Билет №1.

Приближенные числа. Действия с приближенными числами.

Численные методы – это часть математики, занимающаяся решением задач, которые трудно или невозможно решить общепринятыми аналитические методы. Задачи численных методов заключаются в сведении решаемой задачи к некоторому вычислительному алгоритму цель которой получить конечный результат. Перед этим должна быть изучена постановка задачи, выбран метод ее решения и построен алгоритм.
В численных методах важную роль в постановке и решении задач играют значения или числа, полученные в результате каких-либо экспериментов и позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над ними.
Выбранный численный метод должен обладать важным свойством: он не должен вносить в процесс вычислений большие погрешности.

Приближенные числа

Определение: приближенным числом называется число, незначительно отличающееся от точного и заменяющее его в вычислениях.
Пусть A – точное число, a – его приближенное значение.
Определение: абсолютной погрешностью приближенного числа a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом и его приближенным значением, т.е.

$$(1) \qquad \alpha=|A-a| \Rightarrow A=a\pm\alpha$$

Однако чаще всего точное число нам не известно, поэтому мы не сможем определить и абсолютную погрешность по формуле (1).
В этом случае вместо неизвестной абсолютной погрешности вводится ее оценка сверху, так называемая ***предельная абсолютная погрешность***.
Определение: наименьшее число, превосходящее абсолютную погрешность приближенного числа, называется ***предельной абсолютной погрешностью***, т.е.

$$\alpha \le \Delta \Rightarrow |A-a|\le\Delta$$

Определение: ***относительной погрешностью*** приближенного числа называется отношение его абсолютной погрешности к модулю приближенного числа, т.е.
$\beta=\dfrac{\alpha}{|a|}$ (измеряется в %)

Определение: ***предельной относительной*** погрешностью называют отношение предельной абсолютной погрешности к модулю приближенного числа: $\delta=\dfrac{\Delta}{|a|}$

Замечание: чем меньше относительная погрешность, тем точнее измерения (результат).

Действия с приближенными числами

При выполнении действий с приближенными числами неизбежно происходит накопление погрешности.
Постановка задачи: как, зная погрешности исходных величин определить абсолютные и относительные погрешности величин, полученных в результате арифметических действий над исходными.
1. Сложение и вычитание приближенных чисел.
Пусть A_1 и A_2 – точные положительные числа, a_1 и a_2 – их приближенные значения с абсолютными погрешностями $\Delta(a_1)$ и $\Delta(a_2)$. Тогда $A_1\approx a_1 \Rightarrow |A_1-a_1| \le \Delta(a_1)$.
$A_2\approx a_2 \Rightarrow |A_2-a_2| \le \Delta(a_2)$
Распишем эти неравенства по свойству модулей.

$$\begin{cases} A_1-a_1\le\Delta(a_1) \\ A_1-a_1\ge-\Delta(a_1)\end{cases} \qquad \begin{cases} A_2-a_2\le\Delta(a_2) \\ A_2-a_2\ge-\Delta(a_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1-\Delta(a_1)\le A_1\le a_1+\Delta(a_1) \\ a_2-\Delta(a_2)\le A_2\le a_2+\Delta(a_2) \end{cases}$$

Складывая почленно полученные неравенства

$$(a_1+a_2)-(\Delta(a_1)+\Delta(a_2))\le A_1+A_2\le(a_1+a_2)+(\Delta(a_1)+\Delta(a_2))$$

$$|A_1+A_2|-(a_1+a_2)\le\Delta(a_1)+\Delta(a_2)$$

$$A_1+A_2\approx a_1+a_2+[\Delta(a_1)+\Delta(a_2)]$$

Таким образом:

$$\boxed{\Delta(a_1+a_2)=\Delta(a_1)+\Delta(a_2)}$$

Аналогично, пользуясь методом математической индукции выполняется, что

$$\Delta(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\Delta(a_1)+\ldots+\Delta(a_n)$$

Относительная погрешность суммы двух приближенных чисел будет вычисляться по формуле: $\delta(a_1+a_2)=\dfrac{\Delta(a_1+a_2)}{a_1+a_2}=\dfrac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)}{a_1+a_2}$. Аналогично для n-чисел.

2. Вычитание.

Вычислим абсолютную погрешность разности двух положительных чисел. Аналогично выше написанному имеем

$$\begin{cases} -\Delta(a_1)\le A_1-a_1\le\Delta(a_1) \\ -\Delta(a_2)\le A_2-a_2\le\Delta(a_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1-\Delta(a_1)\le A_1\le\Delta(a_1)+a_1 \\ a_2-\Delta(a_2)\le A_2\le\Delta(a_2)+a_2 \end{cases}$$

Для вычитания перепишем второе неравенство в виде:

$$-\left[\begin{array}{l} a_1-\Delta(a_1)\le A_1\le\Delta(a_1)+a_1 \\ a_2+\Delta(a_2)\ge A_2\ge a_2-\Delta(a_2) \end{array}\right.$$

$(a_1-a_2)-(\Delta(a_1)+\Delta(a_2))\le A_1-A_2\le(a_1-a_2)+(\Delta(a_1)+\Delta(a_2)) \quad\Rightarrow\quad A_1-A_2\approx a_1-a_2$ с абсолютной погрешностью $\Delta(a_1)+\Delta(a_2)$.

Таким образом, ***абсолютная погрешность*** равна $\Delta(a_1-a_2)=\Delta(a_1)+\Delta(a_2)$

Пользуясь методом математической индукции получим, что

$$\Delta(a_1-a_2-\ldots-a_n)=\Delta(a_1)+\Delta(a_2)+\ldots+\Delta(a_n)$$

Относительная погрешность: $\delta(a_1-a_2)=\dfrac{\Delta(a_1-a_2)}{|a_1-a_2|}=\dfrac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)}{|a_1-a_2|}$

3. Умножение.

Формулы для непосредственного вычисления абсолютной погрешности произведения и частного достаточно громоздки. Поэтому удобнее сначала вычислить относительную, а затем найти абсолютную по формуле: $\Delta=\delta|a|$

Пусть A_1 и A_2 – точные положительные числа, a_1 и a_2 – их приближенные значения, $\Delta(a_1)$ и $\Delta(a_2)$ - абсолютные погрешности, $\delta(a_1)$ и $\delta(a_2)$ - достаточно маленькие относительные погрешности.

$$a_к\pm\Delta(a_к)=a_к\left(1\pm\frac{\Delta(a_к)}{a_к}\right)=a_к(1\pm\delta(a_к))$$

Аналогично предыдущим рассуждениям имеем:

$$\left[\begin{array}{l} -\Delta(a_1)\le A_1-a_1\le\Delta(a_1) \\ -\Delta(a_2)\le A_2-a_2\le\Delta(a_2) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a_1-\Delta(a_1)\le A_1\le a_1+\Delta(a_1) \\ a_2-\Delta(a_2)\le A_2\le a_2+\Delta(a_2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1(1-\delta(a_1))\le A_1\le a_1(1+\delta(a_1)) \\ a_2(1-\delta(a_2))\le A_2\le a_2(1+\delta(a_2)) \end{array}\right.$$

Почленно перемножая полученные равенства, имеем:

$$a_1a_2(1-\delta(a_1))(1-\delta(a_2))\le A_1A_2\le a_1a_2(1+\delta(a_1))(1+\delta(a_2))$$

$$(1\pm\delta(a_1))(1\pm\delta(a_2))=1\pm(\delta(a_1)+\delta(a_2))+\delta(a_1)\delta(a_2)$$

По условию относительные погрешности a_1 и a_2 достаточно малы, поэтому их произведением можно пренебречь.

$$a_1a_2(1-(\delta(a_1)+\delta(a_2)))\le A_1A_2\le a_1a_2(1+\delta(a_1)+\delta(a_2))$$

Отсюда получаем, что $A_1A_2\approx a_1a_2\cdot(\delta(a_1)+\delta(a_2))$.

Таким образом $\delta(a_1a_2)=\delta(a_1)+\delta(a_2)$

$$\boxed{\Delta(a_1a_2)=\delta(a_1a_2)\cdot a_1a_2}$$

Пользуясь методом математической индукции: $\delta(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)=\delta(a_1)+\delta(a_2)+\ldots+\delta(a_n)$

Если один из сомножителей $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ точное число (например a_1), то его относительная погрешность равна нулю. Тогда $\delta(a_1a_2)=\delta(a_1)+\delta(a_2)=\delta(a_2)$.

Т.е. при произведении приближенного числа и точного относительная погрешность не изменится.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(a_1a_2)=\delta(a_1a_2)a_1a_2=\delta(a_2)a_1a_2=\frac{\Delta(a_2)}{a_2}\cdot a_1a_2=\Delta(a_2)a_1$$

4. Деление.

Делением называется произведение одного числа на обратную величину другого. Найдем абсолютную и относительную погрешности.

$$\Delta\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\Delta(a)}{a^2}$$

$$\delta\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\Delta\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}}=\frac{\Delta(a)\cdot a}{a^2}=\frac{\Delta(a)}{a}=\delta(a)$$

$$\delta\left(\frac{1}{a}\right)=\delta(a)$$

Отсюда: $\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\delta\left(a_1\cdot\frac{1}{a_2}\right)=\delta(a_1)+\delta\left(\frac{1}{a_2}\right)=\delta(a_1)+\delta(a_2)=\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$

Также имеем: $\delta(a^k)=k\cdot\delta(a)$

Билет №2.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

К задачам линейной алгебры относятся решения систем линейных уравнений, вычисление определителей, вычисление обратной матрицы, расширение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Решение систем линейных уравнений

Способы решения систем линейных уравнений разделяются на ***2 группы***:
1) Точные методы (представляют собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы: правило Крамара, метод Гаусса, метод главных элементов).
2) Итерационные методы (позволяют получить корни системы с заданной степенью точности путем сходящихся бесконечных процессов: метод простых итераций, метод Зейделя и др.)

Метод Гаусса

Самым распространенным и наиболее простым методом решения систем линейных уравнений является алгоритм последовательного исключения неизвестных. Такой алгоритм называется ***методом Гаусса***. Рассмотрим этот метод на примере системы из 4 уравнений с 4 неизвестными.

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = в_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = в_4 \end{cases}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ – ведущий элемент.
Разделим первое уравнение системы (1) почленно на a_{11}. Получим:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{в_1}{a_{11}} \qquad (2)$$

Исключаем с помощью уравнения (2) из системы (1) переменную x_1. Для этого, например, надо из второго уравнения системы вычесть уравнение (2) умноженное на a_{21} и т.д.
После этих вычислений получим систему вида:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{в_1}{a_{11}} \\ a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + a'_{24}\,x_4 = b'_2 \\ a'_{32}\,x_2 + a'_{33}\,x_3 + a'_{34}\,x_4 = b'_3 \\ a'_{42}\,x_2 + a'_{43}\,x_3 + a'_{44}\,x_4 = b'_4 \end{cases}$$

Пусть $a'_{22} \neq 0$ - ведущий элемент.
Разделим второе уравнение системы (3) на элемент a'_{22}. Получим:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \frac{a'_{24}}{a'_{22}}x_4 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$$

С помощью этого уравнения исключаем переменную x_2 из третьего и четвертого уравнения системы (3). Действуя аналогично из четвертого уравнения системы исключаем переменную x_3. В результате исходная система приводится к треугольному виду. Далее последовательно находим переменные x_4, x_3, x_2, x_1.
Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех ведущих элементов. Если на каком-то шаге ведущий элемент равен нулю, необходимо переставить уравнения системы.
Процесс получения треугольной системы называется ***прямым ходом метода Гаусса***. ***Процесс нахождения неизвестных*** – обратным ходом. Все вычисления методом Гаусса удобно заносить в специальную таблицу. Такой способ решения называется ***схемой единственного деления***.
Пример: решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы Σ	Суммы по строке Σ′
x1	x2	x3	x4			
$\boxed{2}$	2	-1	1	4	8	8
4	3	-1	2	6	14	14
8	5	-3	4	12	26	26
3	3	-2	2	6	12	12
1	1	-0,5	0,5	2	4	4
	$\boxed{-1}$	1	0	-2	-2	-2
	-3	1	0	-4	-6	-6
	0	-0,5	0,5	0	0	0
	1	-1	0	2	2	2
		$\boxed{-2}$	0	2	0	0
		-0,5	0,5	0	0	0
		1	0	-1	0	0
			$\boxed{0,5}$	-0,5	0	0
			1	-1	0	0

			-1			
		-1				
	1					
1						

Ответ: (1,1,-1,-1)

Билет №3.

Метод главных элементов.

Пусть дана линейная система из n-уравнений с n-переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу системы, состоящую из коэффициентов системы и свободных членов:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1q} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2q} & .. & a_{2n} & b_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ a_{p1} & a_{p2} & .. & a_{pq} & .. & a_{pn} & b_p \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nq} & .. & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Выберем ненулевой, наибольший по модулю, не принадлежащий столбцу свободных членов элемент a_{pq} и назовем его главным элементом системы.

Вычислим множители $m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$, где $a_{pq} \neq 0$. Строка с номером p матрицы M, содержащий главный элемент называется ***главной строкой***. Выполним следующие действия: к каждой неглавной строке прибавим главную строку, умноженную на соответствующий множитель M_i для этой строки. В результате получим новую матрицу, у которой q-й столбец состоит из нулей, отбрасывая этот столбец и главную строку, получим новую матрицу $M^{(1)}$, у которой число строк и столбцов на 1-цу меньше. Над матрицей $M^{(1)}$ проделаем те же действия, а именно выберем главный элемент. В результате получим матрицу $M^{(2)}$ и так далее. Последняя из таких матриц представляет собой двучленную матричную строку, которую также считаем главной строкой. Для определения значений неизвестных объединяем в систему все главные строки, начиная с последней. ***Метод главных элементов*** применим тогда и только тогда, когда определитель исходной матрицы системы отличен от 0.

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

m_i	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Σ	Σ′
	X_1	X_2	X_3	X_4			
-1/4	2	2	-1	1	4	8	8
-1/2	4	3	-1	2	6	14	14
-1	8	5	-3	4	12	26	26
-3/8	3	3	-2	2	6	12	12
		3/4	-1/4	0	1	6/4	6/4
		1/2	1/2	0	0	1	1
		9/8	-7/8	1/2	12/8	9/4	

Билет №4.
Вычисление определителя методом Гаусса.

Пусть дана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений AX=0. При решении этой системы методом Гаусса матрица A заменяется равносильной ей треугольной матрицей

$$B=\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что определитель матрицы B (главная диагональ):

$$\det B = 1 = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{'}a_{33}^{"}\dots a_{nn}^{(n-1)}} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22}^{'}a_{33}^{"}\dots a_{nn}^{(n-1)}$$

т.е. определитель исходной матрицы равен произведению ведущих элементов в методе Гаусса.

Если на каком-то шаге ведущий элемент равен нулю, то следует соответствующим образом изменить порядок строк и столбцов.

Пример: вычислить определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-16)\cdot 1\cdot 1 = -16$$

1 ст	2 ст	3 ст
$\boxed{1}$	0	2
-1 3	1 4	1 2
1	0	2
0	$\boxed{1}$ 4	3 -4
	1	3
		$\boxed{-16}$
		1

Билет №5.

Способы вычисления обратной матрицы (численные методы и аналитические).

1. Вычисление обратной матрицы с помощью метода Гаусса.

Пусть дана матрица A=(a_{ij}) i,j=1,n. Для того чтобы найти обратную матрицу к данной воспользуемся основным соотношением:

$$A^{-1} = (x_{ij})$$

$A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Перемножаем матрицы A и A^{-1}, получаем n-систем линейных уравнений с n^2-неизвестными x_{ij} :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Полученные n-систем линейных уравнений с n^2-неизвестными, имеющие одну и ту же матрицу A и различные столбцы свободных членов можно решать методом Гаусса.

<u>*Пример:*</u> найти матрицу, обратную данной:

Элементы исходной матрицы			Элементы единичной матрицы			$\sum$	$\sum'$
X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	J=1	J=2	J=3		
1	0	2	1	0	0	4	4
-1	1	1	0	1	0	2	2
3	4	2	0	0	1	10	10
1	0	2	1	0	0	4	4
0	1	3	1	1	0	6	6
0	4	-4	-3	0	1	-2	-2
1	0	2	1	0	0	4	4
0	1	3	1	1	0	6	6
0	0	-16	-7	-4	1	-26	-26
0	0	1	7/16	1/4	-1/16	26/16	26/16

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad x_2 + 3x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 + 2x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Билет №6.
Метод простой итерации решения систем линейных уравнений. Условия сходимости.

При большом числе неизвестных системы линейных уравнений Метод Гаусса, дающий точные решения становится достаточно сложным и громоздким. В этих случаях для нахождения корней системы, удобнее использовать приближенные численные методы.

Определение. Нормой матрицы А называется действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|A\| \ge 0 \Rightarrow \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \Rightarrow \|-A\| = \|A\|$

3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

4) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Для правильной матрицы А в основном рассматривается 3 легко вычисляемые нормы:

1 норма:
$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2 норма:
$$\|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

3 норма:
$$\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

1 метод (простой итерации):

Пусть дана система из n-линейных уравнений с n-неизвестными:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишем в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

То A·X=B.

Предполагая, что все диагональные элементы не равны 0, разрешим 1 уравнение системы относительно X_1, второе относительно X_2 и т.д., n-е относительно X_n.

В результате получим систему:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

Решение системы (2)$\Leftrightarrow$ решение системы(1).

Введем матрицы:

Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & \alpha_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & .. & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .. \\ \beta_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ систему (2) можно переписать в матричном виде:

(3) $X=\beta+\alpha\cdot X$

Систему (3) будем решать методом последовательных приближений, за 0-е приближение возьмем, например, столбец свободных членов, то есть $X^{(0)}=\beta$. Далее последовательно строим:

$X^{(1)}=\beta+\alpha\cdot X^{(0)}$ - 1 приближение корней

$X^{(2)}=\beta+\alpha\cdot X^{(1)}$ - 2 приближение корней

$X^{(k+1)}=\beta+\alpha\cdot X^{(k)}$ - k-е приближение корней.

Если последовательность приближений $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$,..., $X^{(k)}$ имеет свой предел $X=\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, то этот предел и будет являться решением системы (3), а значит и исходный системы. Метод последовательных приближений, определяемый формулами, есть метод простых итераций. Процесс итераций хорошо сходится, если элементы матрицы α малы по абсолютной величине. При применении метода итераций необязательно принимать за 0-е приближение столбец свободных членов. Сходимость в процессе итераций не зависит от выбора начальных приближений.

Сходящийся процесс итераций обладает важным ***свойством самоисправляемости***, то есть отдельная ошибка в вычислениях не повлияет на конечный результат, так как ошибочное приближение будет принято за новый начальный вектор.

Теорема: (достаточное условие сходимости процесса итераций для системы)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,n)$$

Метод итераций сходится, если выполняются неравенства:

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

то есть если модули диагональных элементов для каждого уравнения системы больше суммы модулей остальных коэффициентов уравнения (не считая свободные члены).

Пример: решить систему линейных уравнений с точностью ε=0.01

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4.5 \end{cases}$$

1) Проверка условия сходимости:

$|4| > |-1| + |2|$

$|-3| > |1| + |-1|$ $\Rightarrow$ можно решать методом простых итераций.

$|-6| > |1| + |4|$

2) Приведем нашу систему к виду:

$$X=\beta+\alpha\cdot X \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{cases}$$

Выбираем начальное приближение $x^0=\begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

3) Выполняем вычисления до тех пор, пока во всех трех случаях разность между соседними значениями корней ($x_1^{n+1}-x_1^n, x_2^{n+1}-x_2^n, x_3^{n+1}-x_3^n$) не будет меньше ε.

Если не удается привести систему к виду, пригодному для итераций, то каждое уравнение системы записывается в такую строку новой системы, чтобы наибольший по модулю коэффициент оказался диагональным. Затем, если это условие не до конца выполнено, то необходимо произвести преобразования (+,-,* уравнений системы) с уравнениями системы, чтобы диагональные коэффициенты оказались на своих местах.

Билет №7.

Метод Зейделя решения систем линейных уравнений. Условия сходимости.

Есть модификация метода простой итерации. Основная идея: при вычислении приближения переменной x_i учитываются уже ранее вычисленные приближения переменных x_1, x_2 и так далее x_{i-1}.

Метод Зейделя имеет более высокую скорость сходимости. ***Условия сходимости*** - как и для ***метода простой итерации***.

Точность вычислений итерационными методами можно оценить из следующих соотношений:

$$\left\| x^* - x^{(k)} \right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{\|\alpha\|} \|\beta\| \qquad (1)$$

Где x^* точное решение системы; $x^{(k)}$ - приближенное решение системы.

Пример:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{cases}$$

$$x = \beta + \alpha x$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha\|_2 = \max(\frac{1}{2}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}) = \frac{11}{12}$$

$$\|\beta\|_2 = \max(\frac{37}{12}) = \frac{37}{12}$$

$$\left\| x^* - x^{(k)} \right\| \le \frac{0.917^{k+1}}{0.917} 3.083 \le 0.01$$

$$0.917^{k+1} \le 0.002974375$$

$$\Downarrow$$

k=67

Билет №8.

Способы отделения корней нелинейного уравнения.

Все нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса: алгебраические и трансцендентные. Алгебраические уравнения: уравнения, содержащие только алгебраические функции (+,-,*,/). Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические) называются трансцендентными. Если нелинейные уравнения достаточно сложные, то найти его корни аналитическими методами достаточно сложно. Поэтому в таких случаях используются ***итерационные методы*** решения уравнений (методы последовательных приближений).

Пусть дано нелинейное уравнение: $f(x)=0$, где $f(x)$ - определена и непрерывна на $[a,b]$. Всякое значение c, обращающее функцию $f(x)$ в ноль называется корнем данного уравнения.

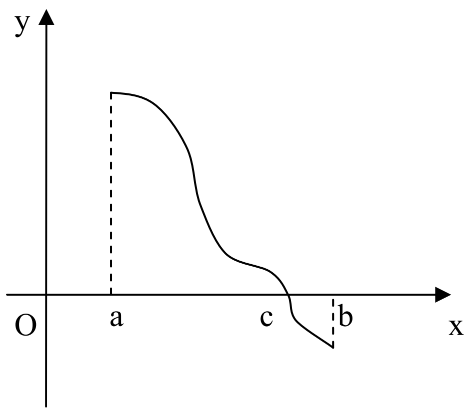
Алгоритм нахождения действительных корней уравнения $f(x)=0$ с помощью итерационных методов состоит из 2х этапов:

1 этап: отделение корней (то есть) нахождение в промежутке $[\alpha,\beta]$, в котором содержатся только один корень уравнения.

2 этап: уточнение (то есть доведение корней до заданной степени точности).

1 этап для отделения корней.

1 способ. Если непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка значения разного знака $f(\alpha)*f(\beta)<0$, то внутри этого отрезка содержится по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$, то есть существует $\exists c\in[\alpha,\beta]:f(c)=0$.

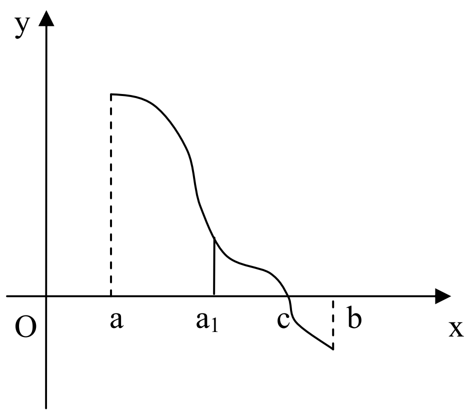


Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции в граничных точках $x=a, x=b$, затем определяются знаки функции в ряде промежуточных точек $\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}$. Если окажется, что $f(\alpha_k)*f(\alpha_{k+1})<0$, то данный отрезок содержит корень данного уравнения.

2 способ.

Отделение корней можно найти графически. Для этого заменим уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $\varphi(x)=\psi(x)$, где $\varphi(x),\psi(x)$ более простые функции, чем функция $f(x)$. Тогда построив графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ найдем корни данного уравнения как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Билет №9.
Метод деления отрезка пополам.

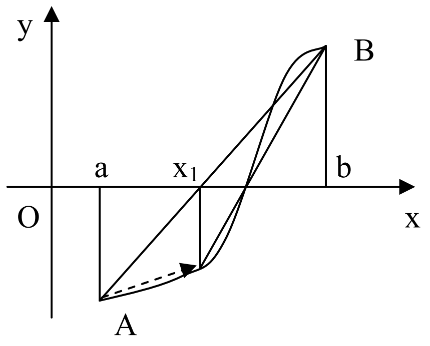


Самый простой. Пусть f(x)=0, где f(x) непрерывна на [a,b] и известно, что f(a)*f(b)<0. Пусть f(a)>0, f(b)<0. Разделим отрезок [a,b] пополам. Получим точку $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то a_1 - корень. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то выбираем тот из двух равных отрезков $[a,a_1]$, $[a_1,b]$-на концах которого функция имеет значения разных знаков. $[a_1,b]$ – в нашем случае. Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $|f(x)|<\varepsilon$.

Метод деления отрезка пополам довольно медленный. Однако этот метод всегда сходится

Билет №10.
Метод хорд.

Этот метод является более быстрым, чем метод деления пополам. Причем $f(a)<0$, $f(b)>0$.



Вместо того, чтобы делить отрезок пополам, будем делить его в отношении $f(a)/f(b)$. В результате деления получаем:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

Далее из 2х отрезков ax_1 и x_1b выбираем тот, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Делим его аналогично и получаем 1-е приближение x_2 и так далее. Проведем через точки $A(a,f(a))$ и $D(b,f(b))$ хорду. Уравнение хорды, то есть уравнение прямой (a,b) имеет вид: $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$.

Обозначим $x=x_1, y=0$. Найдем x_1: $\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}$.

$$x_1 = -\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} + a$$

Выбираем отрезок $[x_1,b]$ и опять проводим хорду и так далее.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Хотя метод хорд дает более быструю сходимость, однако итерационные формулы зависят от знака функции в граничных точках:

1) Если $f(b)>0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad (a = x_n)$$

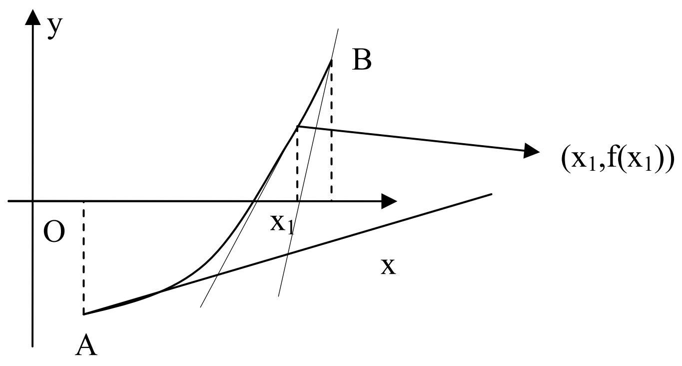
2) Если $f(a)>0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)} \qquad (b = x_n)$$

Билет №11.

Метод Ньютона (касательных). Условия сходимости.

Этот метод отличается от метода хорд тем, что на k-й итерации вместо хорды проводится касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=x_k$ и ищется точка пересечения этой касательной с осью OX. При этом необязательно задавать отрезок AB, содержащий корень, а можно найти начальные приближения значения корня.



Пусть для определения $f''(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$, то есть функция вогнута. Выберем в качестве начального приближения значение $x_0=b$, для которого выполняются условия $f(x_0)*f''(x_0)>0$. Проведем к графику функции $y=f(x)$ к точке $(x_0,f(x_0))$ касательную. Точки пересечения этой касательной с осью OX будет 1 приближением корня x_1. Через точку $(x_1,f(x_1))$ проведем еще одну касательную. Пересечение с осью OX– x_2 - 2 приближение.

Уравнение касательной имеет вид: $y-f(x_n)=f'(x_n)*(x-x_n)$. В точках пересечения касательных с осью OX имеем $y=0$, $x=x_{n+1}$:

$$-f(x_n)=f'(x_n)*(x_{n+1}-x_n)$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Условием окончания итерационного процесса $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, либо $|f(x_n)|<\varepsilon$. Заметим, что если взять в качестве начального приближения $x_0=a$, то есть точку для которой $f(x_0)*f''(x_0)<0$, то, проведя касательную к графику $f(x)$ в точке с координатами $(a,f(a))$, получим 1-е приближение корня $\tilde{x}_1$. То $\tilde{x}_1\notin(a,b)$. В этом случае метод является не практичным, а иногда и не сходящимся.

Методом Ньютона можно найти корень уравнения с любой степенью точности, если в качестве начального приближения взять тот конец интеграла для которого выполняются условия: $f(x_0)*f''(x_0)>0$.

Билет №12.

Метод итерации решения нелинейного уравнения. Условия сходимости.

Одним из наиболее важных случаев решения нелинейных уравнений является метод итераций. Суть метода состоит в следующем. Пусть дано нелинейное уравнение: $f(x)=0$ (1). Заменим уравнение равносильным уравнением:

$$x=\varphi(x) \quad (2)$$

Выберем каким-либо способом начальное приближение корня x_0 и подставим его в правую часть равенства (2) . Получим

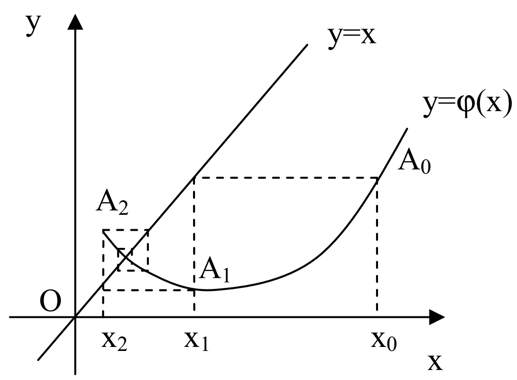
$$x_1=\varphi(x_0) \quad (3).$$

Подставляя число x_1 вместо x_0 в правую часть равенства (3) получаем 2-е приближение корня. Повторяя этот процесс, получим последовательность приближений:

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \quad (4)$$

Если эта последовательность сходящаяся, то есть $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = C$. То этот предел и будет являться корнем уравнения (2) и корнем уравнения (1) и он может быть вычислен с любой точностью по формуле (4).

Геометрический смысл метода: $x=\varphi(x)$



Построим графики функции $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Каждый действительный корень уравнения (2) является абсциссой точки пересечения прямой $y=x$ и кривой $y=\varphi(x)$. Далее, начиная например от точки $A_0(x_0,\varphi(x_0))$ строим лестницу, звенья которой попеременно параллельны оси OX и оси OY. Абсциссы точек A являются первым и так далее приближением корня.

Рассмотренный случай справедлив при $\varphi'(x)>0$. Если функция убывает, то проделываем такую же операцию. При этом может получиться так, что процесс может расходится и мы не сможем найти корень.

Следующая теорема может показать, сходится или расходится процесс вычисления корня.

Теорема: $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ сходится, независимо от начального приближения $x_0[a,b]$, если $|\varphi'(x)|<1$ $\forall x\in(a,b)$.

Билет №13.

Методы решения систем нелинейных уравнений.

Метод простой итерации.

Пусть дана система двух уравнений с 2-мя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \quad (1)$$

Задание:

- Действительные корни, которые необходимо найти с заданной степенью точности.
- Построив кривые $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, и определив координаты их точек пересечения можно найти приближенное значение корней.

Решение:

Пусть $x=x_0$, $y=y_0$ - приближенные значения корней, которые принадлежат области D ($D{:}\,a\le x\le d,\ \ c\le y\le d$). Уточним корни ***МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ***.

Представим систему (1) в виде:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y) \\ y=\varphi_2(x,y) \end{cases} \quad (2)$$

Построим последовательное приближение корней по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &x_1=\varphi_1(x_0,y_0), \quad y_1=\varphi_2(x_0,y_0) \\ &x_2=\varphi_1(x_1,y_1), \quad y_2=\varphi_2(x_1,y_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (3) \\ &x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \quad y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n) \end{aligned}$$

Если итерационный процесс (3) сходится, то есть существует предел

$$c=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}$$

$$d=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}$$

то эти пределы и будут являться корнями системы (2) , а значит и системы (1). ***ПРОЦЕСС ИТЕРАЦИЙ СХОДИТСЯ*** тогда и только тогда, когда выполняются:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|<1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|<1$$

Метод итераций продолжается до тех пор, пока не будут выполняться следующие неравенства:

$$|x_n-x_{n+1}|<\varepsilon$$

$$|y_n-y_{n+1}|<\varepsilon$$

Билет №14.

Методы решения систем нелинейных уравнений.

<u>Метод Ньютона.</u>

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \quad (1)$$

$x=x_0$, $y=y_0$ - начальные приближения корней системы. Пусть $x=x_n+h_n$; $y=y_n+k_n$. Подставив эти значения в систему, получим:

$$\begin{cases} F_1(x_n+h_n, y_n+k_n)=0 \\ F_2(x_n+h_n, y_n+k_n)=0 \end{cases} \quad (2)$$

Разложим левые части уравнения второй системы в ряд Тейлора, отбрасывая слагаемые, содержащие производные 2-го и более высоких порядков:

$$\begin{cases} F_1(x_n,y_n)+\dfrac{\partial F_1}{\partial x}h_n+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}k_n=0 \\ F_2(x_n,y_n)+\dfrac{\partial F_2}{\partial x}h_n+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}k_n=0 \end{cases} \quad (3)$$

Выпишем определитель этой системы:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0,$$ то данная система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамара:

$$\begin{cases} h_n=-\dfrac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} F_1(x_n,y_n) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_2(x_n,y_n) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \\ k_n=-\dfrac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & F_1(x_n,y_n) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & F_2(x_n,y_n) \end{vmatrix} \\ x_{n+1}=x_n+h_n \\ y_{n+1}=y_n+k_n \end{cases}$$

Процесс итерации продолжается до тех пор, пока h_n, k_n - не станут меньше ε. В качестве начального приближения можно брать любые приближения корней.

<u>Замечание</u>: метод Ньютона имеет более высокую скорость сходимости, чем метод простых итераций.

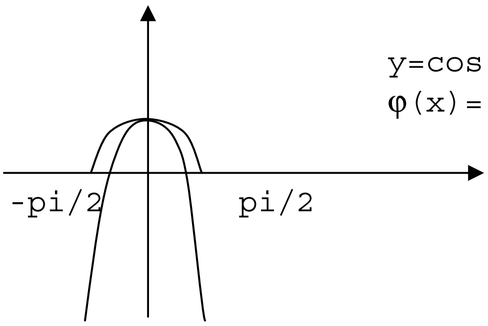
Билет №15.

Аппроксимация. Интерполяция. Экстраполяция.

Пусть величина y-приближение f(x), однако связь между x и y невозможно записать в виде некоторой зависимости y=f(x). В этом случае – связь между x и y задается в виде некоторой таблицы:

x	X_0	X_1	..	X_n
y	y_0	y_1	..	y_n

Эти значения получаются в результате некоторого эксперимента. Необходимо выяснить зависимость между аргументом x и y по этой зависимости, вычислить значения y в точках, находящихся между значениями X_i, X_{i+1}. Для этой цели служит задача о приближении (аппроксимации функции). ***Аппроксимация*** – приближенное выражение функции f(x) через другую более простую функцию $\varphi(x)$, такую что отклонение $\varphi(x)$ от f(x) в заданной области наименьшее. При этом функция $\varphi(x)$ называется ***аппроксимирующей***, например:



y=cos(x) [-pi/2,pi/2]
$\varphi(x)=-x^2+1$

Интерполяция - один из видов аппроксимации функции. Смысл ее заключается в следующем. Для данной функции y=f(x) строится многочлен степени m: $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$, принимающий в заданной точке x_i те же значения y_i, что и данная функция f(x). То есть $\varphi(x_i)=y_i$, причем среди точек x_i не должно быть одинаковых: $x_i\neq x_k\ \forall i\neq k$, при этом точки x_i называются ***узлами интерполяции***, а многочлен $\varphi(x)$ - интерполяционным многочленом.

Аппроксимирующей многочлен - любая функция, то есть не обязательно проходит через узловые точки, а ***интерполяционный многочлен*** – график должен проходить через узловые точки.

Экстраполяция – использование интерполяционного многочлена для вычисления значения функции в точках, выходящих за пределы таблицы (предугадывание после x_n,y_n).

Интерполирование функции. Конечные разности различных порядков.

Рассмотрим функцию y=f(x), заданную таблицей значений, где x_i равноотстоящие узлы интерполяции: $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h=const$. Величина называется ***шагом интерполяции***. ***Конечной разностью 1-го порядка*** называется разность двух соседних значений функции:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

....

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

Разность между двумя соседними разностями 1-го порядка называются ***разностью второго порядка***:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

..................…

$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$

Аналогично определяются конечные разности 3 и 4 и далее порядка:

$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$

$\Delta^4 y_k = \Delta^3 y_{k+1} - \Delta^3 y_k$

....

$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$

Конечные разности любого порядка можно выразить непосредственно через значения функции, например:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$

....

$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0 = y_k - k y_{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + ... + (-1)^k y_0$

Аналогично эту формулу можно записать и для значений разности в узле x_i:

$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k y_{k-1+i} + \dfrac{k(k-1)}{2!} y_{k-2+i} + ... + (-1)^k y_i$

Конечные разности различного порядка записывают в виде таблицы:

Горизонтальные таблица разности:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	...
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	...
.....	.....	.....	.....	.....	

Диагональная таблица разности:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_1$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Билет №16.

Линейная интерполяция.

Простейшим видом интерполяции является ***линейная интерполяция***. Она состоит в замене данной функции на любом табличном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ линейной функцией. Уравнение прямой, проходящей через (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) имеет вид: $\frac{y-y_k}{y_{k+1}-y_k} = \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$.

Отсюда $y-y_k = (y_{k+1}-y_k)\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$, но $y_{k+1}-y_k = \Delta y_k$, $x_{k+1}-x_k = h$ $\Rightarrow y = y_k + \Delta y_k \frac{x-x_k}{h}$, где $x_k < x < x_{k+1}$.

Пример: $y' = x^2+1$ – точная функция и дана таблица этой функции. В точке $x=1.5$?

x	y	Δy
0	1.2	
		0.8
1	2	
		2.8
2	4.8	
		5.3
3	10.1	

$X_k=1$, $X_{k+1}=2$

$y_k=2$, $y_{k+1}=4.8$

$\Delta x_k=1$, $\Delta y_k=2.8$

$y=2+2.8(x-1)/1$

$y=2.8x-0.8$

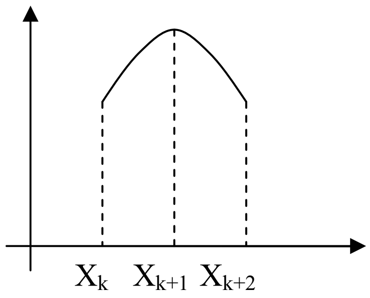
$y(1.5)=3.4$

$y'(1.5)=3.25$

Билет №17.
Квадратичная интерполяция.

Квадратичная интерполяция-замена функции заданной таблицей на любом табличном отрезке $[x_k, x_{k+2}]$.

Пример: $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.



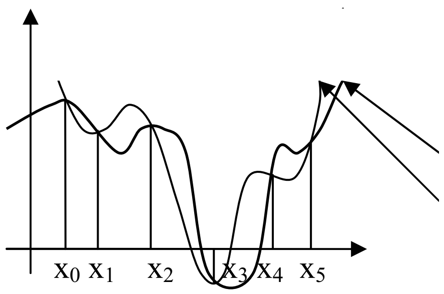
Уравнение квадратного трехчлена содержит 3 неизвестных a_0, a_1, a_2 . Для их определения воспользуемся условием прохождения параболы через 3 заданные точки. Эти условия можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 = y_k \\ a_0 + a_1x_{k+1} + a_2x_{k+1}^2 = y_{k+1} \\ a_0 + a_1x_{k+2} + a_2x_{k+2}^2 = y_{k+2} \end{cases}$$

Решая эту систему известными методами, найдем коэффициенты. Интерполяция производится по 3-м ближайшим точкам узла.

Билет №18.
Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Построим интерполяционный многочлен единый для всего отрезка $[x_0, x_n]$. Причем график этого интерполяционного многочлена должен проходить все заданные точки.



Будем искать интерполяционный многочлен в виде $L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.
Так как значение многочлена $L(x)$ в узлах x_i совпадает со значением y_i таблично заданной функции, то получим систему из (n+1) уравнения с (n+1) неизвестными:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Решая эту систему известными методами, найдем коэффициенты искомого многочлена $L(x)$. Это решение существует и единственно, если среди узлов x_i нет совпадающих. Однако этот способ построения многочлена требует огромного объема вычислений. Поэтому воспользуемся более простым и удобным способом: будем искать интерполяционный многочлен в виде многочлена Ньютона или Лагранжа.

Рассмотрим многочлен вида: $L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x)$ **(1)**

где $l_i(x)$-многочлен степени n, такой, что каждый многочлен $l_i(x)$ обращается в ноль во всех узлах кроме одного i , где он должен равняться 1, то есть $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Этим условием удовлетворяет многочлен вида:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)}$$. Действительно $\begin{array}{l} x = x_0 \\ l_0(x_0) = 1 \\ x = x_1, \ldots, x_n \\ l_0(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}$.

Аналогично получаем:

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_1 - x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_2 - x_n)}$$

…

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)} \quad (2)$$

Подставляя многочлен (2) в равенство (1) получаем:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

Интерполяционная формула Лагранжа.

$L(x)=y_0\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ - линейная интерполяция.

$L(x)=y_0\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ - квадратичная интерполяция.

Пример: построить интерполяционный член Лагранжа для функции, заданной таблично:

x	y
0	1
1	2.8
2	5
3	7
4	9.5

X=1.5

$$L(x)=y_0\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=2.8\cdot\frac{x-2}{-1}+5\cdot\frac{x-1}{1}=2.2\cdot x+0.6$$

$$L(1.5)=2.2\cdot 1.5+0.6=3.9$$

Оценим погрешность в интерполяционной формуле Лагранжа: $f(x)-L(x)=R(x)$ – погрешность интерполяции. Величина $R(x)$ называется остаточным членом интерполяции. Если функция $f(x)$ дифференцируема достаточное число раз, то можно доказать что $R(x)=f(x)-L(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$. Обозначая через: $M_{n+1}=\max\limits_{x_0\le x\le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, получим следующую оценку для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа: $|R(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\right|$

Замечание: с помощью этой оценки можно найти значение n при известной погрешности вычислений. Интерполяционный член Лагранжа может быть построен при любом разложении узлов интерполяции. Однако если потребуется для улучшения приближения повысить на 1-цу число узлов, то многочлен придется пересчитывать заново. В этом отношении удобно пользоваться интерполяционным многочленом Ньютона.

Билет №19.
Интерполяционный многочлен Ньютона.

Наложим дополнительные ограничения на расположение узлов интерполяции, рассмотрим случай равноотстоящих узлов интерполяции: $x_0; x_1 = x_0 + h; x_2 = x_0 + 2 \cdot h;..;$ $x_n = x_0 + n \cdot h$. Интерполяционный многочлен Ньютона будем искать в виде:

(5) $N(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \alpha_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$.

График многочлена должен проходить через все заданные узлы, то есть $N(x_i) = y_i$. Пользуясь этим условием, найдем все известные коэффициенты:

$x = x_0 : N(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 = y_0$

$x = x_1 : N(x_1) = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_0 + a_1 \cdot h \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$

$x = x_2 : N(x_2) = y_2 \Rightarrow a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2 \cdot h + a_2 \cdot 2 \cdot h \cdot h \Rightarrow a_2 = \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} =$ $\dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$. Аналогично получаем: $a_3 = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \ldots, a_n = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$. Подставляем найденные коэффициенты в формулу (5):

$N(x) = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$. (6)

Внешне этот многочлен не похож на многочлен Лагранжа, однако, если эти многочлены построены для одной и той же системы узлов, то в силу единственности решения интерполяционной задачи они должны быть тождественно равны между собой. В отличие от члена Лагранжа добавление нового узла добавляет лишь новое слагаемое, не затрагивая ранее вычисленную часть. На практике формулу (6) выгодно использовать для интерполирования функции в окрестности начального значения x_0, то есть рядом с x_0, поэтому (6) назовем ***первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед***. Если в формуле (6) положить n=1, то получим формулу линейного интерполирования: $N(x) = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$. При n=2 - формула квадратичного интерполирования: $N(x) = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$. Для правой половины рассматриваемого отрезка, то есть вблизи узла x_n разности лучше вычислять справа налево. В этом случае многочлен Ньютона будем искать в виде:

$N(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_n) + \alpha_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \alpha_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots + \alpha_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)$.

Найдем из условия $N(x_i) = y_i$ коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$x = x_n : N(x_n) = y_n \Rightarrow a_0 = y_n$

$x = x_{n-1} : N(x_{n-1}) = y_{n-1} \Rightarrow a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_n - a_1 \cdot h \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$

Подставляя найденные коэффициенты в (7), получим формулу:

$N(x) = y_n + \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)$

- ***вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад***.

Билет №20.
Метод Н.К. Линейная зависимость.

При интерполяции функции главным условием является равенство значений интерполяционного многочлена и функции в узлах интерполяции. Это предъявляет высокие требования к точности данных значений функции. Однако данные, полученные в результате каких-либо экспериментов, могут содержать ошибки, поэтому и возникает необходимость уточнить полученные данные математической обработкой. Пусть в результате некоторых экспериментов получены следующие данные:

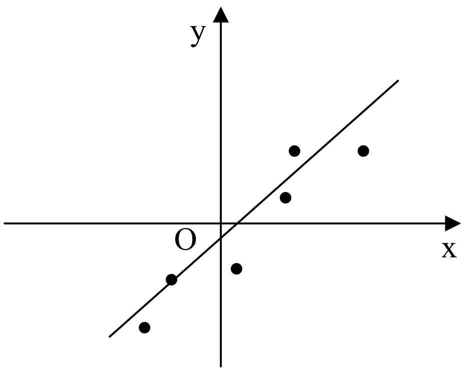
x	x_1	..	..	..	..	x_n
y	y_1	..	..	..	..	y_n

Нам необходимо установить приближенную зависимость $y=\varphi(x)$ значение которой при $x=x_i$ ($i=i,\dots,n$) мало отличается от y_i.

Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании экспериментальных данных, называется ***эмпирической формулой***. График эмпирической зависимости не проходит через (x_i,y_i) как в случае интерполяции, благодаря этому экспериментальные данные немного сглаживаются. Если характер зависимости неизвестен, то вид эмпирической формулы может быть произвольным. Однако предпочтение отдается известным функциям (линейные, квадратичные, кубические, логарифмические). Установим вид функции $y=f(x)$ по характеру распределения точек (x_i,y_i) на координатной плоскости.

Пусть табличные значения распределяются следующим образом:

$y=a_0+a_1x$ (1)



Пусть в данном случае между x и y существует линейная зависимость.
Так как точки $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ не лежат точно на данной прямой, а лишь вблизи нее, то формула (1) является приближенной, потому подставляем в равенство (1) координатные данные точек, получим следующие выражение:

$$(a_0+a_1x_1)-y_1=\widetilde{y}_1$$
$$(a_0+a_1x_2)-y_2=\widetilde{y}_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_0+a_1x_n)-y_n=\widetilde{y}_n$$

$\widetilde{y}_i$ -погрешность (отклонение)

Постановка задачи: подобрать a_0,a_1 так, чтобы эти погрешности были минимальными по модулю.

Для решения этой задачи существует ***метод наименьших квадратов***, который заключается в том, что функцию $\varphi(x_i)$ необходимо подобрать так, чтобы сумма квадратных отклонений была минимальной:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-y_i)^2\to\min \qquad (2)$$

x_i,y_i – заданы таблично. Для нашего случая $\varphi(x)=a_0+a_1x$ тогда подставляя эту функцию в формулу (2), получаем:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2\to\min$$

a_0, a_1 - неизвестные числа, которые необходимо найти. Таким образом, функцию S можно рассматривать как функцию 2х переменных $S(a_0, a_1)$ и исследовать ее на экстремум. Запишем необходимые и достаточные условия экстремума функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0 \end{cases}$$

Нормальная система уравнений для метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^{\,2} = \sum x_i y_i \end{cases}$$

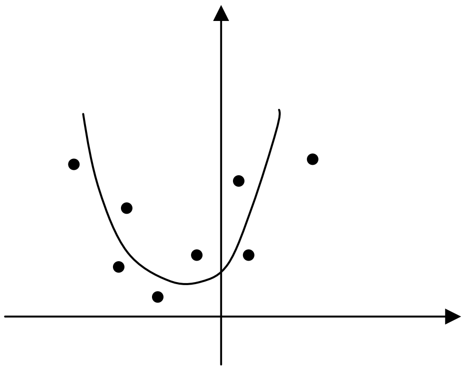
Решая ее, находим a_0, a_1.

Билет №21.
Метод Н.К. Квадратичная зависимость.

Пусть дана таблично заданная функция:

x	x_1	..	..	..	..	x_n
y	y_1	..	..	..	..	y_n

Изображая геометрически:



$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} - y_i)^2 \to \min$$

Строим нормальную систему (М.Н.К.):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} - y_i) x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} - y_i) x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^{\,2} = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^{\,2} + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^{\,2} + a_1 \sum x_i^{\,3} + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases} \Rightarrow \quad a_0, a_1, a_2$$

Билет №22.

Метод наименьших квадратов. Общий случай.

В общем случае будем искать эмпирическую зависимость в виде:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^{\ m} - y_i)^2 \to \min$$

Составим нормальную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^{\ m} - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^{\ m} - y_i) x_i = 0 \\ .... \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^{\ m} - y_i) x_i^m = 0 \end{cases}$$

Алгоритм нахождения эмпирической зависимости по методу Н.К.:

1) Нанести табличные точки в виде графика на XOY.
2) По графику определить вид зависимости (линейная, квадратичная и т.д.)
3) Подставив выбранную эмпирическую формулу в условие метода Н.К.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2 \to \min$$

4) Решив полученную нормальную систему, находим коэффициенты.

Билет №23.

Численное интегрирование. Метод прямоугольников.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и известна ее первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Однако во многих случаях первообразная не может быть вычислена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисления определенного интеграла по формулам Ньютона-Лейбница может быть затруднительным или невыполнимым, кроме того, на практике подынтегральная функция часто задается в виде таблицы, тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому большое значение имеют численные методы вычисления определенных интегралов, которые основаны на аппроксимации подынтегральных функций некоторыми более простыми выражениями, например многочленами.

Метод прямоугольников.

Пусть на отрезке [a,b] задана функция y=f(x). Разобьем отрезок [a,b] точками $x_0,\dots,x_n$ на n равных отрезков. Причем $x_0=a, x_n=b$. В каждом из этих отрезков выберем точку ξ_i и вычислим произведение:

$$\delta_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Составим сумму всех таких произведений $S = S_1 + \dots + S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ - ***интегральная сумма. Определенным интегралом*** от функции f(x) на [a,b] называется:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 0\le i\le n}} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка на части, ни от выбора ξ_i.

Отсюда следует, что если [a,b] разбить на достаточно большое число достаточно малых отрезков, то получаемая при этом интегральная сумма будет очень мало отличаться от интеграла. Таким образом, в этом случае интегральную сумму можно принять в качестве приближенного значения интеграла. То есть:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n$$

Практически удобно отрезок [a,b] делить на равные части, а в качестве точек $\xi_1 \dots \xi_n$ левый или правый концы отрезков разбиения. При таком разбиении отрезка [a,b] все $\frac{b-a}{n} = x_i$ и обозначаем $f(x_i) = y_i$.

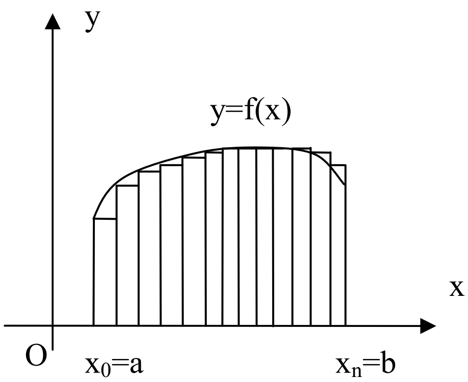
Получим следующие формулы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad (*)$$

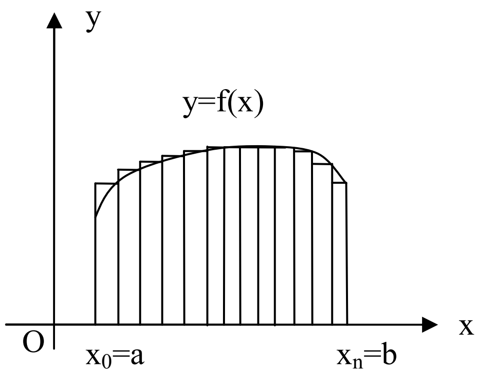
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (**)$$

Правая часть формулы (*) представляет собой площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников и называется ***формулой левых прямоугольников***. Аналогично (**) – ***формула правых прямоугольников***.

Геометрический смысл:



Ф.Л.П.

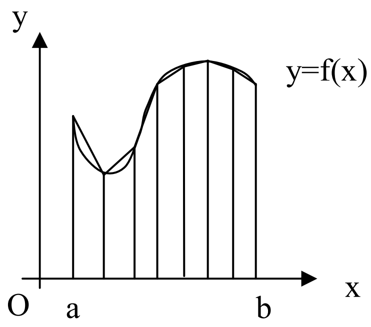


Ф.П.П.

Билет №24.

Численное интегрирование. Метод трапеции.

Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точен результат формулы прямоугольников. Однако, увеличение числа отрезков разбиения интервала интегрирования ведет к усложнению расчетов, поэтому нам необходимы формулы, дающие более точный результат при том же числе отрезков разбиения от a до b.



На каждом i-том частичном отрезке дугу f(x) заменим стягивающей ее хордой, то есть проведем линейную интерполяцию. В результате получается трапеция:

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} h, \quad S_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} h, \dots, \quad S_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h$$

Площадь всей трапеции состоит из суммы площадей, то есть:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Для оценки точности этой формулы, обозначим через R_n разность между правой и левой частями формулы трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) + R_n$$

Величина R_n - ***остаточный член*** формулы трапеции. Если подынтегральная функция f(x) имеет на отрезке [a,b] непрерывную 2-ю производную, то для остаточного члена формулы трапеции следующая ***оценка***:

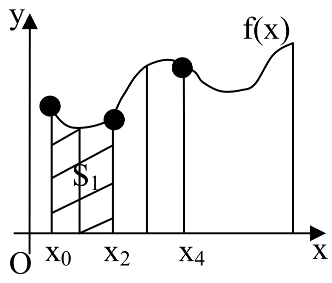
$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

где M_2 - максимум модуля 2-й производной функции y=f(x) на отрезке [a,b]. Поскольку погрешность численного интегрирования зависит от шага разбиения, то уменьшая его погрешность будет уменьшаться и получим более точный результат. Если функция задана таблично, то невозможно увеличить шаг разбиения отрезка [a,b]. Поэтому в этих случаях повышение точности численного интегрирования может быть достигнута за счет повышения степени используемых интерполяционных многочленов.

Билет №25.

Численное интегрирование. Метод Симпсона.

Этот метод называется также ***методом парабол***. Разобьем отрезок интегрирования на четное число n отрезков разбиения с шагом h. На каждом отрезке разбиения $[x_0,x_2]$,…, $[x_{n-1},x_n]$. Подынтегральную функцию f(x) заменяем интерполяционным многочленом Лагранжа 2-й степени, то есть квадратичной функцией.



Произведем квадратичную интерполяцию данной функции f(x) на отрезке $[x_0,x_2]$ через 3 узла x_0,x_1,x_2.

$$f(x)\approx L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$x_0-x_1=-h$$
$$x_0-x_2=-2h$$
$$x_1-x_0=h$$
$$x_1-x_2=-h$$
$$x_2-x_0=2h$$
$$x_2-x_1=h$$

Площадь S_1 может быть найдена как площадь квадратичной трапеции, ограниченной снизу осью OX, сверху многочленом Лагранжа 2-й степени и по бокам $x=x_0$ и $x=x_2$. Вычислив эту площадь как площадь криволинейной трапеции, и рассмотрев общую площадь S как сумму этих площадей, отсюда можно сделать вывод, что:

$$S=\int_a^b(L(x))dx\approx\frac{h}{3}(y_0+y_n+4(y_1+...+y_{n-1})+2(y_2+...+y_{n-2}))+R_n$$

Если подынтегральная функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и имеет непрерывную 4-ю производную, то остаточный член формулы Симпсона имеет ***оценку***:

$$|R_n|\le\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4 \ (*)$$

M_4 - максимум модуля 4-й производной функции f(x) на отрезке [a,b].

Сравнивая между собой оценки для трапеции и Симпсона можно заметить, что с увеличением n - остаточный член формулы трапеции уменьшается пропорционально величине n^2, а в формуле Симпсона ~n^4, то есть метод Симпсона сходится быстрее, чем метод трапеции.

Во многих случаях оценка погрешностей формулы Симпсона по формуле (*) весьма затруднительно, поэтому в этих случаях применяется двойной пересчет с шагом h и 2h и совпадающие 10-е знаки принимаются за точные значения интегралов.