PROBLEMAS RESUELTOS DE ONDAS y SONIDO

PROBLEMA 1. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación (en unidades S.I.)

Calcular: $y = 0.2\sin\left(6\pi\, t + \pi\, x + \pi/4\right)$

a) La frecuencia, el periodo, la longitud de la onda y la velocidad de propagación.

b) El estado de vibración, velocidad y aceleración de una partícula situada en x = 0,2 m en el instante t = 0,3 s.

c) Diferencia de fase entre dos puntos separados 0,3 m.

---

a) Ecuación de la forma $y(x,t) = A\sin\left(\omega\, t + k\, x + \delta\right)$

Se propaga en sentido negativo del eje X

$\omega = 2\pi\, f = 6\pi$ rad/s $\rightarrow f = 3\,\text{Hz} \rightarrow T = 1/f = 0.333\,\text{s}$

$k = 2\pi/\lambda = \pi\ \ \text{m}^{-1} \rightarrow \lambda = 2\,\text{m}$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{6\pi}{\pi} = 6\ \text{m/s}$$

b) Para x = 0.2 m, t = 0.3 s.

$$y = 0.2\sin\left(6\pi\cdot 0.3 + \pi\cdot 0.2 + \pi/4\right) = 0.2\sin(7.069) = 0.1414\ \ \text{m}$$

Velocidad $$\frac{dy}{dt} = 0.2\cdot 6\pi\cos\left(6\pi\, t + \pi\, x + \pi/4\right) = 0.2\cdot 6\pi\cos(7.069) = 2.666\ \ \text{m/s}$$

Aceleración $$\frac{d^2y}{dt^2} = -0.2\cdot 36\pi^2\sin\left(6\pi\, t + \pi\, x + \pi/4\right)$$
$$= 0.2\cdot 36\pi^2\cos(7.069) = -50.25\ \ \text{m/s}^2$$

c) Diferencia de fase entre dos puntos separados Δx = 0.3 m

$$\delta_1 = 6\pi\, t + \pi\, x + \pi/4$$
$$\delta_2 = 6\pi\, t + \pi\,(x + 0.3) + \pi/4$$

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 0.3\,\pi\ \text{rad}$$

PROBLEMA 2. La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda tensa está dada por

$$y = 6\sin(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) \qquad \text{donde } x, y \text{ están en cm; } t \text{ en segundos}$$

a) Poner esta ecuación en forma coseno. Determinar su longitud de onda y su frecuencia.

b) ¿Cuál es su amplitud? ¿En qué sentido se propaga, y cuál es la velocidad de propagación?

c) ¿Cuál es la velocidad máxima de vibración de un punto de la cuerda? ¿Y la aceleración máxima?

---

a) Para ponerla en forma coseno tendremos en cuenta la relación

$$\cos(\phi - \pi/2) = \cos\phi\cos(\pi/2) + \sin\phi\sin(\pi/2) = \sin\phi$$

(El seno de un ángulo está atrasado $\pi/2$ rad respecto al coseno)

$$y = 6\sin(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) = 6\cos(\underbrace{0.02\pi}_{k}\ x + \underbrace{4\pi}_{\omega}\ t - \pi/2)$$

Número de ondas k: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0.02\pi\ \text{cm}^{-1}$ $\quad \lambda = 100\ \text{cm}$

Frecuencia angular ω: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\ f = 4\pi\ \text{rad/s}$ $\quad f = 2\ \text{Hz}$ $\quad T = 0.5\ \text{s}$

b) Amplitud: directamente de la ecuación $A = 6$ cm.

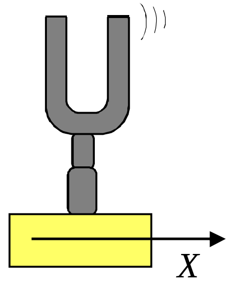
Se propaga en el sentido negativo del eje X.

Velocidad propagación $\quad v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{4\pi\ \text{rad/s}}{0.02\pi\ \text{cm}^{-1}} = 200\ \text{cm/s}$

c) Velocidad de vibración

$$\dot{y} = \frac{d\ y(x,t)}{dt} = 6 \cdot 4\pi\cos(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) = 24\pi\cos(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) \qquad |\dot{y}_{max}| = 24\pi\ \text{cm/s}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2\ y(x,t)}{dt^2} = -24\pi \cdot 4\pi\sin(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) = -96\pi^2\sin(0.02\pi\ x + 4\pi\ t) \qquad |\ddot{y}_{max}| = 96\pi^2\ \text{cm/s}^2$$



PROBLEMA 3. El nivel de presión L_P de una onda sonora se define como

$$L_P = 10\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right) \quad \text{donde} \quad p_{ref} = 2\cdot 10^{-5}\ \text{Pa}$$

siendo p_{rms} el valor *rms* de la onda de presión en el punto considerado.
Un diapasón vibra con una frecuencia de 275.2 Hz. Una persona que oye la nota emitida por el mismo percibe un nivel de presión de 64 dB. Calcular la longitud de onda, escribir la ecuación de onda y determinar la intensidad de la onda en W/m^2.

Densidad del aire ρ = 1,29 g/litro. Velocidad de propagación del sonido v = 344 m/s.

Relación entre la intensidad en W/m^2 y la presión en Pa: $I = p_{rms}^2/(\rho\cdot v)$

<u>Longitud de onda</u>: cálculo a partir de $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot f \longrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{344}{275.2} = \frac{5}{4} = 1.25\ \text{m}$

Amplitud de la onda sonora $L_P = 20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right)$ $\quad p_{rms} = p_{ref}\cdot 10^{L_P/20}$ $\quad 64 = 20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{2\cdot 10^{-5}}\right)$

$$\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{2\cdot 10^{-5}}\right) = \frac{64}{20} = 3.2 \qquad p_{rms} = 2\cdot 10^{-5}\cdot 10^{3.2} = 3.17\cdot 10^{-2}\ \text{Pa}$$

Cálculo de ω y k $\quad \omega = 2\pi\ f = 2\pi\cdot 275.2 = 550.4\pi = 1729.1\ \text{rad/s}$

$$v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{1729.1}{344} = 5.0\ \text{m}^{-1}$$

<u>Ecuación de onda</u>

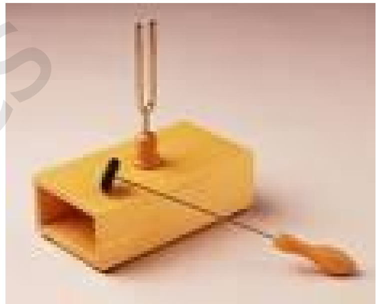
$$p = p_{rms}\sqrt{2}\cos(kx - \omega t)$$

$$p = 3.17\sqrt{2}\cdot 10^{-2}\cos(5.0x - 550.4\pi\ t)$$

<u>Intensidad</u> (W/m^2) $\quad I = \frac{p_{rms}^2}{\rho\cdot v} \longrightarrow I = \frac{\left(3.17\cdot 10^{-2}\right)^2}{1.29\cdot 344} = 2.26\cdot 10^{-6}\ \text{W/m}^2$

$$\rho = 1.29\ \text{g/litro} = 1.29\frac{10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-3}\ \text{m}^3} = 1.29\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

PROBLEMA 4



Un diapasón montado sobre una caja de resonancia se golpea con un martillete emitiendo una onda sonora de 612 Hz que se propaga a 340 m/s y alcanza un receptor. Considerando que la onda que alcanza el receptor es una onda plana, se pide:

a) Si la sobrepresión máxima producida por la onda sonora en el receptor es igual a $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ Pa, escribir la ecuación de la onda viajera, explicando la elección que se haga para la fase inicial, y calcular su longitud de onda.

b) La intensidad del sonido en función de la presión está dada por la relación indicada en el recuadro al margen. Calcular la intensidad del sonido que percibe el receptor. ¿Cuáles son sus unidades en el S.I?

Ayuda $\boxed{I = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho\, v}}$

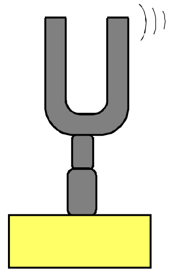
c) Tomando como intensidad de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, calcular el nivel de intensidad en dB.

d) En un segundo experimento se vuelve a golpear el diapasón y en el receptor el nivel de intensidad es 20 dB mayor que antes. ¿Cuál es la intensidad que llega al receptor?

Dato. Densidad del aire en las condiciones del experimento: ρ = 1.22 kg/m^3

a) Onda sonora de 612 Hz que se propaga a 340 m/s. Sobrepresión máxima en el receptor $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ Pa.

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\, f}{v} = 2\pi \frac{612}{340} = 3.6\pi \text{ m}^{-1} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3.6\pi} = 0.555\,\text{m}$$



$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 612 = 1224\pi \text{ rad/s}$$

Suponemos que se propaga de izquierda a derecha

$$p(x,t) = p_0 \cos(kx - \omega\, t + \delta) \longrightarrow p(0,0) = p_0 \cos(\delta) = p_0 \longrightarrow \delta = 0$$

Elegimos como punto inicial el momento en que la presión pasa por un máximo

$$p(x,t) = 2 \cdot 10^{-4} \cos(3.6\pi\, x - 1224\pi\, t) \quad (p \text{ en Pa})$$

Longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3.6\pi} = 0.555\,\text{m}$

PROBLEMA 4 (Continuación)

b) La intensidad del sonido en función de la presión está dada por la relación indicada en el recuadro al margen. Calcular la intensidad del sonido que percibe el receptor. ¿Cuáles son sus unidades en el S.I?

Ayuda $\boxed{I = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_0^2}{\rho\, v}}$

c) Tomando como intensidad de referencia I_0 = 10^{-12} W/m^2, calcular el nivel de intensidad en dB.

d) En un segundo experimento se vuelve a golpear el diapasón y en el receptor el nivel de intensidad es 20 dB mayor que antes. ¿Cuál es la intensidad que llega al receptor?

Dato. Densidad del aire en las condiciones del experimento: ρ = 1.22 kg/m^3

---

b) Nivel de intensidad que percibe el receptor $I = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_0^2}{\rho\, v} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^2}{1.22\cdot 340} = 4.82\cdot 10^{-11}\ \text{W/m}^2$

Densidad del aire: ρ = 1.22 kg/m^3

Justificación de las unidades S.I. $[I] = \dfrac{\text{Potencia}}{\text{Área}} \equiv \dfrac{\text{watios}}{\text{m}^2}$

c) Nivel de intensidad $L_I = 10\log_{10}\left(\dfrac{4.82\cdot 10^{-11}}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(4.82\cdot 10^{-11}\right) + 120 = 17\ \text{dB}$

d) En un segundo experimento se vuelve a golpear el diapasón y en el receptor el nivel de intensidad es 20 dB mayor que antes. ¿Cuál es la intensidad que llega al receptor?

$L'_I = L_I + 20 = 17 + 20 = 10\log_{10}\left(\dfrac{I'}{10^{-12}}\right)$ $\quad \log_{10}\left(\dfrac{I'}{10^{-12}}\right) = 3.7$ $\quad \dfrac{I'}{10^{-12}} = 10^{3.7}$

$$I' = 10^{3.7}\cdot 10^{-12} = 5\cdot 10^{-9}\ \text{W/m}^2$$

PROBLEMA 5 Un diapasón emite un tono puro de frecuencia 440 Hz, que es percibido por un receptor con un nivel de presión sonora de 60 dB. Sabiendo que el nivel de presión sonora está dado por $L_P = 20\log_{10}\left(p_0/p_{ref}\right)$, donde el nivel de referencia de presión es $p_{ref} = 2\cdot 10^{-6}$ Pa, y sabiendo que el aire circundante se encuentra a 27 ºC, se pide:

a) Determinar la longitud de onda de este tono.

b) Escribir la ecuación de la onda sonora, especificando su amplitud (en Pa), su número de ondas y su frecuencia angular.

c) Suponiendo que la temperatura del aire se redujese hasta 0 ºC, ¿qué variaciones sufrirían la frecuencia angular y la longitud de onda?

Ayuda: La velocidad del sonido en un gas está dada en función de la temperatura absoluta T por la expresión: $v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$

Datos: masa molecular del aire: $M = 0.0289\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$ Constante de los gases: $R = 8.314\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ Coeficiente adiabático: $\gamma = 1.40$

---

a) Longitud de onda de este tono: calculamos primero la velocidad de propagación. $v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = \sqrt{\frac{1.4\cdot 8.314\cdot 300}{0.0289}} = 347.6\ \mathrm{m/s}$

Relación entre la velocidad de propagación, la frecuencia y la longitud de onda $v = \lambda\cdot f$ $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{347.6}{440} = 0.79\ \mathrm{m}$

b) Ecuación de la onda: $p(x,t) = p_0\cos(kx - \omega t)$ (Suponemos fase inicial nula y desplazamiento $x \rightarrow$)

Cálculo de la amplitud p_0: $L_P = 20\log_{10}\left(\frac{p_0}{2\cdot 10^{-6}}\right) = 60\ \mathrm{dB}$ $\log\left(\frac{p_0}{2\cdot 10^{-6}}\right) = 3$ $p_0 = 2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{3} = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa}$

Número de ondas y frecuencia angular: $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.79 = 7.95\ \mathrm{m^{-1}}$ $\omega = 2\pi\cdot f = 2\pi\cdot 440 = 2764.6\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

$$p(x,t) = 2\cdot 10^{-3}\cos(7.95\,x - 2764.6\,t)\ \ (\mathrm{Pa})$$

c) El cambio de temperatura del aire supone un cambio en las propiedades elásticas del medio de transmisión de la onda, y por tanto un cambio en la velocidad de propagación. Como la frecuencia de la onda emitida no cambia, ya que ésta depende del ritmo de vibración del diapasón, la frecuencia angular no cambiará respecto al cálculo anterior. Pero puesto que la velocidad de propagación sí cambia, deberá cambiar la longitud de onda. Los nuevos valores son:

$$v' = \sqrt{\frac{\gamma R T'}{M}} = \sqrt{\frac{1.4\cdot 8.314\cdot 273}{0.0289}} = 331.6\ \mathrm{m/s} \qquad \lambda' = \frac{v'}{f} = \frac{331.6}{440} = 0.75\ \mathrm{m}$$

PROBLEMA 6

Un silbato que emite una frecuencia de 4300 Hz produce una onda cuyo valor máximo de presión por encima de la presión ambiental es $4{\cdot}10^{-2}$ Pa. Esta onda se propaga a 344 m/s en el aire.

a) Escribir la ecuación de onda. Determinar la longitud de onda.

b) ¿Cuál es el nivel de presión sonora?. Presión de referencia $p_{ref} = 2{\cdot}10^{-5}$ Pa.

a) Ecuación de onda: consideramos una onda plana en el sentido creciente del eje X y tomamos el origen de modo que la fase inicial sea cero.

$$p(x,t) = p_0 \cos(k\,x - \omega\,t) \qquad p,\ p_0 \text{ en Pa},\ \ x \text{ en m},\ t \text{ en s}$$

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 4300 = 8600\pi\ \text{Hz}$$

$$p(x,t) = 4\cdot 10^{-2}\cos(25\pi\,x - 8600\pi\,t)\ \ \text{(Pa)}$$

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{8600\pi}{344} = 25\pi\ \ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{25\pi} = 0.08\ \text{m}$$

b) Nivel de presión sonora. Presión de referencia $p_{ref} = 2{\cdot}10^{-5}$ Pa. Presión rms: $p_{rms} = p_0/\sqrt{2} = 2.83\cdot 10^{-2}$ Pa

$$L_P = 10\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{2.83\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-5}}\right) = 63\ \text{dB}$$

PROBLEMA 7

Un tono puro de 432.9 Hz se propaga en el aire a 340 m/s. La amplitud de la onda de presión en un punto situado a 2 m de la fuente es de 184 mPa. Se pide:

(a) La ecuación de onda y representar en el punto indicado la presión como función del tiempo.

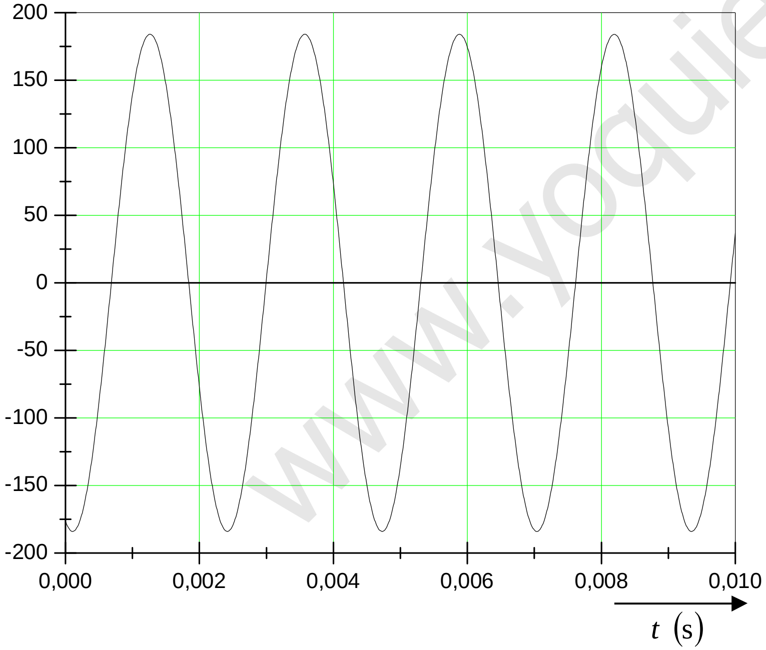
(b) Calcular la intensidad de la onda y el nivel de intensidad en dicho punto. Umbral de percepción de intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}; densidad del aire 1.27 kg.m^{-3}.

Cálculo de ω y k $\quad \omega = 2\pi\ f = 2\pi \cdot 432.9 = 865.8\pi \text{ rad/s} = 2720 \text{ rad/s} \quad v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{2720}{340} = 8 \text{ m}^{-1}$

$$p = p_m \cos(kx - \omega t) = 184\cos(8x - 2720t) \quad (m\text{Pa})$$

Representación gráfica en x = 2 m

$$p = 184\cos(16 - 2720t) \quad (\text{mPa})$$



Valor *rms* de la presión $\quad p_{rms} = \frac{p_m}{\sqrt{2}} = \frac{184}{\sqrt{2}} = 130 \text{ mPa}$

$$I = \frac{p_{rms}^2}{\rho \cdot c} \qquad I = \frac{\left(130 \cdot 10^{-3}\right)^2}{1.27 \cdot 340} = 3.91 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$L_I = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{3{,}91 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 75.9 \approx 76 \text{ dB}$$

PROBLEMA 8

El nivel de intensidad de la sirena de un barco, percibido por un marinero en la cubierta a 10 metros de distancia de la misma, es de 70 dB.
Determinar (a) el nivel de intensidad a 1 km de distancia; (b) la distancia a la cual la sirena dejará de ser audible; (c) la presión *rms* de la onda sonora a la distancia a la que la sirena deja de ser audible. Umbral de percepción de intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}; densidad del aire 1.20 kg.m^{-3}; velocidad del sonido 338 m/s.

A 10 m de distancia (punto 1) $L_{I1} = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 70\text{ dB}$

$I_1 = 10^{-12}\cdot 10^7 = 10^{-5}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ Intensidad de la onda en cubierta

A 1 km de distancia (punto 2) $L_{I2} = 10\log\frac{I_2}{I_0}$

$$L_{I2} - L_{I1} = 10\left(\log\frac{I_2}{I_0} - \log\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\log\frac{I_2}{I_1} = L_{I2} - 70$$

La intensidad de las ondas sonoras es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente (suponemos propagación isótropa)

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{10^2}{\left(10^3\right)^2} = \frac{10^2}{10^6} = 10^{-4} \longrightarrow L_{I2} = 70 + 10\log 10^{-4} = 70 - 40 = \boxed{30\text{ dB}}$$

La distancia r_0 a la que la sirena deja de ser audible es aquella a la intensidad de la onda se hace igual al límite de percepción $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \qquad r_0 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_0}} = 10\sqrt{\frac{10^{-5}}{10^{-12}}} = \boxed{31600\text{ m}}$$

Relación entre la intensidad y la presión rms de la onda sonora

$$I = \frac{p_{rms}^2}{\rho\cdot c} \qquad \left(p_{rms}\right)_0 = \sqrt{\rho\cdot c\cdot I_0} = \sqrt{1.29\cdot 344\cdot 10^{-12}} = \boxed{2\cdot 10^{-5}\text{ Pa}}$$

Umbral de presión = 20 μPa

PROBLEMA 9

Una fuente sonora isótropa produce un nivel de intensidad de 65 dB a 1 m de distancia. Las condiciones ambientales son densidad del aire 1.27 kg.m^{-3} y velocidad del sonido 340 m/s. Calcular (a) la potencia emitida por la fuente; (b) el valor máximo de la presión de la onda sonora a 2 m de la fuente ¿Cuál es el valor rms correspondiente?. Umbral de percepción de intensidad I_0 = 10^{-12} W·m^{-2}.

$$L_{I1} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 65 \text{ dB} \qquad \log \frac{I_1}{I_0} = 6.5 \qquad I_1 = 10^{-12} \cdot 10^{6.5} = 10^{-5.5} \text{ W·m}^{-2} = 3.16 \cdot 10^{-6} \text{ W·m}^{-2} \longleftarrow \text{Intensidad a 1 m de la fuente}$$

La intensidad a 1 m de la fuente es la potencia emitida repartida sobre la superficie de una esfera de radio r_1 = 1m.

$$I_1 = \frac{\dot{W}}{4\pi\, r_1^2} \qquad \dot{W} = I_1 \cdot 4\pi\, r_1^2$$

$$\dot{W} = 4\pi \cdot 3.16 \cdot 10^{-6} \text{ W} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

Para determinar la presión de la onda sonora calculamos la intensidad a r_2 = 2 m de la fuente.

La intensidad de las ondas sonoras es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 10^{-5.5} \frac{1^2}{2^2} = \frac{10^{-5.5}}{4} = 7.91 \cdot 10^{-7} \text{ W·m}^{-2}$$

Relación entre la intensidad y la presión máxima de la onda sonora

$$I = \frac{p_m^2}{2\rho \cdot c} \qquad (p_m)_2 = \sqrt{2\rho \cdot c \cdot I_2} = \sqrt{2 \cdot 1.27 \cdot 340 \cdot 7.91 \cdot 10^{-7}} = 2.61 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$$

En una función senoidal la relación entre valor máximo y valor *rms* es

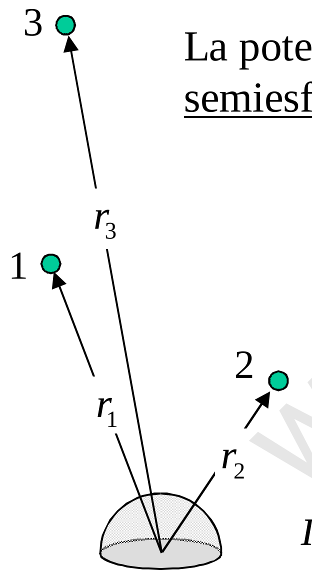
$$p_{rms} = \frac{p_m}{\sqrt{2}} = \frac{2.61 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}}{\sqrt{2}} = 1.85 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$$

PROBLEMA 10. Un altavoz de forma semiesférica se ajusta para un nivel de intensidad de 40 dB a 10 m de distancia. (a) ¿Cuál es la intensidad en W·m^{-2} a esa distancia? (b) ¿Cuál es el nivel de intensidad a 2.5 m de distancia? (c) Suponiendo que el altavoz semiesférico es una fuente isótropa de sonido, ¿cuál es su potencia? (d) ¿Cuál es la presión *rms* a 20 m de distancia?
Densidad del aire 1.29 kg.m^{-3}; velocidad del sonido 344 m/s. Umbral de percepción de intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}.

A r_1 = 10 m de distancia (punto 1) $\quad L_{I1} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 40\text{ dB} \quad I_1 = 10^{-12} \cdot 10^4 = 10^{-8}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$

Intensidad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente, por tanto para r_2 = 2.5 m la intensidad es $\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

$$I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 10^{-8} \frac{10^2}{2.5^2} = 1.6 \cdot 10^{-7}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2} \qquad L_{I2} = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{1.6\cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 52\text{ dB}$$



La potencia emitida por el altavoz se distribuye uniformemente sobre una superficie semiesférica. Por lo tanto, tomando el dato de I_1 y r_1 tenemos que

$$I_1 = \frac{\dot{W}}{2\pi r_1^2} \qquad \dot{W} = I_1 \cdot 2\pi r_1^2 \qquad \dot{W} = 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 10^2 = 6.28 \cdot 10^{-6}\text{ W}$$

Para calcular la presión *rms* a 20 m hallamos primero la intensidad de la onda

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_3^2} \qquad I_3 = I_1 \frac{r_1^2}{r_3^2} = 10^{-8} \frac{10^2}{20^2} = 2.5 \cdot 10^{-7}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$$

$$I = p_{rms}^2 / (\rho \cdot c) \qquad p_{rms} = \sqrt{I \cdot \rho \cdot c} = \sqrt{2.5\cdot 10^{-7} \cdot 1.29 \cdot 344} = 1.05 \cdot 10^{-2}\text{ Pa}$$

PROBLEMA 11. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda viene dada por:

$$y = 0.06 \sin\left(0.40\pi\ x + 50\pi\ t\right) \quad \text{(Unidades S.I.)}$$

Calcular:

a) La frecuencia, el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

b) La velocidad transversal en un punto cualquiera de la cuerda

c) Admitiendo que esta onda se propaga a lo largo de una cuerda fija por ambos extremos, ¿cuál será la ecuación de la onda estacionaria resultante de la interferencia de la onda dada con la onda reflejada en el otro extremo y que se propaga en sentido contrario?.

Ayuda

$$\sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

d) La distancia entre dos vientres consecutivos de la onda estacionaria

---

a) Se trata de una onda viajera en el sentido negativo del eje X $\quad \omega = 50\pi$ rad/s $\quad k = 0.40\pi$ m^{-1}

$$\omega = 2\pi\ f = 50\pi \text{ rad/s} \rightarrow f = \omega/2\pi = 25\,\text{Hz} \rightarrow T = 1/f = 0.04\,\text{s}$$

$$k = 2\pi/\lambda = 0.40\pi \ \text{m}^{-1} \rightarrow \lambda = 2\pi/0.40\pi = 5\,\text{m}$$

Velocidad de propagación $\quad c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{50\pi}{0.40\pi} = 125\,\text{m/s}$

b) La velocidad transversal en un punto cualquiera de la cuerda.

$$\frac{d\ y(x,t)}{dt} = 0.05 \cdot 50\pi \cos\left(0.40\pi\ x + 50\pi\ t\right) = 2.5\pi \cos\left(0.40\pi\ x + 50\pi\ t\right) \quad \text{(m/s)}$$

PROBLEMA 11 (continuación)

c) Admitiendo que esta onda se propaga a lo largo de una cuerda fija por ambos extremos, ¿cuál será la ecuación de la onda estacionaria resultante de la interferencia de la onda dada con la onda reflejada en el otro extremo y que se propaga en sentido contrario?.

Ayuda

$$\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

d) La distancia entre dos vientres consecutivos de la onda estacionaria

---

c) La onda que se propaga en sentido contrario es $y_2(x,t) = -0.05\sin(k\,x - \omega\,t)$ ← Se invierte la fase de la onda reflejada

$k = 0.40\pi\ \text{m}^{-1}$ $\quad \omega = 50\pi$ rad/s

La superposición de las dos, llamando $y_1(x,t)$ a la primera, es:

$$y_1(x,t) = 0.05\sin(k\,x + \omega\,t) = 0.05\sin k\,x\cos\omega\,t + 0.05\cos k\,x\sin\omega\,t$$

$$y_2(x,t) = -0.05\sin(k\,x - \omega\,t) = -0.05\sin k\,x\cos\omega\,t + 0.05\cos k\,x\sin\omega\,t$$

Suma: $y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0.10\cos k\,x \cdot \sin\omega\,t$

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0.10\cos(0.40\pi\,x)\cdot\sin(50\pi\,t) \longleftarrow \text{Onda estacionaria}$$

<u>Procedimiento alternativo</u>: usando la relación trigonométrica $\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$y_1(x,t) = 0.05\sin(k\,x + \omega\,t)$ $\quad A = k\,x + \omega\,t$ $\quad A - B = 2\omega\,t$

$y_2(x,t) = -0.05\sin(k\,x - \omega\,t)$ $\quad B = k\,x - \omega\,t$ $\quad A + B = 2k\,x$

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0.05\sin(k\,x + \omega\,t) - 0.05\sin(k\,x - \omega\,t) = -0.10\cos k\,x \cdot \sin\omega\,t$$

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0.10\cos(0.40\pi\,x)\cdot\sin(50\pi\,t)$$

d) La distancia entre dos vientres consecutivos de la onda estacionaria es igual que la distancia entre dos nodos consecutivos (puntos donde la amplitud es nula)

Hay un nodo si $\cos(0.40\pi\,x) = 0 \rightarrow 0.40\pi\,x = (2n+1)\pi/2$ (n entero)

Posiciones de los nodos $x_n = \dfrac{2n+1}{0.80}$ $\quad$ Cuando $n = 0 \rightarrow$ $x_0 = 1.25\ \text{m}$ $\quad$ Cuando $n = 1 \rightarrow$ $x_1 = 3.75\ \text{m}$

Distancia entre vientres = distancia entre nodos = $x_1 - x_0 = 2.5\ \text{m}$

(Véase que es la mitad de la longitud de onda de las ondas que interfieren)

PROBLEMA 12

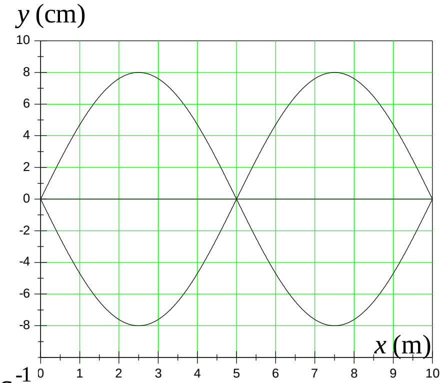
La ecuación del segundo armónico de una onda estacionaria en una cuerda de 10 m de longitud sometida a una tensión de 50 N está dada por

$$y(x,t) = 8\sin(0.2\pi\, x)\cdot\sin(20\pi\, t) \qquad x \text{ en m}, \;\; y \text{ en cm}, \;\; t \text{ en s}$$

a) Determinar la frecuencia y velocidad de propagación de las ondas viajeras cuya interferencia produce la onda estacionaria en esta cuerda y calcular la densidad lineal de masa.

b) Escribir la ecuación de onda del término fundamental. Hallar la máxima velocidad de vibración de un punto de la cuerda en este modo, suponiendo que la amplitud máxima es igual que la del segundo armónico.

c) Determinar las posiciones de los nodos del cuarto armónico.



a) Parámetros de la onda estacionaria

$$k_2 = 0.2\pi \;\; \text{m}^{-1} \qquad \omega_2 = 20\pi \;\; \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10 \;\; \text{m} \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10 \;\; \text{Hz}$$

$$v = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{20\pi}{0.2\pi} = 100 \;\; \text{m/s} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \mu = \frac{T}{v^2} = \frac{50}{10^4} = 5\cdot 10^{-3} \;\; \text{kg/m}$$

b) Las frecuencias de todos los armónicos son múltiplos enteros del término fundamental $f_n = n\cdot f_1 \;\; \Rightarrow \;\; \omega_1 = \dfrac{\omega_2}{2} = 10\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Longitud de onda: $L = n\dfrac{\lambda_n}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \dfrac{2L}{n} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \dfrac{2L}{1} = 20 \text{ m} \;\Rightarrow\; k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi/20 = 0.1\pi \;\; \text{m}^{-1}$

$$y_1(x,t) = 8\sin(0.1\pi\, x)\cdot\sin(10\pi\, t) \quad x \text{ en m}, y \text{ en cm}, t \text{ en s} \qquad v_{max} = \dot{y}_1(x,t)\big]_{max} = 80\pi \text{ cm/s}$$

c) Ecuación 4º armónico $\quad \lambda_4 = \dfrac{2L}{4} = 5 \text{ m} \qquad k_4 = \dfrac{2\pi}{\lambda_4} = \dfrac{2\pi}{5} = 0.4\pi \;\; \text{m}^{-1}$

$$\omega_4 = 4\omega_1 = 40\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$y_4(x,t) = 8\sin(0.4\pi\, x)\cdot\sin(40\pi\, t)$$

x en m, y en cm, t en s

Hay un nodo para cada valor x que verifica

$$\sin(0.4\pi\, x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2.5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 7.5 \quad x_5 = 10 \quad \text{(m)}$$