RELATIVIDAD ESPECIAL: EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Una nave interestelar parte hacia la estrella Siria (α del Can Mayor), situada a 8,7 años luz, viajando a 0,85 c. Halla el tiempo que tarda en el viaje de ida y vuelta según:

a) Los relojes terrestres.

b) Los relojes de a bordo.

a) $\Delta t = \dfrac{2\cdot d}{v} = \dfrac{2\cdot 8'7\cdot c}{0'85\cdot c} = 20'47$ años

b) $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\gamma} = \dfrac{\Delta t}{1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{20'47}{1/\sqrt{1-\frac{(0'85\cdot c)^2}{c^2}}} = \dfrac{20'47}{1'898} = 10'78$ años

b) Otra forma de resolverlo: $d' = \dfrac{d}{\gamma} = \dfrac{8'7\text{ año luz}}{1'898} = 4'58\text{ año luz}$. Luego: $\Delta t' = 2\cdot\dfrac{4'58\text{ año luz}}{0'85\cdot c} = 10'78$ años

2.- Un astronauta de 35 años de edad emprende una misión interestelar a bordo de una nave que tiene previsto viajar a una velocidad de 0,9 c . En la Tierra deja un hijo de 5 años. ¿Cuánto tiempo habrá de durar la misión para que el astronauta tenga, a su regreso, la misma edad que su hijo? Calcula dicho tiempo en los dos sistemas de referencia.

Partimos de la siguiente igualdad: $35 + \Delta t' = 5 + \Delta t \Rightarrow \{\Delta t = \gamma\cdot\Delta t'\} \Rightarrow 35 + \Delta t' = 5 + \gamma\cdot\Delta t' \Rightarrow 30 = \Delta t'(\gamma - 1)$

Calculamos el factor gamma : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{(0'9\cdot c)^2}{c^2}}} = 2'294$

$30 = \Delta t'(\gamma-1) \Rightarrow \Delta t' = \dfrac{30}{(\gamma-1)} = \dfrac{30}{(2'294-1)} = 23'18$ años

$\Delta t = \gamma\cdot\Delta t' = 2'294\cdot 23'18 = 53'18$ años

3.- La vida media de un pion que se mueve a gran velocidad resulta ser de 60 ns, mientras que su vida media en reposo es de 26 ns. Calcula:

c) La velocidad a la que se mueve el pion.

d) La distancia que recorre el pion en el sistema de referencia terrestre y en su propio sistema.

$\Delta t = 60$ ns y $\Delta t' = 26$ ns

a) $\Delta t = \gamma\cdot\Delta t' \Rightarrow 60 = \gamma\cdot 26 \Rightarrow \gamma = 2'307$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2'307 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{2'307^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{2'307^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{2'307^2}} = 0'90 \Rightarrow v = 0'90\cdot c$$

b) $d = v\cdot\Delta t = 0'9\cdot 3\cdot 10^8\cdot 60\cdot 10^{-9} = 16'20\,\text{m}$

$d' = v\cdot\Delta t' = 0'9\cdot 3\cdot 10^8\cdot 26\cdot 10^{-9} = 7'02\,\text{m}$

4.- María y Ana son dos gemelas que tienen 30 años de edad. María emprende un viaje de ida y vuelta a la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz de la Tierra, a una velocidad de 0,95 c . ¿Qué edades tendrán las dos hermanas cuando María regrese a la Tierra?

$$\text{Calculamos el factor gamma}: \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0'95\cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0'312} = 3'20$$

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\cdot 8'7\cdot c}{0'95\cdot c} = 18'316 \text{ años} \Rightarrow \text{Edad para Ana: } 30+18,316 = 48,32 \text{ años}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{18'316}{3,20} = 5'724 \text{ años} \Rightarrow \text{Edad para María: } 30+5,724 = 35,72 \text{ años}$$

5.- Quizás en un futuro podamos hablar de "una nave fabricada en la Tierra, de 50 m de longitud, de la que los habitantes de una colonia del planeta Marte dijeron que medía 49,9 m cuando pasó por delante de ellos". Suponiendo que el movimiento relativo de la nave respecto de los habitantes de la colonia era de traslación uniforme en la dirección y sentido del movimiento de éstos, ¿a qué velocidad viajaba la nave respecto de los habitantes de la colonia?

$$d = \gamma\cdot d' \Rightarrow d' = \frac{d}{\gamma} \Rightarrow d' = \frac{d}{1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow d' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot d$$

$$49'9 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot 50 \Rightarrow \left(\frac{49'9}{50}\right)^2 = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{49'9}{50}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-0'996 = 4\cdot 10^{-3} \Rightarrow v^2 = 4\cdot 10^{-3}\cdot c^2 \Rightarrow v = \sqrt{4\cdot 10^{-3}\cdot (3\cdot 10^8)^2} = 1'89\cdot 10^7\, m\cdot s^{-1}$$

6.- Un neutrón se mueve con una velocidad de 0,9 c. Sabiendo que la masa en reposo del neutrón es 1,675 10^{-27} kg, calcula:

e) La masa relativista.

f) El momento lineal.

$$\text{a) Calculamos el factor gamma}: \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0'9\cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'81}} = 2'294$$

$$m = \gamma\cdot m_o = 2,294\cdot 1'675\cdot 10^{-27} = 3'84\cdot 10^{-27}\,kg$$

$$p_{relativista} = m\cdot v = 3'84\cdot 10^{-27}\cdot 0'9\cdot 3\cdot 10^8 = 1'04\cdot 10^{-18}\,kg\cdot \frac{m}{s}$$

7.- Un haz de protones se acelera hasta alcanzar una energía de 900 MeV. Calcular la velocidad de dichas partículas (nota: la energía dada corresponde con la energía cinética).
$(m_p)_o$=1,673 10^{-27} kg; 1 eV=1,6 10^{-19} J

$$900\text{ MeV} = 900\text{ MeV}\cdot\frac{10^6\text{ eV}}{1\text{ MeV}}\cdot\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}} = 1'44\cdot10^{-10}\text{ J}\text{ ; } E_c = E_{total} - E_o \Rightarrow E_c = m\cdot c^2 - m_o\cdot c^2 = (m - m_o)\cdot c^2$$

$$1'44\cdot10^{-10} = (m - 1'673\cdot10^{-27})\cdot(3\cdot10^8)^2 \Rightarrow m = \frac{1'44\cdot10^{-10}}{(3\cdot10^8)^2} + 1'673\cdot10^{-27} = 3'273\cdot10^{-27}\text{ kg}$$

$$m = \gamma\cdot m_o \Rightarrow \gamma = \frac{m}{m_o} = \frac{3'273\cdot10^{-27}}{1'673\cdot10^{-27}} = 1'956$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{1'956^2}} = 0'8594 \Rightarrow v = 0'8594\cdot3\cdot10^8 = 2'578\cdot10^8\,\frac{m}{s}$$

8.- ¿A qué velocidad debe moverse una partícula relativista para que su energía total sea un 10% mayor que su energía en reposo? Expresa el resultado en función de la velocidad de la luz en el vacío.

$$E_{total} = E_o + \frac{10}{100}\cdot E_o = E_o + 0'1\cdot E_o = 1'1\cdot E_o$$

$$E_{total} = 1'1\cdot E_o \Rightarrow m\cdot c^2 = 1'1\cdot E_o \Rightarrow m\cdot c^2 = 1'1\cdot m_o\cdot c^2 \Rightarrow m = 1'1\cdot m_o$$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1'1\cdot m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1'1} \Rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = 0'909^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-0'909^2 = 0'174 \Rightarrow v = \sqrt{0'174\cdot c^2} = 0'42\cdot c$$

9.- Un protón tiene una energía en reposo de 938 MeV. Calcula la velocidad y el momento lineal cuando su energía resulte ser de 1450 MeV. (Nota: expresar el momento lineal de MeV/c).

$E_o = 938\,\text{MeV}$ y $E_{total} = 1450\,\text{MeV}$

$$E_{total} = \gamma\cdot m_o\cdot c^2 = \gamma\cdot E_o \Rightarrow \gamma = \frac{E_{total}}{E_o} = \frac{1450}{938} = 1'546$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{1'546^2}} = 0'76 \Rightarrow v = 0'76\cdot c$$

$$p_{relativista} = \gamma\cdot m_o\cdot v = 1'546\cdot m_o\cdot 0'76\cdot c = \frac{1'546\cdot m_o\cdot 0'76\cdot c^2}{c} = \frac{1'546\cdot 0'76\cdot m_o\cdot c^2}{c} = \frac{1'546\cdot 0'76\cdot 938}{c} = 1102'1\,\frac{\text{MeV}}{c}$$

10.- Un mesón π^o tiene una energía en reposo de 135 MeV y se mueve con una velocidad de 0,85 c. Determina:

g) Su energía total.

h) Su energía cinética.

i) Su momento lineal.

$$a)\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0'85\cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'85^2}} = 1'898$$

$$E_{total} = \gamma\cdot m_o\cdot c^2 = \gamma\cdot E_o = 1'898\cdot 135 = 256'27\ \text{MeV}$$

$$b)\ E_c = E_{total} - E_o = 256'27 - 135 = 121'27\ \text{MeV}$$

$$c)\ p = \gamma\cdot m_o\cdot v = \gamma\cdot m_o\cdot 0'85\cdot c = \frac{\gamma\cdot m_o\cdot 0'85\cdot c^2}{c} = \frac{\gamma\cdot 0'85\cdot E_o}{c} = \frac{1'898\cdot 0'85\cdot 135}{c} = 217'80\,\frac{\text{MeV}}{c}$$

11.- Un móvil A se desplaza con una velocidad de 0,9 c en la dirección positiva del eje X con respecto a un observador O. Otro móvil B se desplaza con una velocidad de 0,8 c con respecto a A, también en la dirección positiva del eje X. ¿Cuál es la velocidad de B con respecto a O?

Transformación de Lorentz de la velocidad: $v_x' = \dfrac{v_x - v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot v_x}$

Móvil "A" con velocidad 0,9 c respecto a "O": $v = 0'9\cdot c$

Móvil "B" con velocidad 0,8 c respecto a "A": $v_x' = 0'8\cdot c$

Velocidad del móvil "B" respecto a "O": $v_x =$ ¿?

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot v_x} \Rightarrow 0'8\cdot c = \frac{v_x - 0'9\cdot c}{1-\frac{0'9\cdot c}{c^2}\cdot v_x} \Rightarrow 0'8\cdot c - \frac{0'8\cdot c\cdot 0'9\cdot c}{c^2}\cdot v_x = v_x - 0'9\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'8\cdot c - 0'8\cdot 0'9\cdot v_x = v_x - 0'9\cdot c \Rightarrow 0'8\cdot c - 0'72\cdot v_x = v_x - 0'9\cdot c \Rightarrow 1'7\cdot c = 1'72\cdot v_x \Rightarrow v_x = \frac{1'7\cdot c}{1'72} = 0'988\cdot c$$

12.- Una nave espacial avanza en la dirección negativa del eje X con una velocidad de 0,9 c con respecto a la Tierra, mientras otra lo hace en la dirección positiva el eje X con la misma velocidad en relación con nuestro planeta. Determina:

j) La velocidad de una nave con respecto a la otra.

k) Esa velocidad, pero aplicando las transformaciones galileanas.

a) Nave espacial "A" con velocidad -0,9 c respecto a la Tierra: $v_x = -0'9\cdot c$

Nave espacial "B" con velocidad 0,9 c respecto a la Tierra: $v = 0'9\cdot c$

Velocidad de una nave (A) respecto a la otra (B): $v_x' =$ ¿?

(O´ es la nave espacial B)

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot v_x} = \frac{-0'9\cdot c - 0'9\cdot c}{1-\frac{0'9\cdot c}{c^2}\cdot(-0'9\cdot c)} = \frac{-2\cdot 0'9\cdot c}{1+\frac{0'9^2\cdot c^2}{c^2}} = \frac{-1'8\cdot c}{1'81} = -0'994\cdot c$$

b) $v_x' = v_x - v = -0'9\cdot c - 0'9\cdot c = -1'8\cdot c$