

RT Bibel Erweiterung

mariuskaffka

February 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Steuerung und Regelung	7
1.2	Grundstruktur des Regelkreises	7
1.2.1	Hinweis zu Vorzeichen (1.2.1)	7
1.2.2	Vorzeichenkonvention	8
1.2.3	Vorzeichenänderung im Umlauf z.B. $y = -G \cdot x$	8
1.3	Beispiele technischer Regelungen	8
1.3.1	Tiefenregelung eines Unterwasserfahrzeuges	11
1.3.2	Regelung von Windkraftanlagen	11
1.3.3	Kraftregelung beim Fräsen	11
1.3.4	Regelung eines Bioreaktors	11
1.3.5	Regelung einer Dampfmaschine	11
2	Modellbildung	12
2.1	Allgemeines	12
2.2	Einführung in Differentialgleichungen	12
2.3	Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum	13
2.4	Darstellung von Differentialgleichungen im Wirkungsplan	14
2.5	Aufstellen von Differentialgleichungen	14
2.6	Beispiele für Modellbildung	14
2.6.1	Zerlegung in Teilsysteme	14
2.6.2	Rückwirkungen	14
2.6.3	Zusammenfassen von Teilsystemen im Wirkungsplan	14
2.6.4	Modellierung von Regelungen	14
2.7	Das Gesetz der Sparsamkeit	14
2.8	Einheiten	14
3	Autonome Systeme	15
3.1	Arbeitspunkte und Ruhelagen	15
3.2	Stabilität	15
3.3	Linearisierung	15
3.3.1	Linearisierung einer Funktion	15
3.3.2	Linearisierung einer Differentialgleichung	15
3.3.3	Linearisierung im Kennlinienfeld	15

3.4	Charakteristisches Polynom	15
3.5	Linearisierungstheorem	15
3.6	Analyse im Zustandsraum	15
4	Verhalten bei allgemeiner Anregung	16
4.1	Homogene und partikuläre Lösung	16
4.2	Übergangsfunktion	16
4.3	Faltung	16
4.4	Laplace-Transformation	16
4.4.1	Laplace-Transformation von Zeitfunktionen	16
4.4.2	Laplace-Transformation von Operationen	16
4.4.3	Bestimmung des Zeitverlaufes linearer Systeme	16
4.4.4	Beispiele für Laplace Transformationen	16
4.5	Übertragungsfunktion $G(s)$	16
4.6	Grenzwertsätze	17
5	Verhalten bei sinusförmiger Anregung	18
5.1	Frequenzgang	18
5.2	Ortskurve	18
5.3	Bode-Diagramm	18
5.4	Fourier-Transformation	18
5.5	Filter	18
6	Verschaltungen von Systemen	19
6.1	Zusammenfassen von Teilsystemen	19
6.2	Zerlegung in einfache Elemente	19
6.2.1	Pol-Nullstellen im Bodediagramm	19
6.2.2	Lösungsweg: Frequenzgang aus Bodediagramm	19
6.2.3	TPR 5 – Ansätze	20
6.3	Zerlegung nicht-minimalphasiger Systeme	22
7	Typische Übertragungsglieder	23
7.1	Übersicht	23
7.2	Grundlegende Reglertypen	23
7.2.1	P-Element	23
7.2.2	I-Element	23
7.2.3	D-Element	23
7.2.4	PI, PD und PID	23
7.3	Verzögerungsglieder	23
7.3.1	PT_1	23
7.3.2	PT_2	23
7.3.3	PT_n	23
7.4	Kombinationen	23
7.4.1	IT_1	23
7.4.2	DT_1	23
7.4.3	PIT	23
7.4.4	PPT_1 und PDT_1	23

7.5	Nicht-minimalphasige Systeme	23
7.5.1	PA ₁	23
7.5.2	PT _t , PT ₁ T _t	23
8	Verhalten bei Sinusförmiger Anregung	23
8.1	Frequenzgang	23
8.1.1	Übertragung sinusförmiger Signale $u(t) = \sin(\omega t)$	23
8.2	Nicht-parametrische Identifikation	24
8.3	Parametrische Identifikation	24
8.3.1	Überanpassung	24
8.3.2	Graphische Parameteridentifikation	24
8.3.3	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	24
9	6. Thema	25
10	7. Thema	26
11	8. Thema	27
12	Stabilitätsprüfung	28
12.1	Problemstellung	28
12.2	Algebraische Stabilitätskriterien	28
12.2.1	Grundidee	28
12.2.2	Stabilitätskriterien nach Routh und Hurwitz	28
12.2.3	Beispiele	29
12.3	Nyquist-Kriterium	29
12.3.1	Vollständiges Nyquist-Kriterium	30
12.3.2	Beispiele	30
12.3.3	Anwendung bei Polen am Stabilitätsrand	30
12.3.4	Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	30
12.3.5	Amplituden- und Phasenreserve	30
12.4	Sonderfälle	30
12.4.1	Pol-Nullstellen-Kürzungen	30
12.4.2	Unstetige Polstellen	30
13	Einführung in den Reglerentwurf	31
13.1	Ziele und Lösungsansätze	31
13.1.1	Motivation	31
13.1.2	Gütemaße und Kennwerte	31
13.1.3	Ansätze des Reglerentwurfs	31
13.2	Statischer Reglerentwurf	31
13.3	Abwägungen bei der Reglerverstärkung	31
13.3.1	Vorteile hoher Verstärkungen	31
13.3.2	Nachteile hoher Verstärkungen	31
13.4	Einstellregeln	31
13.4.1	Einstellung mittels T_u - T_g -Ersatzmodell	31
13.4.2	Einstellung mittels Schwingversuch	31

14	Grundlegende modellbasierte Reglerentwurfverfahren	32
14.1	Frequenzkennlinienverfahren	32
14.1.1	Grundidee	32
14.1.2	Hohe Verstärkung bei niedrigen Frequenzen	32
14.1.3	Übergangsbereich	32
14.1.4	Niedrige Verstärkung bei hohen Frequenzen	32
14.2	Betragskriterium und Symmetrisches Kriterium	32
14.3	Polvorgabe	32
14.3.1	Polvorgabe für Ausgangsrückführungen	32
14.3.2	Polvorgabe für Zustandsrückführungen	32
14.3.3	Steuerbarkeit	32
14.4	Beobachterentwurf	32
14.4.1	Zustandsschätzung	32
14.4.2	Luenberger-Beobachter	32
14.4.3	Beobachtbarkeit und Dualität	32
14.4.4	Beispiel	32
14.5	Wurzelortskurven	32
14.5.1	Grundidee	32
14.5.2	Konstruktionsregeln	32
14.5.3	Beispiel	32
15	Vermaschte Regelkreise	33
15.1	Erweiterung des Einfachregelkreises	33
15.2	Vorsteuerung	33
15.3	Führungsgrößenfilter	33
15.4	Störgrößenaufschaltung	33
15.5	Kaskadenregelung	33
15.6	Hilfsstellgröße	33
16	Mehrgrößenregelung	34
16.1	Zentrale vs. dezentrale Regelung	34
16.2	Eigenschaften von Mehrgrößensystemen	34
16.2.1	Verschaltungen von Mehrgrößensystemen	34
16.2.2	Querkopplungen	34
16.2.3	Polstellen von Mehrgrößensystemen	34
16.2.4	Richtungsabhängige Verstärkung	34
16.3	Verfahren der dezentralen Regelung	34
16.3.1	Relative Gain Array	34
16.3.2	MIMO-Nyquist und Diagonaldominanz	34
16.4	Verfahren der zentralen Regelung	34
16.4.1	Zentrale Regelung im Zustandsraum	34
16.4.2	Entkopplungsregler	34
17	Zeitdiskrete Systeme	35
17.1	Abtastregelungen	35
17.1.1	Definitionen	35
17.1.2	Abtaster und Halteglied	35

17.1.3	Aliasing	35
17.1.4	Verschaltung zu hybriden Systemen	35
17.2	Einführung in Differenzengleichungen	35
17.3	Autonome zeitdiskrete Systeme	35
17.4	Umrechnen von Differenzen- und Differentialgleichungen	35
17.4.1	Rückwärtsdifferenzen	35
17.4.2	Analytische Lösung	35
17.5	Quasikontinuierlicher Reglerentwurf	35
17.6	Zeitdiskreter Bildbereich	35
17.6.1	Z-Transformation	35
17.6.2	Zeitdiskrete Übertragungsfunktion	35
17.6.3	Zeitdiskreter Frequenzgang	35
17.6.4	Zeitdiskrete Modelle zeitkontinuierlicher Systeme	35
17.7	Bilineare Transformation	35
17.8	Klassischer zeitdiskreter Reglerentwurf	35
17.9	Regler mit endlicher Einstellzeit	35
17.9.1	Entwurf	35
17.9.2	Stabilität	35
17.9.3	Beispiel	35
18	Kalmanfilter	36
18.1	Allgemeines	36
18.2	Herleitung	36
18.3	Auslegung und Beispiel	36
18.4	Limitierungen und Erweiterungen	36
18.4.1	Allgemein	36
19	Zustandsraum	36
19.1	Zustandsregelung	36
19.2	Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2]$ bestimmen.	36
20	Steuerbarkeitskriterium von Kalman	37
21	Partialbruchzerlegung	37
21.1	Einführung	37
21.2	Beispiel: $\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)}$	38
22	Informationen über Ortskurven	38
23	Informationen über Übergangsfunktionen $h(t)$	38
23.1	Stationäre Genauigkeit	38
24	Berechnung maximal zulässige Totzeit T_t	39
25	Durchtrittsfrequenz ω_d	39
25.1	Ansprechverhalten	39
26	Einstellung nach T_u-T_g (Chien, Hrones, Reswick)	39

27 Gewichts- und Übergangsfunktion aus $G_s(s)$	40
27.1 Zusammenhänge:	40
27.2 Gewichtungsfunktion $g(t)$	40
27.2.1 $G(s)$ ist gegeben, Gewichtungsfunktion $g(t)$ bestimmen.	40
27.3 Übergangsfunktion $h(t)$	41
28 Merksatz / Intuition (Bode: Zeitbereich & Frequenzbereich)	41
28.1 Intuition	41
29 Laplace Transformation	41
29.1 Korrespondenztabelle	41
30 Berechnung der inversen Laplace-Transformation	41
31 Mathematische Grundlagen	41
31.1 Determinante einer 2x2 & 3x3-Matrix	41
31.1.1 2x2	41
31.1.2 3x3	42
31.2 Integral einer Exponentialfunktion ($\lambda > 0$)	42
31.3 Betrag von $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$, $e^{j\theta}$	43
31.3.1 Berechnung des Betrags	43
31.3.2 Berechnung des Betrags	43
31.4 $G(s)$ ist gegeben, Differentialgleichung bestimmen.	43
32 Shannon-/Nyquist-Abtasttheorem (für T_{\min})	45
33 Inverse einer Matrix	45
33.1 Allgemein	45
33.2 Inverse einer 2×2 -Matrix	45
33.3 Hinweis (Regelungstechnik)	46
34 Stationäre Genauigkeit	46
34.1 Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis	46
35 Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten	46
36 Grafische Darstellung der Übergangsfunktion $h(t)$ des IT_1 Gliedes	46
36.1 Erläuterung der Terme	46
36.2 Werte bestimmen	47
37 Korrekturtabellen und Skalierung	47
37.1 Korrekturtabelle (log/Phase)	47
37.2 Korrekturtabelle in mm	48
37.3 Skalierung (Diagramm rechts)	48
38 Was noch hinzugefügt werden muss	48
38.1	48

1 Einführung

1.1 Steuerung und Regelung

1.2 Grundstruktur des Regelkreises

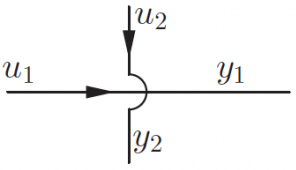
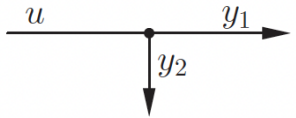
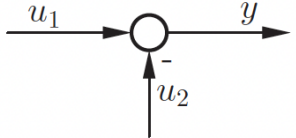
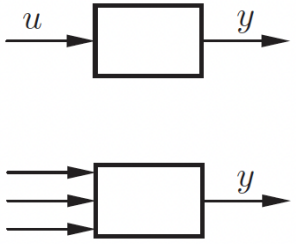
Bezeichnung	Symbol	Funktion
Wirkungslinien Signalübertragung		$y_1 = u_1$ $y_2 = u_2$
Verzweigungsstelle		$y_1 = u$ $y_2 = u$
Summenpunkt		$y = u_1 - u_2$
Übertragungsblock		$y = f(u)$ $y = f(u_1, u_2, u_3, \dots)$

Tabelle 1-1: Elemente des Wirkungsplans

Abbildung 1: Symbole der Grundstruktur des Regelkreises.

1.2.1 Hinweis zu Vorzeichen (1.2.1)

Falsches Vorzeichen im Wirkungsplan → 1 Punkt Abzug!

Daher ist es empfehlenswert, auch wenn keine Koeffizienten an den Übertragungsblöcken notwendig sind, die DGLs vollständig zu linearisieren, um alle Vorzeichen korrekt zu ermitteln.

Signale und Systeme

Ein Signal ist eine (physikalische) Größe, deren Wert einen Informationsgehalt besitzt. Ein Signal heißt dynamisch, wenn sich der Wert des Signals über die Zeit ändern kann. Ein System Σ ist eine durch eine Systemgrenze von der Umgebung abgegrenzte Einheit, die über Signale mit der Umgebung Informationen austauschen kann. Ein dynamisches System nutzt dabei dynamische Signale und man unterscheidet aufgrund des Ursache-Wirkungs-Prinzips zwischen Eingangssignalen $u(t)$, die auf das System einwirken, und Ausgangssignalen $y(t)$, die die Reaktion des Systems auf die Eingangssignale darstellen.¹

Bezeichnungen für Systeme

Die folgenden Bezeichnungen werden in der Regelungstechnik weitestgehend synonym verwendet: System, Glied, Übertragungssystem, dynamisches System, Übertragungsblock, Regelkreisglied, Übertragungsglied, Regelkreiselement, Übertragungselement.²

Definition der Signale und Systeme im Regelkreis

Die Regelgröße y ist die Ausgangsgröße der Regelstrecke, die auf einem Wert gehalten werden soll. Die Führungsgröße w (Sollwert) ist eine von außen zugeführte Größe. Die Stellgröße u ist die Ausgangsgröße des Reglers. Störgröße z wirkt von außen auf die Regelstrecke. Die Messgröße y_m wird vom Messglied bereitgestellt. Messrauschen n wirkt auf die Messgröße. Die Regelstrecke ist das zu regelnde System. Der Regler vergleicht Mess- und Führungsgröße. Das Messglied stellt die Messung bereit.³

Offener und geschlossener Regelkreis

Das Übertragungsverhalten in Bild 1-6 mit Rückführung wird als geschlossener Regelkreis bezeichnet. Das Übertragungsverhalten in Bild 1-7 ohne Rückführung wird als offener Regelkreis bezeichnet.⁴

1.2.2 Vorzeichenkonvention

Umlauf $-1 \rightarrow$ Minus an die Führungsgröße, z.B. $w = v_{soll}, t_{soll}, etc.$

Umlauf $+1 \rightarrow$ Minus an die Regelgröße (Ausgang), z.B. $y = v, t, etc.$

1.2.3 Vorzeichenänderung im Umlauf z.B. $y = -G \cdot x$

Hinter Kasten von G einen Umkehrpunkt!

1.3 Beispiele technischer Regelungen

Relevante Bilanzen und Gleichungen ausgewählter Fachgebiete

Mechanik

- Bilanzen:

- Dynamisches Kräftegleichgewicht (2. Newtonsches Gesetz):

$$M \cdot \ddot{x} = \sum F_i$$

- * M : Masse
- * x : Weg/Ort, \ddot{x} : Beschleunigung
- * F_i : Kräfte

- Drallsatz:

$$J \cdot \ddot{\Phi} = \sum M_i$$

- * J : Trägheitsmoment
- * Φ : Winkel, $\ddot{\Phi}$: Winkelbeschleunigung
- * M_i : Momente

- Bauteile:

- Hookesche Feder:

$$F_{F,\text{translatorisch}} = C \cdot X \quad M_{F,\text{rotatorisch}} = C \cdot \Phi$$

- * C : Federkonstante
- * X : Auslenkung (translatorisch), Φ : Winkel (rotatorisch)
- * F_F : Federkraft, M_F : Federmoment

- Dämpfer:

$$F_{D,\text{translatorisch}} = D \cdot \dot{x} \quad M_{D,\text{rotatorisch}} = D \cdot \dot{\Phi}$$

- * D : Dämpfungskoeffizient
- * \dot{x} : Geschwindigkeit, $\dot{\Phi}$: Winkelgeschwindigkeit
- * F_D : Dämpferkraft, M_D : Dämpfermoment

- Kinematik:

- Zusammenhang von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} \quad \text{bzw.} \quad x = \int v \, dt = \int \left(\int a \, dt \right) dt$$

- * x : Ort, v : Geschwindigkeit, a : Beschleunigung

- Zusammenhang zwischen Winkel und Kreisfrequenz:

$$\omega = \dot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int \omega \, dt$$

- * φ : Winkel, ω : Kreisfrequenz

- Übersetzungsverhältnis:

$$i = \frac{n_{An}}{n_{Ab}} = \frac{\omega_{An}}{\omega_{Ab}} = \frac{d_{Ab}}{d_{An}} = \frac{z_{Ab}}{z_{An}} = \frac{M_{Ab}}{M_{An}}$$

- n : Drehzahl, ω : Winkelgeschwindigkeit
- d : Durchmesser, z : Zähnezahl
- M : Moment, Indizes An/Ab : Antrieb/Abtrieb

- Leistung:

$$P = \omega \cdot M$$

- P : Leistung, ω : Winkelgeschwindigkeit, M : Moment

Thermodynamik

- Bilanz:

- Energiebilanz:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \dot{H}_i + \sum \dot{Q}_j + \sum P_k$$

- * U : innere Energie
- * \dot{H}_i : Enthalpieströme, \dot{Q}_j : Wärmeströme
- * P_k : Leistungen

- Stoffgesetze:

- Enthalpiestrom:

$$\dot{H} = \dot{M} \cdot c_p \cdot \Delta T$$

- * \dot{H} : Enthalpiestrom, \dot{M} : Massenstrom
- * c_p : spezifische Wärmekapazität (p), ΔT : Temperaturänderung

- Innere Energie:

$$U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$$

- * U : innere Energie, M : Masse
- * c_v : spezifische Wärmekapazität (v), ΔT : Temperaturänderung

- Ideales Gasgesetz:

$$P \cdot V = M \cdot R \cdot T$$

- * P : Druck, V : Volumen, R : Gaskonstante, T : Temperatur

Elektrotechnik

- Bilanzen:

- Erste Kirchhoffsche Regel (Knotenregel):

$$0 = \sum I_i$$

- * I_i : Ströme

- Zweite Kirchhoffsche Regel (Maschenregel):

$$0 = \sum U_i$$

* U_i : Spannungen

- Bauteile:

- Widerstand:

$$U = R \cdot I$$

- * U : Spannung, R : Widerstand, I : Strom

- Kondensator:

$$I_C = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

- * I_C : Kondensatorstrom, C : Kapazität

- * U : Spannung

- Spule:

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

- * U_L : Spulenspannung, L : Induktivität

- * I : Strom

- Leistung:

$$P = U \cdot I$$

- P : Leistung, U : Spannung, I : Strom

1.3.1 Tiefenregelung eines Unterwasserfahrzeuges

1.3.2 Regelung von Windkraftanlagen

1.3.3 Kraftregelung beim Fräsen

1.3.4 Regelung eines Bioreaktors

1.3.5 Regelung einer Dampfmaschine

2 Modellbildung

2.1 Allgemeines

Modell

Ein Modell ist eine Beschreibung, die nur einen Teil der Eigenschaften des Originals wiedergibt. Ein richtig gewähltes Modell zeichnet sich dadurch aus, dass es alle wichtigen Eigenschaften des Originals widerspiegelt und gleichzeitig auf überflüssige Eigenschaften verzichtet.⁵

2.2 Einführung in Differentialgleichungen

Systemordnung

Die Ordnung des Systems entspricht n und somit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße.⁶

Anfangsbedingungen

Die Bedingungen $y^{(n-1)}(t_0) = 0, \dots, \dot{y}(t_0) = 0, y(t_0) = 0$ heißen Anfangsbedingungen einer Differentialgleichung n -ter Ordnung zum Zeitpunkt t_0 .⁷

Zeitinvariante Systeme

Ist f nicht explizit von der Zeit abhängig, d. h. $y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, u(t))$, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System zeitinvariant.⁸

Lineare Systeme

Ist f eine lineare Funktion, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System linear. Andernfalls heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System nichtlinear.⁹

LTI-Systeme

Ist ein System linear und zeitinvariant, d. h. es kann durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, so nennt man das System auch LTI-System (Linear Time Invariant).¹⁰

Relativer Grad

Der relative Grad eines LTI-Systems ist $r = n - m$ und beschreibt damit die Differenz zwischen höchster auftretender Ableitung der Ausgangsgröße und höchster auftauchender Ableitung der Eingangsgröße.¹¹

- n : höchste Ableitung der Ausgangsgröße $y(t)$
- m : höchste Ableitung der Eingangsgröße $u(t)$
- akausal sind: $r < 0$ (d. h. $m > n$), z. B.

Kausale Systeme

Ist $r \geq 0$, d.h. die höchste auftretende Ableitung der Ausgangsgröße ist mindestens so groß wie die höchste auftretende Ableitung nach der Eingangsgröße, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene LTI-System kausal. Andernfalls heißt es akausal.¹²

- akausal sind: $r < 0$ (d. h. $m > n$), z. B.
 - D-Glied: $y = K_D \dot{u}$
 - PD-Glied: $y = K(u + T_v \dot{u})$
 - PID-Glied: $y = K \left(u + \frac{1}{T_n} \int u dt + T_v \dot{u} \right)$

2.3 Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum

Zustandsraumdarstellung

Die Darstellung $\dot{x} = f(x, u, t)$ und $y = g(x, u, t)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$ und entsprechenden vektorwertigen Funktionen f und g heißt Zustandsraumdarstellung.¹³

SISO und MIMO

Ein System mit einer skalaren Eingangsgröße und einer skalaren Ausgangsgröße wird auch als SISO-System (Single Input Single Output) bezeichnet. Systeme mit mehreren Ein- oder Ausgangsgrößen heißen MIMO-Systeme (Multiple Input Multiple Output).¹⁴

Regelungsnormalform

Die Darstellungsform von Differentialgleichungen im Zustandsraum gemäß Gl.(2.25) bzw. Gl. (2.26) heißt Regelungsnormalform.¹⁵

2.4 Darstellung von Differentialgleichungen im Wirkungsplan

2.5 Aufstellen von Differentialgleichungen

2.6 Beispiele für Modellbildung

2.6.1 Zerlegung in Teilsysteme

2.6.2 Rückwirkungen

2.6.3 Zusammenfassen von Teilsystemen im Wirkungsplan

2.6.4 Modellierung von Regelungen

2.7 Das Gesetz der Sparsamkeit

Minimale Realisierung

┃ Eine Differentialgleichung, die mit der minimal möglichen Ordnung auskommt, um das Übertragungsverhalten $u \mapsto y$ zu beschreiben, wird minimale Realisierung genannt.¹⁶

Gesetz der Sparsamkeit

┃ Innerhalb einer Menge von wissenschaftlichen Erklärungen sollten solche Erklärungen bevorzugt werden, die mit weniger Variablen oder Elementen auskommen (lex parsimoniae).¹⁷

2.8 Einheiten

Zeitkonstanten und Frequenzen

┃ In der Differentialgleichung $T\dot{y}(t) + y(t) = 0$ bezeichnet man T als Zeitkonstante des Systems. Schreibt man $\dot{y} + \omega y = 0$, so ist ω eine Frequenz, die Eckkreisfrequenz genannt wird.¹⁸

Notation von Absolut- und Abweichungsgrößen

┃ Normalerweise werden alle Signale mit Kleinbuchstaben geschrieben. Treten in der Beschreibung sowohl Absolut- als auch Abweichungsgrößen auf, werden Absolutgrößen mit Großbuchstaben und Abweichungsgrößen mit Kleinbuchstaben geschrieben.¹⁹

3 Autonome Systeme

3.1 Arbeitspunkte und Ruhelagen

3.2 Stabilität

3.3 Linearisierung

3.3.1 Linearisierung einer Funktion

3.3.2 Linearisierung einer Differentialgleichung

3.3.3 Linearisierung im Kennlinienfeld

3.4 Charakteristisches Polynom

3.5 Linearisierungstheorem

3.6 Analyse im Zustandsraum

4 Verhalten bei allgemeiner Anregung

4.1 Homogene und partikuläre Lösung

4.2 Übergangsfunktion

4.3 Faltung

4.4 Laplace-Transformation

4.4.1 Laplace-Transformation von Zeitfunktionen

$F(s)$	$f(t)$ für $t > 0$	$f(t) = 0$ für $t \leq 0$
$\frac{1}{(s - \lambda)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
1	$\delta(t)$ (= $u(t)$ für Gewichtsfunktion $g(t)$)	
$\frac{1}{s}$	$1(t)$ (= $u(t)$ für Übergangsfunktion $h(t)$)	
$\frac{1}{s^2}$	t	
$\frac{1}{1 + sT}$	$\frac{1}{T} e^{-t/T}$	
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_D t)$	$ D < 1$
	$\omega_0^2 t e^{-D\omega_0 t}$	$ D = 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$
$\frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} \left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right)$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{s}{1 + sT}$	$\frac{1}{T} \left(\delta(t) - \frac{1}{T} e^{-t/T} \right)$	
$\frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$\frac{1}{T_1 T_2 (T_1 - T_2)} \left(T_1 e^{-t/T_2} - T_2 e^{-t/T_1} \right)$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{s\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\omega_0^2 e^{-D\omega_0 t} \left(\cos(\omega_D t) - \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t) \right)$	$ D < 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$
$\frac{1}{s(1 + sT)}$	$1 - e^{-t/T}$	
$\frac{1}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right)$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)}$	$1 - e^{-D\omega_0 t} \left(\cos(\omega_D t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t) \right)$	$ D < 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$

4.4.2 Laplace-Transformation von Operationen

4.4.3 Bestimmung des Zeitverlaufes linearer Systeme

4.4.4 Beispiele für Laplace Transformationen

$$f(t) = t^2$$

$$t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} t^2 e^{0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{(s-0)^3}$$

4.5 Übertragungsfunktion $G(s)$

Stabilität im Bildbereich:

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $p(s)$ entsprechen den Polstellen λ_i .

Für Stabilität muss gelten:

$$\Re(\lambda_i) < 0$$

Umgangssprachlich: Für Stabilität muss der Realteil der Polstellen λ_i negativ sein

ODER

Die Polstellen λ_i müssen in der linken offenen s -Halbebene liegen für Stabilität.

4.6 Grenzwertsätze

5 Verhalten bei sinusförmiger Anregung

5.1 Frequenzgang

5.2 Ortskurve

5.3 Bode-Diagramm

5.4 Fourier-Transformation

5.5 Filter

6 Verschaltungen von Systemen

6.1 Zusammenfassen von Teilsystemen

6.2 Zerlegung in einfache Elemente

6.2.1 Pol-Nullstellen im Bodediagramm

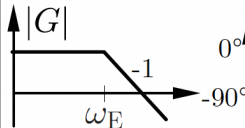
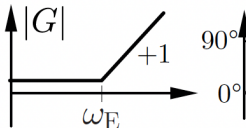
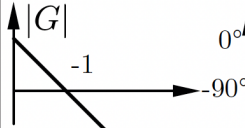
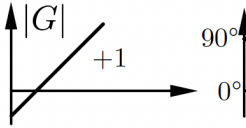
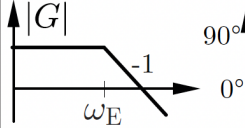
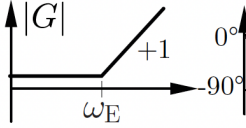
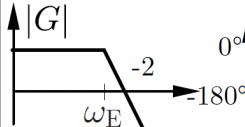
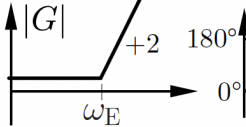
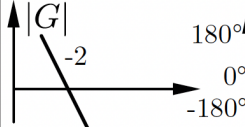
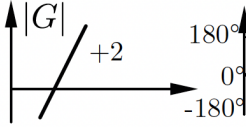
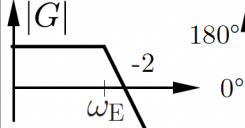
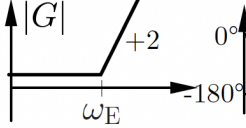
$\omega_E = s $		Polstelle	Nullstelle
reell	$\text{Re}(s) < 0$		
	$\text{Re}(s) = 0$		
	$\text{Re}(s) > 0$		
komplex konjugiert	$\text{Re}(s) < 0$		
	$\text{Re}(s) = 0$		
	$\text{Re}(s) > 0$		

Tabelle 6-2: Bode-Diagramme in Abhängigkeit der Pol- und Nullstellen

Abbildung 2: Pol-Nullstellen im Bodediagramm.

6.2.2 Lösungsweg: Frequenzgang aus Bodediagramm

1. Knickfrequenzen und Steigungen im Bode-Diagramm ablesen.
2. Nullstellen/Polstellen als Faktoren ansetzen:

$$G_n(s) = 1 \pm \frac{1}{|s_n|}s, \quad G_p(s) = \frac{1}{1 \pm \frac{1}{|s_p|}s}$$

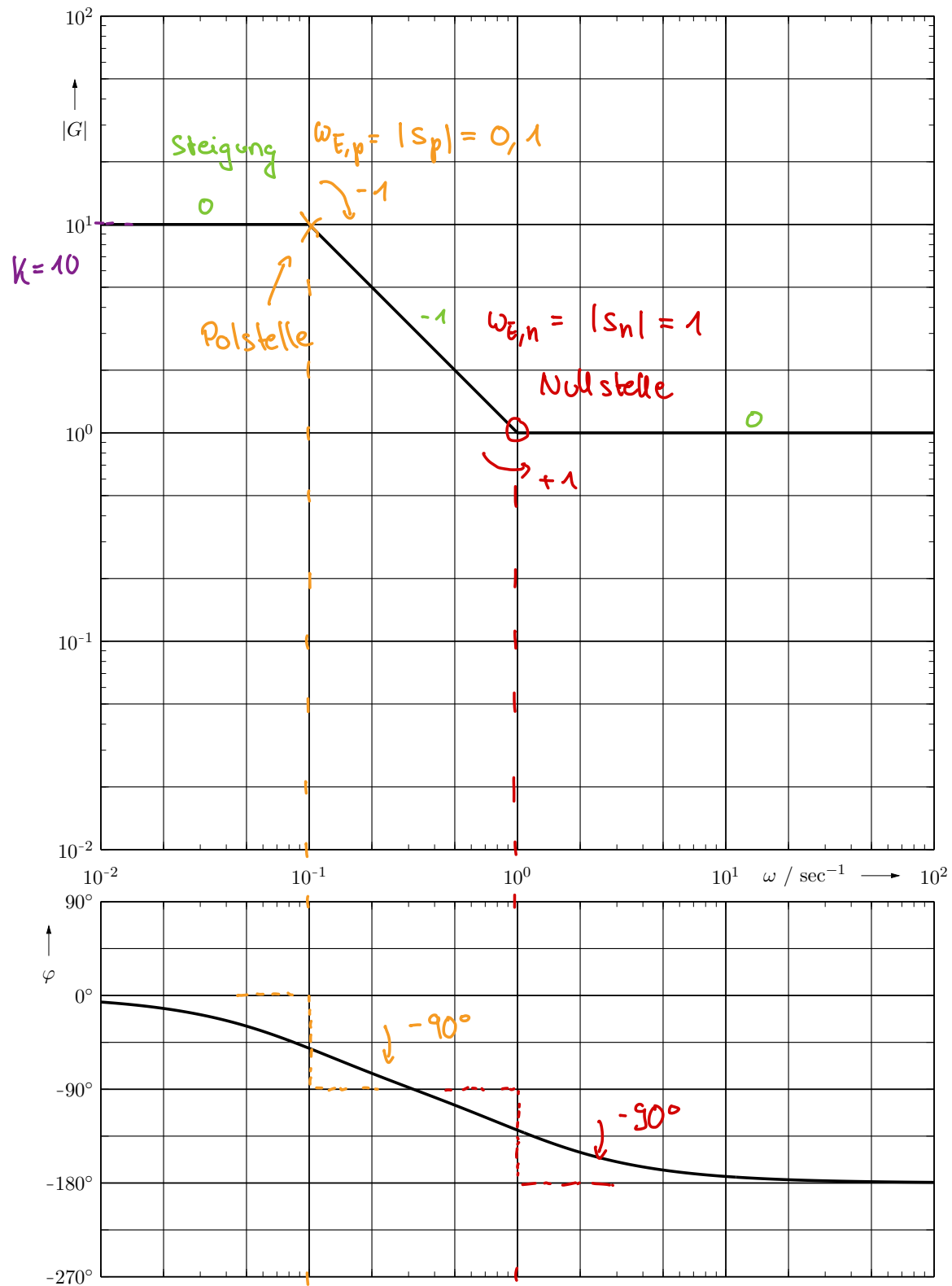
3. Vorzeichen nach Lage wählen:

- $\Re(s_n) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{|s_n|}s$, $\Re(s_n) < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{|s_n|}s$
- $\Re(s_p) < 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{|s_p|}s}$, $\Re(s_p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{|s_p|}s}$

4. Gesamtübertragungsfunktion:

$$G(s) = K \cdot \prod \hat{G}_n \cdot \prod \hat{G}_p$$

6.2.3 TPR 5 – Ansätze


 Abbildung 1: Bode-Diagramm von $G_S(j\omega)$

6.3 Zerlegung nicht-minimalphasiger Systeme

7 Typische Übertragungsglieder

7.1 Übersicht

7.2 Grundlegende Reglertypen

7.2.1 P-Element

7.2.2 I-Element

7.2.3 D-Element

7.2.4 PI, PD und PID

7.3 Verzögerungsglieder

7.3.1 PT_1

7.3.2 PT_2

7.3.3 PT_n

7.4 Kombinationen

7.4.1 IT_1

7.4.2 DT_1

7.4.3 PIT

7.4.4 PPT_1 und PDT_1

7.5 Nicht-minimalphasige Systeme

7.5.1 PA_1

7.5.2 PT_t , PT_1T_t

8 Verhalten bei Sinusförmiger Anregung

8.1 Frequenzgang

8.1.1 Übertragung sinusförmiger Signale $u(t) = \sin(\omega t)$

1. Bedingungen prüfen:

- Ist das System stabil?
- Ist das System LTI?
- Ist der Eingang $u(t)$ sinusförmig?

2. Koeffizienten ermitteln: Für ein stabiles LTI-System mit dem Frequenzgang $G(j\omega)$ gilt im *eingeschwungenen Zustand*²⁰ :

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

analog:

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Hinweis:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (1)$$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t) \quad (2)$$

2.1. ω bestimmen Im ersten Schritt ist ω aus dem Eingang $u(t)$ zu bestimmen:

1. Falls der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit der Periodendauer T .
2. Beispiel: $u(t) = \sin(2t) \Rightarrow \omega = 2$.

2.2. $|G(j\omega)|$ bestimmen Den Betrag $|G(j\omega)|$ beim in 14.2.1 bestimmten ω ermitteln:

1. Falls der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$ berechnen.
2. Falls der Frequenzgang $G(j\omega)$ gegeben ist: direkt einsetzen. Beispiel:

$$\left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \omega^2}}$$

3. Bodediagramm: Betrag aus dem *realen Verlauf* ablesen (nicht aus den Asymptoten).
4. Ortskurve: Betrag ist der Abstand vom Ursprung zum Punkt bei ω .

2.3. $\angle G(j\omega)$ bestimmen Die Phasenverschiebung beim in 14.2.1 bestimmten ω ermitteln:

1. Wenn der Verlauf von $u(t)$ und $y(t)$ gegeben ist: Phasenverschiebung als Versatz zwischen $u(t)$ und $y(t)$ bestimmen.
2. Bodediagramm: Phasenverschiebung bei ω ablesen.
3. Ortskurve: Winkel bei ω messen.

8.2 Nicht-parametrische Identifikation

8.3 Parametrische Identifikation

8.3.1 Überanpassung

8.3.2 Graphische Parameteridentifikation

8.3.3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

²⁰Quelle: Umdruck S. 116, 119

²⁰Beispiele: Altklausur H22, Aufgabe 4 (a); TPR 2, Aufgabe 1

9 6. Thema

10 7. Thema

11 8. Thema

12 Stabilitätsprüfung

12.1 Problemstellung

Stabilitätskriterien

Alle Kriterien sind gleichbedeutend.

1. Wurzeln des charakteristischen Polynoms besitzen alle negativen Realteil:

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \Re(\lambda_i) < 0$$

2. Eigenwerte der Systemmatrix A besitzen alle einen negativen Realteil:

$$\det(\lambda I - A) \Rightarrow p(\lambda) = 0 \text{ und } \Re(\lambda_i) < 0$$

3. Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ besitzen alle negativen Realteil:

$$p(s) = N(s) = 0 \Rightarrow \Re(s_i) < 0$$

4. Übergangsfunktion $h(t)$ konvergiert gegen einen endlichen Wert.
5. Gewichtsfunktion $g(t) = \dot{h}(t)$ konvergiert gegen null und ist für LTI-System absolut integrierbar.

12.2 Algebraische Stabilitätskriterien

12.2.1 Grundidee

Für die Bestimmung der Stabilitätseigenschaften wird nicht die genaue Position der Wurzel, bzw. der Polstelle λ_i benötigt, **sondern es reicht die Kenntnis des Vorzeichens** der Wurzel bzw. der Polstelle λ_i aus.

12.2.2 Stabilitätskriterien nach Routh und Hurwitz

1. Bedingung (hinreichend für Systeme mit Ordnung $n = 1, 2$).²¹

System der Ordnung n mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

ist stabil, wenn

- alle Koeffizienten a_i vorhanden sind,
- alle Koeffizienten a_i das gleiche Vorzeichen haben,
- genauer: alle a_i positiv sind, ggf. Differentialgleichung mit -1 multiplizieren, falls alle negativ sind.

²¹Stabilitätskriterien für Systeme bis Ordnung $n = 3$ (S. 226).

2. Bedingung nach Hurwitz (bis Ordnung $n = 3$).

$\det(H)$ sowie alle Unterdeterminanten sind größer null (Hurwitz-Matrix Bsp. S. 217).

Für $n = 3$ (vgl. S. 219, Gl. 9.6):

$$\det(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (\text{S. 217})$$

2. Bedingung nach Routh.

Routhschen Probefunktionen R_i sind sämtlich größer null.

Vorlagen für Routh-Probefunktionen (bis $n = 4$). Charakteristisches Polynom für $n = 4$:

$$p(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

Für $n = 1$

i	R_i
1	a_1
0	a_0

Für $n = 2$

i	R_i	
2	a_2	a_0
1	a_1	—
0	$a'_0 = a_0$	

Für $n = 3$

i	R_i		
3	a_3	a_1	
2	a_2	a_0	
1	$a'_1 = a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0$	—	
0	$a'_0 = a_0$	—	

Für $n = 4$

i	R_i			
4	a_4	a_2	a_0	
3	a_3	a_1	—	
2	$a'_2 = a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1$	$a'_0 = a_0$	—	
1	$a'_1 = a_1 - \frac{a_3}{a'_2} a'_0$	—	—	
0	$a'_0 = a_0$	—	—	

12.2.3 Beispiele

12.3 Nyquist-Kriterium

Wird benötigt, wenn das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ nicht gegeben oder nicht aufgestellt werden kann, z.B. bei Totzeitgliedern (vgl. $G(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K_p e^{-sT_t}}$, S. 225, Gl. 9.19).

12.3.1 Vollständiges Nyquist-Kriterium

Gegeben sei ein aufgeschnittener kausaler²² Regelkreis G_0 und ein zugehöriger geschlossener Regelkreis G . Es gilt (S. 231):

$$m = n - p$$

mit

- $p = p_+(G_0)$: Anzahl der Pole des aufgeschnittenen Regelkreises G_0 in der rechten offenen s -Halbebene,
- $n = n_+(1 + G_0)$: Anzahl der Pole des geschlossenen Regelkreises G in der rechten offenen s -Halbebene,
- m : Anzahl der Umläufe der Ortskurve von $G_0(j\omega)$ (für $-\infty < \omega < \infty$) um den kritischen Punkt -1 im Uhrzeigersinn.

Damit G stabil ist, muss $n = 0$ gelten. Also folgt

$$m = -p.$$

12.3.2 Beispiele

12.3.3 Anwendung bei Polen am Stabilitätsrand

12.3.4 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

12.3.5 Amplituden- und Phasenreserve

12.4 Sonderfälle

12.4.1 Pol-Nullstellen-Kürzungen

12.4.2 Unstetige Polstellen

²²Umdruck S. 27

13 Einführung in den Reglerentwurf

13.1 Ziele und Lösungsansätze

13.1.1 Motivation

13.1.2 Gütemaße und Kennwerte

13.1.3 Ansätze des Reglerentwurfs

13.2 Statischer Reglerentwurf

13.3 Abwägungen bei der Reglerverstärkung

13.3.1 Vorteile hoher Verstärkungen

13.3.2 Nachteile hoher Verstärkungen

13.4 Einstellregeln

13.4.1 Einstellung mittels T_u - T_g -Ersatzmodell

13.4.2 Einstellung mittels Schwingversuch

14 Grundlegende modellbasierte Reglerentwurfsverfahren

14.1 Frequenzkennlinienverfahren

14.1.1 Grundidee

14.1.2 Hohe Verstärkung bei niedrigen Frequenzen

14.1.3 Übergangsbereich

14.1.4 Niedrige Verstärkung bei hohen Frequenzen

14.2 Betragkriterium und Symmetrisches Kriterium

14.3 Polvorgabe

14.3.1 Polvorgabe für Ausgangsrückführungen

14.3.2 Polvorgabe für Zustandsrückführungen

14.3.3 Steuerbarkeit

14.4 Beobachterentwurf

14.4.1 Zustandsschätzung

14.4.2 Luenberger-Beobachter

14.4.3 Beobachtbarkeit und Dualität

14.4.4 Beispiel

14.5 Wurzelortskurven

14.5.1 Grundidee

14.5.2 Konstruktionsregeln

14.5.3 Beispiel

15 Vermaschte Regelkreise

15.1 Erweiterung des Einfachregelkreises

15.2 Vorsteuerung

15.3 Führungsgrößenfilter

15.4 Störgrößenaufschaltung

15.5 Kaskadenregelung

15.6 Hilfsstellgröße

16 Mehrgrößenregelung

16.1 Zentrale vs. dezentrale Regelung

16.2 Eigenschaften von Mehrgrößensystemen

16.2.1 Verschaltungen von Mehrgrößensystemen

16.2.2 Querkopplungen

16.2.3 Polstellen von Mehrgrößensystemen

16.2.4 Richtungsabhängige Verstärkung

16.3 Verfahren der dezentralen Regelung

16.3.1 Relative Gain Array

16.3.2 MIMO-Nyquist und Diagonaldominanz

16.4 Verfahren der zentralen Regelung

16.4.1 Zentrale Regelung im Zustandsraum

16.4.2 Entkopplungsregler

17 Zeitdiskrete Systeme

17.1 Abtastregelungen

17.1.1 Definitionen

17.1.2 Abtaster und Halteglied

17.1.3 Aliasing

17.1.4 Verschaltung zu hybriden Systemen

17.2 Einführung in Differenzengleichungen

17.3 Autonome zeitdiskrete Systeme

17.4 Umrechnen von Differenzen- und Differentialgleichungen

17.4.1 Rückwärtsdifferenzen

17.4.2 Analytische Lösung

17.5 Quasikontinuierlicher Reglerentwurf

17.6 Zeitdiskreter Bildbereich

17.6.1 Z-Transformation

17.6.2 Zeitdiskrete Übertragungsfunktion

17.6.3 Zeitdiskreter Frequenzgang

17.6.4 Zeitdiskrete Modelle zeitkontinuierlicher Systeme

17.7 Bilineare Transformation

17.8 Klassischer zeitdiskreter Reglerentwurf

17.9 Regler mit endlicher Einstellzeit

17.9.1 Entwurf

17.9.2 Stabilität

17.9.3 Beispiel

18 Kalmanfilter

18.1 Allgemeines

18.2 Herleitung

18.3 Auslegung und Beispiel

18.4 Limitierungen und Erweiterungen

18.4.1 Allgemein

1. Es dürfen nur Terme wie x_k, y_k, u_k hinzugefügt werden.
2. Es dürfen KEINE! Terme wie $x_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}$ hinzugefügt werden.
3. $y(t) \approx y_k$
4. $\dot{y}(t) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$
5. $\ddot{y}(t) \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$
6. $y(t - T_t) \approx y_{k-d}$ mit $d = \frac{T_t}{T}$.

Hinweis: In den meisten Fällen wird der Term y_{k-d} als Totzeitglied angenommen. Besonders ist bei einem Koeffizientenvergleich darauf zu achten, ob ein Totzeitglied in der vorgegebenen Gleichung vorhanden ist.

Wenn ein Totzeitglied $K e^{-sT_t}$ vorhanden ist, dann y_{k-d} als Totzeitglied annehmen.

Wenn kein Totzeitglied vorhanden ist, dann in den meisten Fällen $\dot{y}(t)$ oder selten $\ddot{y}(t)$.

19 Zustandsraum

19.1 Zustandsregelung

In Figur 1 ist eine Zustandsregelung mit Proportionalgliedern zu sehen.

19.2 Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2]$ bestimmen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

1. \mathbf{A}_k bestimmen.

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 k_1 & a_{12} - b_1 k_2 \\ a_{21} - b_2 k_1 & a_{22} - b_2 k_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

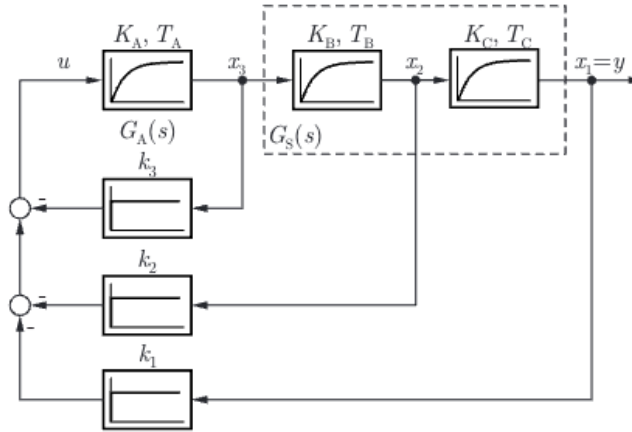


Abbildung 3: Zustandsregelung mit $k^T = (x_1, x_2, x_3)$

2. Matrix für Determinante aufstellen.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k) = \begin{vmatrix} s - (a_{11} - b_1 k_1) & -(a_{12} - b_1 k_2) \\ -(a_{21} - b_2 k_1) & s - (a_{22} - b_2 k_2) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

3. Determinante ausrechnen und $p(s)$ aufstellen.

4. Koeffizientenvergleich mit vorgegebenen Polstellen.

20 Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist genau dann steuerbar, wenn die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (11.47)$$

vollen Rang besitzt.²³

Falls \mathbf{Q}_s quadratisch ist (z.B. SISO), gilt: *nicht steuerbar* $\Leftrightarrow \det(\mathbf{Q}_s) = 0$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, beim Rechnen konsequent *Matrix* \cdot *Vektor* zu multiplizieren, also z.B. $\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ statt $(\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{B}$.

21 Partialbruchzerlegung

21.1 Einführung

Die Partialbruchzerlegung ist eine Methode, um rationale Funktionen, wie $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$, in einfachere Bruchterme zu zerlegen, die leichter zu integrieren oder zu analysieren sind. Dies ist besonders nützlich in der Signalverarbeitung, Regelungstechnik und bei der Lösung von Differentialgleichungen.

²³Quelle: Umdruck S. 304

21.2 Beispiel: $\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

Wir zerlegen den Ausdruck $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$ in Partialbrüche. Der Nenner besteht aus einem linearen Faktor $s+1$ und einem quadratischen Faktor s^2+1 . Die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

wobei A , B und C Konstanten sind, die wir bestimmen müssen.

22 Informationen über Ortskurven

Ortskurven für den aufgeschnittenen Regelkreis G_0 .

1. Phase ϕ der Ortskurve läuft für $\omega \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$
 $\rightarrow G_0$ enthält Totzeit. (S. 13, I)
2. Ortskurve startet mit einer Phase $\phi = -90^\circ$ im Unendlichen, also $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_0(j\omega)| = \infty$
 $\rightarrow G_0$ hat integrierendes Verhalten. (S. 13, II)
3. Ortskurve startet im Ursprung, also $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_0(j\omega)| = 0$
 $\rightarrow G_0$ hat differenzierendes Verhalten. (S. 13, III)
4. Betrag der Ortskurve steigt und sinkt.
 $\rightarrow G_0$ enthält ein Verzögerungsglied mit Resonanzüberhöhung (z.B. PT_2). (S. 13, IV)

23 Informationen über Übergangsfunktionen $h(t)$ des geschlossenen Regelkreises

Für die Übergangsfunktion $h(t)$ ist der Eingang $u(t) = 1(t)$. Stationäre Genauigkeit gilt dann, weil $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Wenn $u_0 = 1(t)$, dann ist die Sprungantwort $y(t)$ gleich der Übertragungsfunktion $h(t)$.

23.1 Stationäre Genauigkeit

Damit ein Regelkreis stationär genau arbeitet, muss der Ausgang genau der Referenz folgen. Dies bedeutet, dass der Führungsgrößenfilter so ausgelegt werden muss, dass der stationäre Endwert des geschlossenen Regelkreises genau 1 ist.

Außerdem gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} Y(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} U(s)} = 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{G_F \cdot G_R \cdot G_{PT2}}{1 + G_R \cdot G_{PT2}} \right) = 1$$

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$, siehe Grenzwertsätze (S. 112)
 $\rightarrow G$ hat differenzierendes Verhalten und eine Nullstelle im Ursprung.
 $\rightarrow G_0$ hat die selben Nullstellen wie G . G_0 hat also auch differenzierendes Verhalten.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$, siehe Grenzwertsätze (S. 112)
 \rightarrow Sprungantwort $y(t)$ besitzt keine Regelabweichung (S. 165).
 $\rightarrow G(s)$ arbeitet stationär genau (S. 165).

24 Berechnung maximal zulässige Totzeit T_t

Die von der Totzeit hervorgerufene Phasenverschiebung ϕ_t darf maximal der Phasenreserve α_R von $G'_0(j\omega)$ entsprechen, um die Stabilität nicht zu gefährden.

1. Durchtrittsfrequenz ω_d von $G'_0(j\omega)$ ermitteln.
2. Phase $\phi'_0(\omega_d)$ ablesen.
3. Phasenreserve $\alpha_R = 180^\circ + \phi'_0(\omega_d)$.
4. Phasenverschiebung Totzeitglied $\phi_t = -\omega \cdot T_t \stackrel{!}{=} -\alpha_R$
5. Totzeit $T_t = \frac{\alpha_R}{\omega_d} = \frac{\frac{\alpha_R}{180^\circ} \cdot \pi}{\omega_d}$

25 Durchtrittsfrequenz ω_d

25.1 Ansprechverhalten

Ein gutes Ansprechverhalten und kurze Anschlagzeiten werden durch große ω_d erreicht. Da aus Stabilitätsgründen $\omega_d < \omega_\pi$ gelten muss, ist der Frequenzbereich, in dem große Reglerverstärkungen möglich sind, beim I-Regler stark limitiert.

Durch große K bei einem P -Glieder wird der Verlauf des PT_2 -Gliedes im Bodediagramm nach oben verschoben. Dadurch wird ω_d nach rechts verschoben und somit größer. Weil $\omega_\pi = \infty$ in dem Fall, ist die Ungleichung $\omega_d < \omega_\pi$ erfüllt.

26 Einstellung nach T_u-T_g (Chien, Hrones, Reswick)

- Nicht schwingungsfähig \rightarrow aperiodischer Regelverlauf.²⁴
- Ohne bleibende Regelabweichung \rightarrow am besten PI-Regler.²⁵

²⁴Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).

²⁵Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).

27 Gewichts- und Übergangsfunktion aus $G_s(s)$

Gegeben sei:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) \quad (5)$$

27.1 Zusammenhänge:

Übergangsfunktion $h(t)$ ²⁶:

$$h(t) = \frac{y_{\text{Sprung}}(t)}{u_0} = \frac{\text{Sprungantwort}}{\text{Sprunghöhe}} \quad (6)$$

Gewichtsfunktion $g(t)$:

$$g(t) = \frac{y_{\text{Impuls}}(t)}{\int u \, dt} = \frac{\text{Impulsantwort}}{\text{Impulsfläche}} \quad (7)$$

Zusammenhang $g(t)$ und $h(t)$ ²⁷:

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{d}{dt} h(t) \quad (8)$$

27.2 Gewichtsfunktion $g(t)$

Für die Gewichtsfunktion gilt $u(t) = \delta(t)$, also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (9)$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) = G_s(s) \quad (10)$$

und somit:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_s(s)\} \quad (11)$$

27.2.1 $G(s)$ ist gegeben, Gewichtsfunktion $g(t)$ bestimmen.

Gewichtsfunktion $g(t)$ durch inverse Laplace-Transformation von $G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$.

1. $C \frac{1}{(s - s_p)^n}$.
2. Gewichtsfunktion $g(t) \rightarrow U(s) = 1$
3. $G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2} = \frac{K}{T^2 \left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$.
4. $Y(s) = G(s)U(s)$
5. $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} \right\}$.

²⁶Quelle: Umdruck S. 89

²⁷Quelle: Umdruck S. 91

$$6. \quad s_p = -\frac{1}{T}, n = 2, C = \frac{K}{T^2}$$

$$7. \quad g(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-\frac{1}{T}t}$$

27.3 Übergangsfunktion $h(t)$

Für die Übergangsfunktion gilt $u(t) = 1(t)$, also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad (12)$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) = \frac{G_s(s)}{s} \quad (13)$$

und somit:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \quad (14)$$

28 Merksatz / Intuition (Bode: Zeitbereich & Frequenzbereich)

28.1 Intuition

- Zeitkonstante T im Bode-Diagram: *Wie schnell reagiert das System?*
- Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega_D}$ mit $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$: *Wie schnell schwingt das Signal?*

29 Laplace Transformation

29.1 Korrespondenztabelle

30 Berechnung der inversen Laplace-Transformation

31 Mathematische Grundlagen

31.1 Determinante einer 2x2 & 3x3-Matrix

31.1.1 2x2

Die Formel für die Determinante einer 2x2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ lautet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

31.1.2 3x3

Die Formel für die Determinante einer 3x3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ lautet:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

31.2 Integral einer Exponentialfunktion ($\lambda > 0$)

$$\int_{0-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau = \int_{0-}^R \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) d\tau \stackrel{\text{HDI}}{=} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_{\tau=0-}^R = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda R}.$$

Somit gilt für den Limes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda R} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Analog folgt mittels partieller Integration (PI)

$$\begin{aligned} \int_{0-}^R \tau e^{-\lambda\tau} d\tau &= \int_{0-}^R \tau \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) d\tau \stackrel{\text{PI}}{=} - \int_{0-}^R \frac{d}{d\tau}(\tau) \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} d\tau + \tau \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) \Big|_{\tau=0-}^R \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{0-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R}. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Limes liefert nun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0-}^R \tau e^{-\lambda\tau} d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{0-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} \right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Integral mit linearem Faktor t (partielle Integration)

Wähle $u(t) = t$ und $v'(t) = e^{-\lambda t}$ mit $\lambda > 0$. Dann gilt $u'(t) = 1$ und $v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t e^{-\lambda t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\left[t \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right]_0^R - \int_0^R \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) dt \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} + \frac{1}{\lambda} \int_0^R e^{-\lambda t} dt \right). \end{aligned}$$

Da $Re^{-\lambda R} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ und $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$, folgt

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Allgemeine Definition der partiellen Integration

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Äquivalent dazu ist die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(uv) = u'v + uv',$$

die als Grundlage für die Herleitung der partiellen Integration dient.

31.3 Betrag von $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$, $e^{j\theta}$

31.3.1 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck $e^{\pm j\theta}$ kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta)$$

31.3.2 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + jy$ ist gegeben durch:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ gilt:

$$|e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Der Betrag ist somit immer 1, unabhängig von ω .

31.4 $G(s)$ ist gegeben, Differentialgleichung bestimmen.

DGL durch inverse Laplace-Transformation von $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{1 + T_1s + K_RK_1} e^{-sT_t}$.

1. Umstellen nach $X(s)(1 + T_1s + K_RK_1) = U(s)K_1e^{-sT_t}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)(1 + K_RK_1)\} = x(t)(1 + K_RK_1)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)T_1s\} = T_1\dot{x}(t)$.

$$4. \mathcal{L}^{-1} \{ K_1 e^{-sT_t} \} = K_1 \tilde{u}(t) = K_1 u(t - T_t).$$

$$5. x(t)(1 + K_R K_1) + T_1 \dot{x}(t) = K_1 \tilde{u}(t)$$

32 Shannon-/Nyquist-Abtasttheorem (für T_{\min})

Für die höchste in dieser Funktion enthaltene Frequenz ω_{\max} und die Abtastfrequenz ω_s gilt:²⁸

$$2\omega_{\max} < \omega_s$$
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_{\max} = \frac{2\pi}{T_{\min}}$$

$$2 \cdot \frac{2\pi}{T_{\min}} < \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2}{T_{\min}} < \frac{1}{T}$$

$$T < \frac{T_{\min}}{2}$$

33 Inverse einer Matrix

33.1 Allgemein

Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn

$$\det(A) \neq 0$$

Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

wobei $\operatorname{adj}(A)$ die adjungierte Matrix ist.

33.2 Inverse einer 2×2 -Matrix

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinante:

$$\det(A) = ad - bc$$

Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für } ad - bc \neq 0$$

²⁸Umdruck S. 380.

33.3 Hinweis (Regelungstechnik)

- In der Regelungstechnik treten häufig 2×2 -Inverse bei Zustandsrückführung, Beobachtern und statischer Entkopplung auf.
- Für größere Matrizen wird meist numerisch invertiert oder mit Gauß-Elimination gearbeitet.

34 Stationäre Genauigkeit

34.1 Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis

Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Standard-Regelkreises ist genau dann stationär genau, wenn²⁹

1. der geschlossene Regelkreis stabil ist und
2. der aufgeschnittene Regelkreis G_0 einen integrierenden Anteil besitzt.

35 Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten

Ein LTI-System besitzt genau dann einen integrierenden Anteil, wenn es eine Polstelle in $s = 0$ besitzt.³⁰ Haben zusätzlich alle weiteren Polstellen des Systems einen negativen Realteil, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \text{konstant} \neq 0 \quad (15)$$

und das System besitzt integrierendes Verhalten.

36 Grafische Darstellung der Übergangsfunktion $h(t)$ des IT_1 Gliedes

Beispiel:³¹ $y(t) = m(t - n) + a e^{-\lambda t}$ (hier: $m = 0.5$, $n = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$).

36.1 Erläuterung der Terme

Addition aus einer Geraden $m(t - n)$ und Exponentialfunktion $a e^{-\lambda t}$.

- m : Steigung der Geraden
- n : x -Achsenverschiebung
- a : Vorfaktor der Exponentialfunktion

²⁹Quelle: Umdruck S. 167

³⁰Quelle: Umdruck S. 166

³¹Quelle: TPR 1, Aufgabe 2(a).

36.2 Werte bestimmen

- Steigung m der Asymptote.
- x -Achsenverschiebung der Geraden: $y(t = 1) = 0 = m(1 - n) \Rightarrow n = 1$.
- a und λ können mit $y(t = 0) = 0$ und $y'(t = 0) = 0$ bestimmt werden.

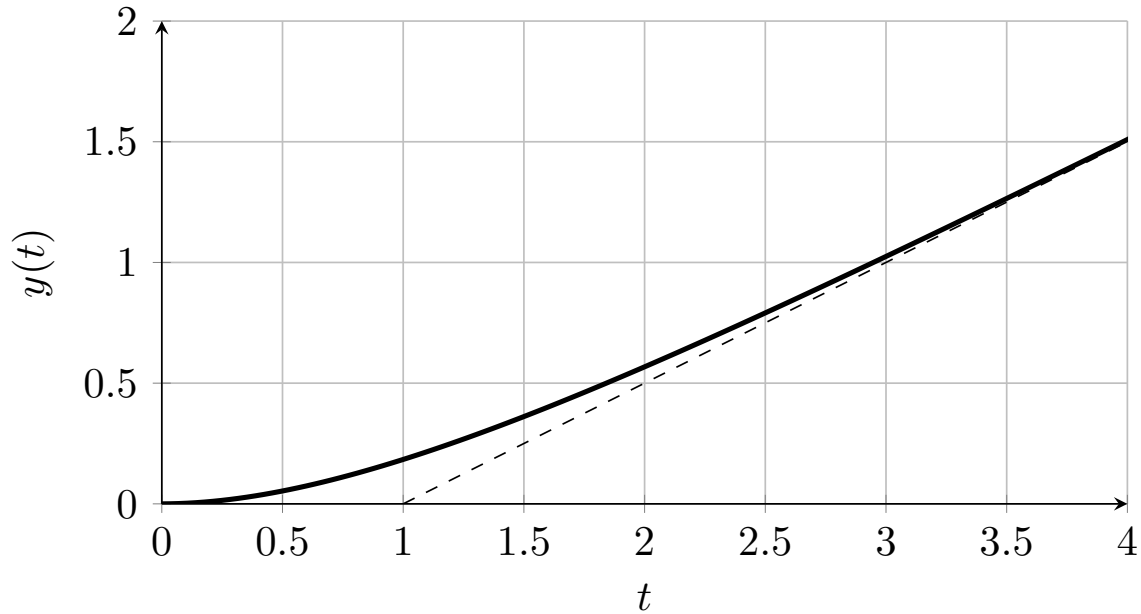


Abbildung 4: Plot der Beispiel-Funktion.

37 Korrekturtabellen und Skalierung

37.1 Korrekturtabelle (log/Phase)

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		$ \lg G - \lg \text{Asymptote} $				$ \varphi - \varphi_{\text{Asymptote}} $			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
PT_1		-0,002	-0,048	-0,107	-0,151	5,7	26,6	38,7	45,0
PT_2	$D = 1$	-0,004	-0,097	-0,215	-0,301	11,4	53,1	77,3	90,0
	$D = 0,707$	0,000	-0,013	-0,075	-0,151	8,1	43,4	72,3	90,0
	$D = 0,5$	0,002	0,045	0,057	0,000	5,8	33,7	65,8	90,0
	$D = 0,4$	0,003	0,071	0,134	0,097	4,6	28,1	60,6	90,0
	$D = 0,3$	0,004	0,093	0,222	0,222	3,5	21,8	53,1	90,0
	$D = 0,2$	0,004	0,110	0,317	0,398	2,3	14,9	41,6	90,0
	$D = 0,1$	0,004	0,121	0,405	0,699	1,2	7,6	24,0	90,0
	$D = 0,05$	0,004	0,124	0,433	1,000	0,6	3,8	12,5	90,0

37.2 Korrekturtabelle in mm

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		Abstand von $ G $ und Asymptote in mm				Abstand von φ und $\varphi_{\text{Asymptote}}$ in mm			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
PT_1		-0,1	-1,9	-4,3	-6,0	1,1	5,3	7,7	9,0
PT_2	$D = 1$	-0,2	-3,9	-8,6	-12,0	2,3	10,6	15,5	18,0
	$D = 0,707$	0	-0,5	-3,0	-6,0	1,6	8,7	14,5	18,0
	$D = 0,5$	0,1	1,8	2,3	0,0	1,2	6,7	13,2	18,0
	$D = 0,4$	0,1	2,8	5,4	3,9	0,9	5,6	12,1	18,0
	$D = 0,3$	0,2	3,7	8,9	8,9	0,7	4,4	10,6	18,0
	$D = 0,2$	0,2	4,4	12,7	15,9	0,5	3,0	8,3	18,0
	$D = 0,1$	0,2	4,8	16,2	28,0	0,2	1,5	4,8	18,0
	$D = 0,05$	0,2	5,0	17,3	40,0	0,1	0,8	2,5	18,0

37.3 Skalierung (Diagramm rechts)

1 lg-Einheit = 40 mm

360° = 72 mm

38 Was noch hinzugefügt werden muss

38.1

Index

- Absolutgrößen, 14
- Abtasttheorem, 45
 - nach Shannon (S. 380), 45
- Abweichungsgrößen, 14
- akausale Systeme, 13
- Anfangsbedingungen, 12
- Ansprechverhalten, 39
 - Abhängigkeit von ω_d , 39
- Bezeichnungen für Systeme, 8
- Bodediagramm, 39, 41
- Chien, Hrones, Reswick (CHR), 39
- crossover frequency, *siehe* Durchtrittsfrequenz
 - Umdruck (S. 240, 248, 270, 273, 286, 363), 39
- $\delta(t)$, 40
- Durchgangsfrequenz, *siehe* Durchtrittsfrequenz
- Durchtrittsfrequenz
 - Umdruck (S. 240, 248, 270, 273, 286, 363), 39
- ω_d , 39
- Eckkreisfrequenz, 14
- Einstellung mittels T_u – T_g Ersatzmodell
 - Umdruck (S. 276), 39
- $G(j\omega)$, 23
- Geschlossener Regelkreis, 8
- Gesetz der Sparsamkeit, 14
- Gewichtsfunktion, 40
- $g(t)$, 40
- $y(t)$, 40
- Kalman, 37
- Kausale Systeme, 13
- Kreisfrequenz ω , 41
- Lineare Systeme, 12
- LTI-System, 12
- MIMO-System, 13
- Minimale Realisierung, 14
- Modell, 12
- Nyquist-Abtasttheorem, *siehe* Abtasttheorem
- Offener Regelkreis, 8
- P-Glied, 39
- Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 41
- $\angle G(j\omega)$, 23
- PT₂-Glied, 39
- Q_s , *siehe* Steuerbarkeitsmatrix
- Q_s Steuerbarkeitsmatrix, *siehe* Steuerbarkeitsmatrix
- Regelabweichung, 39
 - Umdruck (S. 165), 39
- Regelungsnormalform, 13
- Relativer Grad, 8, 12
 - Umdruck (S. 26), 8
- Shannontheorem
 - S. 380, 45
- Signale und Systeme, 8
- Signale und Systeme im Regelkreis, 8
- Sinusförmige Signale, 24
 - Umdruck (S. 119), 24
- SISO-System, 13
- $y(t)$, 40
- $1(t)$, 40
- stationary accuracy, *siehe* Stationäre Genauigkeit
 - Umdruck (S. 164, 167, 260, 348, 552, 569), 39
- Stationäre Genauigkeit, 38, 39
 - Umdruck (S. 164, 167, 260, 348, 552, 569), 39
- Steuerbarkeitskriterium von Kalman, 37
 - Umdruck (S. 304), 37
- Steuerbarkeitsmatrix
 - Q_s , 37
- Q_s , 37
- Systemantwort, 23
- Systemordnung, 12
- T_u – T_g , 39
 - Umdruck (S. 207), 39

$u(t)=\sin(\omega t)$, 24

Vorzeichenkonvention, 8, *siehe* Umdruck (S.123)

Zeitinvariante Systeme, 12

Zeitkonstante, 14

Zeitkonstante T , 41

Zustandsraumdarstellung, 13

Übergangsfunktion, 40

$h(t)$, 40