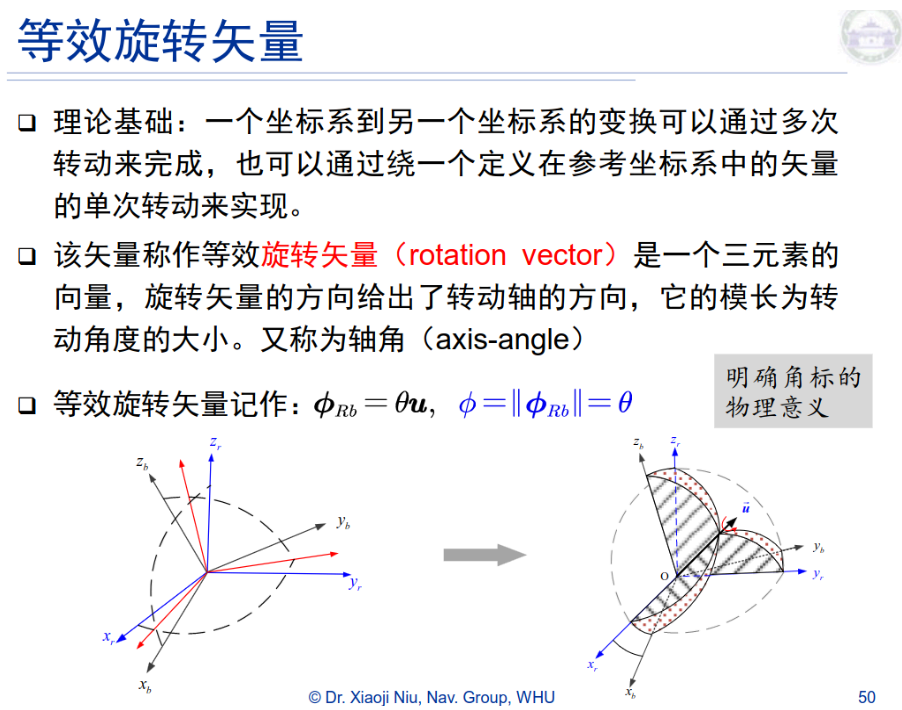
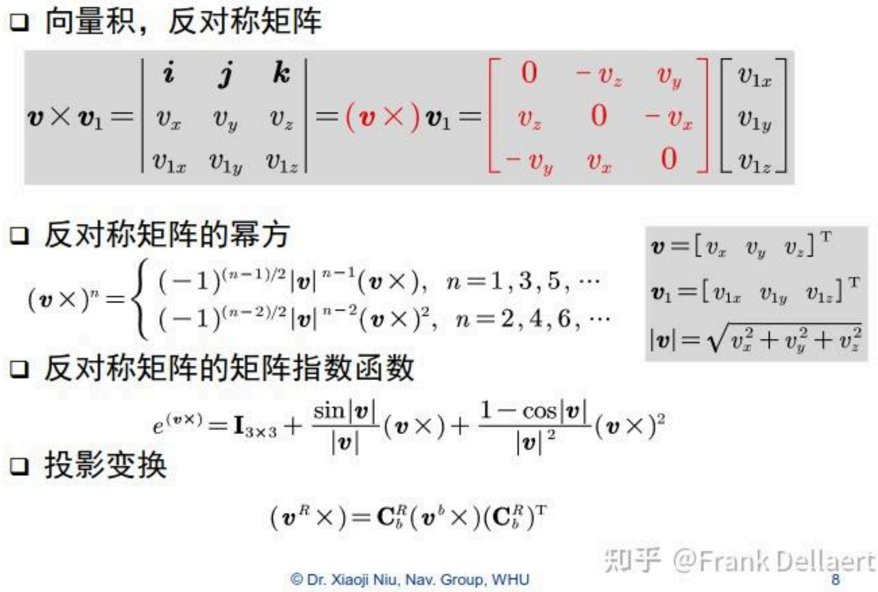


Rodrigues公式引出李代数李群

FrankDellaert
我们长棱角，是为了变成星星✨

一、数学理论部分

1.1 反对称矩阵[1]

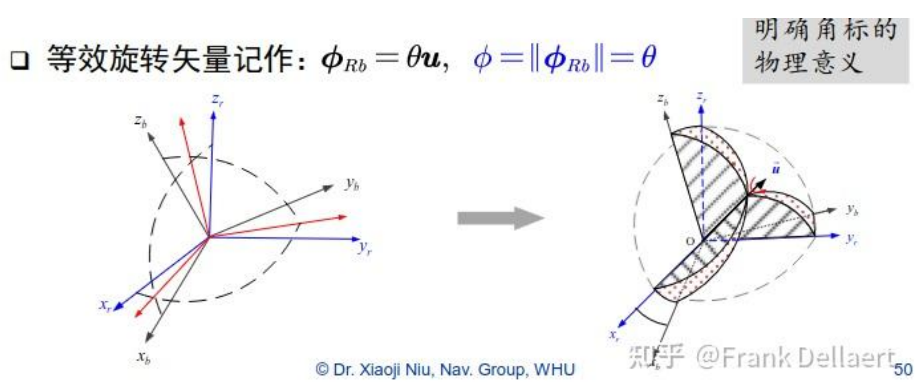


1.2 罗德里格斯旋转公式⁺

罗德里格斯旋转公式[2]用来将轴角变换到旋转矩阵的过程；

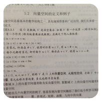
$R=(cos\theta)I+(1-cos\theta)n\cdot n^T+(sin\theta)n^\wedge$ 式中 $n^\wedge$ 表示n向量的反对称矩阵；轴角无法表达两次连续旋转，因为两次旋转的旋转轴会不一样，因此旋转角度不能直接相加，或者说轴角不满足加法的封闭性；

旋转矩阵有9个变量，但一次旋转只有3个自由度并且旋转矩阵自身存在正交约束和行列式约束从而导致旋转矩阵表示旋转时存在冗余变量，如果用四个元素进行描述，三个元素描述旋转轴，另外一个元素描述旋转角；法国人Rodrígues最早提出用一个3维向量来表示三维旋转变换，其方向与旋转轴一致，**向量的模等于旋转角度**，通常称这种向量为旋转向量，也叫做轴角(Axis Angle),轴角共有三个量且无约束，因此有三个自由度，表示为 $\omega=\theta n$；式中**n**是与旋转轴方向一致的单位向量， θ 是向量的模也就是角度；



当旋转角度为0°或180°时，Rodrígues' rotation formula将失效，此时的旋转矩阵为0；由于先旋转矩阵到轴角是一对多的关系，因此存在多种轴角组合对应一种旋转矩阵的情况[2]；但是如果把旋转角度限定[3]在 $(-\pi, +\pi)$ 开区间的话，那么**李群**(代表旋转矩阵)和**李代数**(代表轴角)是一一对应的；

Rodrígues' rotation formula **只能**应用在**三维旋转**理论体系中[4]，高翔也在他的书中提到 SE(3)⁺的指数映射与罗德里格斯公式有些相似，但不[5]完全一样；借助轴角，让我们将李代


SLAM 中从旋量代数到李代数李群
6 赞同 · 2 评论 文章

1.3 泰勒展开式

罗德里格斯公式进行展开时需要用到**泰勒展开式**[7]进行近似！

二、李代数so(3)与李群SO(3)间的互换[8]

Since every rotation of the object corresponds to some $R \in SO(3)$, we would like to write R as a function of ω and θ ，see that the matrix $\widehat{\omega}$ is a skew-symmetric[9] matrix, i.e., it satisfies $\widehat{\omega}^T = -\widehat{\omega}$.

2.1 李代数so(3)到李群SO(3)的自然指数映射⁺

$so(3)$ 实际是由所谓的**旋转向量**(Rotation Vector, 也叫旋转矢量)组成的空间[3]，而**自然指数映射**即罗德里德斯公式；通过他们，将$so(3)$中**任意**一个向量对应到了一个位于 $SO(3)$ 空间中的旋转矩阵；反之是自然对数映射⁺可以相反对应；**旋转矩阵的导数**可以由旋转向量指定[10]，指导着如何在旋转矩阵中进行微积分运算；

> 第 6 节 **Rodrígues 公式的不同形式** 会有详细的解释；

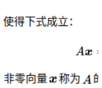
2.2 李群SO(3)到李代数so(3)的自然对数映射[11]

为什么李群SO(3)映射到李代数so(3)不用对数映射呢，因为我们没有必要直接用泰勒展开式求对数映射，有点儿大炮打蚊子的感觉，我们利用矩阵的一些性质，比如矩阵的迹，轻松求得轴角的转动角，下图来自[12]

Example A.14. Log function on $SO(3)$
Let $G = SO(3)$. Then the log function is given by $\log R = \widehat{a} = \theta\widehat{\omega}$, where $\theta \in \mathbb{R}$ and $\widehat{\omega} \in se(3)$ are given by

$$2\cos\theta + 1 = \mathrm{trace}(R) \quad \text{and} \quad \widehat{\omega} = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) \qquad R \neq I.$$

When $R = I$, $\theta = 2\pi k$ for any integer k and ω can be chosen arbitrarily. Note that the log function on $SO(3)$ is multi-valued since θ is not unique.


李群SO(3)映射到李代数so(3) (含轴角介绍)
8 赞同 · 0 评论 文章

三、李代数se(3)与李群SE(3)间的互换[8]

The axis of rotation is $\omega \in R^3$, $||\omega|| = 1$, and $q \in R^3$ is a point on the axis. This equation can be conveniently converted into homogeneous[13] coordinates by defining

群，然后李群再作用于空间点；**homogeneous**[14]就是表示该数学规律在时间或者倍乘等数学处理的作用下不会发生规律的改变。

3.1 李代数se(3)到李群SE(3)的自然指数映射[15]

$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in R^{4*4}$，这里也保持符号∧是向量到矩阵的变换，但不再表示对称矩阵的含义了！ξ的后3维还是表达的是旋转记作ϕ；ρ并不表达平移，$t = J \cdot \rho$才表达的是平移；

Proposition 2.8. Exponential map from $se(3)$ to $SE(3)$
Given $\widehat{\xi} \in se(3)$ and $\theta \in \mathbb{R}$, the exponential of $\widehat{\xi}\theta$ is an element of $SE(3)$, i.e.,

$$e^{\widehat{\xi}\theta} \in SE(3).$$

Proof. The proof is by explicit calculation. In the course of the proof, we will obtain a formula for $\exp(\widehat{\xi}\theta)$. Write $\widehat{\xi}$ as

$$\widehat{\xi} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Case 1 $(\omega = 0)$. If $\omega = 0$, then a straightforward calculation shows that

$$\widehat{\xi}^2 = \widehat{\xi}^3 = \widehat{\xi}^4 = \cdots = 0$$

so that $\exp(\widehat{\xi}\theta) = I + \widehat{\xi}\theta$ and hence

$$\boxed{e^{\widehat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \omega = 0} \qquad (2.32)$$

3.2 李群SE(3)到李代数se(3)的自然对数映射[11]

Example A.15. Log function on $SE(3)$
The log function on $SE(3)$ is given by

$$\widehat{\xi} = \log \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega} & A^{-1}p \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where $\widehat{\omega} = \log R$ and

$$A^{-1} = I - \frac{1}{2}\widehat{\omega} + \frac{2\sin\|\omega\| - \|\omega\|(1+\cos\|\omega\|)}{2\|\omega\|^2 \sin\|\omega\|}\widehat{\omega}^2 \qquad \omega \neq 0.$$

If $\omega = 0$ then $A = I$. The log function on $SE(3)$ is multi-valued since ω is not unique.

四、Rodrígues公式的不同形式

下面是回看LOAM paper[16]时遇到的公式，发现和高翔博士书中内容不一致：

$$\mathbf{R} = e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{I} + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1-\cos\theta). \quad (6)$$

In the above equation, θ is the magnitude of the rotation,

$$\theta = ||\boldsymbol{T}^L_{(k+1,i)}(4:6)||, \quad (7)$$

ω is a unit vector representing the rotation direction,

$$\omega = \boldsymbol{T}^L_{(k+1,i)}(4:6)/||\boldsymbol{T}^L_{(k+1,i)}(4:6)||, \quad (8)$$

仔细研究了下，与李泽湘老师[17]牛小骥老师教案与高翔老师的内容没有冲突，高翔老师相当于在李老师和牛老师的公式基础之上，**引入了单位矩阵**，进行替换 $\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a}^\top - \boldsymbol{I}$ 得到 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a}^\top - \boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge$ 然后代入到下图李泽湘老师的2.13和2.14之间的泰勒展开式，就得到了 $R = (cos\theta)I + (1-cos\theta)n \cdot n^T + (sin\theta)n^\wedge$ [18]

Utilizing this lemma with $a = \omega\theta$, $\|\omega\| = 1$, equation (2.11) becomes

$$e^{\widehat{\omega}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)\widehat{\omega} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)\widehat{\omega}^2$$

and hence

$$\boxed{e^{\widehat{\omega}\theta} = I + \widehat{\omega}\sin\theta + \widehat{\omega}^2(1-\cos\theta)} \quad (2.14)$$

This formula, commonly referred to as *Rodrigues' formula*, gives an efficient method for computing $\exp(\widehat{\omega}\theta)$. When $\|\omega\| \neq 1$, it may be verified (see Exercise 12) that

$$e^{\widehat{\omega}\theta} = I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|}\sin(\|\omega\|\theta) + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2}\left(1-\cos(\|\omega\|\theta)\right).$$

We now verify that $\exp(\widehat{\omega}\theta)$ is indeed a rotation matrix.

武汉大学的牛老师课题组的教案[1]

等效旋转矢量

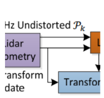
- 等效旋转矢量表示两个坐标系间的转动关系，可转换为对应的方向余弦矩阵和姿态四元数，完成姿态更新
  - Rodrigues 旋转公式

$$\mathbf{C}_b^R = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}(\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\phi}\times)$$

感悟：因为这块并没有阻碍其它事情的进展，只是知识的一次闭环，所以可以优先级调低一些；伴随矩阵的优先级就会高一些！

---------------写给未来

1. 首先找到ALOAM的代码部分看看具体如何实现的？也可以参照LOAM的源代码部分



LOAM-SLAM原理深度解析

948 赞同 · 104 评论 文章

知乎

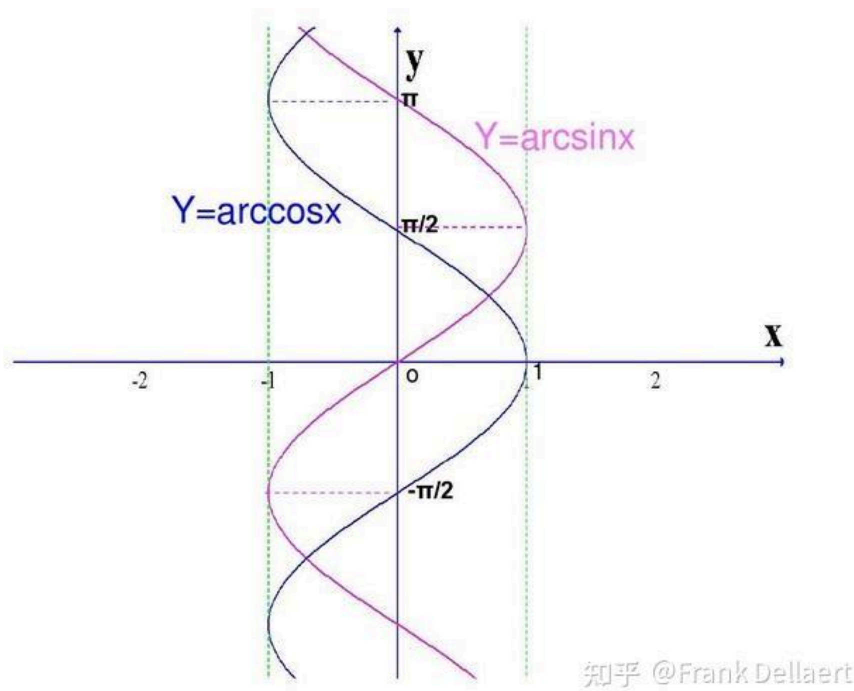
补充高翔P79的结论：旋转矩阵的导数可由旋转向量指定，指导着如何在旋转矩阵中进行微积分运算；

3. 转轴n是矩阵R特征值1对应的特征向量 P54，回家研究一下

4. 为什么李代数se(3)中的最后一行全是0，没有1？ $\xi^\wedge=\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho\\ 0^T & 0\end{bmatrix}\in R^{4*4}$

$$\xi^\wedge=\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho\\ 0^T & 0\end{bmatrix}\in R^{4*4}$$

5. 如果把旋转角度限定[3]在 $(-\pi,\ +\pi)$ 开区间，那**李群**(代表旋转矩阵)和**李代数**(代表轴角)是一一对应的？



参考

1. ^ a b http://47.99.158.1/ueditor/jsp/upload/file/20211120/1637411293911014752.pdf
2. ^ a b Rodríguez《点云配准从入门到精通》ch2.1.2 P9 郭浩
3. ^ a b c 《视觉SLAM14讲解》2th ch4.2.1 P79
4. ^ https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BD%97%E5%BE%B7%E9%87%8C%E6%A0%BC%E6%97%8B%E8%BD%AC%E5%85%AC%E5%BC%8F
5. ^ 《视觉SLAM14讲解》2th ch4.2.2 P80
6. ^ https://zhuanlan.zhihu.com/p/707950904
7. ^ 从微分(Differential)到泰勒展开式 https://zhuanlan.zhihu.com/p/716906665
8. ^ a b 李泽湘老师参与的经典书籍 R. Murray and S. Sastry 李泽湘《A mathematical introduction to robotic manipulation》CRC Press, 1994
9. ^ 李泽湘老师 2.2 Exponential coordinates for rotation
10. ^ 《视觉SLAM14讲解》2th ch4.2.1 P79
11. ^ a b 李泽湘 R. Murray and S. Sastry, A mathematical introduction to robotic manip- ulation. CRC Press, 1994. P414
12. ^ 李泽湘 R. Murray and S. Sastry, A mathematical introduction to robotic manip- ulation. CRC Press, 1994. P414
13. ^ 李泽湘 3.2 Exponential coordinates for rigid motion and twists

P41
16. ^ LOAM https://www.cnblogs.com/jiamian/p/17557362.html
17. ^ R. Murray and S. Sastry, A mathematical introduction to robotic manip- ulation. CRC Press, 1994. P28
18. ^ 高翔的引用 https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues

编辑于 2025-09-26 10:18・中国香港