Laboratorio di Fisica 1: Esperimento 4, *Pendolo Fisico*

Andrea Vacchi

Aprile 2021

Contents

1 Le Leggi del pendolo armonico

1.1 Il pendolo semplice

Il pendolo semplice, o ideale, è dotato di un filo inestensibile e massa trascurabile a cui è appesa una massa *puntiforme*. L'equazione che descrivere il suo moto è:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \tag{1}$$

Si osserva che l'equazione **non** è risolvibile analiticamnete, a causa del seno. Si ricorre dunque alla approssimazione $\sin\theta \sim \theta$ che ci permette di limitarci al caso di *piccole oscillazioni*, in modo da ottenere:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2}$$

È importanre notare che questa è una approssimazione armonica: si conclude che il pendolo semplice **non** è un oscillatore naturalmente armonico, poiché l'azione di richiamo contiene un termine sinusoidale approssimato.

1.2 Il pendolo fisico

Nell'esperienza reale bisogna tener conto di più fattori: la massa M appesa che non è puntiforme, l'attrito viscoso dell'aria γ e, in alcuni casi, le caratteristiche del filo. Considerando questi parametri, l'equazione differenziale cambia:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\theta}{dt} + \frac{MgL}{I^*}\sin(\theta) = 0 \tag{3}$$

Come in precedenza, consideriamo le *piccole oscillazioni*:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\theta}{dt} + \frac{MgL}{I^*}\theta = 0 \tag{4}$$

Da cui si ricava:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_s t + \phi) \tag{5}$$

Invece, per trovare il periodo del pendolo fisico si ricorre agli sviluppi di Taylor:

$$\frac{T}{T_0} = (1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + ...) \tag{6}$$

Quindi in realtà il periodo dipende dall'angolo di apertura, ma si nota che siamo nell'ambito delle *piccole oscillazioni*, esso coincide col periodo usualmente calcolato $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, il che è perfettamente coerente con l'approssimazione armonica.

* I è noto dal Teorema di Huygens-Steiner.

2 Scopo dell'esperimento

Gli obiettivi dell'esperimento sono:

1. Verificare i limiti di validità dell'approssimazione armonica.
2. Verificare la trascurabilità dell'attrito dell'aria γ.
3. Valutare se il pendolo fisico può essere approssimato a un pendolo ideale.
4. Fornire una stima dell'accelerazione di gravità g.

3 L'esperimento

I dati iniziali:

- Massa della sfera: $M \pm \delta M = (10 \pm 0.1)g$
- Raggio della sfera: $R \pm \delta R = (10 \pm 0.1)cm$
- Massa del filo: $m_{filo} < 0.1g \rightarrow trascurabile$

Dal "best fit" di $x(t)$, la funzione armonica smorzata (5) si determinano i seguenti parametri:

ω_s	$\delta\omega_s$	T	δT	A	δA
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

Table 1: dati sperimentali.

3.1 Valutazione della validità dell'approssimazione armonica

Inanzitutto, ricavo la frequenza angolare idelae ω_0 usando le ω_s della Tabella 1:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{\mathrm{s}}^{\mathbf{2}} - \gamma^{\mathbf{2}}} \tag{7}$$

E confrontarli nella disuguaglianza:

$$\omega_0 - \sqrt{\frac{g}{L}} \leq \delta\omega_{\mathrm{s}} \tag{8}$$

Solo se la disuguaglianza risulta valida, allora il pendolo fisico è approssimabile al pendolo semplice. Per gli angoli del nostro esperimento (di valore superiore all'angolo limite, al di sotto del quale è valida l'approssimazione armonica) la disuguaglianza non è valida, quindi il pendolo fisico **non** può essere approssimato al pendolo ideale.

3.2 Verifica della trascurabilità dell'attrito dell'aria γ

Dal fit della funzione armonica smorzata si verifica che l'attrito viscoso dell'aria è effettivamente trascurabile, secondo la formula:

$$\omega_0 - \omega_s \leq \delta\omega_s \tag{9}$$

Questo significa che la differenza dei due valori è più piccola dell'errore trovato e ci permette di trascurare l'attrito dell'aria.

3.3 Il pendolo fisico come approssimazione di un pendolo ideale

Per verificare la dipendenza tra T e θ è necessario avere l'angolo che si forma tra il filo del pendolo e la verticale passante per il polo a cui è appeso il filo, ma dal "best-fit" si ottine solamente l'ampiezza. Si ricorre perciò alle proprietà dei triangoli rettangoli:

$$A = L\sin(\theta) \rightarrow \theta = \arcsin(\frac{A}{L}) \tag{10}$$

Osservazione: dal momento che il pendolo è fisico, devo prendere come L la somma tra la lunghezza del filo e il raggio della sfera attaccata.

Per calcoare l'errore sull'angolo è opportuno propagare in quadratura gli errori espressi nella forma di derivate parziali (a causa della funzione non polinomiale):

$$nonlaso:(\tag{11}$$

Invece, per trovare l'errore relativo del periodo corrisponde all'errore relativo dell'angolo. Quindi:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\omega}{\omega} \rightarrow \delta T = \frac{\delta\omega}{\omega}T \tag{12}$$

Mettendo in ascissa l'angolo θ e in ordinata il periodo , e usando la seguente funzione (periodo reale di un pendolo, limitata alla quarta potenza del seno):

$$T = T_0(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2}) \tag{13}$$

3.4 Stima dell'accelerazione di gravità g

Mettendo in grafico la funzione qua sopra, possiamo osservare che i valore di $T_0 \pm \delta T$ è pari a (inserire valore). Ricavando g dalla formula del periodo criviamo:

$$g = 4\pi^2\frac{L}{T_0^2} \tag{14}$$

Con seguente errore:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta L}{L} + 2\frac{\delta T_0}{T_0} \tag{15}$$

(plot)

$g + \delta g = (9,80 \pm 0,0001)\frac{m}{s^2}$

4 Conclusioni

Meh speriamo bene.