RT-Bibel Ultra

GER

Februar 2026

Vorwort

Liebe Regelungstechniker

Dies ist mein neue Auflage der RT-Bibel für Regelungstechnik basierend auf dem Umdruck zur Vorlesung Regelungstechnik 47. Auflage. Außerdem stütze ich mich hier auf die Arbeit von Anonymer Wauwau und der originalen RT-Bibel.

Dieses Werk soll als Lernhilfe und Nachschlagewerk ergänzend zum Umdruck dienen. Hier findet ihr Lösungswege und -vorschläge zu den Themenbereichen der Klausur basierend auf Altklausuren und dem Treffpunkt. Deswegen ist der Aufbau nach den Themenbereichen des Umdrucks aufgebaut, um so Erläuterungen zu bestimmten Definitionen und Beispielen in Zusammenhang mit den Aufgabenstellungen der Altklausuren zu bringen.

Ich wünsche euch viel Erfolg beim Lernen und drücke euch allen die Daumen, dass ihr besteht!

Euer GER

Hinweise

Diese aktuelle Version ist noch **NICHT** vollständig.

Mein Ziel ist es, dieses Dokument zum ultimativen Nachschlagewerk für die Klausur zu machen. Deswegen bitte ich euch um eure Hilfe und Unterstützung dies umzusetzen.

Fügt bitte so viele Hinweise, Lösungsansätze und Korrekturen hinzu. Außerdem könnt ihr hier `https://github.com/gemurica/Regelungstechnik-Bibel-Ultra/issues` ebenfalls Fehler oder Anmerkungen machen. Der Code für dieses Dokument ist öffentlich verfügbar und wer die Möglichkeit hat, kann gerne auf GitHub Ergänzungen direkt Pushen und somit direkt in diese Datei hinzufügen.

Somit kann diese Bibel auch nach der nächsten Klausur von euch weiter verbessert werden.

- Die Inhalte ab Kapitel 15 Kalmanfilter sind noch meine aus meiner ursprünglichen Formelsammlung und dementsprechend noch nicht den richtigen Kapiteln hinzugefügt.
- Alte Bilder aus "RT-Bibel | Neues Testament"habe ich bisher auch noch nicht hinzugefügt.
- Ich werde noch alle restlichen Hinweise aus dem Umdruck hinzufügen, bisher habe ich nur die aus Kapitel 1 & 2.
- Besonders Begriffe für den Index mit Verweis auf die Seite im Umdruck sowie eine kleine Erläuterung sind wünschenswert, weil manche Begriffe im Index des Umdrucks nicht zu finden sind und somit das Lösen von Aufgaben erschweren.
- Hier `https://github.com/gemurica/Regelungstechnik-Bibel-Ultra/blob/main/main.pdf` findet ihr immer die aktuelleste Version.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Steuerung und Regelung

1.2 Grundstruktur des Regelkreises

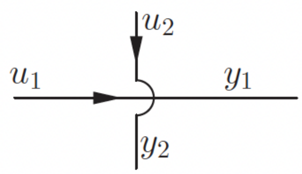
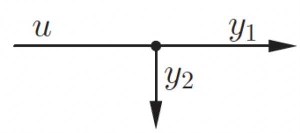
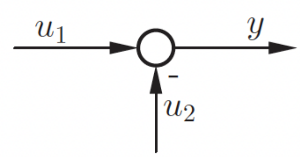
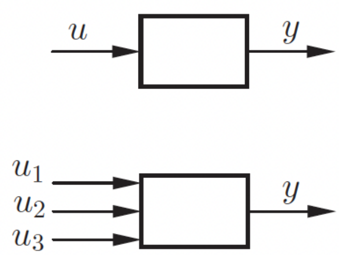
Bezeichnung	Symbol	Funktion
Wirkungslinien Signalübertragung		$y_1 = u_1$ $y_2 = u_2$
Verzweigungsstelle		$y_1 = u$ $y_2 = u$
Summenpunkt		$y = u_1 - u_2$
Übertragungsblock		$y = f(u)$ $y = f(u_1,\, u_2,\, u_3,\, ...)$

Tabelle 1-1: Elemente des Wirkungsplans

Abbildung 1: Symbole der Grundstruktur des Regelkreises.

1.2.1 Hinweis zu Vorzeichen (1.2.1)

Falsches Vorzeichen im Wirkungsplan → 1 Punkt Abzug!
Daher ist es empfehlenswert, auch wenn keine Koeffizienten an den Übertragungsblöcken notwendig sind, die DGLs vollständig zu linearisieren, um alle Vorzeichen korrekt zu ermitteln.

Signale und Systeme
Ein Signal ist eine (physikalische) Größe, deren Wert einen Informationsgehalt besitzt. Ein Signal

heißt dynamisch, wenn sich der Wert des Signals über die Zeit ändern kann. Ein System Σ ist eine durch eine Systemgrenze von der Umgebung abgegrenzte Einheit, die über Signale mit der Umgebung Informationen austauschen kann. Ein dynamisches System nutzt dabei dynamische Signale und man unterscheidet aufgrund des Ursache-Wirkungs-Prinzips zwischen Eingangssignalen $u(t)$, die auf das System einwirken, und Ausgangssignalen $y(t)$, die die Reaktion des Systems auf die Eingangssignale darstellen.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 5

Bezeichnungen für Systeme

Die folgenden Bezeichnungen werden in der Regelungstechnik weitestgehend synonym verwendet: System, Glied, Übertragungssystem, dynamisches System, Übertragungsblock, Regelkreisglied, Übertragungsglied, Regelkreiselement, Übertragungselement.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 6

Definition der Signale und Systeme im Regelkreis

Die Regelgröße y ist die Ausgangsgröße der Regelstrecke, die auf einem Wert gehalten werden soll. Die Führungsgröße w (Sollwert) ist eine von außen zugeführte Größe. Die Stellgröße u ist die Ausgangsgröße des Reglers. Störgröße z wirkt von außen auf die Regelstrecke. Die Messgröße y_m wird vom Messglied bereitgestellt. Messrauschen n wirkt auf die Messgröße. Die Regelstrecke ist das zu regelnde System. Der Regler vergleicht Mess- und Führungsgröße. Das Messglied stellt die Messung bereit.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 8

Offener und geschlossener Regelkreis

Das Übertragungsverhalten in Bild 1-6 mit Rückführung wird als geschlossener Regelkreis bezeichnet. Das Übertragungsverhalten in Bild 1-7 ohne Rückführung wird als offener Regelkreis bezeichnet.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 9

1.2.2 Vorzeichenkonvention

Umlauf $-1 \rightarrow$ Minus an die Führungsgröße, z.B. $w = v_{soll}, t_{soll}, etc.$
Umlauf $+1 \rightarrow$ Minus an die Regelgröße (Ausgang), z.B. $y = v, t, etc.$

1.2.3 Vorzeichenänderung im Umlauf z.B. $y = -G \cdot x$

Hinter Kasten von G einen Umkehrpunkt!

1.3 Beispiele technischer Regelungen

Relevante Bilanzen und Gleichungen ausgewählter Fachgebiete

Mechanik

- Bilanzen:
  - Dynamisches Kräftegleichgewicht (2. Newtonsches Gesetz):

$$M \cdot \ddot{x} = \sum F_i$$

    - M: Masse
    - x: Weg/Ort, $\ddot{x}$: Beschleunigung
    - F_i: Kräfte
  - Drallsatz:
$$J \cdot \ddot{\Phi} = \sum M_i$$
    - J: Trägheitsmoment
    - Φ: Winkel, $\ddot{\Phi}$: Winkelbeschleunigung
    - M_i: Momente

- Bauteile:
  - Hookesche Feder:
$$F_{F,\text{translatorisch}} = C \cdot X \qquad M_{F,\text{rotatorisch}} = C \cdot \Phi$$
    - C: Federkonstante
    - X: Auslenkung (translatorisch), Φ: Winkel (rotatorisch)
    - F_F: Federkraft, M_F: Federmoment
  - Dämpfer:
$$F_{D,\text{translatorisch}} = D \cdot \dot{x} \qquad M_{D,\text{rotatorisch}} = D \cdot \dot{\Phi}$$
    - D: Dämpfungskoeffizient
    - $\dot{x}$: Geschwindigkeit, $\dot{\Phi}$: Winkelgeschwindigkeit
    - F_D: Dämpferkraft, M_D: Dämpfermoment

- Kinematik:
  - Zusammenhang von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung:
$$a = \dot{v} = \ddot{x} \quad \text{bzw.} \quad x = \int v \,\mathrm{d}t = \int \left(\int a \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t$$
    - x: Ort, v: Geschwindigkeit, a: Beschleunigung
  - Zusammenhang zwischen Winkel und Kreisfrequenz:
$$\omega = \dot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t$$
    - φ: Winkel, ω: Kreisfrequenz

- Übersetzungsverhältnis:
$$i = \frac{n_{An}}{n_{Ab}} = \frac{\omega_{An}}{\omega_{Ab}} = \frac{d_{Ab}}{d_{An}} = \frac{z_{Ab}}{z_{An}} = \frac{M_{Ab}}{M_{An}}$$
  - n: Drehzahl, ω: Winkelgeschwindigkeit
  - d: Durchmesser, z: Zähnezahl
  - M: Moment, Indizes An/Ab: Antrieb/Abtrieb

- Leistung:

$$P = \omega \cdot M$$

  - P: Leistung, ω: Winkelgeschwindigkeit, M: Moment

Thermodynamik

- Bilanz:
  - Energiebilanz:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum \dot{H}_i + \sum \dot{Q}_j + \sum P_k$$

    * U: innere Energie
    * $\dot{H}_i$: Enthalpieströme, $\dot{Q}_j$: Wärmeströme
    * P_k: Leistungen

- Stoffgesetze:
  - Enthalpiestrom:

$$\dot{H} = \dot{M} \cdot c_p \cdot \Delta T$$

    * $\dot{H}$: Enthalpiestrom, $\dot{M}$: Massenstrom
    * c_p: spezifische Wärmekapazität (p), ΔT: Temperaturänderung
  - Innere Energie:

$$U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$$

    * U: innere Energie, M: Masse
    * c_v: spezifische Wärmekapazität (v), ΔT: Temperaturänderung
  - Ideales Gasgesetz:

$$P \cdot V = M \cdot R \cdot T$$

    * P: Druck, V: Volumen, R: Gaskonstante, T: Temperatur

Elektrotechnik

- Bilanzen:
  - Erste Kirchhoffsche Regel (Knotenregel):

$$0 = \sum I_i$$

    * I_i: Ströme
  - Zweite Kirchhoffsche Regel (Maschenregel):

$$0 = \sum U_i$$

    * U_i: Spannungen

- Bauteile:
  - Widerstand:

$$U = R \cdot I$$

    * U: Spannung, R: Widerstand, I: Strom

- Kondensator:

$$I_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

    * I_C: Kondensatorstrom, C: Kapazität
    * U: Spannung

- Spule:

$$U_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

    * U_L: Spulenspannung, L: Induktivität
    * I: Strom

• Leistung:

$$P = U \cdot I$$

- P: Leistung, U: Spannung, I: Strom

1.3.1 Tiefenregelung eines Unterwasserfahrzeuges

1.3.2 Regelung von Windkraftanlagen

1.3.3 Kraftregelung beim Fräsen

1.3.4 Regelung eines Bioreaktors

1.3.5 Regelung einer Dampfmaschine

2 Modellbildung

2.1 Allgemeines

Modell

Ein Modell ist eine Beschreibung, die nur einen Teil der Eigenschaften des Originals wiedergibt. Ein richtig gewähltes Modell zeichnet sich dadurch aus, dass es alle wichtigen Eigenschaften des Originals widerspiegelt und gleichzeitig auf überflüssige Eigenschaften verzichtet.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 20

2.2 Einführung in Differentialgleichungen

Systemordnung

Die Ordnung des Systems entspricht n und somit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 22

Anfangsbedingungen

Die Bedingungen $y^{(n-1)}(t_0) = 0, \dots, \dot{y}(t_0) = 0, y(t_0) = 0$ heißen Anfangsbedingungen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung zum Zeitpunkt t_0.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 23

Zeitinvariante Systeme

Ist f nicht explizit von der Zeit abhängig, d. h. $y^{(n)}(t) = f\big(y^{(n-1)}(t), \dots, u(t)\big)$, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System zeitinvariant.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 24

Lineare Systeme

Ist f eine lineare Funktion, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System linear. Andernfalls heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System nichtlinear.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 25

LTI-Systeme

Ist ein System linear und zeitinvariant, d. h. es kann durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, so nennt man das System auch LTI-System (Linear Time Invariant).[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 26

Relativer Grad

Der relative Grad eines LTI-Systems ist $r = n - m$ und beschreibt damit die Differenz zwischen höchster auftretender Ableitung der Ausgangsgröße und höchster auftauchender Ableitung der Eingangsgröße.[a]

- n: höchste Ableitung der Ausgangsgröße $y(t)$
- m: höchste Ableitung der Eingangsgröße $u(t)$

- akausal sind: $r < 0$ (d. h. $m > n$), z. B.

[a]Quelle: Umdruck S. 26

Kausale Systeme

Ist $r \geq 0$, d. h. die höchste auftretende Ableitung der Ausgangsgröße ist mindestens so groß wie die höchste auftretende Ableitung nach der Eingangsgröße, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene LTI-System kausal. Andernfalls heißt es akausal.[a]

- akausal sind: $r < 0$ (d. h. $m > n$), z. B.
  - D-Glied: $y = K_D\, \dot{u}$
  - PD-Glied: $y = K\, (u + T_v\, \dot{u})$
  - PID-Glied: $y = K \left(u + \dfrac{1}{T_n} \displaystyle\int u \,\mathrm{d}t + T_v\, \dot{u} \right)$

[a]Quelle: Umdruck S. 27

2.3 Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum

Zustandsraumdarstellung

Die Darstellung $\dot{x} = f(x, u, t)$ und $y = g(x, u, t)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$ und entsprechenden vektorwertigen Funktionen f und g heißt Zustandsraumdarstellung.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 29

SISO und MIMO

Ein System mit einer skalaren Eingangsgröße und einer skalaren Ausgangsgröße wird auch als SISO-System (Single Input Single Output) bezeichnet. Systeme mit mehreren Ein- oder Ausgangsgrößen heißen MIMO-Systeme (Multiple Input Multiple Output).[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 30

Regelungsnormalform

Die Darstellungsform von Differentialgleichungen im Zustandsraum gemäß Gl. (2.25) bzw. Gl. (2.26) heißt Regelungsnormalform.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 32

2.4 Darstellung von Differentialgleichungen im Wirkungsplan

2.5 Aufstellen von Differentialgleichungen

2.6 Beispiele für Modellbildung

2.6.1 Zerlegung in Teilsysteme

2.6.2 Rückwirkungen

2.6.3 Zusammenfassen von Teilsystemen im Wirkungsplan

2.6.4 Modellierung von Regelungen

2.7 Das Gesetz der Sparsamkeit

Minimale Realisierung

Eine Differentialgleichung, die mit der minimal möglichen Ordnung auskommt, um das Übertragungsverhalten $u \mapsto y$ zu beschreiben, wird minimale Realisierung genannt.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 48

Gesetz der Sparsamkeit

Innerhalb einer Menge von wissenschaftlichen Erklärungen sollten solche Erklärungen bevorzugt werden, die mit weniger Variablen oder Elementen auskommen (lex parsimonae).[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 48

2.8 Einheiten

Zeitkonstanten und Frequenzen

In der Differentialgleichung $T\dot{y}(t) + y(t) = 0$ bezeichnet man T als Zeitkonstante des Systems. Schreibt man $\dot{y} + \omega y = 0$, so ist ω eine Frequenz, die Eckkreisfrequenz genannt wird.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 49

Notation von Absolut- und Abweichungsgrößen

Normalerweise werden alle Signale mit Kleinbuchstaben geschrieben. Treten in der Beschreibung sowohl Absolut- als auch Abweichungsgrößen auf, werden Absolutgrößen mit Großbuchstaben und Abweichungsgrößen mit Kleinbuchstaben geschrieben.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 50

3 Autonome Systeme

3.1 Arbeitspunkte und Ruhelagen

3.2 Stabilität

3.3 Linearisierung

3.3.1 Linearisierung einer Funktion

3.3.2 Linearisierung einer Differentialgleichung

3.3.3 Linearisierung im Kennlinienfeld

3.4 Charakteristisches Polynom

3.5 Linearisierungstheorem

3.6 Analyse im Zustandsraum

4 Verhalten bei allgemeiner Anregung

4.1 Homogene und partikuläre Lösung

4.2 Übergangsfunktion

4.3 Faltung

4.4 Laplace-Transformation

4.4.1 Laplace-Transformation von Zeitfunktionen

$F(s)$	$f(t)$ **für** $t > 0$	$f(t) = 0$ **für** $t \leq 0$
$\dfrac{1}{(s-\lambda)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1} e^{\lambda t}$	$n = 1, 2, 3, \ldots$
1	$\delta(t)$ *(= $u(t)$ für Gewichtsfunktion $g(t)$)*	
$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$ *(= $u(t)$ für Übergangsfunktion $h(t)$)*	
$\dfrac{1}{s^2}$	t	
$\dfrac{1}{1+sT}$	$\dfrac{1}{T} e^{-t/T}$	
$\dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}}\, e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_D t)$	$\lvert D\rvert < 1$
	$\omega_0^2 t\, e^{-D\omega_0 t}$	$\lvert D\rvert = 1,\ \omega_D = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$
$\dfrac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$\dfrac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$	$T_1 \neq T_2$
$\dfrac{s}{1+sT}$	$\dfrac{1}{T}\left(\delta(t) - \dfrac{1}{T} e^{-t/T}\right)$	
$\dfrac{s}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$\dfrac{1}{T_1 T_2 (T_1 - T_2)}\left(T_1 e^{-t/T_2} - T_2 e^{-t/T_1}\right)$	$T_1 \neq T_2$
$\dfrac{s\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\omega_0^2 e^{-D\omega_0 t}\left(\cos(\omega_D t) - \dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t)\right)$	$\lvert D\rvert < 1,\ \omega_D = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$
$\dfrac{1}{s(1+sT)}$	$1 - e^{-t/T}$	
$\dfrac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$1 - \dfrac{1}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}\right)$	$T_1 \neq T_2$
$\dfrac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)}$	$1 - e^{-D\omega_0 t}\left(\cos(\omega_D t) + \dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t)\right)$	$\lvert D\rvert < 1,\ \omega_D = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$

4.4.2 Laplace-Transformation von Operationen

4.4.3 Bestimmung des Zeitverlaufes linearer Systeme

4.4.4 Beispiele für Laplace Transformationen

$f(t) = t^2$

$$t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!}\, t^2\, e^{0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{(s-0)^3}$$

4.5 Übertragungsfunktion $G(s)$

Stabilität im Bildbereich:

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $p(s)$ entsprechen den Polstellen λ_i.

Für Stabilität muss gelten:

$$\Re(\lambda_i) < 0$$

Umgangssprachlich: Für Stabilität muss der Realteil der Polstellen λ_i negativ sein

ODER

Die Polstellen λ_i müssen in der linken offenen s-Halbebene liegen für Stabilität.

4.6 Grenzwertsätze

4.6.1 Anwenbarkeit der Grenzwertsätze

Die Grenzwerte sind nur dann anwendbar, wenn die zugehörigen Grenzwerte existieren (insbesondere endlich sind) und gezeigt wurde, dass der Frequenzgang bzw. die Übertragungsfunktion $G(s)$ stabil ist.

$$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{1}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{2}$$

Mit

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

ergibt sich für die Übergangsfunktion $h(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} G(s), \tag{3}$$

$$\lim_{t\to+0} h(t) = \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} G(s). \tag{4}$$

4.6.2 Anfangswertsatz

Für den Anfangswert der Übergangsfunktion $h(t)$ mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der Form

$$G(s) = \frac{b_0 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + \cdots + a_n s^n}.$$

gilt

$$\lim_{t\to+0} h(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_0 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + \cdots + a_n s^n} = \begin{cases} 0, & n > m \ (kausal), \\ \dfrac{b_m}{a_n}, & n = m \ (kausal), \\ \infty, & n < m \ (akausal). \end{cases} \tag{5}$$

Für den Anfangswert der Gewichtsfunktion $g(t) = \dot{h}(t)$ mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ gilt:

$$\lim_{t\to+0} g(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_0 s + \cdots + b_m s^{m+1}}{a_0 + \cdots + a_n s^n} = \begin{cases} 0, & n > m+1, \\ \dfrac{b_m}{a_n}, & n = m+1, \\ \infty, & n < m+1. \end{cases} \tag{6}$$

Sprungfähigkeit, Durchgriff[a]

Kurzgesagt:

- Ein System ist sprungfähig bzw. besitzt Durchgriff, wenn $r = n - m = 0$.
- Es gibt eine direkte, unverzögerte Wirkung von u auf y.
- Sprungfähigkeit im Zustandsraum, wenn Durchgangsmatrix $\mathbf{D} \neq 0$
- Wenn $r = n - m = 1$ springt die Gewichtsfunktion $g(t) = \dot{h}(t)$ in $t = 0$ auf einen endlichen Wert.

[a] Quelle: Umdruck S. 113.

Damit lassen sich Anfangswert und (für stabile Systeme) Endwert der Übergangsfunktion direkt bestimmen.

5 Verhalten bei sinusförmiger Anregung

5.1 Frequenzgang

5.1.1 Übertragung sinusförmiger Signale $u(t) = sin(\omega t)$

1. Bedingungen prüfen:

- Ist das System stabil?
- Ist das System LTI?
- Ist der Eingang $u(t)$ sinusförmig?

2. Koeffizienten ermitteln: Für ein stabiles LTI-System mit dem Frequenzgang $G(j\omega)$ gilt im *eingeschwungenen Zustand*[1] :

$$u(t) = \hat{U}\ \sin(\omega t) \;\Rightarrow\; y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \sin\big(\omega t + \angle G(j\omega)\big)$$

analog:

$$u(t) = \hat{U}\ \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \cos\big(\omega t + \angle G(j\omega)\big)$$

Hinweis:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \;\Rightarrow\; y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{7}$$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t) \tag{8}$$

2.1. ω bestimmen Im ersten Schritt ist ω aus dem Eingang $u(t)$ zu bestimmen:

1. Falls der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ mit der Periodendauer T.
2. Beispiel: $u(t) = \sin(2t) \;\Rightarrow\; \omega = 2$.

2.2. $|G(j\omega)|$ bestimmen Den Betrag $|G(j\omega)|$ beim in 14.2.1 bestimmten ω ermitteln:

1. Falls der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: Amplitudenverhältnis $\dfrac{\hat{Y}}{\hat{U}}$ berechnen.
2. Falls der Frequenzgang $G(j\omega)$ gegeben ist: direkt einsetzen. Beispiel:

$$\left|\frac{1}{j\omega + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \omega^2}}$$

3. Bodediagramm: Betrag aus dem *realen Verlauf* ablesen (nicht aus den Asymptoten).
4. Ortskurve: Betrag ist der Abstand vom Ursprung zum Punkt bei ω.

[1] Quelle: Umdruck S. 116, 119
[1] Beispiele: Altklausur H22, Aufgabe 4 (a); TPR 2, Aufgabe 1

2.3. $\angle G(j\omega)$ bestimmen Die Phasenverschiebung beim in 14.2.1 bestimmten ω ermitteln:

1. Wenn der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: Phasenverschiebung als Versatz zwischen $u(t)$ und $y(t)$ bestimmen.
2. Bodediagramm: Phasenverschiebung bei ω ablesen.
3. Ortskurve: Winkel bei ω messen.

5.2 Ortskurve

5.3 Bode-Diagramm

Unterschied Zeitkonstante und Periodendauer

- Zeitkonstante T im Bode-Diagram: *Wie schnell reagiert das System?*
- Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega_D}$ mit $\omega_D = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$: *Wie schnell schwingt das Signal?*

5.4 Fourier-Transformation

5.5 Filter

6 Verschaltungen von Systemen

6.1 Zusammenfassen von Teilsystemen

Führungs $T(s)$- und Störübertragungsfunktion $S(s)$
In dem einfachen Regelkreis wird die Übertragungsfunktion von der Stör- auf die Regelgröße

$$S(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{N_S(s)\, Z_R(s)}{Z_S(s)\, Z_R(s) + N_S(s)\, N_R(s)}$$

als Störübertragungsfunktion oder auch Sensitivität bezeichnet.
Die Übertragungsfunktion von der Führungs- auf die Regelgröße

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{Z_S(s)\, Z_R(s)}{Z_S(s)\, Z_R(s) + N_S(s)\, N_R(s)}$$

wird als Führungsübertragungsfunktion oder auch komplementäre Sensitivität bezeichnet.[a]

[a] Quelle: Umdruck S. 141

6.2 Zerlegung in einfache Elemente

6.2.1 Pol-Nullstellen im Bodediagramm

6.2.2 Lösungsweg: Frequenzgang aus Bodediagramm

1. Knickfrequenzen und Steigungen im Bode-Diagramm ablesen.
2. Nullstellen/Polstellen als Faktoren ansetzen:
$$G_n(s) = 1 \pm \frac{1}{|s_n|} s, \qquad G_p(s) = \frac{1}{1 \pm \frac{1}{|s_p|} s}$$
3. Vorzeichen nach Lage wählen:
   - $\Re(s_n) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{|s_n|} s$, $\Re(s_n) < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{|s_n|} s$
   - $\Re(s_p) < 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{|s_p|} s}$, $\Re(s_p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{|s_p|} s}$
4. Gesamtübertragungsfunktion:
$$G(s) = K \cdot \prod \hat{G}_n \cdot \prod \hat{G}_p$$

6.2.3 TPR 5 – Ansätze

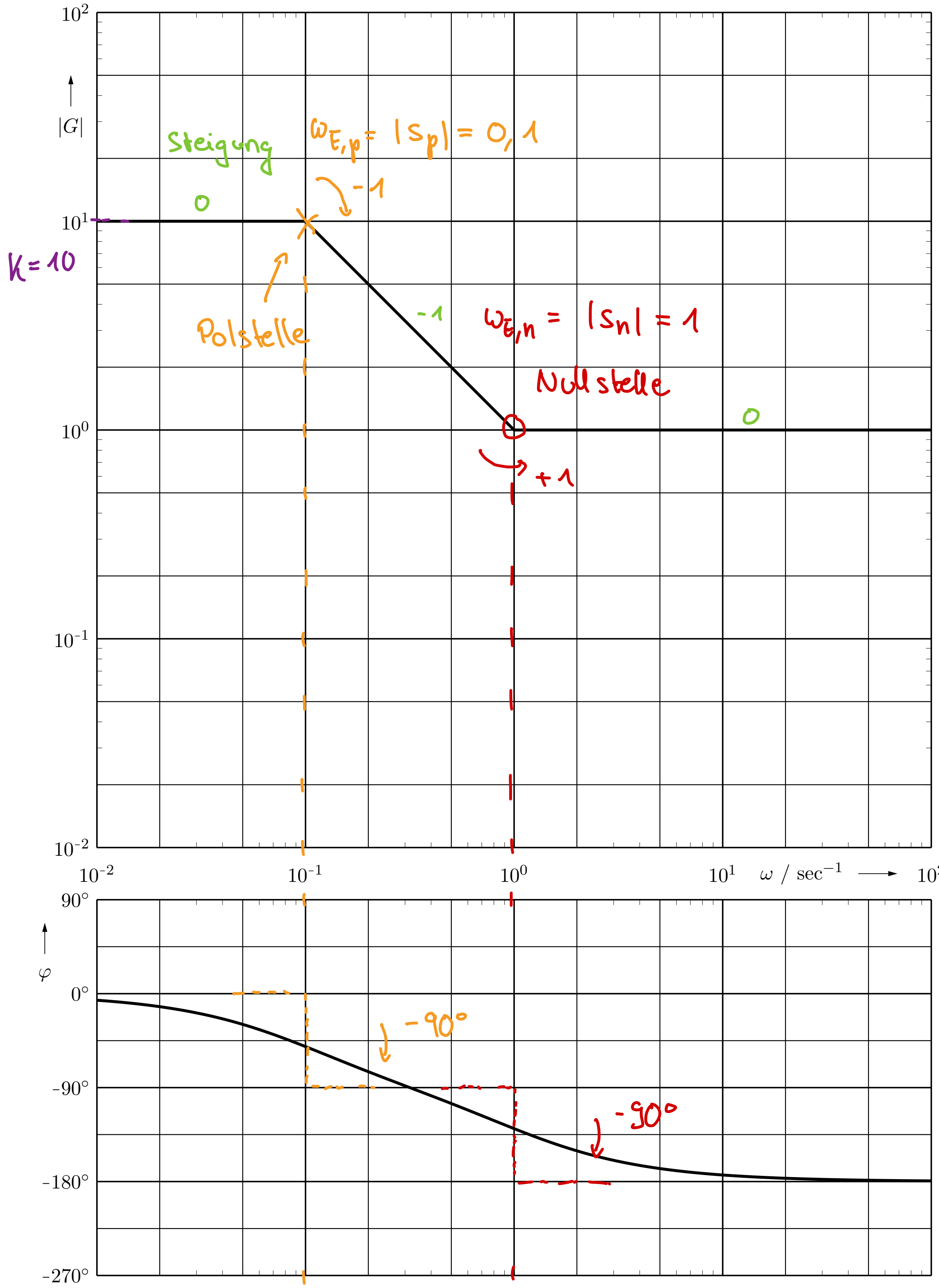


Abbildung 1: Bode-Diagramm von $G_S(j\omega)$

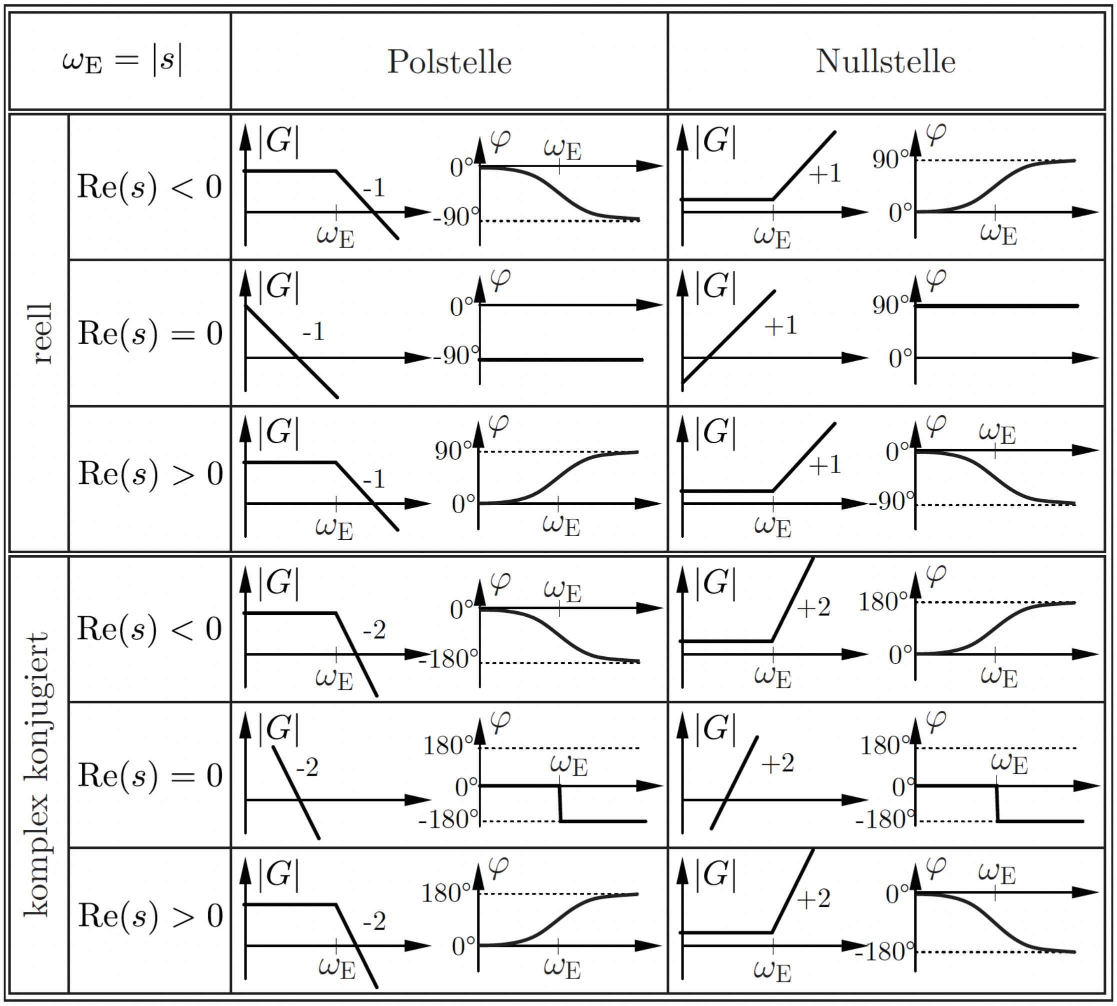


Tabelle 6-2: Bode-Diagramme in Abhängigkeit der Pol- und Nullstellen

Abbildung 2: Pol-Nullstellen im Bodediagramm.

6.3 Zerlegung nicht-minimalphasiger Systeme

7 Typische Übertragungsglieder

7.1 Übersicht

7.2 Grundlegende Reglertypen

7.2.1 P-Element

7.2.2 I-Element

Stationäre Genauigkeit

Ein stabiles System $u \mapsto y$ heißt stationär genau, wenn für jedes konvergente Eingangssignal $u(t)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} y(t),$$

d. h., dass der Grenzwert von Ein- und Ausgangsgröße identisch ist.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 164

Für einen Endwert $u_\infty \neq 0$ folgt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{u(t)} = 1$$

Mit dem Endwertsatz ergibt sich für einen Einheitssprung $u(t) = 1(t)$:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Stationäre Genauigkeit verlangt daher (geschlossener Regelkreis):

$$\lim_{s\to 0} G(s) = 1$$

Wichtig: Die Bedingung gilt für die Übertragungsfunktion des *geschlossenen* Regelkreises.

Bleibende Regelabweichung

Für einen stabilen geschlossenen Regelkreis mit der Führungsübertragungsfunktion $w \mapsto y$ ergibt sich für jedes konvergente $w(t)$ ein Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}\big(w(t) - y(t)\big) = \lim_{t\to\infty} e(t) = e_\infty,$$

der als bleibende Regelabweichung bezeichnet wird. Ist das System $w \mapsto y$ stationär genau, so gilt $e_\infty = 0$ und man spricht davon, dass keine bleibende Regelabweichung vorliegt.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 165

Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten

Ein LTI-System besitzt genau dann einen integrierenden Anteil, wenn es eine Polstelle in $s = 0$ besitzt.

Haben zusätzlich alle weiteren Polstellen des Systems einen negativen Realteil, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \text{konstant} \neq 0$$

und das System besitzt integrierendes Verhalten.[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 166

Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis
Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Standard-Regelkreises ist genau dann stationär genau, wenn

1) der geschlossene Regelkreis stabil ist und

2) der aufgeschnittene Regelkreis G_0 einen integrierenden Anteil besitzt.

[a]

[a]Quelle: Umdruck S. 167

7.2.3 D-Element

7.2.4 PI, PD und PID

7.3 Verzögerungsglieder

7.3.1 PT$_1$

7.3.2 PT$_2$

7.3.3 PT$_n$

7.4 Kombinationen

7.4.1 IT$_1$

7.4.2 DT$_1$

7.4.3 PIT

7.4.4 PPT$_1$ und PDT$_1$

7.5 Nicht-minimalphasige Systeme

7.5.1 PA$_1$

7.5.2 PT$_t$, PT$_1$T$_t$

Totzeit T_t aus Phasengang ableiten In Abbildung 3 kann aus dem Regelkreis mit einem Totzeitglied die Eckfrequenz des Totzeitgliedes so abgelesen werden, dass wenn φ gegen -180° strebt, und die Phase $\varphi_0(\omega)$ dann exponentiell abfällt wie üblich bei einem Totzeitglied, dann ist die Eckfrequenz dort wo das Totzeitelement ca. 57° abgefallen ist. Das Beispiel sieht man in Abbildung 3.

1. Was wäre φ ohne Totzeitglied für $\omega \to \infty$ (Asymptoten rot und orange)?

2. Wenn die Differenz $\varphi_{0,\text{ohne Totzeit}}$ und φ_0 57° ist, ω_t ablesen (lila).

3. $T_t = \dfrac{1}{\omega_t}$

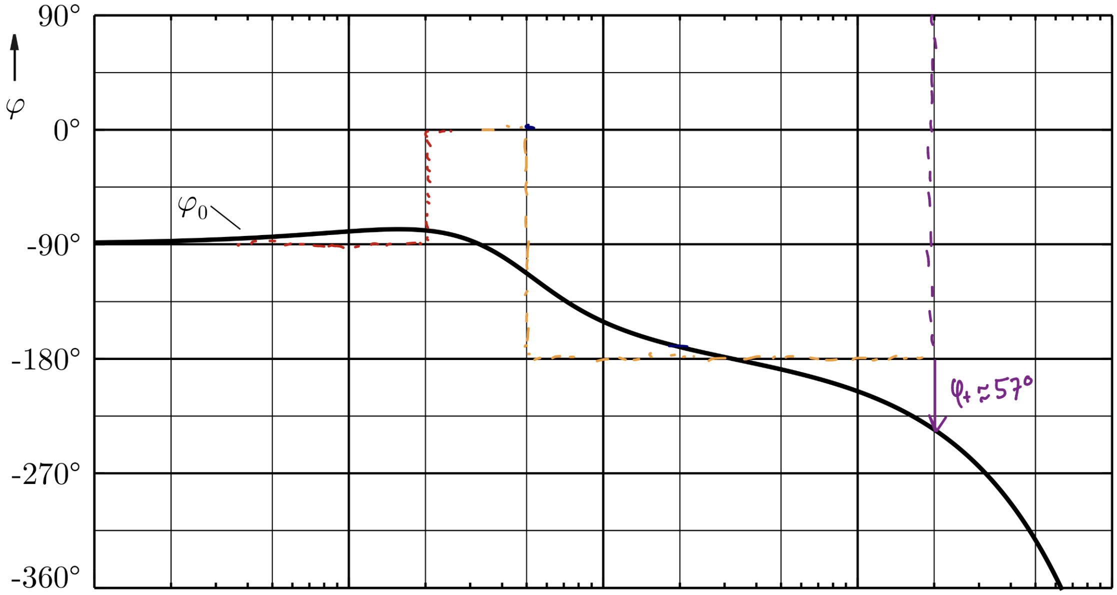


Abbildung 3: Eckfrequenz des Totzeitgliedes aus dem Phasengang ablesen.

7.6 Nicht-parametrische Identifikation

7.7 Parametrische Identifikation

7.7.1 Überanpassung

7.7.2 Graphische Parameteridentifikation

7.7.3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

8 Identifikation linearer Regelkreisglieder

8.1 Allgemeines

8.2 Nicht-parametrische Identifikation

8.3 Parametrische Identifikation

8.3.1 Überanpassung

8.3.2 Graphische Parameteridentifikation

T_u-T_g-Modell

Wird ein Verzögerungselement höherer Ordnung ersatzweise über ein PT_1T_t-System beschrieben, so spricht man von einem T_u-T_g-Modell.[a]

[a] Quelle: Umdruck S. 206

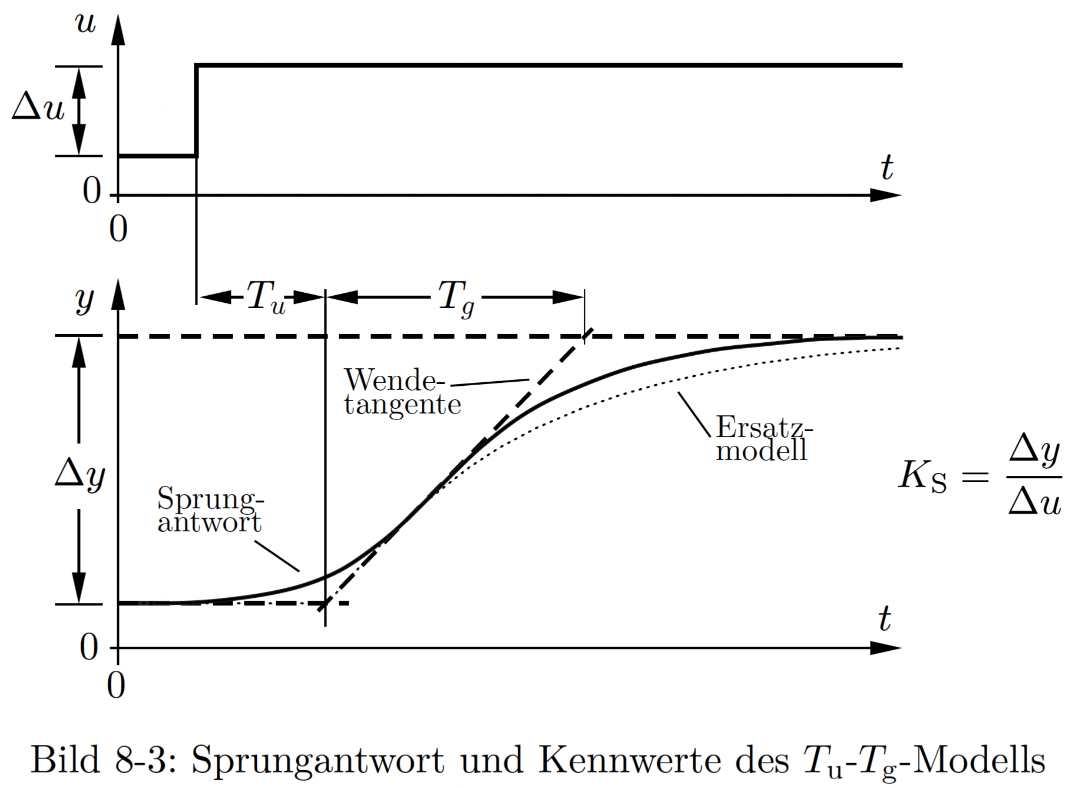


Abbildung 4: Sprungantwort und Kennwerte des T_u-T_g-Modells.

8.3.3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

9 Stabilitätsprüfung

9.1 Problemstellung

Stabilitätskriterien

Alle Kriterien sind gleichbedeutend.

1. Wurzeln des charakteristischen Polynoms besitzen alle negativen Realteil:

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \Re(\lambda_i) < 0$$

2. Eigenwerte der Systemmatrix A besitzen alle einen negativen Realteil:

$$\det(\lambda I - A) \Rightarrow p(\lambda) = 0 \text{ und } \Re(\lambda_i) < 0$$

3. Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ besitzen alle negativen Realteil:

$$p(s) = N(s) = 0 \Rightarrow \Re(s_i) < 0$$

4. Übergangsfunktion $h(t)$ konvergiert gegen einen endlichen Wert.
5. Gewichtsfunktion $g(t) = \dot{h}(t)$ konvergiert gegen null und ist für LTI-System absolut integrierbar.

9.2 Algebraische Stabilitätskriterien

9.2.1 Grundidee

Für die Bestimmung der Stabilitätseigenschaften wird nicht die genaue Position der Wurzel, bzw. der Polstelle λ_i benötigt, **sondern es reicht die Kenntnis des Vorzeichens** der Wurzel bzw. der Polstelle λ_i aus.

9.2.2 Stabilitätskriterien nach Routh und Hurwitz

1. Bedingung (hinreichend für Systeme mit Ordnung $n = 1, 2$).[2]
System der Ordnung n mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

ist stabil, wenn

- alle Koeffizienten a_i vorhanden sind,
- alle Koeffizienten a_i das gleiche Vorzeichen haben,
- genauer: alle a_i positiv sind, ggf. Differentialgleichung mit -1 multiplizieren, falls alle negativ sind.

[2] Stabilitätskriterien für Systeme bis Ordnung $n = 3$ (S. 226).

2. Bedingung nach Hurwitz (bis Ordnung $n = 3$).
$\det(H)$ sowie alle Unterdeterminanten sind größer null (Hurwitz-Matrix Bsp. S. 217).
Für $n = 3$ (vgl. S. 219, Gl. 9.6):

$$\det(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad \text{(S. 217)}$$

2. Bedingung nach Routh.
Routhschen Probefunktionen R_i sind sämtlich größer null.

Vorlagen für Routh-Probefunktionen (bis $n = 4$). Charakteristisches Polynom für $n = 4$:

$$p(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Für $n = 1$

i	R_i
1	a_1
0	a_0

Für $n = 2$

i	R_i	
2	a_2	a_0
1	a_1	$-$
0	$a_0' = a_0$	

Für $n = 3$

i	R_i	
3	a_3	a_1
2	a_2	a_0
1	$a_1' = a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0$	$-$
0	$a_0' = a_0$	$-$

Für $n = 4$

i	R_i		
4	a_4	a_2	a_0
3	a_3	a_1	$-$
2	$a_2' = a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1$	$a_0' = a_0$	$-$
1	$a_1' = a_1 - \frac{a_3}{a_2'} a_0'$	$-$	$-$
0	$a_0' = a_0$	$-$	$-$

9.2.3 Beispiele

9.3 Nyquist-Kriterium

Wird benötigt, wenn das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ nicht gegeben oder nicht aufgestellt werden kann, z.B. bei Totzeitgliedern (vgl. $G(s) = \dfrac{Ts + 1}{Ts + 1 + K_p e^{-sT_t}}$, S. 225, Gl. 9.19).

9.3.1 Vollständiges Nyquist-Kriterium

Gegeben sei ein aufgeschnittener kausaler[3] Regelkreis G_0 und ein zugehöriger geschlossener Regelkreis G. Es gilt (S. 231):

$$m = n - p$$

mit

- $p = p_+(G_0)$: Anzahl der Pole des aufgeschnittenen Regelkreises G_0 in der rechten offenen s-Halbebene,
- $n = n_+(1 + G_0)$: Anzahl der Pole des geschlossenen Regelkreises G in der rechten offenen s-Halbebene,
- m: Anzahl der Umläufe der Ortskurve von $G_0(j\omega)$ (für $-\infty < \omega < \infty$) um den kritischen Punkt -1 im Uhrzeigersinn.

Damit G stabil ist, muss $n = 0$ gelten. Also folgt

$$m = -p.$$

9.3.2 Beispiele

9.3.3 Anwendung bei Polen am Stabilitätsrand

9.3.4 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

9.3.5 Amplituden- und Phasenreserve

Amplituden- und Phasenreserve; Durchtrittsfrequenz ω_d

Die Amplitudenreserve ist die Zahl, mit der die Ortskurve des aufgeschnittenen Regelkreises multipliziert werden muss, so dass diese genau durch den kritischen Punkt -1 verläuft:

$$A_R = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|}.$$

Gibt es verschiedene Amplitudenreserven, so ist die kleinste Amplitudenreserve die entscheidende Größe.

Die Phasenreserve ist der Winkel, um den die Ortskurve des aufgeschnittenen Regelkreises gedreht werden muss, so dass diese genau durch den kritischen Punkt -1 verläuft:

$$\alpha_R = \varphi_0(\omega_d) - (180^\circ \pm n \cdot 360^\circ)\,.$$

mit der Durchtrittsfrequenz ω_d definiert durch

$$|G_0(j\omega_d)| = 1.$$

[a]

[a] Quelle: Umdruck S. 248

[3] Umdruck S. 27

Ansprechverhalten in Abhängigkeit von ω_d Ein gutes Ansprechverhalten und kurze Anschwingzeiten werden durch große ω_d erreicht. Da aus Stabilitätsgründen $\omega_d < \omega_\pi$ gelten muss, ist der Frequenzbereich, in dem große Reglerverstärkungen möglich sind, beim I-Regler stark limitiert.

Durch große K bei einem P-Glied wird der Verlauf des PT_2-Gliedes im Bodediagramm nach oben verschoben. Dadurch wird ω_d nach rechts verschoben und somit größer. Weil $\omega_\pi = \infty$ in dem Fall, ist die Ungleichung $\omega_d < \omega_\pi$ erfüllt.

9.4 Sonderfälle

9.4.1 Pol-Nullstellen-Kürzungen

9.4.2 Unstetige Polstellen

10 Einführung in den Reglerentwurf

10.1 Ziele und Lösungsansätze

10.1.1 Motivation

10.1.2 Gütemaße und Kennwerte

10.1.3 Ansätze des Reglerentwurfs

10.2 Statischer Reglerentwurf

Regelfaktor

Der Regelfaktor charakterisiert die statische Leistungsfähigkeit eines Reglers gegenüber Störungen und ist als das Verhältnis

$$R = \frac{y_\infty^{mR}}{y_\infty^{oR}} = \frac{1}{1 + K_S K_R} = \frac{1}{1 + G_0(s = 0)}$$

definiert. Sein konkreter Wert ist im Fall stabiler linearer Systeme unabhängig vom statischen Endwert der Störungen.[a]

[a] Quelle: Umdruck S. 266

- Wenn G_0 einen **integrierenden Anteil** hat wird $G_0(s = 0) = \infty$ und somit $R = \frac{1}{1 + \infty} = 0$
- Regelfaktor sollte bei **sinnvollen** Regelungen $R < 1$ sein.
- Für **technisch sinnvolle** Regelungen wird fast immer ein Regelfaktor $R < 0{,}2$ gefordert.

10.3 Abwägungen bei der Reglerverstärkung

10.3.1 Vorteile hoher Verstärkungen

10.3.2 Nachteile hoher Verstärkungen

10.4 Einstellregeln

10.4.1 Einstellung mittels T_u–T_g-Ersatzmodell

Einstellung nach T_u–T_g (Chien, Hrones, Reswick)

- Nicht schwingungsfähig → aperiodischer Regelverlauf.[4]
- Ohne bleibende Regelabweichung → am besten PI-Regler.[5]

10.4.2 Einstellung mittels Schwingversuch

[4] Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).
[5] Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).

11 Grundlegende modellbasierte Reglerentwurfsverfahren

11.1 Frequenzkennlinienverfahren

11.1.1 Grundidee

11.1.2 Hohe Verstärkung bei niedrigen Frequenzen

11.1.3 Übergangsbereich

Empfohlene Bereiche für Amplituden- und Phasenreserve[a]

Für **Festwertregelungen** wird als allgemeine Entwurfsregel

$$1{,}5 < A_R < 3{,}0\ ; \quad 20^\circ < \alpha_R < 70^\circ$$

empfohlen; für **Folgeregelungen** lauten die empfohlenen Bereiche

$$4 < A_R < 10\ ; \quad 40^\circ < \alpha_R < 60^\circ.$$

[a] Quelle: Umdruck S. 284

11.1.4 Niedrige Verstärkung bei hohen Frequenzen

11.2 Betragskriterium und Symmetrisches Kriterium

11.3 Polvorgabe

11.3.1 Polvorgabe für Ausgangsrückführungen

11.3.2 Polvorgabe für Zustandsrückführungen

Idee der Polvorgabe Mithilfe der Zustandsrückführung kann man die Polstellen der geschlossenen Regelkreises beliebig vorgeben. In Abbildung 5 ist eine Zustandsregelung mit Proportionalgliedern zu sehen.
Zu sehen ist, dass alle Zustände $\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ über ein Proportionalglied in der Form $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ zurückgeführt werden.

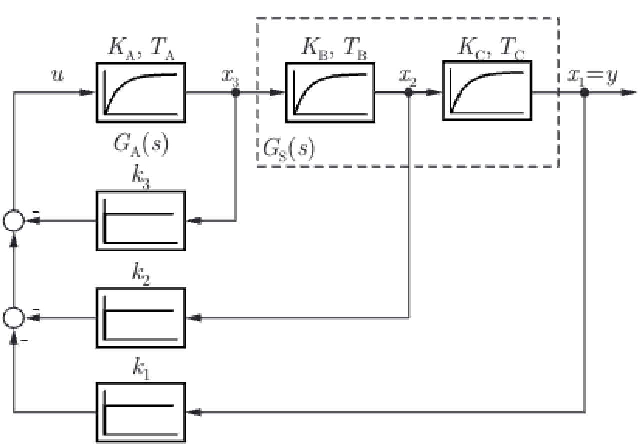


Abbildung 5: Zustandsregelung mit $k^T = (k_1, k_2, k_3)$

Hinweis: Polvorgabe ist nur möglich, wenn das Paar $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ steuerbar ist (siehe: Steuerbarkeit 11.3.3)!

Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2]$ bestimmen. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \lambda_i$

1. $\mathbf{A_k}$ bestimmen.

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{b}\,\mathbf{k}^T$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 k_1 & a_{12} - b_1 k_2 \\ a_{21} - b_2 k_1 & a_{22} - b_2 k_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

2. Matrix für Determinante aufstellen.

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_k) = \begin{vmatrix} \lambda - (a_{11} - b_1 k_1) & -(a_{12} - b_1 k_2) \\ -(a_{21} - b_2 k_1) & \lambda - (a_{22} - b_2 k_2) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

3. Determinante ausrechnen und $p(\lambda)$ aufstellen.

4. Koeffizientenvergleich mit vorgegebenen Polstellen.

$$\underbrace{\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_k)}_{\text{Eigenwerte der Systemmatrix } \mathbf{A}_k} = \underbrace{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)}_{\text{vorgegebene Polstellen}} \tag{11}$$

11.3.3 Steuerbarkeit

Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ist genau dann steuerbar, wenn die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

vollen Rang besitzt[a].

[a] Quelle: Umdruck S. 304

Falls $\mathbf{Q}_s$ quadratisch ist (z.B. SISO), gilt: *nicht steuerbar* $\Leftrightarrow \det(\mathbf{Q}_s) = 0$.
Hinweis: Es ist sinnvoll, beim Rechnen konsequent *Matrix* · *Vektor* zu multiplizieren, also z.B. $\mathbf{A}(\mathbf{AB})$ statt $(\mathbf{AA})\mathbf{B}$.

11.4 Beobachterentwurf

11.4.1 Zustandsschätzung

11.4.2 Luenberger-Beobachter

11.4.3 Beobachtbarkeit und Dualität

11.4.4 Beispiel

11.5 Wurzelortskurven

11.5.1 Grundidee

11.5.2 Konstruktionsregeln

11.5.3 Beispiel

12 Vermaschte Regelkreise

12.1 Erweiterung des Einfachregelkreises

12.2 Vorsteuerung

12.3 Führungsgrößenfilter

12.4 Störgrößenaufschaltung

12.5 Kaskadenregelung

12.6 Hilfsstellgröße

13 Mehrgrößenregelung

13.1 Zentrale vs. dezentrale Regelung

13.2 Eigenschaften von Mehrgrößensystemen

13.2.1 Verschaltungen von Mehrgrößensystemen

13.2.2 Querkopplungen

13.2.3 Polstellen von Mehrgrößensystemen

13.2.4 Richtungsabhängige Verstärkung

13.3 Verfahren der dezentralen Regelung

13.3.1 Relative Gain Array

13.3.2 MIMO-Nyquist und Diagonaldominanz

13.4 Verfahren der zentralen Regelung

13.4.1 Zentrale Regelung im Zustandsraum

13.4.2 Entkopplungsregler

14 Zeitdiskrete Systeme

14.1 Abtastregelungen

14.1.1 Definitionen

14.1.2 Abtaster und Halteglied

Aufbau einer einfachen Abtastregelung[6]googoogogog

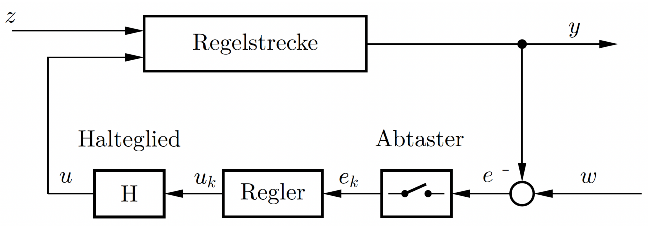


Abbildung 6: Einfache Abtastregelung.

Stabiltät einer Abtastregelung Die Abtastregelung wirkt näherungsweise wie eine zusätzliche Totzeit $T_t \approx T/2$ (Phasenverzug), wodurch die Stabilitätsreserven typischerweise kleiner werden. Stabiltät muss entsprechend erneut geprüft werden.

14.1.3 Aliasing

Shannon-/Nyquist-Abtasttheorem (für T_{min}) Für die höchste in dieser Funktion enthaltene Frequenz ω_{max} und die Abtastfrequenz ω_s gilt:[7]

$$2\,\omega_{\text{max}} < \omega_s$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_{\text{max}} = \frac{2\pi}{T_{\text{min}}}$$

$$2 \cdot \frac{2\pi}{T_{\text{min}}} < \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2}{T_{\text{min}}} < \frac{1}{T}$$

$$T < \frac{T_{\text{min}}}{2}$$

[6]Quelle: Umdruck S. 377

[7]Umdruck S. 380.

14.1.4 Verschaltung zu hybriden Systemen

14.2 Einführung in Differenzengleichungen

14.3 Autonome zeitdiskrete Systeme

14.4 Umrechnen von Differenzen- und Differentialgleichungen

14.4.1 Rückwärtsdifferenzen

1. Es dürfen nur Terme wie x_k, y_k, u_k hinzugefügt werden.
2. Es dürfen KEINE! Terme wie $x_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}$ hinzugefügt werden.
3. $y(t) \approx y_k$
4. $\dot{y}(t) \approx \dfrac{y_k - y_{k-1}}{T}$
5. $\ddot{y}(t) \approx \dfrac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$
6. $y(t - T_t) \approx y_{k-d}$ mit $d = \dfrac{T_t}{T}$.
   Hinweis: In den meisten Fällen wird der Term y_{k-d} als Totzeitglied angenommen. Besonders ist bei einem Koeffizientenvergleich darauf zu achten, ob ein Totzeitglied in der vorgegebenen Gleichung vorhanden ist.
   Wenn ein Totzeitglied $K\,e^{-sT_t}$ vorhanden ist, dann y_{k-d} als Totzeitglied annehmen.
   Wenn kein Totzeitglied vorhanden ist, dann in den meisten Fällen $\dot{y}(t)$ oder selten $\ddot{y}(t)$.

14.4.2 Analytische Lösung

14.5 Quasikontinuierlicher Reglerentwurf

14.6 Zeitdiskreter Bildbereich

14.6.1 $\mathcal{Z}$-Transformation

14.6.2 Zeitdiskrete Übertragungsfunktion

14.6.3 Zeitdiskreter Frequenzgang

14.6.4 Zeitdiskrete Modelle zeitkontinuierlicher Systeme

14.7 Bilineare Transformation

14.8 Klassischer zeitdiskreter Reglerentwurf

14.9 Regler mit endlicher Einstellzeit

14.9.1 Entwurf

14.9.2 Stabilität

14.9.3 Beispiel

15 Kalmanfilter

15.1 Allgemeines

15.2 Herleitung

15.3 Auslegung und Beispiel

15.4 Limitierungen und Erweiterungen

15.4.1 Allgemein

16 Informationen über Ortskurven

Ortskurven für den aufgeschnittenen Regelkreis G_0.

1. Phase φ der Ortskurve läuft für $\omega \to \infty$ gegen $-\infty$
   $\to G_0$ enthält Totzeit. (S. 13, I)

2. Ortskurve startet mit einer Phase $\varphi = -90°$ im Unendlichen, also $\lim_{\omega \to 0} |G_0(j\omega)| = \infty$
   $\to G_0$ hat integrierendes Verhalten. (S. 13, II)

3. Ortskurve startet im Ursprung, also $\lim_{\omega \to 0} |G_0(j\omega)| = 0$
   $\to G_0$ hat differenzierendes Verhalten. (S. 13, III)

4. Betrag der Ortskurve steigt und sinkt.
   $\to G_0$ enthält ein Verzögerungsglied mit Resonanzüberhöhung (z.B. PT_2). (S. 13, IV)

17 Informationen über Übergangsfunktionen $h(t)$ des geschlossenen Regelkreises

Für die Übergangsfunktion $h(t)$ ist der Eingang $u(t) = 1(t)$. Stationäre Genauigkeit gilt dann, weil $\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} y(t)$. Wenn $u_0 = 1(t)$, dann ist die Sprungantwort $y(t)$ gleich der Übertragungsfunktion $h(t)$.

17.1 Stationäre Genauigkeit

Damit ein Regelkreis stationär genau arbeitet, muss der Ausgang genau der Referenz folgen. Dies bedeutet, dass der Führungsgrößenfilter so ausgelegt werden muss, dass der stationäre Endwert des geschlossenen Regelkreises genau 1 ist.

Außerdem gilt:

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \frac{\lim_{s \to 0} Y(s)}{\lim_{s \to 0} U(s)} = 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{G_F \cdot G_R \cdot G_{PT2}}{1 + G_R \cdot G_{PT2}} \right) = 1$$

1. $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} G(s) = 0$, siehe Grenzwertsätze (S. 112)
   $\rightarrow G$ hat differenzierendes Verhalten und eine Nullstelle im Ursprung.
   $\rightarrow G_0$ hat die selben Nullstellen wie G. G_0 hat also auch differenzierendes Verhalten.

2. $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} G(s) = 1$, siehe Grenzwertsätze (S. 112)
   $\rightarrow$ Sprungantwort $y(t)$ besitzt keine Regelabweichung (S. 165).

   $\rightarrow G(s)$ arbeitet stationär genau (S. 165).

18 Berechnung maximal zulässige Totzeit T_t

Die von der Totzeit hervorgerufene Phasenverschiebung φ_t darf maximal der Phasenreserve α_R von $G_0^{'}(j\omega)$ entsprechen, um die Stabilität nicht zu gefähren.

1. Durchtrittsfrequenz ω_d von $G_0^{'}(j\omega)$ ermitteln.
2. Phase $\varphi_0^{'}(\omega_d)$ ablesen.
3. Phasenreserve $\alpha_R = 180^\circ + \varphi_0^{'}(\omega_d)$.
4. Phasenverschiebung Totzeitglied $\varphi_t = -\omega \cdot T_t \overset{!}{=} -\alpha_R$
5. Totzeit $T_t = \dfrac{\alpha_R}{\omega_d} = \dfrac{\frac{\alpha_R}{180^\circ} \cdot \pi}{\omega_d}$

19 Durchtrittsfrequenz ω_d

20 Gewichts- und Übergangsfunktion aus $G_s(s)$

Gegeben sei:

$$Y(s) = G_s(s)\, U(s) \tag{12}$$

20.1 Zusammenhänge:

Übergangsfunktion $h(t)$[8]:

$$h(t) = \frac{y_{\text{Sprung}}(t)}{u_0} = \frac{\text{Sprungantwort}}{\text{Sprunghöhe}} \tag{13}$$

Gewichtsfunktion $g(t)$:

$$g(t) = \frac{y_{\text{Impuls}}(t)}{\int u \,\mathrm{d}t} = \frac{\text{Impulsantwort}}{\text{Impulsfläche}} \tag{14}$$

Zusammenhang $g(t)$ und $h(t)$[9]:

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) \tag{15}$$

[8] Quelle: Umdruck S. 89
[9] Quelle: Umdruck S. 91

20.2 Gewichtsfunktion $g(t)$

Für die Gewichtsfunktion gilt $u(t) = \delta(t)$, also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{16}$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s)\, U(s) = G_s(s) \tag{17}$$

und somit:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_s(s)\} \tag{18}$$

20.2.1 $G(s)$ ist gegeben, Gewichtsfunktion $g(t)$ bestimmen.

Gewichtsfunktion $g(t)$ durch inverse Laplace-Transformation von $G(s) = \dfrac{K}{(1+Ts)^2}$.

1. $C\dfrac{1}{(s-s_p)^n}$.
2. Gewichtsfunktion $g(t) \to U(s) = 1$
3. $G(s) = \dfrac{K}{(1+Ts)^2} = \dfrac{K}{T^2\left(s+\dfrac{1}{T}\right)^2}$.
4. $Y(s) = G(s)U(s)$
5. $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2}\right\}$.
6. $s_p = -\dfrac{1}{T}, n = 2, C = \dfrac{K}{T^2}$
7. $g(t) = \dfrac{K}{T^2}te^{-\dfrac{1}{T}t}$

20.3 Übergangsfunktion $h(t)$

Für die Übergangsfunktion gilt $u(t) = 1(t)$, also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \tag{19}$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s)\, U(s) = \frac{G_s(s)}{s} \tag{20}$$

und somit:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\} \tag{21}$$

21 Mathematische Grundlagen

21.1 PQ-Formel

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$f(x) = x^2 + p\,x + q = 0.$$

Dann lauten die Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

21.2 Determinante einer 2x2 & 3x3-Matrix

21.2.1 2x2

Die Formel für die Determinante einer 2x2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ lautet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

21.2.2 3x3

Die Formel für die Determinante einer 3x3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).
\end{aligned}$$

21.3 Integral einer Exponentialfunktion ($\lambda > 0$)

$$\int_{0^-}^{R} e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{0^-}^{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right)\mathrm{d}\tau \overset{\text{HDI}}{=} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\Big|_{\tau=0^-}^{R} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda R}.$$

Somit gilt für den Limes

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0^-}^{R} e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda R}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Analog folgt mittels partieller Integration (PI)

$$\int_{0^-}^{R} \tau e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{0^-}^{R} \tau\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right)\mathrm{d}\tau \overset{\text{PI}}{=} -\int_{0^-}^{R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\,\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau \;+\; \tau\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right)\Big|_{\tau=0^-}^{R}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_{0^-}^{R} e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{R}{\lambda}e^{-\lambda R}.$$

Der Übergang zum Limes liefert nun

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0^-}^{R} \tau e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\int_{0^-}^{R} e^{-\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{R}{\lambda}e^{-\lambda R}\right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Integral mit linearem Faktor t (partielle Integration)

Wähle $u(t) = t$ und $v'(t) = e^{-\lambda t}$ mit $\lambda > 0$. Dann gilt $u'(t) = 1$ und $v(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$.

$$\int_{0}^{\infty} t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\left(\left[t\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\right]_0^R - \int_0^R\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{R}{\lambda}e^{-\lambda R} + \frac{1}{\lambda}\int_0^R e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Da $Re^{-\lambda R} \to 0$ für $R \to \infty$ und $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$, folgt

$$\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Allgemeine Definition der partiellen Integration

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Äquivalent dazu ist die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(uv) = u'v + uv',$$

die als Grundlage für die Herleitung der partiellen Integration dient.

21.4 Betrag von $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$, $e^{j\theta}$

21.4.1 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck $e^{\pm j\theta}$ kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\sin(\theta)$$

21.4.2 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + jy$ ist gegeben durch:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ gilt:

$$|e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Der Betrag ist somit immer 1, unabhängig von ω.

21.5 Inverse einer Matrix

21.5.1 Allgemein

Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn

$$\det(A) \neq 0$$

Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A)$$

wobei $\text{adj}(A)$ die adjungierte Matrix ist.

21.5.2 Inverse einer 2×2-Matrix

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinante:

$$\det(A) = ad - bc$$

Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{für } ad - bc \neq 0$$

21.6 Partialbruchzerlegung

21.6.1 Einführung

Die Partialbruchzerlegung ist eine Methode, um rationale Funktionen, wie $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$, in einfachere Bruchterme zu zerlegen, die leichter zu integrieren oder zu analysieren sind. Dies ist besonders nützlich in der Signalverarbeitung, Regelungstechnik und bei der Lösung von Differentialgleichungen.

21.6.2 Beispiel: $\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

Wir zerlegen den Ausdruck $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$ in Partialbrüche. Der Nenner besteht aus einem linearen Faktor $s+1$ und einem quadratischen Faktor s^2+1. Die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

wobei A, B und C Konstanten sind, die wir bestimmen müssen.

21.7 $G(s)$ ist gegeben, Differentialgleichung bestimmen.

DGL durch inverse Laplace-Transformation von $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{1+T_1 s + K_R K_1} e^{-sT_t}$.

1. Umstellen nach $X(s)(1+T_1 s + K_R K_1) = U(s) K_1 e^{-sT_t}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)(1+K_R K_1)\} = x(t)(1+K_R K_1)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{X(s) T_1 s\} = T_1 \dot{x}(t)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{K_1 e^{-sT_t}\right\} = K_1 \tilde{u}(t) = K_1 u(t-T_t)$.
5. $x(t)(1+K_R K_1) + T_1 \dot{x}(t) = K_1 \tilde{u}(t)$

22 Stationäre Genauigkeit

22.1 Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis

Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Standard-Regelkreises ist genau dann stationär genau, wenn[10]

1. der geschlossene Regelkreis stabil ist und
2. der aufgeschnittene Regelkreis G_0 einen integrierenden Anteil besitzt.

23 Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten

Ein LTI-System besitzt genau dann einen integrierenden Anteil, wenn es eine Polstelle in $s = 0$ besitzt.[11]Haben zusätzlich alle weiteren Polstellen des Systems einen negativen Realteil, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \text{konstant} \neq 0 \tag{22}$$

und das System besitzt integrierendes Verhalten.

24 Grafische Darstellung der Übergangsfunktion $h(t)$ des IT_1 Gliedes

Beispiel:[12]$y(t) = m(t-n) + a\,e^{-\lambda t}$ (hier: $m = 0.5$, $n = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$).

24.1 Erläuterung der Terme

Addition aus einer Geraden $m(t-n)$ und Exponentialfunktion $a\,e^{-\lambda t}$.

- m: Steigung der Geraden
- n: x-Achsenverschiebung
- a: Vorfaktor der Exponentialfunktion

24.2 Werte bestimmen

- Steigung m der Asymptote.
- x-Achsenverschiebung der Geraden: $y(t=1) = 0 = m(1-n) \Rightarrow n = 1$.
- a und λ können mit $y(t=0) = 0$ und $y'(t=0) = 0$ bestimmt werden.

---

[10]Quelle: Umdruck S. 167
[11]Quelle: Umdruck S. 166
[12]Quelle: TPR 1, Aufgabe 2(a).

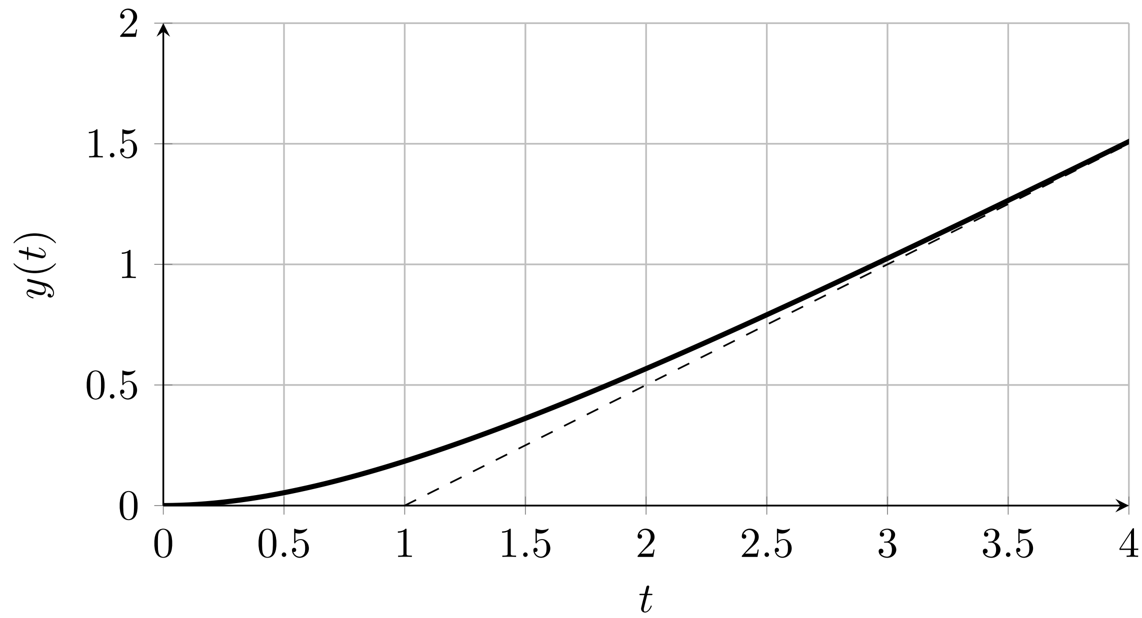


Abbildung 7: Plot der Beispiel-Funktion.

25 Korrekturtabellen und Skalierung

25.1 Korrekturtabelle (log/Phase)

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		$\lvert \lg \lvert G \rvert - \lg \lvert \text{Asymptote} \rvert \rvert$				$\lvert \varphi - \varphi_{\text{Asymptote}} \rvert$			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
PT_1		-0,002	-0,048	-0,107	-0,151	5,7	26,6	38,7	45,0
PT_2	$D = 1$	-0,004	-0,097	-0,215	-0,301	11,4	53,1	77,3	90,0
	$D = 0,707$	0,000	-0,013	-0,075	-0,151	8,1	43,4	72,3	90,0
	$D = 0,5$	0,002	0,045	0,057	0,000	5,8	33,7	65,8	90,0
	$D = 0,4$	0,003	0,071	0,134	0,097	4,6	28,1	60,6	90,0
	$D = 0,3$	0,004	0,093	0,222	0,222	3,5	21,8	53,1	90,0
	$D = 0,2$	0,004	0,110	0,317	0,398	2,3	14,9	41,6	90,0
	$D = 0,1$	0,004	0,121	0,405	0,699	1,2	7,6	24,0	90,0
	$D = 0,05$	0,004	0,124	0,433	1,000	0,6	3,8	12,5	90,0

25.2 Korrekturtabelle in mm

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		Abstand von $\lvert G\rvert$ und $\lvert$Asymptote$\rvert$ in mm				Abstand von φ und $\varphi_{\text{Asymptote}}$ in mm			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
PT_1		-0,1	-1,9	-4,3	-6,0	1,1	5,3	7,7	9,0
PT_2	$D = 1$	-0,2	-3,9	-8,6	-12,0	2,3	10,6	15,5	18,0
	$D = 0,707$	0	-0,5	-3,0	-6,0	1,6	8,7	14,5	18,0
	$D = 0,5$	0,1	1,8	2,3	0,0	1,2	6,7	13,2	18,0
	$D = 0,4$	0,1	2,8	5,4	3,9	0,9	5,6	12,1	18,0
	$D = 0,3$	0,2	3,7	8,9	8,9	0,7	4,4	10,6	18,0
	$D = 0,2$	0,2	4,4	12,7	15,9	0,5	3,0	8,3	18,0
	$D = 0,1$	0,2	4,8	16,2	28,0	0,2	1,5	4,8	18,0
	$D = 0,05$	0,2	5,0	17,3	40,0	0,1	0,8	2,5	18,0

25.3 Skalierung (Diagramm rechts)

1 lg-Einheit = 40 mm

$360°$ = 72 mm

Index