Universidad Rey Juan Carlos | **Física** Grado en Ingeniería de Materiales **Curso 2011 – 2012** | Hoja 5 Dinámica de un sistema de partículas

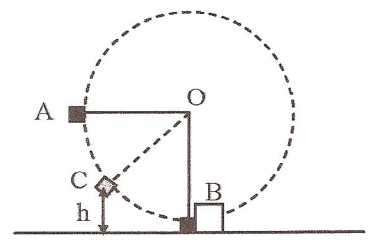
EJERCICIOS

1. Dos vehículos de 500 y 1000 Kg respectivamente, ambos con velocidades de 180 km/h, sufren un choque frontal perfectamente inelástico. Tras la colisión ¿cuál es la velocidad de los vehículos? **Sol**: 60 km/h

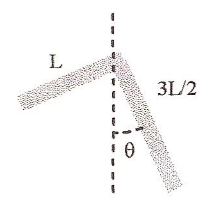
2. Un proyectil explosivo se lanza desde el suelo con un ángulo de 45° y velocidad inicial de 30 m/s. En el punto más alto de la trayectoria explota en dos pedazos de igual masa. Uno de ellos sale despedido en la dirección del movimiento a una velocidad de 45 m/s. ¿Dónde cae el otro pedazo?
Sol: a 40,35 m del punto de lanzamiento

3. Una partícula de masa m está inmóvil en un plano horizontal. Otra partícula de igual masa se dirige hacia la primera con velocidad V y choca elásticamente con ella, desviándose un ángulo α. Calcular las velocidades de ambas partículas después del choque. **Sol**: $|\vec{v}_1| = V\cdot\cos\alpha$ con ángulo α; $|\vec{v}_2| = V\cdot sen\alpha$ con ángulo -(90° - α)

4. El péndulo simple de la figura consta de una masa puntual m_1 = 20 kg, atada a una cuerda sin masa de longitud 1,5 m. Se deja caer desde la posición A. Al llegar al punto más bajo de su trayectoria, punto B, se produce un choque perfectamente elástico con otra masa m_2 = 25 kg, que se encuentra en reposo en esa posición sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Como consecuencia del choque, la masa m_1 rebota hasta alcanzar la posición C a altura h del suelo. Calcula: a) La velocidad de m_1 al llegar a la posición B antes del choque y la tensión de la cuerda en ese instante. b) Las velocidades de m_1 y m_2 después del choque. c) La energía cinética que pierde m_1 en el choque. d) La altura h que asciende la masa m_1 después del choque.
Sol: a) v = 5, 42 m/s; T = 588 N; b) v_1 = -0,60 m/s; v_2 = 4,82 m/s; c) ΔEc = -290,2 J; h = 18,5 mm.

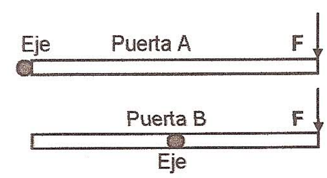


5. Una escuadra hecha de metal uniforme cuelga en equilibrio de un clavo en la pared como indica la figura. Uno de sus lados tiene longitud L, y el otro 3L/2. ¿Cuál es el ángulo de la posición de equilibrio? **Sol:** 24°



6. Una polea cilíndrica de 10 kg de masa y 10 cm de radio se encuentra suspendida del techo. Por la periferia de la polea pasa una cuerda inextensible de masa despreciable de cuyos extremos penden sendos cuerpos de masas m_1 = 13 kg y m_2 = 7 kg. Los cuerpos parten del reposo y g = 10 m/s^2 Calcular: a) la aceleración lineal de los cuerpos y la aceleración angular de la polea; b) la energía cinética de cada cuerpo y de la polea a los 2 s. Momento de inercia del cilindro: ½ MR^2. **Sol**.: a) 2,4 m/s^2, 24 rad/s^2; b) 149,76 J, 80,64 J, 9,22 J

7. El dibujo muestra dos puertas idénticas .vistas desde arriba sobre las actúa la misma fuerza F. La puerta A rota alrededor de un eje situado en su parte izquierda, mientras que la puerta B rota alrededor de un eje que pasa por su centro. Comenzando desde el reposo, la puerta A rota un cierto ángulo durante 3 s. ¿Cuánto tiempo le lleva a la puerta B rotar el mismo ángulo? Datos: $I_A = (1/3)Ml^2$, $I_B = (1/12)Ml^2$. **Sol.:** 2,12 s



8. Una varilla, de longitud L y masa M, puede girar sin rozamiento respecto a un punto fijo O situado a una distancia L/3 de uno de sus extremos (la varilla está clavada en la pared en ese punto). Inicialmente, la varilla está en reposo en posición horizontal, sujeta con una mano. Al soltarla, comienza a girar. Calcular la aceleración angular con la que rota si su momento de inercia con respecto al punto O es I = ML^2/9.
Sol: α = 3g cosθ /2L , siendo θ el ángulo respecto a la horizontal

9. Un cilindro (I = 1/2·m·R^2) rueda por una superficie horizontal a velocidad v. ¿Qué trabajo habrá que hacer para pararlo? **Sol**: 3/4mv^2.

10. Una esfera de radio R y un cubo se sueltan desde el reposo a una altura H por un plano inclinado. La esfera rueda sin deslizar y el cubo desliza sin rozamiento. El momento de inercia de la esfera es $I = 2/5{\cdot}M{\cdot}R^2$.
a) Calcular las velocidades de la esfera y del cubo al llegar al suelo.
b) Determinar cuál de los dos llega antes al final del plano. **Sol**: $v_{esfera} = \sqrt{(10/7)gH}$; $v_{cubo} = \sqrt{2gH}$ **Sol**: El cubo

AUTOEVALUACIÓN

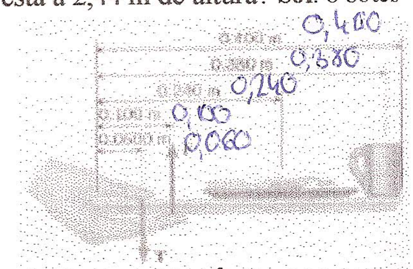
11. Una granada de masa m se mueve con velocidad de módulo v en dirección horizontal. Explota en dos fragmentos idénticos de masa m/2, uno de los cuales se mueve con velocidad v en dirección vertical. ¿Con qué ángulo respecto de la horizontal se mueve el otro fragmento? **Sol**: $\theta = -26{,}6^\circ$.

12. Un cuerpo de 6 kg de masa lleva una velocidad de 10 m/s hacia la derecha cuando choca frontalmente y de forma perfectamente elástica con un cuerpo de 4 kg que lleva una velocidad de 8 m/s. calcular la velocidad de cada cuerpo después del choque si el segundo cuerpo se mueve: a) hacia la derecha; b) hacia la izquierda. **Sol**.: a) $v'_1 = +8{,}4$ m/s; $v'_2 = +10{,}4$ m/s; b)) $v'_1 = -4{,}4$ m/s; $v'_2 = +13{,}6$ m/s

13. Un péndulo está formado por una masa M suspendida de un punto O por una varilla rígida de masa despreciable y longitud L. Inicialmente, el péndulo se encuentra en su estado estable de reposo. Una masa m, con velocidad horizontal v, choca con la masa del péndulo y queda incrustada en ella. Tras el choque, el péndulo alcanza una altura H sobre la posición inicial. a) Calcular la velocidad de la masa m antes del choque. b) Determinar la pérdida de energía cinética del sistema ocurrida en el choque.
Sol: a) $v = (1 + M/m)\sqrt{2gH}$; b) $\Delta Ec = -(M/m)(M+m)gH$

14. Un balón se deja caer desde una altura de 6,10 m, cae verticalmente hacia abajo y colisiona inelásticamente con el suelo y rebota. El balón pierde un 10% de su energía cinética cada vez que choca con el suelo. ¿Cuántos botes puede dar y aún ser capaz de alcanzar una ventana que está a 2,44 m de altura? **Sol**: 8 botes

15. Se coge con una mano una bandeja de desayuno como muestra la figura. La masa de la bandeja sola es 0,200 kg, y su centro de gravedad localizado en su centro geométrico. Sobre la bandeja hay un plato con 1 kg de comida y una taza de café de 0,250 kg. Obtén la fuerza T ejercida por el pulgar y la fuerza F ejercida por los cuatro dedos. Ambas fuerzas actúan perpendicularmente a la bandeja que se mantiene paralela al suelo. g = 10 m/s^2. **Sol:** T = 57,5 N, F = 72 N

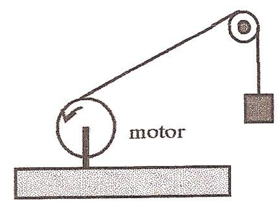


16. Un anillo ($I_a = MR^2$), una esfera hueca ($I_b = (2/3)MR^2$) y una esfera maciza ($I_c = (2/5)MR^2$) tienen la misma masa y el mismo radio externo. Pueden girar sobre ejes que pasan por sus respectivos centros. Si se les da un cierto impulso tangente a su superficie, ¿cuál girará más deprisa? **Sol:** la esfera maciza.

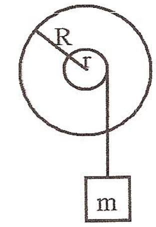
17. Una estación espacial de forma cilíndrica rota en torno al eje del cilindro para generar gravedad artificial. El radio del cilindro es 82,5 m. El momento de inercia de la estación sin gente es $3{,}00\times10^9$ kgm^2. Supón que 500 personas, con una masa promedio de 70,0 kg cada una, viven en la estación. Según se mueven radialmente desde más afuera hacia el eje del cilindro, la velocidad angular de rotación cambia. ¿Cuál es el máximo porcentaje de cambio en la velocidad angular debido al movimiento de la gente?. **Sol**: 8%

18. Por un plano inclinado suben rodando sin deslizar un aro, $I_a = MR^2$, un cilindro, $I_c = (1/2)MR^2$, y una esfera maciza, $I_e = (2/5)MR^2$, de igual masa e igual radio. Si los tres cuerpos llevan la misma velocidad en la base del plano, ¿cuál llega más arriba?.Justifique su respuesta. **Sol**.: el aro.

19. Un bloque de 2000 kg está suspendido en el aire por un cable de acero que pasa por una polea y acaba en un torno motorizado. El bloque asciende con velocidad constante de 8 cm/s. El radio del tambor del torno es de 30 cm y el momento de inercia de la polea es 50 kg m^2. a) ¿Cuánto vale el momento que ejerce el cable sobre el tambor del torno?. b) ¿Cuánto vale la velocidad angular del tambor del torno? **Sol**: a) 5 880 Nm; b) 4/15 rad/s.



20. La polea de la figura, de radio mayor R = 1 m y masa M =100 Kg, lleva enrollada en el eje menor (r =10 cm) una cuerda de masa despreciable, de la que pende un cuerpo de masa m = 40 Kg a una altura de 18 cm del suelo. Calcular: (a) la aceleración de caída de la masa m, (b) la tensión de la cuerda en la caída, (c) el tiempo que tarda m en llegar al suelo, (d) la energía cinética total del sistema en ese instante. (Dato: momento de inercia de un disco I = MR^2). **Sol**.: a) 0,04 m/s^2; b) 400 N; c) 3 s; d) 72 J.



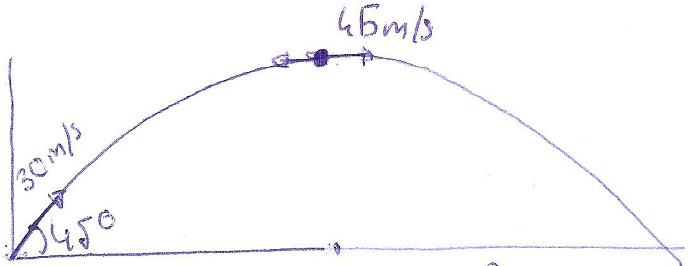
① Al ser inelástico, quedan pegados.
Se conserva el momento. $180\,km/h = 50\,m/s$.

$\vec{p_i} = 500 \cdot 50 + 1000(-50) = -25000\,kg\frac{m}{s}$ $\xrightarrow{500kg}$ $\xleftarrow{1000kg}$

$\vec{p_0} = \vec{p_f} \Rightarrow -25000 = (500+1000)\cdot \bar{v}_f \Rightarrow \hat{v}_f = -16{,}66\,m/s = -60\,km/h$

60km/h en el sentido que venía el de mayor masa.

②



En el punto más alto la velocidad sólo tiene componente x.

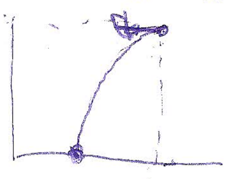
$\bar{p_i} = \bar{p_x} = m \cdot v = m\,15\sqrt{2}$

$v_x = 30 \cdot \cos 45° = 30\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}\,m/s$; $v_{oy} = 30\,sen\,45° = 15\sqrt{2}$

$\bar{p}_f = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \frac{m}{2} \cdot 45 + \frac{m}{2} \cdot \bar{v}_2 = \frac{m}{2}(45 + v_2)$

$\cancel{m}\,15\sqrt{2} = \frac{\cancel{m}}{2}(45 + \bar{v}_2) \Rightarrow 30\sqrt{2} = 45 + \bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v}_2 = -2{,}57\,\hat{i}$

$v_{ox} = -2{,}57\,\hat{i}$



1° Calculamos la altura máxima y la posición de ese punto.

$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$
$v_y = v_{oy} + gt$
$x = x_0 + v_{ox}t$

$\begin{cases} y = 0 + 15\sqrt{2}\,t - 4{,}9t^2 \\ 0 = 15\sqrt{2} - 9{,}8t \\ x = 0 + 15\sqrt{2}\,t \end{cases}$

De la 2ª, $t = 2{,}165\,s \Rightarrow y = \underline{23\,m}$; $x = \underline{46\,m}$

Para el 2° pedazo, al llegar al suelo.

$0 = 23 + 0t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 2{,}17\,s$

$v_y = 0 - 9{,}8t$

$x = 46 - 2{,}57 \cdot t \Rightarrow x = \underline{40{,}43\,m}$

(4a) Por conservación de la energía:

$$\cancel{Ec_A} + Ep_A = Ec_B + \cancel{Ep_B}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 \Rightarrow 9,8\cdot 1,5 = \frac{1}{2}V_B^2 \Rightarrow V_B = \underline{5,42\,m/s}$$

$$T = F_c + P = m\frac{V_B^2}{R} + mg = 20\left(\frac{5,42^2}{1,5} + 9,8\right) = \underline{588\,N}$$

b) Sólo hay componentes x:

$$\vec{p}_i = m_2\cdot 0 + m_1\cdot v_1 = 20\cdot 5,42 = 108,4\ kg\frac{m}{s}$$

$$\vec{p}_f = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow 108,4 = 20\vec{v}_1 + 25\vec{v}_2 = 20v_1 + 25v_2$$

Como no hay pérdidas por ser un choque elástico, la energía cinética total se conserva:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 20\cdot 5,42^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}20\cdot v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}25\cdot v_2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 588 = 20v_1^2 + 25v_2^2 \\ 108,4 = 20v_1 + 25v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5,42 = v_1 + 1,25v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = 5,42 - 1,25v_2$$

$$588 = 20\left(5,42^2 - 2\cdot 5,42\cdot 1,25v_2 + 1,25^2\cdot v_2^2\right) + 25v_2^2$$

$$0 = -271\,v_2 + 31,25v_2^2 + 25v_2^2 = -271\,v_2 + 56,25v_2^2$$

$$v_2 = \frac{271}{56,25} = \underline{4,82\,m/s} \qquad v_1 = \underline{-0,6\,m/s}$$

c) $\Delta Ec = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}20(0,6^2 - 5,42^2) = -290,2\,J$

d) Por conservación de la energía:

$$Ec_B + \cancel{Ep_B} = \cancel{Ec} + Ep_c$$

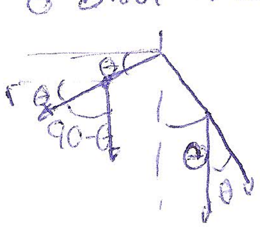
$$\frac{1}{2}2\cancel{0}\cdot 0,6^2 = 2\cancel{0}\cdot 9,8\cdot h \Rightarrow h = 0,0184\,m = \underline{18,4\,mm}$$

(5) Condición de equilibrio de rotación: $\Sigma \vec{M} = 0$

$$M = \vec{r}\times\vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha$$

Decimos que tenemos una densidad lineal de $\rho\,\frac{kg}{m}$

o bien vemos que $m_{\frac{3L}{2}} = \frac{3}{2}m_L$, o $m_L = \rho\cdot L$ y $m_{\frac{3L}{2}} = \rho\frac{3L}{2}$

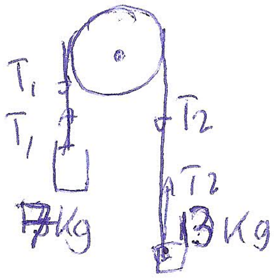


$$\frac{L}{2}\rho L g \underbrace{\cos\theta}_{\sin(90-\theta)} = \frac{3L}{2\cdot 2}\cdot\rho\frac{3L}{2}g\sin\theta$$

o bien $\frac{L}{2}\cdot m g\cos\theta = \frac{3L}{4}\cdot\frac{3}{2}m g\sin\theta$

Simplificando: $tg\theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \underline{\theta = 24^\circ}$

⑥ Estudiamos por separado la rotación de la polea y la traslación de los pesos.



Rotación: $\sum \vec{M} = I\vec{\alpha} \Rightarrow RT_2 - RT_1 = I\cdot\frac{a}{R}$

Traslación: $\left.\begin{array}{l} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\}$

$0{,}1T_2 - 0{,}1T_1 = \frac{1}{2}10\cdot\cancel{0{,}1}^2\cdot\frac{a}{\cancel{0{,}1}} \Rightarrow T_2 - T_1 = 5a$

$13\cdot 10 - T_2 = 13\cdot a$

$T_1 - 7\cdot 10 = 7\cdot a$

$130 - T_2 + T_1 - 70 = 20a \Rightarrow 60 - 20a = T_2 - T_1 = 5a$

$60 = 25a \Rightarrow \underline{a = 2{,}4\,m/s^2}$

$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2{,}4}{0{,}1} = \underline{24\,rad/s^2}$

b) $E_c = \frac{1}{2}I w^2$

$w = w_0 + \alpha t$

$w = 0 + 24\cdot 2 = 48\,rad/s$

$E_c = \frac{1}{2}\frac{1}{2}10\cdot 0{,}1^2\cdot 48^2 = \underline{57{,}6\,J}$ la polea.

$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$

$V = V_0 + at \Rightarrow V = 0 + 2{,}4\cdot 2 = 4{,}8\,m/s.$

$E_{c_{13}} = \frac{1}{2}13\cdot 4{,}8^2 = \underline{149{,}76\,J}.$

$E_{c_7} = \frac{1}{2}7\cdot 4{,}8^2 = \underline{80{,}64\,J}$

⑦ $\frac{\partial L}{\partial t} = M \Rightarrow I\alpha = M$

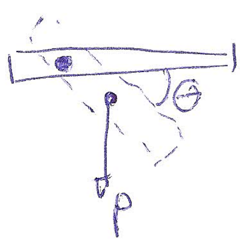
$\left.\begin{array}{l} M_1 = l\cdot F \\ M_2 = l/2\, F \end{array}\right\}$ $M_1 = 2M_2 \Rightarrow I_1\alpha_1 = 2I_2\alpha_2$

$\frac{1}{3}\cancel{Ml^2}\alpha_1 = 2\frac{1}{12}\cancel{Ml^2}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2$

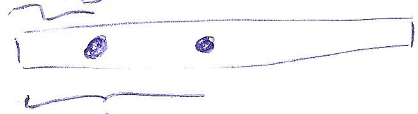
$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \alpha_1 t_1^2 = \alpha_2 t_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\alpha}/2\, t_1^2 = \cancel{\alpha}/2\, t_2^2$

$\frac{3^2}{2} = t_2^2 \Rightarrow \underline{t_2 = 2{,}12\,s}$

(8)



$$\frac{\partial L}{\partial t} = M \Rightarrow I\alpha = M$$



$$M = \frac{L}{6}\cdot mg$$

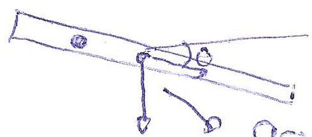
$$\frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{3L-2L}{6} = \frac{L}{6}$$

$$\frac{\cancel{m}L^2}{9}\cdot\alpha = \frac{L}{6}\cancel{m}g$$ en el momento inicial

$$\alpha = \frac{9g}{6L} = \frac{3g}{2L}$$ en el instante inicial.

Pero no siempre el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{P}$ es Θ.

En un momento cualquiera:



$$M = \frac{L}{6}\cdot mg\cdot \sin(90-\Theta) =$$
$$= \frac{L}{6}\, mg\cos\Theta$$

$90-\Theta \Rightarrow \sin(90-\Theta) = \cos\Theta$

$$\frac{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{9}\alpha = \frac{\cancel{L}}{6}\cancel{m}g\cos\Theta \Rightarrow \alpha = \frac{9g\cos\Theta}{6L} = \underline{\underline{\frac{3g\cos\Theta}{2L}}}$$

(9) El trabajo será el mismo que el que cuesta eliminar toda su energía cinética y la de traslación.

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cancel{R^2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{4}mv^2$$

$$E_{Tras} = \frac{1}{2}Mv^2$$

luego $W_{total} = \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}mv^2}}$

(10) Para el cubo toda la energía potencial se convierte en cinética: $\cancel{m}gH = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$

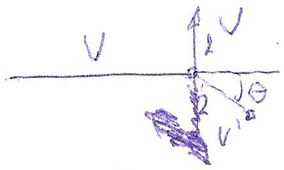
Para la esfera, la energía potencial se convierte en rotación más traslación

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\cancel{R^2}\frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$\cancel{m}gH = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{1}{5}\cancel{m}v^2 \Rightarrow gH = v^2\cdot\frac{7}{10} \Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}}}$$

Cae más rápido el cubo.

(11)



$\vec{P_i} = \vec{P_f}$

$\bar{P}_{ox} = \bar{P}_{xi} = mv \qquad \bar{P}_{iy} = 0$

$$P_f = \begin{cases} P_y = \frac{m}{2} v - \frac{m}{2} v' \sin\theta \\ P_x = \frac{m}{2} v' \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} v - \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} v' \sin\theta = 0 \\ \frac{m}{2} v' \cos\theta = \cancel{m} v \end{cases}$$

$v - v' \sin\theta = 0 \Rightarrow v' = \frac{v}{\sin\theta}$

$\frac{v'}{2} \cos\theta = \cancel{v} \Rightarrow v' = \frac{2v}{\cos\theta}$

$\frac{\cancel{v}}{\sin\theta} = \frac{2\cancel{v}}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}$

$tg\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26{,}57^\circ$ por debajo de la ~~vertical~~ horizontal, es decir, $-26{,}57^\circ$

(12) a) 10 m/s → 6 Kg   8 m/s → 4 Kg

$\vec{P_i} = 6 \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 92$ Kg m/s

$\bar{P}_f = 6 V_1 + 4 V_2$

tanto V_1 como V_2 son positivas

Como es elástico se conserva la energía cinética total

$\frac{1}{2} 6 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} 4 \cdot 8^2 = 428$ J

$92 = 6V_1 + 4V_2 \Rightarrow$ ~~$V_1 = 18,33 = 0,6666$~~

$428 = \frac{1}{2} \cdot 6 V_1^2 + \frac{1}{2} 4 \cdot V_2^2$ $V_2 = 23 - 1{,}5 V_1$

$428 = 3 \cdot V_1^2 + 2 \cdot (23 - 1{,}5V_1)^2 = 3V_1^2 + 2(529 - 2 \cdot 23 \cdot 1{,}5 V_1 + 2{,}25 V_1^2)$

$428 = 3V_1^2 + 1058 - 138 V_1 + 4{,}5 V_1^2$

$= 630 - 138 V_1 + 7{,}5 V_1^2 \Rightarrow V_1 = \frac{138 \pm 12}{15} = \begin{cases} 10 \\ 8{,}4 \end{cases}$

Si $V_1 = 10 \Rightarrow V_2 = 8$ m/s

Si $V_1 = 8{,}4 \Rightarrow V_2 = 10{,}4$ m/s

Una de las configuraciones es la inicial. No obstante vemos que el primero se frena mientras que el 2º se acelera, por tanto es la 2ª configuración

b) 10 m/s → 6 Kg   ← 8 m/s 4 Kg

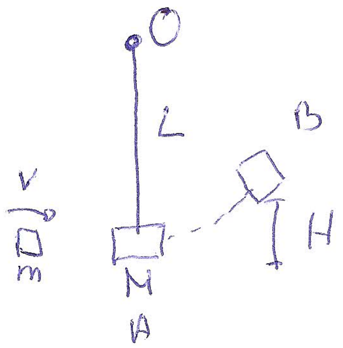
$P_i = 6 \cdot 10 - 4 \cdot 8 = 28$ Kg m/s

la energía se sigue conservando.

$P_f = 6V_1 + 4V_2 = 28 \Rightarrow V_2 = -1{,}5V_1 + 7$ $E_{CTotal} = 428$ J

Repetimos exactamente el mismo procedimiento anterior pero aplicando estos cambios y obtenemos que $V_1 = -4{,}4$ m/s y $V_2 = 13{,}6$ m/s

(13)



$V_i \Rightarrow \begin{matrix} m \to v \\ M \to 0 \end{matrix}$

a) $\bar{p}_i = \bar{p}_f$

$$\left.\begin{matrix} p_i = m\cdot\bar{v} = mv \\ p_f = (m+M)v' \end{matrix}\right\} (m+M)v' = mv$$

Por conservación de la energía podemos calcular v':

$$\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}v'^2 = \cancel{(m+M)}gH \qquad \text{pues } E_{c_A} + \cancel{E_{pA}} = \cancel{E_{cB}} + E_{pB}$$

$$v' = \sqrt{2gH}$$

Luego $(m+M)\sqrt{2gH} = mV \Rightarrow V = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gH}$

~~b) $\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \ldots \frac{1}{2}(m+M)v^2 =$~~

~~$= \frac{1}{2}(m+M)\cdot\left(1+\frac{M}{m}\right)^2 2gH = (m+M)\left(1+\frac{M}{m}\right)^2 gH$~~

b) $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \cancel{\frac{1}{2}}(M+m)\cdot\cancel{2}gH - \cancel{\frac{1}{2}}m\left(1+\frac{M}{m}\right)^2\cancel{2}gH =$

$= gH\left(M+m - m\left(1+\frac{M}{m}\right)^2\right) = gH\left(M+\cancel{m}-\cancel{m}-2M-\frac{M^2}{m}\right) =$

$= gH\left(-M-\frac{M^2}{m}\right) = -gHM\left(1+\frac{M}{m}\right) = \underline{\underline{-gH\frac{M}{m}(m+M)}}$

(14) Al colisionar una vez pierde un 10% de su energía.

$E_p = mgh$. Como m y g son constantes pierde un 10% de altura.

~~$h_{final} = 6{,}10 - 0{,}1\cdot 6{,}10\cdot n$ siendo n el nº de colisiones~~

~~$h_{final} = 6{,}10(1-0{,}1n) = 2{,}44$~~

1er salto $6{,}1 - 6{,}1\cdot 0{,}1 = 5{,}49 \quad = 6{,}1\cdot 0{,}9$

2º salto $5{,}49 - 5{,}49\cdot 0{,}1 = 4{,}941 \quad = 6{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9$

$\vdots$

n saltos $= 6{,}1\cdot 0{,}9^n = 2{,}44$

$0{,}9^n = 0{,}4 \Rightarrow n\log 0{,}9 = \log 0{,}4 \Rightarrow n =$

$n = 8{,}7 \Rightarrow$ <u>8 saltos</u>

(15) Condición de equilibrio $\Rightarrow \sum \vec{M} = 0$

$$-T\cdot 0{,}06 + F\cdot 0{,}1 - \underbrace{0{,}2\cdot 0{,}2g}_{m_{bandeja}\, d_{bandeja}} - \underbrace{1\cdot 0{,}240g}_{m_{plato}\, d_{plato}} - 0{,}380\cdot 0{,}250g = 0$$

$T \downarrow \to r$ $\sin\alpha = -1$ $F \sin\alpha = 1$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{m\cdot g\cdot d}$

$M = r\cdot F \sin\alpha$. $\to r$ $\sin\alpha = -1$

$$-0{,}06T + 0{,}1F - 0{,}2\cdot 0{,}2g - 1\cdot 0{,}24g - 0{,}38\cdot 0{,}25g = 0. \quad (1^a \text{ condición})$$

2^a condición : $\sum F = 0$.

$$F - T - m_{plato}\cdot g - m_{bandeja}\cdot g - m_{taza}\cdot g = 0$$
$$F - T - 1\cdot 10 - 0{,}2\cdot 10 - 0{,}25\cdot 10 = 0$$
$$F - T = 14{,}5 \quad (2^a \text{ condición})$$
$$-0{,}06T + 0{,}1F = 3{,}75 \quad (1^a \text{ condición})$$

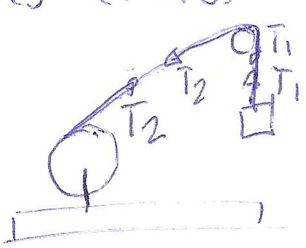
$\left\{ \begin{array}{l} \underline{T = 57{,}5\,N} \\ \underline{F = 72\,N} \end{array} \right.$

(16) Como la fuerza es la misma para todos y todos tienen el mismo radio, el momento es el mismo para todos. Como $I\alpha = M$, girará más rápido el que menor momento de inercia tenga, es decir, la esfera maciza.

(18) $E_{Total} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2}_{\text{la misma para todos}} + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$

Inicialmente están en el suelo, luego $mgh = 0$.
Subirá más alto el que mayor energía cinética ~~tenga~~ de rotación tenga, es decir, el que mayor I tenga, que es el aro.

(19)



Rotación de la polea: $\sum \vec{M} = I\alpha$

$$RT_1 - RT_2 = \frac{I\alpha}{0} \Rightarrow T_1 = T_2$$

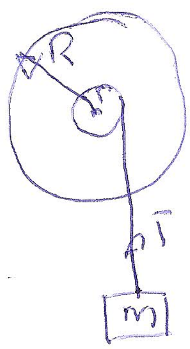
$$mg - T_1 = \frac{m\cdot a}{0} \Rightarrow T_1 = mg = 2000\cdot 9{,}8 = 19600$$

$$M = r\cdot T = R_{torno}\cdot T = 0{,}3\cdot 19600 = \underline{5880\ N\cdot m}$$

b) Se enrolla a razón de $8\,cm/s \cdot \frac{1\,m}{100\,cm} = 0{,}08\,\underline{m/s}$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{0{,}08}{0{,}3} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}\ \underline{rad/s}$$

20



$$mg - T = m \cdot a$$

$$T \cdot r = \underset{MR^2}{I} \cdot \alpha = I \frac{a}{R}$$

$$\begin{cases} 40 \cdot \quad - T = 40 \cdot a \\ T \cdot 0{,}1 = 100 \cdot 1^2 \cdot \frac{a}{0{,}1} \end{cases}$$

$$T = 10^4 a$$

a) Luego $\quad -10^4 a = 40a \Rightarrow a = 0{,}04\, m/s^2$

b) $T = 400\, N$

c) $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$0 = 0{,}18 + 0 + \frac{1}{2}(-0{,}04)t^2 \Rightarrow t = 3\, s$

d) $E_T = \underset{\text{polea}}{E_{\text{rotación}}} + E_{c\,\text{masa}} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$

$\omega = 0 + \alpha t = \frac{a}{R} t = \frac{0{,}04}{0{,}1} \cdot 3 = 1{,}2\ rad/s$

$v = 0 + at = 0{,}04 \cdot 3 = 0{,}12\ m/s$

$E_T = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1^2 \cdot 1{,}2^2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0{,}12^2 = 72{,}3\ J$

Universidad Rey Juan Carlos	Física Grado en Ingeniería de Materiales **Curso 2011 - 2012**	Hoja 5 Dinámica de un sistema de partículas
Ejercicio para entregar 9		H5.1
Alumno/a:		

5.1 El cuerpo 1 de masa m_1 = 8 kg se encuentra delante de un muelle (de constante elástica k = 10.000 N/m) que está comprimido 12 cm; al liberar el muelle el cuerpo 1 sale despedido y desliza por el plano horizontal una distancia de 2,3 m hasta chocar de forma perfectamente elástica con el cuerpo 2 de masa m_2 = 1,6 kg que pende de un poste horizontal mediante una cuerda de 0,5 m. El coeficiente de rozamiento del cuerpo 1 con el plano horizontal vale 0,25. Consideramos g = 9,8 m/s^2.

a) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo 1 cuando choca con el cuerpo 2?

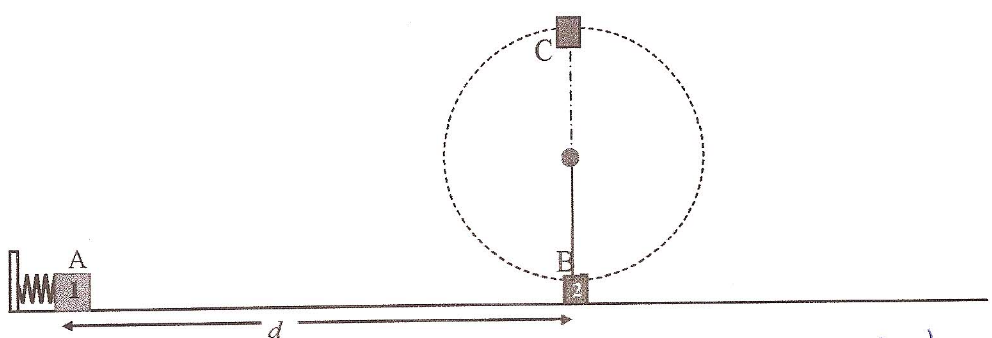
b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre A y B?

c) ¿Cuál es la velocidad de cada cuerpo después del choque?

d) ¿Qué espacio recorre el cuerpo 1 hasta detenerse?

e) ¿Llega el cuerpo 2 al punto C o se detiene antes?

f) Si llega al punto C, ¿cuánto vale la tensión de la cuerda cuando el cuerpo 2 pasa por C?



a) $W_{muelle} = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} 10000 \cdot 0{,}12^2 = 72\ J$ que se convierten en energía cinética y pérdidas por rozamiento

$72 = \frac{1}{2} m v^2 - W_{Fr} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot v^2 + \mu m g d = \frac{1}{2} \cdot 8 v^2 + 0{,}25 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}3 \Rightarrow v = 2{,}6$ m/s

b) $W_{Fr} = -\mu m g d = -0{,}25 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}3 = -45{,}08\ J$

c) $\vec{P_0} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 8 \cdot 2{,}6 + 0 = 20{,}8$ kg m/s

$\vec{P_f} = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 20{,}8 \Rightarrow 8 v_1' + 1{,}6 v_2' = 20{,}8 \Rightarrow v_2' = 13 - 5 v_1'$

Por otro lado se conserva la energía cinética por ser elástico

$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2{,}6^2 = 27{,}04$ J.

$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 27{,}04 \Rightarrow 4 v_1'^2 + 0{,}8 v_2'^2 = 27{,}04$

$4 v_1'^2 + 0{,}8 (13 - 5 v_1')^2 = 27{,}04 \Rightarrow 4 v_1'^2 + 135{,}2 - 104 v_1' + 20 v_1'^2 = 27{,}04$

$v_1' = \begin{cases} 2{,}6 \\ 1{,}73\ m/s \end{cases} \Rightarrow v_2' = 4{,}33$ m/s Los dos hacia la derecha.

d) Su velocidad inicial es 1,73 m/s.

$$E_{c_i} + \cancel{E_{p_i}} = \cancel{E_{c_f}} + \cancel{E_{p_f}} - W_{Fr}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1,73^2 = \mu m g d \Rightarrow 4\cdot 1,73^2 = 0,25\cdot 8\cdot 9,8\cdot d \Rightarrow \underline{d = 0,6\,m}$$

e) Por conservación de la energía:

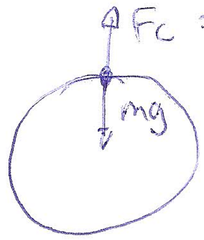
$$E_{c_i} + \cancel{E_{p_i}} = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{1}{2}1,6\cdot 4,33^2 = \frac{1}{2}\cdot 1,6\,v^2 + 1,6\cdot 9,8\cdot 1 \Rightarrow v = -0,6$$

no llega.

$$\frac{1}{2}\cdot 1,6\cdot 4,33^2 = mgh = 1,6\cdot 9,8\,h \Rightarrow h = 0,96\,m \approx 1$$

llega o <u>casi</u> <u>llega</u>

f) $F_c = m\frac{v^2}{R} = 0$



No hay tensión, el cuerpo cae porque sólo actúa el peso

Universidad Rey Juan Carlos	Física Grado en Ingeniería de Materiales **Curso 2011 - 2012**	Hoja 5 Dinámica de un sistema de partículas
Ejercicio para entregar 10		H5.2
Alumno/a:		

5.2 El cuerpo m_1 de masa 30 kg pende de una cuerda que está enrollada en el eje mayor de la polea de radio 20 cm y el cuerpo m_2 de 50 kg pende de otra cuerda que está enrollada en el eje menor de la polea de radio 10 cm. Los cuerpos inicialmente están en reposo y a la misma altura del suelo, 2 m. El momento de inercia de la polea vale 0,3 kg m^2. Considerando g = 10 m/s^2, calcule:

a) La aceleración lineal de cada cuerpo y la aceleración angular de la polea.

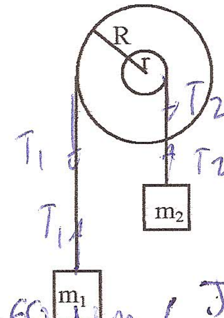
b) La tensión de cada cuerda.

c) La altura de cada cuerpo al cabo de 1 segundo.

d) La velocidad lineal de cada cuerpo al cabo de un segundo.

e) El ángulo girado por la polea en ese tiempo.

f) Comprobar que la energía mecánica permanece constante.



a) $T_1 = m_1 g = 30\cdot 10 = 300$ N $\Rightarrow M_1 = RT_1 = 0{,}2\cdot 300 = 60$ Nm { Justo cuando empiezan a girar

$T_2 = m_2 g = 50\cdot 10 = 500$ N $\Rightarrow M_2 = 0{,}1\cdot 500 = 50$ Nm

como $M_1 > M_2$, giran hacia m_1

como los radios son distintos, las aceleraciones también,

$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$ { $30\cdot 10 - T_1 = 30\cdot \alpha \cdot R \Rightarrow T_1 = 300 - 6\alpha$

$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$ } $T_2 - 500 = 50\cdot \alpha r \Rightarrow T_2 = 5\alpha + 500$

Por otro lado $\Sigma M = I\alpha \Rightarrow T_1 R - T_2 r = I\alpha$

$T_1\cdot 0{,}2 - T_2\cdot 0{,}1 = 0{,}3\alpha \Rightarrow (300-6\alpha)0{,}2 - (5\alpha+500)0{,}1 = 0{,}3\alpha$

$60 - 1{,}2\alpha - 0{,}5\alpha - 50 = 0{,}3\alpha$

$10 = 2\alpha$ $\underline{\alpha = 5\,\text{rad/s}^2}$

$a_1 = \alpha\cdot R_1 = 5\cdot 0{,}2 = 1$ m/s^2

$a_2 = \alpha\cdot r = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5$ m/s^2

b) $T_1 = 300 - 6\cdot 5 = \underline{270\,N}$; $T_2 = 5\cdot 5 + 500 = \underline{525\,N}$

c) $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y_1 = 2 + 0 + \frac{1}{2}(-1)1^2 = \underline{1{,}5\,m}$

$y_2 = 2 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1^2 = \underline{2{,}25\,m}$

d) $v_1 = 0 + a_1 t = 0 + 1\cdot 1 = 1$ m/s $\omega = \alpha t = 5\cdot 1 = 5$ rad/s

$v_2 = 0 + a_2 t = 0{,}5\cdot 1 = 0{,}5$ m/s

e) $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \varphi = 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 1^2 = \underline{2{,}5\,rad}$

f) Energía total $= E_{p_1} + E_{p_2}$ porque todo está en reposo. $\Rightarrow E_{p_1} + E_{p_2} = gh(m_1+m_2) = 1600$ J

$E_f = E_{c1} + E_{p1} + E_{c2} + E_{p2} + E_{rot} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 0{,}5^2 + 30\cdot 10\cdot 1{,}5 + 50\cdot 10\cdot 2{,}25 + \frac{1}{2}0{,}3\cdot 5^2 = 1600$ Permanece constante.