Билет №1

Величина z называется ***функцией двух переменных величин*** x и y , если каждой паре чисел, которые могут быть значениями переменных x и y соответствует одно или несколько определенных значений величины z. При этом переменные x и y –аргументы.

Для наглядности пара значений x и y изображается геометрически точкой M(x,y), отнесенной к XOY.

Область определения: пары тех чисел которые могут быть значениями аргументов x, y функции f(x,y) в совокупности составляют область определения этой функции.

Геометрически область определения изображается некоторой совокупностью точек плоскости XOY.

Обозначение: z=f(x,y)– z есть функция двух переменных x, y.

***Способы задания*:**

1)формула – явная или неявная (PV=A(273+t)).

2)таблица.

Билет №2

Определение: множество всех точек M(x,y) плоскости координаты которой удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ (сигма) называется ***Δ-окрестностью*** точки $M_0(x_0,y_0)$. Другими словами, Δ-окрестностью точки M_0 это круг с центром в точке M_0 и радиусом Δ (внутренняя часть без границ).

Определение: пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Число A называется ***пределом*** функции z=f(x,y) при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или если $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$) если выполняется условие:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x\neq x_0, y\neq y_0:\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon}$$

Обозначается $A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

Из определения следует, что если предел существует то он не зависит от пути по которому точка M стремится к M_0.

Геометрический смысл определения предела функции двух переменных

Каково бы ни было число $\varepsilon>0$ найдется такая Δ-окрестность точки M_0, что во всех ее точках M (отличных от M_0) аппликаты (z) соответствующих точек поверхности z=f(x,y) отличаются от числа A по модулю больше чем на ε.

Пример: вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=[y=kx]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

Данная функция предела не имеет. Замечание: при $x\to 0, y\to\infty$ заменяем на функцию $y=\dfrac{k}{x}$ x→0, y→2 заменяем на функцию $y=kx+2$

Свойства.

Предел функции двух переменных обладает теми же свойствами, что и предел функции двух переменных.

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке M_0, если она:

1. определена в этой точке и некоторой ее окружности
2. имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$
3. значение этого предела равно значению функции z в этой точке M_0, т.е. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной*** в этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке) называется точками разрыва этой функции. Точки разрыва функции $z=f(x,y)$ могут образовывать целые линии разрыва.

Например: $z=\dfrac{1}{x-y}\ \Leftrightarrow\ x-y=0\ \Leftrightarrow y=x$ – линия разрыва.

Билет №3

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, т.к. x и y независимые переменные, то одна из них может измениться, а другая сохранять свои значения. Дадим независимой переменной x приращение Δx, а переменную y будем считать неизменной. Тогда функция z получит приращение, которое называется ***частным приращением*** z по x ($\Delta_x z$) т.е. имеем $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Аналогично переменной y дадим приращение Δy, а x – без изменения. Тогда функция z получит приращение, которое называется частным приращением z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Полное приращение функции z будет определяться как: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Определение: Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

то он называется ***частной производной функции*** $z = f(x, y)$ по переменной x или z_x', $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная функции z по y, т.е. z'_y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Таким образом, частная производная функции двух переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства второй переменной.

Пример: $z = 2y + e^{x^2 - y} + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 - y} \cdot 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 - e^{x^2 - y}$$

Пример: $z = 2xy + \frac{1}{x} - y^2 + \ln(x + y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x + y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y + \frac{1}{x + y}$$

Билет №4

Частные производные 1-го порядка являются функциями, которые также могут иметь производные 2-го порядка. Они определяются следующим образом: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Частные производные 2-го или более высоких порядков, взятые по различным переменным называются смешанными частными производными: z''_{xy}, z''_{yx}, ...

***Теорема Шварца*:**

Если частные производные высших порядков непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования равны между собой: $z''_{xy} = z''_{yx}$

Билет №5

Пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки M(x,y). Составим полное приращение функции z в точке M:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Определение: функция z=f(x,y) называется дифференцируемой в точке M, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y \quad \textbf{(1)},$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0 \quad [\Delta x \to 0]$

$\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0 \quad [\Delta y \to 0]$

Определение: сумма двух первых слагаемых в равенстве (1) называется ***главной частью*** приращения функции z.

Определение: главная часть приращения функции z=f(x,y) линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции и обозначается dz, т.е. $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ **(2)**

Выражение $A\cdot\Delta x$ и $B\cdot\Delta y$ называются ***частными дифференциалами*** функции z.

Для независимых переменных x и y выполняются $\Delta x = dx,\quad \Delta y = dy$

Поэтому (2)$\Rightarrow$ $dz = Adx + Bdy$

Теорема №1: (о необходимости условия дифференцируемости функции 2х переменных). Если функция z=f(x,y) дифференцируема в точке M(x,y), то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Причем $\frac{\partial z}{\partial x}$=A, $\frac{\partial z}{\partial y}$=B

(Без доказательства)

В соответствии с этой теоремой формула для полного дифференциала можно переписать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Замечание: обратное условие теоремы неверно, то есть из непрерывности функции в точке не следует, что функция дифференцируема в точке. Эта функция непрерывна в данной точке, однако в этой точке функция не дифференцируема.

Пример: z=$\sqrt{x^2+y^2}$, рассматривается точка O(0,0).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Теорема №2: (достаточное условие дифференцируемости функции в точке)

Если функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке M, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Из определения дифференциала функции z следует, что при достаточно малых Δx, Δy справедливо: $\Delta z \approx dz$ (*)

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

То подставив ее в (*) получим: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

Билет №6

Полный дифференциал функции также называется дифференциалом 1-го порядка. Пусть функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные 2 и более высших порядков.

Определение: дифференциал 2 порядка определяется по формуле

$$d^2z = d(dz).$$

Найдем формулу для вычисления д. 2-го порядка:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Символически можно считать d^2z – квадрат скобки (dz), где $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}dy + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Билет №7

Пусть Z=f(x,y) – функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t, то есть

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Z=f(x,y)=f(x(t),y(t))- будет являться функцией одной независимой переменной t, а переменные x и y – промежуточные переменные.

<u>Теорема</u>: если функция Z=f(x,y) дифференцируема в точке M(x,y) и x(t) и y(t) – дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции Z(t)=f(x(t),y(t)) вычисляется так:

$$(*)\quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

<u>Замечание</u>: пусть дана z=f(x,y), y=y(x), тогда z(x)=f(x,y(x)) и производная этой функции, согласно (*) будет иметь вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

– формула полной производной.

Общий случай.

z=f(x,y),x=x(u,υ), y=y(u,υ). Тогда z=f(x(u,υ),y(u,υ)) – сложная функция двух независимых переменных u и $\upsilon \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{du} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{dz}{d\upsilon} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \upsilon} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{cases}$$

Билет №8

Говорят, что функция z=f(x,y) задана неявно, если данная функция задается уравнением F(x,y,z)=0, неразрешимым относительно z.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z. Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию f(x,y), получим F(x,y,f(x,y))=0.

Известно, что частные производные по x и по y функции тождественно равной 0, также равны 0. Дифференцируя данное тождество по x , а потом по y, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

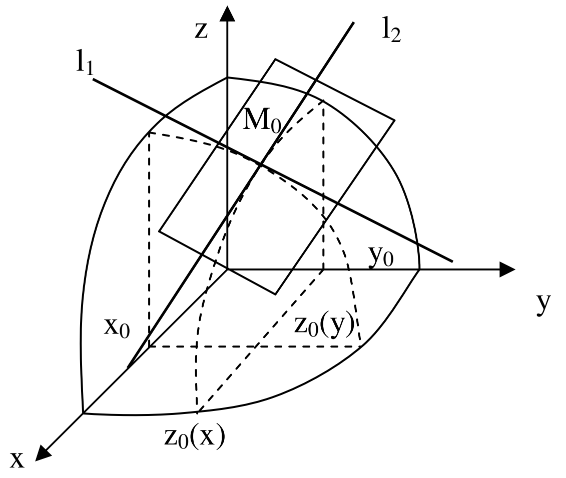
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Билет №9

Одним из геометрических приложений частных производных функции 2-х переменных является нахождение уравнений касательной к поверхности и нормали к поверхности.

Рассмотрим плоскость S, изображающую функцию $z=f(x,y)$. Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0,y_0)\in D\in R$. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z плоскостями $x=x_0$ и $y=y_0$. Рассмотрим сечение $x=x_0$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0, $z_0(y)$ является дифференцируемой в точке y_0. Значит в эту точку в плоскости $x=x_0$ может быть проведена касательная l_1 к кривой $z_0(y)$. Проведя аналогичные рассуждения для сечения $y=y_0$, построим на плоскости $y=y_0$ и кривой $z_0(x)$ касательную l_2 в т. M_0.



Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется ***касательной*** плоскостью к поверхности S в т. M_0.

Составим уравнение этой плоскости, проходящей через точку M_0. Т.к. плоскость α проходит через в т. M_0 с координатами (x_0,y_0,z_0), то ее уравнение может быть записано в виде: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Найдем коэффициенты A,B,C.

$z-z_0= A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$, обозначив $A_1=-A/C$, $B_1=-B/C$. Найдем коэффициенты A_1 и B_1. ***Уравнение касательной***:

l_1: $z-z_0=f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$ – уравнение прямой l_1, проведенной к кривой $z_0(y)$ плоскости $x=x_0$;

l_2: $z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной l_2 к кривой $z_0(x)$в плоскости $y=y_0$.

Касательная l_1 лежит в плоскости α, значит, все координаты ее точек должны удовлетворять уравнению плоскости α:

$$\begin{cases} z-z_0=f_y'(x_0,y_0)*(y-y_0) \\ x=x_0 \\ z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0) \end{cases} \Rightarrow A_1 \text{ и } B_1$$

$$B_1=f_y'(x_0,y_0)$$

$$A_1=f_x'(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \quad z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

– ***уравнение касательной плоскости***.

Прямая, проходящая через т. M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости, построенной в этой т. называется её ***нормалью***. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости можно получить ***уравнение нормали***:

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Если поверхность S задана в ***неявном виде*** $F(x,y,z)=0$, то:

$$f_x'=-\frac{F_x'}{F_z'}; \quad f_y'=-\frac{F_y'}{F_z'};$$

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

– ***уравнение касательной плоскости к поверхности задаваемой неявно***

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

– ***уравнение нормали к поверхности заданной неявно***

Пример: написать уравнение плоскости и нормали к параболоиду вращения в т. M_0 с координатами (1,-1,2).

Решение.

$z=x^2+y^2$; $z'_x = 2x$; $z'_y = 2y$; $z'_x(M_0) = 2$; $z'_y(M_0) = -2$; уравнение касательной плоскости: z-2=2(x-1)-2(y+1) => 2x-2y-z-2=0; уравнение нормали:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$;

Билет №10

Пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой области D и точка $N(x_0,y_0)\in D$.
Определение: точка $N(x_0,y_0)$ называется ***т. максимума*** функции z=f(x,y), если существует такая Δ-окрестность т. $N(x_0,y_0)$, что для каждой точки (x,y) отличной от точки N и принадлежащей этой окрестности выполняется условие: ***$f(x,y)<f(x_0,y_0)$ – т. максимума.***
Точка N с координатами (x_0,y_0) называется ***т. минимума*** функции z=f(x,y), если для окрестности Δ точки N выполняется условие, что для каждой точки $\neq N$ и принадлежащей этой окрестности, выполняется условие: $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ – т. минимума.

Значение функции в т. максимума (минимума) называется максимум (минимум) функции. MAX, MIN называются ***экстремумом функции***.

Рассмотрим ***условие существования экстремума функции***:
Теорема №1. (Необходимое условие существования экстремума). Если в точке $N(x_0,y_0)$ дифференциальная функция z=f(x,y) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны 0:

$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad (1)$$

Замечание: Геометрически равенство (1) означает, что в точке экстремума функции z=f(x,y) касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию f(x,y), параллельна плоскости XOY , т.к. уравнение касательной в этом случае => $z=z_0 \Leftrightarrow z-z_0=0$.
Теорема №2. (Достаточное условие существования экстремума)
Определение: точка, в которой частные производные 1-го порядка функции z=f(x,y) равны 0, называется ***критическими*** или ***стационарными***.
Теорема №3. Пусть в т. (x_0,y_0) и некоторой ее окрестности, функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные 2-го порядка включительно. Вычислим в т. (x_0,y_0) следующие значения:

$$A=f_{xx}^{\shortparallel}(x_0,y_0);$$

$$P=f_{xy}^{\shortparallel}(x_0,y_0);$$

$$C=f_{yy}^{\shortparallel}(x_0,y_0);$$

Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix}=AC-B^2$.

Тогда:

1) Если Δ>0, то функция f(x,y) в т. (x_0,y_0) имеет экстремум: максимум, если A<0, минимум, если A>0.
2) Если Δ<0, то функция f(x,y) в т. (x_0,y_0) экстремума не имеет.
3) Если Δ=0, то функция f(x,y) в т. (x_0,y_0) экстремум может иметь или не иметь.

Билет №11

Функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D. Тогда она достигает в некоторой точке области своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области D или в точках лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой области D функции $z=f(x,y)$:

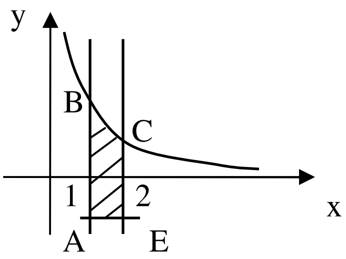
1) Найти все крайние точки функции, принадлежащие области D и вычислить значение функции в этих точках.

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области.

3) Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример: $z=x^2y+xy^2+xy$ в замкнутой области, ограниченной линией $y=1/x$, $x=1, x=2, y=-1.5$.

Решение.



$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+y^2+y=0 \\ x^2+2xy+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=0 \\ x_2=0 \\ y_2=-1 \\ x_3=-\frac{1}{3} \\ y_3=-\frac{1}{3} \\ x_4=0 \\ y_4=0 \end{cases}$$

Все найденные точки не принадлежат области D.

<u>*Ищем на границе*</u>:

AB: $x=1, z=2y+y^2$; $y\in[-1.5,1]$

$Z'_y=2+2y=0$

$y=-1\in[-1.5,1]$

$z(-1)=-1$; $z(-1.5)=-0.75$; $z(1)=3$

$z_{max}=3$; $z_{min}=-1$

BC: $y=1/x$

$z=x+1/x+1$;

$Z'_x=1-1/x^2=0$

$x=1\in[1,2]$

$x=-1\notin[1,2]$

$z(1)=3$; $z(2)=3.5$

$z_{max}=3.5$; $z_{min}=3$

CE: $x=2, z=6y+2y^2$; $y\in[-1.5,0.5]$

$Z'_y=6+2y=0$

$y=-3/2\in[-1.5,1]$

$z(-3/2)=-4.5$

$z(0.5)=3.5$;

$z_{max}=3.5$; $z_{min}=-4.5$

AE: $y=-1.5$

$z=-1.5x^2+0.75x$ $x\in[1,2]$

$Z'_x=-3x+0.75=0$

$x=0.25\notin[1,2]$

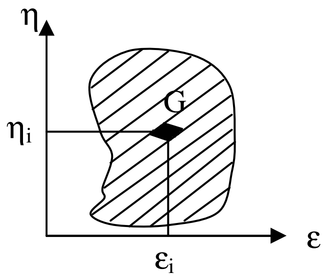
$z(1)=-0.75$; $z(2)=-4.5$

$z_{max}=-0.75$; $z_{min}=-4.5$

Ответ: $z_{max}=3.5$ в точке [2,0.5]; $z_{min}=-4.5$ в точке [2,-1.5]

Билет №12

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных. Пусть G – некоторая ограниченная и замкнутая область Z= f(x,y), где Z – произвольная функция, определенная и ограниченная в области G.



Разобьем область G произвольно на n-частей G_i, не имеющих общих внутренних точек с площадями ΔS_i (i=1,…,n). В каждой части G_i выберем произвольно точку с координатами (ε_i,η_i) и составим сумму:

(1) $\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\cdot\Delta S_i$ – интегральная сумма для функции f(x,y) в области G. **Определение**: диаметром области G называется наибольшее расстояние между границами точек этой области.

Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм:

(*) $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\ldots$

для f(x,y) в области G, полученную при различных способах разбиения области. Предположим, что max диаметр частей $G_i \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема: если функция f(x,y) непрерывна в замкнутой области G, то существует предел последовательности (*) интегральных сумм (1) при условии, что max диаметр частей $G_i\to 0$ при $n\to\infty$. При этом этот предел не зависит ни от способов разбиения области G на части G_i, ни от выбора точек (ε_i,η_i) внутри частей G_i.

Определение: этот предел и называется ***двойным интегралом*** от функции f(x,y) в области G, т.е.:

$$\lim_{MAX\ d(G_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\Delta S_i=\iint_G f(x,y)dxdy$$

при этом область G называется ***областью интегрирования***.

Если f(x,y)>0, то двойной интеграл от функции f(x,y) по области G равен объему тела, ограниченного поверхностью, образующая которого параллельна OZ, а направляющая служит границей области G.

Свойства двойного интеграла.

Теорема №1: если функция f(x,y) и g(x,y) интегрируемые в области G, то их алгебраическая сумма также интегрируема в области G, т.е

$$\iint_G (f(x,y)\pm g(x,y))dxdy=\iint_G f(x,y)dxdy\pm\iint_G g(x,y)dxdy$$

Теорема №2: постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.
k=const

$$\iint_G kf(x,y)dxdy=k\iint_G f(x,y)dxdy$$

Теорема №3: если область G является объединением областей G_1 и G_2 не имеющих общих внутренних точек и функция f(x,y) интегрируема в областях G_1 и G_2, то она интегрируема и на всей области G, при этом

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_{G1} f(x,y)dxdy+\iint_{G2} f(x,y)dxdy$$

Теорема №4 (о среднем): если функция f(x,y) непрерывна и интегрируема в области G, то в этой области G найдется такая точка (ε_i,η_i), что

$$\iint_G f(x,y)dxdy=f(\varepsilon_i,\eta_i)\cdot S$$

S – площадь фигуры G.

Билет №13

Пусть область G, лежащая в плоскости XOY такова, что любая прямая, параллельная одной из координатных осей и проходящая через внутреннюю точку этой области пересекает границу области только в двух точках P1 и P2. Пусть область G ограничена линиями $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ и прямыми x=a и x=b, причём $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ и a<b. Такая область G называется ***правильной*** в направлении оси OY. Аналогично с осью OX.

Определение: область, правильная во всех направлениях называется ***правильной.***

Пусть функция f(x,y) непрерывна в области G, рассмотрим выражение

$$I_G=\int_a^b\Big(\int_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)}f(x,y)dy\Big)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)}f(x,y)dy$$

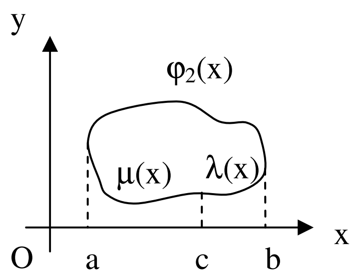
– двукратный или повторный интеграл от функции f(x,y) по области G. В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причём интегрирование ведётся по переменной y, а переменная x считается постоянной величиной. Затем полученное выражение интегрируем по x в пределах от a до b, в результате получаем конечное число.

Теорема: двойной интеграл от непрерывной функции f(x,y) по правильной области G равен повторному интегралу по области G:

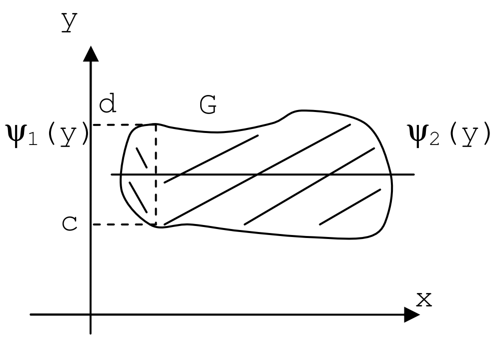
$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$

Замечание 1: рассматривают случай, когда область G такова, что одна из функций $y=\varphi_1(x)$ или $y=\varphi_2(x)$ не может быть задана одним аналитическим выражением на всем участке изменения $x\in(a,b)$. Пусть a<c<b, причем $\varphi_1(x)=\mu(x)$ на [a,b], $\varphi_2(x)=\lambda(x)$ на [c,b]. Тогда двойной интеграл по области G можно вычислить по формуле:

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_a^c dx\int_{\mu(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy+\int_c^b dx\int_{\lambda(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$



Замечание 2: пусть правильная в направлении оси OX область G ограничена линиями: $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, y=c, y=d, причем $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, c≤d.



$$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)dx$$

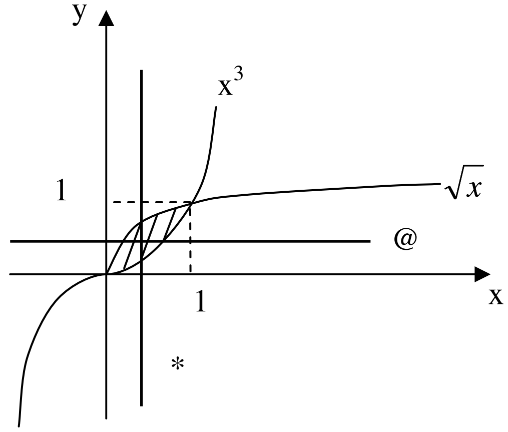
Для вычисления 2-го повторного интеграла его необходимо представить в виде повторного, и в зависимости от вида области G выбирается та или другая формула. Если область правильная во обоих направлениях – выбирается любая формула.

Пример:

Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$$

$$*\qquad\qquad\qquad @$$



<u>Замечание 3:</u>

если область G не является правильной, то область G нужно разбить на конечное число правильных областей и вычислить двойной интеграл у каждой из них.

Билет №14

Пусть требуется вычислить 2-й интеграл по области G. Если область G является правильной в полярных координатах ρ и φ, то вычисление данного двойного интеграла можно свети к вычислению повторного интеграла в полярных координатах.

$$\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho$$

Где ρ–якобиан преобразования.

Доказательство:

В общем случае:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|dud\upsilon=\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho' d\rho d\varphi\ .$$

$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|$–Функциональный определитель Якоби

$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\upsilon)}\right|=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial\upsilon \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial\upsilon\end{vmatrix}\neq 0$, т.о. в случае ***полярных координат:***

x=ρcosφ

y=ρsinφ ⇒

$$\Rightarrow\ \rho'=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\Leftrightarrow\rho'=\rho$$

Теорема доказана.

Билет №15

1) Площадь фигуры

Площадь фигуры равна двойному интегралу, взятому по области D в декартовых координатах:

$$S = \iint_D dxdy$$

в полярных координатах:

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$$

2) объём цилиндрического тела

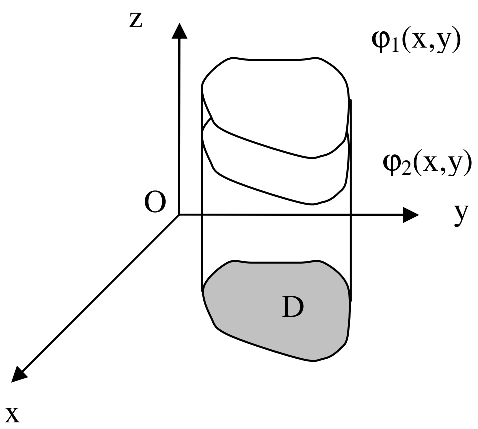
Объём тела, основанием которого является плоскость XOY, сверху его ограничивает поверхность z=f(x,y), а с боков цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси OZ, равен двойному интегралу от функции f(x,y) по области D, где D– проекция поверхности f(x,y) на плоскость XOY:

$$V_{декартовы\ координаты} = \iint_D f(x,y)dxdy$$

в полярных координатах:

$$V_{полярные\ коодинаты} = \iint_D \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho d\varphi$$

Замечание: объём тела, ограниченного поверхностями $z=\varphi_1(x,y)>0$ и $z=\varphi_2(x,y)>0$, причем $\varphi_1>\varphi_2$. С боков цилиндрической поверхностью, где проекцией каждой поверхности на плоскость XOY является область D, равен разности объемов двух цилиндрических тел, у одного из которых основанием является область D, а сверху оно ограничивается поверхностью $z=\varphi_2(x,y)$, у другого основание также область D, а сверху $z=\varphi_1(x,y)$. Т.е. объём данного тела равен разности двойных интегралов:



$$V = \iint_D \varphi_1(x,y)dxdy - \iint_D \varphi_2(x,y)dxdy = \iint_D (\varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y))dxdy$$

3) Площадь поверхности

Если гладкая поверхность имеет уравнение z=f(x,y), то площадь части этой поверхности, проектирующейся в область G плоскости OXY, равна

$$Q = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Билет №16

Пусть функция f(x,y,z) непрерывна в некоторой конечной замкнутой области V. Разобьем область V произвольно на n частичных областей ΔV_i, обозначая через ΔV_i не только саму область, но и ее объем.

Внутри каждой области ΔV_i выбираем произвольно точку P_i и обозначим через f(Pi) значение функции в этой точке. Составим сумму вида:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta v_i$$

где ΔV_i – объем частичной области. Сумма (1) называется ***n-ой интегральной суммой*** для функции f(x,y,z) по области V.

Определение: предел n-ой суммы(1) при неограниченном уменьшении наибольшего из диаметров частичных областей ΔV_i (если этот предел не зависит не от способа разбиения области V на части ΔV_i, ни от выбора точки P_i внутри этих областей) называется ***тройным интегралом*** от функции f(x,y,z) по области V:

$$\lim_{\max(d_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

Определение: область V называется ***правильной трехмерной областью***, если она обладает следующими свойствами:

1) Любая прямая, проходящая через внутреннюю область V, параллельная оси oz пересекает границу области только в 2-х точках.
2) Вся область V проектируется на XOY в правильную двумерную область G.
3) Всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей XOY, XOZ, YOZ также обладают свойством 1 и 2.

Пусть область V ограничена сверху поверхностью, уравнение которой равно $z=\mu(x,y)$, снизу $z=\varepsilon(x,y)$. Область G – проекция области V на плоскость XOY ограниченная линиями $y=\varphi_1(x)$и $y=\varphi_2(x)$, x=a, x=b, тогда выражение:

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\varepsilon(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x,y,z)dz$$

– называется ***трехкратным интегралом*** от f(x,y,z) по области V.

Свойства тройных интегралов.

1) Если функция f(x,y,z) непрерывна в замкнутой области V, а эта замкнутая область V разделена на конечное число областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, то функция f(x,y,z) интегрируема в каждой из этих частей, т.е.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V1} f(x,y,z)dxdydz + \ldots + \iiint_{Vn} f(x,y,z)dxdydz$$

2) Если функции f1, f2,…,fn непрерывны в замкнутой области V и $c_1, c_2, \ldots c_n$=const числа, то

$$\iiint_V (c1f1 + c2f2 + \ldots + cnfn)dxdydz = c1\iiint_V f1dxdydz + \ldots + cn\iiint_V fndxdydz$$

3) Если функции f(x,y,z) и g(x,y,z) непрерывны в замкнутой области V и f(x,y,z) <= g(x,y,z), то:

$$\iiint_V fdxdydz \le \iiint_V gdxdydz$$

4) Если функция f(x,y,z) непрерывна в замкнутой области V: m≤f(x,y,z)≤M, то

$$m\omega \le \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \le M\omega$$

где ω – объем области V (под точками m и M понимаются наименьшее и наибольшее значение функции f(x,y,z) в области V).
5) Если функция f(x,y,z) непрерывна в замкнутой области V, то в этой области найдется такая точка (x′¸y′¸z′), что

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = f(x', y', z') \cdot \omega$$

Теорема: тройной интеграл от непрерывной функции f(x,y,z) по правильной трехмерной области равен трехкратному интегралу от этой функции по области V:

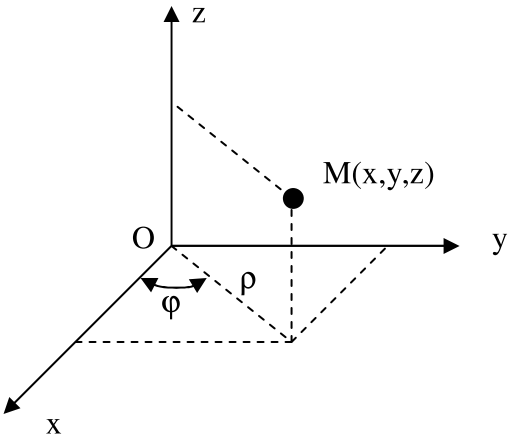
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\alpha_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Замечание: так же как и в случае 2-х кратных интегралов, трехкратные интегралы можно записать несколькими способами, меняя порядок интегрирования и пределы интегрирования, если это позволяет форма области V.
Замечание: если подынтегральная функция тождественно равна 1 в области V, то тройной интеграл выражается объемом этой области:

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Билет №17

Цилиндрическая система координат:



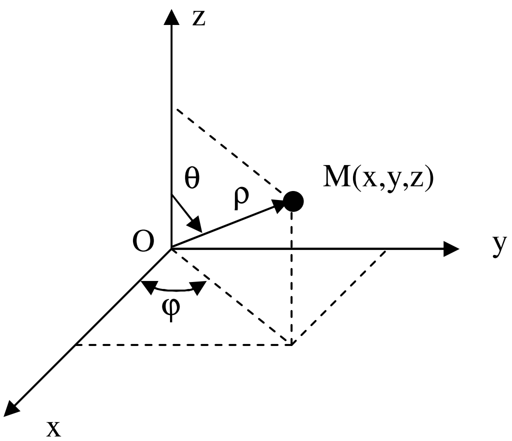
Здесь положение точки М в пространстве определяется 3-мя числами: ρ, φ и z, где ρ и φ – полярные координаты в плоскости XOY, а z – аппликата точки М. При этом предполагается, что $\begin{bmatrix} -\pi \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le +\infty \end{bmatrix}$

Тогда формулы перевода декартовых координат пространства в цилиндрическую имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= \rho\cdot\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, dzd\rho d\varphi$$

Сферическая система координат:



Положение точки М определяется тремя числами: ρ, φ, θ, где ρ – расстояние от начала координат (радиус-вектор) до точки; φ – угол между проекцией ρ радиус-вектора на плоскость XOY и осью OX отсчитываемый против часовой стрелки; θ – угол между радиус вектором и осью OZ. При этом предполагается, что $\begin{bmatrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \end{bmatrix}$

Формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$

Якобиан преобразования: $I = \rho^2 \sin\theta$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cdot\cos\varphi\sin\theta, \rho\cdot\sin\varphi\sin\theta, \rho\cdot\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho$$

Билет №18

1) Объем V пространственной области T равен: $V = \iiint\limits_T dxdydz$

2) Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x,y,z)$, занимающего область T:

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dxdydz$$

3) Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ ,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ ,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ .$$

4) Координаты центра масс тела: $\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{M}, \bar{y} = \dfrac{M_{zx}}{M}, \bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{M}$.

5) Моменты инерции тела относительно осей координат:

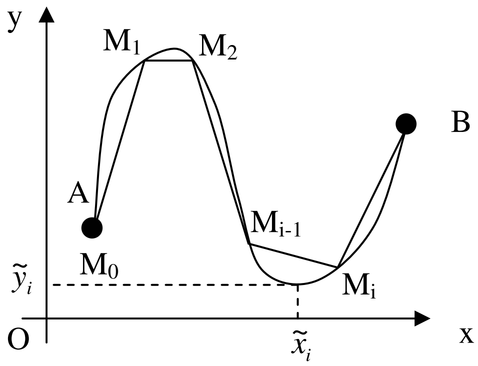
$$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ ,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2+x^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ ,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz\ .$$

Билет №19

Пусть на плоскости XOY задана непрерывная кривая AB, обозначим ее l.



Рассмотрим непрерывную функцию f(x,y), определенную в точках кривой AB. Разобьем кривую AB точками $M_0=A$, $M_1,..,M_n=B$ на n-частичных дуг $M_{i-1},M_i=\Delta l_i$ Выберем на каждой дуге произвольную точку (x_i,y_i) и составим сумму $\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)\Delta l_i$ **(*)**

Эта сумма (*) называется ***интегральной суммой функции*** f(x,y) по кривой AB. Пусть $\lambda=\max_{1\le i\le n}\Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг деления. Рассмотрим случай $\lambda\to 0$ (а значит и $n\to\infty$). Если существует конечный предел интегральных сумм (*), то его называют криволинейным интегралом 1-го рода от функции f(x,y) по длине кривой AB и обозначают

$$\int_{AB} f(x,y)dl$$

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)\Delta l_i$$

<u>ТЕОРЕМА</u>: Если функция f(x,y) непрерывна в каждой точке гладкой кривой l (AB), то криволинейный интеграл 1-го рода существует и не зависит ни от способа разбиения AB на части, ни от выбора в них точек с координатами (x_i,y_i)

<u>СВОЙСТВА</u>:

1) $\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{BA} f(x,y)dl$, т.е. криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления пути интегрирования.

2) $\int_{AB} c*f(x,y)dl=c*\int_{AB} f(x,y)dl$

3) $\int_{AB}[f(x,y)\pm g(x,y)]dl=\int_{AB} f(x,y)dl\pm\int_{AB} g(x,y)dl$

4) $\int_{L} f(x,y)dl=\int_{L1} f(x,y)dl+\int_{L2} f(x,y)dl$, где $L1\cup L2=L$ и имеет единственную общую точку.

5) Если для точек кривой AB выполняется неравенство $f(x,y)\le g(x,y)$, то $\int_{AB} f(x,y)dl\le\int_{AB} g(x,y)dl$

6) $\int_{AB} dl=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=L$, где L-длина кривой.

7) Если функция f(x,y) непрерывна на AB, то на ней найдется такая точка $(\tilde{x},\tilde{y})$, в которой интеграл по AB: $\int_{AB} f(x,y)dl=f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot l$, где l-длина кривой AB –теорема о среднем.

Билет №20

Параметрическое задание кривой интегрирования

Пусть непрерывная кривая AB задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

x(t) и y(t) – непрерывно дифференцируемые функции параметра t. Причем точка A соответствует значению t=α, а точка B: t=β. Тогда можно К.И. 1 рода можно вычислить по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$$

Аналогично для f(x,y,z) по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$$

Явное задание кривой

Пусть кривая AB задана уравнением:

$$y = \varphi(t);\ x = x$$
$$x \in [a, b]$$

где φ(x) – непрерывно дифференцируемая функция, тогда:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\cdot\sqrt{1+(\varphi_x')^2}\,dx$$

Пример: $\int\limits_L xy^2\,dl$ L–отрезок прямой O(0,0) A(4,3).

Решение:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$\int\limits_L xy^2\,dl = \int\limits_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3\,dx = 45$$

Полярное задание кривой

Если кривая AB задана уравнением в полярных координатах: ρ=ρ(φ), α≤φ≤β, то криволинейный интеграл 1 рода может быть вычислен по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho'_{\varphi})^2}\,d\varphi$$

Пример: $\int\limits_L (x+y)\,dl \quad L: r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ –лепесток лемнискаты

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\sqrt{\frac{\cos^2 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} + \sin 2\varphi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = -2$$

Билет №21

Длина кривой

Длина *l* плоской или пространственной кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{AB} dl$$

Площадь цилиндрической поверхности

Если направляющая цилиндрической поверхности является кривая, лежащая в плоскости XOY, а образующая параллельна OZ, то площадь этой поверхности находится по формуле: $S = \int_{AB} f(x, y)\,dl$

Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, трос) определяется по формуле:

$$m = \int_{AB} \upsilon(M)\,dl$$

где $\upsilon(M)$ – плотность кривой AB в точке M

Статический момент, центр тяжести

Статический момент материальной кривой AB относительно осей OX и OY и центр тяжести этой кривой вычисляется по формуле:

$$S_x = \int_{AB} y \cdot \upsilon(x, y)\,dl \quad S_y = \int_{AB} x \cdot \upsilon(x, y)\,dl$$

$$\begin{cases} x_t = \dfrac{S_y}{m} \\ y_t = \dfrac{S_x}{m} \end{cases}$$ – координаты центра тяжести.

Момент инерции

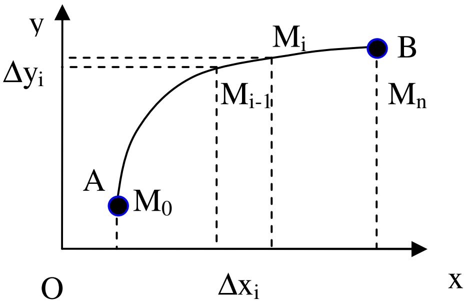
Момент инерции относительно осей OX, OY и начала координат находятся по формулам: $I_x = \int_{AB} y^2 \cdot \upsilon(x, y)\,dl$

$$I_y = \int_{AB} x^2 \cdot \upsilon(x, y)\,dl$$

$$I_o = \int_{AB} (x^2 + y^2) \cdot \upsilon(x, y)\,dl$$

Билет №22

Пусть на плоскости XOY задана непрерывная кривая AB или L и функция P(x,y), определенная в каждой точке кривой AB. Разобьем AB точками M_0=A, M_1,…,M_n=B в направлении от A к B на n дуг $M_{i-1}M_i$ длиной Δl_i.



На каждой частичной дуге выберем произвольную точку с координатами $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ и составим сумму:

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\cdot \Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, Δx_i – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось OX. Эта сумма (1) называется ***интегральной суммой*** для функции P(x,y) по переменной x.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \cdot \Delta l_i$, тогда если при $\lambda \to 0 \quad (n\to\infty)$ существует конечный предел суммы (1), который не зависит ни от способа разбиения кривой AB на частичные дуги, ни от выбора точек $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, то он называется ***криволинейным интегралом по переменной x от функции P(x,y) по кривой AB*** (или ***криволинейным интегралом II рода*** по x) и обозначается $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$.

Таким образом, по определению имеем:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dy = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\cdot \Delta x_i$$

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла по y от функции Q(x,y): $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim\limits_{n\to\infty(\lambda\to 0)} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\cdot \Delta y_i$

где Δy_i – проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на OY.

В общем случае криволинейный интеграл II рода задается выражением:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

<u>ТЕОРЕМА</u>: Если кривая AB – гладкая и функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны во всех точках этой кривой, то криволинейный интеграл II рода существует.

(Без доказательства)

<u>СВОЙСТВА</u>:

1) $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$ т.к. при изменении направления пути интегрирования, проекции частичных дуг изменяют знак на противоположный.

2) $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$ если AB разбита точкой C на две части.

3) Если кривая AB лежит в плоскости перпендикулярной OX, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$ т.к. $\forall \Delta x_i = 0$.

Аналогично если AB лежит в плоскости перпендикулярной OY, то $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = 0$ т.к. $\forall \Delta y_i = 0$.

4) Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру:

$$\oint\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависит от выбора начальной точки, а зависит от направления обхода кривой.

Билет №23

Параметрическое задание кривой интегрирования:

Пусть гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

Где x(t) и y(t)-непрерывны вместе со своими производными на AB, причем начальные точки A нашей кривой соответствуют значению параметра t=α, а в конечной точке B, t=β то есть $t \in [a, b]$

Пусть функция P(x,y) непрерывна на кривой AB, тогда по определению криволинейного интеграла 2 рода:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta x_i$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$. По теореме Лагранжа: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Так как точки выбираются произвольно, то выбираем ее: $\tilde{x}_i = x(c_i)$, $\tilde{y}_i = y(c_i)$. Тогда интегральная сумма перепишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x(c_i), y(c_i)) \cdot x'(c_i) \cdot \Delta t_i$$

Данная сумма будет интегральной суммой для функции одной переменной: $P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$

Тогда получаем: $\displaystyle\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t)) \cdot x'_t\, dt$

Аналогично можно вычислить криволинейный интеграл 2 рода по переменной y: $\displaystyle\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t)) \cdot y'_t\, dt$

В общем виде интегральной суммы для функции двух переменных:

$$(*) \quad \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t)) \cdot x'_t + Q(x(t),y(t)) \cdot y'_t]dt$$

Явное задание кривой интегрирования:

Пусть кривая AB задана в явном виде: $y = \varphi(x)$

где x∈[a,b] , $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция на отрезке AB, тогда из формулы (*) приняв за x параметр, получим параметрическое задание кривой AB:

x=x y=φ(x) x∈[a,b]

$$\Rightarrow \quad \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{b}^{a} (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)))\, \varphi'(x)dx$$

Если AB-пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке AB функциями: x=x(t), y=y(t), z=z(t), то криволинейный интеграл 2 рода нужно брать по трем переменным x,y,z.

ЗАМЕЧАНИЕ:

Криволинейный интеграл I и II рода связаны между собой формулой где α и β – углы образуемый касательной к AB в точке M(x,y) с осями Ox и Oy соответственно:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta)dl$$

Билет №24

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом второго рода по границе L этой области устанавливает ***формула Остроградского-Грина***: Пусть в плоскости XOY задана правильная область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в 2х точках, то есть область D-правильная.

Теорема: если функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными ∂P/∂y и ∂Q/∂x в области D, то справедлива формула:

$$(*) \qquad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L (Pdx + Qdy)$$

где L – граница области D и интегрирование ведется в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой L область D остается слева).

Формула (*)- ***Ф.О.Г.***

Билет №25

Приложения криволинейных интегралов второго рода.

1) <u>Площадь плоской фигуры</u>

Площадь плоской фигуры, границей которой является линия L, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_L y dx - x dy$$

где L обходится в положительном направлении.

2) <u>Работа переменной силы</u>

Переменная сила F на криволинейном участке AB совершает работу, равную

$$A = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Билет №26

При решении задач в математике, физике и др. наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производную. Такие уравнения называют ***дифференциальными***.

Определение*: *решением д.у. называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство.

Если искомая функция зависит только от одной переменной, то такое д.у. называется ***обыкновенным***. В противном случае уравнение называется ***д.у. в частных производных***.

Определение: наивысший порядок производных, входящих в уравнение называется *порядком д.у.*

ПРИМЕР: $3y'''+2xy'=0$ – д.у. 3-го порядка;
$2y^{V}+y'=8$ – д.у. 5-го порядка;
$2u_x'+u_y'=7$ – д.у. в частных производных 1-го порядка.

Определение: Процесс нахождения решения д.у. называется его *интегрированием.*

Определение: График решения д.у. называется *интегральной кривой.*

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К Д.У.

1) Материальная точка массой m движется, замедляя свою скорость под действием силы сопротивления среды пропорционально квадрату скорости V. Найти зависимость V(t). Для нахождения V(t) воспользуемся II-м законом Ньютона, где $a=V'(t)$ и $F=kV^2$, где ($k>0$ – коэффициент пропорциональности) => $m\cdot V'(t)= k\cdot V^2(t)$.

2) Закон изменения массы радия в зависимость от времени (радиоактивный распад) описывается д.у., где $k>0$ – коэффициент $\frac{dm(t)}{dt}=km(t)$.

3) Закон охлаждения тел, т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени: $\frac{dT}{dt}=k(T-t_0)$

4) закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты h над уровнем моря, p(h) – атмосферное давление воздуха над уровнем моря:

$$\frac{dp}{dh}=-kp$$

Билет №27

Чаще всего д.у. 1-го порядка имеют вид: $F(x,y,y')=0$ **(1)**. Уравнение (1) связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y′. Если (1) можно разрешить относительно y′, то получаем уравнение вида: $y'=f(x,y)$ **(2)** – д.у. 1-го порядка, разрешенное относительно производной. Уравнение (2) устанавливает зависимость между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y′ касательной к интегральной кривой, проведенной в этой точке. Значит, (2) дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости XOY. В этом состоит *геометрический смысл* д.у. 1-го порядка.

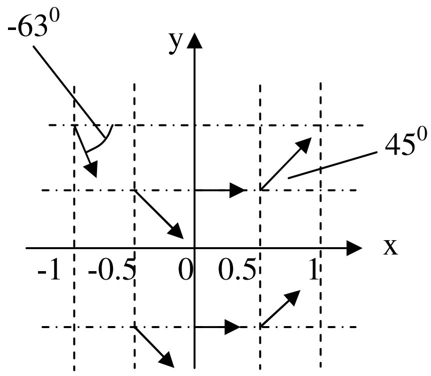
Определение: прямая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется ***изоклиной.*** Изоклина применяется для приближенного построения интегральных кривых.

Уравнение изоклины: $y'=C$, т.е. $f(x,y)=C$.

Пример: с помощью изоклин начертить вид интегральных кривых $y'=2x$.

Решение.

Пусть $y'=C$, тогда изоклинами данного уравнения будут являться **прямые**: $2x=C$, то есть $\mathbf{x=C/2}$. В точках этих прямых построим отрезки, образующие с осью OX один и тот же угол α, $tg\alpha=C$. При $C=0\Rightarrow$ изоклина $x=0$, $tg\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$. При $C=1\Rightarrow$



изоклина $x=1/2$, $tg\alpha=1\Rightarrow\alpha=45$. Построив изоклины и, указав стрелками направления, проводим линии этих направлений. Получим совокупность интегральных кривых $y=x^2+C$ –решение д.у.

Продолжение.

Д.у. 1-го порядка, разрешенное относительно производной (2), можно записать в д. форме: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ **(3)**, где P(x,y), Q(x,y) – известные функции. Уравнение (3) удобно тем, что переменные x и y равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Решение д.у.

Д.у. решаются интегрированием, что приводит к бесконечному множеству решений, отличающиеся друг от друга на постоянную величину C. Для того чтобы предать решению конкретный смысл надо подчинить его дополнительным условиям. ***Определение***: условие, что при $x=x_0$ функция y будет равна заданному числу y_0, называется ***начальным условием д.у.*** Начальное условие рассматривается в виде: $y(x_0)=y_0 \Leftrightarrow y|_{x=x_0}=y_0$ **(4)**.

Определение: ***общим решением д.у. 1-го порядка*** называется функция $y=\varphi(x,C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) Функция $y=\varphi(x,C)$ является решением д.у. при каждом фиксированном значении постоянной C.
2) каково бы ни было начальное условие (4), можно найти значение постоянной $C=C_0$ такое, что $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Определение: ***частным решением д.у. 1-го порядка*** называется функция $\boldsymbol{y=\varphi(x,C_0)}$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

Определение: если общее решение д.у. 1-го порядка найдено в неявном виде, то это решение называется ***общим интегралом*** *д.у.* $\Phi(x,y,C)=0$. А $\Phi(x,y,C_0)$ называется ***частным интегралом.***

С геометрической точки зрения решение $y=\varphi(x,C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости XOY. Частное решение $y=\varphi(x,C_0)$ – это одна из кривых этого семейства, проходящая через заданную точку с координатой Xo.

Определение: задача нахождения решения д.у. 1-го порядка, удовлетворяющего начальному условию (4), называется ***задачей Коши.***

Теорема (*о существовании и единственности решения задачи Коши*):
если в д.у. $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частные производные $f_y'(x,y)$, $f_x'(x,y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0,y_0), то существует единственное решение $y=f(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y=f(x_0)=y_0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условия существует единственная интегральная кривая д.у., проходящая через точку (x_0,y_0).

Билет №28

Наиболее простым видом д.у. 1-го порядка является уравнение вида:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0.$$

В этом уравнении одно слагаемое зависит только от x, а другое только от y. Такие уравнения называются **д.у. с разделяющимися переменными.** Для решения этого уравнения переносим одно слагаемое в правую часть: $P(x)dx=-Q(y)dy$. Интегрируем: $\int P(x)dx=-\int Q(y)dy+C$ – общий интеграл.

Замечание 1: чаще всего д.у. с разделяющимися переменными записываются в общем виде $P_1(x)\cdot Q_1(y)dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)dy=0$. Разделим почленно на $(Q_1(y)P_2(x))\neq 0$, получим уравнению следующим образом:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$$

Интегрируем и получаем общее решение: $\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx=-\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$

Замечание 2: при делении на произведение $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$ могут потеряться решения. Поэтому необходимо отдельно решить уравнение $Q1(y)\cdot P2(x)=0$ и найти те решения, которые не вошли в общее – ***особые решения.***

Замечание 3: уравнение вида $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ также можно свести к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+c$$

Замечание 4: уравнение $y'=f(ax+by+c)$, где $a,b,c=const$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $u=ax+by+c$. Тогда дифференцируя по x получаем:

$$\frac{du}{dx}=a+b\cdot\frac{dy}{dx}$$

Отсюда: $\frac{du}{dx}=a+b\cdot f(u)$

Разделяя переменные, получаем – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{a+bf(u)}=dx$$

Решая

$$x=\int\frac{d(ax+by+c)}{a+bf(ax+by+c)}$$

Билет №29

Уравнения с разделяющимися переменными приводятся к однородным д.у.

Определение: *Функция f(x,y)* называется *однородной* функцией n-го порядка, если при умножении каждого ее аргумента на постоянный множитель λ, вся функция умножиться на λ^n:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

Определение: *д.у. 1-го порядка вида y′=f(x,y)* называется *однородным*, если функция f(x,y) является однородной функцией 0-го порядка. **Вид О.Д.У.:**

$$y'=\varphi(x/y)$$

Замена $\begin{bmatrix} \dfrac{y}{x}=t(x), \quad y=tx \\ y'=\dfrac{dt}{dx}\cdot x+t \end{bmatrix} \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}\cdot x+t=\varphi(t) \Leftrightarrow \dfrac{dt}{dx}\cdot x=\varphi(t)-t$

Деля это выражение на dt$\Rightarrow \dfrac{dt}{\varphi(t)-t}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с р.п. Далее:

$$\int \frac{dt}{\varphi(t)-t}=\int \frac{dx}{x}+C$$

Затем необходимо сделать обратную замену t=y/x. В результате получим общий интеграл исходного д.у.

Часто О.Д.У. задаются в д. форме ***P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0***. Данное уравнение будет однородным только тогда, когда P(x,y) и Q(x,y) – однородные функции одинакового порядка. Отсюда находим решение: $y'=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Если $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ функция является О.Ф. нулевого порядка, то можно сразу сделать замену y/x=t.

Замечание: уравнение вида $y'=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1x+c_1})$ можно привести либо к однородному уравнению, либо к уравнению с разделяющимися переменными (a,b,c,a_1,b_1,c_1 – числа). Для этого необходимо ввести новые переменные u и v такие, что $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, где α и β – числа, которые подбираются так, чтобы уравнение стало однородным.

Уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение вида: $\boxed{y' + P(x)y = g(x)y^n}$ (4) – уравнение Бернулли. Покажем, что это уравнение можно привести к линейному. Если $n=0$, то ур-е (4) – линейное. Если $n=1$, то уравнение (4) – с разделяющимися переменными. Рассмотрим общий случай ($n \neq 0, n \neq 1$). Разделим уравнение (4) на $y^n \neq 0$. То:

$$y^{-n}y' + P(x)\cdot y^{1-n} = g(x).$$ Сделаем замену

$[z = y^{1-n}]$, то $z' = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y' \Rightarrow y^{-n}\cdot y' = \frac{z'}{1-n}$

Поэтому: $\frac{z'}{1-n} + P(x)\cdot z = g(x)$ – решение можно найти решая это линейное уравнение методом Бернулли или методом Лагранжа. Таким образом, подстановка $[z = y^{1-n}]$ – сводит уравнение вида (4) к линейному уравнению.

На практике удобно, не приводя уравнение Бернулли к линейному, сразу сделать замену $y = uv$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y' = u'v + uv'$!

Пример: $x' - \frac{2tx}{1+t^2} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{1+t^2}}\cdot \operatorname{arctg} t$ – ур-е Бернулли

$\left[\begin{array}{l} x = uv \\ x' = u'v + uv' \end{array}\right] \Leftrightarrow u'v + uv' - \frac{2t\,uv}{1+t^2} = \frac{4\sqrt{uv}}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{arctg} t.$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2t}{1+t^2}v\right) = \frac{4\sqrt{uv}}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{arctg} t$$

$$v' = \frac{2tv}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2t}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \ln|v| = \ln(1+t^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow v = 1+t^2$

$$u'(1+t^2) = \frac{4\sqrt{u(\cancel{1+t^2})}}{\sqrt{\cancel{1+t^2}}} \operatorname{arctg} t$$

$$u'(1+t^2) = 4\sqrt{u} \operatorname{arctg} t$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 4\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt \Leftrightarrow \frac{\sqrt{u}}{2} = 2\operatorname{arctg}^2 t + C$$

$$u = (4\operatorname{arctg}^2 t + c)^2$$

$$x = uv = (4\operatorname{arctg}^2 t + c)^2\cdot(1+t^2)$$

Ответ: $x = (1+t^2)(4\operatorname{arctg}^2 t + c)^2$

Лекция: линейные уравнения. Уравнения Берну

Дифференциальные уравнения 1-го порядка называются **линейными**, если их можно записать в виде:

$$\boxed{y' + P(x)\cdot y = g(x)} \quad (1)$$

где $P(x)$ и $G(x)$ - заданные функции, в частности и постоянные величины.

Особенность диф. уравнения (1): искомая функция y и ее производная y' входит в уравнение (1) в первой степени, неперемножаясь между собой.

Рассмотрим вид этого уравнения: существуют 2 метода решения линейных уравнений: метод Бернулли и метод Лагранжа.

1) **Метод Бернулли**

В этом методе решения уравнения (1) будем искать в виде произведения двух функций, то есть с помощью замены $[y = u\cdot v]$, где $u(x)$ и $v(x)$ - неизвестные функции от x. Причем одна из ниже произвольная (но $\neq 0$). Тогда $\begin{bmatrix} y' = u'v + uv' \\ y = uv \end{bmatrix}$.

Подставим данные выражение в уравнение (1):

$$u'v + uv' + P(x)\cdot uv = G(x)$$

$$u'v + u(v' + P(x)\cdot v) = G(x) \quad (2)$$

В уравнении (2) подберем функцию $v(x)$, так чтобы $v' + P(x)\cdot v = 0$.

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)\cdot v \iff \int\frac{dv}{v} = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln|v| = -\int P(x)\,dx + C$$

$$v = C\cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

Если $C = 1$, тогда функция v примет вид:

$$\boxed{v = e^{-\int P(x)\,dx}}$$

Подставим найденную функцию в уравнение (2), из которого найдем u: $u'\cdot e^{-\int P(x)dx} = G(x)$

$$\frac{du}{dx} = e^{\int P(x)dx}\cdot G(x)$$

$$\int du = \int e^{\int P(x)dx} \cdot G(x)\, dx$$

$$\boxed{u = \int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int P(x)dx}} -$$

решение линейного уравнения (1).

2) <u>Метод Лагранжа</u>: (метод вариации произведений)

Пусть дано линейное уравнение: $y' + P(x) \cdot y = G(x)$.
Рассмотрим соотв. уравнение без правой части:
$y' + P(x) \cdot y = 0$ (3). Это уравнение называется линейным однородным уравнением (1-го) порядка.

$$\int \frac{dy}{dx} = \int -P(x) \cdot y \Leftrightarrow \ln|y| = \int P(x)dx + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

<u>Суть метода</u>: величина C в полученном решении заменяется функцией $C(x)$, то есть полагая $C = C(x)$, тогда полученное решение (*) $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, подставим это решение в исходное уравнение:

$$y' = \left(C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \right)' \Leftrightarrow c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} -$$

$$- \cancel{C(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x)} + \cancel{P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}} = G(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = G(x) \Leftrightarrow \int C'(x) = \int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$C(x) = \int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C(x) = \int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\int G(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C_1 \right) \cdot e^{-\int P(x)dx}} -$$ решение линейного уравнения (1)

Билет №32

Определение: уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ **(1)** называется ***уравнением в полных дифференциалах.*** Если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ т.е.

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$. В этом случае уравнение (1) можно записать в виде $du(x,y)=0$ и его общим решением будет $u(x,y)=C$ ***(2).*** Приведем условие, по которому можно судить является ли выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ полным дифференциалом этой функции.

Теорема: для того, чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и частные производные $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ непрерывны в некоторой области D плоскости XOY было полным дифференциалом необходимо и достаточно выполнение условия: $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

(Без доказательства)

Билет №33

Из всего класса д.у. выделяются уравнения неразрешимые относительно производной. К таким уравнениям относят д.у. Лагранжа и Клеро.

1)Уравнение Лагранжа: д.у. 1-го порядка вида

$$y = x\cdot\varphi(y') + \psi(y') \qquad (1)$$

где φ и ψ - известные функции. Для решения этого уравнения сделаем замену [y′=p(x)], тогда (1) перепишется в виде:

$$y = x\cdot\varphi(p) + \psi(p) \qquad (2)$$

Дифференцируем (2) по x:

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = p$$

$$p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}(x\varphi'(p) + \psi'(p))$$

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

Решая это уравнение одним из известных методов

$$\Rightarrow x=\lambda(p,c) \quad (*)$$

Соединяем полученные решения (*) и (2) можно оставить общее решение д.у., либо, если это возможно, то исключить параметр p.

2)Уравнение Клеро: рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа:

$$\varphi(y') = y'$$

Уравнение Клеро: $y = x\cdot y' + \psi(y')$, делаем замену y′=p.

Имеем: $y = x\cdot p + \psi(p)$ и дифференцируем полученное уравнение по x , имеем:

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = p$$

$$\frac{dp}{dx}(x + \psi'(p)) = 0$$

1 случай: $\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow p = c$ и общее решение д.у. имеет вид: $y=cx+\psi(c)$

2 случай:

$$x + \psi'(p) = 0$$

$$x = -\psi'(p) - \textit{частное решение}$$

Общий вид решения:

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

$$x = -\psi'(p)$$

Билет №34

Д.у., имеющие порядок выше 1-ого, называются д.у. высших порядков. Д.у. 2-го порядка в общем случае можно записать в виде $F(x,y,y',y'')=0$ или в виде, если это возможно, разрешенным относительно старшей производной:

$$(1)\quad y''=f(x,y,y')$$

Определение: решением всякой функции $y=\varphi(x)$ называется решение, при подстановке которого в данное уравнение обращает его в верное равенство.

Общим решением д.у. называется функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$, где c_1,c_2 – независимые от x произвольные постоянные, обладающие следующими свойствами:

1) Функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ является решением д.у. для любых фиксированных значений c_1,c_2

2) Каковы бы не были начальные условия **(2)** $y|_{x=x0}=y_0;\, y'|_{x=x0}=y_0'$ существует единственное значения произвольных постоянных $c_1=c_1'$ и $c_2=c_2'$, которые обращают функцию $y=\varphi(x,c_1',c_2')$ в решение данного д.у.

Функция $y=\varphi(x,c_1',c_2')$, которая получается из ***общего решения*** $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ подстановкой $c_1=c_1'$ и $c_2=c_2'$ называется ***частным решением д.у.***

График общего решения д.у. 2-ого порядка называется ***интегральной кривой***. ***Общее решение*** д.у. (1) представляет собой семейство интегральных кривых; ***частное решение*** представляет собой одну интегральную кривую, проходящую через точку (x_0,y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)=y_0'$. Задача нахождения решения y, удовлетворяющего заданным начальным условиям (2), называется ***задачей Коши***.

ТЕОРЕМА: (о существовании и единственности решения задачи Коши) если в д.у. (1) функция $f(x,y,y')$ и ее частные производные f'_x, f'_y, $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D, то для всякой точки (x_0,y_0,y_0') из D существует единственное решение $y=f(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Аналогичные теоремы и определения справедливы и для д.у. n-ого порядка, которое в общем виде записывается:

$$F(x,y,y',y'',\ \dots,y^{(n)})=0\qquad(3)$$

Если его можно разрешить относительно старшей производной, то:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\qquad(4)$$

Начальные условия для (3) имеют вид:

$$y|_{x=x0}=y_0;\dots;\quad y''|_{x=x0}=y_0''\quad;\dots;\quad y^{n-1}|_{x=x0}=y_0^{\,n-1}\qquad(5)$$

Общее решение д.у. (3) n-го порядка определяется функцией $y=\varphi(x,c_1,\dots,c_n)$, имеющих n независимых от x произвольных постоянных. Решение д.у. (3), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1',\dots,\ c_n=c_n'$ называется ***частным решением*** д.у. n-го порядка.

Решить задачу Коши – это найти решение д.у. (3), удовлетворяющие начальным условиям (4).

Билет №35

Одним из методов решения дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ является ***метод понижения порядка***. Суть этого метода состоит в том, что с помощью замены переменной данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению, порядок которого ниже, чем у исходного. Рассмотрим ***3 основных типа уравнений***, допускающих понижение порядка.

1) Пусть $y''=f(x)$. Для понижения порядка делаем замену $y'=p(x)$, тогда $y''=p'(x)$. При подстановке в исходное уравнение получаем дифференциальное уравнение 1-ого порядка: $p'(x)=f(x)$. Находим из этого уравнения $p(x)$: $dp/dx=f(x) \Rightarrow \int dp=\int f(x)dx$, $p=\int f(x)dx+C1 \Rightarrow$ $y=\int(\int f(x)dx+C1)dx+C2$ – общее решение дифференциального уравнения. Но на практике проще решать это уравнение путем двукратного интегрирования.

В общем случае д.у. n-ого порядка такого типа имеют вид $y^{(n)}=f(x)$. Для решения надо его n раз проинтегрировать – получим общее решение данного уравнения, которое будет содержать n-произвольных постоянных.

2) $y''=f(x,y')$ – уравнение, не содержащее в явном виде искомую функцию y. Делаем замену $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$, то есть $p'(x)=f(x,p(x))\Rightarrow p=\varphi(x,c1)$, $y'=\varphi(x,c1)$–можно решить интегрированием левой части$\Rightarrow y=\psi(x,c1,c2)$.

Частным случаем такого типа уравнений является $y''=f(y')$ – не содержит x. Это уравнение также решается с помощью $y'=p(x)$, $p'=f(p)$–уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае для уравнения n-ого порядка такого типа имеют вид:

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$$

– не содержит явно искомую функцию y, то порядок этого уравнения можно понизить на k-единиц, сделав замену $y^{(k)}=p(x)$, $y^{(k+1)}=p'(x)$, $y^{(n)}=p^{(n-k)}(x)$. Тогда $F(x,p,p',\dots,p^{(n-k)})=0$. Частным случаем этого д.у. является уравнение вида $F(y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$.

3) $y''=f(y,y')$. Для понижения порядка делаем замену: $y'=p(y)$ (где $y=y(x)$),

$$y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}\Rightarrow p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

Решая это уравнение, находим $p=g(y,C1)$, $y'=g(y,C1)$. Интегрируем.

Частным случаем уравнений такого типа является $y''=f(y')$. Делаем замену: $y'=p(y)$

$$y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}\Rightarrow p\cdot\frac{dp}{dy}=f(p)$$

В общем виде уравнения такого типа записываются $F(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ – решается заменой:

$$y'=p(y);\quad y''=p\frac{dp}{dy};\quad y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$