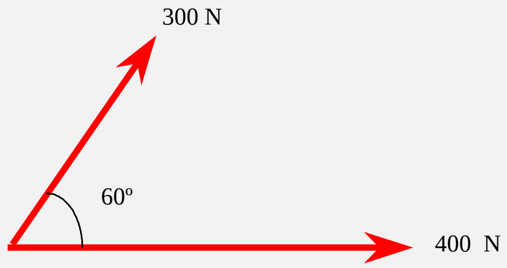
Problemas Resueltos

de

Estática

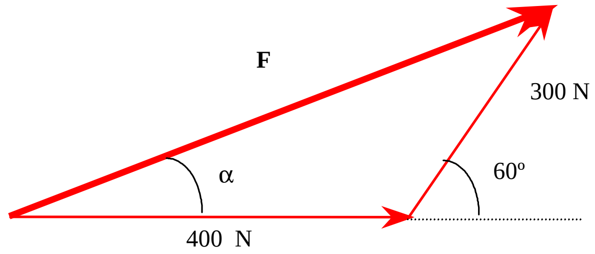
Fuerzas y momentos

Problema 1 Determinar la resultante de las dos fuerzas indicadas en la figura, dando el módulo y el ángulo que forma la horizontal.



SOLUCIÓN

La resultante es la suma de las dos fuerzas.

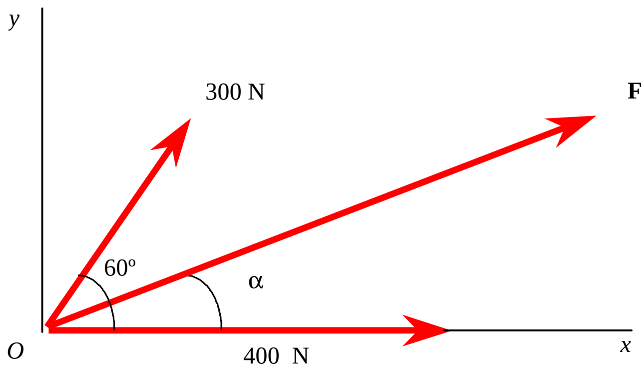


De la ley del coseno se tiene $F = \sqrt{300^2 + 400^2 + 2\times 300\times 400\times \cos 60} \Rightarrow F = 608{,}2\ \text{N}$

De la ley del seno se tiene

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{300} = \frac{\cos 30^{\circ}}{608} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \alpha = 0{,}4273 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25{,}3^{\circ}$$

Solución en componentes.

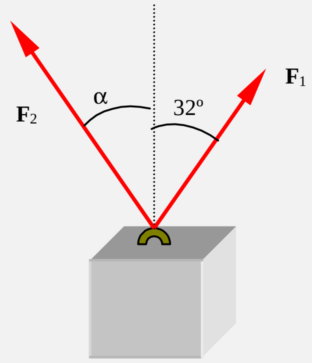


La resultante es la suma de las componentes de cada una de las fuerzas .

$$\mathbf{F} = 400\,\mathbf{i} + 300(\cos 60^{\circ}\,\mathbf{i} + \text{sen} 60^{\circ}\,\mathbf{j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 550\,\mathbf{i} + 150\sqrt{3}\,\mathbf{j}$$

$$\tan\ \alpha = \frac{150\sqrt{3}}{550} = 0{,}4723 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25{,}3^{\circ}$$

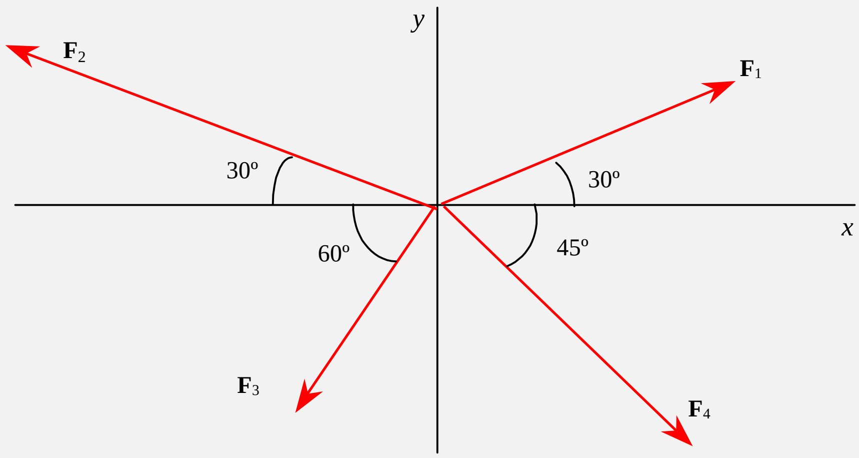
Problema 2 Determinar el valor del módulo y la dirección de la fuerza F_2 que hay que aplicar al bloque de la figura adjunta para que la resultante de ambas fuerzas sea una fuerza vertical de 900 N si el módulo de la fuerza F_1 es de 500 N.



SOLUCIÓN

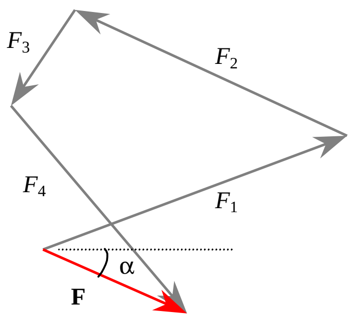
F_2 = 544,8 N ; α = 29,1º

Problema 3 Determinar la resultante del sistema de fuerzas concurrentes que se indica en la figura adjunta sabiendo que $F_1 = 150$ N , $F_2 = 200$ N , $F_3 = 80$ N y $F_4 = 180$ N.



SOLUCIÓN

Gráfica. Se dibuja a escala la suma de las fuerzas. Midiendo el módulo de la resultante se obtiene F = 49 N ; midiendo el ángulo que forma con la horizontal es obtiene 26º



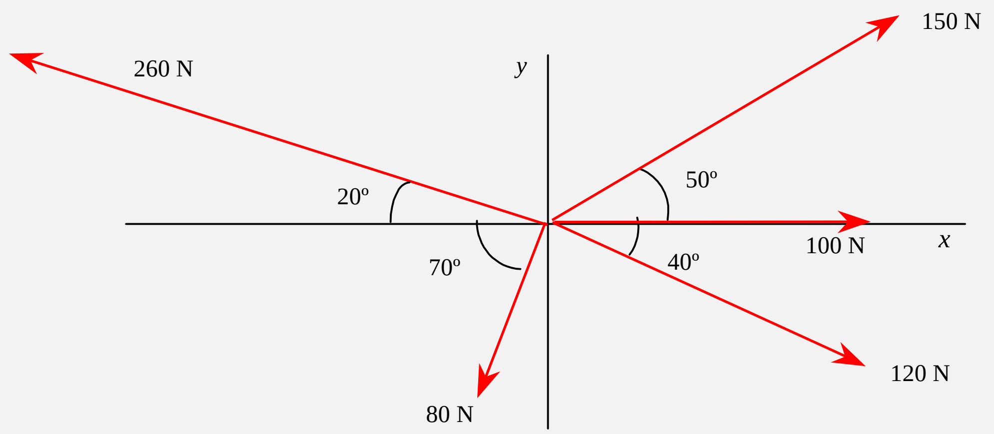
Analítica. Se determinan las componentes según *x* y según *y* de cada una de las fuerzas. A partir de estos valores se obtiene la resultante y el ángulo que forma con el eje *x*. Las componentes de las fuerzas son:

$$\mathbf{F}_1 = 129.9\,\mathbf{i} + 75.0\,\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{F}_2 = -173.2\,\mathbf{i} + 100.0\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_3 = -40.0\,\mathbf{i} - 69.2\,\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{F}_4 = 127.3\,\mathbf{i} - 127.3\,\mathbf{j}$$

La resultante es: $\mathbf{F} = \Sigma\,\mathbf{F}_i = 44.0\,\mathbf{i} - 21.5\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad F = 49.0\text{ N} \;;\; \alpha = -26^{\circ}$

Problema 4 Determinar la resultante de las fuerzas representadas en la figura adjunta. Dar su módulo y el ángulo que forma con el eje *x*.



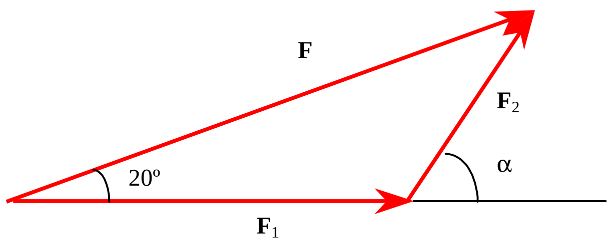
SOLUCIÓN

$$\mathbf{F} = 513\mathbf{i} + 51.5\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad F = 515{,}5\text{ N} \quad ; \quad \alpha = 5{,}7^{\circ}$$

Problema 5 Descomponer una fuerza **F** de módulo 2800 N en dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tales que $\mathbf{F}_1$ forme con **F** un ángulo de 20º y que su diferencia de módulos $F_1 - F_2$ sea igual a 1000 N. Determinar sus módulos y el ángulo que forman.

SOLUCIÓN

Representación gráfica de las fuerzas



De la ley del seno aplicada al triángulo definido por las tres fuerzas se tiene

$$\frac{\text{sen } 20^\circ}{F_2} = \frac{\text{sen } \alpha}{F}$$

Proyectando las fuerzas sobre la horizontal queda

$$F \cos 20^\circ = F_1 + F_2 \cos\alpha$$

La diferencia de módulos de las dos fuerzas

$$F_1 - F_2 = 1000$$

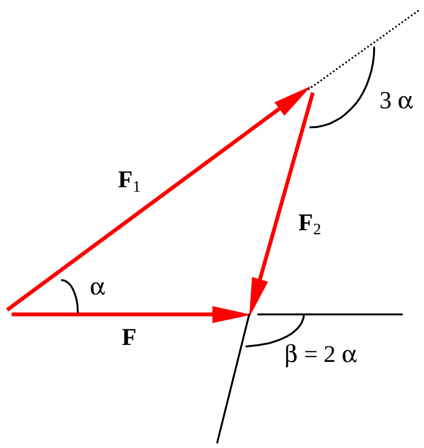
Operando con las tres ecuaciones se obtiene

$$F_1 = 2069{,}7 \text{ N} \quad ; \quad F_2 = 1069{,}7 \text{ N} \quad ; \quad \alpha = 60{,}8^\circ$$

Problema 6 Descomponer una fuerza **F** en dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tales que $\mathbf{F}_1$ forme con **F** un ángulo que sea la mitad del ángulo que forma $\mathbf{F}_2$ con **F** y los módulos de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$ cumplan la relación $4\,F_2 = 3\,F_1$. Calcular el módulo de las componentes y los ángulos que forman con **F**.

SOLUCIÓN

Representación gráfica de las fuerzas

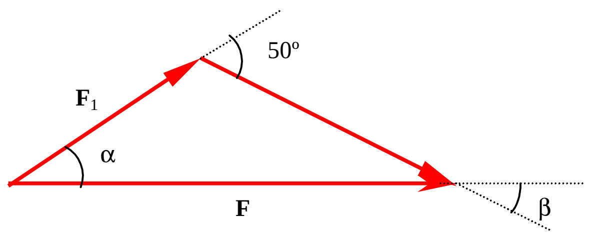


$\alpha = 48{,}2^\circ$; $\beta = 96{,}4^\circ$; $F_1 = 1{,}7\ F$; $F_2 = 1{,}3\ F$

Problema 7 Descomponer una fuerza **F** de 20 kN en dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tales que formen entre sí un ángulo de 50 º y sus módulos estén en la relación 2 : 5. Calcular la magnitud de las componentes y los ángulos α_1 y α_2 que forman con **F** .

SOLUCIÓN

Representación gráfica de las fuerzas

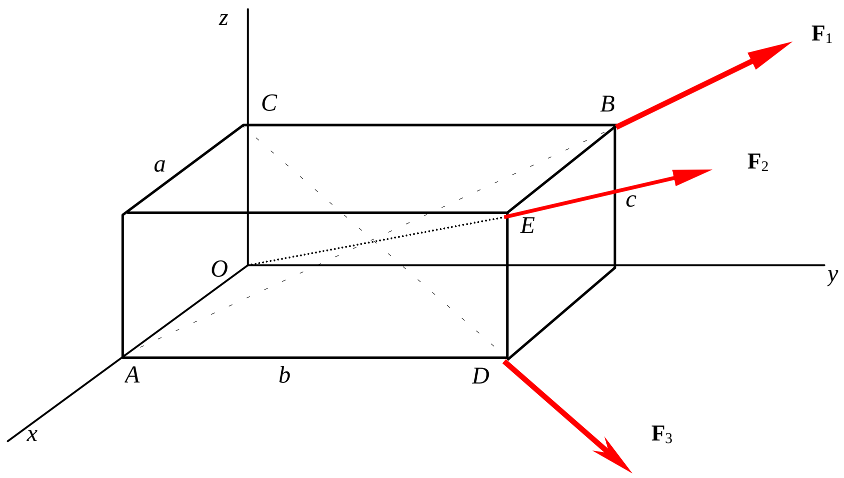


$F_1 = 6{,}18$ kN ; $F_2 = 15{,}45$ kN ; $\alpha = 36{,}2º$; $\beta = 13{,}8º$

Problema 8 En las diagonales de un paralelepípedo rectangular de aristas *a,b,c,* actúan tres fuerzas del mismo módulo F_0. Calcular la resultante **F**.

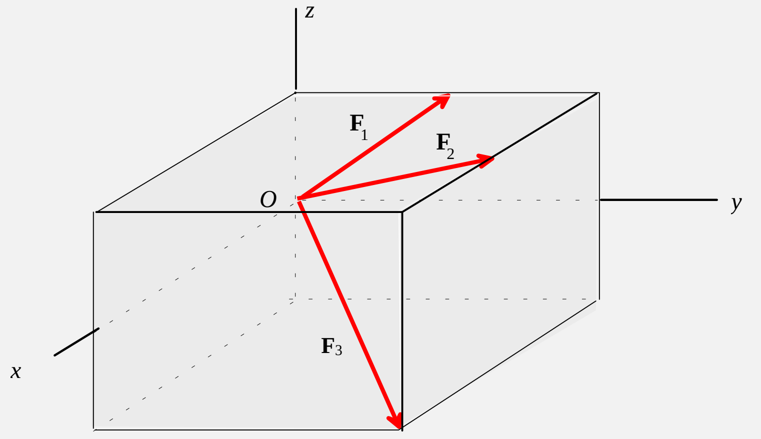
SOLUCIÓN

Representación gráfica de las fuerzas



$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \left(a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} \right)$$

Problema 9 El cubo representado en la figura adjunta tiene de arista 2 m El origen *O* y los extremos de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ están en el punto medio de los lados. Los módulos de las fuerzas son $F_1 = 1{,}41$ kN ; $F_2 = 2{,}45$ kN ; $F_3 = 3{,}0$ kN. Determinar la resultante **F** .

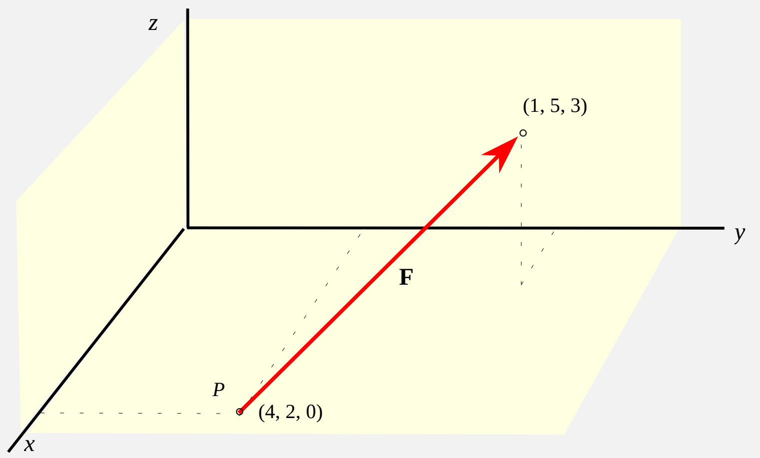


SOLUCIÓN

Expresando las fuerzas en componentes y sumando se obtiene la resultante

$$\mathbf{F} = 3\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Problema 10 Una fuerza de 17,32 k está dirigida a lo largo de la recta que va del punto de coordenadas (4,2,0) hasta el punto de coordenadas (1,5,3) tal como se muestra en la figura adjunta . Los valores de las coordenadas están dados en metros. Determinar el momento de **F** respecto del origen *O* y los momentos de **F** respecto de los ejes *x*, *y*, *z*.



SOLUCIÓN

El vector unitario en la dirección y sentido de la fuerza es $\mathbf{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$

La fuerza en componentes es $\mathbf{F} = 10\,(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

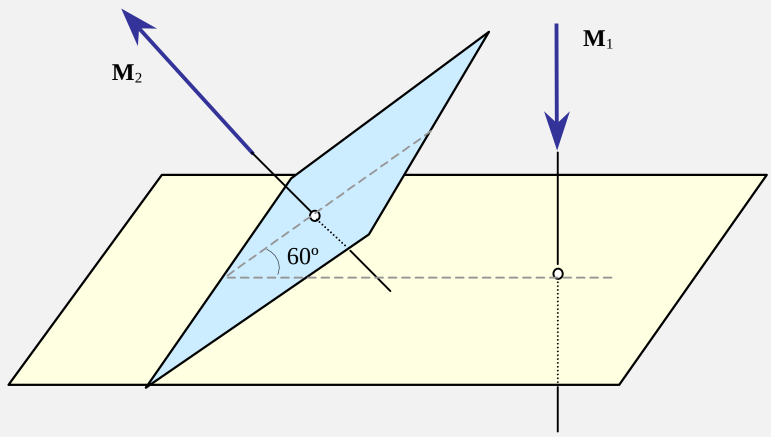
El momento de la fuerza respecto del origen está dado por $\mathbf{M}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$, donde el punto P es un punto cualquiera de la recta soporte de **F**. Tomando el punto P (4 ,2 ,0), el momento de la fuerza respecto del origen es

$$\mathbf{M_0} = 10\,(\,2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}\,)$$

El producto escalar del vector $\mathbf{M_0}$ por los vectores de la base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ proporciona los momentos de la fuerza respecto de los ejes x , y , z . Sus valores son :

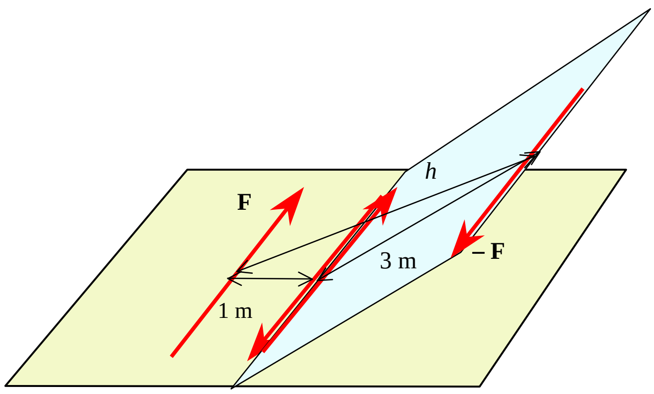
$$m_x = 20 \qquad m_y = -40 \qquad m_z = 60$$

Problema 11 En la figura adjunta se representa un par de momento $M_1 = 40$ k-m que actúa sobre un plano horizontal y otro par de momento $M_2 = 120$ k-m que actúa sobre un plano que forma 60º con el horizontal. Determinar gráficamente el momento resultante **M** de ambos pares



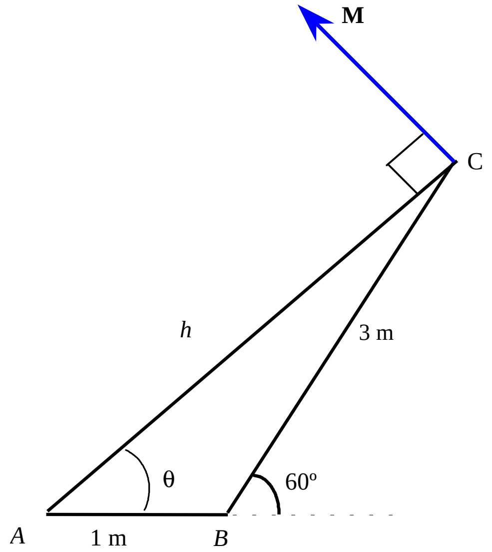
SOLUCIÓN

El momento M_1 es el de un par de fuerzas de 40 Kg situadas en el plano horizontal o en un plano paralelo al horizontal y separadas una distancia de un metro ; el momento M_2 es el de un para de fuerzas de 40 Kg situadas en el plano inclinado o en un plano paralelo al plano inclinado y separadas una distancia de 3m, tal como se muestra en la figura a). Para facilitar la suma de los momentos de los dos pares, los vectores que los forman se han tomado con sus direcciones paralelas a la recta de intersección de los planos.



(a)

El par resultante está formado por las fuerzas **F** y **– F** separadas una distancia h. Su momento es un vector **M** perpendicular al plano definido por **F** y **– F**, plano que forma con la horizontal un ángulo θ, figura b).



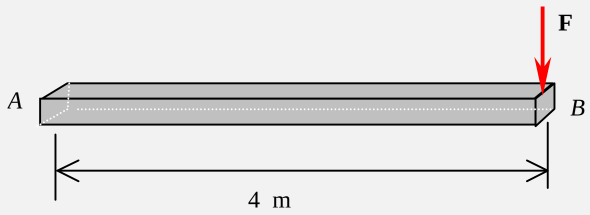
(b)

Para calcular la distancia *h*, brazo del par resultante, aplicando la ley del coseno al triángulo *ABC* se tiene $h = \sqrt{7} = 2{,}645$ m luego el momento del par resultante es

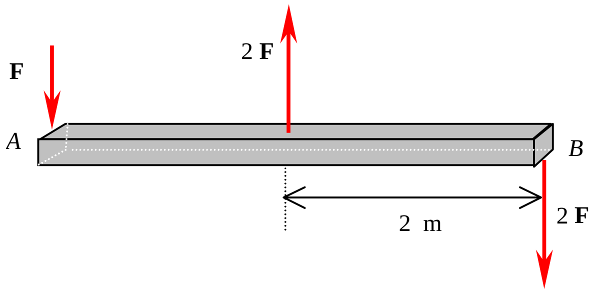
$$M = 105{,}8 \ \text{ k - m}$$

Para calcular el ángulo θ, aplicando la ley del seno al triángulo *ABC* se tiene que $\theta = 79{,}2^{\circ}$

Problema 12 Una barra horizontal de 4 m de largo está sometida a una fuerza vertical hacia abajo de 12 kg aplicada en su extremo *B*. Demostrar que es equivalente a una fuerza de 12 kg hacia abajo aplicada en su extremo *A* y a un par de sentido horario de 48 kg-m.

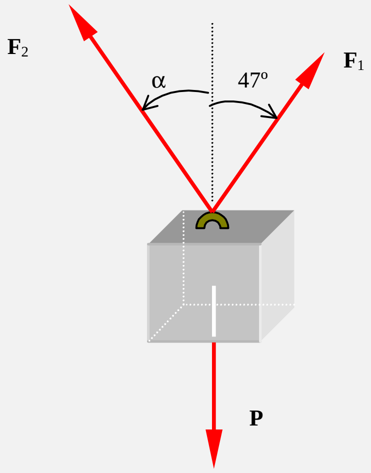


SOLUCIÓN



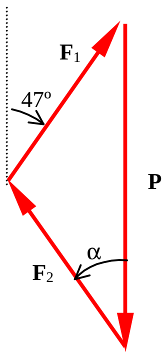
Equilibrio del punto

Problema 13 Determinar el valor del módulo y la dirección de la fuerza $\mathbf{F}_2$ de la figura adjunta para que el bloque de 780 N de peso se encuentre en equilibrio si el módulo de la fuerza $\mathbf{F}_1$ es de 460 N .



SOLUCIÓN

Condición de equilibrio

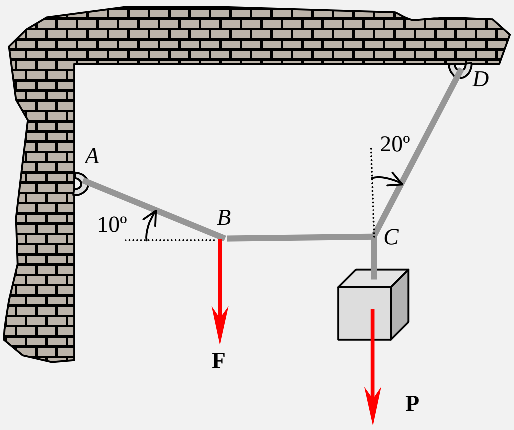


$$\frac{460}{\text{sen } \alpha} = \frac{F_2}{\text{sen } 47^\circ} = \frac{780}{\text{sen}(47^\circ + \alpha)}$$

$$\Downarrow$$

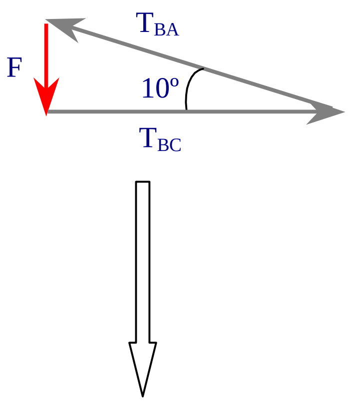
$$\alpha = 35{,}8^\circ \quad ; \quad F_2 = 575 \text{ N}$$

Problema 14 En el esquema de la figura, el bloque de peso **P** se mantiene en equilibrio cuando se aplica una fuerza *F* = 500 N en el punto *B* del sistema de cables. Determinar las tensiones en los cables y el peso *P*.

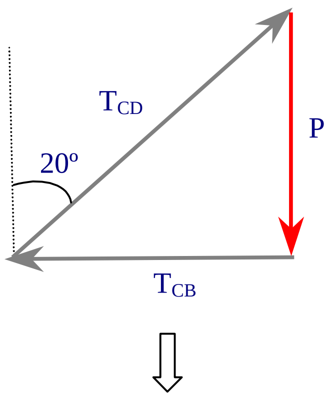


SOLUCIÓN

Equilibrio en el punto B



Equilibrio en el punto C

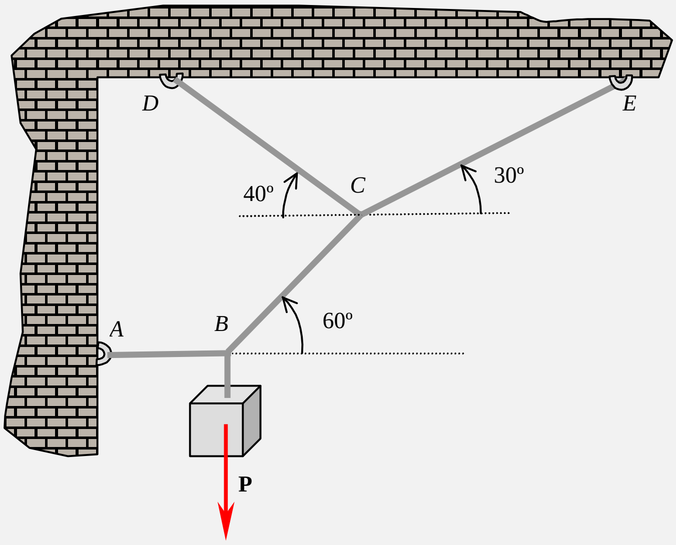


$$\frac{500}{\text{sen } 10} = \frac{T_{BC}}{\text{sen } 80^\circ} = T_{BA} \quad ; \quad T_{BC} = T_{CB} \quad ; \quad \frac{P}{\text{sen } 70} = \frac{T_{CB}}{\text{sen } 20^\circ} = T_{CD}$$

Operando queda

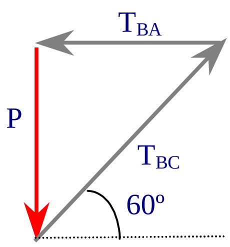
T_{BA} = 2879 N ; T_{BC} = T_{CB} = 2835 N ; P = 7789 N ; T_{CD} = 8289 N

Problema 15 Un cuerpo de masa *m* = 250 kg está unido al sistema de cables indicado en la figura y se mantiene en equilibrio en la posición indicada. Determinar las tensiones en los cables.

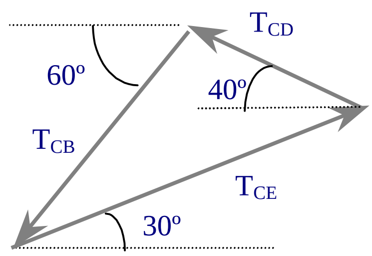


SOLUCIÓN

Equilibrio en el punto B



Equilibrio en el punto C

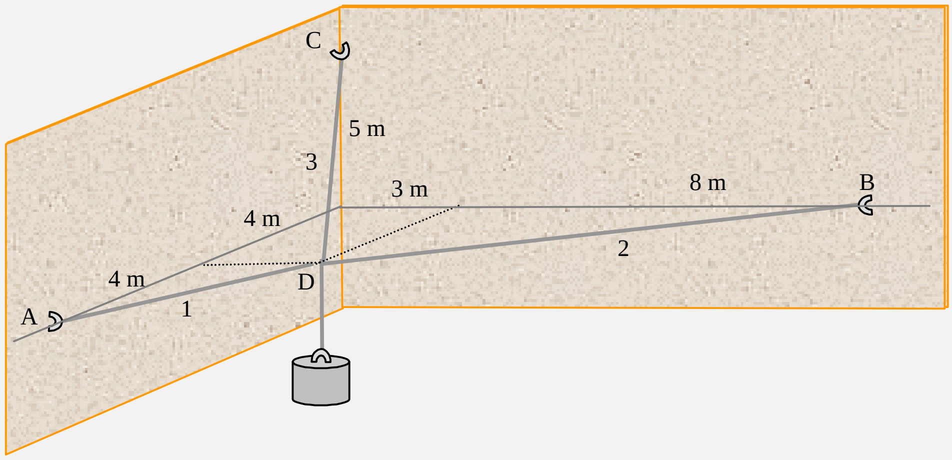


$$\frac{2450}{\text{sen } 60} = \frac{T_{BA}}{\text{sen } 30^\circ} = T_{BC} \quad ; \quad T_{BC} = T_{CB} \quad ; \quad \frac{T_{CD}}{\text{sen } 30} = \frac{T_{CB}}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{T_{CE}}{\text{sen } 80}$$

Operando queda

$T_{BA} = 1414$ N ; $T_{BC} = T_{CB} = 2829$ N ; $T_{CD} = 1505$ N ; $T_{CE} = 2965$ N

Problema 16 En el esquema de la figura adjunta, un bloque de 60 N de peso está unido a tres cables dos de ellos contenidos en un plano horizontal. Determinar las tensiones en los cables.



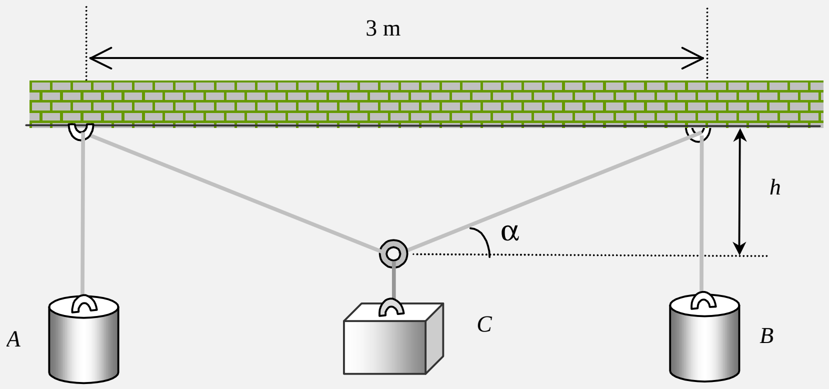
SOLUCIÓN

Tensión en el cable 1 $\Rightarrow$ $F_1 = 132$ N

Tensión en el cable 2 $\Rightarrow$ $F_2 = 128{,}8$ N

Tensión en el cable 3 $\Rightarrow$ $F_3 = 84{,}8$ N

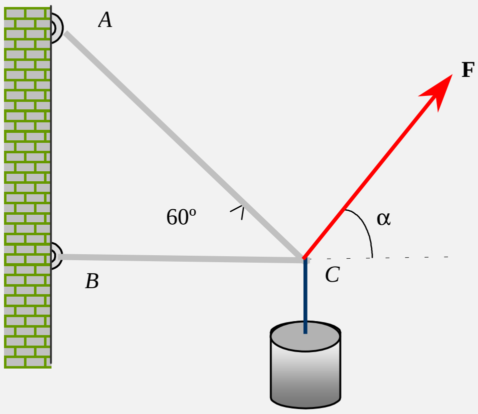
Problema 17 En el esquema de la figura adjunta los tres cuerpos unidos por cables están en equilibrio. Los bloques *A* y *B* pesan 60 N cada uno y el bloque *C* pesa 80 N . Determinar el valor de *h*



SOLUCIÓN

$h = 1{,}5 \operatorname{tg} \alpha$; $120 \operatorname{sen} \alpha = 80$ $\Rightarrow$ $h = 1{,}34$ m

Problema 18 En el esquema de la figura adjunta, un bloque de 600 N de peso pende de dos cables. Determinar: a) el intervalo de valores de la fuerza **F** para que ambos cables estén tensos ; b) el valor de las tensiones en los cables para F = 500 N. Dato : tg α = 4 / 3



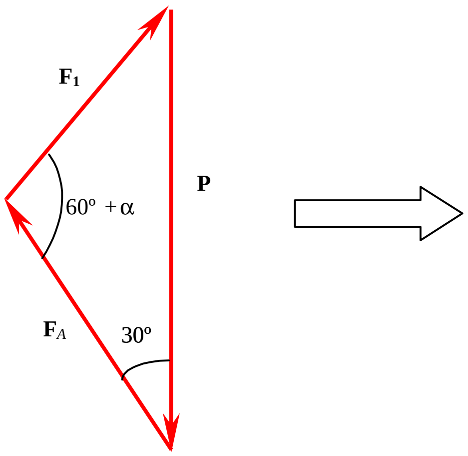
SOLUCIÓN

a) Cuando la tensión en el cable horizontal sea nula, en el punto C concurren tres fuerzas y para que esté en equilibrio su suma ha de ser cero.

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_1 = 0$$

siendo $\mathbf{F}_A$ la fuerza que ejerce el cable unido al punto A en el punto C y $\mathbf{F}_1$ el valor de **F**.

Condición gráfica de equilibrio



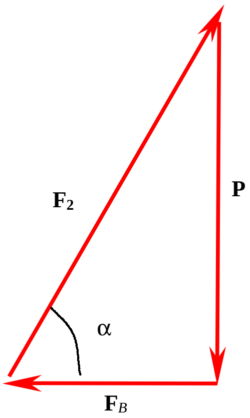
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F_1}{sen\ 30} = \dfrac{P}{sen\ (60+\alpha)} \\ \\ F_1 = 326{,}2 \quad \mathrm{N} \end{array} \right.$$

Cuando la tensión en el cable AC sea nula en el punto C concurren tres fuerzas y para que esté en equilibrio su suma ha de ser cero.

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_2 = 0$$

siendo $\mathbf{F}_B$ la fuerza que ejerce el cable unido al punto B en el punto C y $\mathbf{F}_2$ el valor de **F**.

Condición gráfica de equilibrio



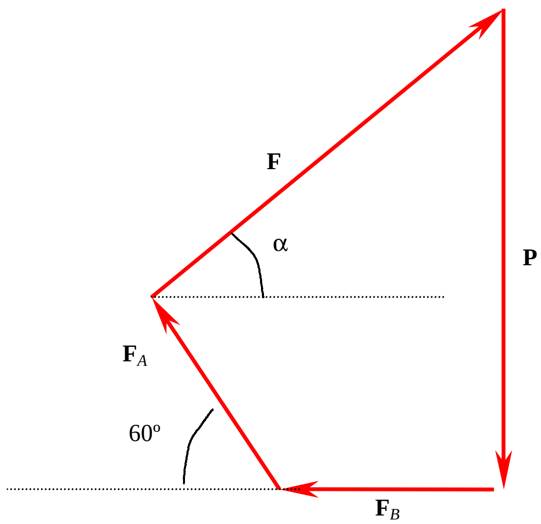
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{F}{\text{sen } 90^{\circ}} = \dfrac{P}{\text{sen } \alpha} \\ \\ F_2 = 750 \text{ N} \end{array} \right.$$

Para que los dos cables estén tensos, la magnitud de la fuerza aplicada F ha de satisfacer la condición

$$326{,}2 \text{ N} \leq F \leq 750 \text{ N}$$

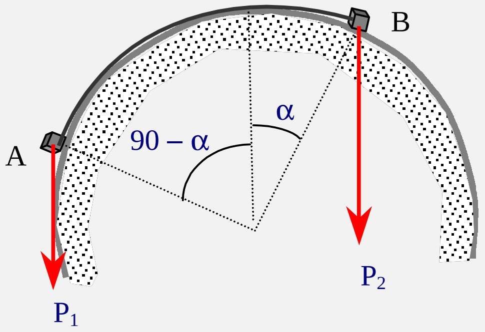
b) Para el valor $F = 500$ N, las tensiones en los dos cables son distintas de cero. En el punto C concurren cuatro fuerzas, luego para que este en equilibrio su resultante a de ser cero.

Condición gráfica de equilibrio



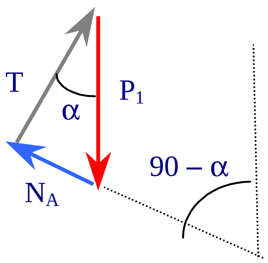
$$F_B = 184.5 \text{ N} \qquad ; \qquad F_A = 230.9 \text{ N}$$

Problema 19 Dos cuerpos puntuales de pesos P_1 = 1960 N y P_2 = 2940 N están unidos mediante un cable y se apoyan sobre una superficie cilíndrica lisa tal como se ve en la figura adjunta. Determinar la tensión del cable, las normales en los apoyos y el ángulo de equilibrio.

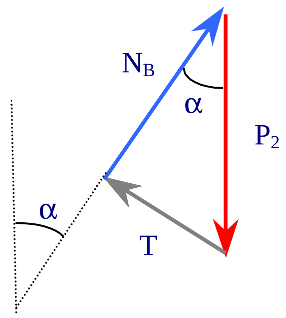


SOLUCIÓN

Equilibrio en el punto A



Equilibrio en el punto B



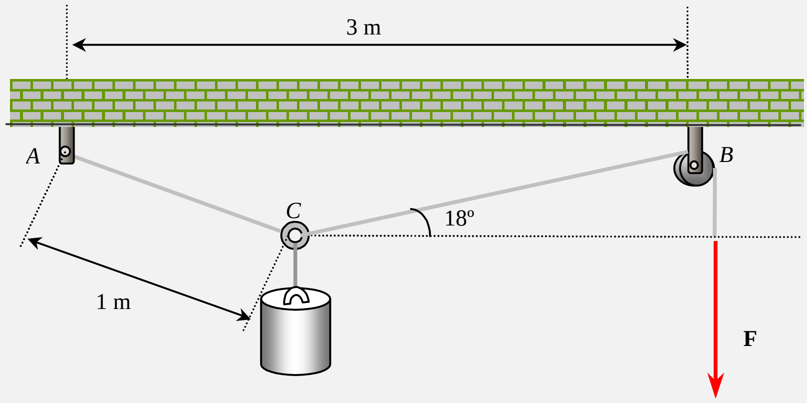
Aplicando la ley del seno se tiene

$$\frac{T}{\cos\alpha} = \frac{N_A}{\operatorname{sen}\alpha} = P_1 \qquad ; \qquad \frac{T}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{N_B}{\cos\alpha} = P_2$$

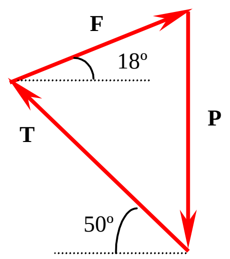
Operando queda

α = 33,69º ; T = 1630.8 N ; N_A = 1087,2 N ; N_B = 2446,2 N

Problema 20 En la figura adjunta el bloque de 500 N de peso se mantiene en equilibrio en la posición indicada bajo la acción de la fuerza **F** aplicada en el extremo libre de la cuerda que pasa por la polea *B*. Determinar el valor de la fuerza.



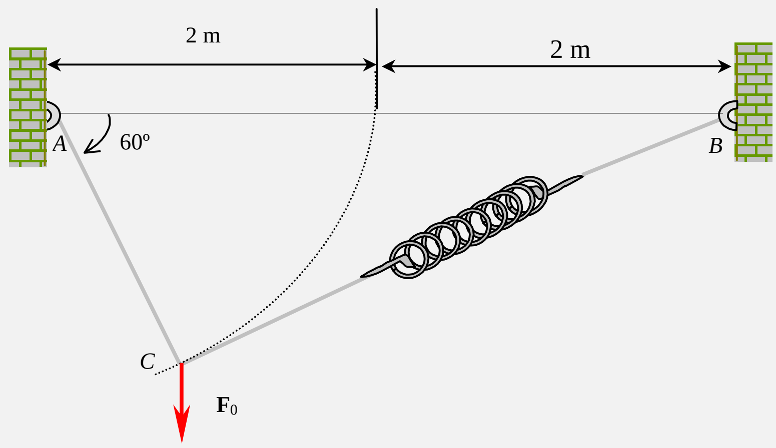
SOLUCIÓN



$$\frac{500}{sen\ 68^{o}} = \frac{F}{sen\ 40^{o}} = \frac{T}{sen 82^{o}}$$

F = 346,6 N

Problema 21 En el esquema de la figura adjunta, el cable *AC* está unido por su extremo *C* a un muelle cuya constante de rigidez es k = 50 N/m . Si se aplica en el extremo *C* del cable una fuerza vertical descendente F_0 = 80 N el sistema está en equilibrio cuando el ángulo θ = 60º . Determinar la longitud natural l_o del muelle

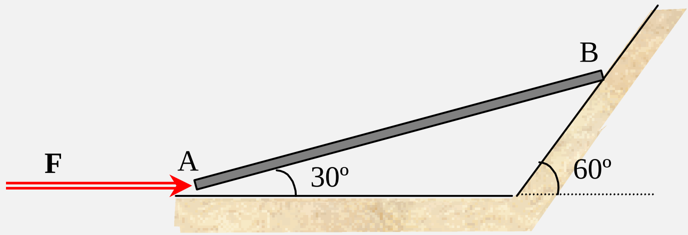


SOLUCIÓN

l_0 = 2,66 m

Equilibrio del sólido sin rozamiento

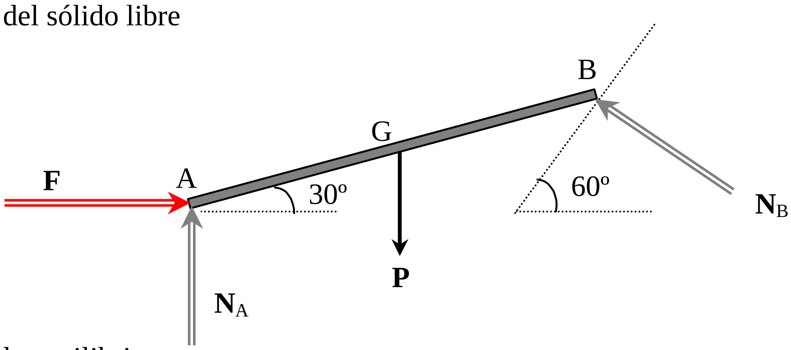
Problema 22 Una barra homogénea de 200 N de peso y longitud *l* se apoya sobre dos superficies lisas tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar : a) el valor de la fuerza **F** para mantener la barra en equilibrio en la posición indicada ; b) las reacciones en los apoyos.



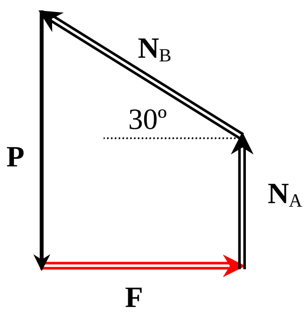
SOLUCIÓN

⇨ Sobre la barra actúan cuatro fuerzas : El peso **P**, las normales en los apoyos $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ y la fuerza aplicada en el extremo A.

⇨ Diagrama del sólido libre



⇨ Condición de equilibrio



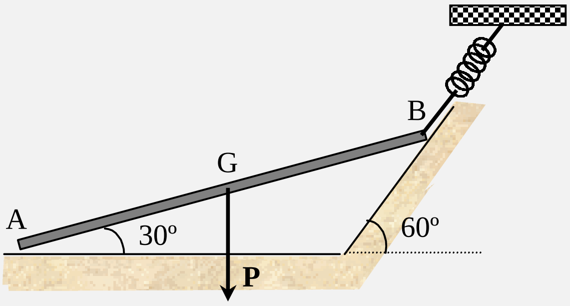
$$\begin{cases} N_A + N_B \operatorname{sen} 30^\circ = P \\ N_B \cos 30^\circ = F \end{cases}$$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

⇨ Tomando momentos respecto de A ⇨ $N_B\, l \;-\; P\, \tfrac{1}{2}\, l \cos 30^\circ = 0$

⇨ Operando queda $N_B = 86{,}6$ N ; $N_A = 156{,}7$ N ; $F = 75$ N

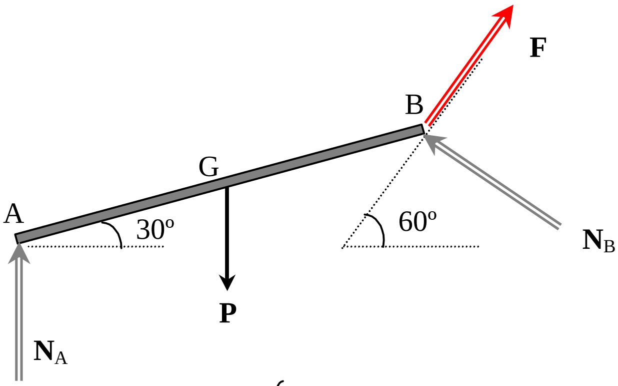
Problema 23 Una barra homogénea de 300 N de peso y longitud l se apoya sobre dos superficies lisas tal como se muestra en la figura adjunta. Se mantiene en equilibrio bajo la acción que le ejerce un muelle unido a su extremo B de constante k = 500 N/m. Determinar el alargamiento del muelle.



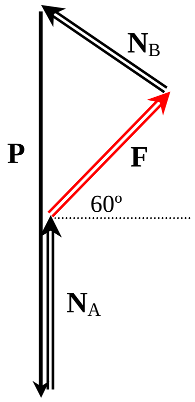
SOLUCIÓN

Sobre la barra actúan cuatro fuerzas : El peso **P**, las normales en los apoyos $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ y la fuerza aplicada en el extremo A.

Diagrama del sólido libre



Condición de equilibrio



$N_A + F \text{ sen } 60^\circ + N_B \text{ sen } 30^\circ + = P$

$F \cos 60^\circ = N_B \cos 30^\circ$

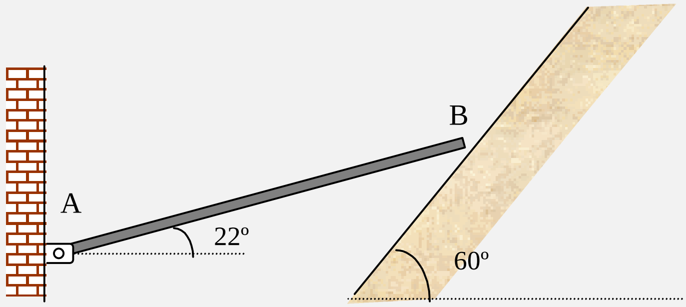
Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

Tomando momentos respecto de B

$- N_A \; l \cos 30^\circ + P \; ½ \; l \cos 30^\circ = 0$

Operando queda $N_A = ½ \; P$; ; $F = ½ \; P \text{ sen } 60^\circ$; $\Delta l = \dfrac{F}{k} = 26$ cm

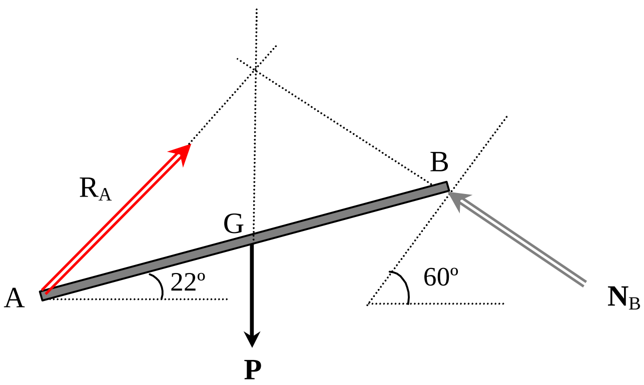
Problema 24 Una barra homogénea de 369 N de peso y longitud *l* esta articulada en su extremo A y se apoya en su extremo B sobre una superficie lisa tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar la reacción en la articulación.



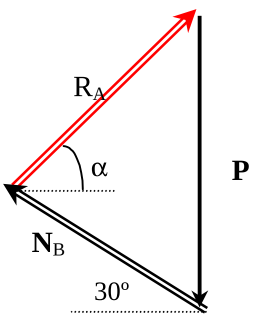
SOLUCIÓN

➯ Sobre la barra actúan tres fuerzas : El peso **P**, la normal en el apoyo $\mathbf{N}_B$ y la reacción en A.

➯ Diagrama del sólido libre. La condición necesaria para que un sólido sometido a tres fuerzas este en equilibrio es que las tres fuerzas se corten en un mismo punto (o sean paralelas)



➯ Condición de equilibrio



$$\frac{R_A}{sen\ 60^o} = \frac{P}{sen\,(30^o + \alpha)} = \frac{N_B}{cos\ \alpha}$$

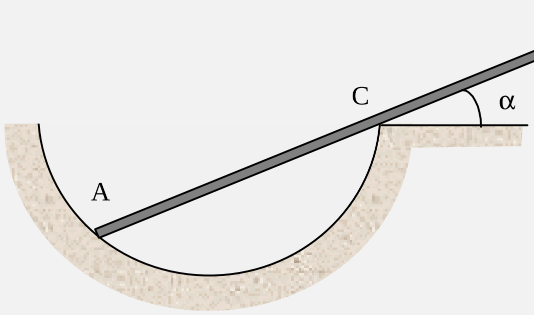
Sistema de dos ecuaciones
con tres incógnitas

➯ Tomando momentos respecto de A

$$N_B \text{ sen } 52^o\, l \; - \; P \tfrac{1}{2}\, l \cos 22^o = 0$$

➯ Operando queda $N_B = 217$ N ; $\alpha = 54{,}2^o$; $R_A = 321{,}2$ N

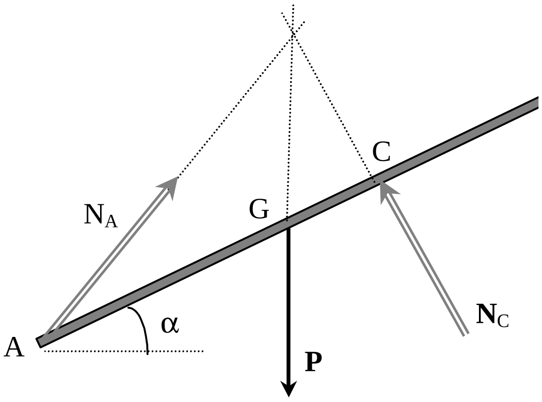
Problema 25 Una barra homogénea peso **P** y longitud *l* esta en equilibrio en una cavidad semiesférica lisa de radio *R* tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar el valor del ángulo de equilibrio α si $l = 3R$.

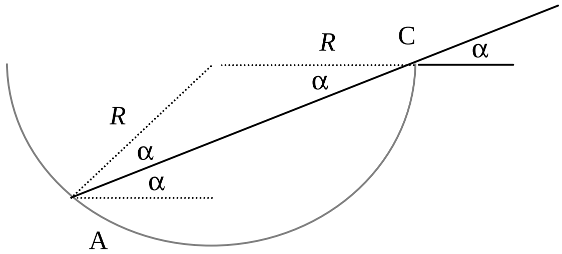


SOLUCIÓN

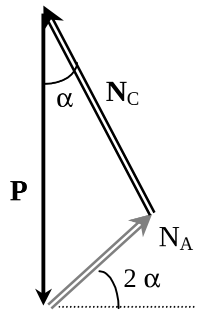
Sobre la barra actúan tres fuerzas : El peso **P**, la normal en el apoyo $\mathbf{N}_A$ y la normal en C $\mathbf{N}_C$.

Diagrama del sólido libre. La condición necesaria para que un sólido sometido a tres fuerzas este en equilibrio es que las tres fuerzas se corten en un mismo punto (o sean paralelas)





Condición de equilibrio



$$\frac{N_A}{sen\,\alpha} = \frac{P}{cos\,\alpha} = \frac{N_C}{cos\,2\alpha}$$

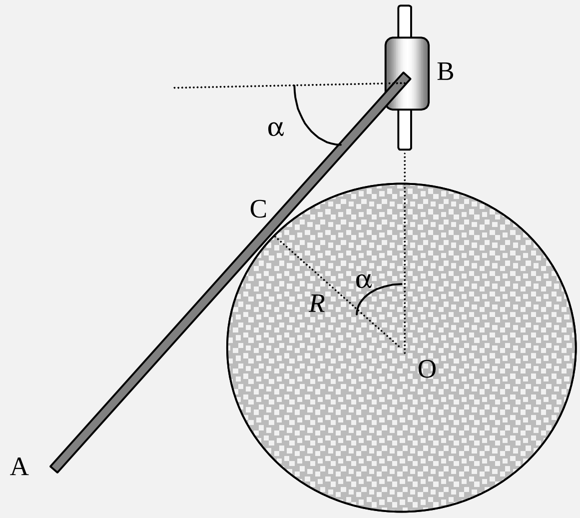
Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

Tomando momentos respecto de A

$$N_C\, 2\,R \cos\alpha - P\,\frac{3\,R}{2}\,cos\,\alpha = 0$$

Operando queda $N_C = \frac{3}{4}P$; $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$; $8\,cos^2\alpha - 3\,cos\,\alpha - 4 = 0$; $\alpha = 23{,}2º$

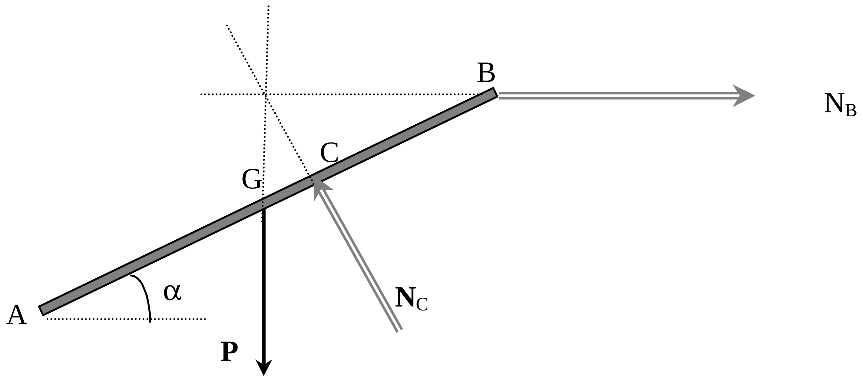
Problema 26 Una barra homogénea de longitud *l* y peso **P** está unida por uno de sus extremos a un pasador que puede deslizar sin rozamiento por una guía vertical. La barra se apoya sobre una superficie cilíndrica lisa de radio *R*. Si la longitud de la barra es 3*R* , determinar el ángulo α de equilibrio.



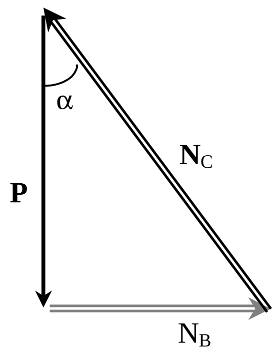
SOLUCIÓN

➯ Sobre la barra actúan tres fuerzas : El peso **P**, la normal en el apoyo $\mathbf{N}_C$ y la reacción en B dirigida perpendicularmente a la guía.

➯ Diagrama del sólido libre. La condición necesaria para que un sólido sometido a tres fuerzas este en equilibrio es que las tres fuerzas se corten en un mismo punto (o sean paralelas)



➯ Condición de equilibrio



$$\frac{N_B}{sen\,\alpha} = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{N_C}{1}$$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

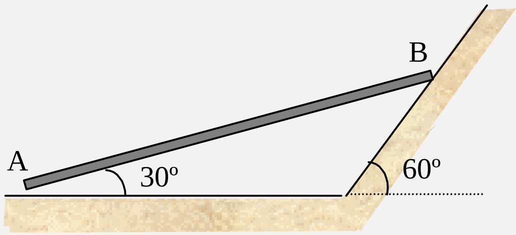
➡ Tomando momentos respecto de B ➡ $N_C\ CB - P\ \frac{3\ R}{2}\ \cos\alpha\ =\ 0$

De la figura se tiene $\tan\ \alpha\ =\ \frac{CB}{R}$

➡ Operando queda $\tan\ \alpha\left(\tan^2\ \alpha\ +\ 1\ \right)\ =\ \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha\ =\ 40{,}74º$

Equilibrio del sólido con rozamiento

Problema 27 Una barra homogénea de 200 N de peso y longitud *l* se apoya sobre dos superficies tal como se muestra en la figura adjunta. La superficie inclinada es lisa y la horizontal rugosa. Determinar : a) el valor de la fuerza de rozamiento en *A* para mantener la barra en equilibrio en la posición indicada ; b) el coeficiente de rozamiento mínimo para el equilibrio.

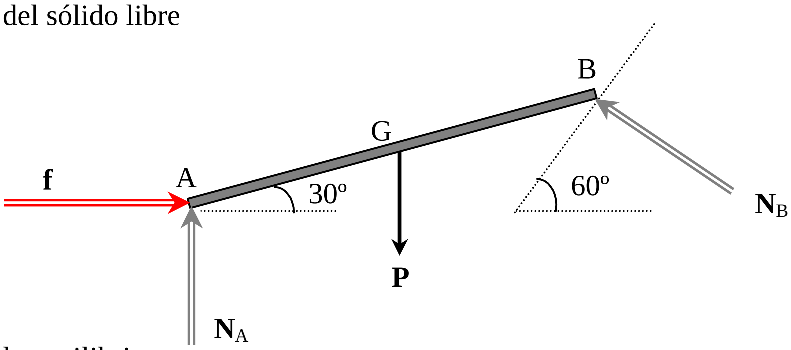


SOLUCIÓN

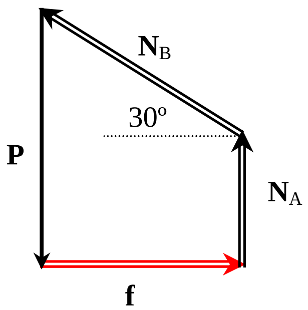
a)

Sobre la barra actúan cuatro fuerzas : El peso **P**, las normales en los apoyos $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ y la fuerza de rozamiento en *A*.

Diagrama del sólido libre



Condición de equilibrio



$$\left\{\begin{array}{l} N_A + N_B \text{ sen } 30^\circ = P \\ N_B \cos 30^\circ = f \end{array}\right.$$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

Tomando momentos respecto de A

$$N_B\ l - P\ \tfrac{1}{2}\ l \cos 30^\circ = 0$$

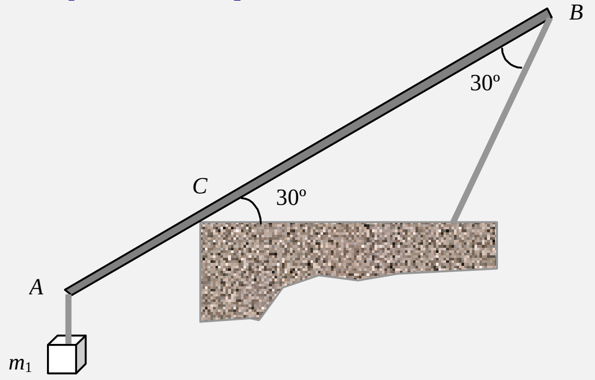
Operando queda $N_B = 86{,}6$ N $\Rightarrow$ f = 75 N

b)

Para el coeficiente de rozamiento mínimo, la barra está en estado de movimiento inminente y la correspondiente fuerza de rozamiento es la máxima, luego se cumple que $f_r = \mu N_A$

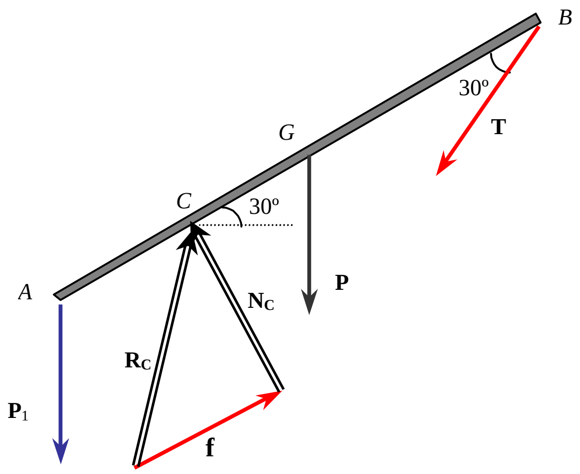
El valor de N_A es 156,7 N , de donde queda el valor $\mu = 0{,}48$

Problema 28 La barra homogénea *AB* de la figura adjunta, de masa $m = 4$ kg y longitud $l = 2$ m, se mantiene en equilibrio apoyada en el borde de un soporte a 0.5 m de su extremo *A* y mediante un cable unido a su extremo *B*. Del extremo *A* pende un cuerpo de masa $m_1 = 6$ kg . Determinar : a) dibujar el diagrama del sólido libre de la barra ; b) calcular la tensión del cable ; c) la fuerza de rozamiento en el apoyo ; d) si el apoyo se considera liso, deducir si existen valores de m y m_1 para que la barra se mantenga en equilibrio en la posición indicada.

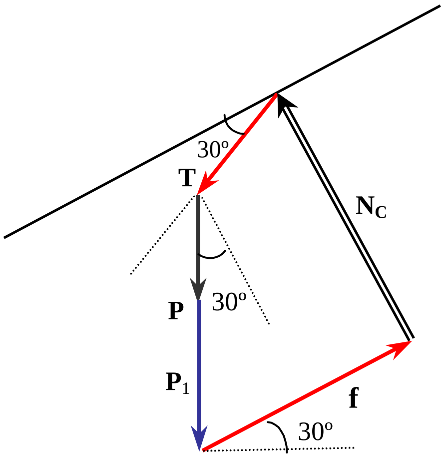


SOLUCIÓN

➪ Diagrama del sólido libre. Sobre la barra actúan 4 fuerzas : los pesos de la barra y el bloque, la tensión del cable y la resultante **R** en el punto de apoyo *C* , que es la suma de la normal y de la fuerza de rozamiento.



⇨ Condición de equilibrio



$$\left\{\begin{array}{l} N_C = T \,\text{sen}\, 30 + (P+P_1)\cos 30^{o} \\ f = T\cos 30^{o} + (P+P_1)\,\text{sen}\, 30^{o} \end{array}\right.$$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

⇨ Tomando momentos respecto de C

$$\frac{1}{2}P_1 \cos 30^{o} = \frac{1}{2}P \cos 30^{o} + \frac{3}{2}\, T \,\text{sen}\, 30^{o}$$

Operando queda

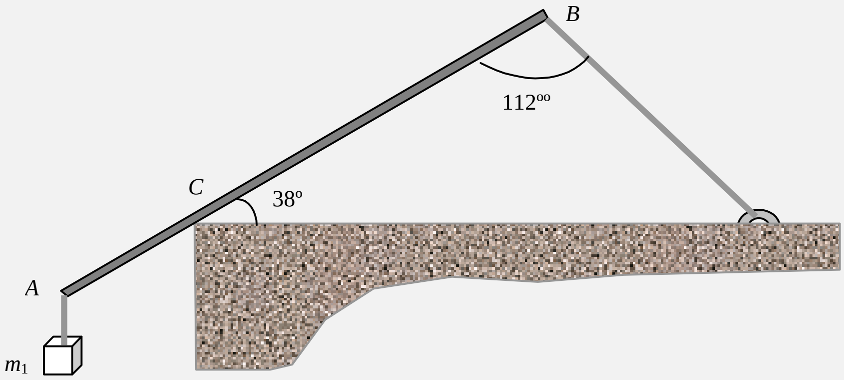
$$T = \frac{2\sqrt{3}\,g}{3} = 11.3 \text{ N}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de la condición de equilibrio se tiene

$$f = 6g = 58.8 \text{ N}$$

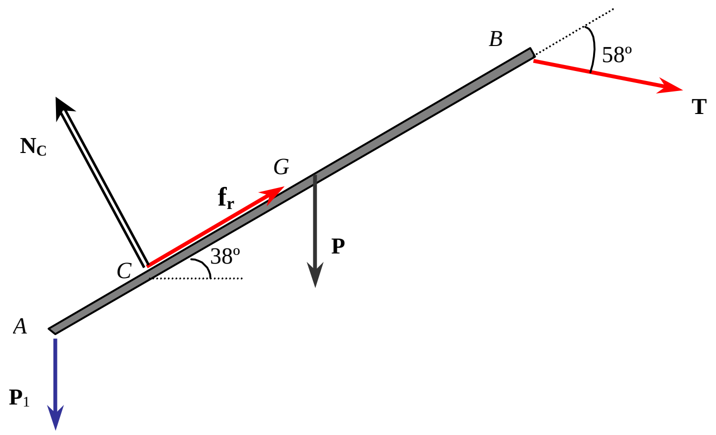
⇨ Sean cuales sean las masa m y m_1 , si no hay rozamiento, las componentes de los pesos y de la tensión en la dirección de la barra no se cancelan, luego no puede haber equilibrio.

Problema 29 La barra homogénea *AB* de la figura adjunta, de masa *m* y longitud *l*, se mantiene en equilibrio apoyada en el borde *C* de un soporte, tal que AC = *l*/5 y mediante un cable unido a su extremo *B*. Del extremo *A* pende un cuerpo de masa m_1 = 4 *m*. Determinar : el valor mínimo del coeficiente de rozamiento μ para que la barra se mantenga en equilibrio en la posición indicada.

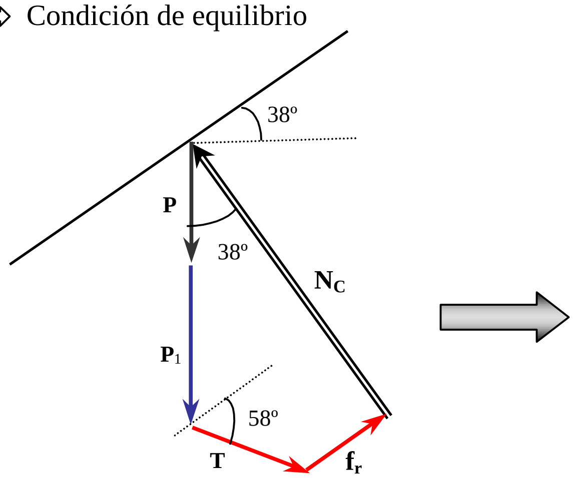


SOLUCIÓN

➩ Diagrama del sólido libre. Sobre la barra actúan 4 fuerzas : los pesos de la barra y el bloque, la tensión del cable y la resultante $\mathbf{R}_C$ en el punto de apoyo *C* , que es la suma de la normal y de la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $f_r = \mu\ N_C$



➩ Condición de equilibrio



$$\left\{\begin{array}{l} N_C = T \text{ sen } 58 + (P+P_1) \cos 38^\circ \\ \mu\ N_C + T \cos 58^\circ = (P+P_1) \text{ sen } 38^\circ \end{array}\right.$$

Sistema de dos ecuaciones
con tres incógnitas

Tomando momentos respecto de C

$$\frac{l}{5}P_1 \cos 38^o = \frac{3\,l}{10}P \cos 38^o + \frac{4l}{5}\, T \text{ sen } 58^o$$

Operando queda

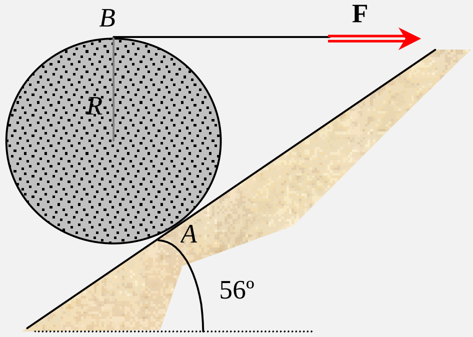
$$T = 0{,}58\ mg$$

Sustituyendo en la primera ecuación de la condición de equilibrio se tiene

$$N_C = 4{,}43\ mg$$

Y finalmente de la segunda ecuación de equilibrio $\mu = 0{,}62$

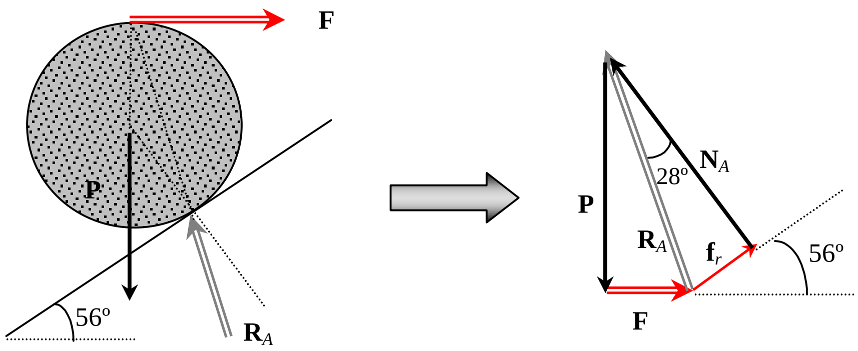
Problema 30 Un cilindro homogéneo de peso **P** y radio *R* se apoya sobre un plano inclinado rugoso que forma 44º con la horizontal. Se encuentra en condiciones de movimiento inminente bajo la acción de la fuerza que le ejerce el cable horizontal unida al cilindro en su parte superior. Determinar el valor del coeficiente de rozamiento μ.



SOLUCIÓN

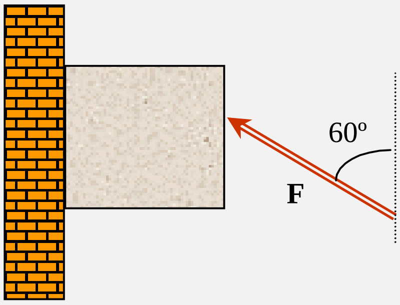
Sobre el cilindro actúan 3 fuerzas : el peso P del cilindro, la fuerza horizontal **F** del cable y la resultante $\mathbf{R}_A$ en el punto de apoyo *A* , que es la suma de la normal y de la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $f_r = \mu\ N_A$

Diagrama del sólido libre y condición de equilibrio.



$\mu = \tan 28 = 0{,}53$

Problema 31 El bloque homogéneo de la figura adjunta tiene un peso de 1200 N y está apoyado en una pared vertical . El coeficiente de rozamiento entre ambas superficies es μ = 0,25 . El bloque se encuentra en equilibrio bajo la acción de la fuerza **F** tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar el intervalo de valores de **F** para que el bloque se mantenga en equilibrio.

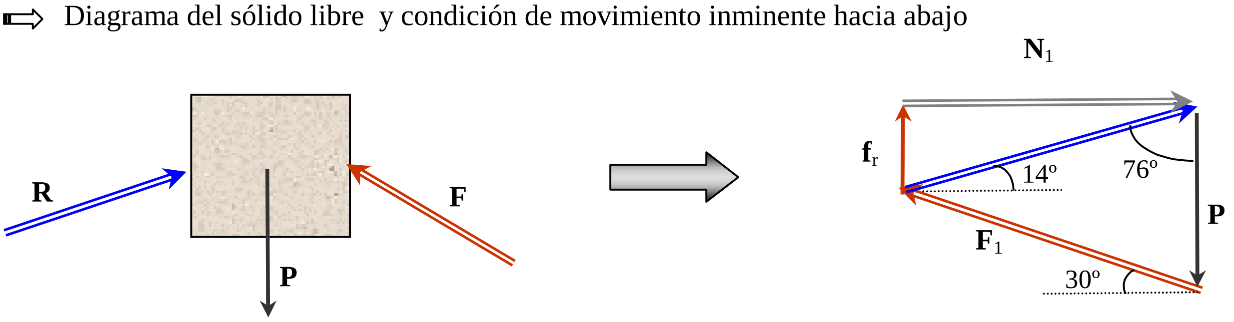


SOLUCIÓN

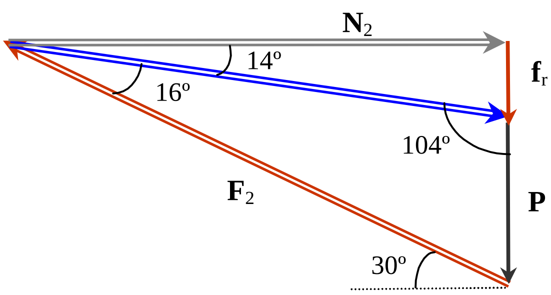
En condiciones de movimiento inminente, la reacción en la pared forma con la normal un ángulo θ tal que tan θ = μ = 0,25, es decir θ = 14º.

➯ Sobre el bloque actúan 3 fuerzas : el peso P , la fuerza **F** y la resultante **R** en el apoyo, que es la suma de la normal y de la fuerza de rozamiento. En condiciones de movimiento inminente, la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $f_r = \mu\ N$.

➯ Diagrama del sólido libre y condición de movimiento inminente hacia abajo

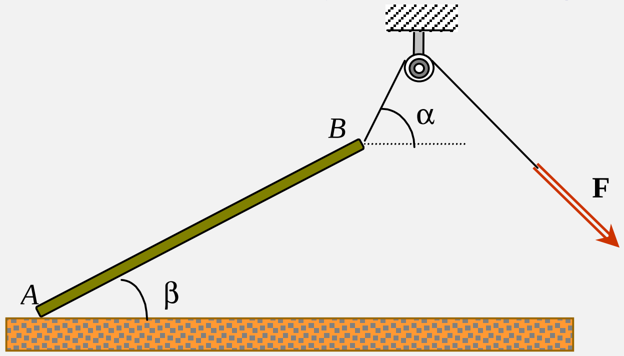


➯ Condición de movimiento inminente hacia arriba



➯ Aplicando la ley del seno a ambos triángulos queda $F_1 = 1676\ \text{N} \leq F \leq F_2 = 4224\ \text{N}$

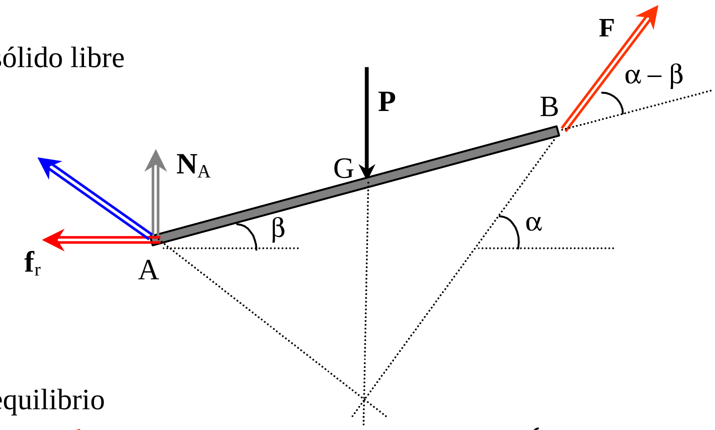
Problema 32 Una barra homogénea de peso **P** y longitud *l* se apoya por su extremo *A* sobre un suelo horizontal rugoso, coeficiente de rozamiento μ, y su extremo *B* está unido a un cable, que pasa por una polea, el cual le ejerce una fuerza **F** que mantiene la barra en la posición indicada en situación de movimiento inminente. Determinar el valor de μ en función de α y β.



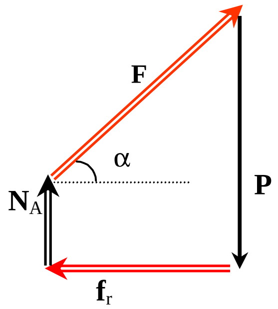
SOLUCIÓN

Sobre la barra actúan cuatro fuerzas : El peso **P**, la normal $\mathbf{N}_A$, la fuerza de rozamiento f_r = μ N_A y la fuerza **F** aplicada en B.

➯ Diagrama del sólido libre



➯ Condición de equilibrio



$$\begin{cases} N_A + F\ \text{sen}\ \alpha = P \\ F \cos \alpha = \mu\ N_A \end{cases}$$

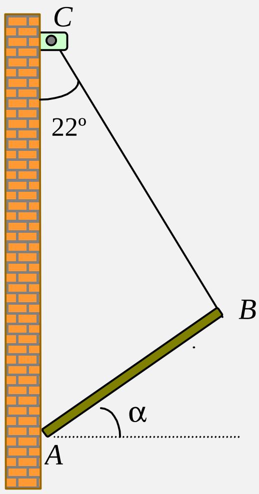
➯ Tomando momentos respecto de A

$$P\ \tfrac{1}{2}\ l \cos \beta = F\ l\ \text{sen}\ (\alpha - \beta)$$

➯ Operando queda

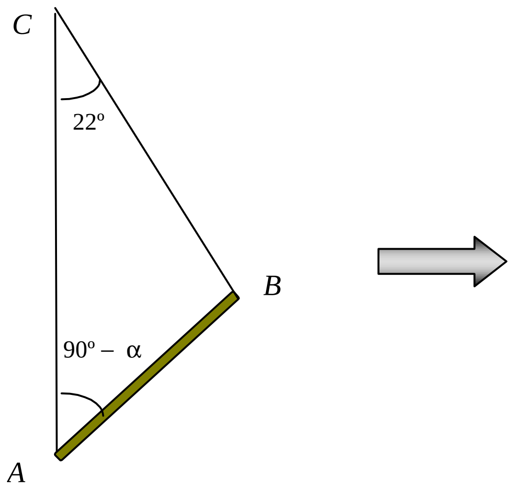
$$\mu = \frac{1}{\tan \alpha - 2 \tan \beta}$$

Problema 33 Una barra homogénea de peso P = 90 N y longitud l se mantiene en equilibrio apoyada por su extremo A sobre una pared vertical rugosa; su extremo B está unido a un cable fijo a la pared en el punto C , cuya longitud es 1,57 l que forma con la pared un ángulo de 22º. Determinar: el ángulo α, la tensión del cable y la fuerza de rozamiento.



SOLUCIÓN

Cálculo del ángulo α.

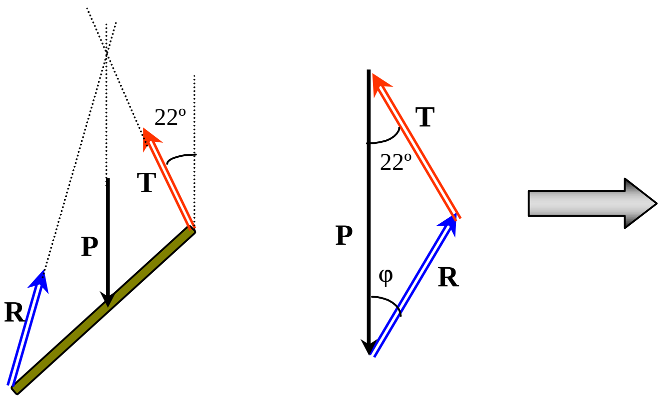


$$\frac{l}{\text{sen } 22^\circ} = \frac{1{,}57\ l}{\cos \alpha}$$

Operando $\alpha = 54^\circ$

La barra forma con la pared un ángulo de 36º y la tensión del cable forma con la dirección de barra un ángulo de 58º.

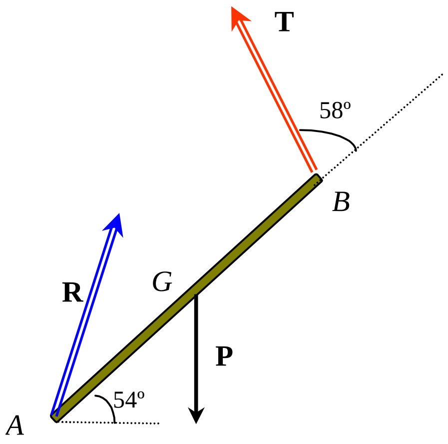
Diagrama del sólido libre y condición de equilibrio. Sobre la barra actúan 3 fuerzas, el peso **P**, la tensión del cable **T** y la reacción **R** en el apoyo A que es la suma de la fuerza de rozamiento **f**, dirigida hacia arriba, mas la normal.



$$\frac{T}{\text{sen}\ \varphi} = \frac{R}{\text{sen}\ 22^{\circ}} = \frac{P}{\cos\left(68^{\circ} - \varphi\right)}$$

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas

➩ Tomando momentos respecto de *A* se obtiene la tensión del cable



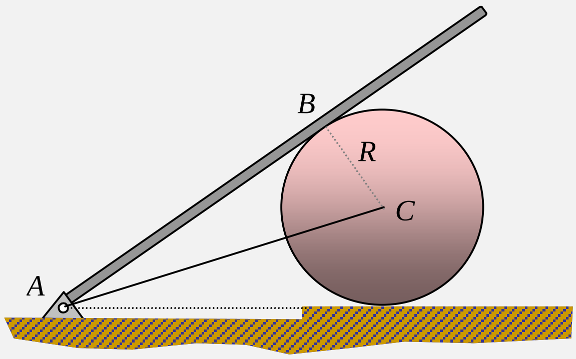
$\Rightarrow$ $T = 31$ N

➩ Sustituyendo y operando se tiene el valor del ángulo $\varphi = 11^{\circ}$. Conocido el ángulo se obtiene el valor de la reacción, $R = 62$ N. La fuerza de rozamiento es su proyección vertical

$$f = 61 \text{ N}$$

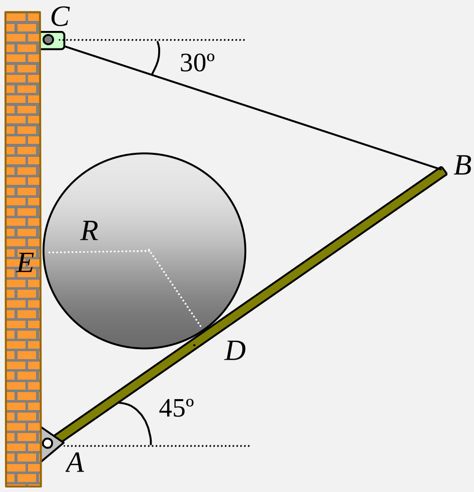
Equilibrio del sistema de sólidos

Problema 34 Una barra uniforme de peso **P** y longitud l está articula en su extremo A y se apoya sobre un disco liso de radio R y peso **Q**, tal como se muestra en la figura adjunta. El disco se apoya sobre una superficie horizontal lisa y su centro unido a la articulación mediante un cable. Determinar la tensión del cable y la reacción en la articulación.



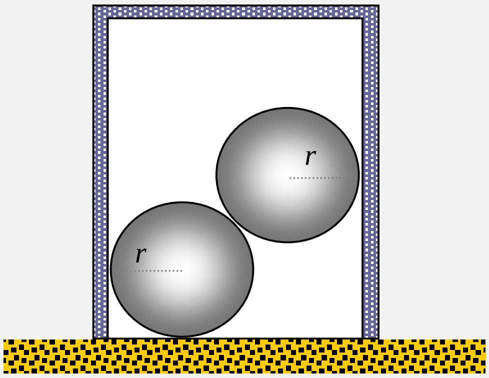
SOLUCIÓN

Problema 35 Un cilindro de peso *P* y radio *R* se encuentra en equilibrio en la posición indicada en la figura adjunta. Se considera que todas las superficies son lisas. Determinar: la reacción en la articulación y la tensión del cable.



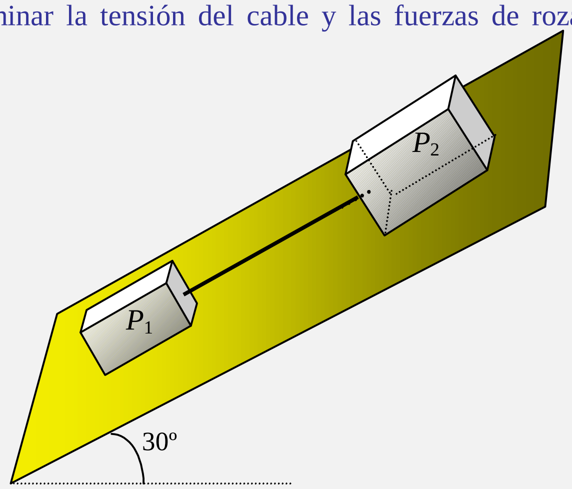
SOLUCIÓN

Problema 36 Un cilindro de peso $\boldsymbol{Q}$ y radio R se apoya boca abajo sobre una superficie horizontal tal como se muestra en la figura adjunta. En su interior hay dos esferas de radio r y peso $\boldsymbol{P}$ cada una. Determinar el peso del cilindro para que este no vuelque. Todas las superficies se consideran lisas.



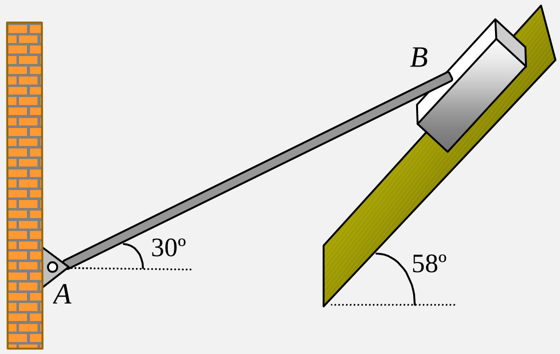
SOLUCIÓN

Problema 37 Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se sitúan dos bloques de pesos P_1 = 4000 N y P_2 = 6000 N respectivamente. Ambos están unidos mediante un cable. Los coeficientes de rozamiento entre los bloques y el plano inclinado son μ_1 = 0,4 y μ_2 = 0,8, respectivamente. Determinar la tensión del cable y las fuerzas de rozamiento que actúan sobre los bloques.



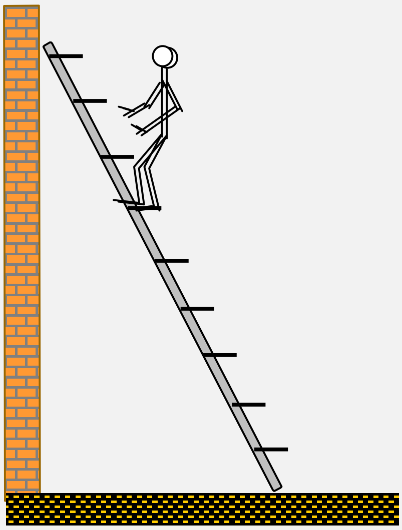
SOLUCIÓN

Problema 38 Una barra uniforme de peso 1176 N y longitud l está articula en su extremo A y forma un ángulo de 30º con la horizontal. Su extremo B se apoya sobre la superficie lisa de un bloque de peso 328 N, situado sobre una superficie inclinada rugosa que forma un ángulo de 58º con la horizontal. Determinar la reacción en la articulación y el coeficiente de rozamiento mínimo para que haya equilibrio.



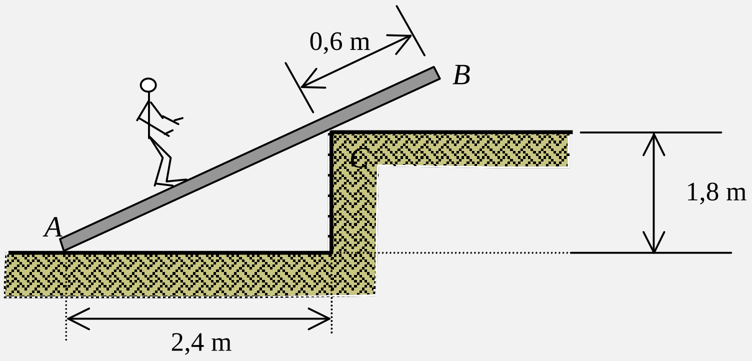
SOLUCIÓN

Problema 39 Una escalera de peso ***P*** se apoya en una pared vertical lisa y sobre un suelo horizontal rugoso. El coeficiente de rozamiento es μ = 0,265. La distancia entre peldaños es de 30 cm. Una persona de peso ***Q*** asciende por la escalera. Determinar hasta que peldaño puede subir sin que la escalera se caiga.



SOLUCIÓN

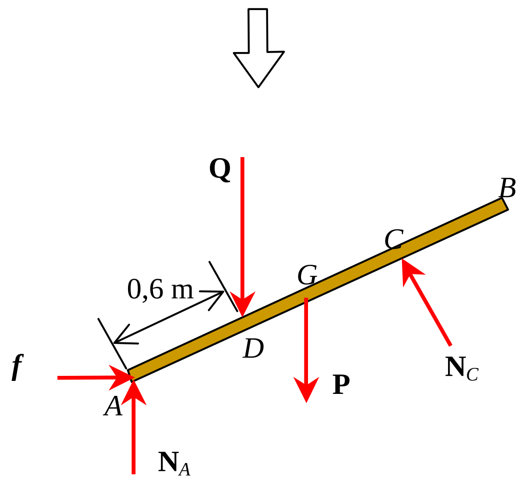
Problema 40 Una persona de peso 720 N sube sobre un tablón homogéneo de 284 N de peso tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar : a) la fuerza de rozamiento en el suelo cuando la persona se encuentra parada a 0,6 m del extremo *A*, si el apoyo en *C* se considera liso; b) si el coeficiente de rozamiento en *A* y *C* es μ = 0,25 determinar la distancia máxima *s* a la que puede subir la persona sin que el tablón deslice.



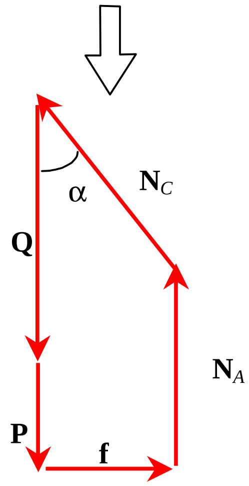
SOLUCIÓN

a) Para la posición indicada la tabla no está en condiciones de movimiento inminente. En el apoyo en A, además de la normal actúa la fuerza de rozamiento **f** dirigida hacia la derecha.

Diagrama del sólido libre de la tabla



Polígono de fuerzas



Del polígono de fuerzas se deduce inmediatamente el valor de la fuerza de rozamiento en el suelo

$$f = N_C \operatorname{sen} \alpha \tag{1}$$

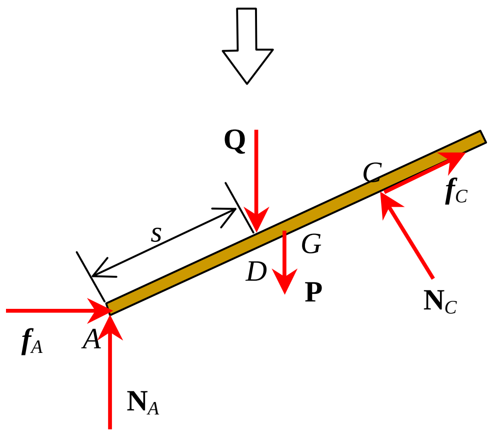
La normal en C forma con la vertical un ángulo α que es el mismo que forma la tabla con el suelo; de los datos se deduce su valor, α = 36,87º. De la suma de momentos respecto de A igual a cero se obtiene la ecuación

$$N_C \overline{AC} = (Q \overline{AD} + P \overline{AG}) \cos \alpha$$

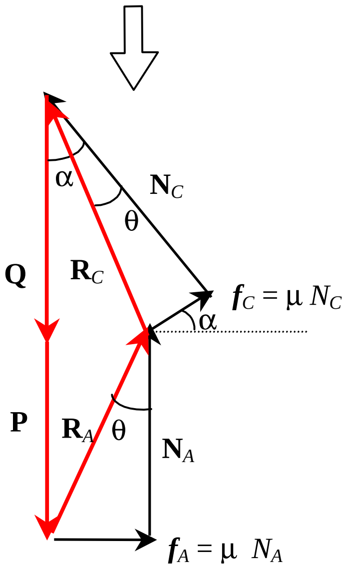
De la figura se tiene los valores $\overline{AC} = 3{,}0$ m ; $\overline{AB} = 3{,}60$ m   Operando queda para la normal en el apoyo $N_C = 251{,}5$ N. De la ecuación (1) se tiene fuerza de rozamiento $f = 151$ N .
Del polígono de fuerzas se obtiene inmediatamente la normal en A $N_A = 1004 - 0{,}8\, N_C = 803$ N . Si el coeficiente de rozamiento en el suelo es $\mu = 0{,}25$, el valor máximo de la fuerza de rozamiento es 200,7 N y la persona puede seguir subiendo por la tabla sin que esta deslice.

b) En la posición límite, la tabla está en situación de movimiento inminente, y las fuerzas de rozamiento tienen su valor máximo, μ por la normal. La fuerza de rozamiento en C tiene la dirección de la tabla dirigida hacia arriba.

Diagrama del sólido libre de la tabla



Polígono de fuerzas



Igualando a cero la suma de momentos respecto de A , se tiene

$$N_C\, \overline{AC} = (Q\, s + P\, \overline{AG})\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad s = \frac{N_C}{Q\cos\alpha}\overline{AC} - \frac{P}{Q}\overline{AG}$$

De la ley del seno aplicada al triángulo de fuerzas formado por los vectores **P** + **Q,** $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_C$ y teniendo en cuenta que $\tan\theta = 0{,}25 \Rightarrow \theta = 14{,}03^{o}$ queda

$$\frac{R_C}{\text{sen } 14{,}03} = \frac{P+Q}{\text{sen}\,143{,}13} \quad \Rightarrow \quad R_C = 405{,}66 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad N_C = \frac{R_C}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \Rightarrow \quad N_C = 393{,}55 \text{ N}$$

Sustituyendo valores se tiene   s = 1,34 m

Equilibrio del sistema de sólidos

Entramados y armaduras

Mecanismos : poleas, cuñas, tornillos y discos

Método de los trabajos virtuales

Fuerzas distribuidas : cables y vigas

Centros de gravedad