ILI-286: Computación Científica II
Laboratorio #4
“Resolución de ecuaciones Diferenciales Parciales”

Claudio Torres   Axel Símonsen   Martín Villanueva

19 de Diciembre 2015

Desarrollo

Para el desarrollo de la experiencia, se deja a elección del estudiante, los intervalos $\Delta x = h$ y $\Delta t = k$ a utilizar para la generación del stencil. Se espera que se explique el criterio utilizado para la elección del mismo.

Análisis contextualizado

Las ecuaciones diferenciales parciales poseen diferentes aplicaciones en distintas disciplinas. La motivación de resolver estas por métodos numéricos recae en la necesidad de aproximar soluciones a problemas que de otra forma no podríamos o sería muy costoso encontrar la solución de manera exacta (como siempre la aproximación computacional se vuelve extremadamente útil). Estas ecuaciones pueden ser parabólicas, hiperbólicas o elipticas. Se ve el caso de las tan conocidas ecuaciones de Maxwell, las cuales, en descripción breve son un conjunto de 4 ecuaciones las cuales describen los fenómenos electromagnéticos.

Sea la siguiente ecuación:

Ley de Ampere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

Esta ecuación dice que si se tiene un conductor, con densidad de corriente J, este produce un campo magnético cuyo rotor apunta en la misma dirección que J
Se sabe además que los campos magnéticos se desplazan en forma de ondas electromagnéticas, las cuales pueden viajar en un medio o en el vacío.

1. Obtenga la ecuación de onda característica, para el campo magnético **en el vacio**[1]
   Hint: Utilice la ley de Gauss
   Hint 2: $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$

2. ¿Que representan los términos ϵ_0 y μ_0 físicamente ?

3. Realice la discretización de la ecuación de onda obtenida en *1.1.*

4. Realize un análisis de estabilidad[2] para la ecuación de onda del campo magnético, donde $\epsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, con $c = 3 \cdot 10^8$, la velocidad de la luz. ¿que ocurre con los intervalos $\Delta x, \Delta y$ y Δt, a causa de los términos constantes?

5. Explique como resolvería el problema utilizando lo visto en clases. Incluya la discretización del problema

[1] Note que en el vacío no existe densidad de corriente
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition`

Análisis práctico:

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t) && (2)\\
u(x,0) &= f(x) && (3)\\
u_t(x,0) &= g(x) && (4)\\
\alpha u(-1,t) + (1-\alpha)u_x(-1,t) &= l(t) && (5)\\
\beta u(1,t) + (1-\beta)u_x(1,t) &= r(t) && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

Donde c, es la velocidad, y los parametros α y β, definen las condiciones iniciales.

Además las condiciones pueden ser de manera periodica, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t) && (8)\\
u(x,0) &= f(x) && (9)\\
u_t(x,0) &= g(x) && (10)\\
u(-1,t) &= u(1,t) && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

- **Dirichlet:** $\alpha = \beta = 1$
- **Neumann:** $\alpha = \beta = 0$
- **Robin:** $\alpha, \beta \in (0,1)$
- **Mixed:** $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, o viceversa

1. Implemente la función pde_solver, que resuelva la EDP al recibir los siguiente parámetros:
   - intervalos (*step sizes*) h, k, para espacio y tiempo respectivamente
   - T_{max}, hasta donde se quiere conocer el comportamiento de la onda
   - velocidad c(x)
   - condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$
   - Tipo de ecuación *Period*, si la ecuación es periodica o no
   - α y β, cuando la ecuación no es periódica
   - $l(t)$ y $r(t)$, cuando la ecuación no es periódica

2. Utilizando la implementación anterior, determine la longitud de onda y el tiempo en el cual la onda completa un periodo. Utilice los siguientes datos:

   - $c^2 = 1$
   - $u(x, 0) = 100 \sin(x^2)$
   - $u_t(x, 0) = 200x \cos(x^2)$
   - $l(t) = r(t) = 0$

   Repita el procedimiento para todas las condiciones iniciales (Dirichlet, Neumann, Robin, Mixed, periódicas). Concluya para las distintas condiciones.

   Utilice para la discretización 500 puntos.

3. Para la resolución del item anterior, resuelva con n puntos para la discretización, con $n = \{100, 300, 500, 700, 1000\}$. Grafique las ondas resultantes.

4. Resuelva nuevamente, utilizando 500 puntos para la discretización, esta vez aumentando el valor de k, hasta que exista inestabilidad. Compare mediante gráficos lo que sucede entre la versión estable versus la inestable. Concluya sobre lo anterior.

Instrucciones:

(a) La estructura del laboratorio es la siguiente:

   (a) Título, nombre(s) de estudiante(s), email(s) y rol(s).
   (b) Introducción.
   (c) Desarrollo y análisis de resultados.
   (d) Conclusiones.
   (e) Referencias.

(b) El laboratorio debe ser realizado en `IPython` notebook (con `Python2` o `Python3`).

(c) Se evaluará la correcta utilización de librerias `NumPy` y `SciPy`, así como la correcta implementación de algoritmos vectorizados cuando se indique.

(d) El archivo de entrega debe denominarse Lab4-apellido1-apellido2.tar.gz, y debe contener un directorio con todos los archivos necesarios para ejecutar el notebook, junto con un archivo README indicando explícitamente la versión utilizada de Python.

(e) El descuento por día de atraso será de 30 puntos, con un máximo de 1 día de atraso. No se recibirán entregas después de este día.

(f) El trabajo es personal o <u>en grupos de a 2</u>, no se permite compartir código, aunque sí se sugiere discutir aspectos generales con sus compañeros. Copias exactas serán sancionadas con nota 0.

(g) El no seguir estas instrucciones, implica descuentos en su nota obtenida.