

**УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

**Институт спектроскопии РАН**

На правах рукописи

СОКОЛИК Алексей Алексеевич

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ГРАФЕНЕ**

специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Троицк — 2010 г.

Работа выполнена в Учреждении Российской Академии наук  
Институте спектроскопии РАН

**Научный руководитель :** заведующий лабораторией, профессор  
Юрий Ефремович Лозовик

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
Александр Федорович Барабанов  
(Учреждение Российской Академии наук  
Институт физики высоких давлений  
им. Ф.Л. Верещагина РАН)

кандидат физико-математических наук,  
доцент Александр Михайлович Федотов  
(Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ»)

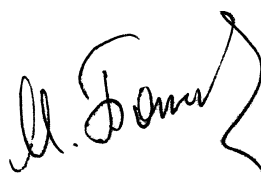
**Ведущая организация:** Московский институт стали и сплавов  
(Национальный исследовательский  
технологический университет)

Защита состоится «10» июня 2010 г. в 14 часов на заседании  
Диссертационного совета Д 002.014.01 при Учреждении Российской  
Академии наук Институте спектроскопии РАН по адресу: 142190  
Московская обл., г. Троицк, ул. Физическая, д. 5, Институт  
спектроскопии РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института  
спектроскопии РАН.

Автореферат разослан «7» мая 2010 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета, профессор,  
доктор физико-математических наук



М.Н. Попова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследований.** Графен представляет собой двумерную структуру, составленную из атомов углерода, которые расположены в узлах кристаллической решетки типа «пчелиные соты». Наиболее распространенная форма углерода — графит — может рассматриваться как стопка листов графена, относительно слабо связанных между собой силами Ван-дер-Ваальса. Один из валентных электронов углерода, не участвующий в образовании ковалентных связей с соседними атомами, заселяет орбиталь  $2p_z$  и отвечает за низкоэнергетические электронные свойства графена.

В первых теоретических работах, посвященных исследованию электронных свойств графита, было показано, что валентная зона и зона проводимости графена касаются в двух неэквивалентных точках первой зоны Бриллюэна<sup>1</sup>, причем в окрестности этих точек дисперсия электронов является линейной. Более того, огибающая волновой функции электрона в графене является четырехкомпонентной (компоненты соответствуют блоховским волнам, локализованным на двух треугольных подрешетках кристаллической решетки графена и двум долинам — окрестностям точек касания зон) и подчиняется уравнению, имеющему вид двумерного уравнения Дирака для безмассовых частиц<sup>2</sup>, в котором роль скорости света играет приблизительно в 300 раз меньшая фермиевская скорость.

Слабое сцепление и относительная независимость слоев графена в кристалле графита уже давно наталкивали исследователей на мысль о том, что графен может быть получен как изолированная двумерная мембрана толщиной в один атом. Связанные с этим технические трудности были преодолены группой К.С. Новоселова и А.К. Гейма в 2004 г., когда методом микромеханического расщепления графита были получены первые образцы графена<sup>3,4</sup>. При помощи затворных электродов оказалось возможным регулировать тип (электроны или дырки) и концентрацию носителей заряда в графене от нуля до значений порядка  $10^{13} \text{ см}^{-2}$ . Экспериментальные исследования графена, в частности, изучение осцилляций Шубникова-де

---

<sup>1</sup>P.R. Wallace, Phys. Rev. **71**, 622 (1947).

<sup>2</sup>G.W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).

<sup>3</sup>K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov et al., Science **306**, 666 (2004).

<sup>4</sup>K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov et al., Nature **438**, 197 (2005).

Гааза и квантового эффекта Холла<sup>4</sup>, полностью подтвердили теоретические предположения об эффективно безмассовых электронах в графене.

Графен как двумерный материал атомарной толщины представляет интерес с точки зрения разнообразных приложений<sup>5</sup>, среди которых особо стоит отметить возможность использования его для создания наноэлектронных устройств. Эта возможность является особенно привлекательной ввиду того, что подвижность носителей заряда в чистых образцах графена достигает рекордных значений<sup>6</sup>, открывая путь к принципиально новой баллистической электронике.

Интерес к исследованию графена с фундаментальной точки зрения вызван возможностью изучать поведение безмассовых заряженных частиц, и особенно их коллективное поведение, «на лабораторном столе». Эффективно ультрарелятивистская динамика электронов в графене приводит к ряду электронных явлений, не имеющих аналогов в других физических системах<sup>7</sup> (например, полупелый квантовый эффект Холла, абсолютная прозрачность потенциальных барьеров при нормальном падении, слабая антилокализация и т.п.).

Особенности коллективных электронных явлений в графене непосредственно вытекают из особенностей эффективно релятивистской одночастичной динамики электронов, таких как: а) линейная дисперсия энергии электронов; б) близкое расположение и взаимное влияние валентной зоны и зоны проводимости; в) спинорная природа эффективной волновой функции; г) заселение электронами двух долин в окрестностях дираковских точек. На проявления этих особенностей в коллективных явлениях в диссертационной работе обращается особенное внимание.

Одним из следствий линейной дисперсии электронов является то, что параметр  $r_s$ , характеризующий отношение характерных величин кулоновской и кинетической энергий квантовой системы (и являющийся аналогом постоянной тонкой структуры), в случае графена не зависит от концентрации электронного газа, а определяется только диэлектрической проницаемостью окружающей графен среды. Кроме того, во внешнем магнитном поле отношение характерного энергетического масштаба кулоновского взаимодействия в электронном газе в графене к расстоянию между уровнями

---

<sup>5</sup>A.K. Geim, K.S. Novoselov, *Nature Materials* **6**, 183 (2007).

<sup>6</sup>S.V. Morozov, K.S. Novoselov, M.I. Katsnelson et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 016602 (2008).

<sup>7</sup>A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).

Ландау не зависит от напряженности поля, в противоположность металлам и полупроводникам, в которых расстояние между уровнями Ландау всегда доминирует в достаточно сильных полях.

Близкое расположение валентной зоны и зоны проводимости может проявляться в ряде электронных явлений, в которых обе зоны участвуют одновременно, таких как, например, логарифмическая перенормировка фермиевской скорости<sup>8</sup>, возможный переход графена в состояние экситонного диэлектрика<sup>9</sup>, межзонные одночастичные возбуждения<sup>10,11</sup> и рассмотренное в диссертационной работе многозонное спаривание.

Спинорная природа эффективной волновой функции неразрывно связана с сосуществованием валентной зоны и зоны проводимости: состояния электрона в этих зонах отличаются друг от друга лишь различными соотношениями амплитуд спинорных компонент. Одним из проявлений спинорной природы является наличие у электронов фазы Берри  $\pi$  при обходе вокруг дираковской точки в импульсном пространстве<sup>4,12</sup>.

Заселение электронами двух долин является аналогом киральности безмассовых частиц — состояниям электронов в разных долинах соответствуют противоположные значения киральности. Дополнительная долинная степень свободы электронов может проявляться в ряде эффектов; в контексте данной работы наибольший интерес среди них представляет возможность образования параметров порядка с различными долинными структурами при спаривании в графене<sup>13</sup>.

Большое внимание в диссертационной работе уделено коллективным явлениям в *бислое графена* — системе, состоящей из двух параллельных слоев графена, разделенных диэлектриком. Пространственное разделение слоев графена допускает существование долгоживущих пар, состоящих из электронов и дырок, находящихся в разных слоях. В таком электрон-дырочном бислое можно ожидать появления различных сильно коррелированных фаз благодаря кулоновскому притяжению электронов и дырок. Бислой графена может оказаться более подходящей системой для изучения коллективных явлений, чем связанные полупроводниковые квантовые ямы, благода-

---

<sup>8</sup>J. González, F. Guinea, M.A.H. Vozmediano, Nucl. Phys. B **424**, 595 (1994).

<sup>9</sup>D.V. Khveshchenko, Phys. Rev. Lett. **87**, 246802 (2001).

<sup>10</sup>B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea, New J. Phys. **8**, 318 (2006).

<sup>11</sup>E.H. Hwang, S. Das Sarma, Phys. Rev. B **75**, 205418 (2007).

<sup>12</sup>T. Ando, T. Nakanishi, R. Saito, J. Phys. Soc. Japan **67**, 2857 (1998).

<sup>13</sup>I.L. Aleiner, D.E. Kharzeev, A.M. Tsvelik, Phys. Rev. B **76**, 195415 (2007).

ря атомарной толщине слоев графена, позволяющей сблизить электроны и дырки на очень малые расстояния. В образцах бислоя графена, которые были изготовлены и изучены в недавних экспериментах<sup>14,15</sup>, расстояние между слоями составляет несколько ангстрем.

Итак, изучение коллективных электронных явлений в графене предоставляет уникальную возможность для исследования поведения безмассовых заряженных частиц в двумерной твердотельной системе. Необычные электронные свойства графена позволяют надеяться на возможность достижения новых режимов поведения квантовых систем в наноструктурах на его основе, а привлекательность графена для различных нанотехнологических приложений делает возможным создание на его базе принципиально новых наноэлектронных, наномеханических и нанохимических устройств. Ряд электронных явлений, возможных в графене, имеет аналоги в релятивистской физике элементарных частиц и кварковой материи. Таким образом, можно сказать, что исследования графена находятся на стыке физики конденсированных сред и физики высоких энергий.

### **Цель диссертационной работы:**

- Теоретическое исследование свойств пространственно не прямых магнитоэкситонов в бислое графена, помещенном в магнитное поле.
- Изучение конденсации пространственно разделенных электрон-дырочных пар в бислое графена в режимах слабой и сильной связи. Оценка величины щели в спектре и температуры перехода в сверхтекучее состояние.
- Исследование возможного сверхпроводящего спаривания электронов в графене, индуцированного различными фононными модами, в том числе изгибными модами.

**Научная новизна** работы состоит в том, что в ней впервые:

- вычислены дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов в графене и энергии испускаемых при их рекомбинации фотонов;

---

<sup>14</sup>Н. Schmidt, T. Lüdtkе, P. Barthold, et al., Appl. Phys. Lett. **93**, 172108 (2008).

<sup>15</sup>Н. Schmidt, T. Lüdtkе, P. Barthold, R.J. Haug, Phys. Rev. B **81**, 121403(R) (2010).

- исследовано однозонное электрон-дырочное спаривание в бислое графена в режиме слабой связи;
- показано, что при увеличении силы связи в бислое графена отсутствует переход к газу локальных пар, вместо которого происходит переход к многозонному спариванию;
- получены оценки величины щели в спектре бислоя графена в режиме сильной связи с учетом динамического экранирования потенциала спаривания;
- исследовано сверхпроводящее спаривание электронов в графене, обусловленное плоскими оптическими и изгибными фононами; найден ряд его особенностей, связанных с зависимостью индуцированного фононами эффективного электрон-электронного взаимодействия от долиной структуры параметра порядка и с необычной пространственно-спиновой симметрией параметра порядка;
- исследовано квадратичное взаимодействие электронов с акустической и оптической модами изгибных фононов в графене с учетом вкладов деформационного потенциала и растяжения валентных связей в гамильтониан взаимодействия.

**Практическая значимость работы.** Найденные в работе характеристики магнитоэкситонов в графене, а также энергии фотонов, испускаемых при их рекомбинации, могут быть сопоставлены с экспериментальными данными, полученными спектроскопическими методами. Магнитоэкситонная спектроскопия графена может дать ценные сведения о коллективном поведении безмассовых заряженных фермионов в сильных магнитных полях. Также изучение свойств магнитоэкситонов в графене может оказаться полезным для подбора оптимальных условий эксперимента по осуществлению их бозе-эйнштейновской конденсации.

Предсказанное в работе многозонное спаривание в электрон-дырочном бислое графена может быть реализовано экспериментально. На основе двухслойных графеновых структур со сверхтекучим конденсатом электрон-дырочных пар могут быть сконструированы различные наноэлектронные устройства.

Фононное спаривание электронов в графене может быть обнаружено в экспериментах при сильном химическом допировании образцов. Изучение взаимодействия электронов в графене с изгибными фононами позволяет достичь лучшего понимания вопросов, связанных с механической устойчивостью графена, образованием «рипплов» на его поверхности и их влиянием на электронные свойства графена.

### **Основные научные положения, выносимые на защиту:**

1. Вычислены дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов и энергии рекомбинационных фотонов. Обоснована применимость теории возмущений для кулоновского взаимодействия в сильном магнитном поле.
2. Обнаружено, что при спаривании электронов и дырок в бислое графена (равно как и при электрон-электронном спаривании в одном листе графена) отсутствует кроссовер к газу локальных пар по мере увеличения силы связи. Вместо этого происходит переход от однозонного спаривания типа БКШ к многозонному спариванию, охватывающему как зону проводимости, так и валентную зону спаривающихся частиц.
3. Показано, что величина и знак эффективного электрон-электронного взаимодействия, возникающего в результате обмена фононами в графене, определяются симметрией данной фононной моды и структурой параметра порядка в пространстве долиной степени свободы.
4. Детально исследовано квадратичное взаимодействие электронов с изгибными фононами в графене, разрешенное по подрешеткам и длинам электронов.

**Апробация результатов.** Результаты, представленные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах лаборатории спектроскопии наноструктур Института спектроскопии РАН. Ряд результатов был доложен на научных сессиях, конкурсах научных работ, российских и международных конференциях:

- Научная сессия Отделения физических наук Российской Академии наук, Москва, 27 февраля 2007 г.



- International Conference on Theoretical Physics «DUBNA-NANO2008», Dubna, 7–11 July 2008.
- 51-я научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Москва-Долгопрудный, 27–30 ноября 2008 г.
- Конкурс работ молодых научных работников, аспирантов и инженеров памяти академика А.П. Александрова, Троицк, 24 февраля 2009 г.
- 52-я научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Москва-Долгопрудный, 27–30 ноября 2009 г.
- Конкурс работ молодых научных работников, аспирантов и инженеров памяти академика А.П. Александрова, Троицк, 1 марта 2010 г.

**Вклад автора.** Все представленные в диссертации теоретические результаты были получены автором лично, за исключением аналитического решения многозонных уравнений Элиашберга, описывающих спаривание электронов в графене под действием оптических фононов (1-й раздел третьей главы диссертации), которое было получено в сотрудничестве с аспирантом МИФИ С.Л. Огарковым.

**Публикации по теме работы.** Представленные в диссертационной работе результаты опубликованы в 8 статьях в ведущих российских и зарубежных рецензируемых журналах. Также по теме диссертации опубликованы 3 печатные работы в трудах научных конференций. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Материал диссертации изложен на 168 страницах машинописного текста и содержит 38 рисунков. Библиография включает 212 наименований.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** приводится обоснование актуальности темы исследований и дается краткий обзор недавних работ, тематика которых примыкает к теме диссертации. Излагается краткое содержание диссертации.

**В первой главе** рассматриваются свойства магнитоэкситонов в графене и пространственно непрямым магнитоэкситонов в бислое графена в сильном магнитном поле. *Магнитоэкситон* — это связанное состояние электрона и дырки в магнитном поле, которое может быть описано при помощи выделения *магнитного импульса* электрон-дырочной пары **Р**, играющего роль импульса центра масс. При этом связь между движением магнитоэкситона как целого и его внутренней структурой выражается в *дисперсионной зависимости* энергии магнитоэкситона от его магнитного импульса. Магнитоэкситоны могут образовывать разреженный слабонеидеальный бозе-газ, в котором при низких температурах будут происходить бозе-эйнштейновская конденсация и переход в сверхтекучее состояние<sup>16</sup>.

Как известно, дисперсионные зависимости магнитоэкситонов и магнитоплазмонов могут быть найдены из полюсов электрон-дырочной вершинной части, вычисляемой в обобщенном приближении хаотических фаз<sup>17</sup>. В диссертации этот подход распространен на случай графена, где функции Грина электронов и вершинные части являются многокомпонентными, а также на случай бислоя графена. Показано, что при целочисленном заполнении уровней Ландау уравнение для вершинной части в бислое графена разделяются на три канала, соответствующие: а) прямым магнитоэкситонам, электрон и дырка которых находятся в одном слое графена, б) пространственно непрямым магнитоэкситонам, электрон и дырка которых расположены в разных слоях, в) магнитоплазмонам, охватывающим сразу оба слоя.

В металлах и полупроводниках в достаточно сильных магнитных полях энергия кулоновского взаимодействия является слабым возмущением по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау<sup>18</sup>. В графене энергии уровней Ландау равны<sup>19</sup>  $E_n^L = (\hbar v_F / l_H) \operatorname{sgn}(n) \sqrt{2|n|}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $v_F \approx 10^6$  м/с — фермиевская скорость,  $l_H = \sqrt{\hbar c / eH}$  — магнитная длина. Отношение характерной величины кулоновской энергии  $e^2 / \epsilon l_H$  ( $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружающей среды) к расстоянию между уровнями Ландау не зависит от напряженности магнитного поля; кроме того, сами уровни Ландау располагаются неэквидистантно и сгущаются

<sup>16</sup>O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, G. Gumbs, Phys. Rev. B **77**, 155433 (2008).

<sup>17</sup>C. Kallin, B.I. Halperin, Phys. Rev. B **30**, 5655 (1984).

<sup>18</sup>И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик, ЖЭТФ **78**, 1167 (1980).

<sup>19</sup>F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).

при удалении от дираковской точки. Эти обстоятельства ставят под вопрос применимость теории возмущений для кулоновского взаимодействия в графене в сильном магнитном поле. Однако, для определения характеристик пространственно не прямых магнитоэкситонов существенным является межслойное электрон-дырочное взаимодействие с характерной величиной  $e^2/\varepsilon D$ , где  $D$  — расстояние между слоями графена. В сильном магнитном поле, когда  $l_H \ll D$ , взаимодействие будет являться слабым возмущением по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау. На основе этого соображения проведены дальнейшие расчеты.

В симметричной калибровке векторного потенциала  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$  найдены четырехкомпонентные волновые функции пространственно не прямых магнитоэкситонов  $\Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r})$ , где  $n_1$  и  $n_2$  — уровни Ландау, на которых располагаются электрон и дырка. Дисперсионные зависимости

$$\Delta E_{n_1 n_2}(P) = \int d\mathbf{r} \Phi_{n_1 n_2}^+(\mathbf{r}) \Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}) \frac{-e^2}{\varepsilon \sqrt{(\mathbf{r} + l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}])^2 + D^2}}$$

и параметры их разложения при малых магнитных импульсах,

$$\Delta E_{n_1 n_2}(P) \approx -W_{n_1 n_2} + \frac{P^2}{2M_{n_1 n_2}},$$

(энергия связи  $W_{n_1 n_2}$  и эффективная масса  $M_{n_1 n_2}$ ) вычислены в первом порядке теории возмущения по кулоновскому взаимодействию при различных  $D$ .

В приближении Хартри-Фока вычислена энергия фотона, испускаемого при рекомбинации магнитоэкситона, которая равна

$$E_\gamma = E_{n_1}^L - E_{n_2}^L - eV_1 + eV_2 + E_e^{(\text{self})} + E_h^{(\text{self})} + \Delta E_{n_1 n_2}(\Delta P).$$

Она складывается из энергии перехода  $n_2 \rightarrow n_1$  между уровнями Ландау (первая пара слагаемых), из прямых кулоновских энергий электрона и дырки (вторая пара слагаемых, в которых  $V_1$  и  $V_2$  — электрические потенциалы слоев электрона и дырки) и их обменных собственных энергий (третья пара слагаемых), а также из энергии электрон-дырочного взаимодействия  $\Delta E_{n_1 n_2}$ . Законы сохранения энергии и импульса обеспечивают возможность рекомбинации магнитоэкситонов лишь с  $P \approx 0$ ; однако, дополнительное магнитное поле  $H_{\parallel}$ , параллельное плоскости слоев графена,

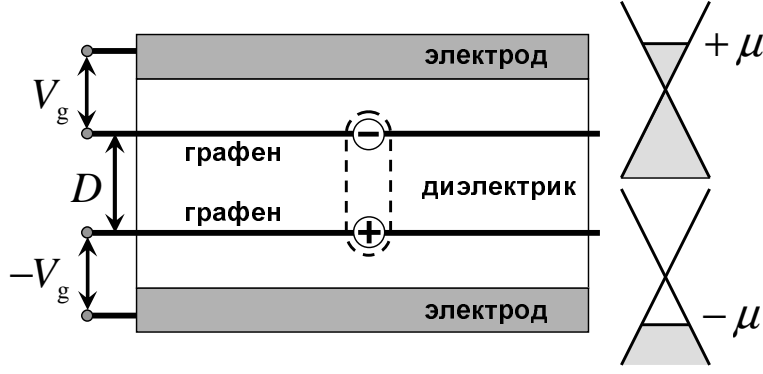


Рис. 1. Схема реализации спаривания пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена. Справа показаны уровни химических потенциалов  $\mu$  и  $-\mu$  в верхнем и нижнем слоях графена, устанавливаемые затворными напряжениями  $V_g$  и  $-V_g$  соответственно.

приводит к эффективному сдвигу дисперсионной зависимости на величину  $\Delta P = eDH_{\parallel}/2c$  и позволяет «сканировать» ее в экспериментах<sup>20</sup>.

Особенности графена при рассмотрении свойств магнитоэкситонов проявляются в том, что: а) из-за спинорного характера волновой функции электронов волновая функция внутреннего движения магнитоэкситонов является многокомпонентной; б) обменное кулоновское взаимодействие электрона и дырки с заполненной валентной зоной дает существенный вклад в энергию магнитоэкситона; в) линейная дисперсия приводит к тому, что смешиванием различных уровней Ландау (а следовательно — и различных состояний магнитоэкситона) в сильном магнитном поле можно пренебречь только в случае пространственно непрямых магнитоэкситонов. Результаты, представленные в первой главе, опубликованы в статьях [2, 3].

**Во второй главе** изложены результаты исследования электрон-дырочного спаривания в бислое графена в режимах слабой и сильной связи. Один из возможных вариантов реализации бислоя графена изображен на Рис. 1. В таком варианте два затворных электрода позволяют независимо управлять концентрацией и типом носителей в каждом из двух слоев графена (Рис. 1). Если установить в них равные концентрации электронов и дырок, то из-за совпадения их поверхностей Ферми и кулоновского притяжения между ними система окажется неустойчивой по отношению к спариванию

<sup>20</sup>L.V. Butov, C.W. Lai, D.S. Chemla et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 216804 (2001).

электронов и дырок с противоположными импульсами, которое сопровождается возникновением щели в спектре возбуждений и похоже на спаривание в сверхпроводниках<sup>21</sup>, экситонном диэлектрике<sup>22</sup> и связанных полупроводниковых квантовых ямах<sup>23</sup>. Такая система может демонстрировать сверхтекучие свойства, связанные с появлением незатухающих токов, движущихся в противоположных направлениях по разным листам графена, и эффекты, подобные эффекту Джозефсона<sup>24</sup>.

В результате анализа свойств экранированного электрон-дырочного взаимодействия, обеспечивающего спаривание, показано, что безразмерными управляющими параметрами системы являются  $r_s = e^2/\epsilon\hbar v_F \approx 2.19/\epsilon$  и  $p_F D/\hbar$ , где  $p_F = \mu/v_F$  — импульс Ферми. Если  $r_s \ll 1$  или  $p_F D/\hbar \gg 1$ , то осуществляется *режим слабой связи*, при котором притяжение между электронами и дырками является слабым, и основное состояние системы аналогично обычному состоянию типа БКШ. Однако, экспериментально достижим и противоположный *режим сильной связи*; если  $p_F D/\hbar \ll 1$ , то сила связи определяется параметром  $r_s$  и не зависит от концентрации электронов и дырок (что резко контрастирует с ситуацией в обычных системах с нерелятивистским спектром, где  $r_s$  растет при снижении концентрации<sup>25</sup>).

В обычных системах спаривающихся фермионов при увеличении силы связи происходит плавный переход от состояния типа БКШ к бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в газе локальных пар, носящий название *кроссовера БКШ-БЭК*<sup>26</sup>. В графене же, как показано в диссертационной работе, невозможно образование локализованных пар вследствие отсутствия щели в спектре, что приводит к отсутствию кроссовера БКШ-БЭК. Вместо него при увеличении силы связи происходит переход состояния типа БКШ в *ультрарелятивистское состояние типа БКШ*, при котором, как и в обычном состоянии типа БКШ, существуют парные корреляции в движении электронов и дырок с противоположными импульсами, но вместе с тем существенную роль играет эффективно ультрарелятивистская динамика спаривающихся частиц. Похожие состояния могут возникать при

<sup>21</sup>J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).

<sup>22</sup>Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев, Физика твердого тела **6**, 2791 (1964).

<sup>23</sup>Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 556 (1975).

<sup>24</sup>Yu.E. Lozovik, A.V. Poushnov, Phys. Lett. A **228**, 399 (1997).

<sup>25</sup>G.D. Mahan, Many-particle physics, Plenum Press, New York, 1990.

<sup>26</sup>P. Nozières, S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).

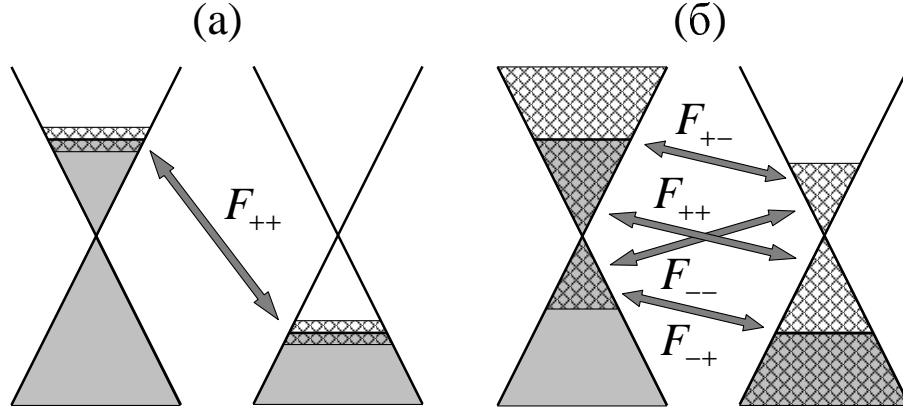


Рис. 2. Однозонный (а) и многозонный (б) режимы спаривания в бислое графена. Штриховкой указана область импульсного пространстве, охватываемая спариванием;  $F_{\gamma_1\gamma_2}$  — компоненты матричного по зонам параметра порядка.

«цветной» сверхпроводимости в плотной кварковой материи<sup>27</sup>.

При слабой связи спаривание охватывает лишь небольшие окрестности поверхностей Ферми электронов и дырок (Рис. 2(а)), но при сильной связи спаривание захватывает и удаленные от поверхностей Ферми зоны: валентную зону электронного слоя и зону проводимости дырочного слоя (Рис. 2(б)). Параметр порядка (т.е. аномальная функция Грина  $F_{\gamma_1\gamma_2}$ ) и щель (аномальная собственно-энергетическая часть  $\Delta_{\gamma_1\gamma_2}$ ) становятся матрицами  $(2 \times 2)$ , индексы которых  $\gamma_1, \gamma_2 = \pm 1$  соответствуют зоне проводимости и валентной зоне в электронном и дырочном слоях.

Многозонный режим спаривания был исследован в работе при помощи диаграммной техники, специально модифицированной для этой цели. Вводя матричные по индексам зон функции Грина и формулируя фейнмановские правила для них, можно последовательно изучать все явления в графене, затрагивающие сразу обе зоны. Следует отметить, что при такой формулировке диаграммной техники вершинам кулоновского взаимодействия ставятся в соответствие *угловые факторы*, зависящие от направлений импульса и зон электрона до и после акта взаимодействия. При помощи многозонной диаграммной техники были получены уравнения Горькова, описывающие спаривание в приближении среднего поля и имеющие матричный характер.

<sup>27</sup>M.G. Alford, A. Schmitt, R. Rajagopal, T. Schäfer, Rev. Mod. Phys. **80**, 1455 (2008).

Дополнительное рассмотрение неустойчивости неспаренного состояния при температурах ниже критической показало, что описывающее этот процесс многокомпонентное уравнение Бете-Солпитера распадается на внутризонный и межзонный каналы, соответствующие взаимно конкурирующим диагональному и антидиагональному по зонам спариванию. Неустойчивость во втором канале возникает только при превышении константой связи довольно большого порогового значения, в то время как в первом канале отсутствует порог для силы связи. Следовательно, реализовываться будет спаривание, диагональное по зонам, при котором отличны от нуля компоненты матричной щели  $\Delta_{++}$  и  $\Delta_{--}$ , соответствующие щелям в зоне проводимости и в валентной зоне (аналогично, отличны от нуля только компоненты  $F_{++}$  и  $F_{--}$  параметра порядка, изображенные на Рис. 2(б)). При  $s$ -волновом спаривании две щели подчиняются следующей системе уравнений самосогласования:

$$\Delta_{\gamma\gamma}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = -T \sum_{\gamma'\varepsilon_k} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma\gamma'\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}', i\varepsilon_n - i\varepsilon_k) \times \\ \times \frac{\Delta_{\gamma'\gamma'}(\mathbf{p}', i\varepsilon_k)}{(\varepsilon_n - \varepsilon_k)^2 + E_{\gamma'}^2(\mathbf{p}', i\varepsilon_k)}, \quad (1)$$

где введены мацубаровские фермионные частоты  $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$  и энергии боголюбовских возбуждений  $E_\gamma(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \sqrt{(\gamma v_F |\mathbf{p}| - \mu)^2 + \Delta_{\gamma\gamma}^2(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)}$ ;  $V(\mathbf{q}, \omega)$  есть динамически экранированное межслойное электрон-дырочное взаимодействие, а стоящий перед ним угловой фактор возникает в результате свертки по компонентам спинорных волновых функций электронов и зависит от направления импульса  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Структура уравнений (1) детально проанализирована в диссертационной работе.

Было получено приближенное решение системы (1) в статическом приближении, при котором пренебрегается зависимостью щелей и потенциала взаимодействия от частот, но при этом считается (в духе теории БКШ), что спаривание происходит в точках импульсного пространства, удаленных не более чем на некоторую энергетическую ширину  $w$  от поверхности Ферми (см. Рис. 2). Если спаривание является однозонным (т.е.  $w < \mu$ ), то для величины щели справедлива оценка типа БКШ:

$$\Delta_{++} \approx 2w \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \Delta_{--} = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — безразмерная константа притяжения на поверхности Ферми. В том же случае, когда спаривание является многозонным ( $w > \mu$ ), имеем

$$\Delta_{++} \approx 2\mu \exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda} + \frac{w}{\mu} - 1 \right\}, \quad \Delta_{--} \sim \Delta_{++}, \quad (3)$$

где константа притяжения  $\Lambda$  немного изменяется по сравнению с  $\lambda$  за счет влияния валентной зоны. Как видно, оценочное выражение для щели при многозонном спаривании (3) качественно отличается от однозонного выражения (2) тем, что ширина слоя спаривания  $w$  входит в показатель экспоненты, а не в предэкспоненциальный множитель. За счет этого щель может быть значительной при большой ширине зоны спаривания в импульсном пространстве (этот факт был отмечен и ранее при рассмотрении в рамках более грубых моделей<sup>28,29</sup>). Кроме того, были получены решения системы уравнений для щелей (1) в статическом приближении с заменой потенциала спаривания на его сепарабельную часть, которые также указали на возможность достижения значительной величины щели в многозонном режиме.

Проделанное в диссертационной работе приближенное определение области частот, в которой экранированное взаимодействие  $V(\mathbf{q}, \omega)$  является притягивающим, может дать только порядок величины  $w$ . Поэтому далее в работе было предпринята попытка получения более точных оценок величины щели, основывающихся на решении уравнений, подобных уравнениям Элиашберга и получающихся из (1). В отличие от усреднения уравнений по импульсу, используемого в подходе Элиашберга<sup>30</sup>, в данном случае более оправданным является переход к уравнениям на «массовой поверхности», в которых частота полагается равной энергии боголюбовских возбуждений. При помощи спектрального представления взаимодействие  $V(\mathbf{q}, \omega)$ , найденное в приближении хаотических фаз<sup>10,11</sup>, было разложено на неэкранированное кулоновское взаимодействие  $v_{\mathbf{q}} = 2\pi e^2 / \varepsilon |\mathbf{q}|$ , отталкивающий вклад виртуальных плазмонов с частотой  $\omega_+(q)$  и спектральным весом  $A(q)$ , соответствующих верхней ветви незатухающих плазменных колебаний в системе, и отталкивающий вклад затухающих плазмонов и континуума одночастичных возбуждений. Эти три вклада разделяются в явном

<sup>28</sup>T. Ohsaku, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 1771 (2004).

<sup>29</sup>N.B. Kopnin, E.B. Sonin, Phys. Rev. Lett. **100**, 246808 (2008).

<sup>30</sup>Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966 (1960).



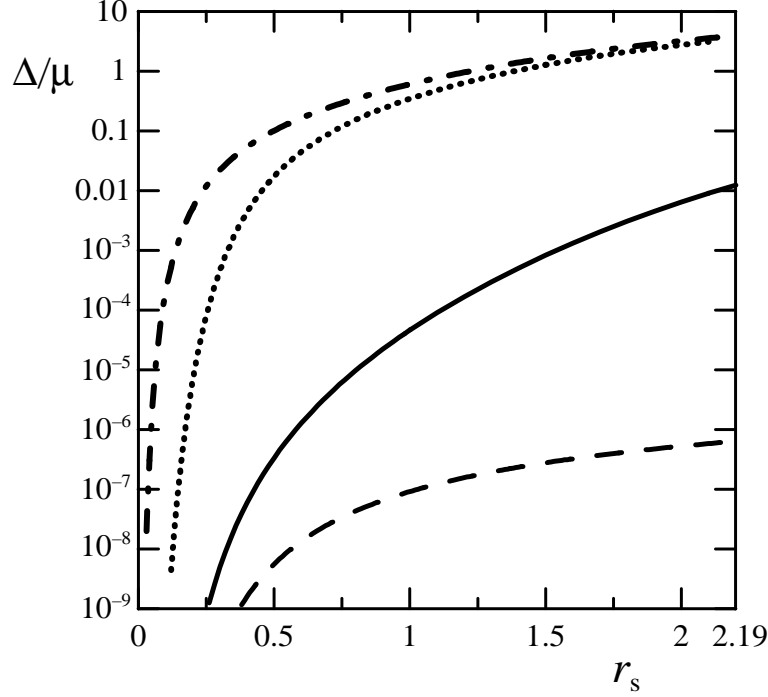


Рис. 3. Щель на поверхности Ферми  $\Delta$  как функция параметра силы связи  $r_s$ , вычисленная с учетом различных вкладов в эффективное взаимодействие на массовой поверхности. Сплошная линия: полное взаимодействие, штрих-пунктир: учет только неэкранированного кулоновского взаимодействия, пунктир: неэкранированное кулоновское взаимодействие и вклад незатухающих плазмонов, штриховая линия: статически экранированное взаимодействие.

виде в ядре результирующего уравнения для оценки щели:

$$1 = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{\Delta_{\gamma\gamma}(p)}{2E_{\gamma}(p)} \left\{ v_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_F} - \frac{2A(\mathbf{p}-\mathbf{p}_F)}{E_{\gamma}(p) + \omega_+(\mathbf{p}-\mathbf{p}_F)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im } V(\mathbf{p}-\mathbf{p}_F, \nu) \frac{d\nu}{E_{\gamma}(p) + \nu} \right\} \quad (4)$$

(здесь  $\text{Im } V(\mathbf{q}, \omega) < 0$ , что соответствует эффективному отталкиванию из-за затухающих плазмонов и континуума одночастичных возбуждений).

Численное решение уравнения (4) с использованием пробной функции для щели  $\Delta_{\gamma\gamma}(p)$  на массовой поверхности, спадающей на характерных масштабах  $p \sim p_F$ , показало, что существует серьезная конкуренция между прямым электрон-дырочным притяжением и эффективным отталкивани-

ем из-за плазмонов и одночастичных возбуждений. Учет динамического экранирования дает оценки величины щели в спектре системы (Рис. 3) на несколько порядков меньшие, чем вообще без учета экранирования<sup>31,32</sup>, но в то же время на несколько порядков превышающие оценки типа БКШ<sup>33,34</sup>, сделанные с использованием статически экранированного взаимодействия. Полученные в диссертационной работе оценки максимальной величины критической температуры перехода в сверхтекучее состояние составляют порядка нескольких градусов Кельвина.

Стоит отметить также некоторые особенности сверхтекучих свойств системы при многозонном спаривании. Во-первых, относительная фаза щелей в зоне проводимости  $\Delta_{++}$  и в валентной зоне  $\Delta_{--}$  фиксирована из-за межзонных переходов (слагаемые с  $\gamma \neq \gamma'$  в (1)). Однако при уменьшении силы связи эта фиксация ослабевает, приводя к возможности образования солитоноподобных возбуждений, связанных с колебаниями относительной фазы<sup>24</sup>. Во-вторых, структура параметра порядка по спинам и долинам никак не фиксирована (в отсутствие спиновых или долинных анизотропий<sup>13</sup>) и задается матрицей  $P$  типа  $SU(4)$ , которая может плавно меняться в пространстве. Это приводит к возможности образования, в дополнение к обычным вихрям и полувихрям<sup>13</sup>, *четверть-вихрей* вида

$$P = S \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^+,$$

где  $S$  — произвольная плавно меняющаяся в пространстве унитарная матрица,  $\varphi$  — угол, отсчитываемый от центра четверть-вихря. Такие четверть-вихри имеют 16 раз меньшую энергию, чем обычные вихри. В результате температура перехода Костерлица-Таулеса  $T_{КТ}$  в сверхтекучее состояние будет определяться условием диссоциации пар противоположно ориентированных четверть-вихрей:

$$\frac{\pi}{2} \rho_s(T_{КТ}) = 16 T_{КТ},$$

<sup>31</sup>Н. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, A.H. MacDonald, Phys. Rev. B **78**, 121401(R) (2008).

<sup>32</sup>С.-Н. Zhang, Y.N. Joglekar, Phys. Rev. B **77**, 233405 (2008).

<sup>33</sup>М.Ю. Kharitonov, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **78**, 241401(R) (2008).

<sup>34</sup>М.Ю. Kharitonov, K.B. Efetov, Semicond. Sci. Tech. **25**, 034004 (2008).

где  $\rho_s(T)$  — фазовая жесткость (или сверхтекучая плотность) конденсата при конечной температуре.

Результаты, представленные во второй главе, опубликованы в статьях [1–5, 8].

**В третьей главе** рассмотрено сверхпроводящее спаривание электронов в графене посредством различных фононных мод. В графене возможны *плоские* фононы, соответствующие колебаниям атомов в плоскости графена, а также *изгибные* фононы, соответствующих изгибу листа графена (если графен свободно подвешен). Среди плоских фононов наиболее сильное взаимодействие с электронами демонстрируют 4 оптические моды, наблюдающиеся в спектрах комбинационного рассеяния<sup>35,36</sup>. Взаимодействие электронов с изгибными фононами, представленными двумя модами, имеет необычный вид — оно квадратично по операторам фононов<sup>37</sup>. В работе рассмотрено спаривание электронов в графене посредством.

Спаривание электронов в графене вышеперечисленных 6 фононных мод описано при помощи диаграммной техники, оперирующей с матричными мацубаровскими функциями Грина  $G(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T \Psi_{\mathbf{p}}(\tau) \bar{\Psi}_{\mathbf{p}}(0) \rangle$  (здесь  $\bar{\Psi}_{\mathbf{p}} = \Psi_{\mathbf{p}}^+ \gamma^0$  — дираковски сопряженный биспинор). Четырехкомпонентные операторы поля

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} \\ b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} \\ b_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}} \\ a_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

составлены из операторов уничтожения электронов  $a$  и  $b$  на подрешетках  $A$  и  $B$  решетки графена соответственно в окрестностях двух дираковских точек  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}'$ . Выражения для гамильтониана электрон-фононного взаимодействия в графене учитывают тот факт, что волновые функции электронов распределены по двум подрешеткам, в то время как разные фононные моды соответствуют различным совместным и относительным колебаниям двух подрешеток. Как следствие, аппарат матричных функций Грина необходим для корректного описания электрон-фононного взаимодействия

<sup>35</sup>S. Piscanec, M. Lazzeri, F. Mauri et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 185503 (2004).

<sup>36</sup>D.M. Basko, I.L. Aleiner, Phys. Rev. B **77**, 041409(R) (2008).

<sup>37</sup>E. Mariani, F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **100**, 076801 (2008).

в графене, разрешенного по подрешеткам и долинам электронов.

При помощи техники матричных функций Грина и формализма зарядового сопряжения в диссертационной работе получены матричные уравнения Горькова допускающие, в принципе, различные виды параметра порядка (включая, например, спаривание электронов на узле<sup>38</sup>, спаривание в модели резонирующих валентных связей<sup>39</sup> и т.п.). В данной работе исследовалось такое спаривание, которое диагонально по зонам (и, как в случае электрон-дырочного спаривания в бислое графена, характеризуется двумя щелями — в зоне проводимости и в валентной зоне), но при этом может иметь произвольную структуру вида  $SU(2)$  в пространстве долин  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}'$ . В представлении биспиноров (5) соответствующий параметр порядка имеет вид

$$-\langle TC\bar{\Psi}_{-\mathbf{p}}^T(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}}(0)\rangle = e^{i\mathbf{v}\mathbf{T}} [F_+(\mathbf{p}, \tau)\mathcal{P}_+(\hat{\mathbf{p}}) + F_-(\mathbf{p}, \tau)\mathcal{P}_-(\hat{\mathbf{p}})], \quad (6)$$

где  $C = i\gamma^2\gamma^0$  — матрица зарядового сопряжения,  $\mathcal{P}_{\pm}(\hat{\mathbf{p}}) = (1 \pm \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}})/2$  — операторы проецирования на зону проводимости и валентную зону,  $\mathbf{T} = \{\gamma^5, \gamma^3\gamma^5, i\gamma^3\}$  — генераторы вращений в пространстве долин. Долинная структура параметризуется в (6) трехмерным вектором  $\mathbf{v}$  (в частности, спаривание является диагональным по долинам при  $v_1 = v_2 = 0$  и анти-диагональным при  $v_3 = 0$ ).

Решение уравнений Горькова с параметром порядка (6) приводит к системе двух уравнений самосогласования для щелей в зоне проводимости и в валентной зоне, похожей на (1), но с угловыми факторами и эффективным взаимодействием более сложного вида. Путем усреднения этих уравнений по импульсам может быть получена система многозонных уравнений Элиашберга. В диссертационной работе были найдены аналитические решения такой системы в приближении эйнштейновского спектра фононов как в пределе сильного допирования графена, когда спаривание, фактически, существует только в одной из зон, так и при малом допировании — в квантовой критической точке недопированного графена по константе связи и в ее окрестности.

Важным результатом является то, что вклад каждой фононной моды в эффективное взаимодействие, входящее в уравнения Элиашберга, может

<sup>38</sup>B. Uchoa, A.H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **98**, 146801 (2007).

<sup>39</sup>A.M. Black-Schaffer, S. Doniach, Phys. Rev. B **75**, 134512 (2007).

быть как притягивающим, так и отталкивающим — в зависимости от характера симметрии фононной моды и от долиной структуры  $\mathbf{v}$  параметра порядка (6). Так, в случае оптических плоских фононов функция Элиашберга имеет вид

$$\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu)F(\nu) = \sum_{\mu=1}^4 \mathcal{N} g_{\mu}^2 R_{\mu}(\mathbf{v}) \delta(\nu - \omega_{\mu}),$$

где  $\mu$  нумерует фононные моды с частотами  $\omega_{\mu}$  и константами электрон-фононного взаимодействия  $g_{\mu}$ ;  $\mathcal{N} = \mu/2\pi v_F^2$  — плотность состояний на поверхности Ферми. Угловые факторы  $R_{\mu}(\mathbf{v})$  для фононных мод симметрий  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $E_{2x}$  и  $E_{2y}$  равны, соответственно,

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \left[ -\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_2^2) \sin^2 v \right], \\ R_2(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \left[ -\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_3^2) \sin^2 v \right], \\ R_3(\mathbf{v}) = R_4(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \left[ -\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_1^2) \sin^2 v \right]. \end{aligned}$$

Каждый из этих угловых факторов, в зависимости от  $\mathbf{v}$ , может принимать значения в интервале от  $-1$  (что соответствует максимально сильному эффективному отталкиванию) до  $1$  (что соответствует притяжению). При спаривании структура параметра порядка  $\mathbf{v}$  будет подстраиваться таким образом, чтобы обеспечить наибольшее значение суммарной по всем модам константы связи. Так, в случае доминирования константы связи, соответствующей вырожденным модам  $A_1$  и  $B_1$ , будет осуществляться спаривание с  $\mathbf{v} = \{\pi/2, 0, 0\}$ , а в случае доминирования мод  $E_{2x}$  и  $E_{2y}$  будет реализовываться  $\mathbf{v} = \{0, (\pi/2) \cos \varphi, (\pi/2) \sin \varphi\}$ . Из-за сильной перенормировки эффективных констант связи  $g_{1,2}$  для первой пары мод под влиянием кулоновского взаимодействия<sup>36</sup> результат будет зависеть от диэлектрической проницаемости окружающей графен среды. При сильном химическом допировании графена температура перехода в сверхпроводящее состояние может достигать долей градуса Кельвина.

Квадратичное взаимодействие электронов в графене с изгибными фононами было подробно исследовано в диссертационной работе. Были приняты во внимание два механизма электрон-фононного взаимодействия: 1) через

деформационный потенциал, 2) посредством растяжения валентных связей, приводящего к модуляции интегралов перескока электронов между соседними атомами. Квадратичность электрон-фононного взаимодействия ведет к тому, что при вычислении соответствующего эффективного взаимодействия, входящего в многозонные уравнения Элиашберга, необходимо проводить интегрирование внутри фононной петли по частотам и по импульсам в пределе всей первой зоны Бриллюэна. В отличие от ситуации с плоскими фононами, где во взаимодействие с электронами, находящимися в окрестностях дираковских точек  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}'$ , вступают лишь фононы с импульсами  $\mathbf{q} \approx 0$  (оставляющие электрон в его долине) или  $\mathbf{q} = \pm \mathbf{K}$  (перебрасывающие электрон в противоположную долину), в данном случае изгибные фононы со всеми импульсами дают одинаково существенный вклад в эффективное электрон-электронное взаимодействие. Вклад изгибных фононов также зависит от долинной структуры параметра порядка, однако получающаяся константа связи слишком мала, чтобы обеспечить возможность спаривания в рассмотренных условиях.

Необходимо также отметить, что сверхпроводящий параметр порядка в графене при диагональном по зонам спаривании обладает необычными свойствами симметрии: куперовские пары в графене должны обладать совместной орбитально-спиново-долинной *симметрией* (в противоположность орбитально-спиновой *антисимметрии* при обычной сверхпроводимости). Этот факт связан с существованием «скрытой» антисимметрии параметра порядка по подрешеткам. Следовательно, если спаривание антисимметрично по долинам ( $v_1 = v_2 = 0$ ), то параметр порядка должен иметь совместную орбитально-спиновую антисимметрию, как и при обычной сверхпроводимости ( $s$ -волновое синглетное и  $p$ -волновое триплетное спаривание). Однако, при симметричном по долинам спаривании ( $v_3 = 0$ ) параметр порядка должен обладать орбитально-спиновой симметрией; в таком случае возможно, например,  $s$ -волновое триплетное спаривание.

Результаты, изложенные в третьей главе, опубликованы в статьях [6–8].

**В заключении** подводятся итоги проделанной работы, обсуждаются полученные в ходе диссертационной работы результаты. Кроме того, обсуждаются возможности практического применения полученных результатов и продолжения исследования электронных свойств графена при помощи развитых в диссертационной работе методов.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Найдены волновые функции магнитоэкситонов в графене в симметричной калибровке векторного потенциала, определены дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов и энергии рекомбинационных фотонов при учете кулоновского взаимодействия как малого возмущения. Обоснована применимость теории возмущения для кулоновского взаимодействия в сильном магнитном поле в случае пространственно не прямых магнитоэкситонов.
2. Исследовано спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена в режимах слабой и сильной связи. Обнаружено, что при переходе от слабой связи к сильной в графене и бислое графена отсутствует кроссовер к газу локальных пар, вместо которого реализуется переход от однозонного спаривания типа БКШ к многозонному «ультрарелятивистскому» спариванию.
3. Показано, что многозонное рассмотрение спаривания в бислое графена при сильной связи может дать гораздо большие оценки величины щели, чем однозонные оценки типа БКШ. Сделаны оценки влияния динамических эффектов (частотной зависимости экранированного потенциала спаривания) на величину щели и продемонстрирована серьезная конкуренция между неэкранированным кулоновским притяжением, с одной стороны, и совместным отталкивающим вкладом виртуальных плазмонов и одночастичных возбуждений, с другой стороны. Также отмечены необычные сверхтекучие свойства системы, в частности, фиксация относительной фазы щелей в зоне проводимости и валентной зоне и образование четверть-вихрей при фазовом переходе Костерлица-Таулеса.
4. Исследовано спаривание электронов в графене посредством плоских оптических, а также изгибных фононных мод. При этом предполагался  $s$ -волновой параметр порядка, диагональный по валентной зоне и зоне проводимости, но имеющий произвольную структуру в пространстве долин. Получены и аналитически решены в предельных случаях двухзонные уравнения Элиашберга, описывающие спаривание посредством фононов. Показано, что величина и знак эффектив-

ного взаимодействия, входящее в эти уравнения за счет каждой фоновой моды, зависят от симметрии этой моды и от структуры параметра порядка в пространстве долин. Отмечена необычная совместная пространственно-спиново-долинная симметрия параметра порядка.

5. Изучено квадратичное взаимодействие электронов с двумя ветвями (акустической и оптической) изгибных фононов с учетом вкладов деформационного потенциала и растяжения валентных связей в гамильтониан взаимодействия. Показано, что, хотя одночастичная динамика электронов в графене разыгрывается в окрестностях двух дираковских точек, в эффективное электрон-электронное взаимодействие, обусловленное изгибными фононами, дают вклады все импульсы фононов в пределах первой зоны Бриллюэна.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК

1. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, Electron-hole pair condensation in graphene bilayer // Письма в ЖЭТФ **87**, No. 1, сс. 61–65 (2008).
2. Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик, Коллективные электронные явления в графене // Успехи физических наук **178**, No. 7, сс. 757–776 (2008).
3. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, M. Willander, Coherent phases and magneto-excitons in graphene // Physica Status Solidi A **206**, No. 5, pp. 927–930 (2009).
4. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, Multi-band pairing of ultrarelativistic electrons and holes in graphene bilayer // Physics Letters A **374**, No. 2, pp. 326–330 (2009).
5. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, Ultrarelativistic electron-hole pairing in graphene bilayer // European Physical Journal B **73**, No. 2, pp. 195–206 (2009).



6. Ю.Е. Лозовик, С.Л. Огарков, А.А. Соколик, Теория сверхпроводимости дираковских электронов в графене // Журнал экспериментальной и теоретической физики **137**, No. 1, сс. 57–66 (2010).
7. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, Phonon-mediated electron pairing in graphene // Physics Letters A (опубликовано online), doi:10.1016/j.physleta.2010.04.070.
8. Yu.E. Lozovik, S.L. Ogarkov, A.A. Sokolik, Electron-electron and electron-hole pairing in graphene structures // Philosophical Transactions of the Royal Society A (принято в печать).

### Печатные работы в трудах научных конференций

1. Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, Coherent phases and collective electron phenomena in graphene // Journal of Physics: Conference Series **129**, 012003 (2008).
2. Ю.Е. Лозовик, А.А. Соколик, Ультрарелятивистское БКШ спаривание в электрон-дырочном бислое графена // Сборник трудов 51-й научной конференции МФТИ, ч. VIII, 2008, сс. 198–201.
3. Ю.Е. Лозовик, А.А. Соколик, Фононное спаривание ультрарелятивистских электронов в графене // Сборник трудов 52-й научной конференции МФТИ, ч. VIII, 2009, сс. 211–213.