שאלה 1-

$$T(n)=\begin{cases} c_1 & , n=0 \\ c_2+T(n-1) & , n>0 \end{cases}$$

$$T(n) = c_2 + T(n-1) = c_2 + (c_2 + T(n-2))$$
$$= 2c_2 + T(n-2) = 2c_2 + (c_2 + T(n-3)) =$$
$$= 3c_2 + T(n-3) = \dots$$
$$= i\cdot c_2 + T(n-i) \Rightarrow$$

עבור כאשר נגיע ל-0 ולכן

$n-i=0$

כלומר $n=i$

$$T(n) = n\cdot c_2 + T(0) = n\cdot c_2 + c_1 = O(n)$$

שאלה 2 -

$$T(n)=\begin{cases} c_1 & , n=1 \\ c_2+2T(n/2) & , n>1 \end{cases}$$

$$T(n) = c_2 + 2T(n/2) = c_2 + 2(c_2 + 2T(n/4)) =$$
$$= 3c_2 + 4T(n/4) = 3c_2 + 4(c_2 + 2T(n/8)) =$$
$$= 7c_2 + 8T(n/8) = \dots$$
$$= c_2\cdot \sum_{k=0}^{i-1} 2^k + 2^i T(n/2^i)$$

עבור כאשר $n/2^i = 1$ ולכן $n=2^i$ כלומר $i=\log n$.

$$T(n) = c_2\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\log n-1} 2^k}_{} + n\cdot T(1) = c_2\cdot(n-1) + n\cdot c_1 = O(n)$$

סכום הנדסי $S = a_1\cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} q^n = a_1\left(\frac{q^{N_1}-q^{N_2+1}}{1-q}\right)$. $\sum_{k=0}^{\log n-1} 2^k = 1\left(\frac{2^0-2^{\log n}}{1-2}\right) = (n-1)$

שאלה 3

(1)
$$T(n) = T(n-1) + \log n =$$
$$= T(n-2) + \log(n-1) + \log n =$$
$$= T(n-3) + \log(n-2) + \log(n-1) + \log n =$$
$$\vdots$$
$$= T(n-k) + \log(n-k+1) + \dots + \log(n-1) + \log n$$

נעצור כאשר נגיע ל-0 כלומר $n-k=0 \Leftarrow n=k$

$$T(n) = T(0) + \sum_{k=1}^{n} \log k = 1 + \log(n!) = \Theta(n \log n)$$

(2)
$$T(n) = 3T(n/3) + 1 = 3\left(3T(n/3^2) + 1\right) + 1$$
$$= 9T(n/9) + 1 + 3 = 9\left(3T(n/3^3) + 1\right) + 1 + 3$$
$$= 27T(n/27) + 1 + 3 + 9$$
$$\vdots$$
$$= 3^k T(n/3^k) + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} 3^i}_{\frac{3^0 - 3^{\log_3 n}}{1-3} = \frac{n-1}{2}}$$

נעצור כאשר

$$n/3^k = 1$$
$$n = 3^k$$
$$k = \log_3 n$$

$$T(n) = 3^{\log_3 n} T(1) + \frac{n-1}{2} = n + 1 + \frac{n-1}{2} = O(n)$$

(3) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n = 3\left(3T\left(n/3^2\right) + n/3\right) + n$

$= 9T\left(n/9\right) + 2n = 9\left(3T\left(n/3^3\right) + n/3^2\right) + 2n$

$= 27T\left(n/27\right) + 3n$

$\vdots$

$= 3^k T\left(n/3^k\right) + kn$

נעצור כאשר $n/3^k = 1 \Leftarrow k = \log_3 n$

$$T(n) = 3^{\log_3 n} + T(1) + \log n \cdot n = n + 1 + n\log n = O(n\log n)$$

<u>החלפת בסיס</u>: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$T(n) = 9T(n/3) + n$

$a=9,\ b=3,\ f(n)=n,\ n^{\log_3 9} = n^2$

$n = O(n^{2-\varepsilon})$ ולכן לפי המקרה הראשון $\Leftarrow$ $T(n)=\Theta(n^2)$

$T(n) = 5T(n/5) + n$

$a=5,\ b=5,\ f(n)=n \quad n^{\log_5 5} = n$

לפי מקרה 2 $f(n)=\Theta(n)$ $\Leftarrow$ $T(n)=\Theta(n\log n)$

$T(n) = 8T(n/2) + n^3$

$a=8,\ b=2,\ f(n)=n^3,\ n^{\log_2 8} = n^3$

לפי מקרה 2 $\Leftarrow$ $T(n)=\Theta(n^3\log n)$

$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$

$a=1,\ b=2,\ f(n)=\Theta(1) \quad n^{\log_2 1} = n^0 = 1$

לפי מקרה 2 $\Leftarrow$ $T(n)=\Theta(\log n)$

$T(n) = 5T(n/4) + n^2$

$a=5,\ b=4,\ f(n)=n^2 \quad n^{\log_4 5} = n^{1.\dots}$

לפי 3 $\Leftarrow$ $5\left(\frac{n}{4}\right)^2 < c\cdot n^2$ $\Leftarrow$ $1 > c > \frac{5}{16}$ ולכן $T(n)=\Theta(n^2)$