

5.4、递推形式

令：

$$\eta_k^d = \begin{bmatrix} (\eta_k^{gd})^T & (\eta_k^{ad})^T \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

线上可得  $\eta_{ij}^\Delta$  的递推形式如下：

$$\eta_{ij}^\Delta = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} & 0 & 0 \\ -\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_f^\Delta)^\Delta \Delta t & \mathbf{I} & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_f^\Delta)^\Delta \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \eta_{ij-1}^\Delta + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{f-1}^\Delta \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \eta_{j-1}^d \quad (32)$$

令：

$$\mathbf{A}_{j-1} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} & 0 & 0 \\ -\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_f^\Delta)^\Delta \Delta t & \mathbf{I} & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_f^\Delta)^\Delta \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_{j-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{f-1}^\Delta \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

则有 IMU 预积分测量噪声的递推形式：

$$\eta_{ij}^\Delta = \mathbf{A}_{j-1} \eta_{ij-1}^\Delta + \mathbf{B}_{j-1} \eta_{j-1}^d \quad (34)$$

31这个公式怎么来的，不理解



下面我来解释你截图中的 公式（31）到底为什么是那样写的、它的来源是什么、它在后续推导（32）-（34）中的作用是什么。这是 IMU 预积分理论里一个常见但容易被忽略的“符号组织方式”。

## ✓ 1. 公式（31）到底在干什么？

图中公式（31）是：

$$\eta_k^d = \begin{bmatrix} (\eta_k^{gd})^T & (\eta_k^{ad})^T \end{bmatrix}^T$$

你可以把它理解为：

把“几何域的误差（gd）”和“加速度域的误差（ad）”拼在一起形成一个更大的误差向量。

这就是一个 定义（Definition），不是推导来的，也不是物理定律，它仅仅是为了让矩阵推导更方便。

## ✓ 2. 那 gd、ad 分别是什么？

在 IMU 预积分里，你的状态误差通常包括：

- 姿态误差

- 速度误差
- 位置误差

这些对应几何域 (geometric domain) :

$$\eta^{gd} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta v \\ \delta p \end{bmatrix}$$

另外还有 :

- 加速度计噪声
- 陀螺仪噪声

这些属于加速度/传感器域 (accelerometer domain) :

$$\eta^{ad} = \begin{bmatrix} n_g \\ n_a \end{bmatrix}$$

所以最终把它们组合起来 :

$$\eta^d = \begin{bmatrix} \eta^{gd} \\ \eta^{ad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta v \\ \delta p \\ n_g \\ n_a \end{bmatrix}$$

总之 :

(31) 式只是定义“完整误差向量”的方式, 把两个子误差向量拼成一个大误差向量。

### ✓ 3. 为什么要这样拼? (最重要的点)

因为后面你要写一个递推形式 :

$$\eta_j^d = A_{j-1}\eta_{j-1}^d + B_{j-1}\eta_j^d$$

为了这个递推成立, 你必须让整个误差写成一个向量, 这样矩阵  $A_{j-1}$ 、 $B_{j-1}$  才能“一次性作用”到所有误差上。

如果你不把误差拼成一个向量, 那么 :

- 旋转误差

- 速度误差
- 位置误差
- 加速度噪声

每个都需要单独推一遍方程，非常麻烦。

所以 (31) 本质是为了方便构建 (32)、(33)、(34) 矩阵递推式。

## ✓ 4. 为什么看起来“不是推导来的”？

因为这个式子 压根不需要推导，它就是一个变量组合方式的定义。

就像你在 Kalman filter 里定义：

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \\ a \end{bmatrix}$$

你不会问这个公式怎么推导，对吧？它就是为了构造一个状态向量而存在。

同理，(31) 就是：

决定把 IMU 误差状态放在一列里面。

## ✓ 5. 它为什么和 (32) – (34) 相关？

(32) 式是 IMU 预积分误差的展开递推。

为了写成：

$$\eta_{ij} = A \eta_{i(j-1)} + B \eta^d$$

你必须先告诉读者“我的误差向量长什么样”，也就是 (31)。

## ✓ 总结一句话

公式 (31) 是一个“误差向量的定义”，不是从物理推导来的，而是为了让后面的 IMU 预积分误差递推 (32–34) 能够使用统一矩阵形式。

## 如果你需要

- 我可以把 (31) 带入 (32) 详细展开给你看
- 也可以解释 A、B 的维度为什么那样
- 或推导 IMU 预积分完整误差动力学

你想继续深入哪个？



Branched from [公式31来源解析](#)

我并不理解32是怎么推导出来的

明白了，你想深入理解 **公式 (32) 是怎么从IMU连续动力学推导出来的**。我们可以一步步拆开，确保每一步都清楚。

## 1 背景：IMU误差模型

IMU连续时间状态通常包含：

$$x = \begin{bmatrix} R \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad \text{误差向量} \quad \eta = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta v \\ \delta p \end{bmatrix}$$

连续时间误差动力学（简化线性化）：

$$\begin{cases} \dot{\delta\theta} = -\hat{\omega}\delta\theta - n_g \\ \dot{\delta v} = -R\hat{a}\delta\theta - n_a \\ \dot{\delta p} = \delta v \end{cases}$$

这里：

- $\delta\theta$ ：旋转误差
- $\delta v$ ：速度误差
- $\delta p$ ：位置误差

- $n_g, n_a$ ：陀螺仪/加速度计噪声
- $\hat{\cdot}$  表示反对称矩阵（cross product 矩阵）

## 2 离散化（前向欧拉法）

假设采样时间  $\Delta t$ ，状态从时刻  $j-1$  推到  $j$ ：

$$\eta_j \approx \eta_{j-1} + \dot{\eta}_{j-1} \Delta t$$

拆开三部分：

### 1. 旋转误差：

$$\delta\theta_j \approx \delta\theta_{j-1} - (\hat{f}_{j-1} - b_i^a) \Delta t$$

### 2. 速度误差：

$$\delta v_j \approx \delta v_{j-1} - \Delta \tilde{R}_{ij-1} (\hat{f}_{j-1} - b_i^a) \delta\theta_{j-1} \Delta t + \text{noise term}$$

### 3. 位置误差：

$$\delta p_j \approx \delta p_{j-1} + \delta v_{j-1} \Delta t + \text{加速度积分噪声项}$$

这里的  $\Delta \tilde{R}_{ij-1}$  就是从  $j-1$  到  $j$  的预积分旋转矩阵。

## 3 矩阵形式（状态转移矩阵）

把上面三部分写成矩阵形式，就是公式（32）：

$$\eta_{ij}^{\Delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \tilde{R}_{ij-1} & 0 & 0 \\ -\Delta \tilde{R}_{ij-1} (\hat{f}_{j-1} - b_i^a)^{\wedge} \Delta t & I & 0 \\ -\frac{1}{2} \Delta \tilde{R}_{ij-1} (\hat{f}_{j-1} - b_i^a)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t I & I \end{bmatrix}}_{A_{j-1}} \eta_{i(j-1)}^{\Delta} + \underbrace{\begin{bmatrix} J_r^{j-1} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta \tilde{R}_{ij-1} \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta \tilde{R}_{ij-1} \Delta t^2 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{j-1}}$$

解释：

- 左边的矩阵乘以前一时刻误差 → 旋转、速度、位置的线性传播
- 右边的矩阵乘以IMU噪声 → 速度/位置被噪声扰动
- 这里用了二阶近似（ $\Delta t^2/2$  对位置积分加速度误差）

## 4 总结推导思路

1. 写连续时间误差动力学（旋转、速度、位置）
2. 对每个分量用欧拉法或矩阵积分近似离散化
3. 统一成大向量  $\eta^\Delta = [\delta\theta, \delta v, \delta p]^T$
4. 重新组织成矩阵形式  $\eta_j^\Delta = A\eta_{j-1}^\Delta + B\eta_{j-1}^d$

所以公式（32）本质上就是**线性化+离散化+噪声耦合**的结果。

---

我可以帮你画一张图，把 **连续误差** → **离散误差** → **矩阵形式** 的关系可视化，这样直观上你能看到每个矩阵块是怎么来的。

你希望我画吗？

