Реализация схемы расщепления для двумерного уравнения теплопроводности с источником

Гайсин Роберт

Филиал МГУ им. Ломоносова в г. Сарове

Аннотация В отчете описано численное решение уравнения теплопроводности в двумерной области на равномерной расчетной сетке с помощью схемы расщепления.

1 Формулировка задачи

Реализовать схему расщепления для двумерного уравнения теплопроводности с источником:

- Неоднородные граничные условия перового рода.
- Сетка равномерная, коэффициенты зависят от координат.
- Реализовать решение обратной задачи по подбору коэффициентов по заданному распределению температуры.

2 Решение прямой задачи

В двумерной области решалось уравнение теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + f(x, y, t) \tag{1}$$

При решении задачи были сделаны следующие предположения — расчетная область считалась прямоугольной, покрытой равномерной ортогональной сеткой, где на каждой из двух вертикальных границ (вдоль направления y) по m узлов, на каждой из двух горизонтальных границ (вдоль направления x) по k узлов, таким образом общее число узлов включая граничные в построенной расчетной сетке равно $m * k$. На границах области задавались граничные условия первого рода.

Численное решение предлагалось найти методом дробных шагов, поэтому в соответствие дифференциальному уравнению была поставлена система дискретных уравнений построенных на равномерной расчетной сетке в расчетной области:

$$\frac{u_i^{n+s/3} - u_i^{n+(s-1)/3}}{\tau} = a_i(\frac{u_{i-1}^{n+s/3} - 2u_i^{n+s/3} + u_{i+1}^{n+s/3}}{h_x^2} + \frac{u_{i-k}^{n+s/3} - 2u_i^{n+s/3} + u_{i+k}^{n+s/3}}{h_y^2}) + f_i^{n+s/3} \tag{2}$$

где $s = 1, 2, 3$, h_x и h_y шаги расчетной сетки по оси x и y соответственно.

Или в матричной форме записи

$$A_s u^{n+s/3} - B_s u^{n+(s1)/3} = f^{n+s/3}, A_s = E - \tau \Lambda_s, B_s = E, s = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

После исключения $u^{n+1/3}$, $u^{n+2/3}$ приходим к схеме:

$$A_3 u^{n+1} = B_3 A_2^{-1}(B_2 A_1^{-1}(B_1 u^n + \tau f^{n+1/3}) + \tau f^{n+2/3}) + \tau f^{n+1} \qquad (4)$$

Это соответствует системе линейных уравнений $Ax = b$, где вектор правых частей меняется в зависимости от времени, а матрица слева неизменна.

Так как искомые значения сеточной функции на границе области полагались известными из граничных условий, то при решении задачи матрица строилась только для внутренних узлов области. Известные граничные условия учитывались в правой части системы - для каждого элемента вектора правой части, соответствующего узлу смежному по ребру с узлом на границе прибавлялось:

$$b_i = b_i + a_i \tau \frac{u_{\Gamma_i}^{n+1}}{h_\alpha^2}, \qquad (5)$$

где $\alpha = x, y$ в зависимости от того, является ли i-тый узел смежным с граничным узлом лежащим на горизонтальной или вертикальной границе соответственно.

3 Решение обратной задачи

Для решения обратной задачи поиска коэффициентов теплопроводности по известному распределению температуры использовалось предположение, что известно два таких распределения полученные с интервалом по времени τ и функция источника равна нулю во всей расчетной области, если это не так, то предполагалось, что известна правая часть матричного уравнения (4) и распределение температуры в момент времени t.

Коэффициенты теплопроводности также рассчитывались для внутренних узлов расчетной области. Из (3) и (4) следует

$$\Lambda_3 u = \frac{u - b}{\tau} \qquad (6)$$

где как b обозначена правая часть уравнения (4). Так как $\Lambda_3 = A_c D$, где A_c диагональная матрица коэффициентов теплопроводности, D - матрица дифференциального оператора второго порядка, то коэффициенты можно рассчитать по формуле для узлов не смежных с граничными:

$$a_i = \frac{u_i - b_i}{\tau (Du)_i} \qquad (7)$$

для смежных с граничными узлов:

$$a_i = \frac{u_i - b_i}{\tau((Du)_i + u_{\Gamma_i}/h_\alpha^2)}, \quad \alpha = x, y \qquad (8)$$

где u_{Γ_i}-значение в граничном узле смежным с i-тым.

4 Реализация

Через аргументы командной строки в программу передаются описывающие прямоугольную область минимальные и максимальные значения координат по x и по y соответственно, числа m и k соответствующие числу узлов на вертикальной и горизонтальной границах соответственно. Шаг по времени tau и интервал времени T до которого будет вестись расчет с шагом τ от нулевого момента времени.

Так как матрица в левой части матричного уравнения (4) не зависит от времени, в программе с помощью внешней библиотеки (LAPACK) строится LU-разложение этой матрицы, которое затем используется для вычисления вектора неизвестных значений сеточной функции на каждом временном шаге. Время и значение вектора решения сохраняется в выходном файле. Структура выходного файла:

– минимальное значение координаты x
– максимальное значение координаты x
– минимальное значение координаты y
– максимальное значение координаты y
– число внутренних узлов области вдоль оси y (m-2)
– число внутренних узлов области вдоль оси x (n-2)
– далее и до конца время и вычисленные значения температуры в области на каждом временном шаге

На последнем шаге решается обратная задача и вычисляются коэффициенты теплопроводности и в консоль выводится значение квадрата Евклидовой нормы разности векторов соответствующих действительному значению коэффициентов теплопроводности и вычисленных в ходе решения обратной задачи.