhengige. For dette systemet ble det vist i kapittel 7 at følgende funksjon er en Lyapunov funksjon for systemet.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T M(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \frac{1}{2}[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}]^T \mathbf{K}_1[\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] + \frac{1}{2}[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d]^T \mathbf{K}_p[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d] \\ &\quad - [\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d]^T e\mathbf{b}M(\mathbf{q})[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] - [\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d]^T \frac{be\mathbf{p}}{2}[\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Den tids-deriverte av denne funksjonen var funnet å være

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [d - eb^2[k_1 + k_p]]\mathbf{I} - e^2\mathbf{a}M(\mathbf{q}) & be\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_d) \\ beM(\mathbf{q}) & eM(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{u}^T \mathbf{N} \mathbf{u} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Det skal nå vises at disse ligningene oppfyller kravene for å bruke Matrosovs teorem. Fra kapittel 7 har vi at funksjonen V er positiv definit ved passende valg av regulator-parametere. Fra egenskap 4.2 har vi at krav (1) er oppfylt. I kapittel 7 har vi antatt at hastighetene i systemet er begrenset. Ved å bruke dette sammen med egenskap 4.3 har vi at krav (2) er oppfylt. Siden matrisen \mathbf{N} er positiv definit, finnes det nemlig en konstant matrise \mathbf{P} slik at

$$\dot{V} = -\mathbf{u}^T \mathbf{N} \mathbf{u} \leq -\mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u} \leq 0 \quad (\text{B.12})$$

der \mathbf{u} er gitt av

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Man velger nå

$$W(\mathbf{x}, t) \triangleq \ddot{V}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.14})$$

Kravene (3), (4) og (5) kontrolleres nå på samme måte som i [Paden og Panja, 1988][Appendix]. $\ddot{V}(\mathbf{x}, t)$ er gitt av

$$\ddot{V} = -2\mathbf{u}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \mathbf{u} \quad (\text{B.15})$$

Krav (3) er at $|\ddot{V}(\mathbf{x}, t)|$ er begrenset, og dette er tilfelle når $\|\dot{\mathbf{N}}\|$, $\|\mathbf{u}\|$ og $\|\dot{\mathbf{u}}\|$ er begrenset. Normen $\|\dot{\mathbf{N}}\|$ er begrenset når $\dot{\mathbf{q}}$ er begrenset. Fra antagelsene i kapittel 7 har vi at krav(3) er oppfylt.

Krav (4) kan kontrolleres ved å bruke lemma 3.2. $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ regnes ut.

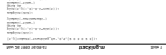
$$\dot{W}(\mathbf{x}, t) = -2\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{u}} - 2\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{N}} \mathbf{u} \quad (\text{B.16})$$

Vi vet at alle argumentene i dette uttrykket er begrenset, bortsett fra $\ddot{\mathbf{u}}$. Ved å derivere ligningen for det masseløse punktet $\hat{\mathbf{q}}$ har vi at

$$\mathbf{K}[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{D}[\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] + \mathbf{K}_1[\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{0} \quad (\text{B.17})$$

Vi ser at dersom hastighetene $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d$ og $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}$ er begrenset så vil også akselerasjonen $\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d$ være begrenset. Fra ligning B.9 har vi det samme resultatet, dvs. når hastighetene $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d$ og $\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}$ er begrenset så vil akselerasjonen $\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}_d$ være begrenset. Vi har dermed at tidsavhengigheten av $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ er gitt av en kontinuerlig begrenset funksjon. Krav 4'(a) er dermed oppfylt. Krav 4'(b) er også oppfylt og dette følger fra ligning 7.88 og egenskap 4.2.

Krav (5) følger fra ligningene B.7, B.8 og B.9 og ved å bruke at posisjonene og hastighetene er begrenset og egenskapene 4.2 og 4.3.



Appendix C

Matlab program

C.1 Observerbasert regulator uten adaptasjon

Følgende Matlab program genererte figur 7.6.


```
%% Example 10.1: Observer-based adaptive control
% This script implements an observer-based adaptive control system
% for a second-order system. The system parameters are estimated
% online using a least-squares algorithm. The controller is designed
% based on the estimated parameters.

% System parameters
n = 2; % System order
% Initial conditions
x0 = [0; 0]; % Initial state
% Observer gain
L = [10; 10]; % Observer gain matrix
% Controller gain
K = [10; 10]; % Controller gain matrix
% Adaptation gain
gamma = 0.01; % Adaptation gain
% Sampling time
Ts = 0.01; % Sampling time
% Number of samples
N = 1000; % Number of samples

% Initialize state and observer state
x = x0; % Initial state
x_hat = x0; % Initial observer state
% Initialize parameter estimates
theta_hat = zeros(n, 1); % Initial parameter estimates
% Initialize error signal
e = 0; % Initial error signal

% Main loop
for k = 1:N
    % Compute control signal
    u = -K*x_hat + e; % Control signal
    % Compute next state
    x = x + Ts*(A*x + B*u); % Next state
    % Compute next observer state
    x_hat = x_hat + Ts*(A_hat*x_hat + B_hat*u + L*(y - y_hat)); % Next observer state
    % Compute error signal
    e = y - y_hat; % Error signal
    % Update parameter estimates
    theta_hat = theta_hat + Ts*gamma*(y - y_hat)*x_hat; % Updated parameter estimates
end

% Plot results
figure; % Create figure
plot(1:N*Ts, x(1,:), 'b'); % Plot state x1
hold on; % Hold plot
plot(1:N*Ts, x(2,:), 'r'); % Plot state x2
plot(1:N*Ts, u, 'g'); % Plot control signal u
plot(1:N*Ts, y, 'm'); % Plot output y
plot(1:N*Ts, y_hat, 'k'); % Plot estimated output y_hat
legend('x1', 'x2', 'u', 'y', 'y_hat'); % Add legend
title('Observer-based adaptive control results'); % Add title
xlabel('Time (s)'); % Add x-axis label
ylabel('Amplitude'); % Add y-axis label
```


[illegible]

