PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE Nº 4 .- MOVIMIENTO CIRCULAR

Problema 1.- Un disco gira a 33,5 r.p.m. Determinar:

a) la velocidad angular.
b) la aceleración centrípeta
c) la velocidad tangencial de un punto situado a 5 cm del centro
d) el tiempo que tardará en girar 20 revoluciones

Solución:

a) La velocidad angular debe ser expresada en rad/s.
Como sabemos que 1 rev = 2.π rad y 1 min = 60 s;

$$\varpi = 33{,}5\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}.\left(\frac{2.\pi.\text{rad}}{1\text{rev}}\right)\left(\frac{1\,\text{min}}{60\text{s}}\right) = 3{,}51\,\text{rad/s}$$

b) $a_c = \omega^2 . R = (\ 3{,}51\ \text{rad/s})^2 .\ 5\ \text{cm} = 61{,}60\ \text{cm/s}^2$

c) El módulo de la velocidad tangencial se mantiene constante, pero su dirección no. La dirección es tangente a la trayectoria.

$$v_t = \omega . R = 3{,}51\ \text{rad/s} .\ 5\ \text{cm} = 17{,}55\ \text{cm/s}$$

d) Como $\omega =$ cte. entonces : $\varpi = \dfrac{\theta}{t} \Rightarrow t = \dfrac{\theta}{\varpi} = \dfrac{20\text{rev}}{3{,}51\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}}.2.\pi.\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 35{,}78\text{s}$

Problema 2.-

La Tierra tiene un radio $r = 6{,}35 .\ 10^6$ m y rota alrededor de su eje con un periodo de 24 hs. Encontrar:

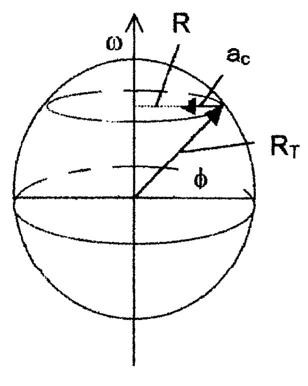
a) la velocidad angular
b) La velocidad y aceleración lineales, de un punto de su superficie, en función de la latitud.

Solución:

a) Siendo $\varpi = \dfrac{2.\pi}{T} = \dfrac{2.\pi}{24\text{h}}.\left(\dfrac{1\text{h}}{3600\text{s}}\right) = \dfrac{2.\pi.\text{rad}}{86400\text{s}} = 7{,}292.10^{-5}\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

b) Utilizando consideraciones trigonométricas , el radio de la trayectoria que describe un punto cualquiera de la superficie de la Tierra, puede expresarse en función del radio de la Tierra y la latitud del punto, como sigue:

$R = R_T .\cos\phi$



b) La velocidad lineal será tangencial:

$v_t = \omega . R = \omega . R_T . \cos\phi =$

$=(\ 7{,}272.\ 10^{-5}\ \text{rad / s}).(6{,}35\ .10^6\ \text{m}.\ \cos\phi\ ) =$

$= (461{,}772\ \cos\phi\ )\ \text{m / s}$

La dirección es tangente a la trayectoria y el sentido el mismo que $\vec{\varpi} \wedge \vec{R}_T$ (en esta figura es perpendicular al plano del papel y entrante) de oeste a este.

La aceleración lineal es centrípeta:

$a_c = \omega^2 . R = (7{,}272.\ 10^{-5}\ s^{-1})^2 . (6{,}35 .\ 10^6\ m.\ \cos\phi) = (0{,}03358.\ \cos\phi)\ m / s^2$

Problema 3.-
Hallar la velocidad angular de una rueda de 25 cm de radio para que la velocidad lineal de un punto de la periferia sea de 400 m/min. Expresar el resultado en rad/s y en r.p.m.

Solución:

$$\varpi = \frac{v_t}{R} = \frac{400\dfrac{m}{min}}{0{,}25m} = 1600\frac{rad}{min}.\left(\frac{1min}{60s}\right) = 26{,}67\frac{rad}{s}$$

$$\varpi = 26{,}67\frac{rad}{s} = 26{,}67\frac{rad}{s}.\left(\frac{1rev}{2.\pi rad}\right)\left(\frac{60s}{1min}\right) = 254{,}68 r.p.m.$$

Problema 4.-
Un motor eléctrico tarda 12 segundos en alcanzar su velocidad de régimen de 2400 r.p.m. partiendo del reposo. Determinar:
a) la aceleración angular, supuesta constante.
b) la velocidad angular a los 10 segundos.
c) el periodo y la frecuencia a los 10 segundos

Solución:

De acuerdo con los datos: $\varpi = 2400 r.p.m. = \left(\frac{2400.2.\pi}{60}\right)\frac{rad}{s} = 251{,}33\frac{rad}{s}$; y $\omega_0 = 0$

a) $$\alpha = \frac{\Delta\varpi}{\Delta t} = \frac{\varpi - \varpi_0}{t} = \frac{251{,}33\dfrac{rad}{s} - 0\dfrac{rad}{s}}{12s} = 20{,}94\frac{rad}{s^2}$$

b) $$\varpi = \varpi_0 + \alpha.t = 0\frac{rad}{s} + 20{,}94\frac{rad}{s}.10s = 209{,}4\frac{rad}{s}$$

c) Sabiendo que $$\varpi = 2.\pi.f \Rightarrow f = \frac{\varpi}{2.\pi} = \frac{209{,}4\dfrac{rad}{s}}{2.\pi.rad} = 33{,}33.s^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{33{,}33s^{-1}} = 0{,}03.s$$

Problema 5.-

Una rueda que gira a razón de 120 r.p.m. incrementa uniformemente su velocidad hasta 660 r.p.m. en 6 segundos. Calcular:
a) la aceleración angular en rev/s^2.
b) la aceleración normal a los 6 segundos
c) la aceleración tangencial en un punto situado a 80 cm del eje.
d) la aceleración total de ese punto a los 6 segundos
e) la cantidad de vueltas que dio la rueda en los 6 segundos
f) realizar un gráfico esquematizando cada aceleración

Solución:

$$\varpi_0 = 120\frac{rev}{min} = \frac{120rev}{60s} = 2\frac{rev}{s} \quad ; \quad \varpi = 660\frac{rev}{min} = \frac{660rev}{60s} = 11\frac{rev}{s}$$

(estrictamente estos valores corresponden a frecuencia angular)

a) Por definición: $\alpha = \dfrac{\Delta\varpi}{\Delta t} = \dfrac{\varpi - \varpi_0}{t} = \dfrac{\left(11\dfrac{rev}{s} - 2\dfrac{rev}{s}\right)}{6s} = 1{,}5\dfrac{rev}{s^2}$

b) La aceleración normal o centrípeta depende de la velocidad angular instantánea y vale:

$$a_c = \varpi^2.R = (\varpi_0 + \alpha.t)^2.R = (2 + 1{,}5.6)^2\,\frac{rev^2}{s^2}.\left(\frac{2.\pi.rad}{rev}\right)^2.80cm = 382151{,}08\,\frac{cm}{s^2}$$

(es necesario pasar a radianes las revoluciones para dimensionar correctamente)

c) La aceleración tangencial es constante

$$a_t = \alpha..R = 1{,}5\,\frac{rev}{s^2}.\left(\frac{2.\pi.rad}{1rev}\right).80cm = 753{,}98\,\frac{cm}{s^2}$$

d) La aceleración total en el punto a los 6 segundos será:

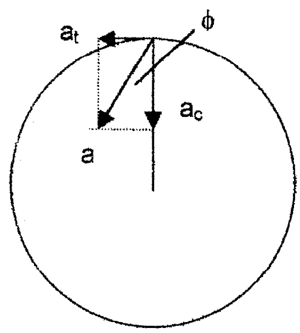
$$a = \sqrt{a_c^2 - a_t^2} = \sqrt{\left(382151{,}08\,\frac{cm}{s^2}\right)^2 + \left(753{,}98\,\frac{cm}{s^2}\right)^2} = 382151{,}82\,\frac{cm}{s^2}$$

la dirección estará dada por: $\phi = arc.tg\dfrac{a_t}{a_c} = arc.tg\dfrac{753{,}98\,\dfrac{cm}{s^2}}{382151{,}08\,\dfrac{cm}{s^2}} = 0°06'47''$

e) La cantidad de vueltas se relaciona con el ángulo girado.

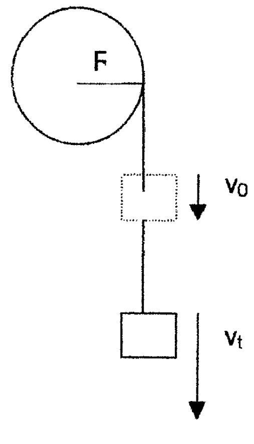
$$\theta = \theta_0 + \omega.t + \tfrac{1}{2}.\alpha.t^2 = 2\,\frac{rev}{s}.6s + \tfrac{1}{2}.1{,}5\,\frac{rev}{s^2}.(6s)^2 = 39rev$$

e) El esquema pedido es el siguiente:



Problema 6.-

Un disco de radio R = 6,3 cm rota alrededor de un eje horizontal. En su periferia está arrollada una cuerda de la que pende un cuerpo que desciende por la acción de la gravedad. Cuando t = 0 la velocidad del cuerpo es de 0,04 m/s y dos segundos después el cuerpo ha descendido 0,2 m. Encontrar las aceleraciones tangencial y normal de un punto del borde del disco y la aceleración total a los 0,5 s.



Solución:

El cuerpo desciende con un movimiento uniformemente acelerado. La aceleración que posee es igual a la aceleración tangencial.
En un movimiento uniformemente acelerado,

$$x = v_0.t + \frac{1}{2}.a.t^2 \Rightarrow a_t = a = \frac{2.(x - v_0.t)}{t^2} = \frac{2.\left(0{,}2m - 0{,}04\,\dfrac{m}{s}.2s\right)}{(2s)^2} = 0{,}06\,\frac{m}{s^2}$$

La aceleración normal se puede calcular con la expresión $a_n = \frac{v_t^2}{R}$ en consecuencia se debe hallar antes el valor de v_t en función del tiempo dado:

$$v_t = v_0 + a.t = 0{,}04\frac{m}{s} + 0{,}06\frac{m}{s}.0{,}5s = 0{,}07\frac{m}{s}$$ por lo tanto:

$$a_n = \frac{\left(0{,}07\frac{m}{s}\right)^2}{0{,}063m} = 0{,}078\frac{m}{s^2}$$

La aceleración total valdrá: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(0{,}06\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0{,}078\frac{m}{s^2}\right)^2} = 0{,}098\frac{m}{s^2}$

El ángulo que forma la aceleración total con el radio en el punto considerado es:

$$\phi = arc.tg\frac{a_t}{a_n} = arc.tg\frac{0{,}06\frac{m}{s^2}}{0{,}078\frac{m}{s^2}} = 37°34'06{,}9''$$

Problema 7.-

Una partícula se está moviendo en un círculo, de acuerdo a la ley: $\theta = 3.t^2 + 2.t$ donde θ se mide en radianes y t en segundos. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular a los 4 segundos.

Solución:

Por definición: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 6.t + 2$

Para $t = 4$ s ; $\omega = (6.4 + 2)$ rad/s $= 26$ rad/s

Por definición $\alpha = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(6.t + 2) = 6$

La aceleración angular no depende, en este caso del tiempo. Es constante y por lo tanto para 4 segundos vale 6 rad/s^2.

MOVIMIENTO RELATIVO

Problema 8.-

Un aeroplano A vuela hacia el norte a 300 km/h con respecto a la Tierra. Simultáneamente otro avión B vuela en dirección norte 60° oeste (N 60° O) a 200 km/h con respecto a la Tierra. Encontrar la velocidad de A con respecto a B y la de B con respecto a A.

Solución:

Por definición la velocidad relativa de dos cuerpos se obtiene restando sus velocidades respecto al observador terrestre. En general: $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

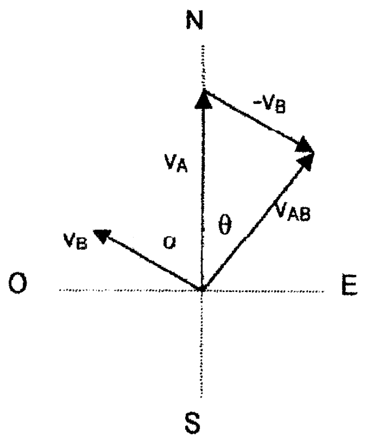
Para el cálculo del módulo de la velocidad relativa, se aplica el teorema del coseno

$$v_{1,2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2.v_1.v_2.\cos\alpha}$$ α = ángulo que forman v_1 y v_2

Y para obtener la dirección de $v_{1,2}$ se aplica el teorema del seno

$$\frac{v_2}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{v_1}{\operatorname{sen}\theta} \therefore \theta = \operatorname{arc.sen}\left(\frac{v_2.\operatorname{sen}\alpha}{v_1}\right)$$

Realizando el esquema representativo de las velocidades del aeroplano A y el avión B



$$\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2.v_A.v_B.\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{300^2 + 200^2 - 2.300.200.\cos 60^\circ} = 264{,}57\,\frac{km}{h}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_B.\operatorname{sen}60^\circ}{v_{AB}} = \frac{200.\operatorname{sen}60^\circ}{264{,}57} = 0{,}6546 \therefore \theta = 40^\circ 53' 40''$$

Conclusión: Para el piloto del avión B, el aeroplano A se desplaza a 264,57 km/h, en la dirección N 40°53´40" E. (Noreste).

De acuerdo al álgebra vectorial, podemos deducir que $\vec{v}_{A,B} = -\vec{v}_{B,A}$

Luego, para el piloto del aeroplano A, el avión B se desplaza a 264,57 km/h pero en la dirección opuesta es decir S 40°53´40" O (Suroeste)

Problema 9.-

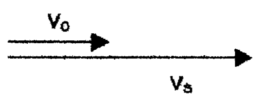
La velocidad del sonido en el aire quieto es de 358 m/s (a 25 °C). Encontrar la velocidad medida por un observador que se mueve a 90 km/h.

a) alejándose de la fuente de sonido.
b) acercándose a la fuente.
c) perpendicular a la dirección de propagación en el aire.

Solución:

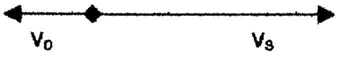
Por definición: $\vec{v}_r = \vec{v}_{so} = \vec{v}_s - \vec{v}_o$ (*)
donde $\vec{v}_r$ = velocidad relativa
$\vec{v}_{so}$ = velocidad del sonido = 358 m/s. Siempre se considera sentido positivo.
$\vec{v}_o$ = velocidad del observador = 90 km/h = 25 m/s.

a) Como el observador se aleja de la fuente, ambas velocidades tienen la misma dirección y sentido.



Aplicando (*) 358 m/s - 25 m/s = 333 m/s

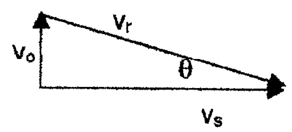
b) Como el observador se acerca a la fuente, las velocidades tienen la misma dirección pero sentido contrario.



Usando nuevamente (*): 358 m/s - (- 25 m/s) = 383 m/s

c) En éste caso las direcciones son perpendiculares. Para hallar el módulo de la velocidad relativa y su dirección, hay que seguir el procedimiento empleado en el problema anterior,

$$v_r = \sqrt{v_s^2 + v_o^2} = \sqrt{(358m/s)^2 + (25m/s)^2} = 358{,}87m/s$$



$$tg\theta = \frac{v_o}{v_s} = \frac{25}{358} = 0{,}06983 \Rightarrow \theta = 3°59'40{,}6''$$

respecto de la dirección de propagación del sonido.
o sea 86°0'19,4" respecto del observador

Problema 10.-
Una partícula con una velocidad de 500 m/s con respecto a la Tierra, se dirige hacia el Sur a 50° de latitud Norte. Calcular:
a) la aceleración centrífuga
b) la aceleración de Coriolis
c) hacer un gráfico representativo

Solución:

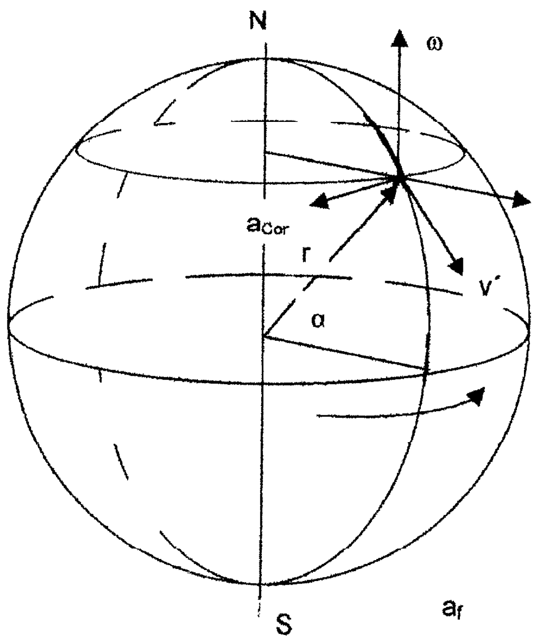
Sabiendo que el radio de la Tierra es de $6{,}35.10^6$ m y su aceleración angular es de $7{,}29.10^{-5}$ rad/s
a) La aceleración centrífuga vale:

$$a_f = -\omega^2.r.\cos\alpha = -(7{,}29.10^{-5}rad/s)^2.6{,}35.10^6m.\cos 50° = -2{,}169.10^{-2}m/s$$

b) la aceleración de Coriolis, siendo 130° el ángulo que forman los vectores ω y v'

será: $$\vec{a}_{Cor} = -2.\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2.\left(7{,}27.10^{-5}\frac{rad}{s}\right).500\frac{m}{s}.sen130° = 0{,}05569\frac{m}{s^2}$$

c) Gráfico representativo.

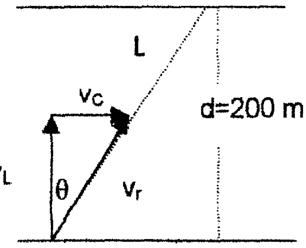


Problema 11.-

Una lancha cruza el río de 200 m de ancho. La velocidad de éste es de 5 m/s., mientras que la lancha puede desarrollar una velocidad máxima de 10 m/s en aguas quietas.
a) Calcular la velocidad de la lancha respecto de la costa y cuánto tardará en cruzar el río cuando se apunta la proa perpendicular a la corriente del río.
b) ¿Cuánto tardará en cruzar el río si no hubiera corriente?
c) En qué dirección debe apuntarse la proa para alcanzar la orilla opuesta en un punto justo enfrente del punto de partida?
d) ¿Cuánto tiempo demorará para el cruce en el caso anterior?

Solución:

a) Al intentar el cruce apuntando la proa perpendicular a la corriente del río, las velocidades se superponen del modo que indica la figura.



El módulo es:

$$v_r = \sqrt{v_L^2 + v_C^2} = \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 + \left(5\frac{m}{s}\right)^2} = 11{,}18\frac{m}{s}$$

la dirección: $\theta = \text{arctg}\frac{v_C}{v_L} = \text{arc.tg}\frac{5}{10} = 26°33'54{,}18''$ con respecto a la lancha. Con respecto a la orilla el ángulo es de 63°26´05,82"

La lancha se desplaza en éste caso, siguiendo la trayectoria que forma un ángulo θ, con la distancia entre orillas. El desplazamiento vale:

$$L = \frac{200m}{\cos\theta} = \frac{200m,}{\cos 26°33'54{,}18''} = 223{,}6m$$

Este trayecto L, la lancha lo recorre con velocidad 11,18 m/s y tarda un tiempo

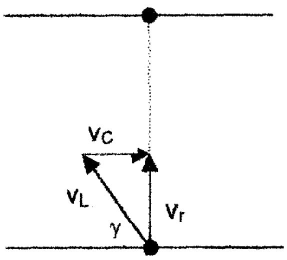
$$t = \frac{L}{v_r} = \frac{223{,}6m}{11{,}18\,m/s} = 20s.$$

Si no hubiera corriente, la lancha se desplazaría con la velocidad propia 10 m/s. y tardaría en cruzar un tiempo

$$t = \frac{d}{v_L} = \frac{200m}{10\,m/s} = 20s$$

c) Para alcanzar la orilla opuesta en el punto situado justo enfrente del punto de partida, tendrá que hacer el cruce apuntando la proa de la lancha hacia aguas arriba, formando un ángulo tal que la velocidad relativa, resultante de componer la velocidad de la lancha y la del río, resulte perpendicular a la orilla. De acuerdo con el gráfico:

$$\gamma = \text{arc.cos}\frac{5}{10} = 60°$$



d) Para determinar el tiempo, en éste caso es necesario hallar previamente el módulo de la velocidad relativa.

$$v_r = \sqrt{v_L^2 - v_C^2} = \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 - \left(5\frac{m}{s}\right)^2} = 866\frac{m}{s}$$

Por lo tanto $t = \frac{d}{v_r} = \frac{200m}{8{,}66\,m/s} = 23s.$