

# RT-Bibel Ultra

GER

Februar 2026

# Vorwort

Liebe Regelungstechniker

Dies ist meine neue Auflage der RT-Bibel für Regelungstechnik basierend auf dem Umdruck zur Vorlesung Regelungstechnik 47. Auflage. Außerdem stütze ich mich hier auf die Arbeit von Anonymer Wauwau und der originalen RT-Bibel.

Dieses Werk soll als Lernhilfe und Nachschlagewerk ergänzend zum Umdruck dienen. Hier findet ihr Lösungswege und -vorschläge zu den Themenbereichen der Klausur basierend auf Altklausuren und dem Treffpunkt. Deswegen ist der Aufbau nach den Themenbereichen des Umdrucks aufgebaut, um so Erläuterungen zu bestimmten Definitionen und Beispielen in Zusammenhang mit den Aufgabenstellungen der Altklausuren zu bringen.

Ich wünsche euch viel Erfolg beim Lernen und drücke euch allen die Daumen, dass ihr besteht!

Euer GER

## Hinweise

Diese aktuelle Version ist noch **NICHT** vollständig.

Mein Ziel ist es, dieses Dokument zum ultimativen Nachschlagewerk für die Klausur zu machen. Deswegen bitte ich euch um eure Hilfe und Unterstützung dies umzusetzen.

Fügt bitte so viele Hinweise, Lösungsansätze und Korrekturen hinzu. Außerdem könnt ihr hier <https://github.com/gemurica/Regelungstechnik-Bibel-Ultra/issues> ebenfalls Fehler oder Anmerkungen machen. Der Code für dieses Dokument ist öffentlich verfügbar und wer die Möglichkeit hat, kann gerne auf GitHub Ergänzungen direkt Pushen und somit direkt in diese Datei hinzufügen.

Somit kann diese Bibel auch nach der nächsten Klausur von euch weiter verbessert werden.

- Die Inhalte ab Kapitel 15 Kalmanfilter sind noch meine aus meiner ursprünglichen Formelsammlung und dementsprechend noch nicht den richtigen Kapiteln hinzugefügt.
- Alte Bilder aus "RT-Bibel | Neues Testament" habe ich bisher auch noch nicht hinzugefügt.
- Ich werde noch alle restlichen Hinweise aus dem Umdruck hinzufügen, bisher habe ich nur die aus Kapitel 1 & 2.
- Besonders Begriffe für den Index mit Verweis auf die Seite im Umdruck sowie eine kleine Erläuterung sind wünschenswert, weil manche Begriffe im Index des Umdrucks nicht zu finden sind und somit das Lösen von Aufgaben erschweren.
- Hier <https://github.com/gemurica/Regelungstechnik-Bibel-Ultra/blob/main/main.pdf> findet ihr immer die aktuellste Version.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>9</b>
1.1 Steuerung und Regelung . . . . .	9
1.2 Grundstruktur des Regelkreises . . . . .	9
1.2.1 Hinweis zu Vorzeichen (1.2.1) . . . . .	9
1.2.2 Vorzeichenkonvention . . . . .	10
1.2.3 Vorzeichenänderung im Umlauf z.B. $y = -G \cdot x$ . . . . .	10
1.3 Beispiele technischer Regelungen . . . . .	10
1.3.1 Tiefenregelung eines Unterwasserfahrzeuges . . . . .	13
1.3.2 Regelung von Windkraftanlagen . . . . .	13
1.3.3 Kraftregelung beim Fräsen . . . . .	13
1.3.4 Regelung eines Bioreaktors . . . . .	13
1.3.5 Regelung einer Dampfmaschine . . . . .	13
<b>2 Modellbildung</b>	<b>14</b>
2.1 Allgemeines . . . . .	14
2.2 Einführung in Differentialgleichungen . . . . .	14
2.3 Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum . . . . .	15
2.4 Darstellung von Differentialgleichungen im Wirkungsplan . . . . .	16
2.5 Aufstellen von Differentialgleichungen . . . . .	16
2.6 Beispiele für Modellbildung . . . . .	16
2.6.1 Zerlegung in Teilsysteme . . . . .	16
2.6.2 Rückwirkungen . . . . .	16
2.6.3 Zusammenfassen von Teilsystemen im Wirkungsplan . . . . .	16
2.6.4 Modellierung von Regelungen . . . . .	16
2.7 Das Gesetz der Sparsamkeit . . . . .	16
2.8 Einheiten . . . . .	16
<b>3 Autonome Systeme</b>	<b>17</b>
3.1 Arbeitspunkte und Ruhelagen . . . . .	17
3.2 Stabilität . . . . .	17
3.3 Linearisierung . . . . .	17
3.3.1 Linearisierung einer Funktion . . . . .	17
3.3.2 Linearisierung einer Differentialgleichung . . . . .	17
3.3.3 Linearisierung im Kennlinienfeld . . . . .	17
3.4 Charakteristisches Polynom . . . . .	17
3.5 Linearisierungstheorem . . . . .	17
3.6 Analyse im Zustandsraum . . . . .	17
<b>4 Verhalten bei allgemeiner Anregung</b>	<b>18</b>
4.1 Homogene und partikuläre Lösung . . . . .	18
4.2 Übergangsfunktion . . . . .	18
4.3 Faltung . . . . .	18
4.4 Laplace-Transformation . . . . .	18

4.4.1	Laplace-Transformation von Zeitfunktionen . . . . .	18
4.4.2	Laplace-Transformation von Operationen . . . . .	18
4.4.3	Bestimmung des Zeitverlaufes linearer Systeme . . . . .	18
4.4.4	Beispiele für Laplace Transformationen . . . . .	18
4.5	Übertragungsfunktion $G(s)$ . . . . .	19
4.6	Grenzwertsätze . . . . .	19
4.6.1	Anwenbarkeit der Grenzwertsätze . . . . .	19
4.6.2	Anfangswertsatz . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Verhalten bei sinusförmiger Anregung</b>	<b>21</b>
5.1	Frequenzgang . . . . .	21
5.1.1	Übertragung sinusförmiger Signale $u(t) = \sin(\omega t)$ . . . . .	21
5.2	Ortskurve . . . . .	22
5.3	Bode-Diagramm . . . . .	22
5.4	Fourier-Transformation . . . . .	22
5.5	Filter . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Verschaltungen von Systemen</b>	<b>23</b>
6.1	Zusammenfassen von Teilsystemen . . . . .	23
6.2	Zerlegung in einfache Elemente . . . . .	23
6.2.1	Pol-Nullstellen im Bodediagramm . . . . .	23
6.2.2	Lösungsweg: Frequenzgang aus Bodediagramm . . . . .	23
6.2.3	TPR 5 – Ansätze . . . . .	24
6.3	Zerlegung nicht-minimalphasiger Systeme . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Typische Übertragungsglieder</b>	<b>27</b>
7.1	Übersicht . . . . .	27
7.2	Grundlegende Reglertypen . . . . .	27
7.2.1	P-Element . . . . .	27
7.2.2	I-Element . . . . .	27
7.2.3	D-Element . . . . .	27
7.2.4	PI, PD und PID . . . . .	27
7.3	Verzögerungsglieder . . . . .	27
7.3.1	$PT_1$ . . . . .	27
7.3.2	$PT_2$ . . . . .	27
7.3.3	$PT_n$ . . . . .	27
7.4	Kombinationen . . . . .	27
7.4.1	$IT_1$ . . . . .	27
7.4.2	$DT_1$ . . . . .	27
7.4.3	PIT . . . . .	27
7.4.4	$PPT_1$ und $PDT_1$ . . . . .	27
7.5	Nicht-minimalphasige Systeme . . . . .	27
7.5.1	$PA_1$ . . . . .	27
7.5.2	$PT_t$ , $PT_1T_t$ . . . . .	27
7.6	Nicht-parametrische Identifikation . . . . .	27
7.7	Parametrische Identifikation . . . . .	27
7.7.1	Überanpassung . . . . .	27

7.7.2	Graphische Parameteridentifikation . . . . .	27
7.7.3	Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . . .	27
<b>8</b>	<b>Identifikation linearer Regelkreisglieder</b>	<b>28</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Stabilitätsprüfung</b>	<b>29</b>
9.1	Problemstellung . . . . .	29
9.2	Algebraische Stabilitätskriterien . . . . .	29
9.2.1	Grundidee . . . . .	29
9.2.2	Stabilitätskriterien nach Routh und Hurwitz . . . . .	29
9.2.3	Beispiele . . . . .	30
9.3	Nyquist-Kriterium . . . . .	30
9.3.1	Vollständiges Nyquist-Kriterium . . . . .	31
9.3.2	Beispiele . . . . .	31
9.3.3	Anwendung bei Polen am Stabilitätsrand . . . . .	31
9.3.4	Vereinfachtes Nyquist-Kriterium . . . . .	31
9.3.5	Amplituden- und Phasenreserve . . . . .	31
9.4	Sonderfälle . . . . .	31
9.4.1	Pol-Nullstellen-Kürzungen . . . . .	31
9.4.2	Unstetige Polstellen . . . . .	31
<b>10</b>	<b>Einführung in den Reglerentwurf</b>	<b>32</b>
10.1	Ziele und Lösungsansätze . . . . .	32
10.1.1	Motivation . . . . .	32
10.1.2	Gütemaße und Kennwerte . . . . .	32
10.1.3	Ansätze des Reglerentwurfs . . . . .	32
10.2	Statischer Reglerentwurf . . . . .	32
10.3	Abwägungen bei der Reglerverstärkung . . . . .	32
10.3.1	Vorteile hoher Verstärkungen . . . . .	32
10.3.2	Nachteile hoher Verstärkungen . . . . .	32
10.4	Einstellregeln . . . . .	32
10.4.1	Einstellung mittels $T_u$ - $T_g$ -Ersatzmodell . . . . .	32
10.4.2	Einstellung mittels Schwingversuch . . . . .	32
<b>11</b>	<b>Grundlegende modellbasierte Reglerentwurfsverfahren</b>	<b>33</b>
11.1	Frequenzkennlinienverfahren . . . . .	33
11.1.1	Grundidee . . . . .	33
11.1.2	Hohe Verstärkung bei niedrigen Frequenzen . . . . .	33
11.1.3	Übergangsbereich . . . . .	33
11.1.4	Niedrige Verstärkung bei hohen Frequenzen . . . . .	33
11.2	Betragskriterium und Symmetrisches Kriterium . . . . .	33
11.3	Polvorgabe . . . . .	33
11.3.1	Polvorgabe für Ausgangsrückführungen . . . . .	33
11.3.2	Polvorgabe für Zustandsrückführungen . . . . .	33
11.3.3	Steuerbarkeit . . . . .	33
11.4	Beobachterentwurf . . . . .	33

11.4.1	Zustandsschätzung . . . . .	33
11.4.2	Luenberger-Beobachter . . . . .	33
11.4.3	Beobachtbarkeit und Dualität . . . . .	33
11.4.4	Beispiel . . . . .	33
11.5	Wurzelortskurven . . . . .	33
11.5.1	Grundidee . . . . .	33
11.5.2	Konstruktionsregeln . . . . .	33
11.5.3	Beispiel . . . . .	33
<b>12</b>	<b>Vermaschte Regelkreise</b>	<b>34</b>
12.1	Erweiterung des Einfachregelkreises . . . . .	34
12.2	Vorsteuerung . . . . .	34
12.3	Führungsgrößenfilter . . . . .	34
12.4	Störgrößenaufschaltung . . . . .	34
12.5	Kaskadenregelung . . . . .	34
12.6	Hilfsstellgröße . . . . .	34
<b>13</b>	<b>Mehrgrößenregelung</b>	<b>35</b>
13.1	Zentrale vs. dezentrale Regelung . . . . .	35
13.2	Eigenschaften von Mehrgrößensystemen . . . . .	35
13.2.1	Verschaltungen von Mehrgrößensystemen . . . . .	35
13.2.2	Querkopplungen . . . . .	35
13.2.3	Polstellen von Mehrgrößensystemen . . . . .	35
13.2.4	Richtungsabhängige Verstärkung . . . . .	35
13.3	Verfahren der dezentralen Regelung . . . . .	35
13.3.1	Relative Gain Array . . . . .	35
13.3.2	MIMO-Nyquist und Diagonaldominanz . . . . .	35
13.4	Verfahren der zentralen Regelung . . . . .	35
13.4.1	Zentrale Regelung im Zustandsraum . . . . .	35
13.4.2	Entkopplungsregler . . . . .	35
<b>14</b>	<b>Zeitdiskrete Systeme</b>	<b>36</b>
14.1	Abtastregelungen . . . . .	36
14.1.1	Definitionen . . . . .	36
14.1.2	Abtaster und Halteglied . . . . .	36
14.1.3	Aliasing . . . . .	36
14.1.4	Verschaltung zu hybriden Systemen . . . . .	36
14.2	Einführung in Differenzengleichungen . . . . .	36
14.3	Autonome zeitdiskrete Systeme . . . . .	36
14.4	Umrechnen von Differenzen- und Differentialgleichungen . . . . .	36
14.4.1	Rückwärtsdifferenzen . . . . .	36
14.4.2	Analytische Lösung . . . . .	36
14.5	Quasikontinuierlicher Reglerentwurf . . . . .	36
14.6	Zeitdiskreter Bildbereich . . . . .	36
14.6.1	Z-Transformation . . . . .	36
14.6.2	Zeitdiskrete Übertragungsfunktion . . . . .	36
14.6.3	Zeitdiskreter Frequenzgang . . . . .	36

14.6.4	Zeitdiskrete Modelle zeitkontinuierlicher Systeme . . . . .	36
14.7	Bilineare Transformation . . . . .	36
14.8	Klassischer zeitdiskreter Reglerentwurf . . . . .	36
14.9	Regler mit endlicher Einstellzeit . . . . .	36
14.9.1	Entwurf . . . . .	36
14.9.2	Stabilität . . . . .	36
14.9.3	Beispiel . . . . .	36
<b>15</b>	<b>Kalmanfilter</b>	<b>37</b>
15.1	Allgemeines . . . . .	37
15.2	Herleitung . . . . .	37
15.3	Auslegung und Beispiel . . . . .	37
15.4	Limitierungen und Erweiterungen . . . . .	37
15.4.1	Allgemein . . . . .	37
<b>16</b>	<b>Zustandsraum</b>	<b>37</b>
16.1	Zustandsregelung . . . . .	37
16.2	Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2]$ bestimmen. . . . .	37
<b>17</b>	<b>Steuerbarkeitskriterium von Kalman</b>	<b>38</b>
<b>18</b>	<b>Partialbruchzerlegung</b>	<b>38</b>
18.1	Einführung . . . . .	38
18.2	Beispiel: $\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)}$ . . . . .	39
<b>19</b>	<b>Informationen über Ortskurven</b>	<b>39</b>
<b>20</b>	<b>Informationen über Übergangsfunktionen <math>h(t)</math></b>	<b>39</b>
20.1	Stationäre Genauigkeit . . . . .	39
<b>21</b>	<b>Berechnung maximal zulässige Totzeit <math>T_t</math></b>	<b>40</b>
<b>22</b>	<b>Durchtrittsfrequenz <math>\omega_d</math></b>	<b>40</b>
22.1	Ansprechverhalten . . . . .	40
<b>23</b>	<b>Einstellung nach <math>T_u</math>-<math>T_g</math> (Chien, Hrones, Reswick)</b>	<b>40</b>
<b>24</b>	<b>Gewichts- und Übergangsfunktion aus <math>G_s(s)</math></b>	<b>41</b>
24.1	Zusammenhänge: . . . . .	41
24.2	Gewichtsfunktion $g(t)$ . . . . .	41
24.2.1	$G(s)$ ist gegeben, Gewichtsfunktion $g(t)$ bestimmen. . . . .	41
24.3	Übergangsfunktion $h(t)$ . . . . .	42
<b>25</b>	<b>Merksatz / Intuition (Bode: Zeitbereich &amp; Frequenzbereich)</b>	<b>42</b>
25.1	Intuition . . . . .	42

<b>26 Mathematische Grundlagen</b>	<b>42</b>
26.1 PQ-Formel . . . . .	42
26.2 Determinante einer 2x2 & 3x3-Matrix . . . . .	43
26.2.1 2x2 . . . . .	43
26.2.2 3x3 . . . . .	43
26.3 Integral einer Exponentialfunktion ( $\lambda > 0$ ) . . . . .	43
26.4 Betrag von $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ , $e^{j\theta}$ . . . . .	44
26.4.1 Berechnung des Betrags . . . . .	44
26.4.2 Berechnung des Betrags . . . . .	44
26.5 Inverse einer Matrix . . . . .	45
26.5.1 Allgemein . . . . .	45
26.5.2 Inverse einer $2 \times 2$ -Matrix . . . . .	45
26.6 $G(s)$ ist gegeben, Differentialgleichung bestimmen. . . . .	45
<b>27 Shannon-/Nyquist-Abtasttheorem (für <math>T_{\min}</math>)</b>	<b>46</b>
<b>28 Stationäre Genauigkeit</b>	<b>46</b>
28.1 Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis . . . . .	46
<b>29 Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten</b>	<b>46</b>
<b>30 Grafische Darstellung der Übergangsfunktion <math>h(t)</math> des <math>IT_1</math> Gliedes</b>	<b>46</b>
30.1 Erläuterung der Terme . . . . .	47
30.2 Werte bestimmen . . . . .	47
<b>31 Korrekturtabellen und Skalierung</b>	<b>48</b>
31.1 Korrekturtable (log/Phase) . . . . .	48
31.2 Korrekturtable in mm . . . . .	48
31.3 Skalierung (Diagramm rechts) . . . . .	48

# 1 Einführung

## 1.1 Steuerung und Regelung

### 1.2 Grundstruktur des Regelkreises

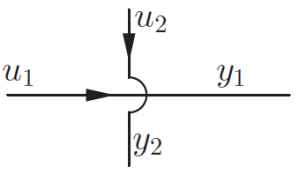
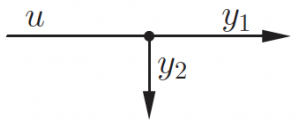
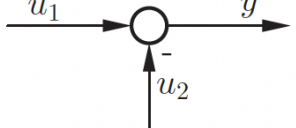

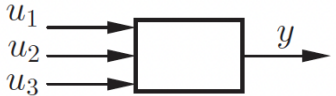
Bezeichnung	Symbol	Funktion
Wirkungslinien Signalübertragung		$y_1 = u_1$ $y_2 = u_2$
Verzweigungsstelle		$y_1 = u$ $y_2 = u$
Summenpunkt		$y = u_1 - u_2$
Übertragungsblock	 	$y = f(u)$ $y = f(u_1, u_2, u_3, \dots)$

Tabelle 1-1: Elemente des Wirkungsplans

Abbildung 1: Symbole der Grundstruktur des Regelkreises.

#### 1.2.1 Hinweis zu Vorzeichen (1.2.1)

**Falsches Vorzeichen im Wirkungsplan → 1 Punkt Abzug!**

Daher ist es empfehlenswert, auch wenn keine Koeffizienten an den Übertragungsblöcken notwendig sind, die DGLs vollständig zu linearisieren, um alle Vorzeichen korrekt zu ermitteln.

## Signale und Systeme

Ein Signal ist eine (physikalische) Größe, deren Wert einen Informationsgehalt besitzt. Ein Signal heißt dynamisch, wenn sich der Wert des Signals über die Zeit ändern kann. Ein System  $\Sigma$  ist eine durch eine Systemgrenze von der Umgebung abgegrenzte Einheit, die über Signale mit der Umgebung Informationen austauschen kann. Ein dynamisches System nutzt dabei dynamische Signale und man unterscheidet aufgrund des Ursache-Wirkungs-Prinzips zwischen Eingangssignalen  $u(t)$ , die auf das System einwirken, und Ausgangssignalen  $y(t)$ , die die Reaktion des Systems auf die Eingangssignale darstellen.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 5

## Bezeichnungen für Systeme

Die folgenden Bezeichnungen werden in der Regelungstechnik weitestgehend synonym verwendet: System, Glied, Übertragungssystem, dynamisches System, Übertragungsblock, Regelkreisglied, Übertragungsglied, Regelkreiselement, Übertragungselement.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 6

## Definition der Signale und Systeme im Regelkreis

Die Regelgröße  $y$  ist die Ausgangsgröße der Regelstrecke, die auf einem Wert gehalten werden soll. Die Führungsgröße  $w$  (Sollwert) ist eine von außen zugeführte Größe. Die Stellgröße  $u$  ist die Ausgangsgröße des Reglers. Störgröße  $z$  wirkt von außen auf die Regelstrecke. Die Messgröße  $y_m$  wird vom Messglied bereitgestellt. Messrauschen  $n$  wirkt auf die Messgröße. Die Regelstrecke ist das zu regelnde System. Der Regler vergleicht Mess- und Führungsgröße. Das Messglied stellt die Messung bereit.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 8

## Offener und geschlossener Regelkreis

Das Übertragungsverhalten in Bild 1-6 mit Rückführung wird als geschlossener Regelkreis bezeichnet. Das Übertragungsverhalten in Bild 1-7 ohne Rückführung wird als offener Regelkreis bezeichnet.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 9

### 1.2.2 Vorzeichenkonvention

Umlauf  $-1 \rightarrow$  Minus an die Führungsgröße, z.B.  $w = v_{soll}, t_{soll}, etc.$

Umlauf  $+1 \rightarrow$  Minus an die Regelgröße (Ausgang), z.B.  $y = v, t, etc.$

### 1.2.3 Vorzeichenänderung im Umlauf z.B. $y = -G \cdot x$

Hinter Kasten von  $G$  einen Umkehrpunkt!

## 1.3 Beispiele technischer Regelungen

### Relevante Bilanzen und Gleichungen ausgewählter Fachgebiete

#### Mechanik

- Bilanzen:

- Dynamisches Kräftegleichgewicht (2. Newtonsches Gesetz):

$$M \cdot \ddot{x} = \sum F_i$$

- \*  $M$ : Masse
- \*  $x$ : Weg/Ort,  $\ddot{x}$ : Beschleunigung
- \*  $F_i$ : Kräfte

- Drallsatz:

$$J \cdot \ddot{\Phi} = \sum M_i$$

- \*  $J$ : Trägheitsmoment
- \*  $\Phi$ : Winkel,  $\ddot{\Phi}$ : Winkelbeschleunigung
- \*  $M_i$ : Momente

- Bauteile:

- Hookesche Feder:

$$F_{F,\text{translatorisch}} = C \cdot X \quad M_{F,\text{rotatorisch}} = C \cdot \Phi$$

- \*  $C$ : Federkonstante
- \*  $X$ : Auslenkung (translatorisch),  $\Phi$ : Winkel (rotatorisch)
- \*  $F_F$ : Federkraft,  $M_F$ : Federmoment

- Dämpfer:

$$F_{D,\text{translatorisch}} = D \cdot \dot{x} \quad M_{D,\text{rotatorisch}} = D \cdot \dot{\Phi}$$

- \*  $D$ : Dämpfungskoeffizient
- \*  $\dot{x}$ : Geschwindigkeit,  $\dot{\Phi}$ : Winkelgeschwindigkeit
- \*  $F_D$ : Dämpferkraft,  $M_D$ : Dämpfermoment

- Kinematik:

- Zusammenhang von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} \quad \text{bzw.} \quad x = \int v \, dt = \int \left( \int a \, dt \right) dt$$

- \*  $x$ : Ort,  $v$ : Geschwindigkeit,  $a$ : Beschleunigung

- Zusammenhang zwischen Winkel und Kreisfrequenz:

$$\omega = \dot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int \omega \, dt$$

- \*  $\varphi$ : Winkel,  $\omega$ : Kreisfrequenz

- Übersetzungsverhältnis:

$$i = \frac{n_{An}}{n_{Ab}} = \frac{\omega_{An}}{\omega_{Ab}} = \frac{d_{Ab}}{d_{An}} = \frac{z_{Ab}}{z_{An}} = \frac{M_{Ab}}{M_{An}}$$

- $n$ : Drehzahl,  $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit

- $d$ : Durchmesser,  $z$ : Zähnezahl
- $M$ : Moment, Indizes  $An/Ab$ : Antrieb/Abtrieb

- Leistung:

$$P = \omega \cdot M$$

- $P$ : Leistung,  $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit,  $M$ : Moment

## Thermodynamik

- Bilanz:

- Energiebilanz:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \dot{H}_i + \sum \dot{Q}_j + \sum P_k$$

- \*  $U$ : innere Energie
- \*  $\dot{H}_i$ : Enthalpieströme,  $\dot{Q}_j$ : Wärmeströme
- \*  $P_k$ : Leistungen

- Stoffgesetze:

- Enthalpiestrom:

$$\dot{H} = \dot{M} \cdot c_p \cdot \Delta T$$

- \*  $\dot{H}$ : Enthalpiestrom,  $\dot{M}$ : Massenstrom
- \*  $c_p$ : spezifische Wärmekapazität (p),  $\Delta T$ : Temperaturänderung

- Innere Energie:

$$U = M \cdot c_v \cdot \Delta T$$

- \*  $U$ : innere Energie,  $M$ : Masse
- \*  $c_v$ : spezifische Wärmekapazität (v),  $\Delta T$ : Temperaturänderung

- Ideales Gasgesetz:

$$P \cdot V = M \cdot R \cdot T$$

- \*  $P$ : Druck,  $V$ : Volumen,  $R$ : Gaskonstante,  $T$ : Temperatur

## Elektrotechnik

- Bilanzen:

- Erste Kirchhoffsche Regel (Knotenregel):

$$0 = \sum I_i$$

- \*  $I_i$ : Ströme

- Zweite Kirchhoffsche Regel (Maschenregel):

$$0 = \sum U_i$$

- \*  $U_i$ : Spannungen

- Bauteile:

- Widerstand:

$$U = R \cdot I$$

- \*  $U$ : Spannung,  $R$ : Widerstand,  $I$ : Strom

- Kondensator:

$$I_C = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

- \*  $I_C$ : Kondensatorstrom,  $C$ : Kapazität

- \*  $U$ : Spannung

- Spule:

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

- \*  $U_L$ : Spulenspannung,  $L$ : Induktivität

- \*  $I$ : Strom

- Leistung:

$$P = U \cdot I$$

- $P$ : Leistung,  $U$ : Spannung,  $I$ : Strom

### **1.3.1 Tiefenregelung eines Unterwasserfahrzeuges**

### **1.3.2 Regelung von Windkraftanlagen**

### **1.3.3 Kraftregelung beim Fräsen**

### **1.3.4 Regelung eines Bioreaktors**

### **1.3.5 Regelung einer Dampfmaschine**

## 2 Modellbildung

### 2.1 Allgemeines

#### Modell

Ein Modell ist eine Beschreibung, die nur einen Teil der Eigenschaften des Originals wiedergibt. Ein richtig gewähltes Modell zeichnet sich dadurch aus, dass es alle wichtigen Eigenschaften des Originals widerspiegelt und gleichzeitig auf überflüssige Eigenschaften verzichtet.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 20

### 2.2 Einführung in Differentialgleichungen

#### Systemordnung

Die Ordnung des Systems entspricht  $n$  und somit der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 22

#### Anfangsbedingungen

Die Bedingungen  $y^{(n-1)}(t_0) = 0, \dots, \dot{y}(t_0) = 0, y(t_0) = 0$  heißen Anfangsbedingungen einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung zum Zeitpunkt  $t_0$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 23

#### Zeitinvariante Systeme

Ist  $f$  nicht explizit von der Zeit abhängig, d. h.  $y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, u(t))$ , so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System zeitinvariant.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 24

#### Lineare Systeme

Ist  $f$  eine lineare Funktion, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System linear. Andernfalls heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene System nichtlinear.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 25

#### LTI-Systeme

Ist ein System linear und zeitinvariant, d. h. es kann durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, so nennt man das System auch LTI-System (Linear Time Invariant).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 26

#### Relativer Grad

Der relative Grad eines LTI-Systems ist  $r = n - m$  und beschreibt damit die Differenz zwischen höchster auftretender Ableitung der Ausgangsgröße und höchster auftauchender Ableitung der Eingangsgröße.<sup>a</sup>

- $n$ : höchste Ableitung der Ausgangsgröße  $y(t)$
- $m$ : höchste Ableitung der Eingangsgröße  $u(t)$

- akausal sind:  $r < 0$  (d. h.  $m > n$ ), z. B.

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 26

### Kausale Systeme

Ist  $r \geq 0$ , d. h. die höchste auftretende Ableitung der Ausgangsgröße ist mindestens so groß wie die höchste auftretende Ableitung nach der Eingangsgröße, so heißt die Differentialgleichung und das durch die Differentialgleichung beschriebene LTI-System kausal. Andernfalls heißt es akausal.<sup>a</sup>

- akausal sind:  $r < 0$  (d. h.  $m > n$ ), z. B.
  - D-Glied:  $y = K_D \dot{u}$
  - PD-Glied:  $y = K (u + T_v \dot{u})$
  - PID-Glied:  $y = K \left( u + \frac{1}{T_n} \int u \, dt + T_v \dot{u} \right)$

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 27

## 2.3 Darstellung von Differentialgleichungen im Zustandsraum

### Zustandsraumdarstellung

Die Darstellung  $\dot{x} = f(x, u, t)$  und  $y = g(x, u, t)$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$  und entsprechenden vektorwertigen Funktionen  $f$  und  $g$  heißt Zustandsraumdarstellung.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 29

### SISO und MIMO

Ein System mit einer skalaren Eingangsgröße und einer skalaren Ausgangsgröße wird auch als SISO-System (Single Input Single Output) bezeichnet. Systeme mit mehreren Ein- oder Ausgangsgrößen heißen MIMO-Systeme (Multiple Input Multiple Output).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 30

### Regelungsnormalform

Die Darstellungsform von Differentialgleichungen im Zustandsraum gemäß Gl. (2.25) bzw. Gl. (2.26) heißt Regelungsnormalform.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 32

## 2.4 Darstellung von Differentialgleichungen im Wirkungsplan

## 2.5 Aufstellen von Differentialgleichungen

## 2.6 Beispiele für Modellbildung

### 2.6.1 Zerlegung in Teilsysteme

### 2.6.2 Rückwirkungen

### 2.6.3 Zusammenfassen von Teilsystemen im Wirkungsplan

### 2.6.4 Modellierung von Regelungen

## 2.7 Das Gesetz der Sparsamkeit

### Minimale Realisierung

Eine Differentialgleichung, die mit der minimal möglichen Ordnung auskommt, um das Übertragungsverhalten  $u \mapsto y$  zu beschreiben, wird minimale Realisierung genannt.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 48

### Gesetz der Sparsamkeit

Innerhalb einer Menge von wissenschaftlichen Erklärungen sollten solche Erklärungen bevorzugt werden, die mit weniger Variablen oder Elementen auskommen (lex parsimoniae).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 48

## 2.8 Einheiten

### Zeitkonstanten und Frequenzen

In der Differentialgleichung  $T\dot{y}(t) + y(t) = 0$  bezeichnet man  $T$  als Zeitkonstante des Systems. Schreibt man  $\dot{y} + \omega y = 0$ , so ist  $\omega$  eine Frequenz, die Eckkreisfrequenz genannt wird.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 49

### Notation von Absolut- und Abweichungsgrößen

Normalerweise werden alle Signale mit Kleinbuchstaben geschrieben. Treten in der Beschreibung sowohl Absolut- als auch Abweichungsgrößen auf, werden Absolutgrößen mit Großbuchstaben und Abweichungsgrößen mit Kleinbuchstaben geschrieben.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 50

## **3 Autonome Systeme**

### **3.1 Arbeitspunkte und Ruhelagen**

### **3.2 Stabilität**

### **3.3 Linearisierung**

#### **3.3.1 Linearisierung einer Funktion**

#### **3.3.2 Linearisierung einer Differentialgleichung**

#### **3.3.3 Linearisierung im Kennlinienfeld**

### **3.4 Charakteristisches Polynom**

### **3.5 Linearisierungstheorem**

### **3.6 Analyse im Zustandsraum**

## 4 Verhalten bei allgemeiner Anregung

### 4.1 Homogene und partikuläre Lösung

### 4.2 Übergangsfunktion

### 4.3 Faltung

### 4.4 Laplace-Transformation

#### 4.4.1 Laplace-Transformation von Zeitfunktionen

$F(s)$	$f(t)$ für $t > 0$	$f(t) = 0$ für $t \leq 0$
$\frac{1}{(s - \lambda)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
1	$\delta(t)$ ( $= u(t)$ für Gewichtsfunktion $g(t)$ )	
$\frac{1}{s}$	$1(t)$ ( $= u(t)$ für Übergangsfunktion $h(t)$ )	
$\frac{1}{s^2}$	$t$	
$\frac{1}{1 + sT}$	$\frac{1}{T} e^{-t/T}$	
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_D t)$ $\omega_0^2 t e^{-D\omega_0 t}$	$ D  < 1$ $ D  = 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$
$\frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2})$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{s}{1 + sT}$	$\frac{1}{T} \left( \delta(t) - \frac{1}{T} e^{-t/T} \right)$	
$\frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$\frac{1}{T_1 T_2 (T_1 - T_2)} (T_1 e^{-t/T_2} - T_2 e^{-t/T_1})$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{s\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\omega_0^2 e^{-D\omega_0 t} \left( \cos(\omega_D t) - \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t) \right)$	$ D  < 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$
$\frac{1}{s(1 + sT)}$	$1 - e^{-t/T}$	
$\frac{1}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$1 - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2})$	$T_1 \neq T_2$
$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)}$	$1 - e^{-D\omega_0 t} \left( \cos(\omega_D t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_D t) \right)$	$ D  < 1, \omega_D = \sqrt{1-D^2} \omega_0$

#### 4.4.2 Laplace-Transformation von Operationen

#### 4.4.3 Bestimmung des Zeitverlaufes linearer Systeme

#### 4.4.4 Beispiele für Laplace Transformationen

$$f(t) = t^2$$

$$t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} t^2 e^{0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{(s-0)^3}$$

## 4.5 Übertragungsfunktion $G(s)$

### Stabilität im Bildbereich:

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms  $p(s)$  entsprechen den Polstellen  $\lambda_i$ .

Für Stabilität muss gelten:

$$\Re(\lambda_i) < 0$$

*Umgangssprachlich:* Für Stabilität muss der Realteil der Polstellen  $\lambda_i$  negativ sein

ODER

Die Polstellen  $\lambda_i$  müssen in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen für Stabilität.

## 4.6 Grenzwertsätze

### 4.6.1 Anwenbarkeit der Grenzwertsätze

Die Grenzwerte sind nur dann anwendbar, wenn die zugehörigen Grenzwerte existieren (insbesondere endlich sind) und gezeigt wurde, dass der Frequenzgang bzw. die Übertragungsfunktion  $G(s)$  stabil ist.

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2)$$

Mit

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

ergibt sich für die Übergangsfunktion  $h(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s). \quad (4)$$

### 4.6.2 Anfangswertsatz

Für den Anfangswert der Übergangsfunktion  $h(t)$  mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  in der Form

$$G(s) = \frac{b_0 + \dots + b_m s^m}{a_0 + \dots + a_n s^n}.$$

gilt

$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_m s^m}{a_0 + \dots + a_n s^n} = \begin{cases} 0, & n > m \text{ (kausal)}, \\ \frac{b_m}{a_n}, & n = m \text{ (kausal)}, \\ \infty, & n < m \text{ (akausal)}. \end{cases} \quad (5)$$

Für den Anfangswert der Gewichtsfunktion  $g(t) = \dot{h}(t)$  mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_0 s + \dots + b_m s^{m+1}}{a_0 + \dots + a_n s^n} = \begin{cases} 0, & n > m + 1, \\ \frac{b_m}{a_n}, & n = m + 1, \\ \infty, & n < m + 1. \end{cases} \quad (6)$$

## Sprungfähigkeit, Durchgriff<sup>a</sup>

### Kurzgesagt:

- Ein System ist sprungfähig bzw. besitzt Durchgriff, wenn  $r = n - m = 0$ .
- Es gibt eine direkte, unverzögerte Wirkung von  $u$  auf  $y$ .
- Sprungfähigkeit im Zustandsraum, wenn Durchgangsmatrix  $\mathbf{D} \neq 0$
- Wenn  $r = n - m = 1$  springt die Gewichtsfunktion  $g(t) = \dot{h}(t)$  in  $t = 0$  auf einen endlichen Wert.

---

<sup>a</sup>Quelle: Umdruck S. 113.

Damit lassen sich Anfangswert und (für stabile Systeme) Endwert der Übergangsfunktion direkt bestimmen.

## 5 Verhalten bei sinusförmiger Anregung

### 5.1 Frequenzgang

#### 5.1.1 Übertragung sinusförmiger Signale $u(t) = \sin(\omega t)$

##### 1. Bedingungen prüfen:

- Ist das System stabil?
- Ist das System LTI?
- Ist der Eingang  $u(t)$  sinusförmig?

**2. Koeffizienten ermitteln:** Für ein stabiles LTI-System mit dem Frequenzgang  $G(j\omega)$  gilt im *eingeschwungenen Zustand*<sup>1</sup> :

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

analog:

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G(j\omega)| \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Hinweis:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (7)$$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t) \quad (8)$$

**2.1.  $\omega$  bestimmen** Im ersten Schritt ist  $\omega$  aus dem Eingang  $u(t)$  zu bestimmen:

1. Falls der Verlauf von  $u(t)$  und  $y(t)$  gegeben ist:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  mit der Periodendauer  $T$ .
2. Beispiel:  $u(t) = \sin(2t) \Rightarrow \omega = 2$ .

**2.2.  $|G(j\omega)|$  bestimmen** Den Betrag  $|G(j\omega)|$  beim in 14.2.1 bestimmten  $\omega$  ermitteln:

1. Falls der Verlauf von  $u(t)$  und  $y(t)$  gegeben ist: Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$  berechnen.
2. Falls der Frequenzgang  $G(j\omega)$  gegeben ist: direkt einsetzen. Beispiel:

$$\left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \omega^2}}$$

3. Bodediagramm: Betrag aus dem *realen Verlauf* ablesen (nicht aus den Asymptoten).
4. Ortskurve: Betrag ist der Abstand vom Ursprung zum Punkt bei  $\omega$ .

---

<sup>1</sup>Quelle: Umdruck S. 116, 119

<sup>1</sup>Beispiele: Altklausur H22, Aufgabe 4 (a); TPR 2, Aufgabe 1

**2.3.  $\angle G(j\omega)$  bestimmen** Die Phasenverschiebung beim in 14.2.1 bestimmten  $\omega$  ermitteln:

1. Wenn der Verlauf von  $u(t)$  und  $y(t)$  gegeben ist: Phasenverschiebung als Versatz zwischen  $u(t)$  und  $y(t)$  bestimmen.
2. Bodediagramm: Phasenverschiebung bei  $\omega$  ablesen.
3. Ortskurve: Winkel bei  $\omega$  messen.

## **5.2 Ortskurve**

## **5.3 Bode-Diagramm**

## **5.4 Fourier-Transformation**

## **5.5 Filter**

## 6 Verschaltungen von Systemen

### 6.1 Zusammenfassen von Teilsystemen

### 6.2 Zerlegung in einfache Elemente

#### 6.2.1 Pol-Nullstellen im Bodediagramm

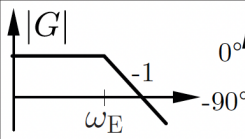
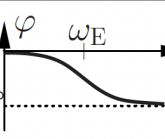
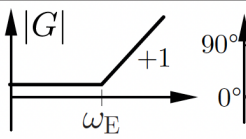
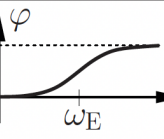
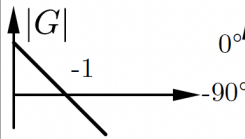
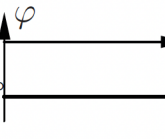
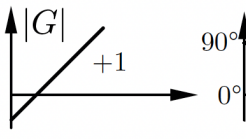
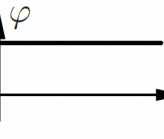
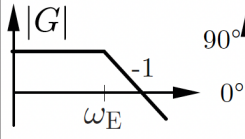
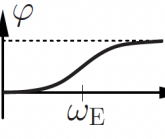
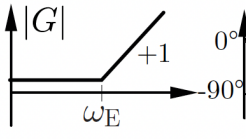
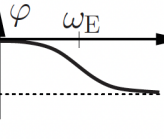
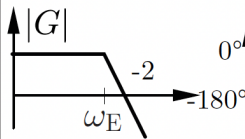
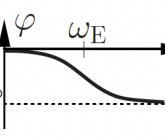
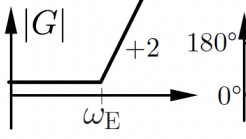
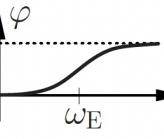
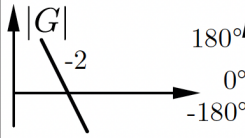
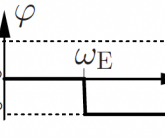
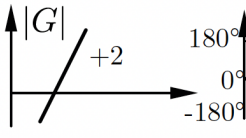
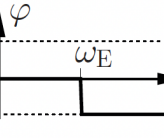
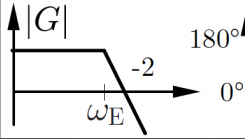
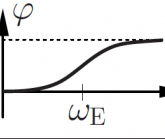
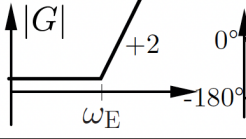
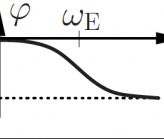
$\omega_E =  s $		Polstelle		Nullstelle	
reell	$\text{Re}(s) < 0$				
	$\text{Re}(s) = 0$				
	$\text{Re}(s) > 0$				
komplex konjugiert	$\text{Re}(s) < 0$				
	$\text{Re}(s) = 0$				
	$\text{Re}(s) > 0$				

Tabelle 6-2: Bode-Diagramme in Abhängigkeit der Pol- und Nullstellen

Abbildung 2: Pol-Nullstellen im Bodediagramm.

#### 6.2.2 Lösungsweg: Frequenzgang aus Bodediagramm

1. Knickfrequenzen und Steigungen im Bode-Diagramm ablesen.
2. Nullstellen/Polstellen als Faktoren ansetzen:

$$G_n(s) = 1 \pm \frac{1}{|s_n|}s, \quad G_p(s) = \frac{1}{1 \pm \frac{1}{|s_p|}s}$$

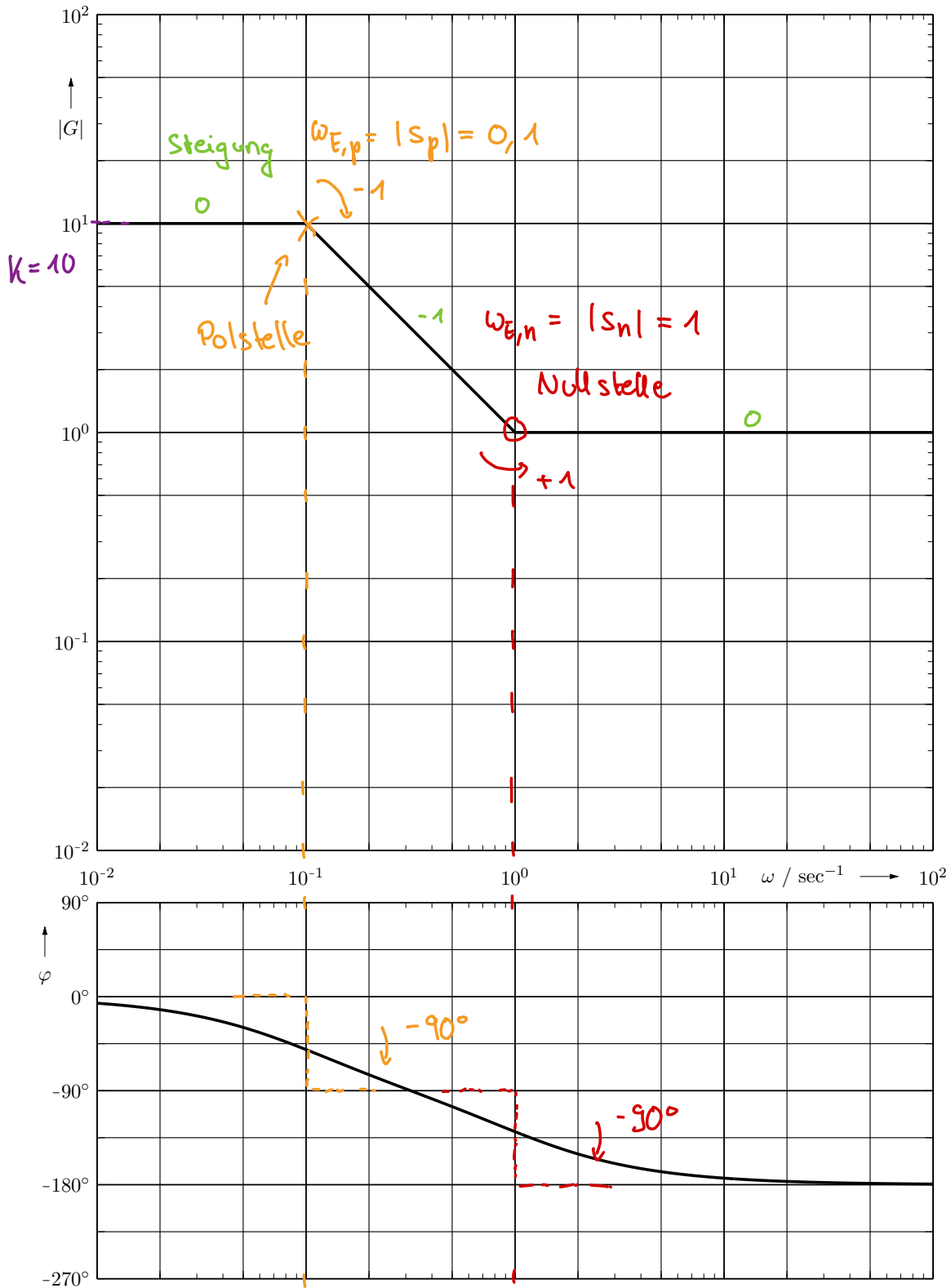
3. Vorzeichen nach Lage wählen:

$$\begin{aligned} \bullet \Re(s_n) > 0 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{|s_n|}s, \Re(s_n) < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{|s_n|}s \\ \bullet \Re(s_p) < 0 &\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{|s_p|}s}, \Re(s_p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{|s_p|}s} \end{aligned}$$

4. Gesamtübertragungsfunktion:

$$G(s) = K \cdot \prod \hat{G}_n \cdot \prod \hat{G}_p$$

### 6.2.3 TPR 5 – Ansätze

Abbildung 1: Bode-Diagramm von  $G_S(j\omega)$

### **6.3 Zerlegung nicht-minimalphasiger Systeme**

## **7 Typische Übertragungsglieder**

### **7.1 Übersicht**

### **7.2 Grundlegende Reglertypen**

#### **7.2.1 P-Element**

#### **7.2.2 I-Element**

#### **7.2.3 D-Element**

#### **7.2.4 PI, PD und PID**

### **7.3 Verzögerungsglieder**

#### **7.3.1 $PT_1$**

#### **7.3.2 $PT_2$**

#### **7.3.3 $PT_n$**

### **7.4 Kombinationen**

#### **7.4.1 $IT_1$**

#### **7.4.2 $DT_1$**

#### **7.4.3 PIT**

#### **7.4.4 $PPT_1$ und $PDT_1$**

### **7.5 Nicht-minimalphasige Systeme**

#### **7.5.1 $PA_1$**

#### **7.5.2 $PT_t, PT_1T_t$**

### **7.6 Nicht-parametrische Identifikation**

### **7.7 Parametrische Identifikation**

#### **7.7.1 Überanpassung**

#### **7.7.2 Graphische Parameteridentifikation**

#### **7.7.3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate**

## **8 Identifikation linearer Regelkreisglieder**

### **8.1 Allgemeines**

## 9 Stabilitätsprüfung

### 9.1 Problemstellung

#### Stabilitätskriterien

Alle Kriterien sind gleichbedeutend.

1. Wurzeln des charakteristischen Polynoms besitzen alle negativen Realteil:

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \Re(\lambda_i) < 0$$

2. Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  besitzen alle einen negativen Realteil:

$$\det(\lambda I - A) \Rightarrow p(\lambda) = 0 \text{ und } \Re(\lambda_i) < 0$$

3. Polstellen der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$  besitzen alle negativen Realteil:

$$p(s) = N(s) = 0 \Rightarrow \Re(s_i) < 0$$

4. Übergangsfunktion  $h(t)$  konvergiert gegen einen endlichen Wert.
5. Gewichtsfunktion  $g(t) = \dot{h}(t)$  konvergiert gegen null und ist für LTI-System absolut integrierbar.

### 9.2 Algebraische Stabilitätskriterien

#### 9.2.1 Grundidee

Für die Bestimmung der Stabilitätseigenschaften wird nicht die genaue Position der Wurzel, bzw. der Polstelle  $\lambda_i$  benötigt, **sondern es reicht die Kenntnis des Vorzeichens** der Wurzel bzw. der Polstelle  $\lambda_i$  aus.

#### 9.2.2 Stabilitätskriterien nach Routh und Hurwitz

##### 1. Bedingung (hinreichend für Systeme mit Ordnung $n = 1, 2$ ).<sup>2</sup>

System der Ordnung  $n$  mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

ist stabil, wenn

- alle Koeffizienten  $a_i$  vorhanden sind,
- alle Koeffizienten  $a_i$  das gleiche Vorzeichen haben,
- genauer: alle  $a_i$  positiv sind, ggf. Differentialgleichung mit  $-1$  multiplizieren, falls alle negativ sind.

---

<sup>2</sup>Stabilitätskriterien für Systeme bis Ordnung  $n = 3$  (S. 226).

## 2. Bedingung nach Hurwitz (bis Ordnung $n = 3$ ).

$\det(H)$  sowie alle Unterdeterminanten sind größer null (Hurwitz-Matrix Bsp. S. 217).

Für  $n = 3$  (vgl. S. 219, Gl. 9.6):

$$\det(H) = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (\text{S. 217})$$

## 2. Bedingung nach Routh.

Routhschen Probefunktionen  $R_i$  sind sämtlich größer null.

**Vorlagen für Routh-Probefunktionen (bis  $n = 4$ ).** Charakteristisches Polynom für  $n = 4$ :

$$p(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

**Für  $n = 1$**

$i$	$R_i$
1	$a_1$
0	$a_0$

**Für  $n = 2$**

$i$	$R_i$	
2	$a_2$	$a_0$
1	$a_1$	—
0	$a'_0 = a_0$	

**Für  $n = 3$**

$i$	$R_i$	
3	$a_3$	$a_1$
2	$a_2$	$a_0$
1	$a'_1 = a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0$	—
0	$a'_0 = a_0$	—

**Für  $n = 4$**

$i$	$R_i$		
4	$a_4$	$a_2$	$a_0$
3	$a_3$	$a_1$	—
2	$a'_2 = a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1$	$a'_0 = a_0$	—
1	$a'_1 = a_1 - \frac{a_3}{a'_2} a'_0$	—	—
0	$a'_0 = a_0$	—	—

## 9.2.3 Beispiele

## 9.3 Nyquist-Kriterium

Wird benötigt, wenn das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  nicht gegeben oder nicht aufgestellt werden kann, z.B. bei Totzeitgliedern (vgl.  $G(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K_p e^{-sT_t}}$ , S. 225, Gl. 9.19).

### 9.3.1 Vollständiges Nyquist-Kriterium

Gegeben sei ein aufgeschnittener kausaler<sup>3</sup> Regelkreis  $G_0$  und ein zugehöriger geschlossener Regelkreis  $G$ . Es gilt (S. 231):

$$m = n - p$$

mit

- $p = p_+(G_0)$ : Anzahl der Pole des aufgeschnittenen Regelkreises  $G_0$  in der rechten offenen  $s$ -Halbebene,
- $n = n_+(1 + G_0)$ : Anzahl der Pole des geschlossenen Regelkreises  $G$  in der rechten offenen  $s$ -Halbebene,
- $m$ : Anzahl der Umläufe der Ortskurve von  $G_0(j\omega)$  (für  $-\infty < \omega < \infty$ ) um den kritischen Punkt  $-1$  im Uhrzeigersinn.

Damit  $G$  stabil ist, muss  $n = 0$  gelten. Also folgt

$$m = -p.$$

### 9.3.2 Beispiele

### 9.3.3 Anwendung bei Polen am Stabilitätsrand

### 9.3.4 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

### 9.3.5 Amplituden- und Phasenreserve

## 9.4 Sonderfälle

### 9.4.1 Pol-Nullstellen-Kürzungen

### 9.4.2 Unstetige Polstellen

---

<sup>3</sup>Umdruck S. 27

## **10 Einführung in den Reglerentwurf**

### **10.1 Ziele und Lösungsansätze**

#### **10.1.1 Motivation**

#### **10.1.2 Gütemaße und Kennwerte**

#### **10.1.3 Ansätze des Reglerentwurfs**

### **10.2 Statischer Reglerentwurf**

### **10.3 Abwägungen bei der Reglerverstärkung**

#### **10.3.1 Vorteile hoher Verstärkungen**

#### **10.3.2 Nachteile hoher Verstärkungen**

### **10.4 Einstellregeln**

#### **10.4.1 Einstellung mittels $T_u$ - $T_g$ -Ersatzmodell**

#### **10.4.2 Einstellung mittels Schwingversuch**

# **11 Grundlegende modellbasierte Reglerentwurfsverfahren**

## **11.1 Frequenzkennlinienverfahren**

### **11.1.1 Grundidee**

### **11.1.2 Hohe Verstärkung bei niedrigen Frequenzen**

### **11.1.3 Übergangsbereich**

### **11.1.4 Niedrige Verstärkung bei hohen Frequenzen**

## **11.2 Betragsskriterium und Symmetrisches Kriterium**

## **11.3 Polvorgabe**

### **11.3.1 Polvorgabe für Ausgangsrückführungen**

### **11.3.2 Polvorgabe für Zustandsrückführungen**

### **11.3.3 Steuerbarkeit**

## **11.4 Beobachterentwurf**

### **11.4.1 Zustandsschätzung**

### **11.4.2 Luenberger-Beobachter**

### **11.4.3 Beobachtbarkeit und Dualität**

### **11.4.4 Beispiel**

## **11.5 Wurzelortskurven**

### **11.5.1 Grundidee**

### **11.5.2 Konstruktionsregeln**

### **11.5.3 Beispiel**

## **12 Vermaschte Regelkreise**

### **12.1 Erweiterung des Einfachregelkreises**

### **12.2 Vorsteuerung**

### **12.3 Führungsgrößenfilter**

### **12.4 Störgrößenaufschaltung**

### **12.5 Kaskadenregelung**

### **12.6 Hilfsstellgröße**

## **13 Mehrgrößenregelung**

### **13.1 Zentrale vs. dezentrale Regelung**

### **13.2 Eigenschaften von Mehrgrößensystemen**

#### **13.2.1 Verschaltungen von Mehrgrößensystemen**

#### **13.2.2 Querkopplungen**

#### **13.2.3 Polstellen von Mehrgrößensystemen**

#### **13.2.4 Richtungsabhängige Verstärkung**

### **13.3 Verfahren der dezentralen Regelung**

#### **13.3.1 Relative Gain Array**

#### **13.3.2 MIMO-Nyquist und Diagonaldominanz**

### **13.4 Verfahren der zentralen Regelung**

#### **13.4.1 Zentrale Regelung im Zustandsraum**

#### **13.4.2 Entkopplungsregler**

## **14 Zeitdiskrete Systeme**

### **14.1 Abtastregelungen**

#### **14.1.1 Definitionen**

#### **14.1.2 Abtaster und Halteglied**

#### **14.1.3 Aliasing**

#### **14.1.4 Verschaltung zu hybriden Systemen**

### **14.2 Einführung in Differenzengleichungen**

### **14.3 Autonome zeitdiskrete Systeme**

### **14.4 Umrechnen von Differenzen- und Differentialgleichungen**

#### **14.4.1 Rückwärtsdifferenzen**

#### **14.4.2 Analytische Lösung**

### **14.5 Quasikontinuierlicher Reglerentwurf**

### **14.6 Zeitdiskreter Bildbereich**

#### **14.6.1 Z-Transformation**

#### **14.6.2 Zeitdiskrete Übertragungsfunktion**

#### **14.6.3 Zeitdiskreter Frequenzgang**

#### **14.6.4 Zeitdiskrete Modelle zeitkontinuierlicher Systeme**

### **14.7 Bilineare Transformation**

### **14.8 Klassischer zeitdiskreter Reglerentwurf**

### **14.9 Regler mit endlicher Einstellzeit**

#### **14.9.1 Entwurf**

#### **14.9.2 Stabilität**

#### **14.9.3 Beispiel**

## 15 Kalmanfilter

### 15.1 Allgemeines

### 15.2 Herleitung

### 15.3 Auslegung und Beispiel

### 15.4 Limitierungen und Erweiterungen

#### 15.4.1 Allgemein

1. Es dürfen nur Terme wie  $x_k, y_k, u_k$  hinzugefügt werden.
2. Es dürfen KEINE! Terme wie  $x_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}$  hinzugefügt werden.
3.  $y(t) \approx y_k$
4.  $\dot{y}(t) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$
5.  $\ddot{y}(t) \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$
6.  $y(t - T_t) \approx y_{k-d}$  mit  $d = \frac{T_t}{T}$ .

**Hinweis:** In den meisten Fällen wird der Term  $y_{k-d}$  als Totzeitglied angenommen. Besonders ist bei einem Koeffizientenvergleich darauf zu achten, ob ein Totzeitglied in der vorgegebenen Gleichung vorhanden ist.

Wenn ein Totzeitglied  $K e^{-sT_t}$  vorhanden ist, dann  $y_{k-d}$  als Totzeitglied annehmen.

Wenn kein Totzeitglied vorhanden ist, dann in den meisten Fällen  $\dot{y}(t)$  oder selten  $\ddot{y}(t)$ .

## 16 Zustandsraum

### 16.1 Zustandsregelung

In Figur 1 ist eine Zustandsregelung mit Proportionalgliedern zu sehen.

### 16.2 Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2]$ bestimmen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

1.  $\mathbf{A}_k$  bestimmen.

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 k_1 & a_{12} - b_1 k_2 \\ a_{21} - b_2 k_1 & a_{22} - b_2 k_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

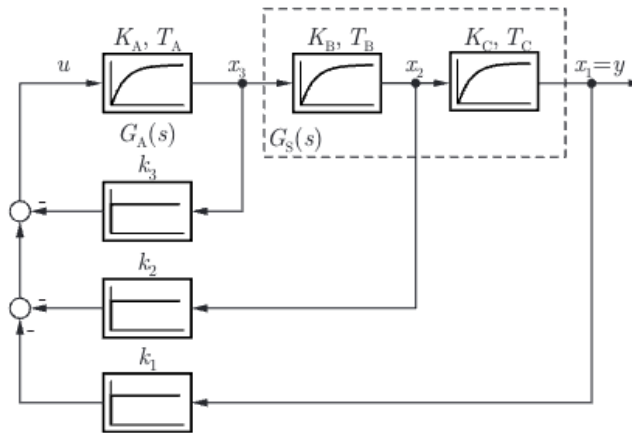


Abbildung 3: Zustandsregelung mit  $k^T = (x_1, x_2, x_3)$

2. Matrix für Determinante aufstellen.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k) = \begin{vmatrix} s - (a_{11} - b_1 k_1) & -(a_{12} - b_1 k_2) \\ -(a_{21} - b_2 k_1) & s - (a_{22} - b_2 k_2) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

3. Determinante ausrechnen und  $p(s)$  aufstellen.

4. Koeffizientenvergleich mit vorgegebenen Polstellen.

## 17 Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist genau dann steuerbar, wenn die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (11.47)$$

vollen Rang besitzt.<sup>4</sup>

Falls  $\mathbf{Q}_s$  quadratisch ist (z.B. SISO), gilt: *nicht steuerbar*  $\Leftrightarrow \det(\mathbf{Q}_s) = 0$ .

**Hinweis:** Es ist sinnvoll, beim Rechnen konsequent *Matrix*  $\cdot$  *Vektor* zu multiplizieren, also z.B.  $\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B})$  statt  $(\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{B}$ .

## 18 Partialbruchzerlegung

### 18.1 Einführung

Die Partialbruchzerlegung ist eine Methode, um rationale Funktionen, wie  $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$ , in einfachere Bruchterme zu zerlegen, die leichter zu integrieren oder zu analysieren sind. Dies ist besonders nützlich in der Signalverarbeitung, Regelungstechnik und bei der Lösung von Differentialgleichungen.

<sup>4</sup>Quelle: Umdruck S. 304

## 18.2 Beispiel: $\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

Wir zerlegen den Ausdruck  $\frac{1-s}{(s+1)(s^2+1)}$  in Partialbrüche. Der Nenner besteht aus einem linearen Faktor  $s+1$  und einem quadratischen Faktor  $s^2+1$ . Die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{1-s}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

wobei  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten sind, die wir bestimmen müssen.

## 19 Informationen über Ortskurven

Ortskurven für den aufgeschnittenen Regelkreis  $G_0$ .

1. Phase  $\phi$  der Ortskurve läuft für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen  $-\infty$   
 $\rightarrow G_0$  enthält Totzeit. (S. 13, I)
2. Ortskurve startet mit einer Phase  $\phi = -90^\circ$  im Unendlichen, also  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_0(j\omega)| = \infty$   
 $\rightarrow G_0$  hat integrierendes Verhalten. (S. 13, II)
3. Ortskurve startet im Ursprung, also  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_0(j\omega)| = 0$   
 $\rightarrow G_0$  hat differenzierendes Verhalten. (S. 13, III)
4. Betrag der Ortskurve steigt und sinkt.  
 $\rightarrow G_0$  enthält ein Verzögerungsglied mit Resonanzüberhöhung (z.B.  $PT_2$ ). (S. 13, IV)

## 20 Informationen über Übergangsfunktionen $h(t)$ des geschlossenen Regelkreises

Für die Übergangsfunktion  $h(t)$  ist der Eingang  $u(t) = 1(t)$ . Stationäre Genauigkeit gilt dann, weil  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ . Wenn  $u_0 = 1(t)$ , dann ist die Sprungantwort  $y(t)$  gleich der Übertragungsfunktion  $h(t)$ .

### 20.1 Stationäre Genauigkeit

Damit ein Regelkreis stationär genau arbeitet, muss der Ausgang genau der Referenz folgen. Dies bedeutet, dass der Führungsgrößenfilter so ausgelegt werden muss, dass der stationäre Endwert des geschlossenen Regelkreises genau 1 ist.

Außerdem gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} Y(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} U(s)} = 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{G_F \cdot G_R \cdot G_{PT2}}{1 + G_R \cdot G_{PT2}} \right) = 1$$

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$ , siehe Grenzwertsätze (S. 112)  
 $\rightarrow G$  hat differenzierendes Verhalten und eine Nullstelle im Ursprung.  
 $\rightarrow G_0$  hat die selben Nullstellen wie  $G$ .  $G_0$  hat also auch differenzierendes Verhalten.
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$ , siehe Grenzwertsätze (S. 112)  
 $\rightarrow$  Sprungantwort  $y(t)$  besitzt keine Regelabweichung (S. 165).  
 $\rightarrow G(s)$  arbeitet stationär genau (S. 165).

## 21 Berechnung maximal zulässige Totzeit $T_t$

Die von der Totzeit hervorgerufene Phasenverschiebung  $\phi_t$  darf maximal der Phasenreserve  $\alpha_R$  von  $G'_0(j\omega)$  entsprechen, um die Stabilität nicht zu gefährden.

1. Durchtrittsfrequenz  $\omega_d$  von  $G'_0(j\omega)$  ermitteln.
2. Phase  $\phi'_0(\omega_d)$  ablesen.
3. Phasenreserve  $\alpha_R = 180^\circ + \phi'_0(\omega_d)$ .
4. Phasenverschiebung Totzeitglied  $\phi_t = -\omega \cdot T_t \stackrel{!}{=} -\alpha_R$

$$5. \text{ Totzeit } T_t = \frac{\alpha_R}{\omega_d} = \frac{\frac{\alpha_R}{180^\circ} \cdot \pi}{\omega_d}$$

## 22 Durchtrittsfrequenz $\omega_d$

### 22.1 Ansprechverhalten

Ein gutes Ansprechverhalten und kurze Anschwingzeiten werden durch große  $\omega_d$  erreicht. Da aus Stabilitätsgründen  $\omega_d < \omega_\pi$  gelten muss, ist der Frequenzbereich, in dem große Reglerverstärkungen möglich sind, beim I-Regler stark limitiert.

Durch große  $K$  bei einem  $P$ -Glieder wird der Verlauf des  $PT_2$ -Gliedes im Bodediagramm nach oben verschoben. Dadurch wird  $\omega_d$  nach rechts verschoben und somit größer. Weil  $\omega_\pi = \infty$  in dem Fall, ist die Ungleichung  $\omega_d < \omega_\pi$  erfüllt.

## 23 Einstellung nach $T_u$ – $T_g$ (Chien, Hrones, Reswick)

- Nicht schwingungsfähig  $\rightarrow$  aperiodischer Regelverlauf.<sup>5</sup>
- Ohne bleibende Regelabweichung  $\rightarrow$  am besten PI-Regler.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).

<sup>6</sup>Quelle: Altklausur H23, Aufgabe 4(c) & 4(d).

## 24 Gewichts- und Übergangsfunktion aus $G_s(s)$

Gegeben sei:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) \quad (11)$$

### 24.1 Zusammenhänge:

Übergangsfunktion  $h(t)$ <sup>7</sup>:

$$h(t) = \frac{y_{\text{Sprung}}(t)}{u_0} = \frac{\text{Sprungantwort}}{\text{Sprunghöhe}} \quad (12)$$

Gewichtsfunktion  $g(t)$ :

$$g(t) = \frac{y_{\text{Impuls}}(t)}{\int u \, dt} = \frac{\text{Impulsantwort}}{\text{Impulsfläche}} \quad (13)$$

Zusammenhang  $g(t)$  und  $h(t)$ <sup>8</sup>:

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{d}{dt} h(t) \quad (14)$$

### 24.2 Gewichtsfunktion $g(t)$

Für die Gewichtsfunktion gilt  $u(t) = \delta(t)$ , also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (15)$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) = G_s(s) \quad (16)$$

und somit:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_s(s)\} \quad (17)$$

#### 24.2.1 $G(s)$ ist gegeben, Gewichtsfunktion $g(t)$ bestimmen.

Gewichtsfunktion  $g(t)$  durch inverse Laplace-Transformation von  $G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$ .

1.  $C \frac{1}{(s - s_p)^n}$ .

2. Gewichtsfunktion  $g(t) \rightarrow U(s) = 1$

3.  $G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2} = \frac{K}{T^2 \left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$ .

4.  $Y(s) = G(s)U(s)$

---

<sup>7</sup>Quelle: Umdruck S. 89

<sup>8</sup>Quelle: Umdruck S. 91

$$5. \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} \right\}.$$

$$6. \quad s_p = -\frac{1}{T}, n = 2, C = \frac{K}{T^2}$$

$$7. \quad g(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-\frac{1}{T}t}$$

### 24.3 Übergangsfunktion $h(t)$

Für die Übergangsfunktion gilt  $u(t) = 1(t)$ , also:

$$U(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad (18)$$

Damit folgt:

$$Y(s) = G_s(s) U(s) = \frac{G_s(s)}{s} \quad (19)$$

und somit:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_s(s)}{s} \right\} \quad (20)$$

## 25 Merksatz / Intuition (Bode: Zeitbereich & Frequenzbereich)

### 25.1 Intuition

- Zeitkonstante  $T$  im Bode-Diagram: *Wie schnell reagiert das System?*
- Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega_D}$  mit  $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ : *Wie schnell schwingt das Signal?*

## 26 Mathematische Grundlagen

### 26.1 PQ-Formel

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$f(x) = x^2 + p x + q = 0.$$

Dann lauten die Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

## 26.2 Determinante einer 2x2 & 3x3-Matrix

### 26.2.1 2x2

Die Formel für die Determinante einer 2x2-Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  lautet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### 26.2.2 3x3

Die Formel für die Determinante einer 3x3-Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  lautet:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

## 26.3 Integral einer Exponentialfunktion ( $\lambda > 0$ )

$$\int_{0^-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau = \int_{0^-}^R \frac{d}{d\tau} \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) d\tau \stackrel{\text{HDI}}{=} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_{\tau=0^-}^R = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda R}.$$

Somit gilt für den Limes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0^-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda R} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Analog folgt mittels partieller Integration (PI)

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^R \tau e^{-\lambda\tau} d\tau &= \int_{0^-}^R \tau \frac{d}{d\tau} \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) d\tau \stackrel{\text{PI}}{=} - \int_{0^-}^R \frac{d}{d\tau} (\tau) \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} d\tau + \tau \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) \Big|_{\tau=0^-}^R \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{0^-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R}. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Limes liefert nun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{0^-}^R \tau e^{-\lambda\tau} d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda} \int_{0^-}^R e^{-\lambda\tau} d\tau - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} \right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

## 2. Integral mit linearem Faktor $t$ (partielle Integration)

Wähle  $u(t) = t$  und  $v'(t) = e^{-\lambda t}$  mit  $\lambda > 0$ . Dann gilt  $u'(t) = 1$  und  $v(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$ .

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t e^{-\lambda t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \left[ t \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right]_0^R - \int_0^R \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) dt \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} + \frac{1}{\lambda} \int_0^R e^{-\lambda t} dt \right).\end{aligned}$$

Da  $Re^{-\lambda R} \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  und  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ , folgt

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

## 3. Allgemeine Definition der partiellen Integration

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Äquivalent dazu ist die Produktregel

$$\frac{d}{dt}(uv) = u'v + uv',$$

die als Grundlage für die Herleitung der partiellen Integration dient.

### 26.4 Betrag von $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$ , $e^{j\theta}$

#### 26.4.1 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck  $e^{\pm j\theta}$  kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta)$$

#### 26.4.2 Berechnung des Betrags

Der Ausdruck  $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$  kann mit Euler'scher Formel beschrieben werden:

$$e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)$$

Der Betrag einer komplexen Zahl  $z = x + jy$  ist gegeben durch:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für  $e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$  gilt:

$$|e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Der Betrag ist somit immer 1, unabhängig von  $\omega$ .

## 26.5 Inverse einer Matrix

### 26.5.1 Allgemein

Eine quadratische Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn

$$\det(A) \neq 0$$

Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

wobei  $\operatorname{adj}(A)$  die adjungierte Matrix ist.

### 26.5.2 Inverse einer $2 \times 2$ -Matrix

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinante:

$$\det(A) = ad - bc$$

Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für } ad - bc \neq 0$$

## 26.6 $G(s)$ ist gegeben, Differentialgleichung bestimmen.

DGL durch inverse Laplace-Transformation von  $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{1 + T_1 s + K_R K_1} e^{-sT_t}$ .

1. Umstellen nach  $X(s)(1 + T_1 s + K_R K_1) = U(s)K_1 e^{-sT_t}$ .
2.  $\mathcal{L}^{-1} \{X(s)(1 + K_R K_1)\} = x(t)(1 + K_R K_1)$ .
3.  $\mathcal{L}^{-1} \{X(s)T_1 s\} = T_1 \dot{x}(t)$ .
4.  $\mathcal{L}^{-1} \{K_1 e^{-sT_t}\} = K_1 \tilde{u}(t) = K_1 u(t - T_t)$ .
5.  $x(t)(1 + K_R K_1) + T_1 \dot{x}(t) = K_1 \tilde{u}(t)$

## 27 Shannon-/Nyquist-Abtasttheorem (für $T_{\min}$ )

Für die höchste in dieser Funktion enthaltene Frequenz  $\omega_{\max}$  und die Abtastfrequenz  $\omega_s$  gilt:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} 2 \omega_{\max} &< \omega_s \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_{\max} = \frac{2\pi}{T_{\min}} \\ 2 \cdot \frac{2\pi}{T_{\min}} &< \frac{2\pi}{T} \\ \frac{2}{T_{\min}} &< \frac{1}{T} \\ T &< \frac{T_{\min}}{2} \end{aligned}$$

## 28 Stationäre Genauigkeit

### 28.1 Stationäre Genauigkeit im geschlossenen Regelkreis

Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Standard-Regelkreises ist genau dann stationär genau, wenn<sup>10</sup>

1. der geschlossene Regelkreis stabil ist und
2. der aufgeschnittene Regelkreis  $G_0$  einen integrierenden Anteil besitzt.

## 29 Integrierender Anteil und integrierendes Verhalten

Ein LTI-System besitzt genau dann einen integrierenden Anteil, wenn es eine Polstelle in  $s = 0$  besitzt.<sup>11</sup> Haben zusätzlich alle weiteren Polstellen des Systems einen negativen Realteil, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \text{konstant} \neq 0 \quad (21)$$

und das System besitzt integrierendes Verhalten.

## 30 Grafische Darstellung der Übergangsfunktion $h(t)$ des $IT_1$ Gliedes

Beispiel:<sup>12</sup>  $y(t) = m(t - n) + a e^{-\lambda t}$  (hier:  $m = 0.5$ ,  $n = 1$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ ).

---

<sup>9</sup>Umdruck S. 380.

<sup>10</sup>Quelle: Umdruck S. 167

<sup>11</sup>Quelle: Umdruck S. 166

<sup>12</sup>Quelle: TPR 1, Aufgabe 2(a).

### 30.1 Erläuterung der Terme

Addition aus einer Geraden  $m(t - n)$  und Exponentialfunktion  $a e^{-\lambda t}$ .

- $m$ : Steigung der Geraden
- $n$ :  $x$ -Achsenverschiebung
- $a$ : Vorfaktor der Exponentialfunktion

### 30.2 Werte bestimmen

- Steigung  $m$  der Asymptote.
- $x$ -Achsenverschiebung der Geraden:  $y(t = 1) = 0 = m(1 - n) \Rightarrow n = 1$ .
- $a$  und  $\lambda$  können mit  $y(t = 0) = 0$  und  $y'(t = 0) = 0$  bestimmt werden.

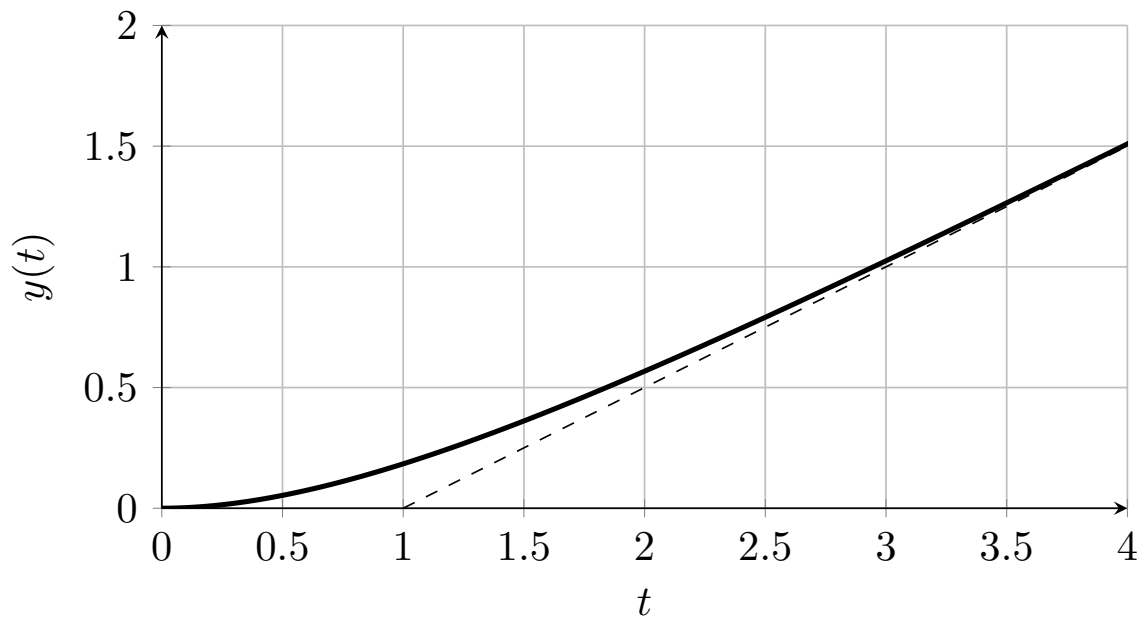


Abbildung 4: Plot der Beispiel-Funktion.

## 31 Korrekturtabellen und Skalierung

### 31.1 Korrekturtabelle (log/Phase)

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		$ \lg  G  - \lg  \text{Asymptote} $				$ \varphi - \varphi_{\text{Asymptote}} $			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
$PT_1$		-0,002	-0,048	-0,107	-0,151	5,7	26,6	38,7	45,0
$PT_2$	$D = 1$	-0,004	-0,097	-0,215	-0,301	11,4	53,1	77,3	90,0
	$D = 0,707$	0,000	-0,013	-0,075	-0,151	8,1	43,4	72,3	90,0
	$D = 0,5$	0,002	0,045	0,057	0,000	5,8	33,7	65,8	90,0
	$D = 0,4$	0,003	0,071	0,134	0,097	4,6	28,1	60,6	90,0
	$D = 0,3$	0,004	0,093	0,222	0,222	3,5	21,8	53,1	90,0
	$D = 0,2$	0,004	0,110	0,317	0,398	2,3	14,9	41,6	90,0
	$D = 0,1$	0,004	0,121	0,405	0,699	1,2	7,6	24,0	90,0
	$D = 0,05$	0,004	0,124	0,433	1,000	0,6	3,8	12,5	90,0

### 31.2 Korrekturtabelle in mm

$\frac{\omega}{\omega_E}$ bzw. $\frac{\omega_E}{\omega}$		Abstand von $ G $ und $ \text{Asymptote} $ in mm				Abstand von $\varphi$ und $\varphi_{\text{Asymptote}}$ in mm			
		0,1	0,5	0,8	1	0,1	0,5	0,8	1
$PT_1$		-0,1	-1,9	-4,3	-6,0	1,1	5,3	7,7	9,0
$PT_2$	$D = 1$	-0,2	-3,9	-8,6	-12,0	2,3	10,6	15,5	18,0
	$D = 0,707$	0	-0,5	-3,0	-6,0	1,6	8,7	14,5	18,0
	$D = 0,5$	0,1	1,8	2,3	0,0	1,2	6,7	13,2	18,0
	$D = 0,4$	0,1	2,8	5,4	3,9	0,9	5,6	12,1	18,0
	$D = 0,3$	0,2	3,7	8,9	8,9	0,7	4,4	10,6	18,0
	$D = 0,2$	0,2	4,4	12,7	15,9	0,5	3,0	8,3	18,0
	$D = 0,1$	0,2	4,8	16,2	28,0	0,2	1,5	4,8	18,0
	$D = 0,05$	0,2	5,0	17,3	40,0	0,1	0,8	2,5	18,0

### 31.3 Skalierung (Diagramm rechts)

1 lg-Einheit = 40 mm

360° = 72 mm

# Index

- Absolutgrößen, 16
- Abtasttheorem, 46
  - nach Shannon (S. 380), 46
- Abweichungsgrößen, 16
- akausale Systeme, 15
- Anfangsbedingungen, 14
- Anfangswertsatz, 19
- Ansprechverhalten, 40
  - Abhängigkeit von  $\omega_d$ , 40
- Bezeichnungen für Systeme, 10
- Bodediagramm, 40, 42
- Chien, Hrones, Reswick (CHR), 40
- crossover frequency, *siehe* Durchtrittsfrequenz
  - Umdruck (S. 240, 248, 270, 273, 286, 363), 40
- $\delta(t)$ , 41
- Durchgangsfrequenz, *siehe* Durchtrittsfrequenz
- Durchtrittsfrequenz
  - Umdruck (S. 240, 248, 270, 273, 286, 363), 40
- $\omega_d$ , 40
- Eckkreisfrequenz, 16
- Einstellung mittels  $T_u$ – $T_g$  Ersatzmodell
  - Umdruck (S. 276), 40
- Endwertsatz, 19
- $G(j\omega)$ , 21
- Geschlossener Regelkreis, 10
- Gesetz der Sparsamkeit, 16
- Gewichtsfunktion, 41
- $g(t)$ , 41
- Grenzwertsätze, 19
  - Anwendbarkeit, 19
- $y(t)$ , 41
- Kalman, 38
- Kausale Systeme, 15
- Kreisfrequenz  $\omega$ , 42
- Lineare Systeme, 14
- LTI-System, 14
- MIMO-System, 15
- Minimale Realisierung, 16
- Modell, 14
- Nyquist-Abtasttheorem, *siehe* Abtasttheorem
- Offener Regelkreis, 10
- P-Glied, 40
- Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , 42
- $\angle G(j\omega)$ , 21
- PT<sub>2</sub>-Glied, 40
- $Q_s$ , *siehe* Steuerbarkeitsmatrix
- $Q_s$  Steuerbarkeitsmatrix, *siehe* Steuerbarkeitsmatrix
- Regelabweichung, 40
  - Umdruck (S. 165), 40
- Regelungsnormalform, 15
- Relativer Grad, 10, 14
  - Umdruck (S. 26), 10
- Routh / Hurwitz Stabilitätskriterium, 29
- Shannontheorem
  - S. 380, 46
- Signale und Systeme, 10
- Signale und Systeme im Regelkreis, 10
- Sinusförmige Signale, 21
  - Umdruck (S. 119), 21
- SISO-System, 15
- $y(t)$ , 41
- $1(t)$ , 41
- Sprungfähigkeit, 20
  - im Zustandsraum, 20
  - in Abhängigkeit von rel. Grad  $r$ , 20
- Sprungfähigkeit im Zustandsraum, 20
- Stabilität
  - Algebraische Stabilitätskriterien, 29
  - Allgemeine Stabilitätskriterien, 29
  - Routh / Hurwitz Stabilität, 29
- stationary accuracy, *siehe* Stationäre Genauigkeit
  - Umdruck (S. 164, 167, 260, 348, 552, 569), 40
- Stationäre Genauigkeit, 39, 40
  - Umdruck (S. 164, 167, 260, 348, 552, 569), 40
- Steuerbarkeitskriterium von Kalman, 38

Umdruck (S. 304), 38  
Steuerbarkeitsmatrix  
     $Q_s$ , 38  
 $Q_s$ , 38  
Systemantwort, 21  
Systemordnung, 14  
  
 $T_u-T_g$ , 40  
    Umdruck (S. 207), 40  
  
 $u(t)=\sin(\omega t)$ , 21  
  
Vorzeichenkonvention, 10, *siehe* Umdruck (S.123)  
  
Zeitinvariante Systeme, 14  
Zeitkonstante, 16  
Zeitkonstante  $T$ , 42  
Zustandsraumdarstellung, 15  
  
Übergangsfunktion, 41  
 $h(t)$ , 41