

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Геометрическая теория дефектов

М.О. Катанаев

Дано описание дефектов — дислокаций и дисклинаций — в рамках геометрии Римана–Картана. Тензоры кривизны и кручения интерпретируются соответственно как поверхностные плотности векторов Франка и Бюргерса. Предложено новое выражение для свободной энергии, описывающее статическое распределение дефектов. Уравнения нелинейной теории упругости использованы для фиксирования системы координат. Лоренцева калибровка приводит к уравнениям главного кирального $SO(3)$ -поля. При отсутствии дефектов геометрическая модель сводится к теории упругости для вектора смещений и модели главного кирального $SO(3)$ -поля для спиновой структуры. На примере клиновой дислокации показано, что теория упругости воспроизводит только линейное приближение геометрической теории дефектов. Показано, что уравнения асимметричной теории упругости для среды Коссера также естественным образом вкладываются в геометрическую теорию дефектов как калибровочные условия. В качестве приложения геометрической теории дефектов рассмотрено рассеяние фононов на клиновой дислокации. Кроме того, рассмотрена задача об энергетическом спектре примеси в поле клиновой дислокации.

PACS numbers: 02.40. – k, 46.05. + b, 61.72.Lk, 63.20.Mt

Содержание

1. Введение (705).
 2. Упругие деформации (707).
 3. Дислокации (708).
 4. Дисклинации (710).
 5. Свободная энергия (712).
 6. Фиксирование калибровки (713).
 7. Асимметричная теория упругости (715).
 8. Клиновая дислокация в теории упругости (716).
 9. Краевая дислокация в теории упругости (718).
 10. Параллельные клиновые дислокации (718).
 11. Клиновая дислокация в геометрическом подходе (720).
 12. Упругие колебания в среде с дислокациями (721).
 13. Рассеяние фононов на клиновой дислокации (723).
 14. Примесь в поле клиновой дислокации (726).
 15. Заключение (727).
 16. Приложение. Немного дифференциальной геометрии (728).
- Список литературы (732).

1. Введение

Многие твердые тела обладают кристаллической структурой. Однако в природе идеальных кристаллов нет, и большинство их физических свойств, таких как пластичность, плавление, рост и др., определяется дефектами

кристаллической структуры. Поэтому изучение дефектов является актуальной научной проблемой, важной, в первую очередь, для приложений. Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования дефектов в кристаллах начались в 30-е годы XX века и продолжают по сей день. Несмотря на десятки монографий и тысячи статей, фундаментальная теория дефектов в настоящее время отсутствует.

Один из перспективных подходов к созданию теории дефектов основан на геометрии Римана–Картана, которая задается нетривиальной метрикой и кручением. В этом подходе кристалл рассматривается как непрерывная упругая среда со спиновой структурой. Если векторное поле смещений является гладкой функцией, то в кристалле присутствуют только упругие напряжения, которые соответствуют диффеоморфизмам плоского евклидова пространства. Если поле смещений имеет разрывы, то мы говорим, что в среде есть дефекты упругой структуры. Дефекты упругой структуры называются дислокациями и приводят к возникновению нетривиальной геометрии. А именно, они соответствуют отличному от нуля тензору кручения, который равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

Идея связать кручение с дислокациями возникла в пятидесятые годы [1–4]. Этот подход успешно развивается до сих пор (отметим обзоры [5–11]) и часто называется калибровочной теорией дислокаций. Аналогичный подход развивается также в гравитации [12]. Интересно отметить, что Э. Картан ввел понятие кручения в геометрию [13], проводя аналогию с механикой упругой среды.

Калибровочный подход к теории дефектов успешно развивается, и на этом пути получены интересные результаты [14–17]. В связи с этим отметим два

М.О. Катанаев. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991 Москва, ул. Губкина 8, Российская Федерация
Тел. (095) 938-37-81
E-mail: katanaev@mi.ras.ru

Статья поступила 21 июля 2004 г.,
после доработки 31 марта 2005 г.

момента, в которых предлагаемый ниже подход существенно отличается. В калибровочных моделях дислокаций, основанных на группе трансляций или на полупрямом произведении группы вращений на группу трансляций, в качестве независимых переменных обычно выбирается дисторсия и поле смещений. Поскольку поле смещений при локальных трансляциях просто сдвигается, то всегда можно зафиксировать инвариантность относительно локальных трансляций таким образом, что поле смещений обратится в нуль. В этом смысле поле смещений представляет собой калибровочный параметр локальных трансляций, и в калибровочно инвариантных моделях физические наблюдаемые от него не зависят.

Другим недостатком калибровочного подхода являются рассматриваемые уравнения равновесия. Обычно для дисторсии или репера используют уравнения типа Эйнштейна с правой частью, зависящей от тензора напряжений. С физической точки зрения это кажется неприемлемым по следующей причине. Рассмотрим, например, одну прямолинейную краевую дислокацию. В этом случае поле упругих напряжений отлично от нуля всюду. Тогда из уравнений равновесия будет следовать, что тензор кручения (или кривизны) также будет нетривиальным во всем пространстве. С нашей точки зрения, это неверно. Действительно, выделим произвольный объем среды вне плоскости разреза и рассмотрим процесс создания краевой дислокации. До создания дефекта выбранный объем был частью евклидова пространства, у которого кручение и кривизна тождественно равны нулю. Поскольку для рассматриваемого объема процесс создания дислокации является диффеоморфизмом, то ясно, что и кручение, и кривизна останутся нулевыми. Кроме того, для создания дефекта поверхность разреза можно выбрать произвольно, не меняя оси дислокации. Отсюда следует, что кручение и кривизна должны быть равны нулю всюду, за исключением оси дислокации. Другими словами, тензор упругих напряжений не может быть источником дислокаций. Чтобы устранить возникающее противоречие мы предлагаем кардинальный выход: отказываемся от использования поля смещений в качестве независимой переменной вообще. Это не значит, что поле смещений не существует в реальных кристаллах. В предлагаемом подходе в тех областях среды, которые не содержат ядер дислокаций, поле смещений существует и его можно вычислить. При этом оно будет удовлетворять уравнениям нелинейной теории упругости.

Предлагаемый геометрический подход позволяет включить в рассмотрение другие дефекты, не относящиеся непосредственно к дефектам упругой среды.

Параллельно с изучением дислокаций шло интенсивное изучение другого типа дефектов. Дело в том, что многие тела обладают не только упругими свойствами, но и спиновой структурой. Например, ферромагнетики, жидкие кристаллы, спиновые стекла и др. В этом случае существуют дефекты в спиновой структуре, которые называются дисклинациями [18]. Они возникают тогда, когда поле директора имеет разрывы. Наличие дисклинаций также связано с нетривиальной геометрией. А именно, тензор кривизны равен поверхностной плотности вектора Франка. К описанию дисклинаций также применялся калибровочный подход, основанный на группе вращений $SO(3)$ [19]. $SO(3)$ -калибровочные

модели спиновых стекол с дефектами рассматривались в [20, 21].

Геометрическая теория статического распределения дефектов, которая с единой точки зрения описывает оба типа дефектов — дислокации и дисклинации, была предложена в [22]. В отличие от других подходов единственными независимыми переменными у нас являются репер и $SO(3)$ -связность. Тензоры кручения и кривизны имеют прямой физический смысл поверхностной плотности соответственно дислокаций и дисклинаций. Для репера и $SO(3)$ -связности постулируются ковариантные уравнения равновесия такие же, как и в модели гравитации с кручением. Поскольку любое решение уравнений равновесия определено с точностью до общих преобразований координат и локальных $SO(3)$ -вращений, то для однозначного определения решения необходимо задать систему координат (зафиксировать калибровку). Недавно для этой цели была предложена упругая калибровка для репера [23] и лоренцева калибровка для $SO(3)$ -связности [24]. Подчеркнем, что в нашем подходе понятия вектора смещений и угла поворота полностью отсутствуют. Эти понятия могут быть введены только в тех областях среды, в которых дефекты отсутствуют. В этом случае уравнения для репера и $SO(3)$ -связности тождественно удовлетворяются, упругая калибровка сводится к уравнениям нелинейной теории упругости для вектора смещений, а лоренцева калибровка — к уравнениям главного кирального $SO(3)$ -поля. Другими словами, для фиксирования системы координат мы выбираем две фундаментальные модели: теорию упругости и модель главного кирального поля.

Для демонстрации преимуществ геометрического подхода и сравнения его с теорией упругости мы подробно рассматриваем клиновую дислокацию в рамках стандартной теории упругости и предлагаемой геометрической модели. Показано, что явное выражение для метрики в геометрической теории дефектов проще и совпадает с выражением для индуцированной метрики, полученной в рамках теории упругости, только для малых относительных деформаций.

В качестве приложений геометрической теории дефектов в последних разделах настоящего обзора рассмотрены два примера. Сначала решена задача о рассеянии фононов на клиновой дислокации. Поскольку в эйковом приближении фононы распространяются вдоль экстремалей, то задача о рассеянии фононов сводится к интегрированию уравнений экстремалей для метрики, описывающей угловую дислокацию. В качестве второго приложения рассмотрена квантово-механическая задача о движении примеси или вакансии внутри цилиндра, осью которого является угловая дислокация. Явно найдены волновые функции и энергетический спектр примеси.

Наличие дефектов приводит к нетривиальной геометрии Римана — Картана. Это значит, что для изучения тех явлений, которые связаны непосредственно с упругой средой, необходимо произвести изменения в соответствующих уравнениях. Например, если распространение фононов в идеальном кристалле описывается волновым уравнением, то учесть наличие дефектов просто. Для этого необходимо плоскую евклидову метрику заменить на нетривиальную метрику, описывающую распределение дефектов. Для описания других квантовых явлений ту же замену нужно провести в уравнении Шрёдингера. К настоящему времени показано, что

наличие дефектов существенно влияет на физические явления. В статьях [24–46] в различных задачах рассматривалось уравнение Шрёдингера при наличии дислокаций. Задачи, связанные с волновым уравнением или уравнением Лапласа, рассматривались в [47–54]. Влияние нетривиальной метрики, связанной с наличием дефектов, исследовалось также в электродинамике [55] и гидродинамике [56]. В статьях [57–59] изучалось рассеяние фононов на прямолинейных параллельных дислокациях.

Другой подход к теории дефектов, основанный на аффинной геометрии с ненулевым тензором неметричности, рассматривался недавно в [60].

2. Упругие деформации

Рассмотрим трехмерную бесконечную упругую среду. Мы предполагаем, что в отсутствие дефектов недеформированная среда инвариантна относительно трансляций и вращений в некоторой системе координат. Тогда в этой системе координат y^i , $i = 1, 2, 3$, среда описывается евклидовой метрикой $\delta_{ij} = \text{diag}(+, +, +)$, а система координат называется декартовой. Таким образом, в недеформированном состоянии мы имеем евклидово пространство R^3 с заданной декартовой системой координат. Мы также предполагаем, что кручение (см. приложение) в среде равно нулю.

Пусть некоторая точка среды имеет в основном состоянии координаты y^i . После деформации данная точка в исходной системе будет иметь координаты (рис. 1)

$$y^i \rightarrow x^i(y) = y^i + u^i(x). \quad (1)$$

В теории упругости приняты обратные обозначения. Обычно пишут $x^i \rightarrow y^i = x^i + u^i(x)$. Это эквивалентные записи, поскольку обе системы координат x^i и y^i покрывают все пространство R^3 . Однако в теории дефектов, которая рассматривается в следующих разделах, ситуация другая. В общем случае только в конечном состоянии упругая среда заполняет все евклидово пространство. Здесь и в дальнейшем поля предполагаются зависящими от координат x , которые являются координатами точек среды после деформации и по предположению покрывают все евклидово пространство R^3 . При наличии дислокаций координаты y^i в общем случае не покрывают все R^3 , так как часть среды может быть удалена или, наоборот, добавлена. Поэтому предпочтительнее система координат, связанная с точками среды после упругой деформации и образования дефектов.

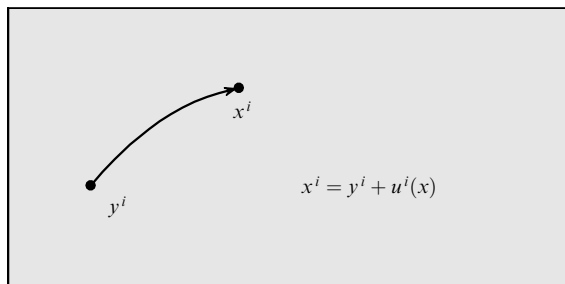


Рис. 1. Упругие деформации.

В линейной теории упругости деформации предполагаются малыми ($\partial_j u^i \ll 1$). Тогда функции $u^i(x) = u^i(y(x))$ представляют собой компоненты векторного поля, которое называется векторным полем смещений и является основной переменной теории упругости.

В отсутствие дефектов мы полагаем поле смещений гладким векторным полем в евклидовом пространстве R^3 . Наличие у поля смещений разрывов и сингулярностей интерпретируется как наличие дефектов в упругой среде.

В дальнейшем мы будем рассматривать только статические деформации, когда поле смещений u^i не зависит от времени. Тогда основные уравнения равновесия упругой среды для малых деформаций имеют вид (см., например, [61])

$$\partial_j \sigma^{ji} + f^i = 0, \quad (2)$$

$$\sigma^{ij} = \lambda \delta^{ij} \epsilon_k^k + 2\mu \epsilon^{ij}, \quad (3)$$

где σ^{ij} — тензор напряжений, который предполагается симметричным. Тензор малых деформаций ϵ_{ij} задается симметризованной частной производной от вектора смещений:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (4)$$

Опускание и подъем латинских индексов проводится с помощью евклидовой метрики δ_{ij} и ее обратной δ^{ij} . Буквы λ и μ обозначают постоянные, характеризующие упругие свойства среды, и называются коэффициентами Ламе. Функции $f^i(x)$ описывают суммарную плотность неупругих сил внутри среды. В дальнейшем мы предполагаем, что такие силы отсутствуют: $f^i(x) = 0$. Уравнение (2) есть закон Ньютона, а (3) представляет собой закон Гука, связывающий напряжения и деформации.

В декартовой системе координат при малых деформациях различие между верхними и нижними индексами пропадает, поскольку подъем и опускание индексов проводится с помощью евклидовой метрики. По этой причине в теории упругости об этом различии часто забывают, что вполне оправдано. Однако при наличии дефектов понятие декартовой системы координат и евклидовой метрики отсутствует, а подъем и опускание индексов производится с помощью римановой метрики. Поэтому мы делаем различие между верхними и нижними индексами, как это принято в дифференциальной геометрии, имея в виду последующий переход к упругим средам с дефектами.

В линейной теории упругости основной задачей является решение уравнений второго порядка для вектора смещений, которое возникает после подстановки (3) в (2), при некоторых граничных условиях. Множество известных решений находится в прекрасном согласии с экспериментом. Поэтому можно сказать, что уравнения (3), (2) имеют хорошую экспериментальную основу.

Посмотрим на упругие деформации с точки зрения дифференциальной геометрии. С математической точки зрения отображение (1) представляет собой диффеоморфизм евклидова пространства R^3 . При этом евклидова метрика δ_{ij} индуцирована отображением $y^i \rightarrow x^i$. Это значит, что в деформированном состоянии метрика в линейном приближении имеет вид

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl} \approx \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i = \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij}, \quad (5)$$

т.е. определяется тензором малых деформаций (4). Заметим, что в линейном приближении $\epsilon_{ij}(x) = \epsilon_{ij}(y)$ и $\partial u_j / \partial x^i = \partial u_j / \partial y^i$.

В римановой геометрии метрика однозначно определяет связность Леви–Чивиты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x)$ (символы Кристоффеля) (П.11). По этим символам можно вычислить тензор кривизны (П.15). Этот тензор тождественно равен нулю: $\tilde{R}_{ijk}^l(x) = 0$, так как кривизна евклидова пространства равна нулю, а отображение $y^i \rightarrow x^i$ — диффеоморфизм. По этой же причине равен нулю и тензор кручения. Таким образом, упругая деформация среды соответствует тривиальной геометрии Римана – Картана, поскольку тензоры кривизны и кручения равны нулю.

Физическая интерпретация метрики (5) следующая. Внешний наблюдатель фиксирует декартову систему координат, соответствующую основному недеформированному состоянию среды. Затем происходит деформация среды, и наблюдатель обнаруживает, что в этой системе координат метрика становится нетривиальной. Если предположить, что упругие возмущения в среде (фононы) распространяются вдоль экстремалей (линий наименьшей длины), то в деформированном состоянии их траектории будут определяться уравнениями (П.14). Поскольку символы Кристоффеля нетривиальны ($\tilde{\Gamma}_{jk}^i \neq 0$), то траекториями фононов уже не будут прямые линии. В этом смысле метрика (5) наблюдаема. Здесь проявляется существенная роль декартовой системы координат y^i , определяемой недеформированным состоянием, с которой связан процесс измерения.

Предположим, что некоторому состоянию упругой среды без дефектов соответствует метрика $g_{ij}(x)$, заданная в декартовой системе координат. В таком случае вектор смещения определяется системой уравнений (5), условием интегрируемости которой является равенство нулю тензора кривизны, что следует из теоремы 2, сформулированной в приложении. В линейном приближении эти условия известны в теории упругости как условия интегрируемости Сен-Венана.

Сделаем замечание, важное для дальнейшего рассмотрения. При надлежащих граничных условиях решение уравнений теории упругости (2), (3) единственно. С геометрической точки зрения это означает, что теория упругости фиксирует диффеоморфизмы. Данный факт будет использован в геометрической теории дефектов. Уравнения нелинейной теории упругости, переписанные для метрики или репера, будут использованы для фиксирования системы координат.

3. Дислокации

Начнем с описания линейных дислокаций в упругой среде (см., например, [61, 62]). Простейшие и наиболее распространенные примеры прямолинейных дислокаций изображены на рис. 2. Разрежем среду по полуплоскости $x^2 = 0, x^1 > 0$. Сдвинем верхнюю часть среды, расположенную над разрезом $x^2 > 0, x^1 > 0$, на вектор \mathbf{b} по направлению к оси дислокации x^3 и склеим берега разреза. Вектор \mathbf{b} называется вектором Бюргерса. В общем случае вектор Бюргерса может быть не постоянен на разрезе. Для краевой дислокации он меняется от нуля до некоторого постоянного значения \mathbf{b} по мере удаления от оси дислокации. После склейки среда придет в равновесное состояние, которое называется краевой дислокацией, изображенной на рис. 2а. Если вектор

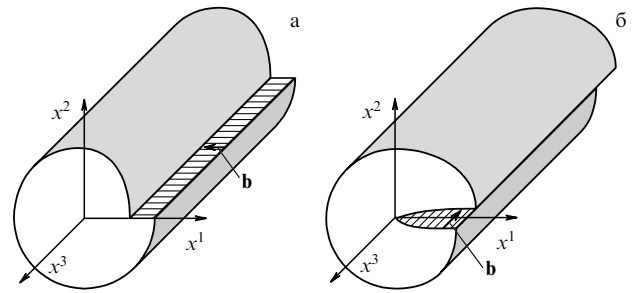


Рис. 2. Прямолинейные дислокации. (а) Краевая дислокация. Вектор Бюргерса \mathbf{b} перпендикулярен оси дислокации. (б) Винтовая дислокация. Вектор Бюргерса \mathbf{b} параллелен оси дислокации.

Бюргерса параллелен линии дислокации, то она называется винтовой (рис. 2б).

Одну и ту же дислокацию можно получить разными способами. Например, если в рассмотренных примерах вектор Бюргерса перпендикулярен плоскости разреза и направлен от него, то перед склейкой образовавшуюся полость необходимо заполнить веществом. В результате, как нетрудно представить, также возникает краевая дислокация, только повернутая вокруг оси x^3 на угол $\pi/2$. Этот пример показывает, что характеристикой дислокации является не поверхность разреза, а линия дислокации и вектор Бюргерса.

С топологической точки зрения среда, содержащая дислокации, которых может быть несколько или даже бесконечное число, представляет собой евклидово пространство R^3 . В отличие от упругих деформаций при наличии дислокаций вектор смещений перестает быть гладкой функцией, так как имеются поверхности разреза. В то же время мы предполагаем, что частные производные от вектора смещений $\partial_j u^i$ (тензор дисторсии) являются гладкими функциями на поверхности разреза. С физической точки зрения такое предположение оправдано тем, что эти производные определяют тензор деформаций (4). В свою очередь частные производные от тензора деформаций должны существовать и быть непрерывными функциями в равновесном состоянии везде, за исключением, может быть, оси дислокации, так как в противном случае уравнение равновесия (2) не имеет смысла. Поскольку тензор деформаций определяет индуцированную метрику (5), то мы предполагаем, что метрика и репер в R^3 , за исключением, возможно, осей дислокаций, являются гладкими функциями.

Основная идея геометрического подхода сводится к следующему. Для описания отдельных дислокаций в рамках теории упругости необходимо решить уравнения для вектора смещений с определенными граничными условиями на разрезах. Для небольшого числа дислокаций это возможно. Однако с увеличением количества дислокаций граничные условия настолько усложняются, что решение задачи представляется нереальным. Кроме того, одну и ту же дислокацию можно создать с помощью различных разрезов, что приводит к неоднозначности для векторного поля смещений. Другой недостаток этого подхода — его непригодность для описания непрерывного распределения дислокаций, так как в этом случае векторное поле смещений просто не существует, поскольку должно иметь разрывы в каждой точке. В геометрическом подходе основная переменная — репер,

который, по предположению, является гладкой функцией везде, за исключением, возможно, осей дислокаций. Для репера постулируются новые уравнения (см. раздел 5). В геометрическом подходе переход от конечного числа дислокаций к их непрерывному распределению осуществляется просто и естественно. При этом происходит сглаживание сингулярностей на осях дислокаций аналогично тому, как сглаживается распределение массы для точечных частиц при переходе к непрерывной среде.

Перейдем к построению формализма геометрического подхода. Поскольку при наличии дефектов в равновесном состоянии в общем случае у нас нет никакой симметрии, то отсутствует понятие выделенной декартовой системы координат. Поэтому рассмотрим произвольную систему координат x^μ , $\mu = 1, 2, 3$, в R^3 . Для нумерации координат мы используем теперь греческие буквы, так как допускаем произвольные преобразования координат. Тогда вектор Бюргерса можно выразить в виде интеграла от вектора смещения:

$$\oint_C dx^\mu \partial_\mu u^i(x) = - \oint_C dx^\mu \partial_\mu y^i(x) = -b^i, \quad (6)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий ось дислокации (рис. 3).

Этот интеграл инвариантен относительно произвольных преобразований координат $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$ и ковариантен относительно глобальных $SO(3)$ -вращений y^i . Здесь компоненты векторного поля $u^i(x)$ рассматриваются относительно ортонормального базиса касательного пространства $u = u^i e_i$. Если бы мы рассматривали компоненты векторного поля смещений относительно координатного базиса $u = u^\mu \partial_\mu$, то инвариантность интеграла (6) относительно общих преобразований координат была бы нарушена.

В геометрическом подходе вместо частных производных от векторного поля смещений $\partial_\mu u^i$ мы вводим новую независимую переменную — репер

$$e_\mu^i(x) = \begin{cases} \partial_\mu y^i & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu y^i & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (7)$$

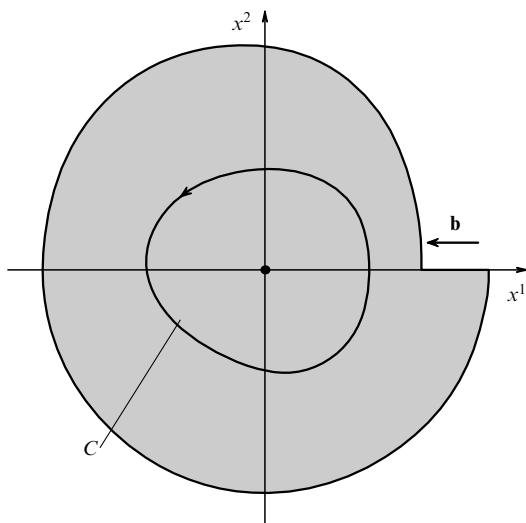


Рис. 3. Сечение среды с клиновой дислокацией. C — контур интегрирования для вектора Бюргерса b .

По построению репер является гладкой функцией на разрезе. Отметим, что если бы мы просто определили репер как частную производную $\partial_\mu y^i$, то у репера была бы δ -образная особенность на разрезе, так как функции $y^i(x)$ испытывают скачок. Тогда вектор Бюргерса можно представить в виде интеграла по поверхности S , натянутой на контур C :

$$\oint_C dx^\mu e_\mu^i = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i) = b^i, \quad (8)$$

где $dx^\mu \wedge dx^\nu$ — элемент площади поверхности. Из определения репера (7) следует, что подынтегральное выражение равно нулю всюду, за исключением оси дислокации. Для краевой дислокации с постоянным вектором Бюргерса подынтегральное выражение имеет δ -образную особенность в начале координат. Критерием наличия дислокации является нарушение условия интегрируемости системы уравнений $\partial_\mu y^i = e_\mu^i$:

$$\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i \neq 0. \quad (9)$$

Если дислокаций нет, то функции $y^i(x)$ существуют и определяют переход к декартовой системе координат.

В геометрической теории дефектов поле e_μ^i отождествляется с репером. Далее, сравним подынтегральное выражение в (8) с выражением для тензора кручения в переменных Картана (П.21). Они отличаются только слагаемыми, содержащими $SO(3)$ -связность. Это дает основание ввести следующий постулат. В геометрической теории дефектов вектор Бюргерса, соответствующий некоторой поверхности S , определяется интегралом от тензора кручения:

$$b^i = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^i.$$

Это определение инвариантно относительно общих преобразований координат x^μ и ковариантно относительно глобальных вращений. Таким образом, в геометрической теории дефектов тензор кручения имеет прямой физический смысл: он равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

Физический смысл $SO(3)$ -связности обсуждается в разделе 4, а сейчас мы покажем, каким образом данное определение сводится к выражению для вектора Бюргерса (8), полученному в рамках теории упругости. Если тензор кривизны $SO(3)$ -связности равен нулю, то по теореме 3 (см. приложение) связность локально тривиальна и существует такое $SO(3)$ -вращение, что $\omega_{\mu i}^j = 0$. В этом случае мы возвращаемся к выражению (8).

Если $SO(3)$ -связность равна нулю и репер является гладкой функцией, то с каждым контуром можно однозначно связать вектор Бюргерса. При этом его можно выразить как поверхностный интеграл от тензора кручения. Поверхностный интеграл зависит только от граничного контура, но не от поверхности в силу теоремы Стокса.

Мы показали, что наличие линейных дислокаций приводит к нетривиальному кручению. В геометрической теории дефектов равенство нулю тензора кручения $T_{\mu\nu}^i = 0$ естественно рассматривать как критерий отсутствия дислокаций. Тогда под термин дислокация попадают не только линейные дислокации, но и, по сути дела,

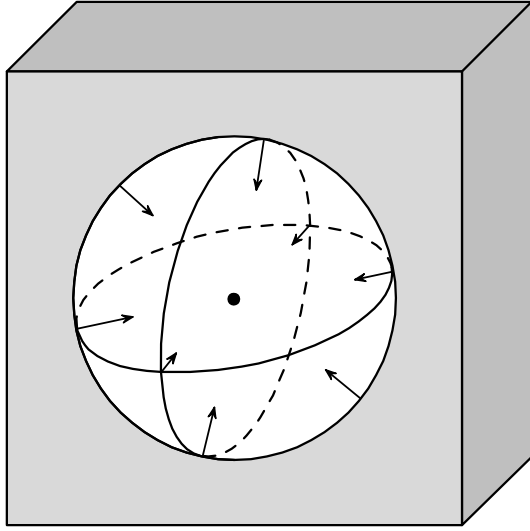


Рис. 4. Точечный дефект — вакансия; возникает, когда из среды вырезается шар и граничная сфера стягивается в точку.

произвольные дефекты в упругой среде. Например, точечные дефекты — вакансии и примеси также являются дислокациями. В первом случае из евклидова пространства R^3 вырезается шар вещества и граничная сфера стягивается в точку (рис. 4). В случае примеси точка евклидова пространства раздувается до сферы и образовавшаяся шаровидная полость заполняется веществом. Точечные дефекты характеризуются массой удаленного или добавленного вещества, которая также определяется репером [22]:

$$M = \rho_0 \iiint_{R^3} d^3x (\det e_\mu^i - \det \tilde{e}_\mu^i), \quad \tilde{e}_\mu^i = \partial_\mu y^i, \quad (10)$$

где $y^i(x)$ — функции перехода к декартовой системе координат в R^3 , ρ_0 — плотность массы среды, которую мы предполагаем постоянной. Масса определяется разностью двух интегралов, каждый из которых по отдельности расходится. Первый интеграл равен объему среды с дефектами, а второй интеграл — объему евклидова пространства. Тензор кручения для вакансии и примеси равен нулю всюду, за исключением одной точки, где он имеет δ -образную особенность. Для точечных дефектов понятие вектора Бюргерса отсутствует.

Согласно данному определению масса примеси положительна, так как вещество добавляется к среде, а масса вакансии отрицательна, поскольку часть вещества удалена. Отрицательный знак массы вызывает серьезные трудности при физической интерпретации решений уравнений движения или уравнения Шрёдингера. Поэтому сделаем следующее замечание. Строго говоря, интеграл (10) следовало бы назвать "голой" массой, поскольку это выражение не учитывает упругие напряжения, возникающие вокруг точечной дислокации. Эффективная масса такого дефекта должна содержать, по крайней мере, два вклада: голую массу и вклад от свободной энергии возникающих упругих напряжений. Вопрос о знаке эффективной массы вакансии в настоящее время не решен и требует самостоятельного исследования.

В трехмерном пространстве помимо точечных и линейных дислокаций существуют также поверхностные

дефекты. В геометрическом подходе все они относятся к дислокациям, так как связаны с нетривиальным тензором кручения.

4. Дисклинации

В предыдущем разделе мы связали дислокации в упругой среде с тензором кручения. При этом была введена $SO(3)$ -связность. Здесь мы покажем, что кривизна $SO(3)$ -связности определяет поверхностную плотность вектора Франка, характеризующего другие хорошо известные дефекты — дисклинации в спиновой структуре среды [61].

Пусть в каждой точке среды задано единичное векторное поле $n^i(x)$ ($n^i n_i = 1$). Например, для ферромагнетиков n^i имеет смысл магнитного момента, связанного с каждой точкой среды (рис. 5а). Для нематических жидких кристаллов единичное векторное поле n^i вместе с отношением эквивалентности $n^i \sim -n^i$ описывает поле директора (рис. 5б).

Зафиксируем некоторое направление в среде n_0^i . Тогда поле $n^i(x)$ в точке x может быть однозначно задано полем $\omega^{ij}(x) = -\omega^{ji}(x)$, принимающим значения в алгебре вращений $\mathfrak{so}(3)$ (угол вращения):

$$n^i = n_0^j S_j^i(\omega),$$

где $S_j^i \in SO(3)$ — матрица вращений, соответствующая элементу алгебры ω^{ij} . Здесь мы используем следующую параметризацию группы вращений элементами ее алгебры (см., например, [24]):

$$S_i^j = (e^{(\omega \epsilon)})_i^j = \cos \omega \delta_i^j + \frac{(\omega \epsilon)_i^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (1 - \cos \omega) \in SO(3), \quad (11)$$

где $(\omega \epsilon)_i^j = \omega^k \epsilon_{ki}^j$ и $\omega = \sqrt{\omega^i \omega_i}$ — модуль вектора ω^i . Псевдовектор $\omega^k = \omega_{ij} \epsilon^{ijk}/2$, где ϵ^{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\epsilon^{123} = 1$, направлен вдоль оси вращения, а его длина равна углу поворота. Поле $\omega^{ij}(x)$ будем называть спиновой структурой вещества.

Если среда обладает спиновой структурой, то в ней возможны дефекты, которые называются дисклинациями. Для линейных дисклинаций, параллельных оси x^3 , векторное поле n лежит в перпендикулярной плоскости x^1, x^2 . Простейшие примеры линейных дисклинаций показаны на рис. 6. Каждая линейная дисклинация характеризуется вектором Франка

$$\Theta_i = \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}, \quad (12)$$

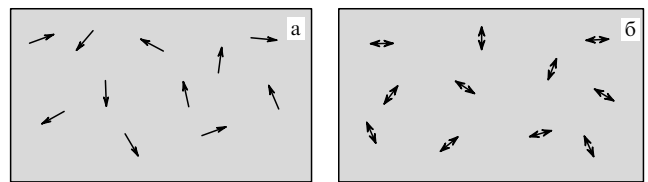


Рис. 5. Примеры сред со спиновой структурой: (а) ферромагнетик, (б) жидкий кристалл.

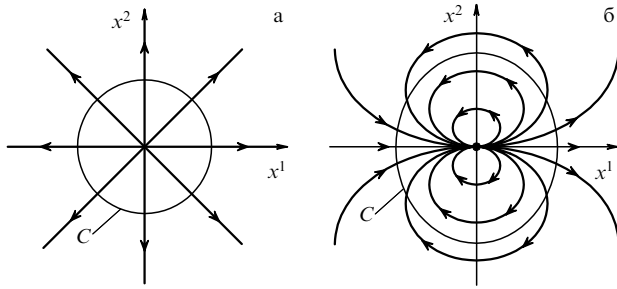


Рис. 6. Распределение векторного поля в плоскости x^1, x^2 для линейных дисклиний, параллельных оси x^3 , при $|\Theta| = 2\pi$ (а) и $|\Theta| = 4\pi$ (б).

где

$$\Omega^{ij} = \oint_C dx^\mu \partial_\mu \omega^{ij} \quad (12)$$

и интеграл берется по замкнутому контуру C , охватывающему ось дисклинации. Длина вектора Франка равна полному углу поворота поля n^i при обходе вокруг дисклинации.

Векторное поле n^i задает отображение евклидова пространства в сферу $n: R^3 \rightarrow S^2$. Для линейных дисклиний, параллельных оси x^3 , это отображение ограничено до отображения плоскости R^2 в окружность S^1 . Ясно, что в этом случае полный угол поворота должен быть кратен 2π .

Для нематических жидких кристаллов у нас есть отношение эквивалентности $n^i \sim -n^i$. Поэтому для линейных дисклиний, параллельных оси x^3 , поле директора задает отображение плоскости в проективную прямую $n: R^2 \rightarrow RP^1$. В этом случае длина вектора Франка должна быть кратна π . Соответствующие примеры дисклиний приведены на рис. 7.

Как и в случае поля смещений для дислокаций, поле $\omega^{ij}(x)$, принимающее значения в алгебре $\mathfrak{so}(3)$, при наличии дисклиний не является непрерывной функцией в R^3 . Сделаем разрез в R^3 , ограниченный осью дисклинации. Тогда можно считать поле $\omega^{ij}(x)$ гладким во всем пространстве, за исключением разреза. Предположим, что все частные производные от $\omega^{ij}(x)$ имеют одинаковый предел при приближении к разрезу с обеих сторон. Тогда определим новое поле

$$\omega_\mu^{ij} = \begin{cases} \partial_\mu \omega^{ij} & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu \omega^{ij} & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (14)$$

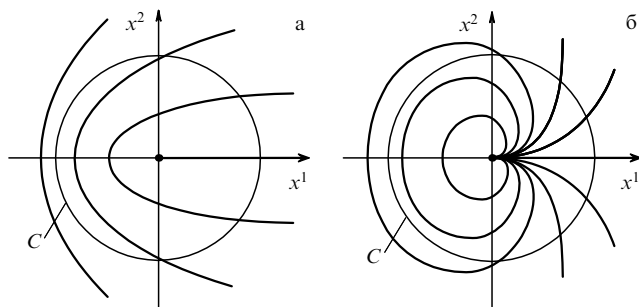


Рис. 7. Распределение поля директора в плоскости x^1, x^2 для линейных дисклиний, параллельных оси x^3 , при $|\Theta| = \pi$ (а) и $|\Theta| = 3\pi$ (б).

По построению функции ω_μ^{ij} являются гладкими везде, за исключением, возможно, оси дисклинации. Тогда вектор Франка можно представить поверхностным интегралом:

$$\Omega^{ij} = \oint_C dx^\mu \omega_\mu^{ij} = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij}), \quad (15)$$

где S — произвольная поверхность с границей C . Если поле ω_μ^{ij} задано, то условием интегрируемости системы уравнений $\partial_\mu \omega_\nu^{ij} = \omega_\mu^{ij}$ является равенство

$$\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij} = 0. \quad (16)$$

Это нековариантное равенство дает критерий отсутствия дисклиний.

В геометрической теории дефектов мы отождествляем поле ω_μ^{ij} с $SO(3)$ -связностью. В выражении для кривизны (П.22) первые два слагаемых совпадают с (16), поэтому мы постулируем ковариантный критерий отсутствия дисклиний в виде равенства нулю тензора кривизны $SO(3)$ -связности:

$$R_{\mu\nu}^{ij} = 0.$$

Одновременно мы даем физическую интерпретацию тензору кривизны как поверхностной плотности вектора Франка:

$$\Omega^{ij} = \iint dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}^{ij}. \quad (17)$$

Это определение приводит к предыдущему выражению для вектора Франка (15) в случае, когда вращение вектора n происходит в фиксированной плоскости. В этом случае вращения ограничены подгруппой $SO(2) \subset SO(3)$. Поскольку группа вращений плоскости $SO(2)$ является абелевой, то квадратичные слагаемые в выражении для кривизны (П.22) исчезают и мы получаем прежнее выражение для вектора Франка (15).

Таким образом, мы описали среду с дислокациями (дефекты упругой среды) и дисклиниями (дефекты спиновой структуры) в рамках геометрии Римана — Картана. При этом мы отождествили тензор кручения с поверхностной плотностью дислокаций, а тензор кривизны — с поверхностной плотностью дисклиний. Соответствие между физическими и геометрическими объектами подытожено в таблице.

Такая же физическая интерпретация кручения и кривизны обсуждалась в [63]. Там же рассмотрено несколько возможных видов функционалов для свободной энергии. В следующем разделе предложено новое выражение для свободной энергии.

Таблица. Соответствие между физическими и геометрическими объектами в геометрической теории дефектов

Наличие дефектов	$R_{\mu\nu}^{ij}$	$T_{\mu\nu}^i$
Упругие деформации	0	0
Дислокации	0	$\neq 0$
Дискликации	$\neq 0$	$= 0$
Дислокации и дискликации	$\neq 0$	$\neq 0$

5. Свободная энергия

До сих пор мы обсуждали только соответствие между физическими и геометрическими объектами. Для завершения построения геометрической теории дефектов необходимо постулировать уравнения равновесия, описывающие статическое распределение дефектов в среде. Основными и независимыми объектами в геометрическом подходе являются репер e_μ^i и $SO(3)$ -связность ω_μ^{ij} . В отличие от предыдущих геометрических подходов мы полностью отказываемся от поля смещений u^i и спиновой структуры ω^{ij} как полей, входящих в систему уравнений равновесия. В общем случае непрерывного распределения дефектов их просто не существует. Тем не менее на определенном этапе и при определенных условиях их можно восстановить, но об этом пойдет речь в следующем разделе.

Выражение для свободной энергии было получено в [22]. Мы предполагаем, что уравнения равновесия должны быть ковариантны относительно общих преобразований координат и локальных вращений, не выше второго порядка и следовать из вариационного принципа. Тогда выражение для свободной энергии, приводящее к уравнениям равновесия, должно быть равно интегралу по объему от скалярной функции (лагранжиана), квадратичной по тензору кручения и кривизны. В трехмерном пространстве существует три независимых инварианта, квадратичных по тензору кручения, и три независимых инварианта, квадратичных по тензору кривизны. Сюда же можно добавить скалярную кривизну и "космологическую" постоянную Λ . Таким образом мы получаем восьмипараметрический лагранжиан общего вида

$$\frac{1}{e} L = -\kappa R + \frac{1}{4} T_{ijk}(\beta_1 T^{ijk} + \beta_2 T^{kij} + \beta_3 T^j \delta^{ik}) + \frac{1}{4} R_{ijkl}(\gamma_1 R^{ijkl} + \gamma_2 R^{klij} + \gamma_3 R^{ik} \delta^{jl}) - \Lambda, \quad e = \det e_\mu^i, \quad (18)$$

где $\kappa, \beta_{1,2,3}$ и $\gamma_{1,2,3}$ — некоторые постоянные, введен след тензора кручения $T_j = T_{ij}^i$, тензор Риччи $R_{ik} = R_{ijk}^j$ и скалярная кривизна $R = R_i^i$. Здесь и в дальнейшем переход от греческих индексов к латинским и наоборот всегда осуществляется с помощью репера и его обратного. Например,

$$R_{ijkl} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} e_\mu^i e_\nu^j e_\kappa^k e_\lambda^l, \quad T_{ijk} = T_{\mu\nu\kappa} e_\mu^i e_\nu^j e_\kappa^k.$$

Спецификой трех измерений является то обстоятельство, что полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется своим тензором Риччи (П.25) и имеет три неприводимые компоненты. Поэтому лагранжиан содержит только три независимых инварианта, квадратичных по тензору кривизны. Лагранжиан Гильберта–Эйнштейна R , который также приводит к уравнениям второго порядка, нет никакой необходимости добавлять к свободной энергии (18) ввиду тождества (П.26).

Таким образом, наиболее общий лагранжиан зависит от восьми постоянных и приводит к очень сложным уравнениям равновесия. В настоящее время мы не знаем, какие именно значения постоянных описывают те или иные среды. Поэтому, чтобы упростить ситуацию, сделаем физически разумные предположения. А именно, мы потребуем, чтобы уравнения равновесия допускали следующие три типа решений.

1. Существуют решения, описывающие среду только с дислокациями,

$$R_{\mu\nu}^{ij} = 0, \quad T_{\mu\nu}^i \neq 0.$$

2. Существуют решения, описывающие среду только с дисклинациями,

$$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0, \quad T_{\mu\nu}^i = 0.$$

3. Существуют решения, описывающие среду без дислокаций и дисклинаций,

$$R_{\mu\nu}^{ij} = 0, \quad T_{\mu\nu}^i = 0.$$

Оказывается, что эти простые предположения уменьшают число независимых параметров в выражении для свободной энергии с восьми до двух. Докажем это утверждение. Лагранжиан (18) приводит к следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \frac{\delta L}{\delta e_\mu^i} = & \kappa(R e_\mu^i - 2R_i^\mu) + \\ & + \beta_1 \left(\nabla_\nu T^{\nu\mu}_i - \frac{1}{4} T_{jkl} T^{jkl} e_\mu^i + T^{\mu jk} T_{ijk} \right) + \\ & + \beta_2 \left(-\frac{1}{2} \nabla_\nu (T_i^{\mu\nu} - T_i^{\nu\mu}) - \frac{1}{4} T_{jkl} T^{ljk} e_\mu^i - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} T^{j\mu k} T_{kij} + \frac{1}{2} T^{j\mu k} T_{kij} \right) + \\ & + \beta_3 \left(-\frac{1}{2} \nabla_\nu (T^\nu e_\mu^i - T^\mu e_\nu^i) - \frac{1}{4} T_j T^j e_\mu^i + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} T^\mu T_i + \frac{1}{2} T^j T_{ij} \right) + \\ & + \gamma_1 \left(-\frac{1}{4} R_{jklm} R^{jklm} e_\mu^i + R^{\mu jkl} R_{ijkl} \right) + \\ & + \gamma_2 \left(-\frac{1}{4} R_{jklm} R^{lmjk} e_\mu^i + R^{kl\mu j} R_{ijkl} \right) + \\ & + \gamma_3 \left(-\frac{1}{4} R_{jk} R^{jk} e_\mu^i + \frac{1}{2} R^{\mu j} R_{ij} + \frac{1}{2} R^{jk} R_{jik} \right) + \\ & + \Lambda e_\mu^i = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \frac{\delta L}{\delta \omega_\mu^{ij}} = & \kappa \left(\frac{1}{2} T_{ij}^\mu + T_i e_j^\mu \right) + \beta_1 \frac{1}{2} T_{ji}^\mu + \\ & + \beta_2 \frac{1}{4} (T_i^\mu{}_j - T_j^\mu{}_i) + \\ & + \beta_3 \frac{1}{4} T_j e_i^\mu + \gamma_1 \frac{1}{2} \nabla_\nu R^{\nu\mu}_{ij} + \gamma_2 \frac{1}{2} \nabla_\nu R_{ij}^{\nu\mu} + \\ & + \gamma_3 \frac{1}{4} \nabla_\nu (R^\nu{}_i e_j^\mu - R^\mu{}_i e_\nu^j) - (i \leftrightarrow j) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где ковариантная производная действует с $SO(3)$ -связностью на латинские индексы и с символами Кристоффеля — на греческие. Например,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\rho\mu}_i &= \partial_\nu T^{\rho\mu}_i + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho T^{\sigma\mu}_i + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu T^{\rho\sigma}_i - \omega_{\nu i}^j T^{\rho\mu}_j, \\ \nabla_\nu R^{\rho\mu}_{ij} &= \partial_\nu R^{\rho\mu}_{ij} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho R^{\sigma\mu}_{ij} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu R^{\rho\sigma}_{ij} - \\ & - \omega_{\nu i}^k R^{\rho\mu}_{kj} - \omega_{\nu j}^k R^{\rho\mu}_{ik}. \end{aligned}$$

Первое требование к классу решений уравнений равновесия состоит в том, чтобы они допускали решения, описывающие наличие в среде только дислокаций. Это означает наличие решений с нулевым тензором кривизны, что соответствует отсутствию дисклинаций.

Подстановка условия $R_{\mu\nu}{}^{ij} = 0$ в уравнение (20) для $SO(3)$ -связности дает

$$\begin{aligned}(12k + 2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3) T_i &= 0, \\ (\kappa - \beta_1 - \beta_2) T^* &= 0, \\ (4\kappa + 2\beta_1 - \beta_2) W_{ijk} &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Здесь T_i , T^* и W_{ijk} — неприводимые компоненты тензора кручения

$$T_{ijk} = W_{ijk} + T^* \epsilon_{ijk} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} T_j - \delta_{jk} T_i),$$

где

$$\begin{aligned}T^* &= \frac{1}{6} T_{ijk} \epsilon^{ijk}, \quad T_j = T_{ij}{}^i, \\ W_{ijk} &= T_{ijk} - T^* \epsilon_{ijk} - \frac{1}{2} (\delta_{ik} T_j - \delta_{jk} T_i), \\ W_{ijk} \epsilon^{ijk} &= 0, \quad W_{ij}{}^i = 0.\end{aligned}$$

В общем случае при наличии дислокаций все неприводимые компоненты тензора кручения отличны от нуля (T_i , T^* , $W_{ijk} \neq 0$) и уравнения (21) имеют единственное решение

$$\beta_1 = -\kappa, \quad \beta_2 = 2\kappa, \quad \beta_3 = 4\kappa. \quad (22)$$

При этих константах связи первые четыре слагаемые в лагранжиане (18) с точностью до дивергенции равны лагранжиану Гильберта–Эйнштейна $\kappa \tilde{R}(e)$ как следствие тождества (П.26). При этом уравнение (19) сводится к уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} - \frac{\Lambda}{2\kappa} g_{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Таким образом, первое условие выполнено.

Согласно второму условию уравнения равновесия должны допускать решения с нулевым кручением $T_{\mu\nu}{}^i = 0$. В этом случае тензор кривизны обладает дополнительной симметрией $R_{ijkl} = R_{klij}$ и уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned}\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4} \gamma_3\right) \nabla_\nu (R^{S\nu}{}_{i\mu} e^\mu{}_j - R^{S\mu}{}_{i\mu} e^\nu{}_j - R^{S\nu}{}_{j\mu} e^\mu{}_i + R^{S\mu}{}_{j\mu} e^\nu{}_i) + \\ + \frac{1}{6} (\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3) (e^\nu{}_i e^\mu{}_j - e^\mu{}_i e^\nu{}_j) \nabla_\nu R = 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Здесь мы разложили тензор Риччи на неприводимые компоненты:

$$R_{ij} = R^S{}_{ij} + R^A{}_{ij} + \frac{1}{3} R \delta_{ij},$$

где

$$R^S{}_{ij} = R^S{}_{ji}, \quad R^S{}_i{}^i = 0, \quad R^A{}_{ij} = -R^A{}_{ji}.$$

Напомним, что при нулевом кручении тензор Риччи симметричен: $R^A{}_{ij} = 0$. Свертка уравнения (24) с $e_\mu{}^j$ приводит к уравнению

$$\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4} \gamma_3\right) \nabla_\nu R^{S\nu}{}_\mu + \frac{1}{3} (\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3) \nabla_\mu R = 0.$$

В общем случае отличной от нуля кривизны ковариантные производные $\nabla_\nu R^{S\nu}{}_\mu$ и $\nabla_\mu R$ отличны от нуля и независимы. Поэтому мы получаем два уравнения на константы связи

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4} \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3 = 0,$$

которые имеют единственное решение

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_3 = 0. \quad (25)$$

В этом случае уравнение (19) для репера при ненулевом кручении также сводится к уравнениям Эйнштейна (23).

Последнее требование наличия решений с нулевой кривизной и кручением выполняется только при нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$.

Таким образом, простые и физически осмысленные требования определяют двухпараметрический лагранжиан [22]

$$\frac{1}{e} L = -\kappa \tilde{R} + 2\gamma R^A{}_{ij} R^{Aij}, \quad (26)$$

который равен сумме лагранжиана Гильберта–Эйнштейна для репера и квадрата антисимметричной компоненты тензора Риччи. Отметим, что $\tilde{R}(e)$ и $R^A{}_{ij}(e, \omega)$ построены для различных метрических связностей.

Другие квадратичные лагранжианы рассматривались, например, в [9, 63]. Отметим, что помимо репера они содержат также и вектор смещения в качестве независимой переменной.

Выражение (26) в геометрической теории дефектов определяет плотность свободной энергии и приводит к уравнениям равновесия (уравнения Эйлера–Лагранжа). В нашем геометрическом подходе вектор смещения и спиновая структура вообще не входят в выражение для свободной энергии (26).

6. Фиксирование калибровки

В геометрическом подходе переменными являются только репер $e_\mu{}^i$ и $SO(3)$ -связность $\omega_{\mu}{}^j$. Поле смещений u^i и спиновую структуру $\omega_i{}^j$ можно ввести лишь в тех областях среды, где дефекты отсутствуют. Действительно, из условия отсутствия дисклинаций $R_{\mu\nu}{}^i{}^j = 0$ следует, что $SO(3)$ -связность является чистой калибровкой (П.23), т.е. существует спиновая структура $\omega_i{}^j$. Если вдобавок отсутствуют дислокации ($T_{\mu\nu}{}^i = 0$), то существует поле смещений, такое, что репер равен его частным производным (П.24). В этом и только в этом случае можно ввести поле смещений и спиновую структуру. Ниже мы покажем, что это можно сделать таким образом, чтобы были выполнены уравнения нелинейной теории упругости и уравнения главного кирального $SO(3)$ -поля.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для свободной энергии (26) ковариантны относительно общих преобразований координат в пространстве R^3 и локальных $SO(3)$ -вращений. Это значит, что любое решение уравнений равновесия определено с точностью до диффеоморфизмов и локальных вращений. Чтобы геометрическая теория дефектов имела предсказательную силу, необходимо зафиксировать систему координат (выбрать калибровку, как принято говорить в теории калибровочных полей). Это позволит из каждого класса эквивалентных

решений выбрать по одному представителю. После этого мы скажем, что данное решение уравнений Эйлера – Лагранжа описывает распределение дефектов в среде в лабораторной системе координат.

Начнем с фиксирования диффеоморфизмов. Для этой цели выберем упругую калибровку, которая была предложена в [23]. Данный вопрос имеет принципиальное значение, и мы остановимся на нем подробно.

Из уравнений линейной теории упругости (2), (3) при $f^i = 0$ следует уравнение второго порядка на вектор смещения

$$(1 - 2\sigma)\Delta u_i + \partial_i \partial_j u^j = 0, \quad (27)$$

где

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

— коэффициент Пуассона ($-1 \leq \sigma \leq 1/2$), Δ — оператор Лапласа. Его можно переписать в терминах индуцированной метрики (5), для которой получим уравнение первого порядка. Это уравнение мы и выберем в качестве калибровочного условия, фиксирующего диффеоморфизмы. Отметим, что калибровочное условие не определено однозначно, так как индуцированная метрика нелинейна по вектору смещений, и различные уравнения для метрики могут иметь одно и то же линейное приближение. Приведем два возможных выбора:

$$g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\rho g_{\mu\nu} = 0, \quad (28)$$

$$\overset{\circ}{g}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_\rho g^T = 0, \quad (29)$$

где введено обозначение для следа метрики $g^T = \overset{\circ}{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$. Калибровочные условия (28), (29) понимаются следующим образом. Метрика $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ — евклидова метрика, записанная в произвольной системе координат, например в цилиндрической или сферической. Ковариантная производная $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$ построена по символам Кристоффеля, соответствующим метрике $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$, и, следовательно, $\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{g}_{\nu\rho} = 0$. Метрика $g_{\mu\nu}$ — это метрика, описывающая дислокации (точное решение уравнений равновесия для свободной энергии (26)). Калибровочные условия отличаются тем, что в первом случае производится свертка с метрикой дислокации $g^{\mu\nu}$, а во втором случае — с евклидовой метрикой $\overset{\circ}{g}^{\mu\nu}$, что не меняет линейного приближения. Оба калибровочных условия в линейном приближении по вектору смещений (5) приводят к уравнению (27). Проверку проще всего провести в декартовой системе координат.

С геометрической точки зрения мы имеем следующее. Среда с дислокациями диффеоморфна евклидову пространству R^3 , снабженному двумя метриками $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Метрика $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ является плоской евклидовой метрикой, записанной в произвольной системе координат. Метрика $g_{\mu\nu}$ не является плоской и описывает распределение дислокаций в той же системе координат. На самом деле метрика $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ нужна только для фиксирования системы координат, в которой измеряется метрика $g_{\mu\nu}$.

Если решение уравнений равновесия удовлетворяет одному из условий (28), (29), записанному, например, в

цилиндрической системе координат, то будем говорить, что найдено решение в цилиндрической системе координат. При этом мы предполагаем, что распределение дислокаций упругой среды в лабораторной цилиндрической системе координат описывается именно этим решением. Аналогично можно искать решения в декартовой, сферической или другой системе координат.

Калибровочные условия можно записать и для репера e_μ^i , который определен уравнением (П.16). Здесь возникает дополнительный произвол, так как репер определен с точностью до локальных вращений. Эта инвариантность приводит к тому, что для репера возможны различные линейные приближения по вектору смещений. Рассмотрим две возможности в декартовой системе координат:

$$e_{\mu i} \approx \delta_{\mu i} - \partial_\mu u_i, \quad (30)$$

$$e_{\mu i} \approx \delta_{\mu i} - \frac{1}{2} (\partial_\mu u_i + \partial_i u_\mu), \quad (31)$$

где индекс опущен с помощью символа Кронекера. Этим возможностям и условию (29) соответствует два калибровочных условия на репер:

$$\overset{\circ}{g}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu e_{\nu i} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \overset{\circ}{e}^\mu_i \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^T = 0, \quad (32)$$

$$\overset{\circ}{g}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu e_{\nu i} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \overset{\circ}{e}^\mu_i \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^T = 0, \quad (33)$$

где $e^T = \overset{\circ}{e}^\mu_i e_\mu^i$. Эти условия отличаются коэффициентом перед вторым слагаемым. Отметим, что в криволинейной системе координат в ковариантную производную $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$ необходимо включить также плоскую $SO(3)$ -связность, действующую на индексы i, j . Можно выписать также и другие возможные калибровочные условия, которые имеют то же линейное приближение. Вопрос о правильном выборе калибровки в настоящее время открыт и выходит за рамки настоящего обзора. На данном этапе мы хотим только продемонстрировать, что систему координат необходимо зафиксировать и что калибровочное условие зависит от коэффициента Пуассона, который является экспериментально наблюдаемой величиной.

Калибровочные условия (32), (33) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка и содержат определенный произвол. Поэтому для однозначного фиксирования решения необходимо будет дополнительно наложить граничные условия на репер для каждой конкретной задачи.

Если дефектов нет, то $T_{\mu\nu}^i = 0$, $R_{\mu\nu j}^i = 0$, и уравнения равновесия выполняются, так как эти условия удовлетворяют уравнениям Эйлера – Лагранжа для (26). В этом и только в этом случае можно ввести вектор смещения, и для него упругая калибровка сведется к уравнениям нелинейной теории упругости. При наличии дефектов поля смещений не существует и упругая калибровка просто определяет репер.

При выборе функционала свободной энергии мы потребовали, чтобы условия $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$ и $T_{\mu\nu}^i = 0$ удовлетворяли уравнениям Эйлера – Лагранжа. И это важно, так как в противном случае на вектор смещения появилось бы дополнительное условие (уравнения Эйлера – Лагранжа) помимо уравнений теории упругости, следующих из упругой калибровки.

Подчеркнем еще раз важное обстоятельство. В геометрической теории дефектов мы предполагаем, что существует выделенная лабораторная система координат, в которой проводятся измерения. Эта система координат связана со средой без дефектов и упругих напряжений и соответствует плоскому евклидову пространству R^3 . Калибровочные условия (28), (29) и (32), (33) записаны именно в этом евклидовом пространстве R^3 и содержат измеряемую величину — коэффициент Пуассона σ . Это обстоятельство существенно отличает геометрическую теорию дефектов от моделей гравитации, в которых все системы координат считаются равноправными.

Упругая калибровка используется для фиксирования диффеоморфизмов. Поскольку выражение для свободной энергии (26) инвариантно также относительно локальных $SO(3)$ -вращений, то их тоже необходимо фиксировать. С этой целью недавно была предложена лоренцева калибровка для связности [24]

$$\partial_\mu \omega_{\mu j}^i = 0. \quad (34)$$

Калибровка (34) записана в лабораторной декартовой системе координат и имеет глубокий физический смысл. А именно, допустим, что дисклинаций нет ($R_{\mu\nu j}^i = 0$). Тогда $SO(3)$ -связность представляет собой чистую калибровку

$$\omega_{\mu j}^i = \partial_\mu S^{-1 j k} S_k^i, \quad S_j^i \in SO(3).$$

В этом случае лоренцева калибровка сведется к уравнениям главного кирального $SO(3)$ -поля

$$\partial_\mu (\partial_\mu S^{-1 j k} S_k^i) = 0$$

для спиновой структуры $\omega^{ij}(x)$. Модели главного кирального поля (см., например, [64–68]) для различных групп и в разном числе измерений привлекают большое внимание в математической физике, поскольку допускают решения в виде топологических солитонов и находят широкое применение в физике.

Таким образом, лоренцева калибровка (34) означает следующее. При отсутствии дисклинаций уравнения равновесия тождественно удовлетворяются и существует поле спиновой структуры ω^{ij} , которое удовлетворяет уравнениям главного кирального поля. Тем самым мы предполагаем, что спиновая структура среды в отсутствие дефектов описывается моделью главного кирального поля.

Модель главного кирального поля не является единственной, которую можно использовать для фиксирования локальных вращений. Для этой же цели пригодна и модель Скирма [69]. Уравнения Эйлера–Лагранжа этой модели нетрудно переписать в терминах $SO(3)$ -связности и использовать их в качестве калибровочного условия.

Существуют и другие модели для спиновых структур. Распределение магнитных моментов в ферромагнетиках и поле директора в жидких кристаллах описываются с помощью выражения для свободной энергии, зависящего непосредственно от векторного n -поля [70, 61]. В последнее время большое внимание привлекает также модель Фаддеева для n -поля [71]. Открытым остается вопрос о том, существуют ли такие калибровочные

условия на $SO(3)$ -связность, которые в отсутствие дисклинаций приводили бы к этим моделям.

Таким образом, в геометрической теории дефектов мы ставим следующую задачу. Найти решение уравнений Эйлера–Лагранжа для свободной энергии (26), которое удовлетворяет упругой калибровке для репера и лоренцевой калибровке для $SO(3)$ -связности. В разделах 8 и 11 мы решим задачу для клиновой дислокации соответственно в рамках классической теории упругости и геометрической теории дефектов, а затем сравним полученные результаты.

7. Асимметричная теория упругости

В предыдущем разделе мы использовали теорию упругости и модель главного кирального $SO(3)$ -поля для фиксирования инвариантности свободной энергии (26) в геометрической теории дефектов. Это — не единственная возможность, так как для фиксирования калибровки можно применить и другие модели. В настоящем разделе мы покажем, как для фиксирования инвариантности относительно диффеоморфизмов и локальных вращений может быть использована другая модель — асимметричная теория упругости.

В начале прошлого века братья Коссера разработали теорию упругой среды, каждая точка которой характеризуется не только своим положением, но и ориентацией в пространстве [72], т.е. в каждой точке среды задан репер (рис. 8).

С физической точки зрения это означает, что каждый атом в кристаллической решетке является не точкой, а протяженным объектом, имеющим ориентацию. В этом случае тензор напряжений уже не будет симметричным, и соответствующая теория называется асимметричной теорией упругости. Современное изложение этого подхода приведено в [73]. Покажем, что асимметричная теория упругости естественным образом вкладывается в геометрическую теорию дефектов.

Основными переменными в асимметричной теории упругости являются вектор смещений $u^i(x)$ и угол поворота $\omega^i(x)$. Направление псевдовектора ω^i совпадает с осью вращения элемента среды, а его длина равна углу поворота. Угол поворота, рассмотренный в разделе 4, дуален к полю спиновой структуры $\omega^{ij}(x)$: $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega^k$.

Среда Коссера характеризуется тензором напряжений $\sigma^{ij}(x)$ (плотность сил, действующих на площадку с нормалью i в направлении j) и тензором моментных

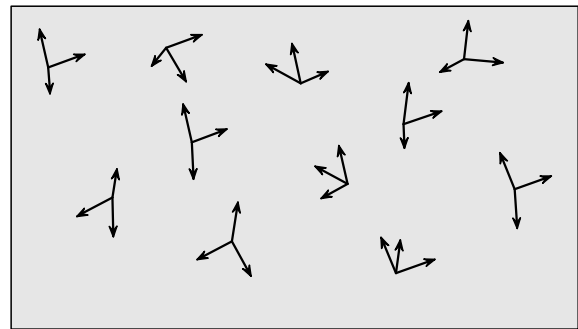


Рис. 8. Каждая точка среды Коссера характеризуется не только своим положением, но и ориентацией в пространстве.

напряжений $\mu^{ij}(x)$ (плотность момента сил, действующих на площадку с нормалью i в направлении j). Среда Коссера находится в равновесии, если в каждой точке уравновешены силы и моменты сил:

$$\partial_j \sigma^{ji} + f^i = 0, \quad (35)$$

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{jk} + \partial_j \mu^{ji} + m^i = 0, \quad (36)$$

где $f^i(x)$ и $m^i(x)$ — плотности неупругих внешних сил и моментов. Из уравнения (36) следует, что тензор упругих напряжений симметричен тогда и только тогда, когда выполнено условие $\partial_j \mu^{ji} + m^i = 0$.

Поле смещений и угол поворота однозначно определяют тензор деформаций $\epsilon_{ij}(x)$ и тензор изгиба-кручения $\kappa_{ij}(x)$:

$$\epsilon_{ij} = \partial_i u_j - \omega_{ij},$$

$$\kappa_{ij} = \partial_i \omega_j, \quad \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega^k. \quad (37)$$

В общем случае тензоры деформаций и изгиба-кручения никакой симметрии по индексам не имеют.

Закон Гука в среде Коссера заменяется двумя линейными соотношениями, связывающими тензоры напряжений и моментных напряжений с тензорами деформаций и изгиба-кручения:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{[ij]} + 2\alpha \epsilon_{[ij]} + \lambda \delta_{ij} \epsilon^k_k, \quad (38)$$

$$\mu_{ij} = 2\gamma \kappa_{[ij]} + 2\epsilon \kappa_{[ij]} + \beta \delta_{ij} \kappa^k_k, \quad (39)$$

где μ, λ — постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ — четыре новые упругие постоянные, характеризующие среду. Фигурные и квадратные скобки означают соответственно симметризацию и антисимметризацию по индексам.

В случае, когда

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i), \quad (40)$$

тензор деформаций симметричен и имеет тот же вид (4), что и ранее. Тогда уравнение (36) вместе с (38) и (39) сводится к уравнению

$$(\gamma + \epsilon) \varepsilon^{ijk} \Delta \partial_j u_k + m^i = 0.$$

Первый член равен нулю как следствие уравнения (27). Таким образом, для спиновой структуры вида (40) и $m^i = 0$ мы возвращаемся к симметричной теории упругости.

Уравнения (35), (36), (38) и (39) вместе с граничными условиями определяют равновесное состояние среды Коссера. Покажем, как эта модель вкладывается в геометрическую теорию упругости. Прежде всего заметим, что в отсутствие дефектов ($T_{\mu\nu}^i = 0$, $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$) существуют поля u^i и ω^{ij} . Тогда репер и $SO(3)$ -связность в линейном приближении определяются тензорами деформаций и изгиба-кручения:

$$e_\mu^i = \partial_\mu y^j S_j^i(\omega) \approx (\delta_\mu^j - \partial_\mu u^j)(\delta_j^i + \omega_j^i) \approx \delta_\mu^i - \epsilon_\mu^i, \quad (41)$$

$$\omega_\mu^{ij} \approx \partial_\mu \omega^{ij} = \varepsilon^{ijk} \kappa_{\mu k}. \quad (42)$$

Отметим, что соотношения (37) можно рассматривать как уравнения относительно вектора смещений и угла поворота. Соответствующие условия интегрируе-

мости были получены в [74]. Эти условия интегрируемости являются линейным приближением равенств $T_{\mu\nu}^i = 0$ и $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$, определяющих отсутствие дефектов.

Если неупругие силы и моменты в среде отсутствуют ($f^i = 0$, $m^i = 0$), то асимметричная теория упругости сводится к уравнениям второго порядка на вектор смещения и поворота:

$$(\mu + \alpha) \Delta u^i + (\mu - \alpha + \lambda) \partial^i \partial_j u^j - 2\alpha \partial_j \omega^{ji} = 0, \quad (43)$$

$$(\gamma + \epsilon) \Delta \omega^i + (\gamma - \epsilon + \beta) \partial^i \partial_j \omega^j + 2\alpha \varepsilon^{ijk} (\partial_j u_k - \omega_{jk}) = 0. \quad (44)$$

Перепишем эти уравнения для репера и $SO(3)$ -связности:

$$(\mu + \alpha) \nabla^\mu e_\mu^i + (\mu - \alpha + \lambda) \nabla^i e^T - (\mu - \alpha) \omega_\mu^{i\mu} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{1}{2} (\gamma + \epsilon) \varepsilon^{ijk} \nabla^\mu \omega_{\mu jk} + \frac{1}{2} (\gamma - \epsilon + \beta) \varepsilon^{\mu jk} \nabla^i \omega_{\mu jk} + 2\alpha \varepsilon^{i\mu j} e_{\mu j} = 0. \quad (46)$$

Конечно, это не единственные уравнения, которые в линейном приближении совпадают с уравнениями (43), (44). В настоящее время у нас нет аргументов для однозначного выбора. Полученные нелинейные уравнения асимметричной теории упругости можно использовать в качестве калибровочных условий в геометрической теории дефектов. При этом мы имеем шесть уравнений для фиксирования диффеоморфизмов (три параметра) и локальных $SO(3)$ -вращений (три параметра). Таким образом, асимметричная теория упругости естественным образом вкладывается в геометрическую теорию дефектов.

В разделе 6 рассмотрены упругая калибровка для репера и лоренцева калибровка для $SO(3)$ -связности. В этом случае при отсутствии дефектов спиновые переменные среды не взаимодействуют с упругими напряжениями. В асимметричной теории упругости упругие напряжения непосредственно влияют на спиновую структуру, и наоборот.

8. Клиновое дислокация в теории упругости

Под клиновой дислокацией мы понимаем бесконечную упругую среду, которая топологически совпадает с евклидовым пространством R^3 с вычетом оси $z = x^3$ — ядром дислокации и построена следующим образом. Берется бесконечная упругая среда без дефектов, из которой вырезается бесконечный клин с углом $-2\pi\theta$. Для определенности мы считаем, что острие клина совпадает с осью z (рис. 9). Затем края разреза симметрично сдвигаются и склеиваются. После этого среда под действием упругих сил приходит в равновесное состояние. Если клин из среды вырезается, то угол дефицита будем считать отрицательным: $-1 < \theta < 0$. При положительных θ клин вставляется. Таким образом первоначально упругая среда занимает область, большую или меньшую евклидова пространства R^3 в зависимости от знака угла дефицита θ , которая в цилиндрических координатах r, φ, z задается неравенствами

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\alpha, \quad -\infty < z < \infty, \quad \alpha = 1 + \theta. \quad (47)$$

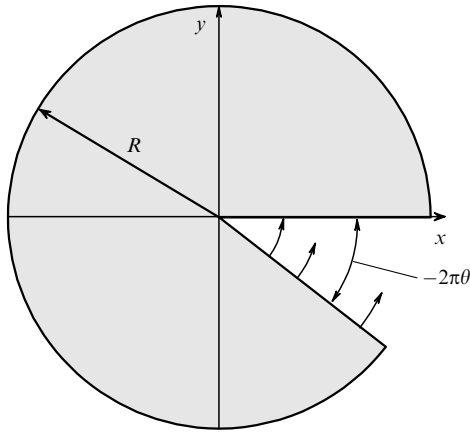


Рис. 9. Клиновая дислокация с углом дефицита $2\pi\theta$. При отрицательных или положительных θ клин соответственно вырезается или вставляется.

Отметим, что клиновую дислокацию часто называют дисклинацией. В нашем подходе такое название представляется неестественным, поскольку клиновое дислокация связана с нетривиальным кручением. Вдобавок термин дисклинация используется для дефектов спиновой структуры.

Перейдем к математической постановке задачи для клиновой дислокации в рамках теории упругости. Чтобы избежать расходящихся выражений, которые возникают для бесконечной среды, будем считать, что клиновое дислокация представляет собой цилиндр конечного радиуса R . Эта задача обладает трансляционной инвариантностью вдоль оси z и вращательной инвариантностью в плоскости x, y . Поэтому будем использовать цилиндрическую систему координат. Пусть

$$\hat{u}_i = (\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi, \hat{u}_z) \quad (48)$$

— компоненты ковектора смещения относительно ортонормального базиса в цилиндрической системе координат. Этот ковектор в области (47) удовлетворяет уравнению равновесия, которое следует после подстановки (3) в уравнение (2),

$$(1 - 2\sigma)\Delta\hat{u}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{u}^j = 0, \quad (49)$$

где $\overset{\circ}{\nabla}_i$ — ковариантная производная для плоской евклидовой метрики в рассматриваемой системе координат.

Для справки приведем явные выражения для дивергенции и лапласиана от ковектора смещения в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{u}^i &= \frac{1}{r} \partial_r(r \hat{u}^r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi \hat{u}^\varphi + \partial_z \hat{u}^z, \\ \Delta \hat{u}_r &= \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r \hat{u}_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_r + \partial_z^2 \hat{u}_r - \frac{1}{r^2} \hat{u}_r - \frac{2}{r^2} \partial_\varphi \hat{u}_\varphi, \\ \Delta \hat{u}_\varphi &= \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r \hat{u}_\varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_\varphi + \partial_z^2 \hat{u}_\varphi - \frac{1}{r^2} \hat{u}_\varphi + \frac{2}{r^2} \partial_\varphi \hat{u}_r, \\ \Delta \hat{u}_z &= \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r \hat{u}_z) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_z + \partial_z^2 \hat{u}_z. \end{aligned}$$

Исходя из симметрии задачи, будем искать решение уравнения (49) в виде

$$\hat{u}_r = u(r), \quad \hat{u}_\varphi = A(r)\varphi, \quad \hat{u}_z = 0,$$

где $u(r)$ и $A(r)$ — две неизвестные функции только от радиуса. Поставим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r|_{r=0} &= 0, \quad \hat{u}_\varphi|_{r=0} = 0, \quad \hat{u}_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \\ \hat{u}_\varphi|_{\varphi=2\pi\alpha} &= -2\pi\theta r, \quad \partial_r \hat{u}_r|_{r=R} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Первые четыре условия являются геометрическими и соответствуют процессу создания дислокации. Последнее условие имеет простой физический смысл: отсутствие внешних сил на границе среды. Неизвестную функцию $A(r)$ находим из предпоследнего граничного условия (50)

$$A(r) = -\frac{\theta}{1+\theta} r.$$

После этого прямая подстановка показывает, что компоненты φ и z уравнения равновесия (49) тождественно удовлетворяются, а радиальная компонента сводится к уравнению

$$\partial_r(r \partial_r u) - \frac{u}{r} = D, \quad D = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{\theta}{1+\theta} = \text{const}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{D}{2} r \ln r + c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad c_{1,2} = \text{const}.$$

Постоянная интегрирования $c_2 = 0$ в силу граничного условия в нуле. Константу c_1 находим из последнего граничного условия (50). В итоге получаем известное решение рассматриваемой задачи [62]

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \frac{D}{2} r \ln \frac{r}{eR}, \\ \hat{u}_\varphi &= -\frac{\theta}{1+\theta} r \varphi. \end{aligned} \quad (51)$$

В выражении для \hat{u}_r буква e обозначает основание натурального логарифма. Отметим, что радиальная компонента вектора смещений в пределе $R \rightarrow \infty$ расходуется. Это значит, что для описания клиновой дислокации необходимо рассматривать цилиндр конечного радиуса.

Линейная теория упругости применима в области малых относительных удлинений, которые для клиновой дислокации равны

$$\frac{d\hat{u}_r}{dr} = -\frac{\theta}{1+\theta} \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{R}, \quad \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_\varphi}{d\varphi} = -\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Это значит, что мы вправе ожидать верных результатов для поля смещений при малых углах дефицита ($\theta \ll 1$) и вблизи края цилиндра ($r \sim R$).

Найдем метрику, индуцированную клиновой дислокацией, в линейном приближении по углу дефицита θ . Вычисления можно провести, воспользовавшись общей формулой (5) или известным выражением для вариации

формы метрики

$$\delta g_{\mu\nu} = -\overset{\circ}{\nabla}_\mu u_\nu - \overset{\circ}{\nabla}_\nu u_\mu. \quad (52)$$

После несложных вычислений получим следующее выражение для метрики в плоскости x, y :

$$dl^2 = \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{R}\right) dr^2 + r^2 \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{R} + \theta \frac{1}{1-\sigma}\right) d\varphi^2. \quad (53)$$

С этой метрикой мы сравним метрику, полученную путем решения трехмерных уравнений Эйнштейна в разделе 11.

9. Краевая дислокация в теории упругости

В природе клиновые дислокации встречаются относительно редко, так как требуют добавления или удаления большого количества вещества, что связано с большими энергетическими затратами. Тем не менее их изучение представляет большой интерес, так как другие прямолинейные дислокации можно представить в виде суперпозиции клиновых дислокаций. В этом смысле клиновые дислокации являются элементарными. Покажем это на примере краевой дислокации — одним из наиболее распространенных дефектов. Краевая дислокация, ядро которой совпадает с осью z , изображена на рис. 10а. Она возникает в результате разреза среды по полуплоскости $y = 0, x > 0$, сдвига нижнего берега разреза к оси z на постоянный (вдали от ядра дислокации) вектор Бюргерса \mathbf{b} с последующей склейкой берегов разреза. Чтобы найти поле смещений краевой дислокации, можно решить соответствующую краевую задачу для уравнения равновесия (49) [61]. Однако, зная явный вид вектора смещения для клиновой дислокации, мы поступим иначе. Краевая дислокация представляет собой диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с положительным $2\pi\theta$ и отрицательным $-2\pi\theta$ углом дефицита, как показано на рис. 10б. Будем считать, что оси первой и второй клиновой дислокации параллельны оси z и пересекают плоскость x, y соответственно в точках с координатами $(0, a)$ и $(0, -a)$. Расстояние между осями клиновых дислокаций равно $2a$. Из выражений для поля смещений (51) следует, что вдали от начала координат ($r \gg a$) поле

смещений клиновых дислокаций с точностью до членов первого порядка малости по θ и a/r имеет вид

$$u_x^{(1)} \approx -\theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r-a \sin \varphi}{eR} - (y-a) \left(\varphi - \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right], \quad (54)$$

$$u_y^{(1)} \approx -\theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y-a) \ln \frac{r-a \sin \varphi}{eR} + x \left(\varphi - \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right],$$

$$u_x^{(2)} \approx \theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r+a \sin \varphi}{eR} - (y+a) \left(\varphi + \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right], \quad (55)$$

$$u_y^{(2)} \approx \theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y+a) \ln \frac{r+a \sin \varphi}{eR} + x \left(\varphi + \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right].$$

Поскольку уравнения теории упругости линейны, то для нахождения поля смещений краевой дислокации достаточно сложить поля смещений (54) и (55). После несложных вычислений с точностью до смещения всей среды как целого на постоянный вектор вдоль оси y получим

$$u_x = b \left[\arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2+y^2} \right], \quad (56)$$

$$u_y = -b \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{eR} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right],$$

где для модуля вектора Бюргерса введено обозначение

$$b = |\mathbf{b}| = -2a\theta.$$

Этот результат совпадает с выражением для поля смещений, полученным путем прямого решения уравнений теории упругости [61]. Тем самым мы доказали, что краевая дислокация является диполем, состоящим из двух параллельных клиновых дислокаций.

Найдем метрику, индуцированную краевой дислокацией. Используя формулу (52), в линейном приближении по θ и a/r получим метрику в плоскости x, y

$$dl^2 = \left(1 + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{b}{r} \sin \varphi\right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2) - \frac{2b \cos \varphi}{1-\sigma} dr d\varphi. \quad (57)$$

Заметим, что индуцированная метрика для краевой дислокации не зависит от R .

10. Параллельные клиновые дислокации

При отсутствии дисклинаций ($R_{\mu\nu}{}^j = 0$) $SO(3)$ -связность является чистой калибровкой и уравнения равновесия для $SO(3)$ -связности (20) тождественно удовлетворяются. Явный вид $SO(3)$ -связности в этом случае однозначно определяется полем спиновой структуры ω^{ij} . В

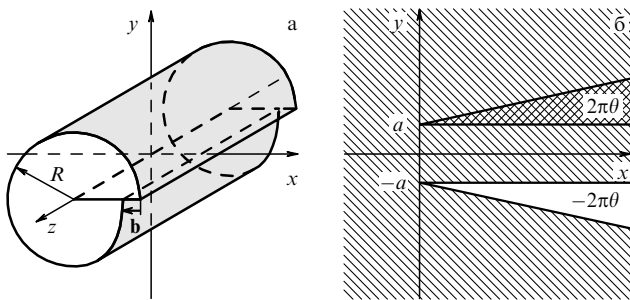


Рис. 10. (а) Краевая дислокация с вектором Бюргерса \mathbf{b} , направленным к оси дислокации. (б) Краевая дислокация, как диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с положительным и отрицательным углом дефицита.

силу лоренцевой калибровки (34) поле ω^{ij} удовлетворяет уравнениям главного кирального поля. Решение этой системы уравнений задает тривиальную $SO(3)$ -связность. Таким образом, при отсутствии дисклинаций задача сводится к решению уравнений Эйнштейна для репера в упругой калибровке и решению модели главного кирального поля для описания спиновой структуры. После этого можно вычислить тензор кручения по формуле (П.21), который определяет поверхностную плотность вектора Бюргерса.

Поскольку дисклинации отсутствуют (тензор кривизны равен нулю), то мы имеем пространство абсолютного параллелизма. Тогда вся геометрия определяется репером e_μ^i , который однозначно задает тензор кручения (П.21) при нулевой $SO(3)$ -связности. Здесь мы предполагаем, что тривиальная $SO(3)$ -связность равна нулю. Репер e_μ^i удовлетворяет трехмерным уравнениям Эйнштейна с евклидовой сигнатурой метрики, которые следуют из выражения для свободной энергии (26) при $R_{\mu\nu j}^i = 0$,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} = T_{\mu\nu}. \quad (58)$$

Здесь в правую часть уравнений Эйнштейна добавлен источник дислокаций $T_{\mu\nu}$ (в гравитации — это тензор энергии-импульса материи).

Отметим, что без источника дислокаций модель была бы тривиальной. Действительно, при $T_{\mu\nu} = 0$ из уравнений Эйнштейна (58) следует, что скалярная кривизна и тензор Риччи равны нулю: $\tilde{R} = 0$, $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$. Поскольку в трехмерном пространстве полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется тензором Риччи (П.25), то отсюда следует, что без источников он также обращается в нуль. Обращение в нуль полного тензора кривизны и означает тривиальность модели, поскольку в этом случае дефектов просто нет. Аналогичное утверждение хорошо известно в гравитации. Обычно его формулируют следующим образом: "Трехмерная гравитация не описывает динамических, т.е. распространяющихся, степеней свободы".

Для наших целей необходимо найти решение уравнений Эйнштейна (58) для одной клиновой дислокации. Уравнения Эйнштейна представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Точных решений, даже в трехмерном пространстве, известно не так много. Замечательное точное решение, описывающее произвольное статическое распределение точечных частиц, хорошо известно в трехмерной гравитации для метрики лоренцевой сигнатуры (+ − −) [75–77]. Приведем это решение для евклидовой сигнатуры метрики и покажем, что в геометрической теории дефектов оно описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций. Тем самым сначала мы рассмотрим более общий случай произвольного числа клиновых дислокаций, а затем подробно остановимся на интересующем нас случае одной клиновой дислокации. Это сделано намеренно, поскольку решение в более общем случае не вносит существенных усложнений. В то же время произвольное распределение клиновых дислокаций представляет гораздо больший интерес для приложений. Так, в предыдущем разделе было показано, что краевая дислокация представляется диполем, состоящим из двух параллельных клиновых дислокаций разных знаков.

Рассмотрим упругую среду с произвольным распределением произвольных, но параллельных клиновых дислокаций. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось $z = x^3$ была параллельна осям дислокаций, а оси $\{x^\alpha\} = \{x, y\}$, $\alpha = 1, 2$, были перпендикулярны оси z . Тогда метрика примет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dl^2 + N^2 dz^2, \quad (59)$$

где

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

— двумерная метрика на плоскости x, y . Благодаря трансляционной симметрии вдоль оси z двумерная метрика $g_{\alpha\beta}(x, y)$ и функция $N(x, y)$ не зависят от z .

Отвлекаясь от физической аргументации, можно сказать проще. Рассмотрим блочно диагональную метрику вида (59), которая обладает трансляционной инвариантностью вдоль оси z . А затем покажем, что соответствующее решение уравнений Эйнштейна действительно описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций.

Тензор кривизны для метрики (59) имеет следующие компоненты:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = R_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\delta}, \quad \tilde{R}_{\alpha z\gamma}{}^z = \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\gamma N, \quad \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^z = \tilde{R}_{\alpha z\gamma}{}^\delta = 0,$$

где $R_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\delta}$ — тензор кривизны для двумерной метрики $g_{\alpha\beta}$, ∇_α — двумерная ковариантная производная с символами Кристоффеля.

Выберем источник дислокаций в виде

$$T_{zz} = \frac{2\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \sum_{n=1}^M \theta_n \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (60)$$

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha z} = T_{z\alpha} = 0,$$

где $\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \delta(x - x_n) \delta(y - y_n)$ — двумерная δ -функция на плоскости x, y с носителем в точке $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$. Появление множителя $g^{(2)} = \det g_{\alpha\beta}$ перед знаком суммы связано с тем, что δ -функция с точки зрения общих преобразований координат является не функцией, а тензорной плотностью. Ниже показано, что решение уравнений Эйнштейна с таким источником описывает M клиновых параллельных дислокаций с углами дефицита θ_n , которые пересекают плоскость x, y в точках (x_n, y_n) . В трехмерной гравитации такой источник соответствует частицам с массами $m_n = 2\pi\theta_n$, покоящимся в точках \mathbf{r}_n .

Тогда уравнения Эйнштейна (58) сводятся к четырем уравнениям

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta N - g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \nabla_\gamma N = 0, \quad (61)$$

$$-\frac{1}{2} N^3 R^{(2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \sum_{n=1}^M \theta_n \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (62)$$

где $R^{(2)}$ — двумерная скалярная кривизна.

Метрика вида (59) все еще инвариантна относительно преобразований координат на плоскости x, y . Используя эту оставшуюся инвариантность, зафиксируем конформную калибровку на плоскости (локально это всегда возможно)

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta_{\alpha\beta},$$

где $\phi(x, y)$ — некоторая функция.

В конформной калибровке уравнение (61) принимает вид

$$\partial_x \partial_\beta N = 0.$$

При постоянных граничных условиях на N на границе плоскости x, y это уравнение имеет единственное решение $N = \text{const}$. Изменив масштаб координаты z , можно положить $N = 1$ без ограничения общности. Тогда уравнение (62) сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta \phi = -2\pi \sum_n \theta_n \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n),$$

которое имеет общее решение

$$\phi = \sum_n \theta_n \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n| + \frac{1}{2} \ln C, \quad C = \text{const} > 0.$$

Таким образом, метрика в плоскости x, y имеет вид

$$dl^2 = C \prod_n |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^{2\theta_n} (dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (63)$$

где полярные координаты r, φ покрывают всю плоскость R^2 и не более того (что важно!). Любое решение уравнений Эйнштейна определено с точностью до выбора системы координат, поскольку уравнения ковариантны. Воспользуемся этим и положим $C = 1$, чего всегда можно добиться путем выбора масштаба r .

Это и есть точное решение нелинейных уравнений Эйнштейна, описывающее произвольное распределение клиновых дислокаций. Такое утверждение будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Отметим, что переход к непрерывному распределению дислокаций в геометрическом подходе прост. Для этого вместо δ -образных источников в правую часть уравнений Эйнштейна нужно подставить непрерывное распределение источников дислокаций.

Чтобы показать, что метрика (63) действительно описывает произвольное распределение клиновых дислокаций, рассмотрим подробнее одну клиновую дислокацию с источником в начале координат

$$T_{zz} = \frac{2\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \theta \delta^{(2)}(x, y). \quad (64)$$

Соответствующая метрика (63) при $C = 1$ имеет вид

$$dl^2 = r^{2\theta} (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (65)$$

Перейдем в новую систему координат

$$r' = \frac{1}{\alpha} r^\alpha, \quad \varphi' = \alpha \varphi, \quad \alpha = 1 + \theta, \quad (66)$$

в которой метрика становится евклидовой:

$$dl^2 = dr'^2 + r'^2 d\varphi'^2. \quad (67)$$

Однако теперь область изменения полярного угла отличается от 2π : $0 \leq \varphi' < 2\pi\alpha$, и покрывает плоскость x, y с вырезанным или добавленным углом $2\pi\theta$.

Поскольку в штрихованной системе координат r', φ' метрика совпадает с евклидовой, то здесь мы имеем евклидову плоскость с вырезанным или добавленным клином, так как угол φ' меняется в интервале $(0, 2\pi\alpha)$.

Переход к координатам r, φ (66) обозначает склейку берегов образовавшегося клина, что соответствует конусу. Поэтому обе метрики (65) и (67) описывают один и тот же геометрический объект — коническую сингулярность. Очевидно, что тензоры кручения и кривизны равны нулю всюду, за исключением начала координат.

Создание конической сингулярности в точности совпадает с созданием клиновой дислокации в теории дефектов. Нетрудно убедиться в том, что общее решение (63) описывает произвольное распределение конических сингулярностей с углами дефицита θ_n , расположенными в точках \mathbf{r}_n . Следовательно, это решение описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций.

В следующем разделе мы подробно рассмотрим одну клиновую дислокацию. С этой целью совершим еще одно преобразование координат:

$$f = \alpha r', \quad \varphi = \frac{1}{\alpha} \varphi'. \quad (68)$$

Тогда метрика (67) примет вид

$$dl^2 = \frac{1}{\alpha^2} df^2 + f^2 d\varphi^2, \quad \alpha = 1 + \theta. \quad (69)$$

Это еще одна часто используемая форма метрики для конической сингулярности.

11. Клиновая дислокация в геометрическом подходе

Рассмотрим теперь клиновую дислокацию с геометрической точки зрения. С качественной точки зрения создание клиновой дислокации совпадает с определением конической сингулярности. Однако существует количественное расхождение, поскольку метрика (69) зависит только от угла дефицита θ и не может совпадать с индуцированной метрикой (53), полученной в рамках теории упругости. Это расхождение связано с тем, что в теории упругости после вырезания клина и склейки берегов разреза (создания конической сингулярности) мы требуем, чтобы вектор смещения в положении равновесия удовлетворял уравнениям равновесия. В то же время для конической сингулярности плоскость x, y после склейки может быть деформирована произвольным образом. С формальной точки зрения это проявляется в том, что индуцированная метрика (53), полученная в рамках теории упругости, явно зависит от коэффициента Пуассона, который отсутствует в теории гравитации.

Для решения этой проблемы в [23] была предложена упругая калибровка. Выберем упругую калибровку (33) как самую простую в случае клиновой дислокации. Эту задачу можно решать двумя способами. Во-первых, калибровочное условие можно подставить непосредственно в уравнения Эйнштейна. Во-вторых, можно найти решение в какой-то удобной системе координат, а затем найти такое преобразование координат, чтобы было выполнено калибровочное условие.

Поскольку точное решение для метрики известно (69), то проще следовать второму методу. Метрике (69) можно поставить в соответствие репер

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{1}{\alpha}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = f.$$

Здесь шляпка над индексом означает, что он относится к ортонормальной системе координат, а индекс без шляпки является координатным. Компоненты этого репера представляют собой квадратные корни из соответствующих компонент метрики и поэтому имеют симметричное линейное приближение (31). Поскольку клиновья дислокации симметричны относительно вращений в плоскости x, y , то совершим преобразование радиальной координаты $f \rightarrow f(r)$. После преобразования компоненты репера примут вид

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{f'}{\alpha}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = f, \quad (70)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r . Репер, соответствующий евклидовой метрике, выберем в виде

$$\hat{e}_r^{\hat{r}} = 1, \quad \hat{e}_\varphi^{\hat{\varphi}} = r. \quad (71)$$

Ему соответствуют символы Кристоффеля $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ и $SO(3)$ -связность $\overset{\circ}{\omega}_{\mu i}^j$, которые определяют ковариантную производную. Выпишем только нетривиальные компоненты:

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \overset{\circ}{\omega}_{\varphi i}^{\hat{\varphi}} = -\overset{\circ}{\omega}_{\varphi \hat{\varphi}}^i = 1.$$

Подстановка репера в калибровочное условие (33) приводит к дифференциальному уравнению Эйлера на функцию перехода

$$\frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{\alpha r} - \frac{f}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) = 0.$$

Его общее решение зависит от двух постоянных $C_{1,2}$:

$$f = C_1 r^{\gamma_1} + C_2 r^{\gamma_2}, \quad (72)$$

где показатели степени $\gamma_{1,2}$ определяются квадратным уравнением

$$\gamma^2 + 2\gamma\theta b - \alpha = 0, \quad b = \frac{\sigma}{2(1-\sigma)},$$

которое при $\theta > -1$ имеет действительные корни разных знаков: положительный корень γ_1 и отрицательный — γ_2 . Напомним, что на коэффициент Пуассона имеются термодинамические ограничения $-1 \leq \sigma \leq 1/2$ [61].

Для фиксирования постоянных интегрирования наложим граничные условия на репер

$$e_r^{\hat{r}}|_{r=R} = 1, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}}|_{r=0} = 0. \quad (73)$$

Первое граничное условие соответствует последнему граничному условию на вектор смещения (50) (отсутствие внешних сил на поверхности цилиндра), а второе — отсутствию угловой составляющей у тензора деформации в ядре дислокации. Уравнения (73) задают постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{\alpha}{\gamma_1 R^{\gamma_1-1}}, \quad C_2 = 0. \quad (74)$$

Полученный репер определяет метрика

$$dl^2 = \left(\frac{r}{R} \right)^{2\gamma_1-2} \left(dr^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{\gamma_1^2} d\varphi^2 \right), \quad (75)$$

где

$$\gamma_1 = -\theta b + \sqrt{\theta^2 b^2 + 1} + \theta.$$

Это и есть решение поставленной задачи. Найденное решение справедливо при всех углах дефицита θ и всех $0 < r < R$. Полученная метрика зависит от трех постоянных: θ, σ и R . Зависимость от угла дефицита θ появилась благодаря тому, что он входит в правую часть уравнений Эйнштейна (58). Зависимость от коэффициента Пуассона возникла вследствие упругой калибровки (33), и, наконец, зависимость от радиуса цилиндра следует из граничного условия (73).

Если клиновья дислокации отсутствуют, то $\theta = 0$, $\alpha = 1$, $\gamma_1 = 1$, и метрика (75) переходит в евклидову метрику $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, что и следовало ожидать.

Сравним метрику (75), полученную в рамках геометрического подхода, с индуцированной метрикой из теории упругости (53). Во-первых, она имеет более простой вид. Во-вторых, в линейном приближении по θ

$$\gamma_1 \approx 1 + \theta \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)},$$

и метрика (75), как нетрудно проверить, действительно совпадает с метрикой (53), полученной в рамках теории упругости. Мы видим, что индуцированная метрика (53) является только линейным приближением для метрики, полученной в геометрической теории дефектов, которая к тому же имеет более простой вид. Вне рамок теории возмущений мы наблюдаем существенные различия. В частности, метрика (53) сингулярна в начале координат, в то время как метрика (75), найденная вне рамок теории возмущений, регулярна.

Тензоры напряжений и деформаций связаны между собой законом Гука (3). Поскольку тензор деформаций является линейным приближением для индуцированной метрики, то возникает экспериментальная возможность проверки формулы (75). Для этого необходимо измерить поле напряжений для одиночной клиновья дислокации. Тем самым геометрическая теория дефектов может быть экспериментально подтверждена или опровергнута.

Задача восстановления поля смещений по заданной метрике сводится к решению дифференциальных уравнений (5), в правую часть которых необходимо подставить метрику (75), с граничными условиями (50). На этой задаче мы останавливаться не будем. Отметим, что в геометрической теории дефектов сложный этап нахождения вектора смещений там, где он существует, просто отсутствует и не является необходимым.

Двумерная метрика (75) описывает коническую сингулярность в упругой калибровке. Связь конических сингулярностей с клиновыми дислокациями была установлена в [22, 78–80]. В этих статьях метрика использовалась в других калибровках (системах координат).

12. Упругие колебания в среде с дислокациями

Упругие колебания в упругой среде без дефектов описываются зависящим от времени векторным полем $u^i(t, x)$, которое удовлетворяет волновому уравнению (см., например, [61])

$$\rho_0 \ddot{u}^i - \mu \Delta u^i - (\lambda + \mu) \partial^i \partial_j u^j = 0, \quad (76)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени, ρ_0 — плотность среды, которую будем считать постоян-

ной. Если среда содержит дефекты, то метрика пространства становится нетривиальной: $\delta_{ij} \rightarrow g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \delta_{ij}$. Предположим, что относительные смещения при упругих колебаниях малы по сравнению с напряжениями, создаваемыми дефектами:

$$\partial_\mu u^i \ll e_\mu^i. \quad (77)$$

Тогда в первом приближении будем считать, что упругие колебания распространяются в римановом пространстве с нетривиальной метрикой, созданной дислокациями. При этом мы пренебрегаем изменением метрики, вызванным самими упругими колебаниями. Поэтому для упругих колебаний в среде с дефектами мы постулируем следующее уравнение, которое является ковариантным обобщением (76) по пространственным переменным:

$$\rho_0 \ddot{u}^i - \mu \tilde{\Delta} u^i - (\lambda + \mu) \tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_j u^j = 0, \quad (78)$$

где u^i — компоненты векторного поля смещений относительно ортонормального базиса касательного пространства e_i (см. приложение), $\tilde{\Delta} = \tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_i$ — ковариантный оператор Лапласа–Бельтрами, построенный по реперу e_μ^i , $\tilde{\nabla}_i$ — оператор ковариантного дифференцирования. Выпишем в явном виде ковариантную производную от поля смещений:

$$\tilde{\nabla}_i u^j = e_\mu^i \tilde{\nabla}_\mu u^j = e_\mu^i (\partial_\mu u^j + u^k \tilde{\omega}_{\mu k}^j),$$

где $\tilde{\omega}_{\mu k}^j$ — $SO(3)$ -связность, построенная при нулевом кручении.

Отметим, что векторное поле смещений, описывающее упругие колебания, не является полным векторным полем смещений точек среды с дислокациями. Как уже говорилось в разделе 3, поле смещений для дислокаций можно ввести только в тех областях среды, где дефекты отсутствуют. Если обозначить его через u_D^i , то полное поле смещений в этих областях определяется суммой $u_D^i + u^i$. При этом репер определяется только полем смещений для дислокации: $e_\mu^i = \partial_\mu u_D^i$. Заметим, что малость относительных деформаций для упругих колебаний (77) имеет смысл даже в тех областях пространства, где смещения u_D^i не определены.

Разложим поле смещений ковариантным образом на поперечную u^{Ti} и продольную u^{Li} части:

$$u^i = u^{Ti} + u^{Li},$$

которые определены следующими соотношениями:

$$\tilde{\nabla}_i u^{Ti} = 0, \quad (79)$$

$$\tilde{\nabla}_i u_j^L - \tilde{\nabla}_j u_i^L = 0. \quad (80)$$

Разложение векторного поля на продольную и поперечную части в трехмерном пространстве с точностью до постоянной является единственным. Напомним, что опускание латинских индексов производится с помощью символов Кронекера, $u^i = u_i$, и оно перестановочно с ковариантным дифференцированием. Уравнение (80) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i u_j^L - \tilde{\nabla}_j u_i^L &= e_\mu^i e_\nu^j (\tilde{\nabla}_\mu u_\nu^L - \tilde{\nabla}_\nu u_\mu^L) = \\ &= e_\mu^i e_\nu^j (\partial_\mu u_\nu^L - \partial_\nu u_\mu^L) = 0, \end{aligned}$$

так как переход от латинских индексов к греческим перестановочен с ковариантным дифференцированием, а символы Кристоффеля симметричны по первым двум индексам. Последнее равенство означает, что 1-форма $dx^\mu u_\mu^L$ замкнута. Нетрудно проверить, что уравнение (78) для упругих колебаний эквивалентно двум независимым уравнениям для поперечных и продольных колебаний

$$\frac{1}{c_T^2} \ddot{u}^{Ti} - \tilde{\Delta} u^{Ti} = 0, \quad \frac{1}{c_L^2} \ddot{u}^{Li} - \tilde{\Delta} u^{Li} = 0, \quad (81)$$

где

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$$

— квадраты скоростей звука поперечных и продольных колебаний.

Фононами в твердом теле называются частицы, возникающие при вторичном квантовании уравнений (81). Поэтому, строго говоря, задача о рассеянии фононов на дислокациях является квантово-механической. В настоящем обзоре мы рассмотрим классические аспекты этой задачи.

Волновые уравнения (81) содержат вторые и первые производные от поля смещений. Последние содержатся в ковариантном операторе Лапласа–Бельтрами $\tilde{\Delta}$. Слагаемые со вторыми производными можно записать в четырехмерном виде $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$, где $g^{\alpha\beta}$ — метрика, обратная к

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (82)$$

где c — либо поперечная, либо продольная скорость звука. Выше мы обозначали четырехмерные координаты греческими буквами из начала алфавита $\{x^\alpha\} = \{x^0 = t, x^1, x^2, x^3\}$, а буквами из середины греческого алфавита — только пространственные координаты $\{x^\mu\} = \{x^1, x^2, x^3\}$. Это правило легко запомнить по следующим включениям: $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ и $\{\mu, \nu, \dots\} \subset \{\alpha, \beta, \dots\}$. По четырехмерной метрике (82) можно вычислить символы Кристоффеля (П.11), которые определяют систему нелинейных обыкновенных уравнения для экстремалей $x^\alpha(\tau)$ (линий экстремальной длины, которые в римановой геометрии совпадают с геодезическими), где точки обозначают дифференцирование по каноническому параметру τ . Для метрики блочно-диагонального вида (82) эти уравнения расщепляются:

$$\ddot{x}^0 = 0, \quad (83)$$

$$\ddot{x}^\mu = -\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho, \quad (84)$$

где $\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu$ — трехмерные символы Кристоффеля, построенные по трехмерной метрике $g_{\mu\nu}$, которая, напомним, для статического распределения дефектов зависит только от пространственных координат. Пусть $\{x^\alpha(\tau)\}$ — произвольная экстремаль в четырехмерном пространстве-времени. Тогда для метрики (82) ее естественная проекция на пространство $\{x^\alpha(\tau)\} \rightarrow \{0, x^\mu(\tau)\}$ также является экстремалью, но уже для пространственной части метрики $g_{\mu\nu}$.

Уравнения для экстремалей (83), (84) инвариантны относительно линейных преобразований канонического параметра τ . Поэтому из уравнения (83) следует, что, не

ограничивая общности, канонический параметр можно отождествить с временем: $\tau = t = x^0$.

Допустим, что частица движется в пространстве вдоль экстремали $x^\mu(t)$ со скоростью v . Это означает, что

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = v^2.$$

Тогда длина касательного вектора для соответствующей экстремали $\{t, x^\mu(t)\}$ в четырехмерном пространстве-времени равна

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = c^2 - v^2.$$

Тем самым, если частица движется в пространстве вдоль экстремали со скоростью, меньшей, равной или большей скорости звука, то ее мировая линия в пространстве-времени будет соответственно времениподобной, нулевой или пространственноподобной.

Вернемся к распространению фононов в среде с дефектами. При анализе асимптотик решений волновых уравнений (81) полезны представления о фронтах волны и лучах, как это делается в геометрической оптике [81]. Мы не будем останавливаться на математических аспектах этого подхода, который нетривиален и сложен [82], и дадим лишь физическое описание. В эйкональном (высокочастотном) приближении фононы распространяются вдоль лучей, совпадающих с нулевыми экстремальными для четырехмерной метрики $g_{\alpha\beta}$. Форма лучей, которые мы отождествляем с траекториями фононов, определяется трехмерной метрикой $g_{\mu\nu}$. Это значит, что в эйкональном приближении траектории поперечных и продольных фононов в среде с дефектами одинаковы и определяются уравнениями (84). Отличие сводится к тому, что скорости распространения поперечных и продольных фононов различны и равны соответственно c_T и c_L .

13. Рассеяние фононов на клиновой дислокации

Вычисления в данном разделе по сути дела совпадают с анализом, проведенным в разделе 3 статьи [59]. Отличие заключается в том, что ниже мы используем метрику, записанную в упругой калибровке. Это важно, поскольку по предположению траектории фононов, наблюдаемые в эксперименте, должны совпадать с экстремальными для метрики именно в этой калибровке.

При наличии одной угловой дислокации метрика пространства в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r^{2\gamma-2}}{R^{2\gamma-2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{r^{2\gamma}}{R^{2\gamma-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

где нетривиальная часть метрики в плоскости r, φ была получена ранее (см. (75)). Здесь для простоты обозначений мы заменили γ_1 на γ . Обратная метрика также является диагональной

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma-2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Символы Кристоффеля для метрики (85) вычисляются по формулам (П.11). В результате получаем, что только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\tilde{\Gamma}_{rr}^r = \frac{\gamma-1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -\frac{\alpha^2 r}{\gamma}, \quad \tilde{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{\gamma}{r}.$$

В предыдущем разделе мы показали, что в эйкональном приближении фононы распространяются вдоль экстремалей $x^\mu(t)$, определяемых уравнениями (84). В рассматриваемом случае эти уравнения принимают вид

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma-1}{r} \dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma} r \dot{\varphi}^2, \quad (86)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\gamma}{r} \dot{r} \dot{\varphi}, \quad (87)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (88)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t . Из последнего уравнения следует, что фононы двигаются вдоль оси z с постоянной скоростью, что соответствует трансляционной инвариантности вдоль z . Это значит, что рассеяние фононов на клиновой дислокации, как и следовало ожидать, сводится к двумерной задаче в плоскости r, φ .

Систему уравнений для $r(t)$ и $\varphi(t)$ (86) и (87) можно явно проинтегрировать. С этой целью найдем два первых интеграла. Во-первых, для любой метрики уравнения для экстремалей имеют интеграл

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \text{const}.$$

Отсюда следует равенство

$$r^{2\gamma-2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} r^{2\gamma} \dot{\varphi}^2 = C_0 = \text{const} > 0. \quad (89)$$

Во-вторых, инвариантность метрики относительно вращений вокруг оси z приводит к существованию дополнительного интеграла. Он строится следующим образом. Инвариантности метрики соответствует вектор Киллинга, который в цилиндрических координатах имеет простой вид $k = \partial_\varphi$. Непосредственной проверкой можно доказать, что

$$g_{\mu\nu}k^\mu\dot{x}^\nu = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае это приводит к закону сохранения

$$r^{2\gamma} \dot{\varphi} = C_1 = \text{const}. \quad (90)$$

Исследуем форму экстремалей $r = r(\varphi)$. Из уравнений (89), (90) можно найти первые производные

$$\dot{r} = \pm r^{-2\gamma+1} \sqrt{C_0 r^{2\gamma} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} C_1^2}, \quad (91)$$

$$\dot{\varphi} = C_1 r^{-2\gamma}. \quad (92)$$

Допустимые значения радиальной координаты r , при которых подкоренное выражение неотрицательно, будут найдены позже. Отсюда следует уравнение, опре-

деляющее форму нерадиальных ($C_1 \neq 0$) экстремалей,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm r \sqrt{\frac{C_0}{C_1^2} r^{2\gamma} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}}. \quad (93)$$

Это уравнение легко интегрируется, и в результате получаем явную формулу для экстремалей:

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{2\gamma} \sin^2 [\alpha(\varphi + \varphi_0)] = 1, \quad (94)$$

где

$$r_m = \left(\frac{C_1 \alpha}{\sqrt{C_0} \gamma}\right)^{1/\gamma} = \text{const} > 0, \quad \varphi_0 = \text{const}.$$

Постоянная r_m положительна и определяет минимальное расстояние, на которое экстремаль подходит к ядру дислокации, т.е. $r \geq r_m$. Только при этих значениях r подкоренное выражение в (93) неотрицательно. Постоянная интегрирования φ_0 произвольна и соответствует инвариантности задачи относительно вращений вокруг ядра дислокации.

Уравнения для экстремалей (86), (87) имеют также вырожденные решения

$$\frac{1}{\gamma} r^\gamma = \pm \sqrt{C_0} (t + t_0), \quad \varphi = \text{const}, \quad t_0 = \text{const}. \quad (95)$$

Экстремали (95) соответствуют радиальному движению фононов. Такие траектории неустойчивы в том смысле, что вблизи них нет нерадиальных экстремалей.

Отметим, что экстремали в виде окружности ($r = \text{const}$) отсутствуют как следствие уравнения (86), хотя интегралы движения (89), (90) и допускают такое решение. Это связано с тем, что при получении первого интеграла (89) уравнение (86) умножается на \dot{r} .

Проанализируем форму нерадиальных экстремалей (94). Для каждой экстремали радиус r сначала убывает от бесконечности до минимального значения r_m , а затем возрастает от r_m до бесконечности. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что аргумент синуса в (94) меняется от 0 до π . Таким образом получаем область изменения полярного угла

$$0 \leq \varphi + \varphi_0 \leq \frac{\pi}{\alpha}.$$

Это значит, что экстремаль приходит из бесконечности под углом $-\varphi_0$ и уходит на бесконечность под углом $\pi/\alpha - \varphi_0$. Это соответствует углу рассеяния

$$\chi = \pi - \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi\theta}{1+\theta}. \quad (96)$$

Отметим, что угол рассеяния фононов зависит только от угла дефицита θ и не зависит от упругих свойств среды. Угол рассеяния имеет простую физическую интерпретацию. Для положительных θ среда разрезается и раздвигается. В образовавшуюся полость вставляется клин из той же среды без упругих напряжений. Затем происходит склейка и клин сжимается. Коэффициент сжатия среды для каждой окружности с центром в начале координат из соображений симметрии составляет $1/(1+\theta)$. Поэтому угол рассеяния равен половине угла дефицита, умножен-

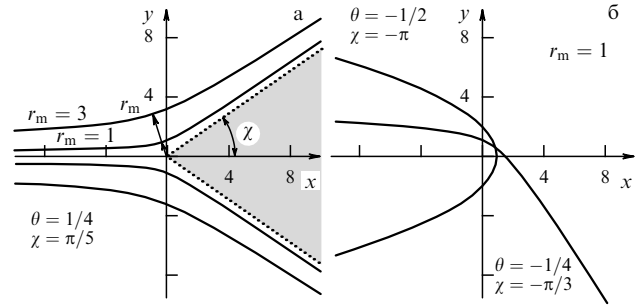


Рис. 11. (а) Экстремали для клиновой дислокации с положительным ($\theta > 0$) углом дефицита. Показаны две экстремали и их отражение относительно оси x для одного значения θ , но разных r_m . (б) Экстремали для клиновой дислокации с отрицательным ($-1/2 \leq \theta < 0$) углом дефицита. Показаны две экстремали для одинаковых значений r_m , но разных углов дефицита θ .

ного на коэффициент сжатия:

$$\chi = \frac{2\pi\theta}{2} \frac{1}{1+\theta}.$$

При $\theta = 0$ дислокация отсутствует и угол рассеяния, как и следовало ожидать, равен нулю.

При положительных углах дефицита угол рассеяния положителен, что соответствует отталкиванию фононов от угловой дислокации. Соответствующие экстремали показаны на рис. 11а, и они имеют асимптоты при $r \rightarrow \infty$. Отметим, что при положительных углах дефицита не каждые две точки плоскости r, φ можно соединить экстремалью, т.е. справа от клиновой дислокации имеется зона, в которую фононы, падающие слева, не попадают вовсе.

Все экстремали на рисунках в данном разделе построены численно. Значения угла дефицита θ , угла рассеяния χ и минимального расстояния до оси дислокации r_m указаны на рисунках. Для определенности мы выбрали $\varphi_0 = \pi$, что соответствует падению фононов слева.

При отрицательных углах дефицита угол рассеяния отрицателен и определяется той же формулой (96). Это соответствует притяжению фононов к оси дислокации. На рисунке 11б показаны две экстремали с одинаковым параметром r_m , но для двух дислокаций с разными углами дефицита. При $-1/2 < \theta < 0$ угол рассеяния меняется в пределах от 0 до 2π (рис. 11б). При $\theta = -1/2$ угол рассеяния равен 2π . Отметим, что при отрицательных углах дефицита фононы не имеют асимптот при $r \rightarrow \infty$, т.е. при $\theta = -1/2$ фононы падают из бесконечности ($x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$) и возвращаются в бесконечность ($x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$).

Если угол дефицита достаточно мал ($-1 < \theta < -1/2$), то фонон делает один оборот или несколько вокруг дислокации, а затем уходит в бесконечность. Примеры таких траекторий показаны на рис. 12–14.

Рассмотрим асимптотику нерадиальных экстремалей при $r \rightarrow \infty$. В соответствии с уравнением (91) вдали от ядра дислокации

$$\dot{r} \approx \pm \sqrt{C_0} r^{-\gamma+1}.$$

Отсюда следует, что зависимость радиуса от времени такая же, как и для радиальных экстремалей (95).

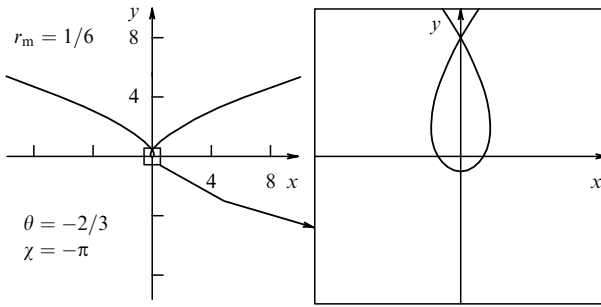


Рис. 12. При $\theta = -2/3$ экстремаль делает один оборот вокруг дислокации, а затем идет вперед в первоначальном направлении. Справа в квадрате показана увеличенная часть траектории вблизи оси дислокации.

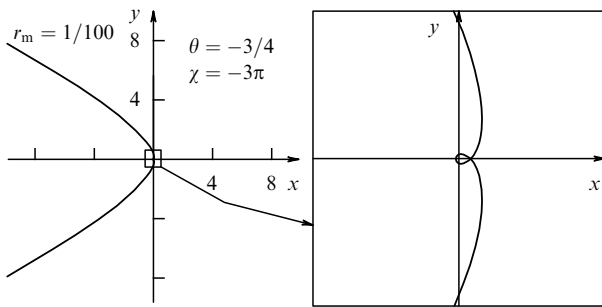


Рис. 13. При $\theta = -3/4$ экстремаль делает два оборота вокруг дислокации, а затем возвращается назад. Справа в квадрате показана увеличенная часть траектории вблизи оси дислокации.

Поскольку $\gamma > 0$, то бесконечное значение r соответствует бесконечному значению времени t . Это значит, что плоскость r, φ с заданной метрикой полна при $r \rightarrow \infty$. Начало координат (ядро дислокации) является сингулярной точкой. В нее попадают только радиальные экстремали при конечном значении времени.

Интегралы движения (89), (90) имеют простой физический смысл. Уравнения для экстремалей (84) следуют из вариационного принципа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (97)$$

описывающего движение свободной безмассовой точечной частицы в нетривиальной метрике $g_{\mu\nu}(x)$. При этом

метрика рассматривается как заданное внешнее поле, по которому варьирование не проводится.

Энергия, соответствующая этому лагранжиану, равна

$$E = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \frac{r^{2\gamma-2}}{R^{2\gamma-2}} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{r^{2\gamma}}{R^{2\gamma-2}} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2.$$

Если метрика, как в нашем случае, не зависит от времени явно, то энергия сохраняется ($E = \text{const}$) и для движения в плоскости r, φ ее численное значение пропорционально интегралу движения C_0 .

Для клиновой дислокации метрика не зависит от полярного угла φ , и лагранжиан инвариантен относительно вращений: $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$. Согласно теореме Нётер этой инвариантности соответствует сохранение углового момента

$$J = -\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{r^{2\gamma}}{R^{2\gamma-2}} \dot{\varphi} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что постоянная интегрирования C_1 пропорциональна угловому моменту.

Отметим, что поведение экстремалей качественно отличается от траекторий точечных частиц, двигающихся в плоском пространстве с евклидовой метрикой $\delta_{\mu\nu}$ во внешнем потенциальном поле $U(x)$. Нетрудно доказать, что траектории точечных частиц для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - U$$

не могут совпадать с экстремальными (84) ни для какой функции $U(x)$.

В настоящем разделе показано, как решается задача о рассеянии фононов на простейшей клиновой дислокации в геометрическом подходе. Результаты вычислений могут быть проверены экспериментально. В статье [59] решена более общая задача рассеяния фононов на произвольном распределении клиновых дислокаций, включая краевую дислокацию и непрерывное распределение дефектов. Решение этой задачи в геометрическом подходе представляется более простым, чем в рамках классической теории упругости, где необходимо решать уравнения в частных производных со сложными граничными условиями. В статье [59] вычисления были проведены в конформной калибровке для метрики. Для

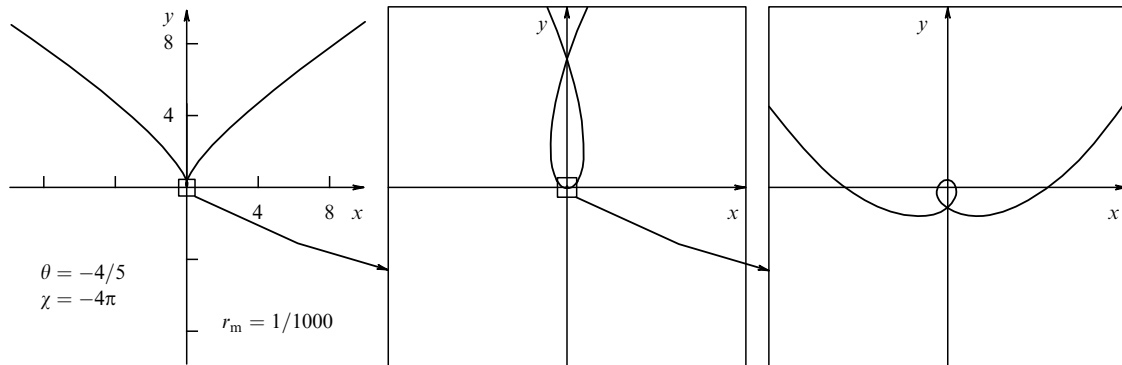


Рис. 14. При $\theta = -4/5$ экстремаль делает два с половиной оборота вокруг дислокации, а затем идет вперед в первоначальном направлении. Справа в двух квадратах показана последовательно увеличенная часть траектории вблизи оси дислокации.

сравнения с экспериментом их необходимо пересчитать в упругой калибровке, которой в геометрическом подходе придается физический смысл.

14. Примесь в поле клиновой дислокации

Рассмотрим упругую среду с клиновой дислокацией, которая содержит один атом примеси или вакансию. Если считать влияние примеси на распределение упругих напряжений малым по сравнению с упругими напряжениями, вызванными самой дислокацией, то можно полагать, что движение примеси происходит в трехмерном пространстве с нетривиальной метрикой (75). В геометрическом подходе мы считаем, что потенциальная энергия взаимодействия примеси с дислокацией равна нулю, и все взаимодействие происходит за счет изменения кинетической энергии, куда явным образом входит нетривиальная метрика.

Решим соответствующую квантово-механическую задачу. Рассмотрим связанные состояния примеси при наличии клиновой дислокации, двигающейся в цилиндре радиуса R . При этом мы предполагаем, что ось цилиндра совпадает с ядром дислокации. Стационарное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \tilde{\Delta} \Psi = E \Psi, \quad (98)$$

где \hbar — постоянная Планка, M , Ψ и E — масса, волновая функция и энергия примеси. Нетривиальность взаимодействия примеси с дислокацией сводится к нетривиальному оператору Лапласа – Бельтрами

$$\tilde{\Delta} \Psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi),$$

где метрика была ранее найдена (см. (75)) и $g = \det g_{\mu\nu}$.

Исходя из симметрии задачи, будем решать уравнение Шрёдингера (98) в цилиндрических координатах методом разделения переменных. Пусть

$$\Psi(r, \varphi, z) = Z(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(r) \exp(im\varphi),$$

где для нормированной функции $Z(z)$ имеются две следующие возможности. Если вдоль оси z частица движется свободно с импульсом $\hbar k$, то

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikz).$$

Если же ее движение ограничено плоскостями $z = 0$ и $z = z_0$, то

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{z_0}} \sin k_l z, \quad k_l = \frac{\pi l}{z_0}.$$

В дальнейшем целочисленный индекс l , возникающий при ограниченном движении, мы для краткости опустим, имея в виду обе возможности.

Условие целочисленности постоянной m (собственного значения проекции момента импульса на ось z) возникает из условия периодичности

$$\Psi(r, \varphi, z) = \Psi(r, \varphi + 2\pi, z).$$

Тогда для радиальной волновой функции $\psi_m(r)$ получаем уравнение

$$\frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma-1}} \partial_r (r \partial_r \psi_m) + \left(\frac{2ME}{\hbar^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma}} m^2 - k^2 \right) \psi_m = 0. \quad (99)$$

Введем новую радиальную координату

$$\rho = \frac{r^\gamma}{\gamma R^{\gamma-1}}.$$

С точностью до постоянной это — преобразование (72), (74). Тогда радиальное уравнение примет вид

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \psi_m) + \left(\beta^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) \psi_m = 0, \quad (100)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} - k^2, \quad v = \frac{|m|}{\alpha} > 0.$$

Это есть уравнение Бесселя. Будем решать его при граничном условии

$$\psi_m|_{\rho=R/\gamma} = 0, \quad (101)$$

что соответствует движению примеси внутри цилиндра с непроницаемой границей. Общее решение уравнения Бесселя (100) имеет вид

$$\psi_m = c_m J_v(\beta\rho) + d_m N_v(\beta\rho), \quad c_m, d_m = \text{const},$$

где J_v и N_v — функции Бесселя и Неймана порядка v [83]. Из условия ограниченности волновой функции на оси цилиндра следует $d_m = 0$. Постоянные интегрирования c_m находятся из условия нормировки

$$\int_0^R dr r |\psi_m|^2 = 1.$$

Из граничного условия (101) следует уравнение на β

$$J_v\left(\frac{\beta R}{\gamma}\right) = 0, \quad (102)$$

которое определяет уровни энергии связанных состояний. Хорошо известно, что при вещественных $v > -1$ и R/γ это уравнение имеет только вещественные нули. Положительные нули образуют бесконечное счетное множество, и все они простые [83]. Отсюда следует неравенство

$$\beta^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} - k^2 \geq 0.$$

Пронумеруем положительные нули уравнения (102) индексом $n = 1, 2, \dots$ (главное квантовое число): $\beta \rightarrow \beta_n(m, \alpha, \gamma, R)$. Тогда спектр связанных состояний имеет вид

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2M} (k^2 + \beta_n^2). \quad (103)$$

При больших радиусах ($\beta\rho \gg 1$ и $\beta\rho \gg \nu$) справедлива асимптотика

$$J_\nu(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}} \cos\left(\beta\rho - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Отсюда следует явное выражение для спектра

$$\beta_n = \frac{\gamma\pi}{R} \left(n + \frac{|m|}{2\alpha} - \frac{1}{4} \right). \quad (104)$$

В отсутствие дефекта $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\rho = r$ и радиальные функции ψ_m выражаются через функции Бесселя целого порядка $\nu = |m|$. В этом случае спектр энергии связанных состояний зависит только от размеров цилиндра. При наличии клиновой дислокации функции Бесселя в общем случае будут иметь нецелый порядок. При этом спектр уровней энергии связанных состояний приобретает зависимость от угла дефицита клиновой дислокации θ и коэффициента Пуассона σ , характеризующего упругие свойства среды.

Если масса примеси и вакансии определена интегралом (10), то для примеси $M > 0$ и собственные значения энергии положительны. Для вакансии $M < 0$ и собственные значения энергии отрицательны. В этом случае спектр энергии не ограничен снизу, что вызывает серьезные проблемы для физической интерпретации. По-видимому, в уравнение Шрёдингера для примеси и вакансии следует подставлять не голую массу (10), а эффективную, учитывающую вклад от упругих напряжений, возникающих вокруг вакансии. В настоящее время этот вопрос открыт.

Изложение в данном разделе близко к [28]. В отличие от указанной статьи мы используем упругую калибровку для метрики. Поэтому наши ответы зависят не только от угла дефицита угловой дислокации, но и от упругих свойств среды.

Расчеты уровней энергии примеси в поле клиновой дислокации по существу эквивалентны расчетам энергии связанных состояний в эффекте Ааронова–Бома [84] (см. обзоры [85, 86]). Различие сводится только к замене порядка функций Бесселя

$$\nu = \left| m - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|,$$

где $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока, а e — заряд электрона.

Рассмотренный пример показывает, как в первом приближении учитывается влияние наличия дефектов в геометрическом подходе. Если расчеты в некоторой задаче проведены в упругой среде без дефектов, то для учета влияния дефектов необходимо заменить плоскую евклидову метрику на нетривиальную метрику, описывающую данное распределение дефектов. Математически эта задача может оказаться сложной, так как для определения метрики необходимо решить трехмерные уравнения Эйнштейна. Однако принципиальных трудностей здесь нет: влияние дислокаций сводится к изменению метрики.

15. Заключение

Геометрическая теория дефектов описывает с единой точки зрения дефекты упругой среды (дислокации) и дефекты спиновой структуры (дискликации). Эту

модель можно использовать для описания как отдельных дефектов, так и их непрерывного распределения. Геометрическая теория дефектов основана на геометрии Римана–Картана. По определению, тензоры кручения и кривизны равны соответственно поверхностным плотностям векторов Бюргерса и Франка.

Уравнения, определяющие статическое распределение дефектов, ковариантны и имеют тот же вид, что и уравнения моделей гравитации с динамическим кручением. Для однозначного выбора решения необходимо зафиксировать систему координат. С этой целью предложена упругая калибровка для репера и лоренцева калибровка для $SO(3)$ -связности. Если дефекты отсутствуют, то возможно введение векторного поля смещений и поля спиновой структуры. Тогда уравнения равновесия тождественно удовлетворяются, а калибровочные условия сводятся к уравнениям теории упругости и главного кирального $SO(3)$ -поля. Таким образом, геометрическая теория дефектов содержит в себе теорию упругости и модель главного кирального поля.

В определенном смысле упругая калибровка представляет собой уравнения нелинейной теории упругости. Нелинейность вводится в теорию упругости двумя способами. Во-первых, тензор деформаций определяется не через вектор смещения с помощью линейного соотношения (4), а через индуцированную метрику

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}).$$

Тогда тензор напряжений будет представлен бесконечным рядом по вектору смещений. Во-вторых, закон Гука можно изменить, предположив нелинейную зависимость тензора напряжений от тензора деформаций. Так вот, упругая калибровка есть уравнения нелинейной теории упругости, в которой тензор деформаций предполагается определенным через индуцированную метрику, а закон Гука сохраняется линейным. Обобщение на случай нелинейной зависимости тензора деформаций от напряжений очевидно.

Для примера здесь рассмотрена клиновая дислокация с точки зрения теории упругости и геометрической теории дефектов. Показано, что теория упругости воспроизводит только линейное приближение геометрического подхода. В отличие от индуцированной метрики, полученной из точного решения уравнений линейной теории упругости, выражение для метрики, полученное, как точное решение уравнений Эйнштейна в упругой калибровке, проще, определено во всем пространстве и при всех углах дефицита. Найденное выражение для метрики можно проверить экспериментально.

В качестве приложений геометрической теории дефектов рассмотрены две задачи. Первая — рассеяние фононов на клиновой дислокации. В эйкональном приближении эта задача сводится к анализу экстремалей для метрики, описывающей данную дислокацию. Уравнения для экстремалей явно проинтегрированы, и найден угол рассеяния фононов. Вторая из рассмотренных задач — определение волновых функций и энергетического спектра примеси в присутствии клиновой дислокации. С этой целью решено уравнение Шрёдингера. Математически такая задача эквивалентна решению уравнения Шрёдингера для связанных состояний в эффекте Ааронова–Бома [86]. Найдена явная зависи-

мость спектра примеси в присутствии клиновой дислокации от угла дефицита и упругих свойств среды.

Геометрическую теорию статического распределения дефектов можно построить и для мембран, т.е. на плоскости R^2 . С этой целью нужно рассмотреть евклидову версию [87] двумерной гравитации с кручением [88–90]. Данная модель замечательна тем, что является интегрируемой [91–94].

Проведенное геометрическое построение в теории дефектов можно обратить и рассматривать гравитационное взаимодействие масс во Вселенной как взаимодействие дефектов упругого эфира. При этом точечные массы будут соответствовать точечным дефектам (вакансиям и примесям), а космические струны [95, 96] — клиновым дислокациям. При таком взгляде на гравитацию возникает вопрос об упругой калибровке, которой в геометрической теории дефектов придается прямой физический смысл. Если принять точку зрения из теории дефектов, то упругие свойства эфира соответствуют некоторому значению коэффициента Пуассона, который можно измерить экспериментально.

Представляется интересным и важным для приложений включить в рассматриваемый статический подход время для описания движения дефектов в среде. Такая модель в настоящее время отсутствует. С геометрической точки зрения обобщение провести несложно, по крайней мере, в принципе. Достаточно заменить евклидово пространство R^3 на пространство Минковского $R^{1,3}$ и написать подходящий лагранжиан, квадратичный по тензору кривизны и кручения, что соответствует настоящей модели гравитации с кручением. Одна из возникающих трудностей заключается в физической интерпретации дополнительных компонент репера и лоренцевой связности, которые содержат временной индекс. Физический смысл временной компоненты репера $e_0^i \rightarrow \partial_0 u^i = v^i$ прост — это скорость точки среды. Такая интерпретация естественна с физической точки зрения, поскольку движение непрерывно распределенных дислокаций означает течение среды. Действительно, жидкость можно представить как упругую среду с непрерывным распределением подвижных дислокаций. Это значит, что динамическая теория дефектов, основанная на геометрии Римана–Картана, должна включать в себя гидродинамику. В настоящее время неясно, как это происходит. Остается также неясной физическая интерпретация других компонент репера и лоренцевой связности с временным индексом.

Автор выражает искреннюю благодарность И.В. Волочичу за многочисленные обсуждения вопросов, затронутых в статье. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00884 и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1542.2003.1).

16. Приложение. Немного дифференциальной геометрии

В дополнение мы приведем кратко основные сведения из дифференциальной геометрии и введем обозначения, которые использованы в настоящем обзоре. Изложение проведено в локальных координатах, чего достаточно для наших целей. В качестве учебника по дифференциальной геометрии рекомендуем [97].

Мы говорим, что на дифференцируемом многообразии M , $\dim M = m$, задана геометрия, если заданы

метрика g и аффинная связность Γ . Мы предполагаем, что все поля на многообразии задаются гладкими $C^\infty(M)$ функциями, за исключением, возможно, некоторых сингулярных точек, и не будем в дальнейшем это оговаривать. Считаем также, что многообразие M топологически тривиально, т.е. диффеоморфно евклидову пространству R^m .

В локальной системе координат x^μ , $\mu = 1, \dots, m$, метрика задается невырожденным симметричным ковариантным тензором второго ранга $g_{\mu\nu}(x)$, который определяет скалярное произведение векторных полей $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$

$$(X, Y) = X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad \det g_{\mu\nu} \neq 0. \quad (\text{П.1})$$

В общем случае скалярное произведение может не быть положительно определено. Если скалярное произведение положительно определено, то мы говорим, что на многообразии задана риманова метрика. По определению, метрика является ковариантным тензорным полем, т.е. при преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$ преобразуется по тензорному закону

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}.$$

Отсюда следует, что скалярное произведение векторных полей (X, Y) является скалярным полем. Аналогичным образом свертка с метрикой $g_{\mu\nu}$ и ее обратной $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$, позволяет строить скалярные поля из тензоров более высокого ранга или понижать их ранг. Метрика также используется для подъема и опускания индексов.

Аффинная связность на многообразии в локальной системе координат задается набором коэффициентов $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$, которые при диффеоморфизмах координат преобразуются по правилу

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\rho'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}}. \quad (\text{П.2})$$

Эти коэффициенты не образуют тензорного поля ввиду наличия неоднородного слагаемого в (П.2). Аффинная связность на многообразии определяет ковариантную производную тензорных полей. В частности, ковариантные производные векторного поля и 1-формы $A = dx^\mu A_\mu$ имеют вид

$$\nabla_\mu X^\nu = \partial_\mu X^\nu + X^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu, \quad (\text{П.3})$$

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho. \quad (\text{П.4})$$

Ковариантная производная скалярной функции $\varphi(x)$ совпадает с частной производной $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$. Ковариантная производная тензоров более высоких рангов строится аналогично и содержит по одному слагаемому со знаком плюс и минус для каждого контравариантного и ковариантного индекса соответственно. Нетрудно проверить, что ковариантная производная от тензора произвольного типа (r, s) является тензорным полем типа $(r, s+1)$, т.е. имеет один дополнительный ковариантный индекс. Отметим, что ковариантная производная от произведения тензорных полей может содержать произвольные свертки индексов. Например,

$$\partial_\mu (X^\nu A_\nu) = \nabla_\mu (X^\nu A_\nu) = (\nabla_\mu X^\nu) A_\nu + X^\nu (\nabla_\mu A_\nu).$$

Поскольку неоднородные слагаемые в (П.2) симметричны по индексам μ' и ν' , то антисимметричная часть аффинной связности, $2\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho$ образует тензорное поле типа (1, 2), которое называется тензором кручения,

$$T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (\text{П.5})$$

В общем случае связность $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ никакой симметрии по индексам не имеет и никак не связана с метрикой $g_{\mu\nu}$, поскольку эти понятия определяют на многообразии M разные геометрические операции. Будем говорить, что в этом случае на M задана аффинная геометрия. Подчеркнем, что метрика и аффинная связность задаются произвольным образом и являются совершенно независимыми геометрическими объектами. Поэтому при построении физических моделей их можно рассматривать как независимые поля, имеющие разную физическую интерпретацию.

Если на многообразии задана аффинная геометрия, то можно построить тензор неметричности $Q_{\mu\nu\rho}$, который по определению равен ковариантной производной от метрики

$$-Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma}. \quad (\text{П.6})$$

Тензор неметричности по построению симметричен относительно перестановки двух последних индексов: $Q_{\mu\nu\rho} = Q_{\mu\rho\nu}$. Заметим, что для определения неметричности необходимы оба объекта — и метрика, и связность.

Таким образом, по заданной метрике и аффинной связности построено два тензорных поля: кручение и тензор неметричности. Докажем, что по заданной метрике, кручению и тензору неметричности можно однозначно восстановить соответствующую аффинную связность. Уравнение (П.6) всегда можно решить относительно связности Γ . Действительно, линейная комбинация

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} + \nabla_\nu g_{\rho\mu} - \nabla_\rho g_{\mu\nu}$$

приводит к следующему выражению для аффинной связности со всеми опущенными индексами:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \\ & + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} - T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu}) + \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu\rho} + Q_{\nu\rho\mu} - Q_{\rho\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Правая часть этого равенства симметрична по индексам μ и ν , за исключением одного слагаемого, $T_{\mu\nu\rho}/2$, что согласуется с определением тензора кручения (П.5). Таким образом, для того чтобы на многообразии M задать аффинную геометрию, необходимо и достаточно задать три тензорных поля: метрику, кручение и неметричность. Подчеркнем еще раз, что все три объекта можно задать совершенно независимым образом и в моделях математической физики их можно рассматривать как независимые динамические переменные.

Нетрудно посчитать число независимых компонент у связности, тензора кручения и неметричности:

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\mu\nu}^\sigma] &= m^3, \quad [T_{\mu\nu}^\rho] = \frac{m^2(m-1)}{2}, \\ [Q_{\mu\nu\rho}] &= \frac{m^2(m+1)}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что суммарное число независимых компонент кручения и неметричности равно числу компонент аффинной связности.

Рассмотрим частные случаи аффинной геометрии.

При попытке объединить гравитацию с электромагнетизмом Г. Вейль рассмотрел тензор неметричности специального вида [98]

$$Q_{\mu\nu\rho} = W_\mu g_{\nu\rho}, \quad (\text{П.8})$$

где W_μ — форма Вейля, отождествленная с электромагнитным потенциалом (при этом предполагалось, что кручение тождественно равно нулю). Будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана–Вейля*, если на нем задана метрика, кручение и неметричность специального вида (П.8).

Если тензор неметричности тождественно равен нулю: $Q_{\mu\nu\rho} = 0$, а метрика и кручение нетривиальны, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана*. В этом случае из (П.7) следует, что аффинная связность однозначно определяется метрикой и кручением:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = & \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \\ & + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} - T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Такую связность называют метрической, поскольку ковариантная производная от метрики тождественно равна нулю:

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma} = 0. \quad (\text{П.10})$$

Это условие метричности обеспечивает коммутативность ковариантного дифференцирования с опусканием и подъемом индексов.

Если тензор кручения равен нулю: $T_{\mu\nu}^\rho = 0$, а неметричность имеет вид (П.8), то будем говорить, что задана *геометрия Римана–Вейля*.

Если и тензор неметричности, и кручение тождественно равны нулю: $Q_{\mu\nu\rho} = 0$, $T_{\mu\nu}^\rho = 0$, а метрика нетривиальна, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана*. В этом случае метрическая связность симметрична по двум первым индексам и однозначно определяется метрикой

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (\text{П.11})$$

Эта связность называется *связностью Леви–Чивиты* или *символами Кристоффеля*.

Для обозначения геометрических объектов, построенных только по метрике при нулевых кручении и тензоре неметричности, т.е. в (псевдо)римановой геометрии, мы используем знак тильды. Приставка псевдо используется в том случае, если метрика не является положительно определенной.

Из выражения для символов Кристоффеля (П.11) следует

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma}. \quad (\text{П.12})$$

Это значит, что для того, чтобы символы Кристоффеля в некоторой системе координат были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе координат

компоненты метрики были постоянны. Поскольку символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, то в другой системе координат они могут быть нетривиальны. Например, символы Кристоффеля для евклидова пространства в декартовой системе координат равны нулю, но, скажем, в сферической или цилиндрической системе координат они отличны от нуля.

В случае, когда тензор неметричности и кручение тождественно равны нулю и при этом в окрестности любой точки существует система координат, в которой метрика является единичной диагональной матрицей, и, следовательно, символы Кристоффеля равны нулю, геометрия называется локально евклидовой. Соответствующая система координат называется *декартовой*.

Мы говорим, что векторное поле $X = X^\mu \partial_\mu$ параллельно перенесено вдоль кривой $x^\mu(t)$, $t \in R$, если

$$\dot{x}^\nu \nabla_\nu X^\mu = 0,$$

где $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dt$ — касательный вектор к кривой. Умножив это уравнение на dt , получим

$$\delta X^\mu = \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu = -\delta x^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\mu X^\rho,$$

где $\delta x^\nu = dt \dot{x}^\nu$. Мы говорим, что при параллельном переносе из точки x^ν в близкую точку $x^\nu + \delta x^\nu$ вектор X^μ получает приращение δX^μ , линейное по δx^ν и компонентам векторного поля. Аналогично определяется параллельный перенос произвольных тензорных полей вдоль кривой $x^\mu(t)$. Результат параллельного переноса между двумя точками в общем случае зависит от кривой, соединяющей эти точки. Отметим, что параллельный перенос вдоль кривой задается только аффинной связностью и не имеет никакого отношения к метрике.

В аффинной геометрии существуют выделенные кривые $x^\mu(t)$ двух типов: геодезические и экстремали. Геодезической линией называется кривая, касательный вектор к которой остается касательным при параллельном переносе вдоль кривой. При каноническом выборе параметра t вдоль кривой геодезическая линия определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \quad (\text{П.13})$$

Несмотря на то, что уравнения геодезических линий задаются только симметричной частью коэффициентов аффинной связности $\Gamma_{\{\mu\nu\}}^\rho$, последняя нетривиально зависит от кручения и неметричности. Из явного выражения (П.7) следует

$$\Gamma_{\{\mu\nu\}}^\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}^\rho + T_{\nu\mu}^\rho) + \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu}^\rho + Q_{\nu\mu}^\rho - Q_{\mu\nu}^\rho).$$

Вторым типом выделенных кривых в аффинной геометрии являются экстремали, или линии экстремальной длины, соединяющие две заданные точки. Эти линии определяются исключительно метрикой. При каноническом выборе параметра вдоль кривой экстремали описываются уравнением, похожим на (П.13),

$$\ddot{x}^\mu = -\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \quad (\text{П.14})$$

Однако теперь в правой части стоит не общая аффинная связность, а символы Кристоффеля, построенные по метрике. Мы видим, что в общем случае геодезические

линии и экстремали — это различные кривые на многообразии. В геометрии Римана–Картана геодезические линии и экстремали совпадают тогда и только тогда, когда тензор кручения антисимметричен по всем трем индексам. В римановой геометрии геодезические и экстремали совпадают всегда.

Важнейшую роль в дифференциальной геометрии играет тензор кривизны аффинной связности, который возникает в различных контекстах. В локальной системе координат он определяется следующей формулой:

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (\text{П.15})$$

где выражение в скобках $(\mu \leftrightarrow \nu)$ обозначает предыдущие слагаемые с переставленными индексами μ и ν . Нетрудно проверить, что кривизна (П.15) действительно является тензорным полем. Отметим, что тензор кривизны никакого отношения к метрике не имеет и определяется только связностью. В аффинной геометрии тензор кривизны со всеми опущенными индексами никакой симметрии относительно перестановки индексов не имеет, за исключением антисимметрии по первым двум индексам.

Свертка тензора кривизны по двум индексам дает тензор Риччи $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$, который также определяется только связностью. В римановой геометрии тензор Риччи для связности Леви–Чивиты симметричен относительно перестановки индексов $\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\nu\mu}$. В геометрии Римана–Картана при ненулевом тензоре кручения эта симметрия в общем случае отсутствует.

Если на многообразии задана также метрика, то можно построить скалярную кривизну $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$.

Аффинная связность называется локально тривиальной, если в окрестности каждой точки можно выбрать такую систему координат, в которой все компоненты связности равны нулю. Приведем две важные теоремы.

Теорема 1. *Для локальной тривиальности аффинной связности необходимо и достаточно, чтобы ее кручение и тензор кривизны равнялись нулю на M .*

Доказательство теоремы сводится к анализу правила преобразования компонент аффинной связности (П.2). Если в новой системе координат симметричная часть коэффициентов связности равна нулю, то возникает система дифференциальных уравнений на функции перехода. Условием локальной интегрируемости этой системы уравнений является равенство нулю тензора кривизны.

Более глубокое утверждение доказано в [99].

Теорема 2. *Если при заданной аффинной геометрии тензоры кручения, неметричности и кривизны равны нулю на всем многообразии, то многообразие изометрично либо всему (псевдо)евклидову пространству R^m , либо фактор-пространству R^m/G , где G — дискретная группа преобразований, действующая свободно.*

В последней теореме предполагается, что на многообразии заданы и метрика, и аффинная связность.

В основе геометрической теории дефектов лежит геометрия Римана–Картана, которая определяется метрикой и кручением. При анализе таких моделей вместо переменных метрика и кручение удобно использовать переменные Картана: репер и $SO(m)$ -связность. Здесь мы предполагаем, что метрика на многообразии положительно определена. Если метрика не является положительно определенной, то возникла бы $SO(p, q)$ -связность, где $p + q = m$.

Для римановой метрики ортонормальный репер $e_\mu^i(x)$, $i = 1, \dots, m$, определяется системой квадратных уравнений

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \delta_{ij}, \quad (\text{П.16})$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Это соотношение однозначно определяет метрику по заданному реперу. Обратно, система уравнений (П.16) определяет репер по заданной метрике с точностью до локальных $SO(m)$ -вращений. Мы различаем греческие и латинские индексы, так как на них действуют разные группы преобразований. Из определения (П.16) следует, что $e = \det e_\mu^i \neq 0$. Компоненты обратного репера e^μ_i , $e^\mu_i e_\nu^i = \delta_\nu^\mu$, можно рассматривать, как компоненты m ортонормальных векторных полей $e_i = e^\mu_i \partial_\mu$ на многообразии M относительно метрики g

$$(e_i, e_j) = e^\mu_i e^\nu_j g_{\mu\nu} = \delta_{ij}.$$

Компоненты репера e_μ^i определяют на многообразии m ортонормальных 1-форм $e^i = dx^\mu e_\mu^i$.

Известно, что на любом дифференцируемом многообразии M можно задать риманову метрику (см., например, [100]). В то же время глобальное задание репера определяет, в частности, ориентацию многообразия M . Тем самым глобально репер может существовать только на ориентируемых многообразиях. Существуют также другие топологические препятствия для глобального существования репера, на которых мы останавливаться не будем.

Координатный базис ∂_μ касательного пространства в каждой точке M называется голономным. Компоненты тензорных полей произвольного типа можно рассматривать также относительно неголономного базиса e_i касательных пространств, который определяется репером. Например, векторное поле имеет компоненты

$$X = X^\mu \partial_\mu = X^i e_i, \quad X^i = X^\mu e_\mu^i.$$

Мы всегда предполагаем, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот осуществляется с помощью репера.

Перейдем к определению $SO(m)$ -связности $\omega_{\mu j}^i(x)$. Так называется связность на главном расслоении со структурной группой Ли $SO(m)$ и базой M . Если на многообразии M заданы геометрия Римана–Картана и репер, то на нем можно определить $SO(m)$ -связность с помощью следующего соотношения:

$$\nabla_\mu e_\nu^i = \partial_\mu e_\nu^i - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^i + e_\nu^j \omega_{\mu j}^i = 0. \quad (\text{П.17})$$

Отсюда следует, что компоненты $\omega_{\mu j}^i$ преобразуются по греческому индексу как ковекторное поле. Тем самым они определяют 1-форму на M . При заданном репере это соотношение устанавливает взаимно однозначное соответствие между компонентами связностей $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ и $\omega_{\mu j}^i$. $SO(m)$ -связность задает ковариантные производные от компонент тензорных полей относительно неголономного базиса. Например,

$$\nabla_\mu X^i = \partial_\mu X^i + X^j \omega_{\mu j}^i, \quad \nabla_\mu X_i = \partial_\mu X_i - \omega_{\mu j}^i X_j. \quad (\text{П.18})$$

Естественным образом определяется ковариантная производная от тензорного поля, имеющего как греческие,

так и латинские индексы. Взятие ковариантной производной от выражения (П.16) приводит к антисимметричности компонент $\omega_{\mu}^{ij} = -\omega_{\mu}^{ji}$. Это значит, что 1-форма $dx^\mu \omega_{\mu j}^i$ принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$, что действительно соответствует $SO(m)$ -связности.

В общем случае аффинной геометрии с помощью соотношений (П.16) и (П.17) также можно определить переменные Картана. Для этого в правой части (П.16) необходимо просто заменить символ Кронекера на произвольную симметричную невырожденную матрицу η_{ij} . В этом случае соотношение (П.17) задает линейную $GL(m, R)$ -связность. В геометрии Римана–Картана при лоренцевой сигнатуре метрики мы бы имели лоренцеву $SO(1, m-1)$ -связность.

Чтобы убедиться в том, что коэффициенты $\omega_{\mu j}^i$ действительно задают $SO(m)$ -связность в геометрии Римана–Картана с римановой метрикой, рассмотрим локальные вращения с матрицей $S_j^i(x) \in SO(m)$. По определению компоненты векторных полей и 1-форм при локальных вращениях преобразуются по правилу

$$X'^i = X^j S_j^i, \quad X'_i = S^{-1}_i{}^j X_j. \quad (\text{П.19})$$

Чтобы ковариантные производные (П.18) имели тензорный закон преобразования при локальных вращениях, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $SO(m)$ -связности преобразовывались по правилу

$$\omega'_{\mu i}{}^j = S^{-1}_i{}^k \omega_{\mu k}{}^l S_l^j + \partial_\mu S^{-1}_i{}^k S_k^j. \quad (\text{П.20})$$

Это и есть закон преобразования $SO(m)$ -связности. Этот же закон преобразования следует из выражения (П.17), если репер e_μ^i преобразуется по индексу i как вектор, а символы Кристоффеля остаются неизменными.

Конечно, на многообразии M можно ввести метрическую и $SO(m)$ -связности независимым образом. Если затем потребовать, чтобы $SO(m)$ -связность действовала на компоненты тензорных полей относительно неголономного базиса, задаваемого репером, то мы придем к взаимно однозначному соотношению между коэффициентами связностей (П.17).

Выразим коэффициенты метрической связности $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ через репер e_μ^i и $SO(m)$ -связность $\omega_{\mu j}^i$ с помощью соотношения (П.17) и подставим в определения кручения (П.5) и кривизны (П.15). В результате получим выражения для кручения и кривизны в переменных Картана

$$T_{\mu\nu}^i = \partial_\mu e_\nu^i - e_\mu^j \omega_{\nu j}^i - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (\text{П.21})$$

$$R_{\mu\nu j}^i = \partial_\mu \omega_{\nu j}^i - \omega_{\mu j}^k \omega_{\nu k}^i - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (\text{П.22})$$

где

$$T_{\mu\nu}^i = T_{\mu\nu}^\rho e_\rho^i, \quad R_{\mu\nu j}^i = R_{\mu\nu\rho}^\sigma e_\sigma^i e_j^\rho.$$

Кручение (П.21) и кривизна (П.22) являются 2-формами на многообразии M со значениями соответственно в векторном пространстве и алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$.

$SO(m)$ -связность $\omega_{\mu j}^i$ называется локально тривиальной, если для любой точки существует окрестность, содержащая эту точку, такая, что ее можно представить в виде

$$\omega_{\mu j}^i = \partial_\mu S^{-1}_j{}^k S_k^i. \quad (\text{П.23})$$

Очевидно, что после локального вращения с матрицей $S^{-1}_j{}^i$ все коэффициенты связности обратятся в нуль. Такую связность называют также чистой калибровкой. Легко проверить, что кривизна локально тривиальной связности тождественно равна нулю. Верно также и обратное утверждение.

Теорема 3. *$SO(m)$ -связность локально тривиальна тогда и только тогда, когда ее форма кривизны тождественно равна нулю.*

Эта теорема справедлива для произвольной структурной группы Ли. Доказательство сводится к анализу закона преобразования (П.20). Если левая часть этого равенства равна нулю, то получаем систему уравнений на поле $S_j{}^i(x)$, для которой условием локальной разрешимости является равенство нулю тензора кривизны.

Пространство с нулевым тензором кривизны $R_{\mu\nu}{}^i{}_j = 0$ называется пространством с абсолютным параллелизмом, так как параллельный перенос вектора не зависит от пути, соединяющего две заданные точки многообразия.

Для локально тривиальной $SO(m)$ -связности совершим такое $SO(m)$ -вращение, чтобы связность обратилась в нуль: $\omega_{\mu j}{}^i = 0$. Тогда равенство нулю тензора кручения примет вид

$$\partial_\mu e_\nu{}^i - \partial_\nu e_\mu{}^i = 0.$$

Это уравнение является условием локальной интегрируемости системы уравнений

$$\partial_\mu y^i = e_\mu{}^i \quad (\text{П.24})$$

для m функций $y^i(x)$. Решение этой системы уравнений дает функции перехода к декартовой системе координат. Таким образом, равенство нулю тензоров кривизны и кручения является необходимым и достаточным условием локального существования полей $S_j{}^i(x)$ и $y^i(x)$, т.е. существования такого локального вращения и системы координат, в которой связность равна нулю, а метрика является евклидовой. Отметим, что равенства нулю одного тензора кручения недостаточно для существования декартовой системы координат.

В геометрической теории дефектов рассматривается трехмерное пространство. В связи с этим сделаем два замечания. В низших размерностях алгебраическая структура тензора кривизны со всеми опущенными индексами значительно упрощается. В двух измерениях полный тензор кривизны в геометрии Римана – Картана взаимно однозначно определяется своей скалярной кривизной

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) R.$$

В трехмерном пространстве полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется тензором Риччи и скалярной кривизной

$$R_{ijkl} = \delta_{ik}R_{jl} - \delta_{il}R_{jk} - \delta_{jk}R_{il} + \delta_{jl}R_{ik} - \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) R. \quad (\text{П.25})$$

Эти формулы справедливы и при ненулевом кручении.

В заключение приложения приведем тождество, которое справедливо в геометрии Римана – Картана при

любом числе измерений:

$$R(e, \omega) + \frac{1}{4} T_{ijk} T^{ijk} - \frac{1}{2} T_{ijk} T^{kij} - T_i T^i - \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu) = \tilde{R}(e), \quad e = \det e_\mu{}^i. \quad (\text{П.26})$$

В правой части этого равенства стоит риманова скалярная кривизна, построенная только по реперу при нулевом тензоре кручения.

Список литературы

1. Kondo K, in *Proc. of the 2nd Japan National Congress for Applied Mechanics, Tokyo, Japan, 1952* (Tokyo, 1952) p. 41
2. Nye J F *Acta Metal.* **1** 153 (1953)
3. Bilby B A, Bullough R, Smith E *Proc. R. Soc. London Ser. A* **231** 263 (1955)
4. Kröner E *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen* (Berlin: Springer, 1958)
5. Sedov L I, Berditshevskii V L, in *Mechanics of Generalized Continua: Proc. of the IUTAM-Symp. on the Generalized Cosserat Continuum Theory of Dislocations with Applications, Germany, 1967* (Ed. E Kröner) (Berlin: Springer-Verlag, 1968) p. 214
6. Kléman M, in *Dislocations in Solids* (Ed. F R N Nabarro) Vol. 5 (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1980) p. 243
7. Kröner E, in *Physics of Defects, Less Houches, Session XXXV, 1980* (Eds R Balian, M Kléman, J-P Poirier) (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1981) p. 282
8. Dzyaloshinskii I E, Volovick G E *Ann. Phys.* (New York) **125** 67 (1980)
9. Kadić A, Edelen D G B *A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations* (Berlin: Springer-Verlag, 1983) [Кадич А, Эделен Д *Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций* (М.: Мир, 1987)]
10. Kunin I A, Kunin B I, in *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics* (Lecture Notes in Physics, Vol. 249, Eds E Kröner, K Kirchgässner) (Berlin: Springer-Verlag, 1986) p. 246
11. Kleinert H *Gauge Fields in Condensed Matter* Vol. 2 (Singapore: World Scientific, 1990)
12. Hehl F W et al. *Phys. Rep.* **258** 1 (1995)
13. Cartan E *CR Acad. Sci. (Paris)* **174** 593 (1922) [Картан Э, в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (М.: Мир, 1979) с. 535]
14. Malyshev C *Ann. Phys.* (New York) **286** 249 (2000)
15. Lazar M *Ann. Phys.* (Leipzig) **9** 461 (2000)
16. Lazar M J. *Phys. A: Math. Gen.* **35** 1983 (2002)
17. Lazar M J. *Phys. A: Math. Gen.* **36** 1415 (2003)
18. Frank F C *Discuss. Faraday Soc.* **25** 19 (1958)
19. Dzyaloshinskii I E, Volovick G E *J. Phys.* (Paris) **39** 693 (1978)
20. Hertz J A *Phys. Rev. B* **18** 4875 (1978)
21. Rivier N, Duffy D M J. *Phys. (Paris)* **43** 293 (1982)
22. Katanaev M O, Volovich I V *Ann. Phys.* (New York) **216** 1 (1992)
23. Катанаев М О *ТМФ* **135** 338 (2003)
24. Катанаев М О *ТМФ* **138** 193 (2004)
25. Furtado C, Moraes F *Phys. Lett. A* **188** 394 (1994)
26. Furtado C et al. *Phys. Lett. A* **195** 90 (1994)
27. Moraes F *Mod. Phys. Lett. A* **10** 2335 (1995)
28. Azevedo S, Moraes F *Phys. Lett. A* **246** 374 (1998)
29. Balachandran A P et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **13** 841 (1998)
30. Furtado C, Moraes F *Europhys. Lett.* **45** 279 (1999)
31. Bausch R, Schmitz R, Turski L A *Ann. Phys. Rev. Lett.* **80** 2257 (1998)
32. Bausch R, Schmitz R, Turski L A *Ann. Phys.* (Leipzig) **8** 181 (1999)
33. Furtado C, Moraes F J. *Phys. A: Math. Gen.* **33** 5513 (2000)
34. Azevedo S, Moraes F J. *Phys.: Condens. Matter* **12** 7421 (2000)
35. Azevedo S, Pereira J *Phys. Lett. A* **275** 463 (2000)
36. Furtado C, Bezerra V B, Moraes F *Europhys. Lett.* **52** 1 (2000)
37. de Lima Ribeiro C A, Furtado C, Moraes F *Phys. Lett. A* **288** 329 (2001)
38. Vieira S R, Azevedo S *Phys. Lett. A* **288** 29 (2001)
39. Azevedo S J. *Phys. A: Math. Gen.* **34** 6081 (2001)
40. Furtado C, Bezerra V B, Moraes F *Phys. Lett. A* **289** 160 (2001)
41. Marques G de A et al. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 5945 (2001)

42. Furtado C, de Lima Ribeiro C A, Azevedo S *Phys. Lett. A* **296** 171 (2002)
43. Azevedo S *Phys. Lett. A* **293** 283 (2002)
44. Azevedo S *Int. J. Quantum Chem.* **90** 1596 (2002)
45. Azevedo S *Mod. Phys. Lett. A* **17** 1263 (2002)
46. Azevedo S *Phys. Lett. A* **307** 65 (2003)
47. Barbosa A de S, Bezerra de Mello E R, Bezerra V B *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 3565 (1999)
48. Azevedo S, Furtado C, Moraes F *Phys. Status Solidi B* **207** 387 (1998)
49. Moraes F *Phys. Lett. A* **204** 399 (1995)
50. Bezerra de Mello E R, Bezerra V B, Grats Yu V *Class. Quantum Grav.* **15** 1915 (1998)
51. Azevedo S *Phys. Lett. A* **288** 33 (2001)
52. Furtado C, Bezerra V B, Moraes F *Mod. Phys. Lett. A* **15** 253 (2000)
53. Tanaka I *Phys. Lett. A* **277** 262 (2000)
54. De Lorenci V A, Moreira E S (Jr) *Phys. Rev. D* **65** 085013 (2002)
55. Azevedo S, Moraes F *Phys. Lett.: Math. Gen.* **267** 208 (2000)
56. Miranda J A, Moraes F *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 863 (2003)
57. Moraes F *Phys. Lett. A* **214** 189 (1996)
58. de Padua A, Parisio-Filho F, Moraes F *Phys. Lett. A* **238** 153 (1998)
59. Katanaev M O, Volovich I V *Ann. Phys. (New York)* **271** 203 (1999)
60. Miri M F, Rivier N J. *Phys. A: Math. Gen.* **35** 1727 (2002)
61. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987)
62. Косевич А М *Физическая механика реальных кристаллов* (Киев: Наукова думка, 1981)
63. Verçin A *Int. J. Theor. Phys.* **29** (1) 7 (1990)
64. Захаров В Е и др. *Теория солитонов: Метод обратной задачи* (Под ред. С П Новикова) (М.: Наука, 1980)
65. Rajaraman R *Solitons and Instantons: an Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1982) [Раджараман Р *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля* (М.: Мир, 1985)]
66. Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д *Гамильтонов подход в теории солитонов* (М.: Наука, 1986)
67. Zakrzewski W J *Low-Dimensional Sigma Models* (Bristol: A. Hilger, 1989)
68. Рыбаков Ю П, Санюк В И *Многомерные солитоны. Введение в теорию и приложения* (М.: Изд-во РУДН, 2001)
69. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **260** 127 (1961)
70. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
71. Фаддеев Л Д "Нелокальные, нелинейные и ненормируемые теории поля", Припринт Д2-9788 (Дубна: ОИЯИ, 1977) с. 207
72. Cosserat E, Cosserat F *Théorie des Corps Déformables* (Paris: A. Hermann, 1909)
73. Nowacki W *Theory of Asymmetric Elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1986)
74. Sandru N *Int. J. Eng. Sci.* **4** 81 (1966)
75. Staruszkiewicz A *Acta Phys. Polon.* **24** 735 (1963)
76. Clément G *Nucl. Phys. B* **114** 437 (1976)
77. Deser S, Jackiw R, 't Hooft G *Ann. Phys.* **152** 220 (1984)
78. Holz A *Class. Quantum Grav.* **5** 1259 (1988)
79. Kohler C *Class. Quantum Grav.* **12** L11 (1995)
80. Kohler C *Class. Quantum Grav.* **12** 2977 (1995)
81. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
82. Guillemin V, Sternberg S *Geometric Asymptotics* (Providence, RI: American Mathematical Society, 1977) [Гийемин В, Стернберг С *Геометрические асимптотики* (М.: Мир, 1981)]
83. Jahnke E, Emde F, Lösch F *Tafeln Höherer Funktionen* (Stuttgart: Verlagsgesellschaft, 1960) [Янке Е, Эмде Ф, Леш Ф *Специальные функции* (М.: Наука, 1977)]
84. Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
85. Фейнберг Е Л *УФН* **78** (1) 53 (1962)
86. Скаржинский В Д *Труды ФИАН* **167** 139 (1986)
87. Katanaev M O *J. Math. Phys.* **38** 946 (1997)
88. Волович И В, Катанаев М О *Письма в ЖЭТФ* **43** 212 (1986)
89. Katanaev M O, Volovich I V *Phys. Lett. B* **175** 413 (1986)
90. Katanaev M O, Volovich I V *Ann. Phys. (New York)* **197** 1 (1990)
91. Катанаев М О *ДАН СССР* **309** 591 (1989)
92. Katanaev M O *J. Math. Phys.* **31** 882 (1990)
93. Katanaev M O *J. Math. Phys.* **32** 2483 (1991)
94. Katanaev M O *J. Math. Phys.* **34** 700 (1993)
95. Vilenkin A, Shellard E P S *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994)
96. Hindmarsh M B, Kibble T W B *Rep. Prog. Phys.* **58** 477 (1995)
97. Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия. Методы и приложения* 4-е изд. (М.: Едиториал УРСС, 1998)
98. Weyl H *Berl. Ber.* 465 (1918) [Вейль Г, в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (М.: Мир, 1979) с. 513]
99. Wolf J A *Spaces of Constant Curvature* (Boston: Publish or Perish, 1974) [Вольф Дж *Пространства постоянной кривизны* (М.: Наука, 1982)]
100. Chern S S, Chen W H, Lam K S *Lectures on Differential Geometry* (Singapore: World Scientific, 1999)

Geometric theory of defects

M.O. Katanaev

V.A. Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Gubkina 8, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 938-37 81
E-mail: katanaev@mi.ras.ru

A description of dislocation and disclination defects in terms of Riemann–Cartan geometry is given, with the curvature and torsion tensors being interpreted as the surface densities of the Frank and Burgers vectors, respectively. A new free energy expression describing the static distribution of defects is presented, and equations of nonlinear elasticity theory are used to specify the coordinate system. Application of the Lorentz gauge leads to equations for the principal chiral $SO(3)$ -field. In the defect-free case, the geometric model reduces to elasticity theory for the displacement vector field and to a principal chiral $SO(3)$ -field model for the spin structure. As illustrated by the example of a wedge dislocation, elasticity theory reproduces only the linear approximation of the geometric theory of defects. It is shown that the equations of asymmetric elasticity theory for the Cosserat media can also be naturally incorporated into the geometric theory as the gauge conditions. As an application of the theory, phonon scattering off a wedge dislocation is considered. The energy spectrum of an impurity in the field of a wedge dislocation is discussed as well.

PASC numbers: : **02.40.** – **k**, **46.05.** + **b**, 61.72.Lk, 63.20.Mt

Bibliography — 100 references

Received 21 July 2004, revised 31 March 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (7) 705–733 (2005)

Physics–Uspekhi **48** (7) (2005)