

VBC

ZS 2021/22

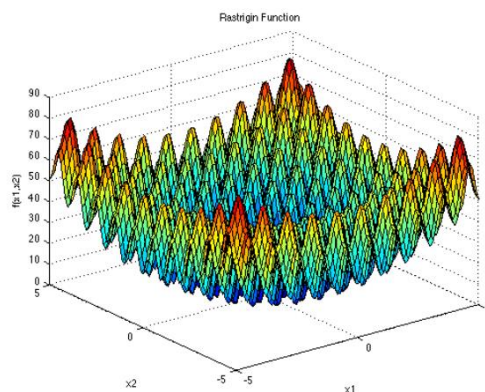
Tomáš Benda, 200604

task #3

Zadání

Pro dané funkce vytvořit a otestovat metaheuristiky genetický algoritmus a HC12.

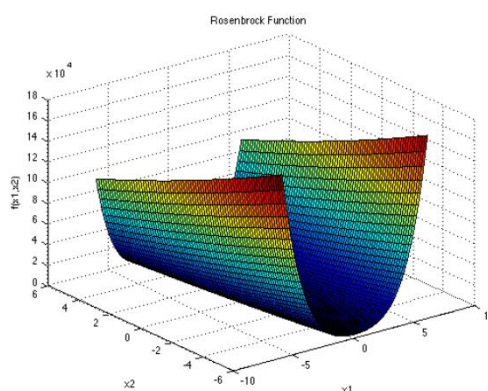
Rastriginova funkce



$$f(\mathbf{x}) = 10d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$$

Rastriginova funkce je definovaná pro $x_i \in [-5.12, 5.12]$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, d$. Globální minimum pro 2D je pak v bodě $x = [0, 0]$ a funkční hodnota je $y = 0$.

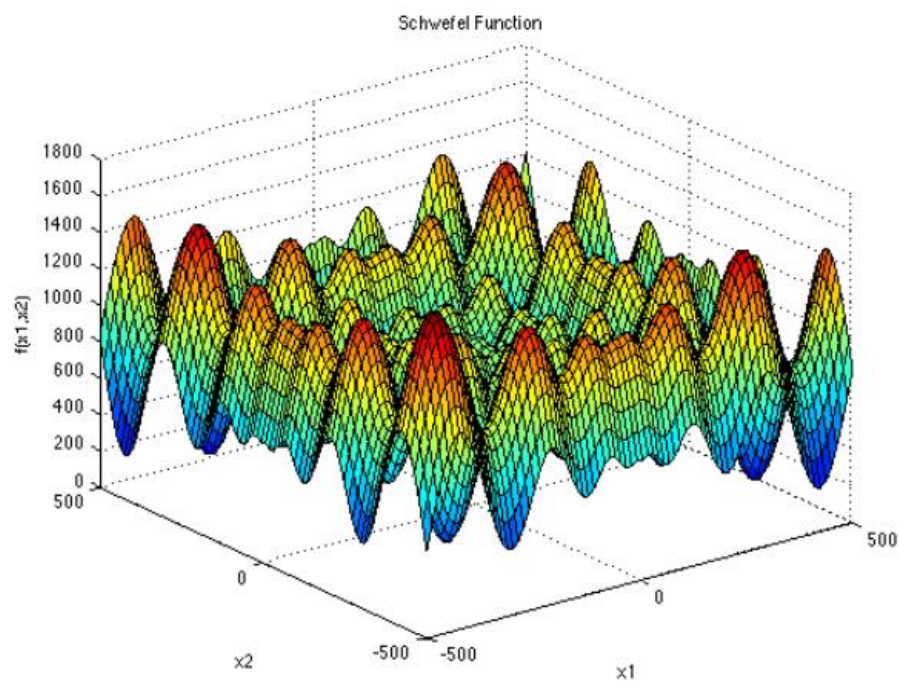
Rosenbrockova funkce



$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]$$

Rosenbrockova funkce je definovaná pro $x_i \in [-5, 10]$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, d$. V tomto protokolu je omezena na $x_i \in [-2.048, 2.048]$ pro všechna $i = 1, 2 \dots, d$. Globální minimum pro 2D je pak v bodě $x = [1, 1]$ a funkční hodnota je $y = 0$.

Funkce Schwefel



$$f(\mathbf{x}) = 418.9829d - \sum_{i=1}^d x_i \sin(\sqrt{|x_i|})$$

Funkce Schwefel je definovaná pro $x_i \in [-500, 500]$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, d$. Globální minimum pro 2D je pak v bodě $x = [420.9687, 420.9687]$ a funkční hodnota je $y = 0$.

Postup řešení

Agoritmus HC12

V programu hc12.py byla vytvořena třída HC12 s implementací daného algoritmu. Pro testování funkčnosti algoritmu byly použity následující vstupní parametry.

- maxGener = 100
- nRuns = 50 (2D, 5D, 10D), = 5 (50D, 100D)
 - Malý počet u 50D a 100D je způsoben vysokou časovou náročností (maticové operace na velkých maticích)
- nBitParam = 15 (2D, 5D, 10D), = 8 (50D, 100D)

Genetický algoritmus

Vytvořený genetický algoritmus přijímá vstupní parametry dle zadání. Pro testování funkčnosti algoritmu a hledání minima zadaných funkcí byly použity tyto parametry.

- NP (velikost populace) = 100 (2D, 5D, 10D), = 100 (50D, 100D)
 - Velikost populace byla volena s ohledem na rychlost algoritmu a co nejlepší výsledky.
- pS (síla selekce) = 0.1
 - Síla selekce 10 % (turnaje se účastní 10 % jedinců)
- pC (pravděpodobnost křížení) = 0.9
 - Potomek vznikne křížením rodičů s 90 % pravděpodobností
- pM (pravděpodobnost mutace) = $1/(nBitParam * nParam)$
- maxGener = 500 (2D, 5D, 10D), = 100 (50D, 100D)
 - Pro méněrozměrné 500 generací dostačující, pro více rozměrů voleno 100 s ohledem na časovou náročnost
- nRuns = 50, 10 pro 50D, 100D
- nBitParam = 15
 - 15 bitů na parametr

Výsledky testování algoritmů

HC12

V tabulkách níže jsou vyznačeny maximální, minimální, průměrné a nejlepší hodnoty pro parametry fval (funkční hodnota), #Gener (počet generací) a čas při testování implementace algoritmu HC12 pro zadané funkce.

		fval			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	9.6877e-06	9.6877e-06	9.6877e-06	9.6877e-06
	5	2.4219e-05	2.4219e-05	2.4219e-05	2.4219e-05
	10	4.8438e-05	4.8438e-05	4.8438e-05	4.8438e-05
	50	20.5955	8.9539	13.7532	8.9539
	100	254.3431	167.3283	202.6213	167.3283
Rosenbrock	2	0.0038	2.6688e-07	0.0023	2.6688e-07
	5	0.9433	2.0964e-05	0.5364	2.0964e-05
	10	5.8629	0.0003	3.5007	0.0003
	50	1153.6113	393.4587	878.5247	393.4587
	100	1635.2850	1153.6114	1272.7746	1153.6114
Schwefel	2	5.9918e-05	5.9918e-05	5.9918e-05	5.9918e-05
	5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	10	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
	50	1153.6113	393.4587	878.5248	393.4587
	100	4715.5351	3925.8046	4300.6729	3925.8046

Tabulka 1: Statistika pro fval (funkční hodnota) - HC12

		#Generace			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	12.0	4.0	8.0600	4.0
	5	27.0	13.0	20.18	13.0
	10	48.0	33.0	39.94	33.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0
Rosenbrock	2	66.0	5.0	33.42	5.0
	5	100.0	15.0	89.3	20.0
	10	100.0	33.0	92.62	36.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0
Schwefel	2	12.0	4.0	8.7800	4.0
	5	30.0	14.0	21.36	14.0
	10	54.0	33.0	42.16	33.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0

Tabulka 2: Statistika pro #Generací (počet generací na restart alg.) - HC12

		Čas výpočtu			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	9.3824	2.6316	6.023	2.6316
	5	63.0601	2.621	33.0796	2.6212
	10	394.7978	2.7900	200.5312	2.7900
	50	808.5057	2.8758	403.9535	2.8758
	100	6892.9091	1032.6594	3975.9925	5439.7745
Rosenbrock	2	11.2017	2.6344	6.9405	7.0467
	5	352.8637	2.5760	179.8644	200.6140
	10	3126.7400	2.8896	1557.5940	3126.7400
	50	8673.0472	8345.1269	8509.2920	8673.0472
	100	13796.3776	11394.7978	12713.8399	13796.3776
Schwefel	2	8.5618	2.6901	5.5918	2.6901
	5	53.7147	2.6586	28.8267	2.6586
	10	351.1449	3.2064	177.3442	3.2064
	50	8673.0472	8345.1269	8509.2920	8673.0472
	100	14271.8147	8843.6757	11557.99578	12914.8400

Tabulka 3: Statistika pro čas výpočtu

Následující tabulka zobrazuje, kolikrát byly jednotlivé restarty ukončeny pomocí kritéria Max Generation a Running mean. Kritérium Best-Worst nebylo použito oproti genetickému algoritmu, jelikož se u genetického algoritmu nikdy nevyužilo. Z tabulky je vidět, že pro 50D a 100D je jedinou ukončovací podmínkou maximální počet generací. Pro 2D, 5D a 10D je pak naopak dominantní úplně nebo z více než 80 % ukončovací kritérium Running mean.

	Počet kritéria ukončení		
	Max Generation/Running mean		
Params	Rastrigin	Rosenbrock	Schwefel
2	0/50	0/50	0/50
5	0/50	43/7	0/50
10	0/50	42/8	0/50
50	5/0	5/0	5/0
100	5/0	5/0	5/0

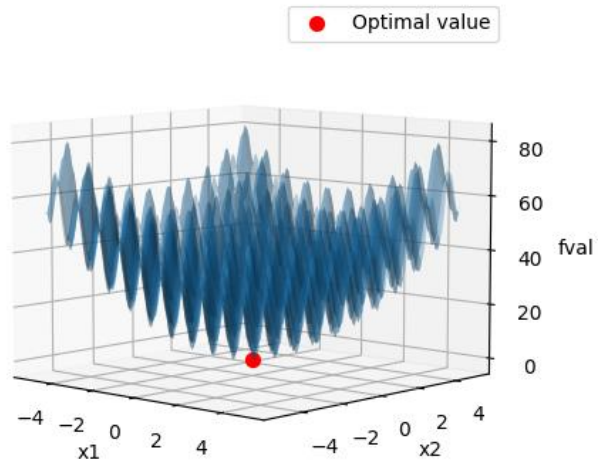
Tabulka 4: Statistika pro Počet kritéria ukončení

Pro 2D funkce bylo za pomoci HC12 nalezeny při testování globální minima pro 2D funkce zakreslené v následujících grafech.

Rastrigin

$x_1 = 0.00015625$; $x_2 = -0.00015625$; $f_{val} = 9.6877e-06$

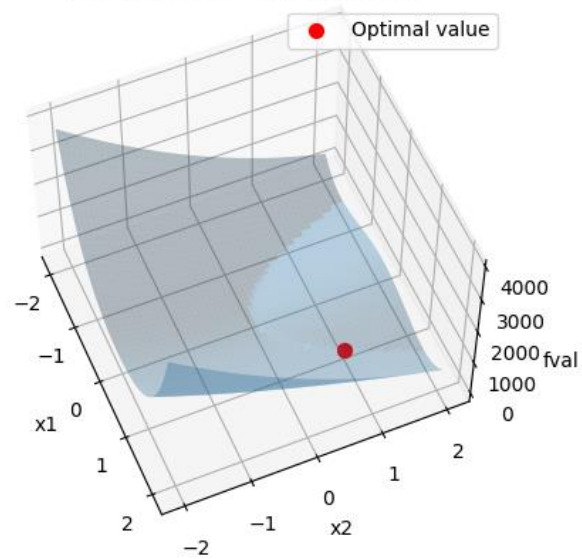
Rastrigin2D - Optimal value



Rosenbrock

$x_1 = 0.999593$; $x_2 = 0.999218$; $fval = 2.668817e-07$

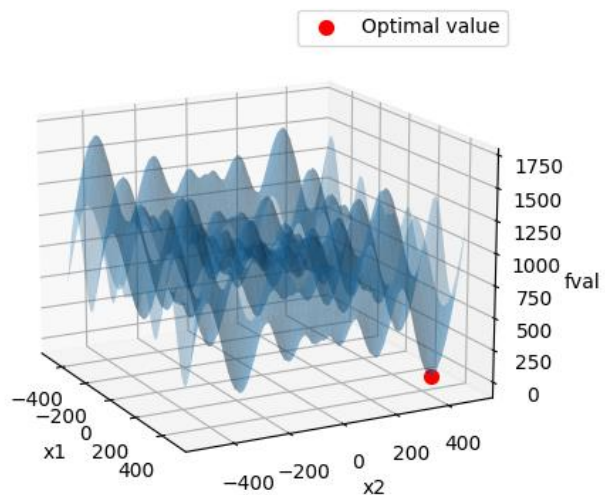
Rosenbrock2D - Optimal value



Schwefel

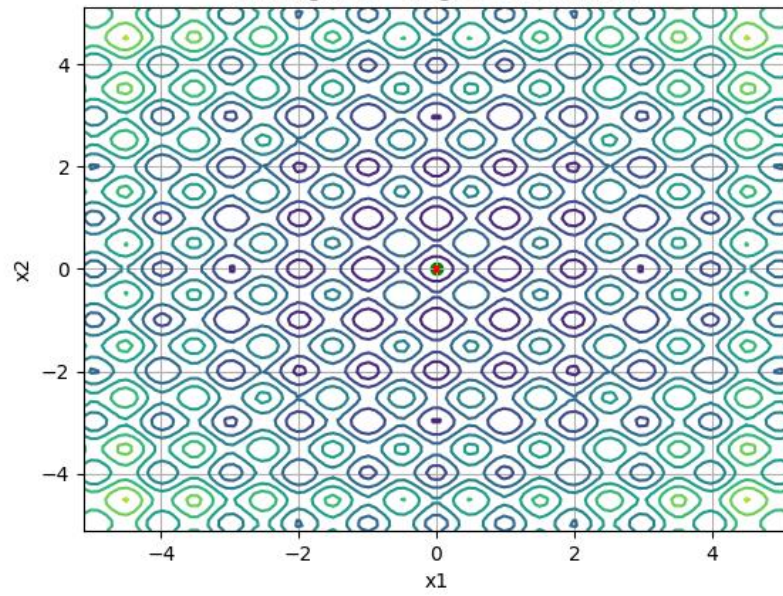
$x_1 = 420.9571$; $x_2 = 420.9571$; $fval = 5.9918e-05$;

Schwefel2D - Optimal value

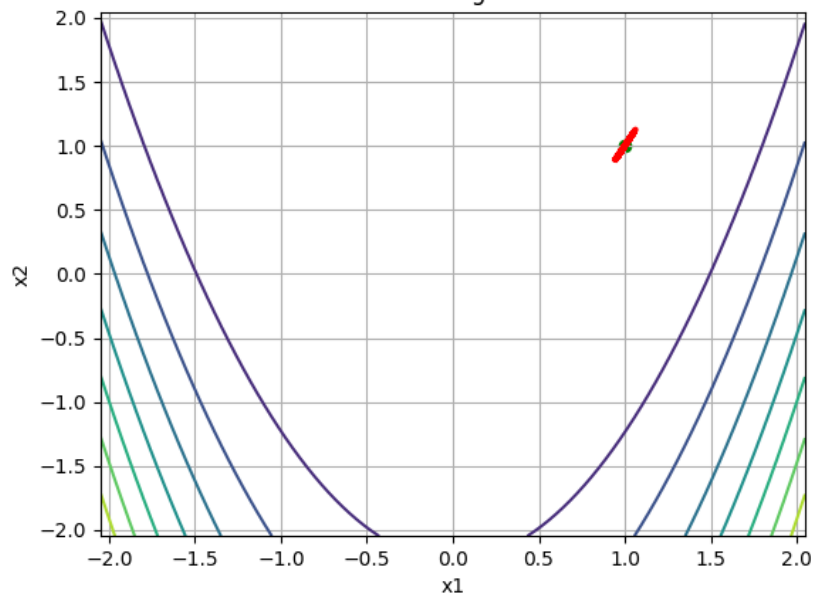


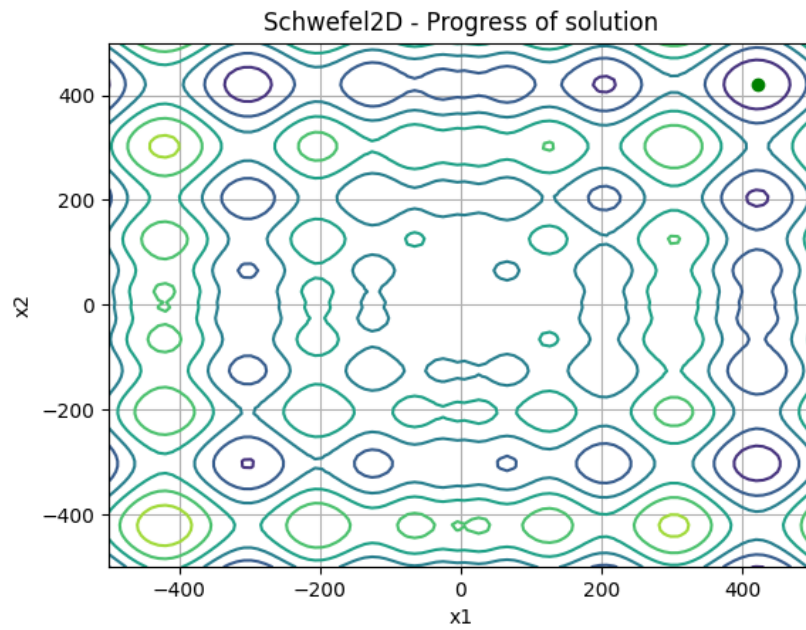
Průběh chodu algoritmu během jednoho restartu zobrazují následující grafy. Z grafů je patrné, že, podobně jako u genetického algoritmu dále v tomto protokolu, bylo u funkcí Schwefel a Rastrigin pro 2 parametry dosaženo optima téměř ihned. U funkce Rosenbrock bylo globální minimum nalezeno až po několika generacích.

Rastrigin2D - Progress of solution



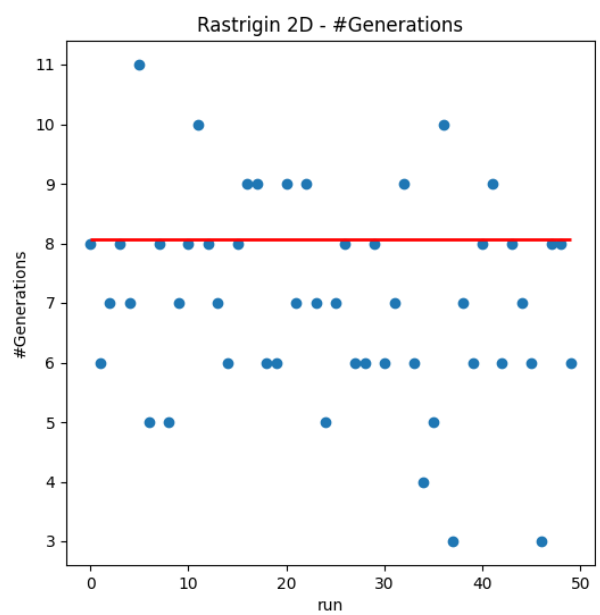
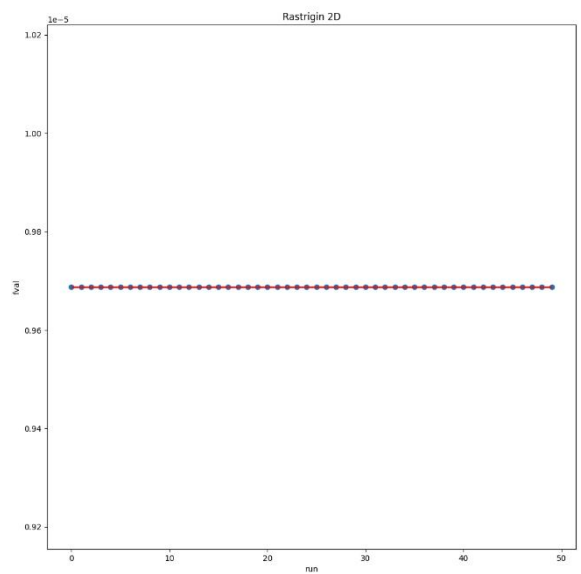
Rosenbrock2D - Progress of solution

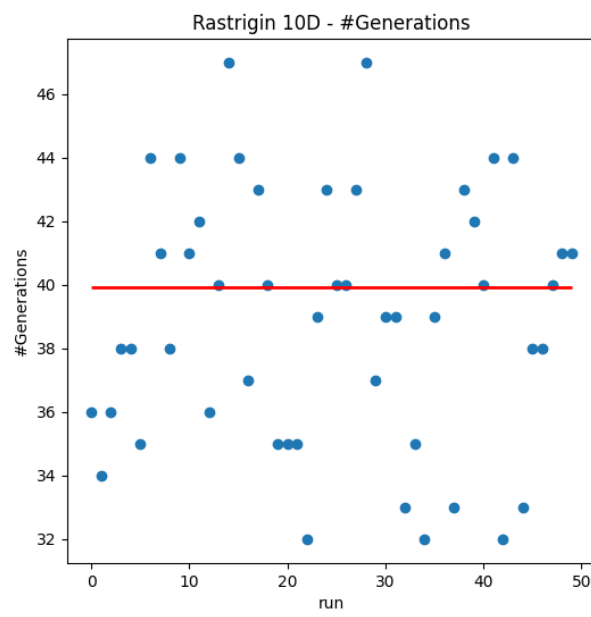
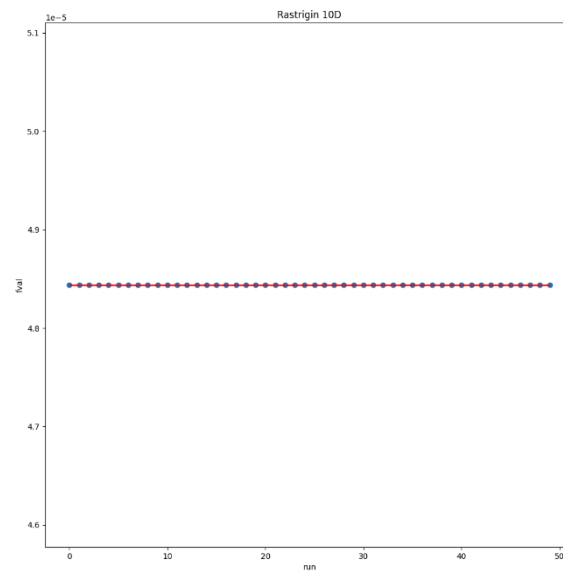




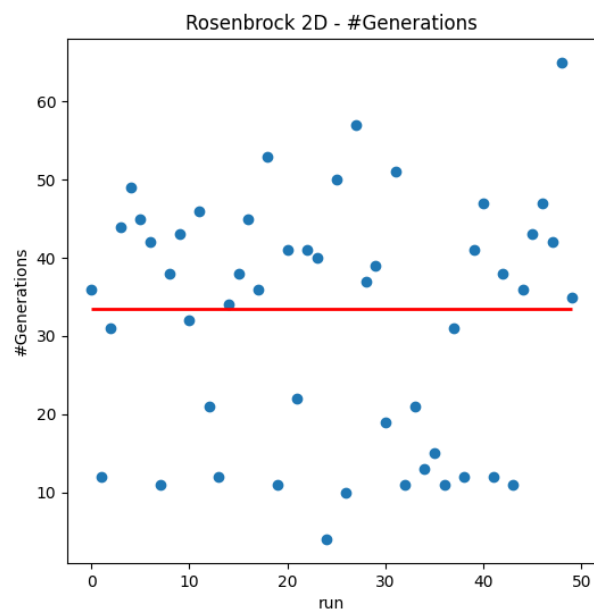
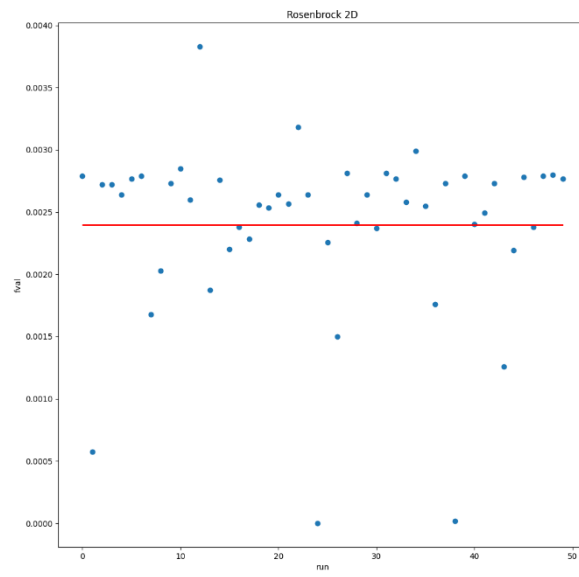
Pro 2 a 10 parametrů byly dále vytvořeny grafy, na kterých lze vidět vývoj funkční hodnoty během restartů algoritmu a dále počtu generací, které byly potřeba pro úspěšné nalezení optima.

Rastrigin

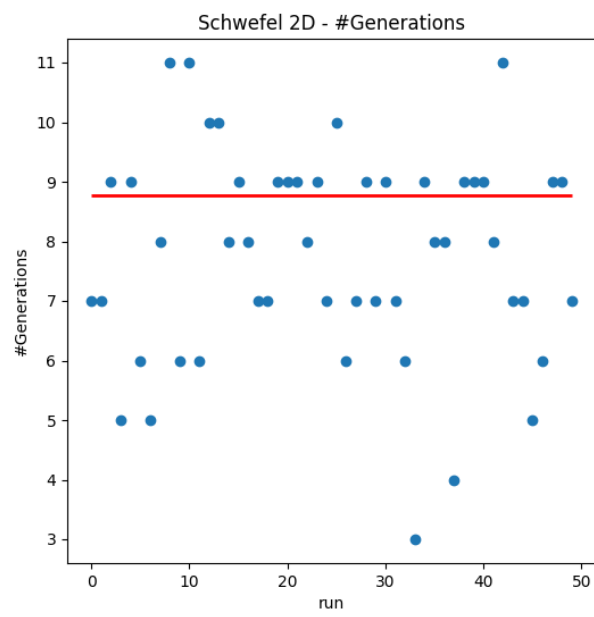
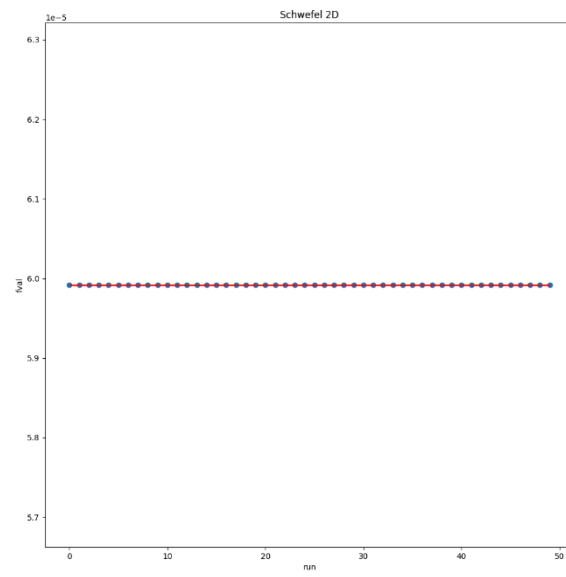


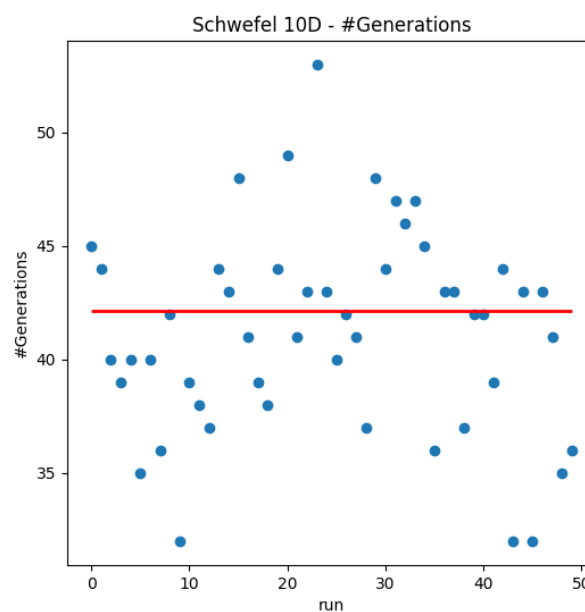
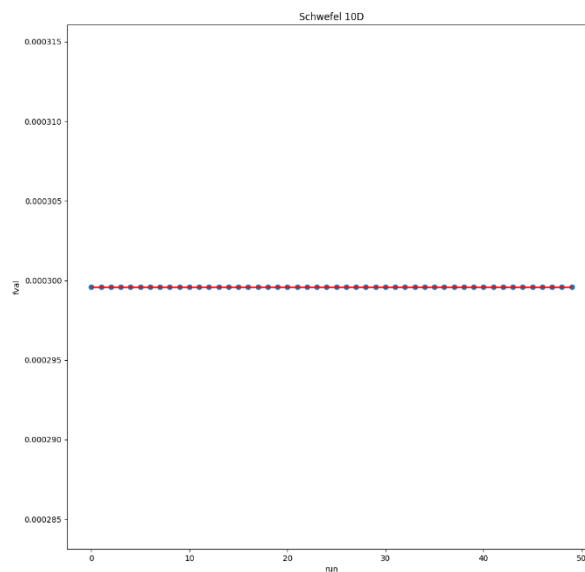


Rosenbrock



Schwefel





Genetický algoritmus

U genetického algoritmu byly vyhodnoceny maximální, minimální, průměrné hodnoty u funkční hodnoty fval, času a počtu generací. V posledním sloupci (best) se nachází hodnota nejlepšího běhu pro dané parametry.

		fval			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	1.2358	0.0	0.09407	0.0
	5	7.7497e-05	0.0	4.1848e-05	0.0
	10	3.7568	0.0083	0.4132	0.0083
	50	145.0303	79.6556	111.0703	79.6556
	100	434.3652	305.9340	369.3361	305.9339

Rosenbrock	2	0.24185	1.5625e-08	0.0418	1.5625e-08
	5	2.6391	0.0086	0.9124	0.0086
	10	9.1154	0.7354	6.1951	0.7354
	50	379.10371	78.0719	240.6229	78.0719
	100	1871.0534	1224.1907	1525.8822	1224.1907
Schwefel	2	0.2073	4.7159e-05	0.0442	4.7159e-05
	5	0.31363	0.0001	0.0819	0.0001
	10	0.8263	0.0504	0.3784	0.0504
	50	4775.78783	3527.3343	4253.1841	3527.3343
	100	16168.5693	12923.6964	14260.0229	12923.6964

Tabulka 5: Statistika pro f_{val} (funkční hodnota) – genetický algoritmus

		#Generace			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	112.0	58.0	69.6	58.0
	5	68.0	59.0	62.16	59.0
	10	162.0	81.0	110.38	81.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0
Rosenbrock	2	130.0	55.0	77.02	55.0
	5	175.0	62.0	79.12	62.0
	10	343.0	72.0	116.22	72.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0
Schwefel	2	77.0	59.0	64.06	59.0
	5	87.0	66.0	72.18	66.0
	10	317.0	84.0	129.88	84.0
	50	100.0	100.0	100.0	100.0
	100	100.0	100.0	100.0	100.0

Tabulka 6: Statistika pro #Generace – genetický algoritmus

		Čas výpočtu			
	D	max.	min.	průměr	best
Rastrigin	2	2.2316	0.9493	1.2231	0.9886
	5	6.1638	5.2036	5.4776	5.5975
	10	22.5860	11.3670	15.4770	17.5471
	50	10.7891	10.5140	10.5957	10.6470
	100	20.3071	20.0851	20.1655	20.3071
Rosenbrock	2	2.2925	0.9293	1.3419	0.9293
	5	54.3366	19.9697	24.7249	22.4579
	10	198.2791	43.9861	68.1908	85.5762
	50	19.8414	19.7279	19.7739	19.7424
	100	39.2691	39.0757	39.1336	39.0868
Schwefel	2	1.4046	0.9641	1.1124	1.2934
	5	26.1441	19.3497	21.804	21.6311
	10	168.3296	45.7675	70.1627	59.1635
	50	14.7308	10.7021	12.4915	12.8201
	100	20.7240	19.9857	20.17568	20.7240

Tabulka 7: Statistika pro čas – genetický algoritmus

Následující tabulka zobrazuje počet kritérií ukončení. Z tabulky je patrné, že pro 2D, 5D a 10D bylo jediné kritérium ukončení Running mean. Pro 50D a 100D pak jediným ukončovacím kritériem byl maximální počet generací. Kritérium Best-Worst nebylo nikdy aplikováno.

	Počet kritéria ukončení		
	Max Generation/Running mean/Best-Worst		
Params	Rastrigin	Rosenbrock	Schwefel
2	0/50/0	0/50/0	0/50/0
5	0/50/0	0/50/0	0/50/0
10	0/50/0	0/50/0	0/50/0
50	10/0/0	10/0/0	10/0/0
100	10/0/0	10/0/0	10/0/0

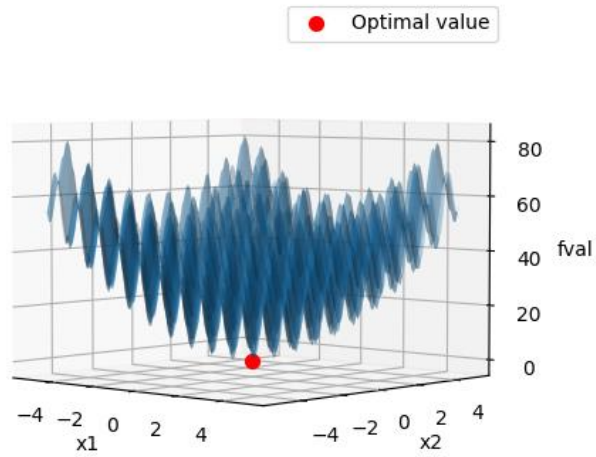
Tabulka 8: Statistika pro počty kritéria ukončení

Optimální řešení pro 2D jsou znázorněna v následujících grafech.

Rastrigin

$x_1 = 0.0000$; $x_2 = 0.0000$; $f_{val} = 0.0000$;

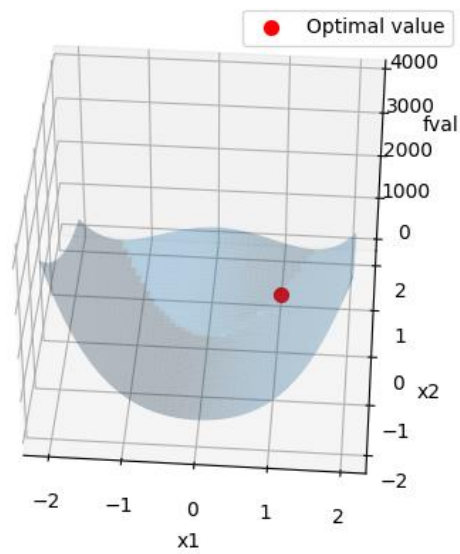
Optimal value



Rosenbrock

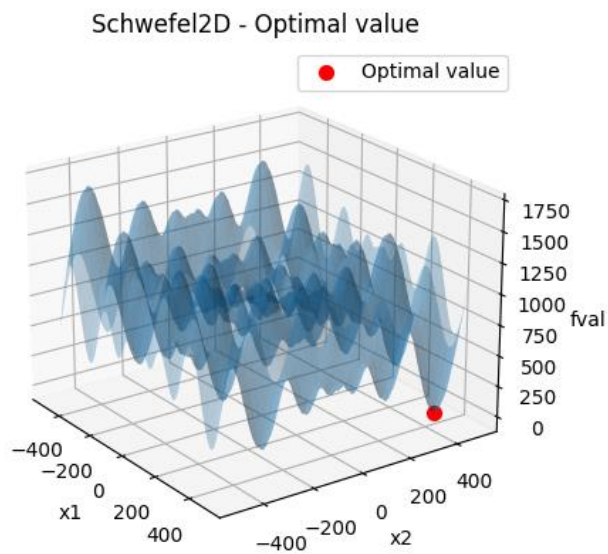
$x_1 = 1.0000$; $x_2 = 1.0000$; $fval = 0.0000$;

Rosenbrock2D - Optimal value

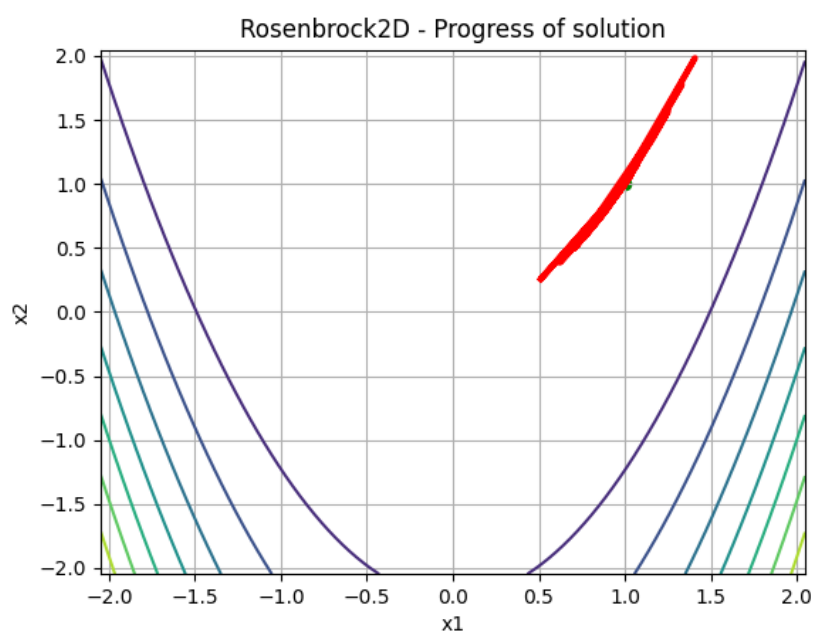
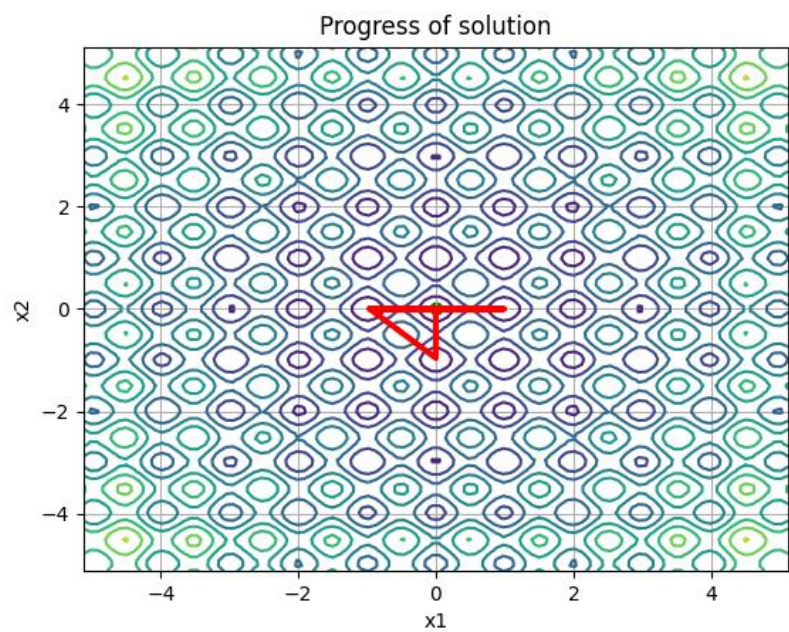


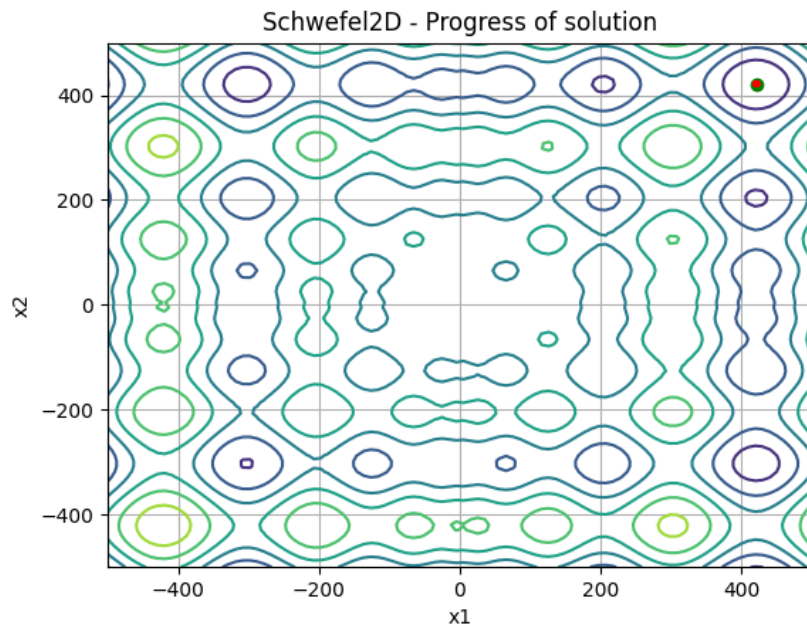
Schwefel

$x_1, x_2 = [420.95947266 \ 420.95947266]$; $fval = 4.7159e-05$



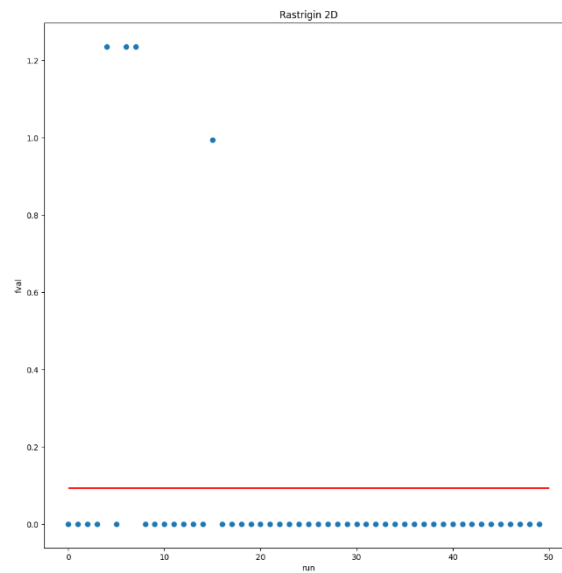
V následujících grafech je zobrazen průběh vždy jednoho chodu algoritmu, kdy byla nalezena optimální hodnota. Z grafů je patrné, že pro 2D problém bylo optimum nalezeno téměř okamžitě (Schwefel), popřípadě po přechodu z lokálních minim (Rastrigin, Rosenbrock). Záleží vždy na počáteční populaci a nastavení algoritmu.

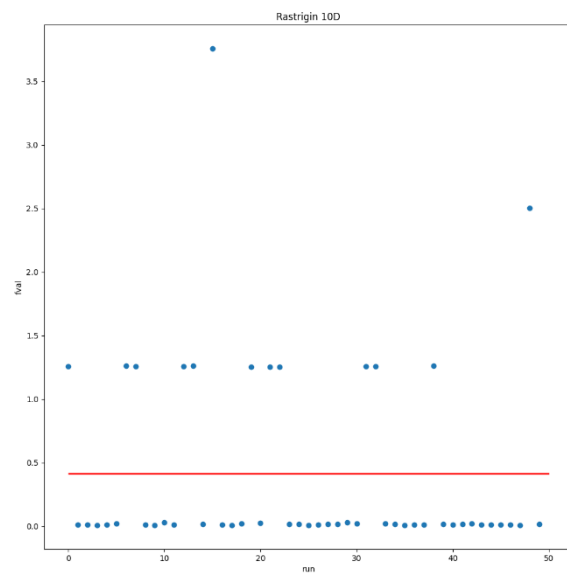
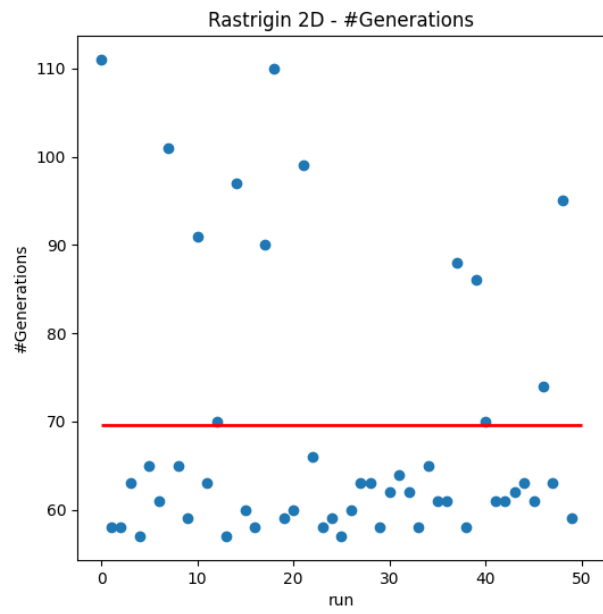


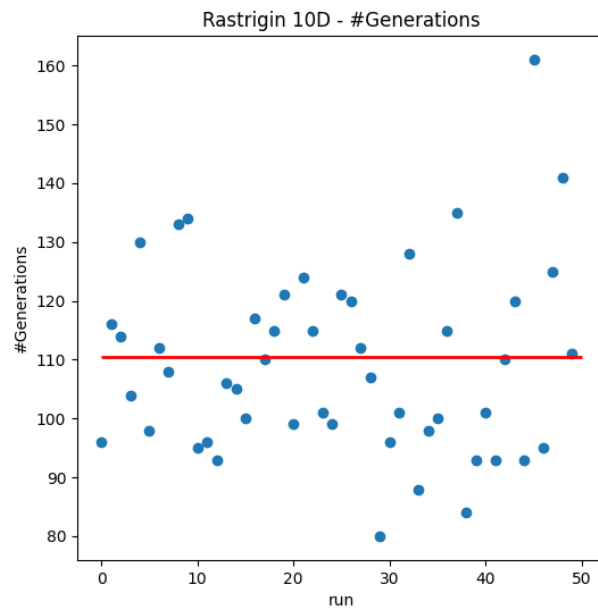


Následující grafy zobrazují funkční hodnotu pro jednotlivé generace běhu algoritmu, při kterém bylo nalezeno optimum. Další graf pak znázorňuje počet generací pro jednotlivé restarty algoritmu. Grafy byly vytvořeny pro všechny dimenze, v protokolu jsou uvedeny pouze pro 2D a 10D. Červenou přímkou je znázorněna průměrná hodnota.

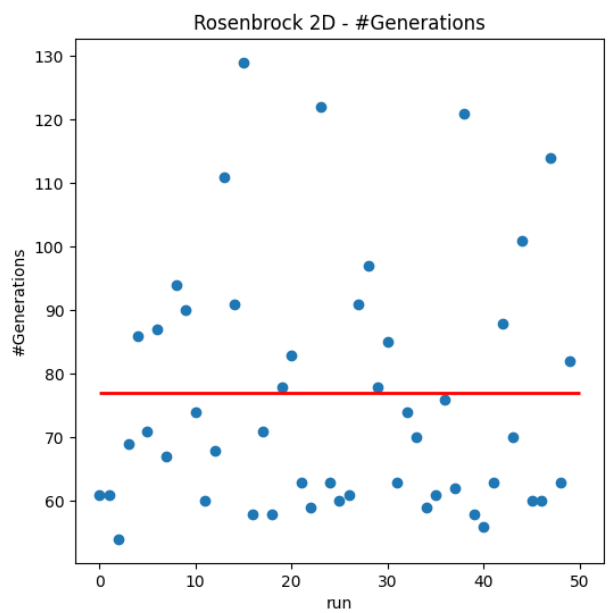
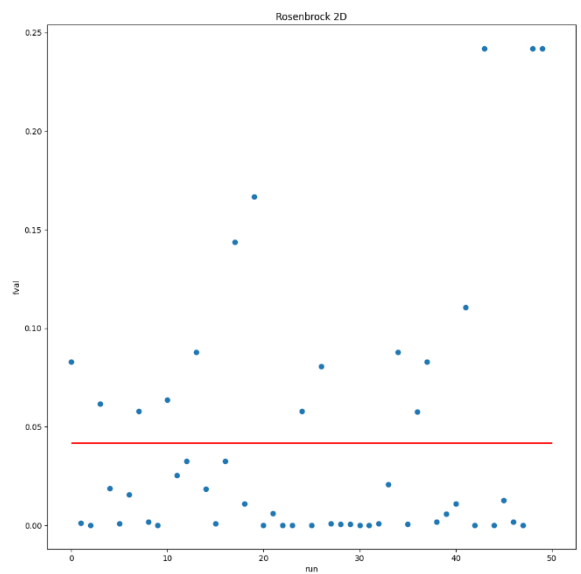
Rastrigin

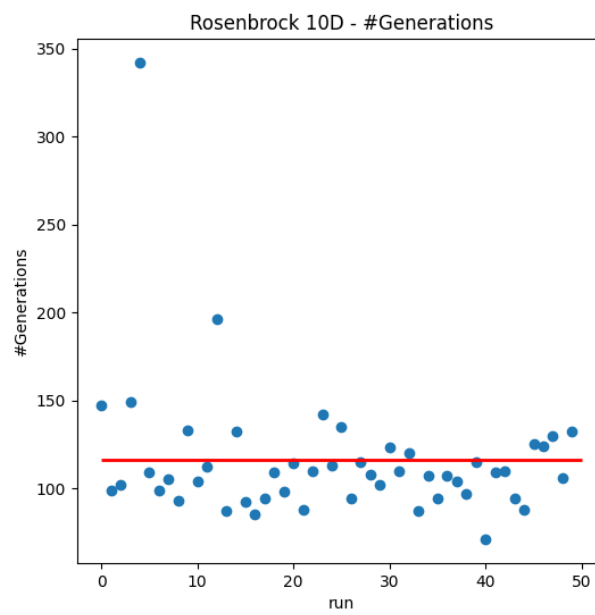
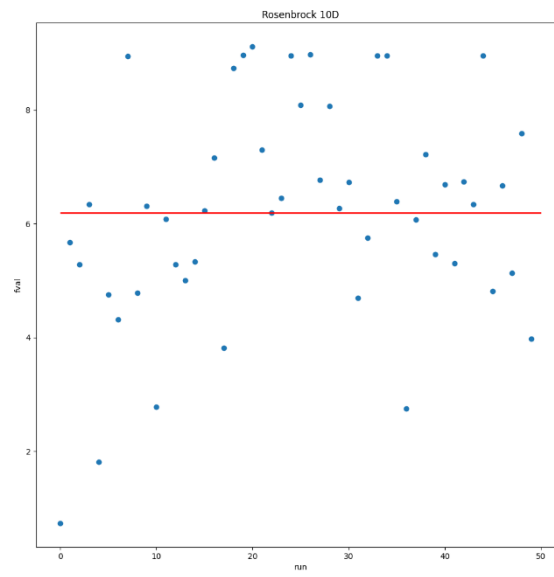




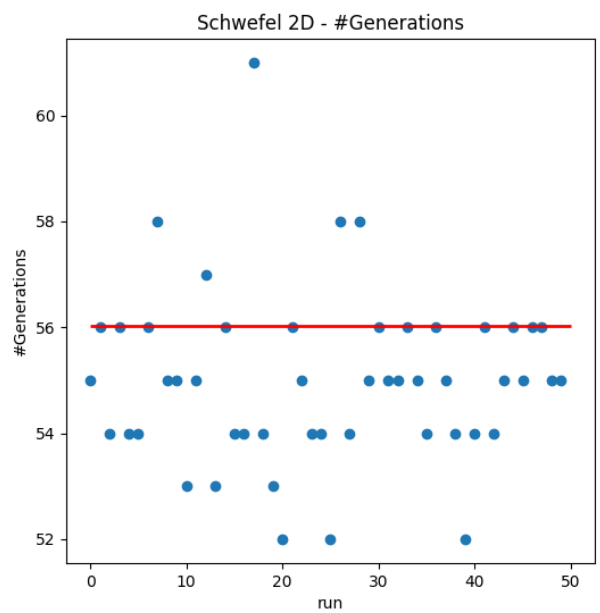
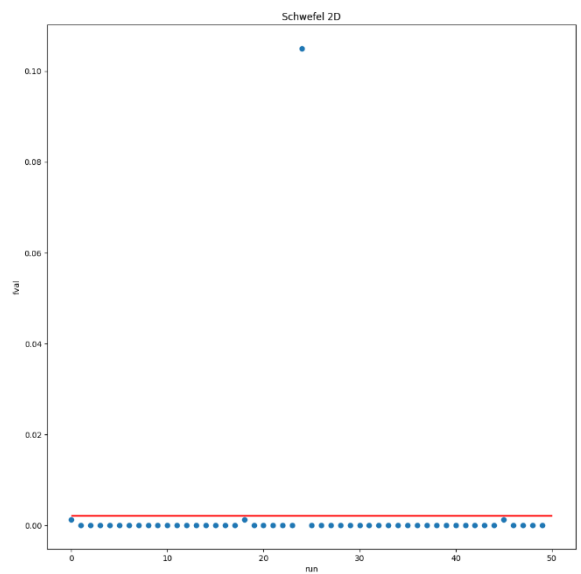


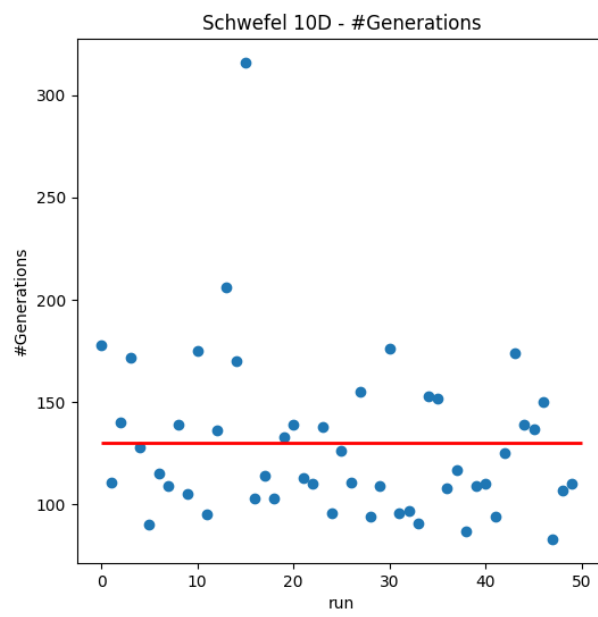
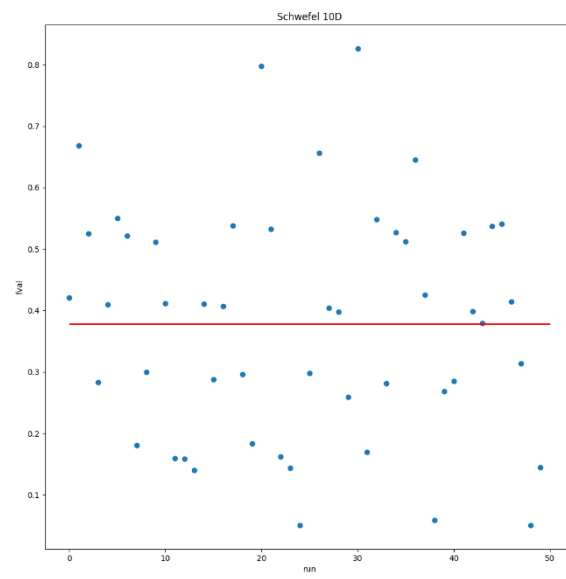
Rosenbrock





Schwefel





Zhodnocení výsledků

HC12

Algoritmus HC12 dává lepší výsledky než vytvořená implementace genetického algoritmu. Čas výpočtu je ovšem pro vyšší počty parametrů větší.

Nevýhodou implementace algoritmu je ovšem práce s velkými maticemi pro mnoho rozměrů. Čas pro 50D a 100D je i v řádech hodin, přestože byla snížena počet bitů na parametr. Kvůli tomu byl v testování snížena i počet restartů algoritmu. I přes to ovšem hodnoty pro vyšší dimenze jsou lepší než u implementace genetického algoritmu.

Genetický algoritmus

Vytvořená implementace genetického algoritmu je schopná nalézt kvalitní řešení optimalizačních problémů testovaných na funkcích Rastrigin, Rosenbrock a Schwefel.

Pro vyšší dimenze byl ovšem problém nalézt globální minimum. Z tabulek je to více než patrné (zejména funkce Schwefel). Zvětšením populace by šlo jistě výsledky zlepšit, zvětšil by se ovšem čas výpočtu.

Další práce by určitě směřovala na optimalizaci kódu a snížení času výpočtu genetického algoritmu i implementace HC12.