Ejercicios de Física

Cinemática

Juan C. Moreno-Marín, Antonio Hernandez D.F.I.S.T.S.
Escuela Politécnica - Universidad de Alicante

1. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas debajo de 20 km/h. Calcular:

a) ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?

b) ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?

c) ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

a) Como es $\overline{v} = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{s_{subidas} + s_{bajadas}}{t_{total}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 8km/h$

b) En este caso es $\overline{v} = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12.5km/h$

c) Y ahora es $\overline{v} = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = 10km/h$

2. Desde el balcón situado a 14.1m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

2. Desde el balcón situado a 14.1m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Tomamos como origen el punto de lanzamiento y sentido positivo hacia arriba:

ec gral: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

$$-14.1 = 10t - 9.81t^2$$

Solución: $t = -0.96s$

$\boxed{t = 3s}$

3. Se lanza un cuerpo hacia arriba verticalmente con una velocidad de 98 m/s, desde el tejado de un edificio de 100 m de altura. Determinar:

(a) La altura máxima que alcanza desde el suelo.

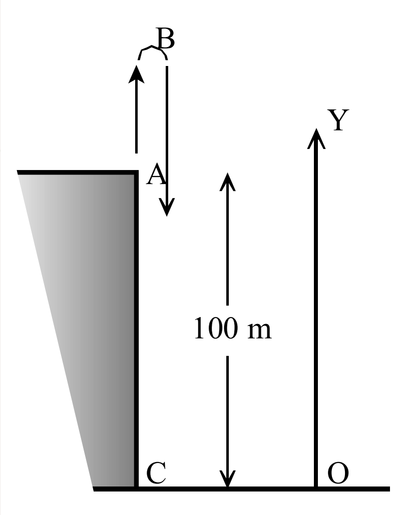
(b) El tiempo cuando pasa por el lugar de lanzamiento.

(c) La velocidad al llegar al suelo.

(d) El tiempo total transcurrido hasta llegar al suelo.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + at \\ e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} t_0 = 0 \\ y_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 98 - 9.8t \\ y = 100 + 98t - \frac{1}{2} 9.8 t^2 \end{array}\right\}$$



En la altura máxima el cuerpo se para, $v = 0$

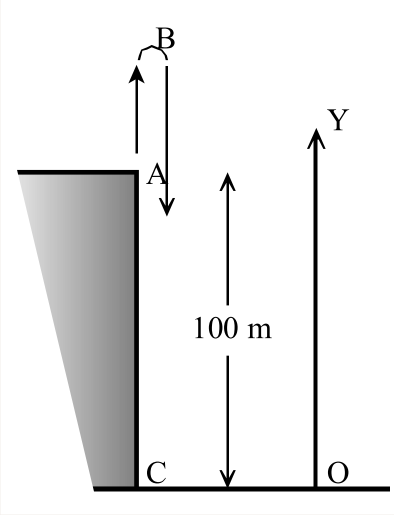
$$0 = 98 - 9.8t \quad \rightarrow \quad t = \frac{98}{9.8} = 10s$$

$$y = 100 + 98 \cdot 10 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 10^2 = 590m \quad \rightarrow \quad \boxed{h = 590m}$$

(b) En el movimiento de caída las ecuaciones son:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \begin{pmatrix} e_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{pmatrix} \rightarrow 100 = 100 + 98t - \frac{1}{2} 9.8 t^2 \rightarrow$$

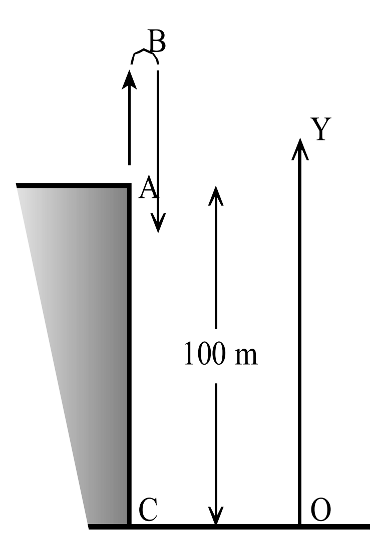
$$\rightarrow \quad t\left(98 - 4.9t\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ \boxed{t = 20s} \end{cases}$$



(c) Al llegar al suelo es:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \begin{pmatrix} e_0 = 100 \\ v_0 = 98 \end{pmatrix} \rightarrow -100 = 100 + 98t - \frac{1}{2}9.8t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{98 \pm \sqrt{98^2 + 4\cdot 4.9\cdot(-100)}}{9.8} = \rightarrow \begin{cases} t = -0.97s \\ \boxed{t = 20.97s} \end{cases}$$



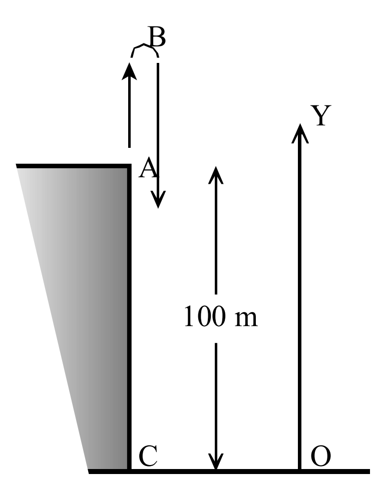
$$v = v_0 + at \rightarrow v = 98 - 9.8\cdot 20.97 = -107.5 m/s$$

$(hacia\ abajo)$

$$v = \boxed{-107.53\ m/s}$$

(d)

El tiempo total es: $t_{total} = \boxed{20.97\ s}$



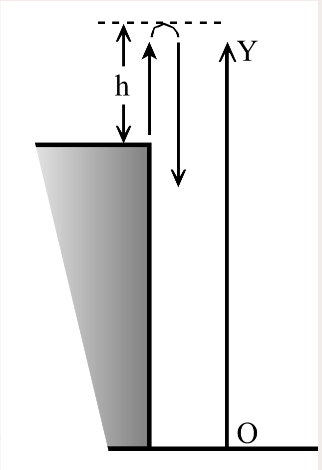
4. Desde lo alto de una torre se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento, calcular

(a) la posición y velocidad de la piedra al cabo de 1s y de 4s después de su salida.

(b) la velocidad cuando se encuentra a 8m por encima del punto de partida.

(c) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? Considérese $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

(a)



posición:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \quad (t = 1s) \rightarrow \quad y_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{\,2} = 15 \cdot 1 - \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2 = 10m$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \quad (t = 4s) \rightarrow \quad y_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^{\,2} = 15 \cdot 4 - \frac{1}{2} 10 \cdot 4^2 = -20m$$

(el signo – indica que la piedra está por debajo del origen)

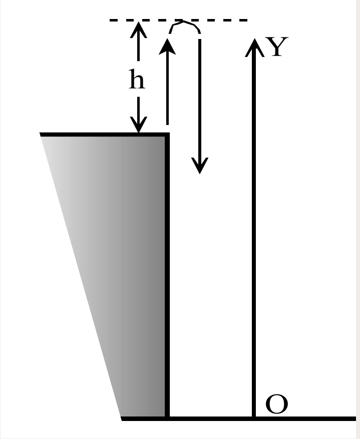
velocidad:

$$v = v_0 - gt; \quad (t = 1s) \rightarrow \quad v_1 = v_0 - g t_1 = 15 - 10 \cdot 1 = 5\, m/s$$

$$v = v_0 - gt; \quad (t = 4s) \rightarrow \quad v_2 = v_0 - g t_2 = 15 - 10 \cdot 4 = -25\, m/s$$

(el signo – indica que la piedra está cayendo)

(b) la velocidad cuando se encuentra a 8m por encima del punto de partida.



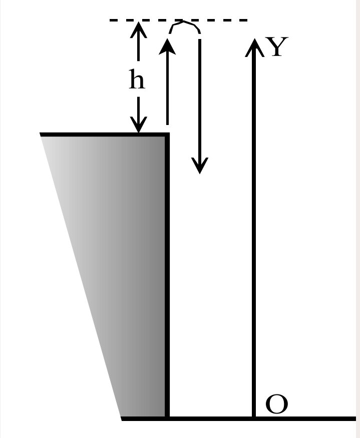
eliminando t :

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow t = \frac{v_0 - v}{g} \quad \rightarrow y = v_0\left(\frac{v_0 - v}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 - v}{g}\right)^2$$

$$gy = \frac{v_0^{\,2}}{2} - \frac{v^2}{2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^{\,2} - 2gy} \quad \rightarrow \quad (y = 8) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8} = \boxed{\pm 8.06\ m/s}$$

(c) Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto?



$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow \quad (y = 0) \quad \rightarrow 15t - \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} 0s \\ \boxed{3s} \end{cases}$$

5. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ley: $v = t^3 + 4t^2 + 2$.

Si $x = 4m$ cuando t =2s, encontrar el valor de x cuando t =3s. Encontrar también su aceleración.

5. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ley: $v = t^3 + 4t^2 + 2$.

Si $x = 4m$ cuando t =2s, encontrar el valor de x cuando t =3s. Encontrar también su aceleración.

Siendo $v = \dfrac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad dx = v \cdot dt \quad \rightarrow \quad x - x_0 = \int dx = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt =$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(t^3 + 4t^2 + 2 \right) \cdot dt = \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0{}^4}{4} - \frac{4t_0{}^3}{3} - 2t_0$$

$$x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0{}^4}{4} - \frac{4t_0{}^3}{3} - 2t_0$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0{}^4}{4} - \frac{4t_0{}^3}{3} - 2t_0}$$

Como es $t_0 = 2s \quad y \quad x_0 = 4m \quad \rightarrow \quad x(t) = \cancel{4} + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{\cancel{2^4}}{\cancel{4}} - \frac{42^3}{3} - 2\cdot 2$

$$\boxed{x(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{44}{3}}$$

Por lo tanto es $x(t = 3s) = \frac{81}{4} + \frac{4\cdot 27}{3} + 2\cdot 3 - \frac{44}{3} = \boxed{47.6m}$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t - \frac{t_0{}^4}{4} - \frac{4t_0{}^3}{3} - 2t_0}$$

La aceleración del cuerpo es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(t^3 + 4t^2 + 2\right)}{dt} = 3t^2 + 8t \quad \rightarrow \quad a\left(t = 3s\right) = 27 + 24 = \boxed{51\, m/s^2}$$

6. Un punto se mueve en el plano XY de tal manera que es $v_x = 4t^3 + 4t, \quad v_y = 4t.$

Si la posición es (1, 2) cuando es t=0, encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

6. Un punto se mueve en el plano XY de tal manera que es $v_x = 4t^3 + 4t, \quad v_y = 4t.$

Si la posición es (1, 2) cuando es t=0, encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

Posición: componente x

Siendo $v_x = \dfrac{dx}{dt} = 4t^3 + 4t \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left(4t^3 + 4t\right) dt$

$$\rightarrow \quad x = x_0 + t^4 + 2t^2 - t_0{}^4 - 2t_0{}^2$$

Sustituyendo $x_0 = 1$ cuando $t = 0\ s$

$$\rightarrow \quad x = 1 + t^4 + 2t^2 = \boxed{\left(t^2 + 1\right)^2}$$

Posición: componente y

Siendo $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 4t \rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} 4t\,dt$

$$\rightarrow \quad y = y_0 + 2t^2 - 2t_0^{\,2}$$

Sustituyendo $y_0 = 2$ cuando $t = 0\ s$

$$\rightarrow \quad y = 2 + 2t^2 = \boxed{2\left(t^2 + 1\right)}$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(t^2+1\right)^2 \\ y &= 2\left(t^2+1\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{y^2 = 4x}$$

ec. de la trayectoria

7. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones $x = pt \quad e \quad y = \frac{1}{2} pt^2$. Determinar:

(a) Velocidad y aceleración del móvil.

(b) Componentes tangencial y normal de la aceleración.

(c) Radio de curvatura.

7. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones $x = pt \quad e \quad y = \frac{1}{2}pt^2$. Determinar:

(a) Velocidad y aceleración del móvil.

(b) Componentes tangencial y normal de la aceleración.

(c) Radio de curvatura.

(a)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = p; \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = pt; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = p;$$

Luego $\rightarrow \boxed{\vec{v} = p\vec{i} + pt\,\vec{j}} \rightarrow \boxed{\vec{a} = p\,\vec{j}}$

(b)

$$a_T = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} \equiv \frac{dv}{dt} = \quad \left(v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = p\sqrt{1+t^2} \right) \quad = \boxed{\frac{pt}{\sqrt{1+t^2}}};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + p^2} = p;$$

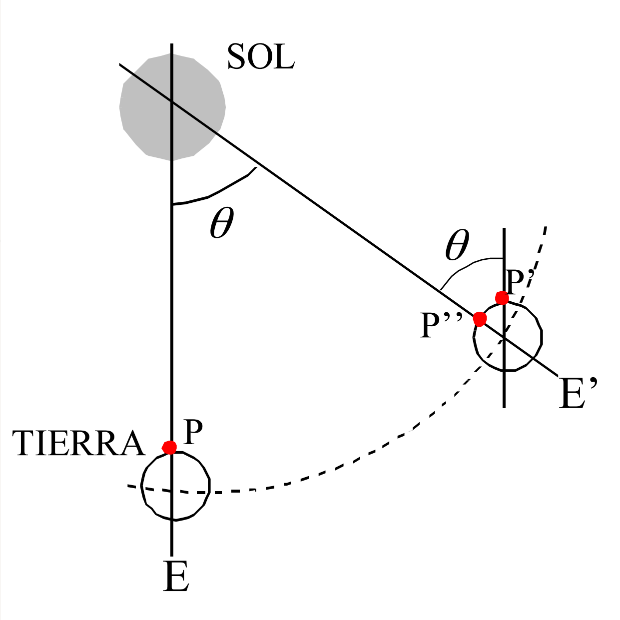
$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} \quad \rightarrow \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{p^2 - \frac{p^2 t^2}{1+t^2}} = \boxed{\frac{p}{\sqrt{1+t^2}}};$$

(c)

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{p}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{p^2\left(1+t^2\right)}{p}\sqrt{1+t^2} = \boxed{p\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

El radio de curvatura ρ depende del tiempo.

8. Encontrar la velocidad angular de la Tierra con respecto a su eje diametral.



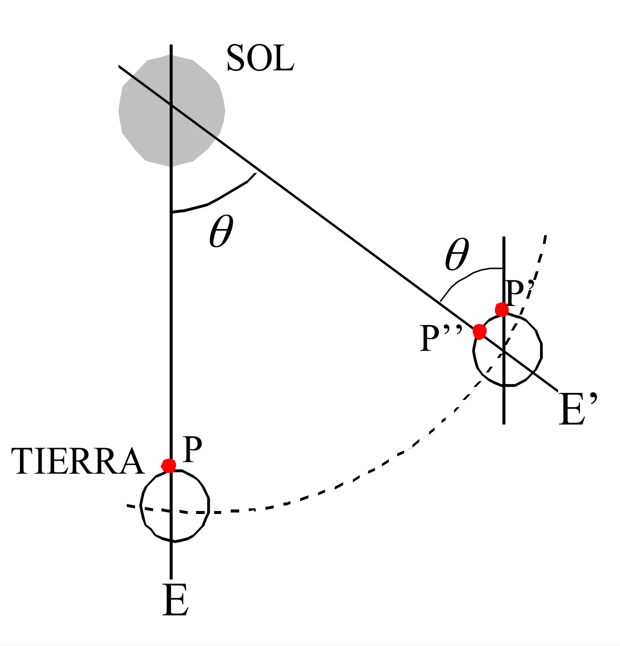
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad uniforme \rightarrow \omega = \frac{\theta}{t} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} \theta = 2\pi\ rad \\ t = 1\,dia = 86400\,s \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

pero este resultado no es completamente correcto.

Pero este resultado no es completamente correcto. Cuando la Tierra da una vuelta completa sobre su eje, está en P’ y para completar un dia hay que girar de P’ a P’’, falta todavía un ángulo θ.

En un dia recorrerá un ángulo $2\pi+\theta = 2\pi + (2\pi/365)$,



$$\omega = \frac{2\pi + \theta}{86400} = \frac{2\pi + \frac{2\pi}{365}}{86400} =$$

$$= \boxed{7.292 \cdot 10^{-5}\, rad / s}$$

9. Un volante gira en torno a su eje a razón de 3000 r.p.m. Un freno lo para en 20s.

(a) Calcular la aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas hasta que el volante se detiene.

(b) Supuesto que el volante tiene 20 cm de diámetro, calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

(a) Calcular la aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas hasta que el volante se detiene.

La velocidad angular es: $\omega = 3000 \cdot \dfrac{2\pi\, rad}{60\, s} = 100\pi\, rad/s$

Y la aceleración es:

$$\omega_f = \omega_0 - \alpha t \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega_0 - \omega_f}{t} = \frac{100\pi - 0}{20\, s} = \boxed{5\pi\, rad/s^2}$$

El desplazamiento angular resulta:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 100\pi \cdot 20 - \frac{1}{2} 5\pi \cdot 20^2 = 1000\pi\, rad$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = \boxed{500\, vueltas}$$

(b) calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

El desplazamiento angular es: $\varphi = n \cdot 2\pi = 100 \cdot 2\pi = 200\pi\, rad$

Calculamos el tiempo transcurrido:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 100\pi \cdot t - \frac{1}{2} 5\pi \cdot t^2 = 200\pi\, rad$$

$$\rightarrow \quad 2.5t^2 - 100t + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} 37.86s \\ \boxed{2.14s} \end{cases}$$

(b) calcular las aceleraciones tangencial y centrípeta de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

La aceleración tangencial es: $a_T = \alpha \cdot R = 5\pi \cdot 0.1 = 0.5\pi\, m/s^2$

La aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega_{100}{}^2 \cdot R = \left(100\pi - 5\pi \cdot 2.14\right)^2 \cdot 0.1 = 797.5\pi^2\, m/s^2$$

Y la aceleración resultante:

$$a = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2} = \sqrt{0.25\pi^2 + 797.5^2\pi^4} = \boxed{2505.4\pi\ m/s^2}$$

10. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de 1m de radio, dando 30 vueltas cada minuto. Calcular el periodo, la frecuencia, la velocidad angular, la velocidad tangencial, y la aceleración centrípeta.

11. Un vehículo parte del reposo en una via circular de 400m de radio y se mueve con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50s. de iniciar su marcha alcanza la velocidad de 72km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

a) Aceleración tangencial en la primera etapa.

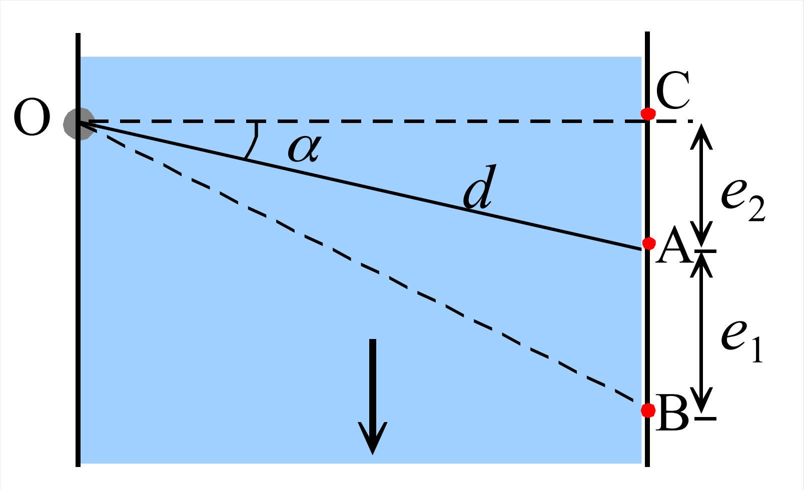
b) Aceleración normal, aceleración total y longitud recorrida en ese tiempo (50s.)

c) Velocidad angular media y velocidad angular a los 50s.

d) Tiempo que tardará en dar 100 vueltas al circuito.

12. Se quiere cruzar un río de 26 m de ancho con una barca para llegar a la orilla opuesta en un punto situado a 60 m aguas abajo en 15 s. Calcular la dirección y la velocidad de la barca si la velocidad del agua del río es de 3 m/s.

La barca tiene que dirigirse a un punto A para que al ser arrastada por el agua llegue al punto B (a 60 m).

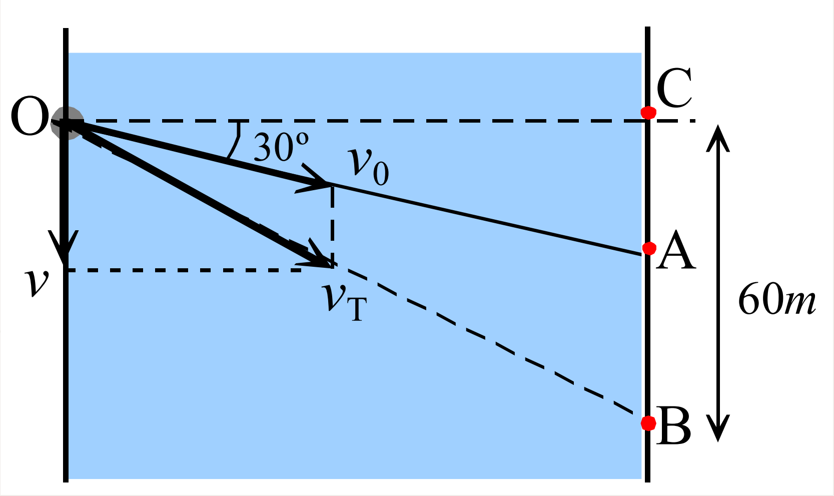


12. Se quiere cruzar un río de 26 m de ancho con una barca para llegar a la orilla opuesta en un punto situado a 60 m aguas abajo en 15 s. Calcular la dirección y la velocidad de la barca si la velocidad del agua del río es de 3 m/s.

La distancia A-B es: $e_1 = v \cdot t = 3\,m/s \cdot 15 s = 45 m$

La distancia complementaria es: $e_2 = 60m - 45m = 15m$

Y el ángulo con la horizontal: $\alpha = tg^{-1}\left(\frac{e_2}{OC}\right) = tg^{-1}\left(\frac{15}{26}\right) = 30^{\circ}$



La distancia OA será:

$$d = \frac{e_2}{sen\alpha} = \frac{15}{sen30º} = \frac{15}{1/2} = 30m$$

Y por lo tanto la velocidad de la barca:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{30m}{15s} = \boxed{2\,m/s}$$

De otra forma:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + v_0 sen\alpha\,\vec{j}\\ \vec{v} = v\,\vec{j}\end{array}\right\} \quad \vec{v}_T = \vec{v}_0 + \vec{v} = \underbrace{v_0\cos\alpha}_{v_x}\,\vec{i} + \underbrace{\left(v_0 sen\alpha + v\right)}_{v_y}\,\vec{j}$$

Integrando, y teniendo en cuenta que $\left(x_0, y_0\right) = \left(0,0\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}x = v_0\cos\alpha\cdot t\\ y = \left(v_0 sen\alpha + v\right)\cdot t\end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{c}v = 3\,m/s\\ x = 26m, y = 60m\\ t = 15s\end{array}\right)$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos\alpha\cdot t} \quad \to \quad y = \left(\frac{x}{\cos\alpha\cdot t} sen\alpha + v\right)\cdot t$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos\alpha \cdot t} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{x}{\cos\alpha \cdot t} sen\alpha + v \right) \cdot t$$

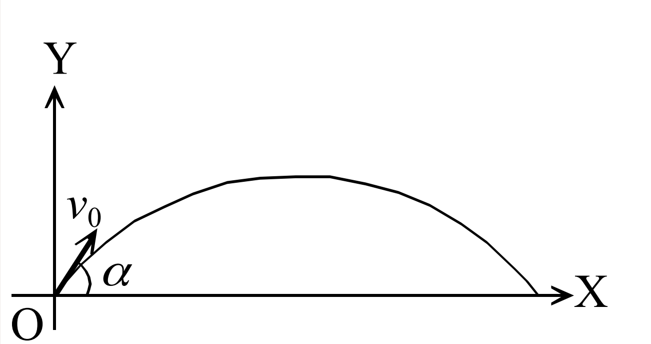
$$y = x \cdot tg\alpha + vt \quad \rightarrow \quad tg\alpha = \frac{y - vt}{x} = \frac{60 - 3 \cdot 15}{26} = \frac{15}{26}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = 30^{o}; \quad v_0 = \frac{x}{\cos 30^{o} \cdot t} = \frac{26}{\cos 30^{o} \cdot 15} = \boxed{2\, m/s}$$

13. Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m/s formando un ángulo de 40º con la horizontal.

a) Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20s.

b) Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.

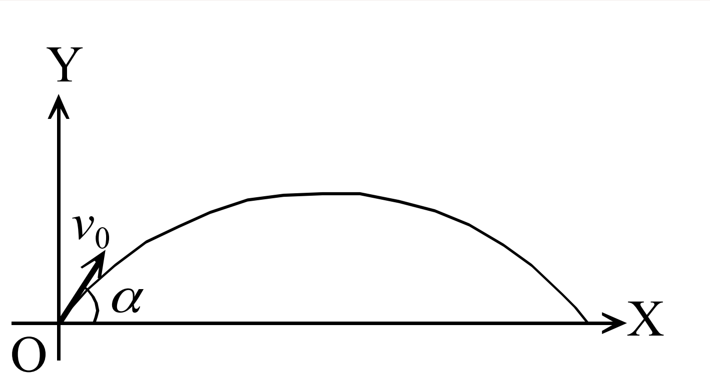


13. Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m/s formando un ángulo de 40º con la horizontal.

a) Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20s.

b) Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.

a)



$$v_0 = 200\, m/s\,; \quad \alpha = 40º\,;$$

$$\begin{cases} v_{0X} = 200 \cos 40º = 153.2\, m/s\,; \\ v_{0Y} = 200 \sin 40º = 128.6\, m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_X = v_{0X} = 200\cos 40^{o} = 153.2\, m/s; \\ v_Y = v_{0Y} - gt = 128.6 - 9.81\cdot t \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = 153.2\cdot t \\ y = 128.6\cdot t - 4.9\cdot t^2 \end{array}$$

Después de $t = 20$s, la velocidad y la posición de la bala son:

$$\begin{cases} v_{X(t=20)} = \boxed{153.2\, m/s}; \\ v_{Y(t=20)} = 128.6 - 9.81\cdot 20 = \boxed{-67.4\, m/s}; \end{cases}$$

$$x_{(t=20)} = 153.2\cdot 20 = \boxed{3064\, m};$$

$$y_{(t=20)} = 128.6\cdot 20 - 4.9\cdot 20^2 = \boxed{612\, m};$$

$\boxed{\vec{v} = (153.2, -67.4)\,m/s}$ $\boxed{\vec{r} = (3064, 612)\,m}$

b)

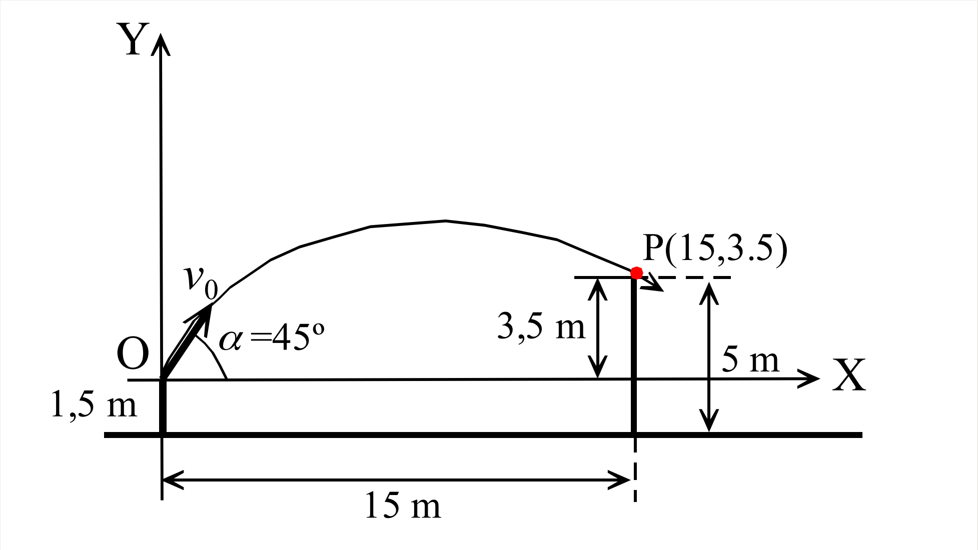
Cuando la bala vuelve a tierra, es y=0:

$$Tiempo\ de\ vuelo: y = 0 = 128.6 \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{128.6}{4.9} = \boxed{26.24\ s}$$

$$Alcance: x = 153.2 \cdot 26.24 = \boxed{4020\ m}$$

14. Un muchacho de 1.5m de altura y que está parado a 15m de distancia de un muro de 5m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de 45º con respecto a la horizontal ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima del muro?

14. Un muchacho de 1.5m de altura y que está parado a 15m de distancia de un muro de 5m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de 45º con respecto a la horizontal ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima del muro?



$$\begin{cases} y = v_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ x = v_{0X} \cdot t = v_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases}$$

La piedra tiene que pasar por el punto P(15,3.5)

$$\begin{cases} 3.5 = v_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 sen 45^{o} \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \\ 15 = v_{0X} \cdot t = v_0 \cos 45^{o} \cdot t \end{cases}$$

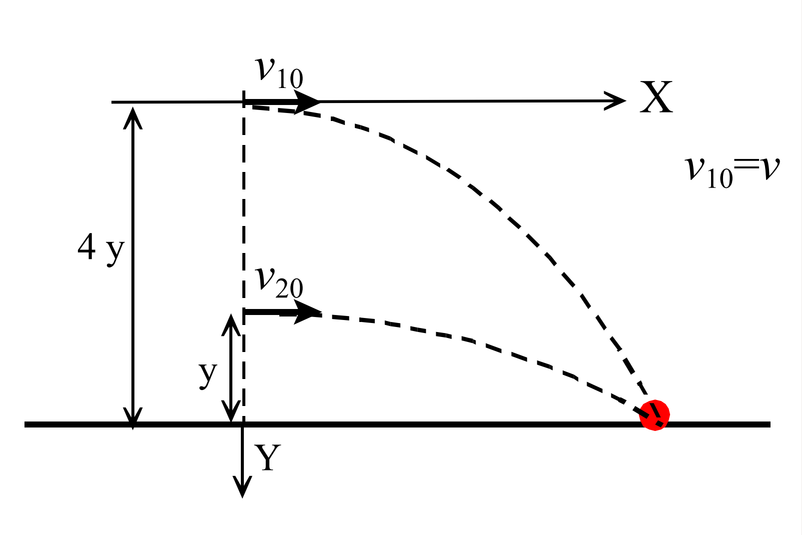
$$15 = v_0 \cos 45^{\mathrm{o}} \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{15}{v_0 \cos 45^{\mathrm{o}}}$$

$$3.5 = v_0 sen 45^{\mathrm{o}} \cdot t - 4.9 \cdot t^2 = \frac{\cancel{v_0 sen 45^{\mathrm{o}}} \cdot 15}{\cancel{v_0 \cos 45^{\mathrm{o}}}} - 4.9 \cdot \left(\frac{15}{v_0 \cos 45^{\mathrm{o}}} \right)^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad {v_0}^2 = \frac{2205}{11.5} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_0 = 13.8\, m/s}$$

15. Dos aviones están situados sobre la misma vertical, siendo la altura de uno de ellos sobre el suelo cuatro veces la del otro. Ambos pretenden bombardear el mismo objetivo, siendo la velocidad del mas alto *v* ¿qué velocidad debería llevar el mas bajo?

15. Dos aviones están situados sobre la misma vertical, siendo la altura de uno de ellos sobre el suelo cuatro veces la del otro. Ambos pretenden bombardear el mismo objetivo, siendo la velocidad del mas alto *v* ¿qué velocidad debería llevar el mas bajo?

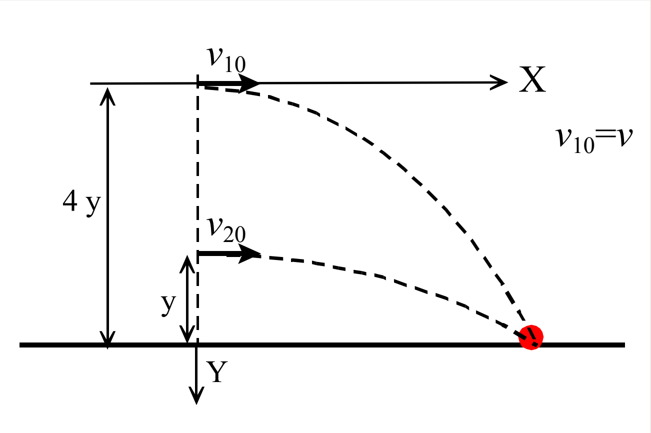


Ecuaciones del avión 1:

$$\left.\begin{array}{l} v_{1x} = v_{10} \quad \rightarrow \quad x = v_{10} \cdot t = v \cdot t \\ v_{1y} = g \cdot t \quad \rightarrow \quad 4y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 4y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

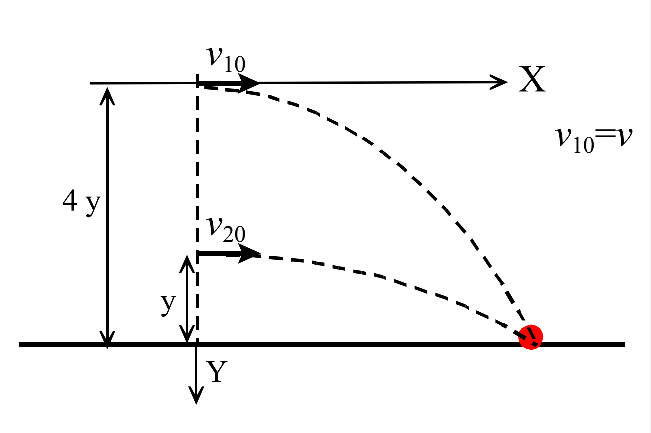
Ecuaciones del avión 2:

$$\left.\begin{array}{l} v_{2x} = v_{20} \quad \rightarrow \quad x = v_{20} \cdot t' \\ v_{2y} = g \cdot t' \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{20}{}^2}$$



$$\frac{4y}{y} = \frac{\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2}}{\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{20}{}^2}} \rightarrow \quad 4 = \frac{v_{20}{}^2}{v^2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad v_{20}{}^2 = 4v^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_{20} = 2v}$$



16. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de 720 *km/h* y su altura sobre el suelo es de 7840 *m*. Desde el avión se suelta una bomba que hace explosión al llegar al suelo. Calcular:

a) Velocidad de la bomba al llegar al suelo.

b) Distancia horizontal recorrida por la bomba.

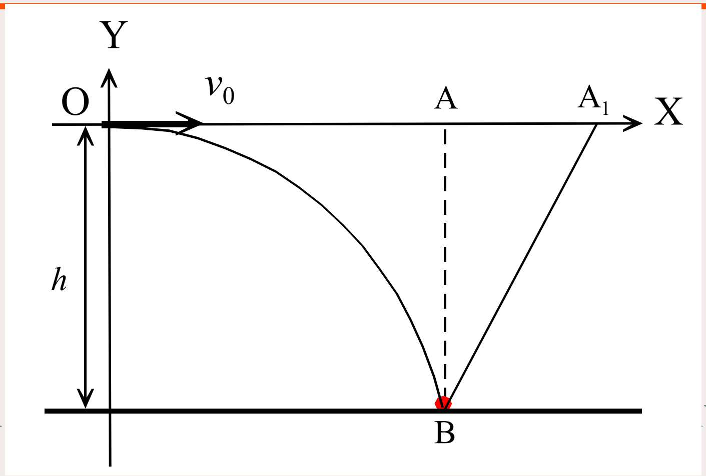
c) Tiempo transcurrido desde que se lanza la bomba hasta que se percibe, en el avión, la explosión.

16. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de 720 *km/h* y su altura sobre el suelo es de 7840 *m*. Desde el avión se suelta una bomba que hace explosión al llegar al suelo. Calcular:

a) Velocidad de la bomba al llegar al suelo.

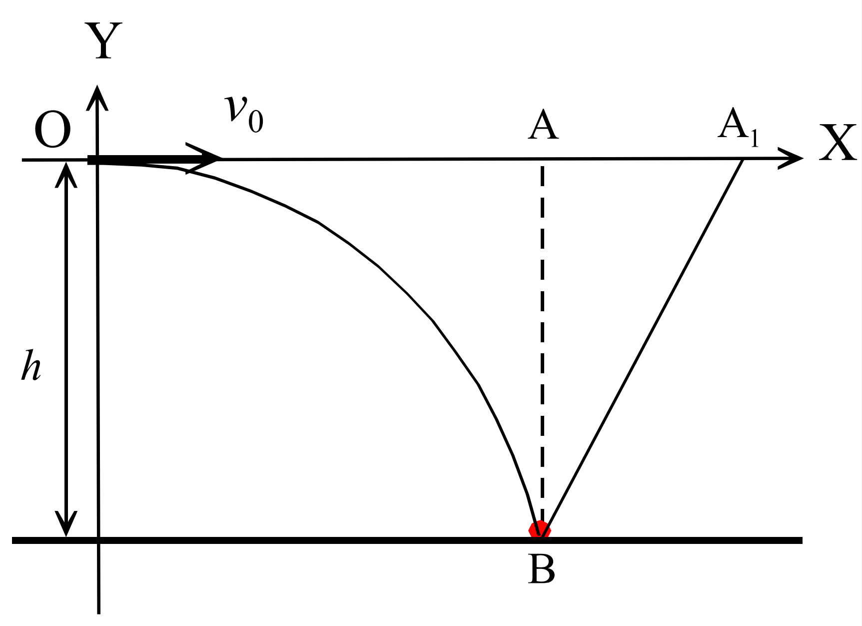
b) Distancia horizontal recorrida por la bomba.

c) Tiempo transcurrido desde que se lanza la bomba hasta que se percibe, en el avión, la explosión.



a) La velocidad de la bomba al llegar al suelo es:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\quad \left[\begin{array}{c} v_x=\dfrac{720000}{3600}=200 \\ v_y=\sqrt{2gh} \end{array}\right] \rightarrow v=\sqrt{200^2+2gh}=\sqrt{200^2+2\cdot 9.8\cdot 7840}=440\,m/s$$

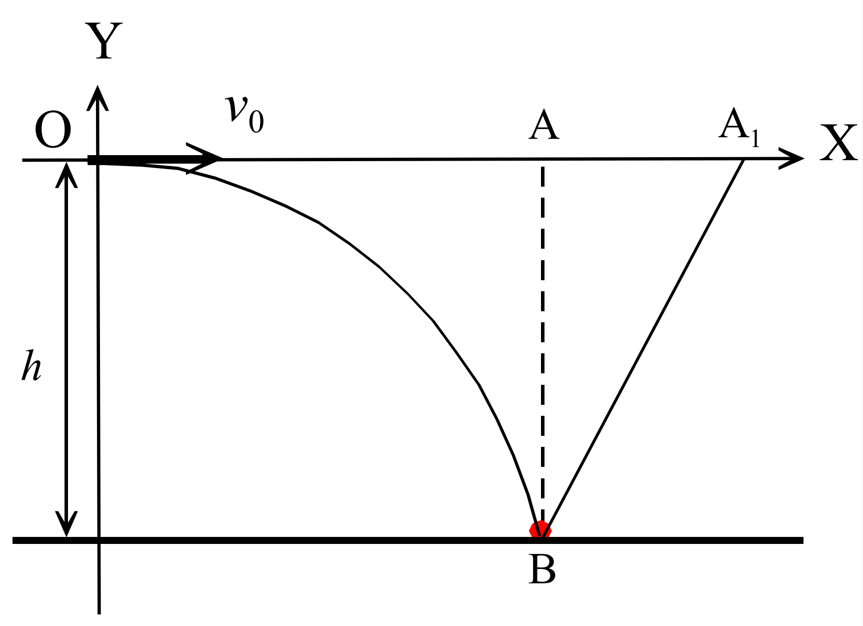


b) Las ecuaciones del movimiento son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 200 \cdot t \\ \\ y = \dfrac{1}{2} 9.8 \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{9.8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9.8}} = 40 s$$

$$x = 200 \cdot t = 200 \cdot 40 = \boxed{8000\, m}$$

c) En el momento de la explosión el avión se encuentra en el punto A, pero cuando reciba el sonido de la explosión se encontrará en A_1:



$$\overline{BA_1}^2 - \overline{AA_1}^2 = \overline{AB}^2$$

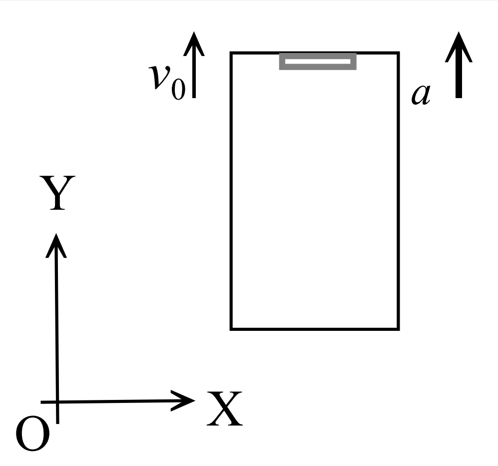
$$\left(v_{sonido} = 340\, m/s\right)$$

$$\rightarrow \quad 340^2 t^2 - 200^2 t^2 = 7840^2$$

$$t = \frac{7840}{\sqrt{340^2 - 200^2}} = 28.5s$$

$$T = 40s + 28.5s = \boxed{68.5s}$$

17. La cabina de un ascensor de 3m de altura asciende con una aceleración de 1m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



17. La cabina de un ascensor de 3m de altura asciende con una aceleración de 1m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.

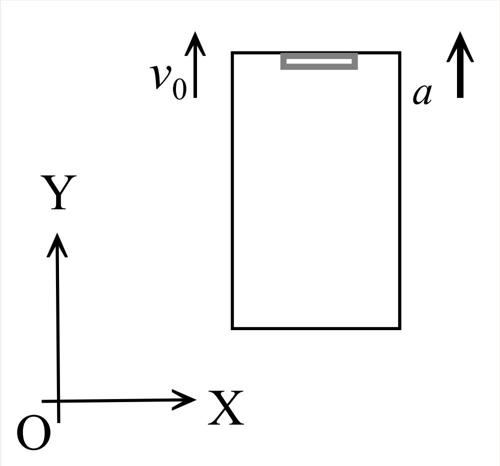
La posición del suelo del ascensor es: $y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

La posición de la lámpara es: $y' = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

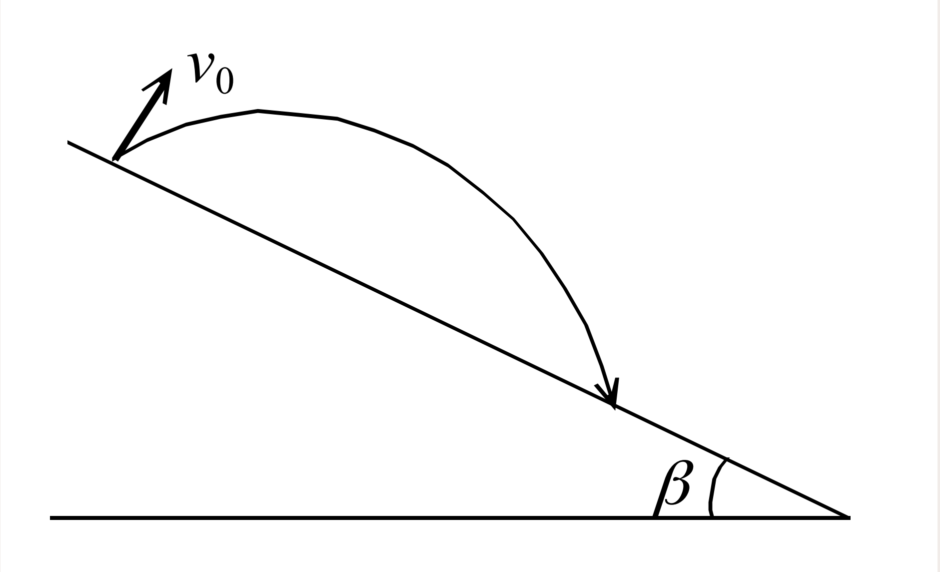
Choca con el suelo cuando el suelo recorre 3 m más que la lámpara:

$$\cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at^2 = \cancel{v_0 t} - \frac{1}{2}gt^2 + 3$$

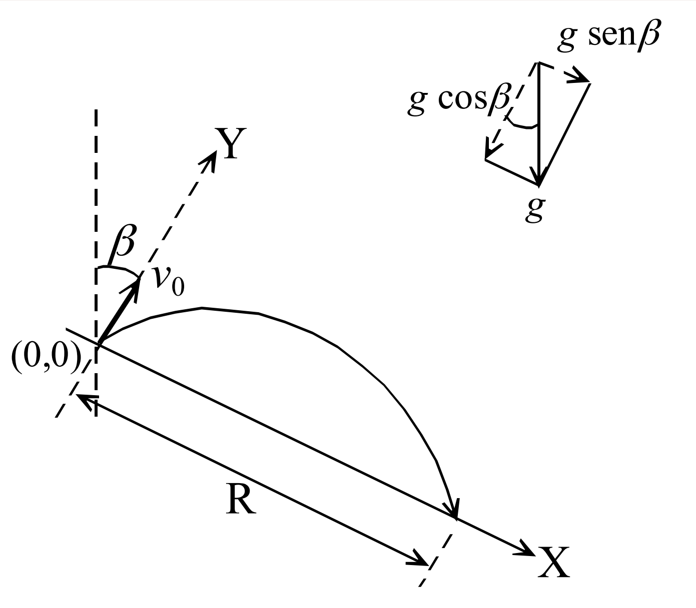
$$\rightarrow \quad t^2 = 2\left(\frac{3}{a+g}\right) \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{6}{10.8}} = \boxed{0.745\,s}$$



18. Desde un plano inclinado con un ángulo β se lanza una piedra con velocidad inicial v_0 perpendicularmente al plano. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?



18. Desde un plano inclinado son un ángulo β se lanza una piedra con velocidad inicial v_0 perpendicularmente al plano. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?



Sobre la piedra actúa la aceleración de la gravedad g

$$\left.\begin{array}{ll}(ejeX) & v_X = g\ sen\beta \cdot t \\ (ejeY) & v_Y = v_0 - g\cos\beta \cdot t\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{1}{2} g\ sen\beta \cdot t^2 \\ y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cos\beta \cdot t^2 \end{array}$$

La piedra vuelve al plano inclinado cuando es $y = 0$

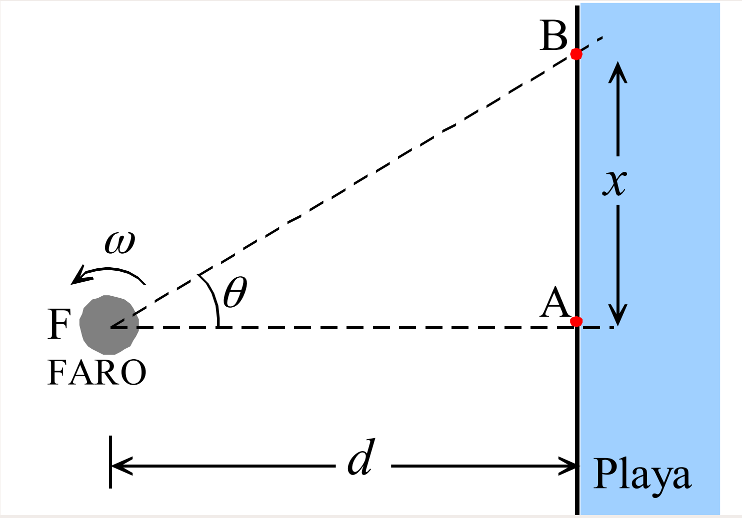
$$0 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cos\beta \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g\cos\beta} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{2} g\ sen\beta \cdot \left(\frac{2v_0}{g\cos\beta}\right)^2 = \boxed{\frac{2{v_0}^2 sen\beta}{g\cos^2\beta}}$$

Distancia del punto de lanzamiento

19. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a ω. El faro está situado a una distancia d de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman d y el rayo luminoso es θ.

19. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a ω. El faro está situado a una distancia d de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman la normal d y el rayo luminoso es θ.



Cuando el faro ha girado un ángulo θ, el punto luminoso ha recorrido sobre la playa la distancia x :

$$tg\theta = \frac{x}{d} \quad \rightarrow \quad x = d\,tg\theta$$

La velocidad del punto será:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(d \cdot tg\theta\right)}{dt} = d \cdot \frac{d\left(tg\theta\right)}{dt} = d \cdot \frac{d\left(tg\theta\right)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = d \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\omega = \boxed{\frac{\omega \cdot d}{\cos^2\theta}}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega \cdot d}{\cos^2\theta}\right) = \omega \cdot d \cdot \frac{d\left(1/\cos^2\theta\right)}{dt} = \omega \cdot d \cdot \frac{d\left(1/\cos^2\theta\right)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \boxed{\frac{\omega^2 \cdot d \cdot 2sen\theta}{\cos^3\theta}}$$

20. Determinar la función horaria de un móvil que recorre una trayectoria circular con velocidad y aceleración tangencial iguales en todo instante, sabiendo que la aceleración es unitaria en el instante inicial.

20. Determinar la función horaria de un móvil que recorre una trayectoria circular con velocidad y aceleración tangencial iguales en todo instante, sabiendo que la aceleración es unitaria en el instante inicial.

Velocidad y aceleración iguales:

$$a_T = v \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = v \quad \leftrightarrow \quad \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{ds} v = v$$

$$\frac{dv}{ds} = 1 \quad \rightarrow \quad dv = ds \quad \rightarrow \quad v = s + k, \quad k = cte$$

$$\frac{ds}{dt} = s + k \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{s+k} = dt \quad \rightarrow \quad t = \int \frac{ds}{s+k} = \ln\left(s+k\right) - \ln\left(c\right), \quad c = cte$$

$$t + \ln(c) = \ln(s+k) \quad \rightarrow \quad \ln\left(c \cdot e^{t}\right) = \ln(s+k) \quad \rightarrow \quad c \cdot e^{t} = s + k$$

Siendo $s = 0$ cuando $t = 0$, resulta: $\rightarrow \quad c = k \quad \rightarrow \quad s = k\left(e^{t} - 1\right)$

Y como es $v = s + k \quad \rightarrow \quad v = k \cdot e^{t}$

La aceleración unitaria permite obtener el valor de la cte k:

$$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \quad \rightarrow en\ t = 0 \rightarrow \quad v = k; \quad \frac{dv}{dt} = k;$$

$$1 = k^2 + \frac{k^4}{R^2} \quad \rightarrow ec\ bicuadr \rightarrow \quad k = \left[\frac{R^2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{R^2}} - 1\right)\right]^{1/2}$$

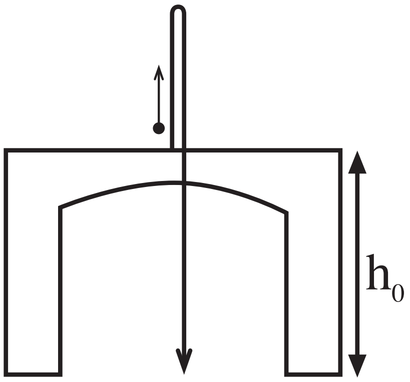
La función horaria *s*(*t*) obtenida es:

$$s = s\left(t\right) = k\left(e^{t} - 1\right) = \boxed{\left[\frac{R^2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{R^2}} - 1\right)\right]^{1/2}\left(e^{t} - 1\right)}$$

Problemas resueltos de Cinemática

1. Un coche que circula a 180 km/h frena hasta los 108 km/h en 10 s. Calcular:
   (a) La aceleración
   (b) La distancia que recorre mientras frena
   (c) Si continua frenando con la misma aceleración, ¿cuánto tiempo le costará detenerse del todo y qué distancia total habrá recorrido?

2. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial y tarda 3 s en llegar al río, tal y como se indica en la figura. La altura del puente es $h_0 = 10$ m. Calcular:
   (a) A qué velocidad hay que lanzar la piedra
   (b) El tiempo que le cuesta volver al punto de lanzamiento
   (c) ¿Qué velocidad tiene cuando llega al río? ($g = -9{,}8$ m/s^2)
   (d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?



3. Desde lo alto de una mesa a 1 m del suelo realizamos un tiro horizontal que queremos que tenga un alcance de 2 m. Calcular:
   (a) El tiempo que le cuesta llegar al suelo
   (b) La velocidad con la que se ha de realizar el tiro horizontal
   (c) La velocidad que posee en el suelo

4. Queremos realizar un tiro parabólico con una velocidad de 45 m/s de tal forma que tenga un alcance de 200 m. Calcular:
   (a) A qué ángulo ha de realizarse el tiro
   (b) Cuál será la altura máxima alcanzada
   (c) Cuál será el tiempo de vuelo
   (d) Cuál será la velocidad al llegar de nuevo al suelo

Resolución de los problemas

1. Se trata de un problema de movimiento rectilíneo uniforme (MRUA) cuyas fórmulas son:

$$v = v_0 + a\,t$$
$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(s - s_0)$$

   (a) Nos dan las velocidades inicial y final y el tiempo, así que podemos usar la primera fórmula. Hay que poner las velocidades en m/s. $v_0 = 180$ km/h $= 50$ m/s, $v = 108$ km/h $= 30$ m/s. Sustituyendo todo en la fórmula primera

$$30 = 50 + 10\,a$$

   y despejando

$$a = \frac{30 - 50}{10} = -\frac{20}{10} = -2 \qquad \boxed{a = -2 \text{ m/s}^2}$$

   (b) Para calcular la distancia recorrida podemos usar la segunda fórmula sustituyendo la aceleración que hemos hallado ya en la primera. Como no dice nada tomamos el espacio inicial como cero.

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 = 0 + 50 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 10^2 = 400 \qquad \boxed{s = 400 \text{ m}}$$

   (c) Como continua frenando con la misma aceleración, ahora al detenerse la velocidad final será cero. Sustituyendo de nuevo en la primera fórmula

$$0 = 50 - 2\,t \rightarrow t = \frac{50}{2} = 25 \text{ s.}$$

   Y para calcular la distancia total recorrida de nuevo con la segunda fórmula

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 = 0 + 50 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 25^2 = 625 \qquad \boxed{s = 625 \text{ m}}$$

---

2. Se trata de un problema de caída libre siendo las fórmulas

$$v = v_0 + g\,t$$
$$h = h_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}g\,t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,(h - h_0)$$

   En estos problemas sabemos siempre la aceleración de la gravedad, $g = -9{,}8$ m/s^2.

(a) Si nos fijamos en el problema los datos que nos dan son el tiempo, la altura inicial, que es la altura del puente, $h_0 = 10$ m, y la altura final, $h = 0$ m, pues llega al río, que es el suelo en donde se toma el origen de alturas. Podemos sustituir todo en la segunda fórmula en donde la incógnita es la velocidad inicial de lanzamiento v_0,

$$0 = 10 + 3\,v_0 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \cdot 3^2 \to 0 = 10 + 3\,v_0 - 44{,}1$$

$$-3\,v_0 = 10 - 44,1 = -34{,}1$$

$$v_0 = \frac{-34{,}1}{-3} = 11{,}36 \qquad \boxed{v_0 = 11{,}36 \text{ m/s}}$$

(b) En este caso la altura inicial y final es la misma, que es la altura del puente. Usando de nuevo la segunda fórmula y con la velocidad inicial que hemos hallado

$$10 = 10 + 11{,}36\,t + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8)\,t^2 \to 0 = 11{,}36\,t - 4{,}9\,t^2$$

La anterior es una ecuación de segundo grado pero que se puede factorizar de la forma

$$0 = t\,(11{,}36 - 4{,}9\,t)$$

con lo que las soluciones son sencillamente $t = 0$, algo evidente porque para $t = 0$ está sobre el puente y la otra solución es la que nos interesa

$$0 = 11{,}36 - 4{,}9\,t \to 4{,}9\,t = 11{,}36 \to t = \frac{11{,}36}{4{,}9} = 2{,}318 \qquad \boxed{t = 2{,}318 \text{ s}}$$

(c) Para hallar la velocidad en el río podemos usar la tercera fórmula, en donde lo conocemos todos menos la velocidad final. La velocidad inicial la hemos hallado en el apartado (a)

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,(h - h_0)$$

$$v = \pm\sqrt{11{,}36^2 + 2 \cdot (-9{,}8) \cdot (0 - 10)} = -18{,}029 \qquad \boxed{v = -18{,}029 \text{ m/s}}$$

Tomamos el signo negativo porque el cuerpo está bajando.

(d) Para calcular la altura máxima podemos usar de nuevo la tercera fórmula. En el punto más alto la velocidad es nula, por tanto $v = 0$ y sustituyendo

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,(h - h_0)$$

$$0^2 = 11{,}36^2 + 2 \cdot (-9{,}8) \cdot (h - 10)$$

$$19{,}6 \cdot (h - 10) = 129{,}05$$

$$h - 10 = \frac{129{,}05}{19{,}6} = 6{,}58$$

$$h = 10 + 6{,}58 = 16{,}58 \qquad \boxed{h = 16{,}58 \text{ m}}$$

3. Se trata de un problema de tiro horizontal cuyas fórmulas son:

$$x = v_0\, t$$
$$y = h_0 + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Sabemos el alcance y la altura, $x = 2$ m y $h_0 = 1$ m.

(a) Para calcular el tiempo que le cuesta llegar al suelo usamos la segunda ecuación en la que sustituimos el valor de h_0 y hallamos t

$$0 = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}8) \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{4{,}9}} = 0{,}451 \qquad \boxed{t = 0{,}451 \text{ s}}$$

(b) Con el tiempo calculado en el apartado anterior y sabiendo que el alcance es de 2 m nos vamos a la primera ecuación y sustituimos todo para hallar la velocidad inicial del tiro horizontal.

$$2 = v_0\, t$$

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{2}{0{,}451} = 4{,}427 \qquad \boxed{v_0 = 4{,}427 \text{ m/s}}$$

(c) La velocidad final en el suelo se calcula con la expresión

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2\, t^2}$$

y sustituyendo todo

$$v = \sqrt{4{,}427^2 + (-9{,}8)^2 \cdot 0{,}451^2} \simeq 6{,}255 \qquad \boxed{v = 6{,}255 \text{ m/s}}$$

---

4. Las fórmulas del tiro parabólico son:

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad H_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad T_V = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

(a) Sabemos el alcance y la velocidad así que podemos usar la fórmula del alcance y sustituir los datos que nos dan para poder hallar el ángulo.

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad 200 = \frac{45^2 \sin 2\alpha}{9{,}8}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{200 \cdot 9{,}8}{45^2} = 0{,}9679 \qquad 2\alpha = \sin^{-1} 0{,}9679 = 75{,}443$$

$$\alpha = \frac{75{,}443}{2} = 37{,}72 \qquad \boxed{\alpha = 37{,}72^{\text{o}}}$$

(b) Para la altura máxima aplicamos directamente la fórmula

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{45^2 \cdot \sin^2 37{,}72}{2 \cdot 9{,}8} = 38{,}671 \qquad \boxed{H_M = 38{,}671 \text{ m}}$$

(c) Para el tiempo de vuelo usamos la tercera fórmula

$$T_V = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 45 \cdot \sin 37{,}72}{9{,}8} = 5{,}618 \qquad \boxed{T_V = 5{,}618 \text{ s}}$$

(d) Para calcular la velocidad en el suelo hacemos uso de la fórmula de la velocidad

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g\, t)^2}$$

donde la t en la fórmula anterior es el tiempo de vuelo,

$$v = \sqrt{45^2 \cdot \cos^2 37{,}72 + (45 \cdot \sin 37{,}72 - 9{,}8 \cdot 5{,}618)^2} \simeq 45 \qquad \boxed{v = 45 \text{ m/s}}$$
