ILI-286: Computación Científica II
Laboratorio #2
"Integración numérica aplicada"

Claudio Torres Axel Símonsen Martín Villanueva

15 de Noviembre 2015

Desarrollo

Para el desarrollo de la experiencia, se deja a elección del estudiante, los intervalos h a utilizar para la integración. Se espera que se explique el criterio utilizado para la elección del mismo.

Integración Impropia

Como se vió en el curso, los métodos de integración numérica, son útiles al momento de integrar funciones que no podrían resolverse de manera analítica, al no poseer una antiderivada respectiva. Éstas se calculan en base a un intervalo específico de manera de obtener un resultado numérico para una integral en un intervalo $[a, b]$. Sin embargo existen integrales en las cuales quisiéramos saber su aproximación, mientras mas nos acercamos al infinito (ya sea negativo o positivo). Sea la siguiente función:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \tag{1}$$

La cual corresponde a una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 1$. Dada ésta distribución realice lo siguiente:

1. Proponga un cambio de variable para cambiar los limites de integración a un intervalo finito $[a, b]$.
2. Implemente *Midpoint Rule*, *Trapezoid Method*, y *Simpson's Rule* (cada una en su forma compuesta), junto a *Gaussian Quadrature* (con sus pesos respectivos). Estime la complejidad algorítmica de cada método.
3. Calcule la integral para $x = 10^{\alpha}$, utilizando 50 puntos, es decir, $\alpha \in \{0, 1, 2, ..., 49\}$. Adjunte en gráficos los tiempos de computación para cada método y cada valor de α, junto a gráficos de los resultados de la integración para los métodos y parametros. Analice sus resultados para distintos valores de h, elegidos por usted.
4. Explique en palabras que sucede para $x = 0$. Proponga una alternativa e implementela para calcular la integral en el intervalo $(-\infty, 0]$, utilizando cualquiera de los métodos. Argumente el porque el método escogido.
5. Utilizando todo lo anterior encuentre una forma de aproximar la integral en el intervalo $(-\infty, \infty)$, utilizando alguno de los métodos. Explique detalladamente sus pasos y haga un análisis de su procedimiento.

The Caputo's Fractional Derivative:

Se conoce actualmente el operador de derivación, el cual calcula la *enésima derivada* de una función cualquiera, pero, ¿que sucede cuando nuestro valor $n \notin \mathbb{N}$? A partir de ésta pregunta nace el calculo fraccionario que amplía los conceptos de derivadas e integrales para valores no enteros.

Se define una forma para obtener derivadas fraccionarias mediante el llamado *Riemann-Liouville Fractional Differential Operator*, definido a continuación:

Sea $\alpha > 0, t > \alpha$ y $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$:

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, & 0 < \alpha < 1,\ n \in \mathbb{N}, \\ \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Con $\Gamma(x)$, la función Gamma.

Notar que para $\alpha > 1$, es lo mismo que aplicar la derivada fraccionaria, y sobre eso, aplicar la derivada entera. Por ejemplo, la derivada en $\alpha = 1.5$, es aplicar la derivada en 0.5 y luego aplicar la primera derivada.

1. Realice un cambio de variable para que la integral quede en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Implemente la función **fraction_diff**(f, t, α), que calcule la derivada fraccionaria en α de la función $f(t)$ entregada, evaluada en el punto t según la definición anterior. Utilice el método que estime conveniente, argumentando el porque de su elección. Si lo cree necesario, puede incluir más parametros de entrada.

3. Calcule:
   - $\dfrac{d^{0.2}}{dt^{0.2}} 20$
   - $\dfrac{d^{1.5}}{dt^{1.5}} \sin(t)$
   - $\dfrac{d^{46.4}}{dt^{46.4}} e^t$
   - $\dfrac{d^{0.7}}{dt^{0.7}} t$
   - $\dfrac{d^{0.3}}{dt^{0.3}} \log(t)$
   - $\dfrac{d^{0.5}}{dt^{0.5}} t^2$
   - $\dfrac{d^{0.5}}{dt^{0.5}} \tanh(t)$
   - Analice el comportamiento de las funciones anteriores al aumentar los valores de α entre su entero inferior y superior. Adjunte tablas y gráficos si lo cree necesario para el análisis.
     Para este punto utilice para la evaluación $t \in [0, 2\pi]$.

Instrucciones:

(a) La estructura del laboratorio es la siguiente:

  (a) Título, nombre(s) de estudiante(s), email(s) y rol(s).
  (b) Introducción.
  (c) Desarrollo y análisis de resultados.
  (d) Conclusiones.
  (e) Referencias.

(b) El laboratorio debe ser realizado en `IPython` notebook (con `Python2` o `Python3`).

(c) Se evaluará la correcta utilización de librerias `NumPy` y `SciPy`, así como la correcta implementación de algoritmos vectorizados cuando se indique.

(d) El archivo de entrega debe denominarse Lab2-apellido1-apellido2.tar.gz, y debe contener un directorio con todos los archivos necesarios para ejecutar el notebook, junto con un archivo README indicando explícitamente la versión utilizada de Python.

(e) El descuento por día de atraso será de 30 puntos, con un máximo de 1 día de atraso. No se recibirán entregas después de este día.

(f) El trabajo es personal o <u>en grupos de a 2</u>, no se permite compartir código, aunque sí se sugiere discutir aspectos generales con sus compañeros. Copias exactas serán sancionadas con nota 0.

(g) El no seguir estas instrucciones, implica descuentos en su nota obtenida.