

5.4、递推形式

令：

$$\eta_k^d = \begin{bmatrix} (\eta_k^{gd})^T & (\eta_k^{ad})^T \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

线上可得 η_{j-1}^{Δ} 的递推形式如下：

$$\eta_{j-1}^{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{jj-1} & 0 & 0 \\ -\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^e)^{\wedge} \Delta t & \mathbf{I} & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^e)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \eta_{j-1}^{\Delta} \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{f-1}^{-1} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \eta_{j-1}^d \quad (32)$$

令：

$$\mathbf{A}_{j-1} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{jj-1} & 0 & 0 \\ -\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^e)^{\wedge} \Delta t & \mathbf{I} & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^e)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_{j-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{f-1}^{-1} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

则有 IMU 预积分测量噪声的递推形式：

$$\eta_j^{\Delta} = \mathbf{A}_{j-1} \eta_{j-1}^{\Delta} + \mathbf{B}_{j-1} \eta_{j-1}^d \quad (34)$$

31这个公式怎么来的，不理解

下面我来解释你截图中的 公式（31）到底为什么是那样写的、它的来源是什么、它在后续推导（32）-（34）中的作用是什么。这是 IMU 预积分理论里一个常见但容易被忽略的“符号组织方式”。

✓ 1. 公式（31）到底在干什么？

图中公式（31）是：

$$\eta_k^d = \begin{bmatrix} (\eta_k^{gd})^T & (\eta_k^{ad})^T \end{bmatrix}^T$$

你可以把它理解为：

把“几何域的误差（gd）”和“加速度域的误差（ad）”拼在一起形成一个更大的误差向量。

这就是一个 定义（Definition），不是推导来的，也不是物理定律，它仅仅是为了让矩阵推导更方便。

✓ 2. 那 gd、ad 分别是什么？

在 IMU 预积分里，你的状态误差通常包括：

- 姿态误差

- 速度误差
- 位置误差

这些对应几何域 (geometric domain) :

$$\eta^{gd} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta v \\ \delta p \end{bmatrix}$$

另外还有 :

- 加速度计噪声
- 陀螺仪噪声

这些属于加速度/传感器域 (accelerometer domain) :

$$\eta^{ad} = \begin{bmatrix} n_g \\ n_a \end{bmatrix}$$

所以最终把它们组合起来 :

$$\eta^d = \begin{bmatrix} \eta^{gd} \\ \eta^{ad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta v \\ \delta p \\ n_g \\ n_a \end{bmatrix}$$

总之 :

(31) 式只是定义“完整误差向量”的方式, 把两个子误差向量拼成一个大误差向量。

✅ 3. 为什么要这样拼? (最重要的点)

因为后面你要写一个递推形式 :

$$\eta_j^d = A_{j-1}\eta_{j-1}^d + B_{j-1}\eta_j^d$$

为了这个递推成立, 你必须让整个误差写成一个大向量, 这样矩阵 A_{j-1} 、 B_{j-1} 才能“一次性作用”到所有误差上。

如果你不把误差拼成一个向量, 那么 :

- 旋转误差

- 速度误差
- 位置误差
- 加速度噪声

每个都需要单独推一遍方程，非常麻烦。

所以 (31) 本质是为了方便构建 (32)、(33)、(34) 矩阵递推式。

✅ 4. 为什么看起来“不是推导来的”？

因为这个式子 压根不需要推导，它就是一个变量组合方式的定义。

就像你在 Kalman filter 里定义：

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \\ a \end{bmatrix}$$

你不会问这个公式怎么推导，对吧？它就是为了构造一个状态向量而存在。

同理，(31) 就是：

决定把 IMU 误差状态放在一列里面。

✅ 5. 它为什么和 (32) – (34) 相关？

(32) 式是 IMU 预积分误差的展开递推。

为了写成：

$$\eta_{ij} = A \eta_{i(j-1)} + B \eta^d$$

你必须先告诉读者“我的误差向量长什么样”，也就是 (31)。

✅ 总结一句话

公式 (31) 是一个“误差向量的定义”，不是从物理推导来的，而是为了让后面的 IMU 预积分误差递推 (32–34) 能够使用统一矩阵形式。

如果你需要

- 我可以把 (31) 带入 (32) 详细展开给你看
- 也可以解释 A、B 的维度为什么那样
- 或推导 IMU 预积分完整误差动力学

你想继续深入哪个？



则有 IMU 预积分测量噪声的递推形式：

$$\eta_{ij}^A = \mathbf{A}_{j-1} \eta_{ij-1}^A + \mathbf{B}_{j-1} \eta_j^d \quad (34)$$

IMU 预积分测量噪声的协方差矩阵就有了如下的递推计算形式：

$$\Sigma_{ij} = \mathbf{A}_{j-1} \Sigma_{ij-1} \mathbf{A}_{j-1}^T + \mathbf{B}_{j-1} \Sigma_{\eta} \mathbf{B}_{j-1}^T \quad (35)$$

从形式上看，IMU 预积分协方差的递推形式类似于卡尔曼滤波中的状态变量协方差的预测方程，其中的 \mathbf{Q} 就相当于 Σ_{η} ，在每个递推周期都固定的加上这样一个常量噪声，表示从当前状态转移到下一个状态的过程中，存在各种噪声，总是会引入新的误差：

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

IMU 预积分测量噪声的协方差矩阵（即噪声分布）将用来计算信息矩阵，在优化框架中起到

34是如何推导出35的

下面我把 (34) → (35) 的推导给你一步一步写清楚，这是 IMU 预积分中最核心的一步，本质上就是 **线性系统噪声协方差传播**，和卡尔曼预测 ($\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$) 完全一样。

✓ 1. 先写出 (34) 式

$$\eta_{ij} = \mathbf{A}_{j-1} \eta_{i(j-1)} + \mathbf{B}_{j-1} \eta_j^d \quad (34)$$

其中

- η_{ij} 是预积分误差
- \mathbf{A}_{j-1} 是状态转移矩阵
- \mathbf{B}_{j-1} 是噪声输入矩阵
- η_j^d 是 IMU 噪声（白噪声，均值为 0，协方差为 Σ_{η} ）

你的目的：推导误差协方差的递推公式。

✓ 2. 定义协方差（随机变量之间的定义）

协方差定义：

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{E} [\eta_{ij} \eta_{ij}^T]$$

将 (34) 代入：

$$\eta_{ij} = A_{j-1} \eta_{i(j-1)} + B_{j-1} \eta_j^d$$

✓ 3. 展开协方差表达式

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{E} \left[(A_{j-1} \eta_{i(j-1)} + B_{j-1} \eta_j^d) (A_{j-1} \eta_{i(j-1)} + B_{j-1} \eta_j^d)^T \right]$$

展开：

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} = \mathbb{E} \left[A_{j-1} \eta_{i(j-1)} \eta_{i(j-1)}^T A_{j-1}^T + A_{j-1} \eta_{i(j-1)} (\eta_j^d)^T B_{j-1}^T \right. \\ \left. + B_{j-1} \eta_j^d \eta_{i(j-1)}^T A_{j-1}^T + B_{j-1} \eta_j^d (\eta_j^d)^T B_{j-1}^T \right] \end{aligned}$$

✓ 4. 利用噪声的独立性（关键）

IMU 噪声与之前的误差状态独立：

$$\mathbb{E} [\eta_{i(j-1)} (\eta_j^d)^T] = 0$$

$$\mathbb{E} [\eta_j^d \eta_{i(j-1)}^T] = 0$$

所以中间的两项直接消掉。

剩下：

$$\Sigma_{ij} = A_{j-1} \mathbb{E} [\eta_{i(j-1)} \eta_{i(j-1)}^T] A_{j-1}^T + B_{j-1} \mathbb{E} [\eta_j^d (\eta_j^d)^T] B_{j-1}^T$$

再把协方差符号换回来：

$$\Sigma_{ij} = A_{j-1} \Sigma_{i(j-1)} A_{j-1}^T + B_{j-1} \Sigma_{\eta} B_{j-1}^T \quad (35)$$

这就是你截图中的 (35) 式。

✓ 5. 最终结果 (35) 式解释

$$\Sigma_{ij} = A_{j-1} \Sigma_{i(j-1)} A_{j-1}^T + B_{j-1} \Sigma_{\eta} B_{j-1}^T \quad (35)$$

完全对应卡尔曼滤波预测步骤：

$$P_k = F P_{k-1} F^T + Q$$

其中

- $A_{j-1} \leftrightarrow F$
- $B_{j-1} \Sigma_{\eta} B_{j-1}^T \leftrightarrow Q$

也就是说：

✨ (35) 式就是 IMU 预积分噪声协方差的离散传播公式

✨ 和 KF 状态预测协方差完全一样

✓ 一句话总结

从 (34) 到 (35) 的推导，就是将误差递推方程带入协方差定义，并利用噪声独立性把交叉项去掉，得到标准形式 $AP A^T + Q$ 。

如果你需要，我可以继续帮你推：

- A、B 如何从误差动力学线性化来？
- 噪声向量 η_j^d 的协方差矩阵怎么构造？
- 为什么预积分会有这么多块交叉矩阵？

你想深入哪一部分？

