Experiencia 3

Camilo Valenzuela Carrasco

Departamento de informática
Universidad Técnica Federico Santa Maria

Estadística Computacional

Estimador de Máxima Verosimilitud

- Una forma de estimar los parámetros de una distribución es utilizando el **Estimador de Máxima Verosimilitud**[1]
- El **Estimador de Máxima Verosimilitud** busca maximizar la probabilidad conjunta de todos los datos.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood`

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una muestra de n observaciones IID[2], que se sabe que pertenecen a una familia de distribuciones, cuya función de densidad de probabilidad es $f(\cdot|\theta)$ con θ los parámetros de la función.
La función de distribución conjunta se define como:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta)$$

Podemos verla como una función que depende de los parámetros θ:

$$\mathcal{L}(\theta\,; x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta).$$

El **Estimador de Máxima Verosimilitud** busca los parámetros que maximizan la **Función de Verosimilitud** $\mathcal{L}(\theta\,; x_1, \ldots, x_n)$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Independent_and_identically_distributed

Generalmente al maximizar, funciones con productorias no son muy conventientes para utilizar, por lo que para maximizar la **Función de Verosimilitud** $\mathcal{L}$ se utiliza la **Log-Verosimilitud**

$$\ell(\theta) = \ln \mathcal{L}(\theta\,;\,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \theta),$$

Esta función al ser lineal es más simple de derivar y encontrar un máximo analíticamente.

Utilizando Log-Verosimilitud

Supongamos que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son observaciones iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
La **Función de Verosimilitud** se define como:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma\,;\, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}$$

Luego utilizamos la función Log-Verosimilitud

$$\ell(\mu, \sigma) = -n \cdot log(\sigma) - \frac{n}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Utilizando Log-Verosimilitud

- Para máximizar podemos derivar con respecto a cada parámetro para encontrar la solución analítica, pero en el laboratorio vamos a obtenerlo de manera empírica.
- Para optimizar la función utilizaremos `optim` que busca minimizar la función que uno le entregue.
  Como buscamos maximizar le entregamos $-\ell(\theta)$

Example

- x = muestra
- funcionMenosLog(p, x) = Returna $\ell(p)$ utilizando los x_i de la muestra x
- resultado = optim(par = c(6,3), fn = funcionMenosLog, x = muestra)
  En este caso le pasamos un arreglo de parámetros, ya que buscamos los dos parámetros de la distribución.
- Para conocer los parámetros finlaes utilizamos *resultado$par*