Формула Бернули

Формула Бернулли — формула в теории вероятностей, позволяющая находить вероятность появления события A при независимых испытаниях. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений — сложения и умножения вероятностей — при достаточно большом количестве испытаний. Названа в честь выдающегося швейцарского математика Якоба Бернулли, который вывел эту формулу.

Формулировка

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{k,n}$ того, что событие A наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна: $P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Доказательство

Пусть проводится n независимых испытаний, причём известно, что в результате каждого испытания событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$ и, следовательно, не наступает с вероятностью $P\left(\bar{A}\right) = 1 - p = q$. Пусть, так же, в ходе испытаний вероятности p и q остаются неизменными. Какова вероятность того, что в результате n независимых испытаний, событие A наступит ровно k раз?

Оказывается можно точно подсчитать число "удачных"комбинаций исходов испытаний, для которых событие A наступает k раз в n независимых испытаниях, - в точности это количество сочетаний из n по k:

$$C_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

.

В то же время, так как все испытания независимы и их исходы несовместимы (событие A либо наступает, либо нет), то вероятность получения "удачной"комбинации в точности равна: $p^k \cdot q^{n-k}$

Окончательно, для того чтобы найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз, нужно сложить вероятности получения всех "удачных"комбинаций. Вероятности получения всех "удачных"комбинаций одинаковы и равны $p^k \cdot q^{n-k}$, количество "удачных"комбинаций равно $C_n(k)$, поэтому окончательно получаем:

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

.

Последнее выражение есть не что иное, как Формула Бернулли. Полезно также заметить, что в силу полноты группы событий, будет справедливо:

$$\sum_{k=0}^{n}(P_{k,n}) = 1$$

.