

# IMU 预积分的理解和推导



苏笑云

自动驾驶算法工程师

348 人赞同了该文章 ›

本文是对【泡泡机器人】刊载的邱笑晨编写的《[IMU 预积分+总结与公式推导](#)》的理解和整理，推导过程和原文基本一致。不同的是，本文对 IMU 框架的主线和关键内容进行了讲解和说明，避免刚开始接触 IMU 预积分的时候直接接触大量的公式推导而看的一头雾水。个别地方根据本人习惯对术语等做了调整，例如理想值改为真值。

## 一、概述

在基于 BA 的[视觉惯性融合算法+](#)中，各个节点的载体状态都是有待优化的量。IMU 预积分的初衷，是希望借鉴纯视觉 [SLAM+](#) 中图优化的思想，将（点云或图像）帧与帧之间 IMU 相对测量信息转换为约束节点（载体位姿）的边参与到优化框架中。

因此 IMU 预积分的立足点就落在相邻两帧（点云）之间的 IMU 积分测量值计算及其动态更新上，获得每周期 PVQ（位置、速度和姿态）增量的测量值，对照其他通过非 IMU 方式获得的 PVQ 增量的估计值，进而获得 PVQ 增量的残差。然后以该残差构造代价函数对每个节点的 PVQ 进行迭代更新和优化。

在这个过程中通过对 IMU 测量噪声协方差的递推，获得了每周期 PVQ 增量测量值的噪声分布，再通过求协方差的逆的平方根，获得了信息矩阵，对残差中 PVQ 的比例进行调节，起到平衡权重的作用。

虽然待优化变量有很多个（ $\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j, \delta \mathbf{b}_i^g, \delta \mathbf{b}_i^a$ ），但是 IMU 预积分对应的残差主要是 PVQ 三个增量，因此信息矩阵要调节的比例也主要针对残差中的 PVQ 三项，而非全部待优化变量。

IMU 预积分理论的独立性很强，提供了从理论到优化方法（定义了具体的残差公式）的完整支持，外部接口（界面）清晰，能够与激光雷达、视觉等多种测量传感器搭配，实现精确的位姿解算。

IMU 预积分理论总共包含四个关键内容，分别是 IMU 预积分的优化方法、IMU 预积分测量值的速算、IMU 预积分优化的残差比例调节、重力加速度和[绝对姿态+](#)求解。

### 1.1 IMU 预积分的优化方法

IMU 预积分不仅仅是一个理论，而且是一个实践指南，它给出了基于 IMU 预积分进行各节点 PVQ 优化的具体方法。优化的核心是构造代价函数，而代价函数的核心是构造残差，IMU 预积分给出了具体的残差定义（详见本文第七章），即相邻两帧（点云）之间 PVQ 增量的估计值和测量值之差：

$$\text{残差}_{ij} = \text{PVQ增量估计值}_{ij} - \text{PVQ增量测量值}_{ij}$$

其中估计值通常需要通过非 IMU 的方式获得，例如通过点云到 Map 的匹配，这也是 IMU 预积分与外部的唯一界面，或者说是 IMU 预积分对外部的唯一依赖，只要有了这个估计值，IMU 预积分就可以独立运作了。测量值就来自 IMU 预积分。



在图优化的过程中，要进行局部甚至全局的反复优化，随着优化的推进，IMU的测量偏差（bias）也会变化，残差中的PVQ增量测量值就需要重新计算，IMU预积分就提供了一个近似的测量值修正方法，免去了积分的重新计算，是预积分降低计算量的关键。

这个残差公式可以直接添加到诸如Ceres的优化框架中，用以实现一个代价函数，通过多轮迭代实现对每个节点精确位姿的解算。

因此本文档自始至终的一个主线就是求解相邻两帧之间PVQ增量的测量值，试图通过在既有IMU预积分测量值上添加一个近似修正量的方式来避免重新积分。

## 1.2 IMU预积分测量值的速算

前面提到，之所以PVQ增量测量值需要重新积分，关键在于角速度和加速度的测量偏差（bias）在优化过程中会发生变化，而PVQ增量测量值包含了偏差，自然会发生变化。

为了避免重新积分，IMU预积分的解决方案是：设定“新偏差=旧偏差+更新量”，获得bias的更新量，然后把PVQ增量测量值当做bias的函数，求该函数对bias的导数，则bias更新量与函数导数（斜率）的乘积就是bias发生变化后PVQ测量值的修正量（近似值）。这样一来每当偏差发生变化就能够通过线性运算直接获得新的测量值，而不需要重新积分。

$$PVQ\text{增量测量值（新）} = PVQ\text{增量测量值（旧）} + \frac{\partial PVQ\text{增量测量值}}{\partial \text{测量偏差}bias} \times \text{偏差更新量}$$

以上就是IMU预积分理论避免重新积分，降低运算量的关键。

## 1.3 IMU预积分优化的残差比例调节

除了避免优化过程中反复计算积分，IMU预积分理论的另一个关键贡献在于实现了测量噪声（即协方差）的递推计算，并将协方差转换成信息矩阵，应用于优化过程，调节残差的比例，起到平衡权重的作用。

回忆卡尔曼滤波<sup>+</sup>，也有一个协方差矩阵P，迭代更新，在Update步骤，P被用于计算增益K，增益K实际上是估计值的不确定性在总的系统不确定性中所占的比值，然后增益K被用于调节残差的比例。

在IMU预积分中协方差的作用和卡尔曼滤波器中协方差P的作用完全相同，也是需要迭代更新，也是用于调节残差的比例。在IMU预积分中，首先将测量噪声从PVQ增量测量值中分离出来，证明其服从高斯分布，然后推导出协方差的递推公式。

所谓信息矩阵其实就是用于调节残差比例的权重，首先要取协方差矩阵的逆矩阵，相当于取了协方差的倒数，方差越大权重越小，反之权重越大，然后再将逆矩阵转成信息矩阵。

## 1.4 重力加速度和绝对姿态求解

传统的SLAM算法很少使用加速度来计算速度和位置，原因是加速度计的测量值是包含反向重力的比力，而不是纯加速度。这使得一旦姿态不准确，重力投影误差将对速度和位置积分产生严重影响。

IMU预积分理论最大的贡献是对这些IMU相对测量进行处理，使得它与绝对位姿解耦（或者只需要线性运算就可以进行校正），从而大大提高优化速度。另外，这种优化架构还使得加计测量中不受待见的重力变成一个有利条件——重力的存在将使整个系统对绝对姿态（指相对水平地理坐标系的俯仰角和横滚角，不包括真航向）可观。要知道纯视觉VO或者SLAM是完全无法得到绝对姿态的。

IMU 预积分理论直接使用加速度的测量值进行速度和位置的估计，没有使用诸如编码器、毫米波雷达等测速装置。那么IMU 预积分是如何解算出重力加速度的方向，从而获得绝对位姿的呢？

IMU 预积分仍然是通过优化的方法获得重力加速度的方向的，而用于优化的残差仍然是下面这个公式：

$$\text{残差}_{ij} = \text{PVQ增量估计值}_{ij} - \text{PVQ增量测量值}_{ij}$$

其中PVQ 增量测量值是通过IMU 预积分获得的测量值，其中耦合了重力加速度，特别是P和V，并不是通常意义上的位移和速度，而是根据IMU 加速度计的测量值计算出来的“所谓的”位移和速度，耦合了重力加速度之后在垂直方向上位移和速度会产生巨大的分量，P和V的这个垂直分量在真实世界是不存在的，存在的唯一目的是协助找出重力加速度的真正方向。

而PVQ 增量估计值是通过非IMU 方式获得的（例如点云到Map的匹配），原本是没有重力加速度分量在其中的，P和V在垂直方向也就没有对应的分量，那么我们根据对重力加速度方向的估计，添加一个重力加速度的分量进去（即待求解的重力加速度及其方向），使P和V的估计值在垂直方向获得对应的分量。再通过对残差的迭代优化，使估计值和测量值相匹配，就能够获得重力加速度的真实方向。

## 二、预积分的引出

假设  $k = i$  帧的Q、V、P分别是  $\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i$ ，则可以利用从  $k = i$  到  $k = j - 1$  帧的所有IMU 测量，直接更新得到  $k = j$  帧的  $\mathbf{R}_j, \mathbf{v}_j, \mathbf{p}_j$ ，详细如下：

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right) \cdot \Delta t\right) \quad (1)$$

其中， $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k$  是第  $k$  帧的角速度的测量值， $\mathbf{b}_k^g$  是第  $k$  帧的角速度偏差， $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$  是第  $k$  帧的角速度测量噪声。

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i + \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_k \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right) \cdot \Delta t \quad (2)$$

其中， $\mathbf{g}$  是重力加速度， $\tilde{\mathbf{f}}_k$  是第  $k$  帧的加速度测量值， $\mathbf{b}_k^a$  是第  $k$  帧的加速度偏差， $\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$  是第  $k$  帧的加速度测量噪声。加速度的测量值耦合了重力加速度，因此需要加上一个  $\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}$  进行抵消。

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \mathbf{v}_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2} \mathbf{R}_k \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right) \cdot \Delta t^2 \right] \quad (3)$$

加速度的测量值耦合了重力加速度，因此需要加上一个  $\frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t^2$  进行抵消。

为了避免每次更新初始的  $\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i$  都要重新积分求解  $\mathbf{R}_j, \mathbf{v}_j, \mathbf{p}_j$ ，引出PVQ增量真值如下，这里应用了正交矩阵（旋转矩阵）的转置等于正交矩阵的逆的性质：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \\ &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right) \cdot \Delta t\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_{ij} &\triangleq \mathbf{R}_i^T \left( \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t^2 \right]\end{aligned}\quad (6)$$

注意：上面公式中的  $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 、 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$  并不是通常意义上的速度和位置变化量，而是根据 IMU 加速度计的测量值计算出来的所谓的位移和速度增量，由于 IMU 加速度测量值耦合了重力加速度，因此对应的 IMU 预积分真值也必须含有一个重力加速度的分量，否则无法解释速度的变化量为什么还要减去  $\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}$ 。

### 三、测量值=真值+噪声

下面分别对  $\Delta \mathbf{R}_{ij}$ 、 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 、 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$  进行整理，尝试将噪声项（ $\eta_k^{gd}$  和  $\eta_k^{ad}$ ）从 PVQ 增量真值中分离出来，使 PVQ 增量测量值具有“测量值=真值+噪声”的形式，以便于后续推导出噪声的递推公式。

假设在预积分的区间内，两帧间的偏差是相等的，即  $\mathbf{b}_i^g = \mathbf{b}_{i+1}^g = \dots = \mathbf{b}_j^g$  以及  $\mathbf{b}_i^a = \mathbf{b}_{i+1}^a = \dots = \mathbf{b}_j^a$ 。

#### 3.1 $\Delta \mathbf{R}_{ij}$

对于  $\Delta \mathbf{R}_{ij}$  则有：

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t - \eta_k^{gd} \Delta t) \\ &\approx \prod_{k=i}^{j-1} \left\{ \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \eta_k^{gd} \Delta t) \right\} \\ &\stackrel{2}{=} \text{Exp}((\tilde{\omega}_i - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t) \cdot \text{Exp}((\tilde{\omega}_{i+1} - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t) \cdot \dots \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2} \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+2,i+3} \cdot \dots \\ &\stackrel{3}{=} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2} \cdot \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^T \cdot \mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t) \cdot \dots \\ &\stackrel{4}{=} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i,j} \cdot \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,j}^T \cdot \mathbf{J}_r^i \cdot \eta_i^{gd} \Delta t) \cdot \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{i+2,j}^T \cdot \mathbf{J}_r^{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{gd} \Delta t) \cdot \dots \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1,j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t)\end{aligned}$$

其中 1 处使用了性质：当  $\delta \vec{\phi}$  是小量时：

$$\text{Exp}(\vec{\phi} + \delta \vec{\phi}) \approx \text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi}) \quad (8)$$

其中 2 处将  $\prod$  展开，3 和 4 处利用 Adjoint 性质，将所有的  $\Delta \tilde{\mathbf{R}}$  换到最左侧：

$$\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \text{Exp}(\mathbf{R}^T \vec{\phi}) \quad (9)$$

令：

$$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \quad (10)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \quad (11)$$

$$\text{Exp} \left( -\delta \vec{\phi}_{ij} \right) = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left( -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{ad} \Delta t \right) \quad (12)$$

则有：

$$\Delta \mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp} \left( -\delta \vec{\phi}_{ij} \right) \quad (13)$$

$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}$  即PVQ增量测量值，它由陀螺仪测量值和对陀螺仪偏差的估计得到，而  $\delta \vec{\phi}_{ij}$  或  $\text{Exp} \left( \delta \vec{\phi}_{ij} \right)$  即测量噪声。

### 3.2 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$

将式 (13) 代入式 (5)，得到：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t \\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp} \left( -\delta \vec{\phi}_{ik} \right) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t \\ &\stackrel{1}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left( \mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \eta_k^{ad}) \cdot \Delta t \\ &\stackrel{2}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left( \mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t \right] \\ &\stackrel{3}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \cdot \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \cdot \Delta t \right] \\ &\quad + \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t \right] \end{aligned}$$

其中1处使用了“当  $\vec{\phi}$  是小量时，有一阶近似： $\text{exp} \left( \vec{\phi}^\wedge \right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$ ，或  $\text{Exp}(\vec{\phi}) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$ ”的性质。

其中2处忽略高阶小项  $\delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \eta_k^{ad}$ 。

其中3处使用了  $\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$  的性质。

再令：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1} [\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \cdot \Delta t] \\ \delta \mathbf{v}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1} [\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \eta_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t]\end{aligned}\quad (15)$$

得到：

$$\Delta \mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij} \quad (16)$$

$\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$  即速度增量测量值，它由IMU测量值和对偏差的估计或猜测计算得到。 $\delta \mathbf{v}_{ij}$  即其测量噪声。

### 3.3 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$

将式 (13) 和 (16) 代入式 (6) 得到：

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}) \cdot \Delta t^2 \right] \\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[ (\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \text{Exp}(-\delta \vec{\phi}_{ik}) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}) \cdot \Delta t \right] \\ &\stackrel{(1)}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[ (\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}) \cdot \Delta t^2 \right] \\ &\stackrel{(2)}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[ (\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \cdot \Delta t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\mathbf{I} - \delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \cdot \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 - \delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t \right]\end{aligned}$$

其中(1)处使用了“当 $\vec{\phi}$ 是小量时，有一阶近似： $\text{Exp}(\vec{\phi}) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$ ”的性质。

其中(2)处忽略高阶小项 $\delta \vec{\phi}_{ik}^\wedge \boldsymbol{\eta}_k^{ad}$

其中(3)处使用了 $\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$ 的性质。再令：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t^2 \right] \\ \delta \mathbf{p}_{ij} &\triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right]\end{aligned}\quad (18)$$

得到：

$$\Delta \mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij} \quad (19)$$

$\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}$  即位置增量测量值，它由IMU测量值和对偏差的估计得到。 $\delta \mathbf{p}_{ij}$  即其测量噪声。

### 3.4 小结

上面得到 PVQ 增量真值和测量值的关系如下：

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{R}_{ij} &\triangleq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp}(-\delta \vec{\phi}_{ij}) \\ \Delta \mathbf{v}_{ij} &\triangleq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij} \\ \Delta \mathbf{p}_{ij} &\triangleq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij}\end{aligned}\quad (20)$$

代入 PVQ 增量真值表达式 (4) (5) (6) 得到：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &\approx \Delta \mathbf{R}_{ij} \text{Exp}(\delta \vec{\phi}_{ij}) = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta \vec{\phi}_{ij}) \\ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &\approx \Delta \mathbf{v}_{ij} + \delta \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{R}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}) + \delta \mathbf{v}_{ij} \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &\approx \Delta \mathbf{p}_{ij} + \delta \mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_i^T \left( \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) + \delta \mathbf{p}_{ij}\end{aligned}\quad (21)$$

上述表达式即为 PVQ 增量测量值（含 IMU 测量值及偏差估计值）与真值之间的关系，即形如“测量值=真值+噪声”的形式。

#### 四、测量噪声的分布形式

下面对 PVQ 增量测量噪声进行分析，证明其符合高斯分布（目的是给出其协方差的计算表达式），令预积分的测量噪声为：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \vec{\phi}_{ij}^T & \delta \mathbf{v}_{ij}^T & \delta \mathbf{p}_{ij}^T \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

我们希望其满足高斯分布，即  $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \sim N(\mathbf{0}_{9 \times 1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij})$ 。由于  $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$  是  $\delta \vec{\phi}_{ij}^T$ 、 $\delta \mathbf{v}_{ij}^T$ 、 $\delta \mathbf{p}_{ij}^T$  的线性组合，下面分别分析这三个噪声项的分布形式。

##### 4.1 $\delta \vec{\phi}_{ij}^T$ 的分布形式

对式 (12) 两边取对数有：

$$\delta \vec{\phi}_{ij} = -\log \left( \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left( -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t \right) \right) \quad (23)$$

令：

$$\boldsymbol{\xi}_k = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \eta_k^{gd} \Delta t \quad (24)$$

由于  $\eta_k^{gd}$  是小量，因此  $\boldsymbol{\xi}_k$  也是小量，于是  $\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\xi}_k) \approx \mathbf{I}$ ， $\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\xi}_k) \approx \mathbf{I}$ ，并利用 BCH 公式的近似形式：

$$\log(\text{Exp}(\vec{\phi}) \cdot \text{Exp}(\delta \vec{\phi})) = \vec{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}(\vec{\phi}) \cdot \delta \vec{\phi} \quad (25)$$

对式 (23) 推导如下：

$$\begin{aligned}
\delta\vec{\phi}_{ij} &= -\log\left(\prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right) \\
&= -\log\left(\text{Exp}(-\xi_i) \prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right) \\
&\approx -\left(-\xi_i + \mathbf{I} \cdot \log\left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right)\right) = \xi_i - \log\left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right) \\
&= \xi_i - \log\left(\text{Exp}(-\xi_{i+1}) \prod_{k=i+2}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right) \\
&\approx \xi_i + \xi_{i+1} - \log\left(\prod_{k=i+2}^{j-1} \text{Exp}(-\xi_k)\right) \\
&\approx \dots \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \xi_k
\end{aligned} \tag{26}$$

即：

$$\delta\vec{\phi}_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \eta_k^{gd} \Delta t \tag{27}$$

由于  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T$ 、 $\mathbf{J}_r^k$  和  $\Delta t$  都是已知量，而  $\eta_k^{gd}$  是零均值高斯噪声，因此  $\delta\vec{\phi}_{ij}$  (的一阶近似) 也是零均值高斯噪声。

#### 4.2 $\delta\mathbf{v}_{ij}^T$ 的分布形式

由于  $\delta\vec{\phi}_{ij}$  近似拥有了高斯噪声的形式，且  $\eta_k^{ad}$  也是零均值高斯噪声，根据  $\delta\mathbf{v}_{ij}^T$  的表达式可知其也拥有高斯分布的形式。

#### 4.3 $\delta\mathbf{p}_{ij}^T$ 的分布形式

类似于  $\delta\mathbf{v}_{ij}^T$ ， $\delta\mathbf{p}_{ij}^T$  也拥有高斯分布的形式。

### 五、测量噪声的递推形式

下面推导预积分测量噪声的递推形式，即  $\eta_{ij-1}^{\Delta} \rightarrow \eta_{ij}^{\Delta}$ ，及其协方差  $\Sigma_{ij}$  的递推形式  $\Sigma_{ij-1} \rightarrow \Sigma_{ij}$ ，下面依次推导  $\delta\vec{\phi}_{ij-1} \rightarrow \delta\vec{\phi}_{ij}$ 、 $\delta\mathbf{v}_{ij-1} \rightarrow \delta\mathbf{v}_{ij}$ 、 $\delta\mathbf{p}_{ij-1} \rightarrow \delta\mathbf{p}_{ij}$ 。

#### 5.1、 $\delta\vec{\phi}_{ij-1} \rightarrow \delta\vec{\phi}_{ij}$



$$\begin{aligned}
\delta \vec{\phi}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&\stackrel{1}{=} \sum_{k=i}^{j-2} (\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j})^T \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}^T \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} \delta \vec{\phi}_{ij-1} + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t
\end{aligned} \tag{28}$$

其中1处利用了  $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T = \mathbf{I}$  以及  $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{lm} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{mn} = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ln}$  的性质，推导过程中进行了一些变形。

### 5.2、 $\delta \mathbf{v}_{ij-1} \rightarrow \delta \mathbf{v}_{ij}$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} \left[ \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \dots \\
&\quad + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ij-1} \cdot \Delta t \\
&= \delta \mathbf{v}_{ij-1} + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \cdot \delta \vec{\phi}_{ij-1} \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{29}$$

直接进行加项拆分即可完成推导。

### 5.3、 $\delta \mathbf{p}_{ij-1} \rightarrow \delta \mathbf{p}_{ij}$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\
&= \delta \mathbf{p}_{ij-1} + \delta \mathbf{v}_{ij-1} \Delta t \\
&\quad - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta \vec{\phi}_{ij-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t^2
\end{aligned} \tag{30}$$

同样直接进行加项拆分即可完成推导。

### 5.4、递推形式

令：

$$\boldsymbol{\eta}_k^d = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\eta}_k^{gd})^T & (\boldsymbol{\eta}_k^{ad})^T \end{bmatrix}^T \tag{31}$$

综上可得  $\boldsymbol{\eta}_{ij}^d$  的递推形式如下：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta} \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \quad (32)$$

令：

$$\mathbf{A}_{j-1} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \Delta t^2 & \Delta t \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_{j-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

则有IMU预积分测量噪声的递推形式：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta} + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \quad (34)$$

IMU预积分测量噪声的协方差矩阵就有了如下的递推计算形式：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_{ij-1} \mathbf{A}_{j-1}^T + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta} \mathbf{B}_{j-1}^T \quad (35)$$

从形式上看，IMU预积分协方差的递推形式类似于卡尔曼滤波中的状态变量协方差的预测方程，其中的 $\mathbf{Q}$ 就相当于 $\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}$ ，在每个递推周期都固定的加上这样一个常量噪声，表示从当前状态转移到下一个状态的过程中，存在各种噪声，总是会引入新的误差：

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

IMU预积分测量噪声的协方差矩阵（即噪声分布）将用来计算信息矩阵，在优化框架中起到平衡权重的作用。在实际应用中首先要求协方差矩阵的逆矩阵，相当于取了协方差的倒数，方差越大权重越小，反之权重越大，然后再将逆矩阵转成信息矩阵，与残差相乘，起到调节残差比例的作用。

关于噪声的内容到此为止，接下来讨论偏差的问题。

## 六、偏差更新时的预积分测量值更新

前面的预积分计算，都是在假设积分区间内陀螺和加计的偏差恒定的基础上推导的。当bias发生变化时，若仍按照前述公式，预积分测量值需要整个重新计算一遍，这将非常的耗费算力。为了解决这个问题，提出了利用线性化来进行偏差变化时预积分项的一阶近似更新方法。

下面先给出各更新公式，首先做几个符号说明： $\bar{\mathbf{b}}_i^g$ 和 $\bar{\mathbf{b}}_i^a$ 是旧的偏差，新的偏差 $\hat{\mathbf{b}}_i^g$ 和 $\hat{\mathbf{b}}_i^a$ 由旧偏差和更新量 $\delta \mathbf{b}_i^g$ 和 $\delta \mathbf{b}_i^a$ 相加得到：即 $\hat{\mathbf{b}}_i^g \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g$ ， $\hat{\mathbf{b}}_i^a \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i^a + \delta \mathbf{b}_i^a$ 。于是有预积分关于偏差估计值变化的一阶近似更新公式如下：

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g) &\approx \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) \cdot \text{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right) \\ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a) &\approx \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a) &\approx \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a\end{aligned}$$

为了便于理解，做符号简化如下：

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g), & \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a), & \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a), & \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a)\end{aligned}$$

得到简化后的公式如下：

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij} &\approx \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right) \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}_{ij} &\approx \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij} &\approx \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a\end{aligned} \quad (36)$$

式（36）说明了IMU预积分是如何计算出测量值的修正值的，为什么雅可比能够起到修正值的作用？

1. 其中的  $\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}$  表示旧的测量值，其中包含了旧的偏差  $\bar{\mathbf{b}}_i^g$  和  $\bar{\mathbf{b}}_i^a$ 。
2. 其中的  $\Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij}, \Delta \hat{\mathbf{v}}_{ij}, \Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij}$  表示新的测量值，其中包含了新的偏差  $\hat{\mathbf{b}}_i^g$  和  $\hat{\mathbf{b}}_i^a$ 。
3. 新偏差=旧偏差+更新量  $\delta \mathbf{b}_i^g$  和  $\delta \mathbf{b}_i^a$ ，那么，如果把测量值当做偏差的函数，只需要在旧的测量值上添加一个近似的修正量就可以获得近似的新测量值，而不需要重新积分。
4. 而这个修正量（增量）就是用偏差的更新量  $\delta \mathbf{b}_i^g$  和  $\delta \mathbf{b}_i^a$  乘以函数的导数（即斜率）获得。

这样一来，对于i、j两帧之间的IMU积分我们只需要做一次就可以了（即式36中的  $\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}$ ），通过测量值函数对偏差的偏导数（即雅可比）和偏差更新量  $\delta \mathbf{b}_i^g, \delta \mathbf{b}_i^a$  就可以近似的计算出修正量，获得新测量值的近似值，而不需要重新积分。

如果优化过程中起始位姿发生了变化，则雅可比也相应更新。而偏差更新量  $\delta \mathbf{b}_i^g, \delta \mathbf{b}_i^a$  本身就是待优化的变量之一，自然也是相应更新。从而测量值的修正量实现了自动更新。

以上就是IMU预积分避免重新积分，降低运算量的关键。

其中的偏导项定义如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left( -\Delta \bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \mathbf{J}_r^k \Delta t \right) \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \left( \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left( \tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \Delta t \right) \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \left( \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \right) \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left( \tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a \right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \Delta t^2 \right] \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t^2 \right]
\end{aligned} \tag{37}$$

其中  $\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r \left( (\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right)$ 。

## 七、优化与残差

在实际应用中，通常以  $\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j$  等为导航求解的目标，同时由于IMU的偏差也是不可忽视的，因此，全部的导航状态是  $\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j, \delta \mathbf{b}_i^g, \delta \mathbf{b}_i^a$ 。

残差定义如下，其中第一部分是PVQ增量的估计值，需要通过非IMU的方式获得，例如点云到Map的匹配，第二部分是PVQ增量的测量值，即通过第六章推导的“偏差更新时的预积分测量值更新”方法获得的修正后的测量值，这种近似的修正方式免去了积分的重新计算，是预积分降低计算量的关键。

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}} &\triangleq \log \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \left( \bar{\mathbf{b}}_i^g \right) \cdot \text{Exp} \left( \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \right]^T \cdot \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \right\} \\
&\triangleq \log \left[ \left( \Delta \hat{\mathbf{R}}_{ij} \right)^T \Delta \mathbf{R}_{ij} \right] \\
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} &\triangleq \mathbf{R}_i^T \left( \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij} \right) - \left[ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \left( \bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a \right) + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right] \\
&\triangleq \Delta \mathbf{v}_{ij} - \Delta \hat{\mathbf{v}}_{ij} \\
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}} &\triangleq \mathbf{R}_i^T \left( \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \right) - \left[ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} \left( \bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a \right) + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right. \\
&\quad \left. \triangleq \Delta \mathbf{p}_{ij} - \Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij} \right]
\end{aligned}$$

有了残差，接下来就变成了一个非线性最小二乘问题，通过迭代求解增量的方式，不断更新状态变量，使损失函数下降：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i &\leftarrow \mathbf{R}_i \cdot \text{Exp} \left( \delta \vec{\phi}_i \right) \\
\mathbf{p}_i &\leftarrow \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i \\
\mathbf{v}_i &\leftarrow \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i \\
\mathbf{R}_j &\leftarrow \mathbf{R}_j \cdot \text{Exp} \left( \delta \vec{\phi}_j \right) \\
\mathbf{p}_j &\leftarrow \mathbf{p}_j + \mathbf{R}_j \cdot \delta \mathbf{p}_j \\
\mathbf{v}_j &\leftarrow \mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j \\
\delta \mathbf{b}_i^g &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g \\
\delta \mathbf{b}_i^a &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^a + \delta \mathbf{b}_i^a
\end{aligned} \tag{39}$$

在利用各类方法进行非线性最小二乘计算时，需要提供残差关于这些状态变量的 Jacobian。  
对于姿态来说，一般更习惯采用扰动模型（详见《视觉SLAM十四讲》P75，这种模型比直接对李代数求导能获得更好的 Jacobian 形式），因此为了统一状态的表述形式，我们一般采用对扰动/摄动/增量进行求导来获取 Jacobian 矩阵。

关于雅可比矩阵的推导，详见《IMU 预积分总结与公式推导》。

为了确保残差朝着噪声分布的方向去优化，需要残差乘以第五章获得的信息矩阵，以平衡权重。

最后，想了解更多体系的相关课程学习，推荐深蓝学院SLAM的专门课程：



基于多传感器融合的定位和建图系统 - 深蓝学院 - 专注人工智能与自动驾驶的学习平台  
[www.shenlanxueyuan.com/channel/6KGf5xXEu](http://www.shenlanxueyuan.com/channel/6KGf5xXEu)

编辑于 2023-01-29 16:33 · 四川

[同时定位和地图构建 \(SLAM\)](#)

[激光 SLAM](#)

写下你的评论...

