1 Модуль 1. Цепи постоянного тока

1.1 Законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи

1.1.1 Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС

Устанавливает связь между током и напряжением на участке цепи

$$U_{ab} = IR \tag{1}$$

$$I = \frac{\phi_a - \phi_b}{R} \tag{2}$$

1.1.2 Обобщенный закон Ома, для участка цепи, содержащего ЭДС

Позволяет определить ток на участке цепи с известной разностью потенциалов и ЭДС источника:

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_b) \pm E}{R} \tag{3}$$

"+"при ЭДС, направленном по обходу, и "−"при ЭДС направленном против обхода.

1.1.3 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов, подтекающих к узлу равна 0:

$$\sum I_i = 0 \tag{4}$$

Является следствием принципа непрерывности полного тока.

$$\oint_S \overrightarrow{\sigma} d\overrightarrow{S} = 0 \tag{5}$$

, где $\overrightarrow{\sigma}$ - плотность тока.

1.1.4 Второй закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме всех ЭДС в том же контуре. $\sum IR = \sum E$
- Алгебраическая сумма всех напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю $\sum U_{ij} = 0$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения напряжения во времени.

1.2 Активные и пассивные компоненты электрической цепи

В любой схеме можно выделить одну ветвь, а остальную цепь условно изобразить в виде двухполюсника. Если в двухполюснике присутствует источника тока или ЭДС, то он называется *активным* и обозначается буквой "А если источников нет, то он называется *пассивным* и обозначается буквой "П"или вообще не обозначается.

К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия.

Активные - транзистор, диод$^{[what?]}$, радиолампа и т.п.

1.3 Согласованный режим работы электрической цепи

Пусть дана цепь с источником ЭДС E, внутреннее сопротивление которого R_{in}, и сопротивлением нагрузки R.

Тогда мощность, выделяющаяся на нагрузке равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_{in})^2} R \tag{6}$$

Определим сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{\left(R + R_{in}\right)^2} - \frac{2\,R\,U^2}{\left(R + R_{in}\right)^3} = 0 \Longrightarrow R = R_{in} \tag{7}$$

$R = R_{in}$ - точка экстремума, и т.к. при $R < R_{in} P' > 0, R > R_{in} P' < 0$, то $R = R_{in}$ - точка максимума.

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_{in}} \tag{8}$$

Такой режим работы называется согласованным, КПД $\eta = \frac{R}{R+R_{in}} = 0.5$

1.4 Анализ цепи с помощью метода узловых потенциалов(контурных токов)

1.4.1 Метод контурных токов

При расчете данным методом полагаю, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Т.о. в данном методе за искомые принимаются контурные токи.

Систему уравнений приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

В матричной форме:

$$[R][I] = [E] \tag{9}$$

, где

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix}$$

Уравнение решается методом Крамера:

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{10}$$

1.4.2 Метод узловых потенциалов

метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех ветвях.

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{11}$$

$$I_i = \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i) = 0 \tag{13}$$

Составляем систему уравнений для n-1 узлов.

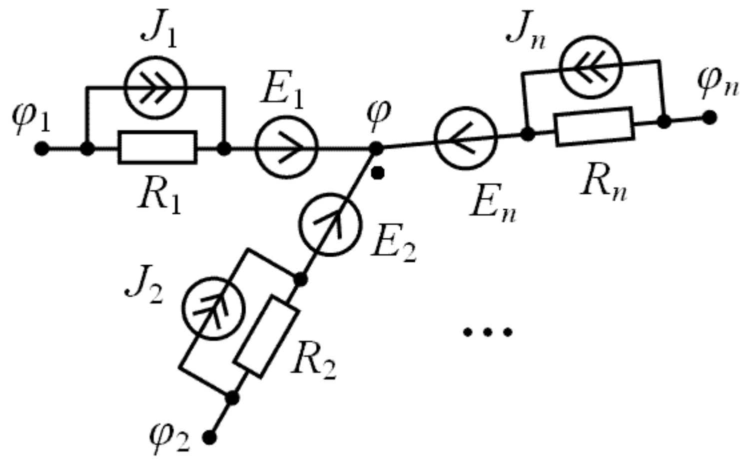

Рис. 1: Схема

1.5 Метод суперпозиции

Метод наложения — метод расчёта электрических цепей, основанный на предположении, что ток в каждой из ветвей электрической цепи при всех включённых генераторах, равен сумме токов в этой же ветви, полученных при включении каждого из генераторов по очереди и отключении остальных генераторов.

При этом генератор тока исключается из схемы путем радикальной дислокации, а генератор напряжения шунтируется.

Метод применим как для цепей постоянного, так и переменного тока.

Не применим для **нелинейных** цепей.

1.6 Матричное представление метода контурных токов и узловых потенциалов

1.6.1 Топологические матрицы

Узловая матрица [A] составляется для n-1 узла графа цепи, в ней столбца обозначают ветви, а строки - узлы. Элемент = 1, если при выбранном направлении обхода ветвь выходит из узла, = -1, если входит, 0 если не относится.

Выделим в графе цепи остовное дерево. Хорды - ветви, не участвующие в остовном дереве.

Главные контура - контура, содержащие одну и только одну ветвь связи (хорду), нумеруются по номеру этой хорды. Имеют направление обхода, элементы соответственно -1;1;0 против;по;не участвует. Матрица составляется аналогично и обозначается [K].

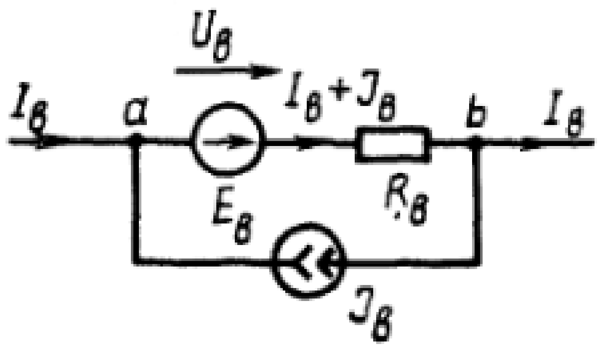

Рис. 2: обобщенная ветвь

Вводится понятие обобщенной ветви, изображенной на рисунке. Уравнение:

$$U + E = R(I + J) \tag{14}$$

или

$$I + J = g(U + E) \tag{15}$$

1.6.2 Для МКТ

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[K][U] + [K][E] = [K][R]([I] + [J]) \tag{16}$$

Из 2-го закона Кирхгофа $[K][U] = 0$

И токи в ветвях могут быть записаны как $[I] = [K]^T[I_{kk}]$

Т.о.

$$[K][E] = [K][R][K]^T[I_{kk}] + [K][R][J] \tag{17}$$

$$[I_{kk}] = ([K][R][K]^T)^{-1}([K][E] - [K][R][J]) \tag{18}$$

1.6.3 Для МУП

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[A][I] + [A][J] = [A][g]([U] + [E]) \tag{19}$$

Из 1-го закона Кирхгофа $[A][I] = 0$.

И токи в ветвях могут быть записаны как $[U] = [A]^T[\phi_k]$ Т.о.

$$[A][J] = [A][g][A]^T[\phi_k] + [A][g][E] \tag{20}$$

$$[\phi_k] = ([A][g][A]^T)^{-1}([A][J] - [A][g][E]) \tag{21}$$

1.7 Теорема о эквивалентном генераторе

По отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а)эквивалентным генератором напряжения с ЭДС E , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента и с внутренним сопротивлением R0, равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента; б)эквивалентным генератором тока с J, равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента, и с внутренней проводимостью G0, равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента.

Вычисления:

- Найти напряжение на разомкнутой ветви ab. Т.е. напряжение на бесконечном сопротивлении, подключенному к двухполюснику.
- Определить входное сопротивление двухполюсника при закороченных генераторах ЭДС и вырванных генераторах тока
- Вычислить ток по формуле

$$I = \frac{U_{ab}}{R + R_{in}} \tag{22}$$

R_{in} можно так же вычислить, измеряя ток КЗ, тогда $R_{in} = U_{ab}/I_{kz}$

1.8 Зависимые источники тока и напряжения

Бывают:

- Управляемые напряжением источники напряжения. Тогда $I_1 = 0; V_2 = \mu V_1$
- Управляемые напряжением источники тока. Тогда $I_1 = 0; I_2 = \mu V_1$
- Управляемые током источники напряжения. Тогда $V_1 = 0; V_2 = \mu I_1$
- Управляемые током источники тока. Тогда $V_1 = 0; I_2 = \mu I_1$

1.9 Эквивалентные преобразования электрических цепей

Эквивалентные преобразования заключаются в замене некоторых участков цепи таким образом, что число выводов исходного участка соответствует числу выводов эквивалентного, и при подаче на соответствующие выводы равных потенциалов, через соответствующие узлы течет равный ток.

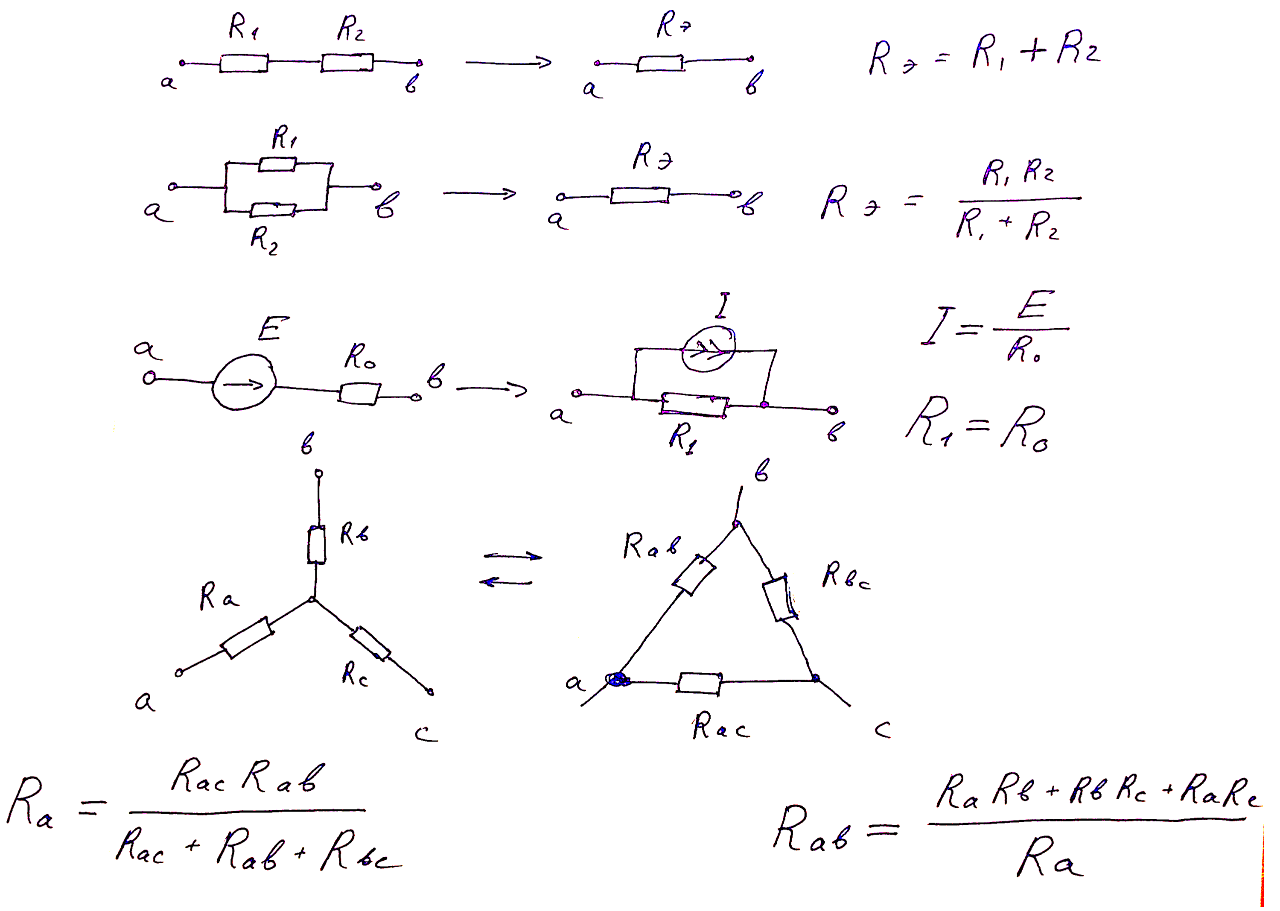

Рис. 3: преобразования

1.10 Нелинейные электрические цепи

Если цепь содержит элементы, ВАХ которых отлична от линейной функции, то такая цепь называется нелинейной.

С линейной частью нелинейной цепи можно осуществлять любые, справедливые для обычных линейных цепей, преобразования.

Статическая характеристика есть

$$R_{stat} = U/I \tag{23}$$

при неизменных U,I;

Дифференциальная характеристика есть

$$R_{dif} = \frac{dU}{dI} \tag{24}$$

Дифференциальная характеристика в общем случае не равна статической.

Для расчета цепей могут применяться методы двух узлов и эквивалентного генератора. Законы Кирхгофа так же справедливы.

2 Модуль 2. Электрические цепи при синусоидальных воздействиях

2.1 Закон Ома для реактивных компонентов электрической цепи

Пусть дана цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки индуктивности и генератора синусоидального тока.

Тогда из 2-го закона Кирхгофа следует уравнение для мгновенных значений:

$$U_R + U_L + U_C = E \tag{25}$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E \tag{26}$$

Переходим к комплексному представлению

$$\dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \dot{I}_m \frac{-j}{C\omega} = \dot{E}_m \tag{27}$$

$$\dot{I}_m (R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}) = \dot{E}_m \tag{28}$$

Множитель $R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}$ называют комплексным сопротивлением.

$$\dot{Z} = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{C\omega} \tag{29}$$

$$\dot{Z} = R + jX \tag{30}$$

, где R - активное сопротивления, а X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{31}$$

Уравнение (28) является законом Ома для цепи синусоидального тока

2.2 Анализ электрической цепи методом комплексных амплитуд

Синусоидально изменяющийся ток (напряжения) удобно представлять в виде действительной части комплексного числа.

Согласно формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \tag{32}$$

Таким образом:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = Re[I_m e^{\omega t + \phi}] \tag{33}$$

Величину $I_m e^{\omega t+\phi}$ называют *комплексной амплитудой* тока и обозначают $\dot{I}_m$

Сумма двух токов разной частоты есть геометрическая сумма векторов $\dot{I}_{m1} \& \dot{I}_{m2}$

Амплитуда результирующего тока определяется длинной суммарного вектора а начальная фаза - углом, образованным с действительной осью $+1$.

Дальнейший расчет сводится к расчету для линейных цепей постоянного тока с заменой соответствующих величин на их представление в виде комплексных амплитуд.

2.3 Мощность в электрической цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Мгновенная мощность - произведение мгновенных значений тока и напряжения. $p = ui$

Активная мощность - среднее значение мгновенной мощности за период Т

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T}\int_0^T uidt \tag{34}$$

Если ток на участке цепи отстает от напряжения на ϕ, то

$$P = U\cos(\phi)I = I^2R \tag{35}$$

, где U & I - действующие значения напряжения и тока, в $\sqrt{2}$ раз меньшие чем $I_m \& U_m$

Реактивная мощность $Q = UI\sin(\phi)$ - мощность, передаваемая между генератором и приемником энергии (катушками и конденсаторами). Получается из усреднения по времени энергии, передаваемой источником реактивным элементам.

Полная мощность $S^2 = P^2 + Q^2$ - мощность, которую источник может отдать потребителю, если он представляет собой чисто активное сопротивление.

Баланс мощностей заключается в том, что полая мощность, выделяемая на источнике должна равняться полной мощности, потребляемой цепью.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i^2 Z_i = \sum_{i=1}^{k} I_i U_i e^{j\phi_{kz}} \tag{36}$$

2.4 Входные сигналы (воздействия на цепь) и их математическое описание во временной и частотной областях

Синусоидальный ток - ток, изменяющий свое значение во времени по синусоидальному закону.

$$I = I_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi) \tag{37}$$

Где:

- I_m - амплитуда
- T - период
- ψ - сдвиг по фазе

Синал так же может быть представлен в комплексной форме. см. (§2.2)
На частотной диаграмме такое отображается как вращающийся вектор.

2.5 Преобразование Фурье. Частотный и фазовый спектры.

Постулируется, что любую периодическую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \tag{38}$$

Представив sin в комплексной форме по Эйлеру, получаем:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \tag{39}$$

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi k} = A_k \cos(\psi_k) + jA_k \sin(\psi_k) \tag{40}$$

Выражения для нахождения коэффициентов:

$$A_k \cos(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \tag{41}$$

$$A_k \sin(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \tag{42}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt \tag{43}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_o t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt \tag{44}$$

Совершая предельный переход $\omega \to 0; T \to \infty$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{45}$$

Функция

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{46}$$

есть спектр амплитуд при непрерывном преобразовании фурье.

Т.к. функция $S(j\omega)$ комплексная, то выделяют отдельно амплитудный спектр $|S(j\omega)|$ и фазовый спектр $\phi(j\omega) = arg(S(j\omega))$

Тогда обратное преобразование Фурье будет представлять из себя интеграл по спектру.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{jk\omega_o t} d\omega \tag{47}$$