Uvod v Buhlmanov dekompresijski model

Alan Bizjak

30.10.2010

1 Uvod

V potapljaški literaturi je mnogo govora o dekompresiji in različnih dekompresijskih modelih. Na žalost skoraj nobena literatura ne govori o samem algoritmu. Med drugim tudi ni nič napisanega v slovenščini, zato sem se odločil da opišem Buhlmanov dekompresijski model. Naj omenim samo to da Buhlman ni "izumil" modela, temveč je večino samo zbral in izpopolnil delo drugih kot so John S. Haldane, Robert D. Workman (U.S. Navy) in Heinz R. Schreiner.

2 Absorbcija inertnega plina v tkivo na konstatni globini

Za začetek poglejmo kaj se dogaja z našim telesom na konstantni globini oziroma pri konstantnem tlaku. Zaradi enostavnosti prespostavimo da smo se v trenuktu potopilo na globino s tlakom P_{alv}. V našem telesu je manjši tlak inertnega plina kot v pljučih (P_{alv}). Hitrost spremembe tlaka v tkivu je sorazmerna razliki tlakov v pljučih in v telesu. Z enačbo to zapišemo kot

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = k\left(P_{alv}(t) - P(t)\right) \tag{1}$$

- $P(t)$ - parcialni tlak inertnega plina v tkivu
- $P_{alv}(t)$ - parcialni tlak inertnega plina v dihalni mešanici oziroma v pljučih (alveolih). Le ta se lahko s časom spreminja, zato je napisana tudi časovna odvisnost.
- k - konstanta tkiva, ki nam pove kako hitro se nasiti tkivo.
- t - čas

Dobili smo nehomogeno diferencialno enačbo prvega reda z konstatnimi koeficienti.

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} + kP(t) = kP_{alv}(t) \tag{2}$$

Za reševanje diferencialne enačbe prvega reda v matematiki obstaja naslednji recept. Najprej rešimo homogeni del enačbe.

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} + kP(t) = 0 \quad \frac{\mathrm{d}P(t)}{P} = -k\mathrm{d}t \tag{3}$$

Po integraciji dobimo naslednjo enačbo

$$\ln P(t) = -kt + \ln C' \quad P(t) = Ce^{-kt}, \tag{4}$$

pri čemer sta C in C' konstanti. Rešitev nehomogene enačbe 2 dobimo z variacijo konstante. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$C'e^{-kt} - Ce^{-kt} + Ce^{-kt} = C'e^{-kt} = kP_{alv} \tag{5}$$

Pri tem je $C' = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$. Po integraciji po času dobimo

$$C = P_{alv}e^{kt} + D \tag{6}$$

Pri čemer je D nova konstanta, saj izvedli nedoločen integral. Splošna rešitev se sedaj glasi

$$P(t) = P_{alv} + De^{-kt} \tag{7}$$

Za določitev konstante D upoštevamo še robne pogoje. Pri času t=0 upoštevamo da je tkivo že nasišeno z nekim parcialnim tlakom P_{t_0}.

$$P(0) = P_{t_0} = P_{alv} + D \quad D = P_{t_0} - P_{alv} \tag{8}$$

Vstavimo kostatno D v enačbo in končna rešitev se glasi

$$P(t) = P_{alv} + [P_{t_0} - P_{alv}]e^{-kt} \tag{9}$$

Enačbo lahko nekoliko preoblikujemo in dobimo

$$P(t) = P_{t_0} + [P_{alv} - P_{t_0}][1 - e^{-kt}], \tag{10}$$

ki je v dekompresijski literaturi znana kot Haldanova enačba.

3 Absorbcija inertnega plina v tkivo pri dvigu oziroma spustu

Pri potopu potapljač tudi spreminja globino. V tem poglavju si bomo pogledali kako se spreminja tlak inertnega plina pri dvigovanju ali spučanju s konstantno hitrostjo. To pomeni da se parcialni tlak dihanega plina spreminja linearno s časom. Spreminjanje tlaka P_{alv} zapišemo kot

$$P_{alv} = P_{alv_0} + rt \tag{11}$$

Pri tem je P_{alv0} začetni parcialni tlak inertnega plina pri času t=0 in r hitrost dvigovanja v enotah tlaka na časovno enoto. Količina r je negativna pri dvigovanju in pozitivna pri spučanju v globino. Enačba se zapiše kot

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = k\left(P_{alv_0} + rt - P(t)\right) \quad \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} + kP(t) = kP_{alv_0} + krt \tag{12}$$

Zopet najprej rešujemo homogeni del enačbe.

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} + kP(t) = 0 \quad \frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} = -k\mathrm{d}t \tag{13}$$

Po integraciji dobimo

$$\ln P(t) = -kt + \ln C \quad P(t) = Ce^{-kt} \tag{14}$$

Zopet uporabimo metodo variacije konstante. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$C'e^{-kt} - kCe^{-kt} + kCe^{-kt} = kP_{alv_0} + krt \quad C' = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = kP_{alv_0}e^{kt} + krte^{kt} \tag{15}$$

Enačbo sedaj integriramo po času in dobimo

$$C = P_{alv_0}e^{kt} + rte^{kt} - \frac{r}{k}e^{kt} + D \tag{16}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$P(t) = P_{alv_0} + rt - \frac{r}{k} + De^{-kt} \tag{17}$$

Za določitev konstante D je potrebno upoštevati robni pogoj, ki se glasi $P(t = 0) = P_{t_0}$. Iz tega pogoja za konstatno D dobimo

$$D = P_{t_0} - P_{alv_0} + \frac{r}{k} \tag{18}$$

Končna rešitev se glasi

$$P(t) = P_{alv_0} + r(t - \frac{1}{k}) + [P_{t_0} - P_{alv_0} + \frac{r}{k}]e^{-kt} \tag{19}$$

Enačba je v dekompresijski literaturi znana kot Schreinerjeva enačba, saj je do nje prvi prišel Schreiner.