d)

$$U_t^{(2)} = \rho W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^{(2)}$$

1)

$$\begin{pmatrix} U_{t_1}^{(2)} \\ \vdots \\ U_{t_n}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \sqrt{1-\rho^2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{t_1}^{(1)} \\ W_{t_1}^{(2)} \\ W_{t_2}^{(1)} \\ W_{t_2}^{(2)} \\ \vdots \\ W_{t_n}^{(1)} \\ W_{t_n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

wektor Gaussowski z niezal. $(W_t^{(1)})_t$ i $(W_t^{(2)})_t$.

to też wektor Gaussowski

2) $U_0^{(2)} = \rho W_0^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, W_0^{(2)} = 0$

3) $E U_t^{(2)} = \rho\, E W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, E W_t^{(2)} = 0$

$t > s \geq 0$

4) $$\mathrm{cov}(U_t^{(2)}, U_s^{(2)}) = E\left(\rho W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^{(2)}\right)\cdot\left(\rho W_s^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\, W_s^{(2)}\right)$$

$$= \rho^2 E W_t^{(1)} W_s^{(1)} + \rho\sqrt{1-\rho^2}\, \underbrace{E W_t^{(1)} W_s^{(2)}}_{=0} + \rho\sqrt{1-\rho^2}\, \underbrace{E W_t^{(2)} W_s^{(2)}}_{E W_t^{(1)} E W_s^{(2)} = 0} +$$

$$+ (1-\rho^2) E W_t^{(2)} W_s^{(2)} = \rho^2 E\left[(W_t^{(1)} - W_s^{(1)}) W_s^{(1)} + {W_s^{(1)}}^2\right] +$$

$$+ (1-\rho^2) E\left[(W_t^{(2)} - W_s^{(2)}) W_s^{(2)} + {W_s^{(2)}}^2\right] = \rho^2 \cdot s + (1-\rho^2)\cdot s = s = \min(s,t)$$

Tak samo rozumujemy, gdy $s > t \geq 0$

5) prawostronna ciągłość trajektorii $(U_t^{(2)})_t$ wynika z p.c. trajektorii $(W_t^{(1)})_t$ oraz $(W_t^{(2)})_t$

więc $(U_t^{(2)})_t$ – to proces Wienera.

to, że ρ nie zależy od czasu ważne jest w 4), bo, gdyby ρ zależało nie mielibyśmy $\mathrm{cov}(U_t^{(2)}, U_s^{(2)}) = \min\{s,t\}$