# Algebra, PD 7

Heorhii Lopatin

16 stycznia 2024

## Zadanie 1

Rozłóż elementy $a = 15 - 15i, b = 7 - i$ na czynniki nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$. Użyj tych rozkładów do wyznaczenia $NWD(a, b)$ w $\mathbb{Z}[i]$.

### Rozwiązanie

Korzystając z wiedzy z wykładu, liczby nierozkładalne w $\mathbb{Z}[i]$ to liczby pierwsze w $\mathbb{Z}$ postaci $4k + 3$ i liczby postaci $a + bi$, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą.
$a = 15(1 - i) = 3 \cdot 5(1 - i) = 3(2 + i)(2 - i)(1 - i)$ - każdy z czynników jest nierozkładalny.
$b = 7 - i = (2 - i)(3 + i) = (2 - i)(1 + 2i)(1 - i)$ każdy z czynnkiów jest nierozkładalny.
Więc $NWD(a, b) = (2 - i)(1 - i)$.

## Zadanie 2

Użyj algorytmu Euklidesa w $\mathbb{Q}[x]$ do wyznaczenia $NWD(f, g)$, gdzie $f = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1, g = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Wyznacz wielomiany $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ takie, że $fu + gv = NWD(f, g)$.

### Rozwiązanie

## Zadanie 3

Niech $R_1, R_2$ będą pierścieniami. Wykaż, że każdy ideał $I$ w iloczynie prostym $R_1 \times R_2$ jest postaci $I_1 \times I_2$, gdzie $I_j$ jest pewnym idealem w $R_j$, dla $j = 1, 2$.

### Rozwiązanie

Pokażmy równoważnie, że $I = e_1 I + e_2 I (\because (a, b) = e_1 a + e_2 b)$, gdzie $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.
Skoro $I$ jest zamknięty na mnożenie i jest grupą z dodawaniem, $e_i I \subseteq I \implies e_1 I + e_2 I \subseteq I$
Z drugiej strony, $\forall x \in I \; x = e_R I = x = (e_1 + e_2)x \in e_1 I + e_2 I \implies I \subseteq e_1 I + e_2 I$

Więc, $I = e_1 I + e_2 I$