

宁波诺丁汉大学

英语语言教育中心

第一学期,2022-2023

物理科学与工程基础代数

允许时间:24 小时带回家考试

这篇论文包含四个分数相同的问题。

尝试任何三个问题。

最好的三个答案将获得分数。

显示解决方案中的所有必要步骤。

通过方括号括起的数字来指示问题的每个小节的权重,例如。 [5],紧跟在该小节之后。

本考试只能使用 CELE 认可的计算器 (fx 82系列)。

附加材料:公式表 (附在试卷背面)。

指示:

1. 请把你的答案写在白纸上。
或者,您可以使用 iPad/平板电脑来写下您的答案。
2. 创建一个单一的 PDF 文件,包含您对试题的手写答案的所有图片/扫描副本。
3. 将您的文件命名为:您的学号 N036Final。
例如:20519999 N036Final。
4. 请填写学术诚信声明。
5. 请将 PDF 文件上传到 Moodle drop-box (检查来自 Module Convenor 的电子邮件以获取 drop-box 的链接)。
- 六、提交截止日期:_____
2023 年 1 月 7 日星期六上午 9 点半之前。
7. 此项工作必须自己完成。
剽窃和串通被认为是非常严重的学术违法行为,将被视为严重的学术违法行为。

(a) (i) 给定 $f(x) = kx^2 + 3$ 和 $g(x) = px + 5$ 。如果 $fg(4) = 6$, 求 $k \in \mathbb{R}$ 。

(ii) 求解模数不等式 $|5 \times 7| \leq 3 \times 2 \pmod{R}$ 。

(iii) 使用对数规则求解 $x \in \mathbb{R}$ 的对数方程：

$$\log_{10}(x+1) + \log_{10}(x+2) - \log_{10} 3 = \log_{10} 2.$$

(iv) 利用对数函数和指数函数之间的关系来求解

$$\text{指数方程: } e^{x^2+3} = 2; x \in \mathbb{R}.$$

[8]

(b) 给定二次函数 $f(x) = 2x^2 - 20x + 47$ 。

(i) 用补正方的方法将 $f(x)$ 表示为

$$f(x) = a(x-h)^2 + k, \text{ 其中 } a, h, k \text{ 为待定常数。}$$

(ii) 找出 f 的范围。

(iii) 画出 $y = f(x)$ 的图形。

[4]

(c) 通过代入 $e^x = t$, 求解方程式 $9e^{2x} + 12e^x - 5 = 0$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 。

[3]

(a) (i) 求值: $(1 + \cot^2 \sqrt{x}) \cdot (1 - \cos^2 \sqrt{x}) + (1 + \tan^2 \sqrt{x}) \cdot (1 - \sin^2 \sqrt{x})$ 。

(ii) 证明 $\frac{70 + 50}{1 \text{ 棕色} 70 \text{ 棕色} 50} + p \sqrt{3} = 0$ 。

(iii) 证明以下三角恒等式: $\frac{\sin^3 \sqrt{x} - \cos^3 \sqrt{x}}{\cos^2 \sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} = 2 \tan \sqrt{x}$ 。

[6]

(b) (i) 以 $R \cos x$ 的形式表示 $f(x) = 4 \sin x + 3 \cos x$, 其中 $R > 0$

$$2 \leq 0, \text{ 且 } \sqrt{2} \leq \frac{\pi}{6}.$$

(ii) 因此求解三角方程: $f(x) = 4$; $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 。

(iii) 同时画出 $y = f(x)$ 的图形并标出与直线的交点

$$y = 4 \text{ 在区间 } (0, \frac{\pi}{6}) \text{ 中。}$$

[5]

(c) 给定 $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ 。

(i) 用综合除法证明 $(x+2)$ 是 $p(x)$ 的因数。

(ii) 因此找到 $p(x)$ 的所有零点。

[4]

(a) 考虑使用定点迭代法求解方程 $f(x) = 2x^2 + 7 = 0$ 。

(i) 用中值定理证明 $f(x) = 0$ 在区间内有根

2、 1.

(ii) 证明 $f(x) = 0$ 可以重新排列得到迭代公式：

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1/3} \quad (3.1)$$

(iii) 从初值 $x_0 = 1.5$ 开始, 利用迭代公式(3.1)求

$f(x) = 0$ 的根, 精确到小数点后 5 位 (dp)。

(iv) 将过程中获得的所有近似值(x_1, x_2, \dots) 制成表格。

(v) 在 3(a)(iii) 中说明获得 5 dp 精度所需的迭代次数。

[6]

(b) 给定底面半径为 r 且高度为 h 的直立圆锥体的体积

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 。如果半径 r 的测量误差为 $r = r$ 的 1.5%, 则使用 $V = 3$

$\frac{1}{3} \pi r^2 h$ 求所得误差, V 近似: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, 在

[3]

(c) 考虑联立线性方程组 (3.2):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(i) 将系统 (3.2) 表示为矩阵形式 $AX = B$, 明确说明什么矩阵

A, X 和 B 是。

(ii) 找到它 (A)。

(iii) 因此找到系数矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 。

(iv) 证明结果: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ 。

(v) 使用 $X = A^{-1}B$, 求解系统 (3.2)。

[6]

(a) 将下列有理分数表示为部分分数之和：

$$\text{(一)} \quad \frac{5x+6}{x^2+3x+2}$$

$$\text{(二)} \quad \frac{3 \times 2^3}{x^2+2(x-1)} \quad [4]$$

(b) (i) 给定 $z_1 = 5-6i$, $z_2 = 1+3i$ 和 $z_3 = 2+3i$, 使用的属性

$$\text{求模数} \quad \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}.$$

(ii) 以极坐标形式表示复数 $z = 5-i$ $z = r \cos \theta + i \sin \theta$,

其中 $r > 0$ 且 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。 [3]

(c) (i) 对于等差数列 (AP), 第九项是 60, 第二十项是 38。

找出这个 AP 的第四十项

(ii) 用无限几何级数求和的方法表示 1.123123123

作为普通分数, 即形式的分数

$$\frac{p}{q}, \text{ 其中 } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

(iii) 用幂级数公式证明

$$x_n \quad 6n^2 + 4n - 1 = n(n+2)(2n+1).$$

(iv) 用差分法求无穷和: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad [8]$$



CELEN036 数学公式表

指数法则

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

我 一个 $= a^{m+n}$

是 $= a^{mn}$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$(a^b)^n = a^{bn} = (a^n)^b$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^m/n = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

对数定律

逻辑 $1=0 \ (a > 0)$

记录 一个 $= 1$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (产品规则)

$\log_a \sqrt[n]{xy} = \log_a x \log_a y$ (商法则)

$\log_a x^n = n \log_a x$ (幂的对数)

$x \log_a x = \log_a y$ (基本规则的改变)

$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b}$

游戏 $x = x$

对数函数和指数函数之间的关系

$a^x = y, x = \log_a y$

不等式规则

| 不等式意义 | |
|----------------|-------------------------|
| $a > b$ 大于 b | |
| $a < b$ 小于 b | |
| $a \geq b$ | a 大于或等于 b 小于或等于 b |
| $a \leq b$ | |

$a > b, a + c > b + c; 2R$

$a > b$ 和 $> bc; c > 0$

$a > b$ 和 $< bc; c < 0$

啊 $| < b, a - b < x < a + b$

二次方程

二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根是:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (一个 $b=0$)

根的性质:

| | | |
|------------------------------|-------------------------|--|
| 判别式, $\Delta = b^2 - 4ac$ | > 0 $= 0$ < 0 | 根是真实而独特的 根是实数且相等 (即重复根) 没有真正的根源 (即根很复杂) |
|------------------------------|-------------------------|--|

复数

笛卡尔形式 $z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$

极性形式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

其中, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tan \theta = \frac{b}{a}$

对于复数,

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

和

$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$

矩阵

矩阵的乘积

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 是 $\sqrt{abcd} \cdot \sqrt{xyzw} = \sqrt{}$

ax 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 是 $\sqrt{abcd} \cdot \sqrt{xyzw} = \sqrt{}$

$A_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

· 序列和系列

算术级数: _____

a, a + d, a + 2d, a + 3d,

在哪里,

a = 第一项, d = 公差。

第 n 项是 $a_n = a + (n-1)d$

前 n 项之和为

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

几何级数: _____

一个, ar, ar², ar³,

在哪里,

a = 第一项, r = 公比。

第 n 项是 $a_n = ar^{n-1}$

前 n 项之和为

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad ; r \neq 1$$

$$; r = 1$$

无限几何级数之和:

$$S = \frac{a}{1-r} \quad ; |r| < 1$$

谐波级数: _____

第 n 项是 $\frac{1}{n}$; n = 1, 2, 3, ...

斐波那契数列:

$f(1) = f(2) = 1, f(n+2) = f(n) + f(n+1);$

n = 1, 2, 3, ...

电源系列: _____

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_{2n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$x_{3n} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

· 二项式系列

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$ 如果 $n \in \mathbb{N}$

在哪里 $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (不) !

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} x^r + \dots$$

$|x| < 1, n \in \mathbb{R}$

· 三角学

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta+\phi}{2} \cos \frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta; 1 \cos \theta = 2 \sin^2 \theta \cos \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta; \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2 \theta \quad \text{其中 } t = \tan \theta$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin 2\theta$$