

# 1 Модуль 1. Цепи постоянного тока

## 1.1 Законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи

### 1.1.1 Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС

Устанавливает связь между током и напряжением на участке цепи

$$U_{ab} = IR \quad (1)$$

$$I = \frac{\phi_a - \phi_b}{R} \quad (2)$$

### 1.1.2 Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС

Позволяет определить ток на участке цепи с известной разностью потенциалов и ЭДС источника:

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_b) \pm E}{R} \quad (3)$$

"+" при ЭДС, направленном по обходу, и "-" при ЭДС направленном против обхода.

### 1.1.3 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов, подтекающих к узлу равна 0:

$$\sum I_i = 0 \quad (4)$$

Является следствием принципа непрерывности полного тока.

$$\oint_S \vec{\sigma} d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

, где  $\vec{\sigma}$  - плотность тока.

### 1.1.4 Второй закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме всех ЭДС в том же контуре.  $\sum IR = \sum E$
- Алгебраическая сумма всех напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю  $\sum U_{ij} = 0$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения напряжения во времени.

## 1.2 Активные и пассивные компоненты электрической цепи

Элементом электрической цепи называют идеализированное устройство, отображающее какое-либо из свойств реальной электрической цепи. В теории электрических цепей различают **активные** и **пассивные** элементы. Первые вносят энергию в электрическую цепь, а вторые ее потребляют.

### 1.2.1 Пассивные компоненты электрической цепи

- Резистивный элемент (резистор)

Условное графическое изображение резистора приведено на рис. 1,а. Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами тела и свойствами материала. Характеризуется сопротивлением  $R$ , [Ом] или обратной величиной, проводимостью  $G = R^{-1}$ , [См]

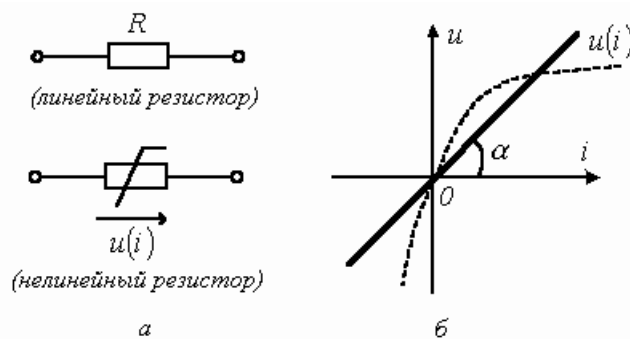


Рис. 1

Рис. 1: ВАХ линейного и нелинейного резистора

Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость  $u(i)$ , называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см.рис. 1), то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$R = \frac{U}{I}$$

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна (рис. 1,б), характеризуется несколькими параметрами. В частности безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое и дифференциальное сопротивления.

$$R_{stat} = \frac{u}{i}$$

$$R_{dif} = \frac{\partial u}{\partial i}$$

- Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рис. 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

, [Гн]

Связь напряжения на катушке с током, протекающим через нее:

$$U = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Основной характеристикой катушки является Веббер-амперная характеристика:

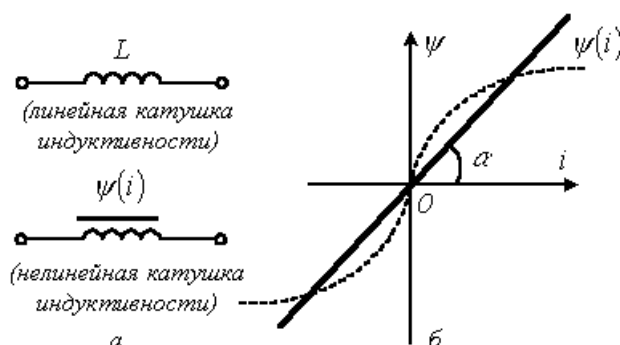


Рис.2

Рис. 2: Веббер-амперная характеристика катушки

В свою очередь, катушки бывают линейными и нелинейными. Нелинейные характеризуются статической и дифференциальной индуктивностями.

- Емкостный элемент (конденсатор) Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда q на обкладках конденсатора к напряжению u между ними

$$C = \frac{q}{u}$$

, [Ф] Связь напряжения на пластинах конденсатора с протекающим через него током:

$$U = \frac{1}{C} \int i dt$$

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рис. 3,а.

Большинство диэлектриков, используемых на практике, являются линейными, а значит и конденсаторы представляют собой линейные элементы. У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости  $q(u)$  (рис. 3,б) Для нелинейных конденсаторов выделяют статическую и дифференциальную ёмкости.

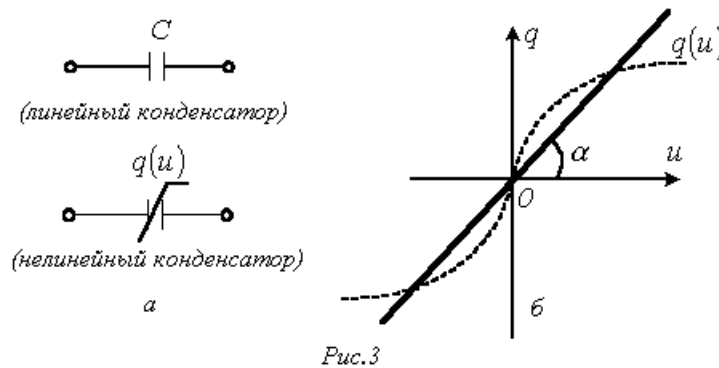


Рис. 3: Кулон-вольтная характеристика конденсатора

### 1.2.2 Активные компоненты электрической цепи

- Источник напряжения (ЭДС)

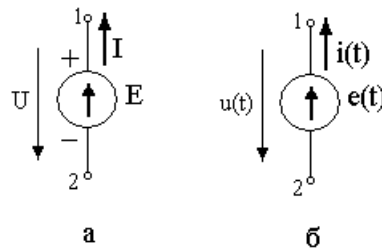


Рис. 4: Источник ЭДС

Идеальным источником ЭДС (графическое изображение рис.4) называется активный элемент с двумя выводами (активный двухполюсник), напряжение на которых не зависит от величины тока, проходящего через источник.

На рис.4 (а) показан источник постоянной ЭДС, а на рис.4 (б) источник переменной ЭДС.

Выходной характеристикой элемента является вольтамперная характеристика (ВАХ). В соответствии с определением ВАХ идеального источника ЭДС это прямая линия (показана на рис. 5).

Такая вольтамперная характеристика возможна только в том случае, если сопротивление внутренней структуры источника равно нулю.

На практике идеальных источников не существует. Это объясняется наличием сопротивления во внутренней структуре источника ( $R_{вн}$ ). Величина этого сопротивления определяется сопротивлениями соединительных проводов, коммутирующей аппаратуры, обмоток трансформаторов, внутренних структур полупроводниковых элементов и пр.

Источник ЭДС в котором учтено внутреннее сопротивление, называется реальным источником ЭДС.

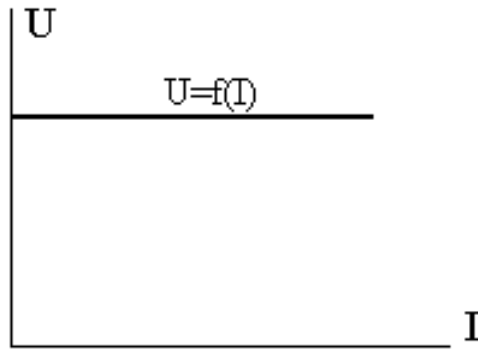


Рис. 5: ВАХ Источника ЭДС

Источник ЭДС может работать в двух режимах – в режиме генератора мощности и в режиме потребителя. В режиме генератора направление тока через источник и ЭДС совпадают, а в режиме потребителя направлены встречно.

- Источник тока

Идеальным источником тока называется активный элемент с двумя выводами (активный двухполюсник) величина тока, через который не зависит от величины приложенного к выводам напряжения. Графическое изображение источника постоянного тока показано на рис, а изображение источника переменного тока показано на рис. Вольтамперная характеристика (ВАХ) идеального источника тока показана на рис.

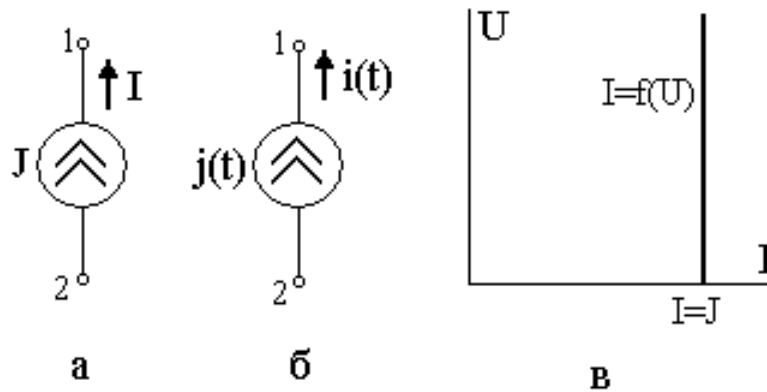


Рис. 6: Источник тока

Такая вольтамперная характеристика возможна только в том случае, если сопротивление внутренней структуры источника равно бесконечности.

На практике идеальных источников не существует. Это объясняется теми же причинами, что и в случае источником ЭДС.

Источник тока в котором учтено внутреннее сопротивление, называется реальным источником тока.

### 1.3 Согласованный режим работы электрической цепи

Пусть дана цепь с источником ЭДС  $E$ , внутреннее сопротивление которого  $R_{in}$ , и сопротивлением нагрузки  $R$ .

Тогда мощность, выделяющаяся на нагрузке равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_{in})^2} R \quad (6)$$

Определим сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{(R + R_{in})^2} - \frac{2 R U^2}{(R + R_{in})^3} = 0 \implies R = R_{in} \quad (7)$$

$R = R_{in}$  - точка экстремума, и т.к. при  $R < R_{in} P' > 0$ ,  $R > R_{in} P' < 0$ , то  $R = R_{in}$  - точка максимума.

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_{in}} \quad (8)$$

Такой режим работы называется согласованным, КПД  $\eta = \frac{R}{R + R_{in}} = 0.5$

## 1.4 Анализ цепи с помощью метода узловых потенциалов(контурных токов)

### 1.4.1 Метод контурных токов

При расчете данным методом полагаю, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Т.о. в данном методе за искомые принимаются контурные токи.

Систему уравнений приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

В матричной форме:

$$[R][I] = [E] \quad (9)$$

, где

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix}$$

Уравнение решается методом Крамера:

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (10)$$

### 1.4.2 Метод узловых потенциалов

метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех ветвях.

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (11)$$

$$I_i = \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \right) = 0 \quad (13)$$

Составляем систему уравнений для n-1 узлов.

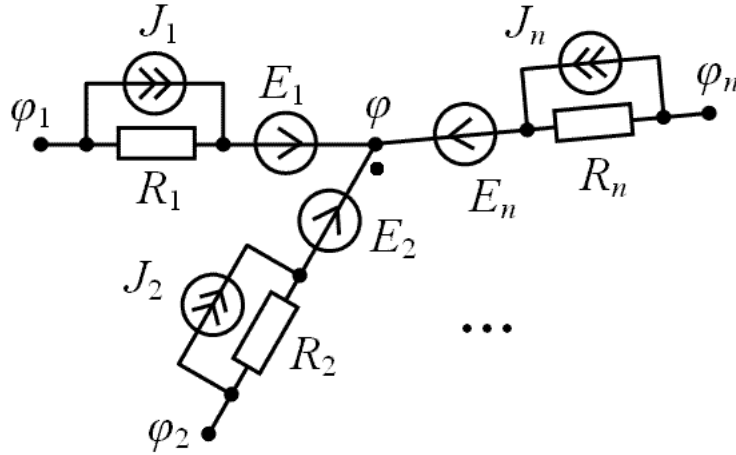


Рис. 7: Схема

## 1.5 Метод суперпозиции

Метод наложения — метод расчёта электрических цепей, основанный на предположении, что ток в каждой из ветвей электрической цепи при всех включённых генераторах, равен сумме токов в этой же ветви, полученных при включении каждого из генераторов по очереди и отключении остальных генераторов.

Обоснование: Основываясь на МКТ, получив  $n$  уравнений, где  $n$  = количество независимых контуров, каждый контурный ток  $I_{kk}$  можно получить при помощи правила Крамера, т.е.

$$I_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

, где  $\Delta_k$  - определитель, полученный заменой  $k$ -ого столбца на столбец свободных членов. В нашем случае -  $[E]$ .

Тогда определитель  $\Delta_k$  равен

$$E_{11}A_{k1} + E_{22}A_{k2} + \dots + E_{nn}A_{kn}$$

, где  $A_{km}$  - алгебраическое дополнение  $\Delta$   $k$ -ого столбца и  $m$ -ой строки.

Тогда ток  $I_{kk}$  может быть представлен в виде

$$I_{kk} = E_{11}\frac{A_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{A_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn}\frac{A_{kn}}{\Delta}$$

Постулируется, что всегда можно составить общее выражение для тока в  $k$ -й ветви сложной схемы, причем при составлении используются уравнения МКТ, а контуры выбраны так, чтобы  $k$ -ая ветвь входила только в один  $k$ -контур. В таком случае  $I_k = I_{kk}$  тогда можно записать, что

$$I_k = E_{11}\frac{A_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{A_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn}\frac{A_{kn}}{\Delta}$$

В свою очередь,  $E_{ii}$  (контурная ЭДС) можно выразить через сумму ЭДС ветвей  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Сгруппировав коэффициенты при  $E_i$ , получаем

$$I_k = E_1g_{k1} + E_2g_{k2} + \dots + E_{kn}g_{kn}$$



В частном случае, когда какая-либо ЭДС, например  $m$ -ая, входит только в 1  $m$ -контур,  $g_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$

При этом генератор тока исключается из схемы путем радикальной дислокации, а генератор напряжения шунтируется.

Метод применим как для цепей постоянного, так и переменного тока.

Неприменим для **нелинейных** цепей.

## 1.6 Матричное представление метода контурных токов и узловых потенциалов

### 1.6.1 Топологические понятия и топологические матрицы

Положим, что в схеме имеется  $u$  узлов и  $b$  ветвей. Каждая пара узлов соединена одной ветвью. Перед составлением матриц схемы графа нумеруют и на них ставят стрелки, указывающие положительные направления для отсчёта тока и напряжения на каждой ветви. Перед нумерацией графа выбирается дерево.

**Дерево** представляет собой такую совокупность узлов схемы, когда ветви касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Число ветвей дерева, таким образом, равно  $u-1$ . Нумерацию ветвей графа начинают с нумерации ветвей дерева (с 1 по  $u-1$ ). Номера с  $u$  по  $b$  придают ветвям графа, не вошедшим в выбранное дерево. Их называют **ветвями связи** или **хордами**

- Узловая матрица  $[A]$  составляется для  $n-1$  узла графа цепи, в ней столбцы обозначают ветви, а строки - узлы. Элементы: 1, -1, 0. Делается следующее:
  - Каждый узел охватывается некоторой поверхностью, след которой можно показать кружком
  - В соответствующую ячейку матрицы ставят знак 1, если стрелка ветви направлена из кружка, -1, если внутрь и 0, если ветвь не затронута кружком.
- Матрицу сечений  $[Q]$  составляют для любых сечений графа, а матрицу главных сечений  $[Q_{main}]$  - для главных сечений выбранного дерева. След сечения на рисунке показывают овалами, вычерченными тонкими линиями.

*Главными сечениями* называют сечения, каждое из которых пересекает несколько ветвей связи и только 1 ветвь выбранного дерева. Главные сечения нумеруют. Делается следующее:

- В ячейках соответствующей строки матрицы  $Q_{main}$  ставят 1 для пересекаемой этим сечением ветви дерева.
  - Если линии связи ориентированы относительно поверхности сечения так же, как и данная ветвь дерева, то ставится знак 1. В противоположном случае — -1, в другом случае 0.
- *Главными контурами* называют контуры, в каждый из которых входит только по 1 ветви связи. Нумеруют главные контуры теми же номерами, какие присвоены ветвям связи в них.

*Матрицей главных контуров*  $[K_{main}]$  называют матрицу, составленную из чисел 0, 1, -1, строки которой соответствуют номеру главного контура, а столбцы - номеру ветви. Делается следующее:

- Главные контуры при составлении матрицы обходят в направлении **ветви связи** соответствующего контура.
- Если при таком обходе направление стрелки совпадает с направлением обхода - пишется 1.

### 1.6.2 Запись уравнений по законам Кирхгофа

- Совокупность уравнений по первому закону Кирхгофа:  $[A][I_v] = 0$ , где  $[I_v]$  - транспонированная матрица-строка токов ветвей.
- Совокупность уравнений по второму закону Кирхгофа:  $[K_{main}][U_v] = 0$ , где  $[U_v]$  - матрица-столбец напряжения ветвей.

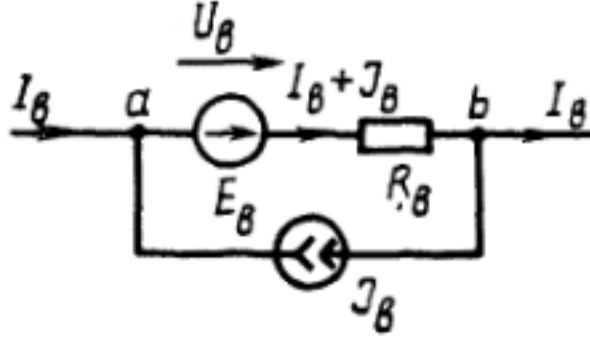


Рис. 8: обобщенная ветвь

Вводится понятие обобщенной ветви, изображенной на рисунке. Уравнение:

$$U + E = R(I + J) \quad (14)$$

или

$$I + J = g(U + E) \quad (15)$$

### 1.6.3 Для МКТ

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[K][U] + [K][E] = [K][R]([I] + [J]) \quad (16)$$

Из 2-го закона Кирхгофа  $[K][U] = 0$

И токи в ветвях могут быть записаны как  $[I] = [K]^T[I_{kk}]$

Т.о.

$$[K][E] = [K][R][K]^T[I_{kk}] + [K][R][J] \quad (17)$$

$$[I_{kk}] = ([K][R][K]^T)^{-1}([K][E] - [K][R][J]) \quad (18)$$

#### 1.6.4 Для МУП

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[A][I] + [A][J] = [A][g]([U] + [E]) \quad (19)$$

Из 1-го закона Кирхгофа  $[A][I] = 0$

И токи в ветвях могут быть записаны как  $[U] = [A]^T[\phi_k]$  Т.о.

$$[A][J] = [A][g][A]^T[\phi_k] + [A][g][E] \quad (20)$$

$$[\phi_k] = ([A][g][A]^T)^{-1}([A][J] - [A][g][E]) \quad (21)$$

## 1.7 Теорема о эквивалентном генераторе

По отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а) эквивалентным генератором напряжения с ЭДС  $E$ , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента и с внутренним сопротивлением  $R_0$ , равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента; б) эквивалентным генератором тока с  $J$ , равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента, и с внутренней проводимостью  $G_0$ , равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента.

Вычисления:

- Найти напряжение на разомкнутой ветви  $ab$ . Т.е. напряжение на бесконечном сопротивлении, подключенному к двухполюснику.
- Определить входное сопротивление двухполюсника при закороченных генераторах ЭДС и вырванных генераторах тока
- Вычислить ток по формуле

$$I = \frac{U_{ab}}{R + R_{in}} \quad (22)$$

$R_{in}$  можно так же вычислить, измеряя ток КЗ, тогда  $R_{in} = U_{ab}/I_{kz}$

## 1.8 Зависимые источники тока и напряжения

Бывают:

- Управляемые напряжением источники напряжения. Тогда  $I_1 = 0; V_2 = \mu V_1$
- Управляемые напряжением источники тока. Тогда  $I_1 = 0; I_2 = \mu V_1$
- Управляемые током источники напряжения. Тогда  $V_1 = 0; V_2 = \mu I_1$
- Управляемые током источники тока. Тогда  $V_1 = 0; I_2 = \mu I_1$

## 1.9 Эквивалентные преобразования электрических цепей

Эквивалентные преобразования заключаются в замене некоторых участков цепи таким образом, что число выводов исходного участка соответствует числу выводов эквивалентного, и при подаче на соответствующие выводы равных потенциалов, через соответствующие узлы течет равный ток.

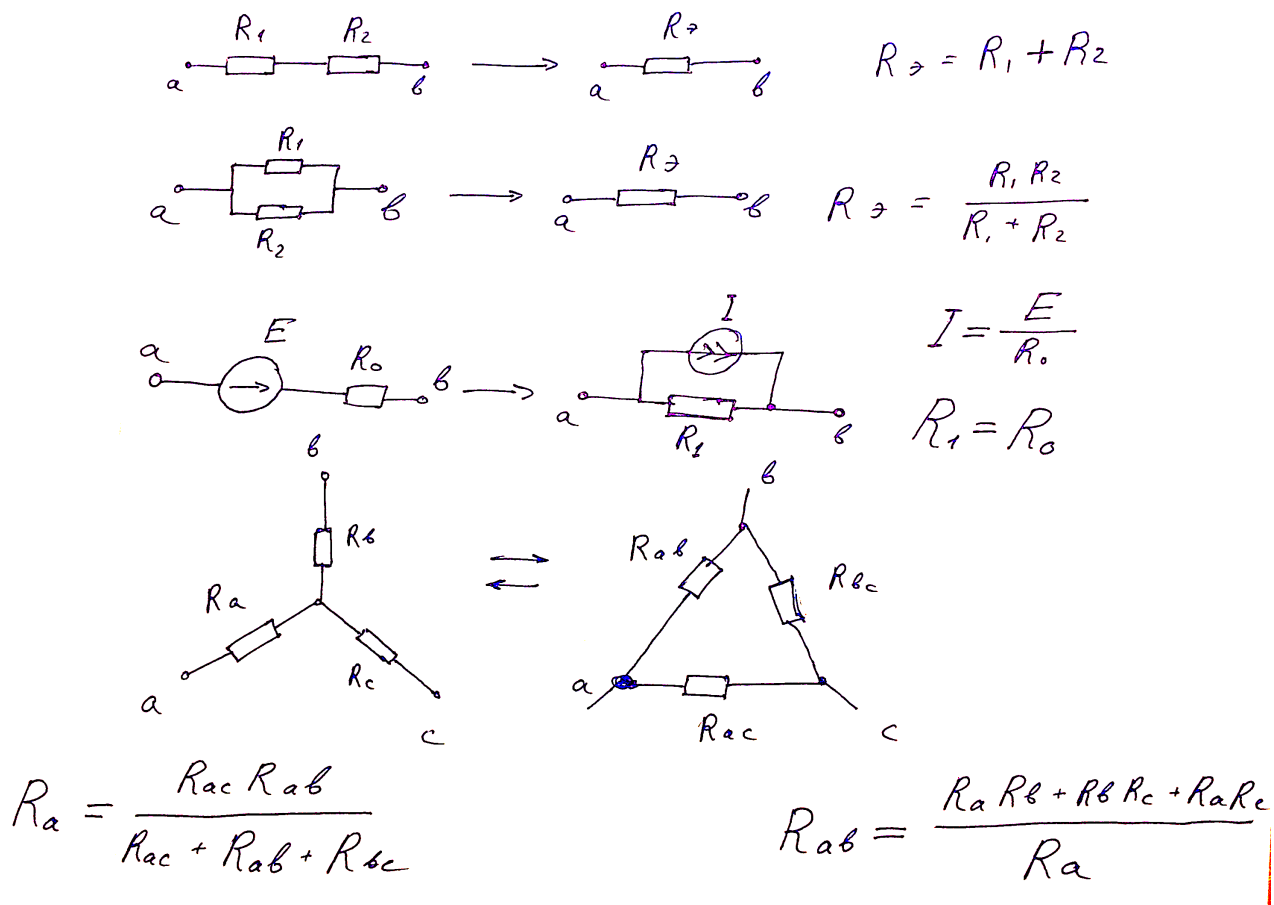


Рис. 9: преобразования

## 1.10 Нелинейные электрические цепи

Если цепь содержит элементы, ВАХ которых отлична от линейной функции, то такая цепь называется нелинейной.

С линейной частью нелинейной цепи можно осуществлять любые, справедливые для обычных линейных цепей, преобразования.

Статическая характеристика есть

$$R_{stat} = U/I \quad (23)$$

при неизменных  $U, I$ ;

Дифференциальная характеристика есть

$$R_{dif} = \frac{dU}{dI} \quad (24)$$

Дифференциальная характеристика в общем случае не равна статической.

Для расчета цепей могут применяться методы двух узлов и эквивалентного генератора. Законы Кирхгофа так же справедливы.



## 2 Модуль 2. Электрические цепи при синусоидальных воздействиях

### 2.1 Закон Ома для реактивных компонентов электрической цепи

Пусть дана цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки индуктивности и генератора синусоидального тока.

Тогда из 2-го закона Кирхгофа следует уравнение для мгновенных значений:

$$U_R + U_L + U_C = E \quad (25)$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E \quad (26)$$

Переходим к комплексному представлению

$$\dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \dot{I}_m \frac{-j}{C\omega} = \dot{E}_m \quad (27)$$

$$\dot{I}_m (R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}) = \dot{E}_m \quad (28)$$

Множитель  $R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}$  называют комплексным сопротивлением.

$$\dot{Z} = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{C\omega} \quad (29)$$

$$\dot{Z} = R + jX \quad (30)$$

, где R - активное сопротивления, а X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (31)$$

Уравнение (28) является законом Ома для цепи синусоидального тока

## 2.2 Анализ электрической цепи методом комплексных амплитуд

Синусоидально изменяющийся ток (напряжения) удобно представлять в виде действительной части комплексного числа.

Согласно формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (32)$$

Угол в этой формуле может быть любым. Предположим, что  $\alpha$  изменяется по закону  $\alpha = \omega t + \phi$

Тогда

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

Принимает вид

$$e^{j\omega t + \phi} = \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)$$

Это ни что иное, как множитель при амплитудном значении какой-либо величины, изменяющейся во времени. К примеру, если мы возьмём не  $e^{j\omega t + \phi}$ , а  $I_m e^{j\omega t + \phi}$ , то поведение функции не изменится, просто ее амплитудное значение изменится.

Пусть имеется сигнал, изменяющийся по закону  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$  Можно показать, что

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t + \phi}] \quad (33)$$

Исторически сложилось, что за основу действительного сигнала обычно берут действительную часть мнимого числа. Но т.к. амплитуды действительного значения сигнала и комплексного его представления совпадают, справедливо ввести величину  $I_m e^{j\omega t + \phi}$ , которую называют *комплексной амплитудой* тока и обозначают  $\dot{I}_m$

Метод комплексных амплитуд удобен тем, что можно легко подсчитать амплитудные значения на всех элементах цепи.

Сумма двух токов разной частоты есть геометрическая сумма векторов  $\dot{I}_{m1}$  &  $\dot{I}_{m2}$

Амплитуда результирующего тока определяется длиной суммарного вектора а начальная фаза - углом, образованным с действительной осью +1.

Дальнейший расчет сводится к расчету для линейных цепей постоянного тока с заменой соответствующих величин на их представление в виде комплексных амплитуд.

- Резистивный элемент Пусть  $i = I_m \sin(\omega t + \phi)$  согласно закону Ома,  $u = iR = RI_m \sin(\omega t + \phi)$  Комплексная амплитуда тока может быть представлена как

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t + \phi}$$

Комплексная амплитуда напряжения:

$$\dot{U}_m = R\dot{I}_m = RI_m e^{j\omega t + \phi}$$

- Индуктивный элемент Пусть  $i = I_m \sin(\omega t)$  Тогда

$$U_L = -e_L = U_m = -(-L \frac{di}{dt}) = \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

Тогда

$$\dot{U}_m = \omega L \dot{I}_m$$

Сопротивление катушки обозначается  $X_L = \omega L$  Видно, что напряжение на катушке опережает ток на  $\pi/2$

- Ёмкостный элемент Пусть  $u = U_m \sin(\omega t)$  Тогда  $q = Cu = CU_m \sin(\omega t)$  Следовательно

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega CU_m \cos(\omega t) = \omega CU_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

Видно, что напряжение на конденсаторе отстаёт от тока, текущего через него по фазе на  $\pi/2$  Ёмкостное сопротивление обозначается  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , тогда  $I_m = U_m/X_C$ , а комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_m = X_C \dot{I}_m$$

- Стоит заметить, что напряжения на конденсаторе и катушке действуют в противофазе.

## 2.3 Мощность в электрической цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Мгновенная мощность - произведение мгновенных значений тока и напряжения.  $p = ui$  Стоит выделить мгновенную мощность на

- Резистивном элементе

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t)$$

или

$$p = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos(2\omega t))$$

- Индуктивном элементе

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t)$$

- Емкостном элементе

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t)$$

Активная мощность  $P$  - среднее значение мгновенной мощности  $p$  за период  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \quad (34)$$

Если ток  $i = I_m \sin(\omega t)$ , а напряжение на участке цепи  $u = U_m \sin(\omega t + \phi)$

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\phi) = UI \cos(\phi) = I^2 R \quad (35)$$

, где  $U$  &  $I$  - действующие значения напряжения и тока, в  $\sqrt{2}$  раз меньше чем  $I_m$  &  $U_m$

Фактически, активная мощность представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты на участке цепи с сопротивлением  $R$ . В самом деле,  $U \cos(\phi) = IR$ , Следовательно

$$P = UI \cos(\phi) = I^2 R$$

Реактивная мощность  $Q = UI \sin(\phi)$  - мощность, обусловленная наличием реактивных элементов цепи. Разберемся, что же она из себя представляет.

Возьмём цепочку с последовательно соединенными  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Запишем выражение для мгновенного значения суммы энергий магнитного и электрического полей цепи:

$$W = W_m + W_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) + \frac{I^2}{2\omega^2 C} (1 + \cos(2\omega t))$$

Видно, что  $W$  имеет постоянную и переменную составляющие.

$$W = W_{me0} - w_{me}$$

На создание постоянной составляющей была затрачена энергия в процессе становления данного периодического режима. Получим среднее значение энергии  $w_{me}$ , поступающей от источника за интервал времени от  $-T/8$  до  $+T/8$

$$W_{sred} = \frac{4}{T} \int_{-T/8}^{+T/8} w_{me} dt = \dots = \frac{2}{\pi\omega} I^2 (X_L - X_C) = \frac{2}{\pi\omega} UI \sin(\phi) = \frac{2}{\pi\omega} Q$$

Таким образом, реактивная мощность  $Q$  пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдаётся источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля индуктивной катушки и конденсатора.

За один период переменного тока эта энергия дважды отдаётся генератором в цепь и дважды он получает ее обратно, т.е. **реактивная мощность способствует обмену энергии между генератором и приемником**

Полная мощность  $S = UI$ . Мощности также связаны зависимостью  $S^2 = P^2 + Q^2$  - мощность, которую источник может отдать потребителю, если он представляет собой чисто активное сопротивление.

Баланс мощностей заключается в том, что полная мощность, выделяемая на источнике должна равняться полной мощности, потребляемой цепью.

$$\sum_{i=1}^n I_i^2 Z_i = \sum_{i=1}^k I_i U_i e^{j\phi_{kz}} \quad (36)$$

## 2.4 Входные сигналы (воздействия на цепь) и их математическое описание во временной и частотной областях

Синусоидальный ток - ток, изменяющий свое значение во времени по синусоидальному закону.

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (37)$$

Где:

- $I_m$  - амплитуда
- $T$  - период
- $\psi$  - сдвиг по фазе

Сигнал так же может быть представлен в комплексной форме. см. (§2.2)  
На частотной диаграмме такое отображается как вращающийся вектор.

## 2.5 Преобразование Фурье. Частотный и фазовый спектры.

Постулируется, что любую периодическую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \quad (38)$$

Представив  $\sin$  в комплексной форме по Эйлеру, получаем:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (39)$$

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k} = A_k \cos(\psi_k) + j A_k \sin(\psi_k) \quad (40)$$

Выражения для нахождения коэффициентов:

$$A_k \cos(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (41)$$

$$A_k \sin(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (42)$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (43)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (44)$$

Совершая предельный переход  $\omega \rightarrow 0; T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (45)$$

Функция

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (46)$$

есть спектр амплитуд при непрерывном преобразовании Фурье.

Т.к. функция  $S(j\omega)$  комплексная, то выделяют отдельно амплитудный спектр  $|S(j\omega)|$  и фазовый спектр  $\phi(j\omega) = \arg(S(j\omega))$

Тогда обратное преобразование Фурье будет представлять из себя интеграл по спектру.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{jk\omega_0 t} d\omega \quad (47)$$

## 2.6 Комплексная передаточная функция электрической цепи.

Комплексная передаточная функция представляет собой отношение некоторого выходного значения, записанного в комплексной форме к некоторому входному значению также записанному в комплексной форме.

Передаточная функция непрерывной системы представляет собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях. //Википедия

Бывают передаточные функции по:

- Ток к напряжению
- Напряжение к току
- Ток к току
- Напряжение к напряжению

Т.к. функция есть комплексная величина, то ее модуль - отношение амплитуд выходного и входного сигналов, а  $\phi = \arctan\left(\frac{\Im[\dot{K}]}{\Re[\dot{K}]}\right)$  - сдвиг по фазу выходного сигнала относительно входного.



## 2.7 Особенности поведения резонансных контуров. Влияние сопротивления потерь на его свойства.

## 2.8 Добротность, полоса пропускания, прочие свойства

### 2.8.1 Параллельный контур

При параллельном соединении конденсатора и индуктивности.

Резонанс наблюдается в том случае, когда сопротивление контура стремится к бесконечности.

$$\dot{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (48)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (49)$$

Соответственно, при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной наблюдается резкое возрастание напряжения в контуре.

И резонанс токов. (т.к. напряжение одинаково)

Крутизна определяется добротностью контура  $Q$ .

Добротность определяется как отношение энергии, запасаемых в контуре, к энергии, рассеиваемой на внешней нагрузке.

Пусть есть цепь и в начальный момент времени конденсатор заряжен. Тогда ток через катушку:

$$I_L = \frac{U}{j\omega_0 L} \quad (50)$$

Через внешнюю нагрузку:

$$I_R = \frac{U}{R} \quad (51)$$

Из определения  $Q$ :

$$Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (52)$$

Полоса пропускания определяется диапазоном частот, при которых напряжение на контуре  $\geq 0,707E$ .

Записываем выражение для **амплитуд** токов и напряжений (с квадратами), в полученном выражении делаем замену на добротность, получая выражение относительно относительной расстройки.

И для параллельного и для последовательного колебательных контуров справедлива следующая формула, определяющая границу полосы пропускания(не пропускания)

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (53)$$

### 2.8.2 Последовательный контур

Образуется при последовательном соединении конденсатора и индуктивности.

Наблюдается резонанс напряжений.

Добротность определяется аналогичным образом и равняется

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (54)$$

Напряжение на контуре при резонансе  $U \rightarrow 0$ .

Полоса не пропускания аналогична параллельному контуру, но  $\leq 0,707E$ .

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (55)$$

## 2.9 Фильтры верхней частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Фильтры представляю собой четырехполюсники, устанавливаемые между источником питания и нагрузкой, назначение которых заключается в том, что они пропускают без затухания или с малым затуханием токи одних частот, и не пропускают, или пропускают с большим затуханием токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых без затухания, называется полосой пропускания.

Фильтр верхних частот пропускает только высокие частоты и задерживает низкие.

Простейший электронный фильтр верхних частот состоит из последовательно соединённых конденсатора и резистора.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных катушки и резистора, где напряжение снимается с катушки.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = \frac{i \omega L}{R + i \omega L} \quad (56)$$

$$|K| = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^4 L^4}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} \quad (57)$$

$$|K| = \frac{|\omega| |L|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \sqrt{2} \quad (58)$$

$$\omega = \frac{R}{L} \quad (59)$$

## 2.10 Фильтры нижних частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Пропускает низкие частоты, не пропускает верхние.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных конденсатора и резистора, где напряжение снимается с конденсатора.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = -\frac{i}{\omega C \left(R - \frac{i}{\omega C}\right)} \quad (60)$$

$$|K| = \sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 C^2 \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2} + \frac{1}{\omega^4 C^4 \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2}} \quad (61)$$

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} = \sqrt{2} \quad (62)$$

$$\omega = \frac{1}{CR} \quad (63)$$

## 2.11 Четырехполюсники. Способы формирования описания поведения четырехполюсника. Система параметров

Четырехполюсник - обобщенное понятие электрической цепи, рассматриваемой по отношению к четырем ее зажимам.

Бывают активные и пассивные, в зависимости от наличия источников тока или напряжения внутри.

Работа четырехполюсника характеризуется  $U_1 U_2 I_1 I_2$ ;

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде шести систем уравнений. (Все возможные перестановки), например:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

## 3 Модуль 3. Переходные процессы в электрических цепях

### 3.1 Классический метод анализа переходных процессов в электрических цепях. Свободная и вынужденная составляющие решения уравнений и их определения

Приведем задачу о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Из второго закона Кирхгофа:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E \quad (64)$$

Определение тока как функции времени будет являться решением данного уравнения.

Решение уравнения проводится разными способами, некоторые из них:

- Классический
- Операторный
- Интеграл Дюамеля
- Метод пространственных состояний

Из курса математического анализа известно, что решением дифференциального уравнения является сумма частного неоднородного решения и общего неоднородного.

Т.е. для уравнения

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad (65)$$

$I = \frac{E}{R}$  - частное решение. Эта составляющая тока называется принужденной. Принужденная составляющая представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующий в цепи ЭДС.

$I = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$  - общее однородное решение. Эта составляющая тока называется свободной. Затухает по экспоненциальному закону.

Сумма свободного и вынужденного составляющих определяет действующее значение токов или напряжений.

Решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательных функций  $Ae^{pt}$ , таким образом уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде  $Ae^{pt} = i_{CB}$ . Постоянная А для каждого свободного тока, в общем случае, разная, а параметр  $p$  одинаков для свободных токов ветвей.

Тогда составляя систему уравнений для свободных токов можно избавиться от операций дифференцирования и интегрирования заменив их на умножение на  $p$  и деление на  $p$  соответственно.

Классический метод заключается в поиске свободных токов

$$i = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad (66)$$

Где  $n$  - число корней характеристического уравнения.  $p_i$  - корни.

Начальные значения токов и все их производные считаются известными (и равными нулю при нулевых начальных условиях).

Тогда дифференцируем уравнение

$$i = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad (67)$$

столько раз, сколько потребуется для составления системы, составляем систему и решаем.

### 3.2 Характеристическое уравнение.

После алгебраизации системы уравнений (см. ??) получаем систему уравнений относительно свободных токов.

Например:

$$\begin{cases} i_{CB1} & - & i_{CB2} & - & i_{CB3} & = & 0 \\ (L_1 p + R_1) i_{CB1} & + & R_2 i_{CB2} & & & = & 0 \\ R_2 i_{CB2} & - & & & \frac{i_{CB3}}{C_p} & = & 0 \end{cases}$$

Тогда решение этой системы методом Крамера представляет собой:

$$i_{CB1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (68)$$

$$i_{CB2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (69)$$

$$i_{CB3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (70)$$

Где  $\Delta$  - определитель матрицы системы

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 = 0$  т.к. в них присутствуют нулевые столбцы. Следовательно:

$$i_{CB1} = \frac{0}{\Delta} \quad (71)$$

$$i_{CB2} = \frac{0}{\Delta} \quad (72)$$

$$i_{CB3} = \frac{0}{\Delta} \quad (73)$$

Из физических соображений ясно, что токи не могут равняться нулю, по этому

$$\Delta = 0 \quad (74)$$

Что и является характеристическим уравнением, из которого определяется  $p$



### 3.3 Операторная схема замещения электрических цепей при нулевых и ненулевых начальных условиях

Сущность операторного метода заключается в том, что функции вещественной переменной  $t$ , которую называют оригиналом, ставится в соответствие функция комплексной переменной  $p$ , которую называют изображением. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор  $p$ , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы.

Центральным принципом решения переходного процесса операторным методом является преобразование обычной электрической схемы к операторной схеме замещения переменной  $p$ . Полученную схему рассчитывают любым известным методом (методом узловых потенциалов, контурных токов или эквивалентных преобразований например).

На рисунках ниже приведена схема электрической цепи и её операторная схема замещения соответственно:

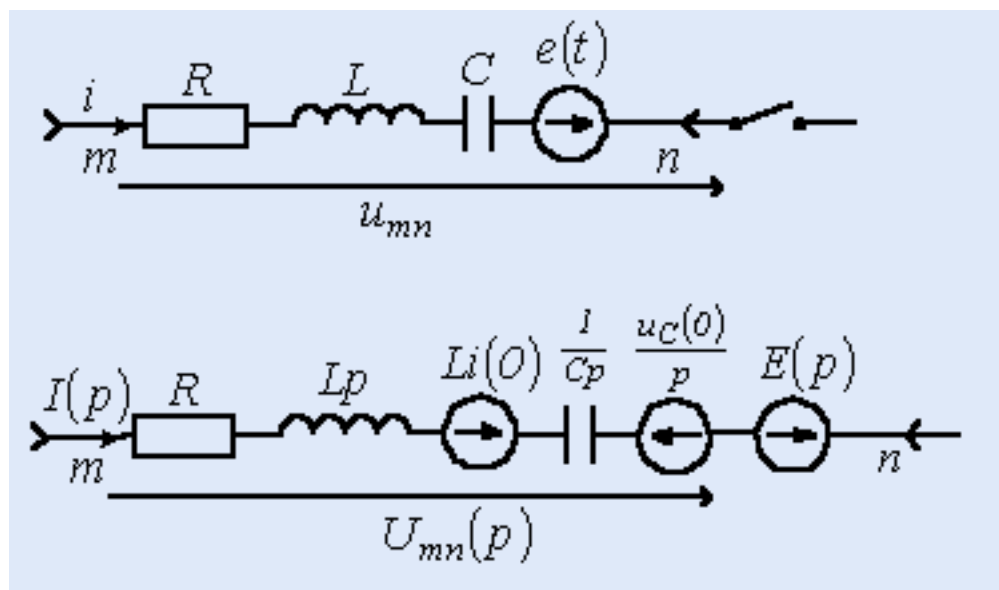


Рис. 10: Замещение

Таким образом правила преобразования основных элементов электрической цепи:

- Активное сопротивление остаётся без изменений
- Конденсатор ёмкостью  $C$  заменяется двумя элементами — конденсатором  $1/pC$  и источником ЭДС
- $U_C(0)/p$ , который характеризует начальный заряд на конденсаторе

- Индуктивность  $L$  заменяется двумя элементами — Индуктивностью  $pL$  и источником ЭДС  $L \cdot i_L(0)$ , который характеризует начальный ток через индуктивность
- Постоянный источник ЭДС или тока  $J$ ,  $E$  заменяются на  $J/p$  и  $E/p$  соответственно

### 3.4 Переходная характеристика электрической цепи и ее связь с частотной характеристикой

Переходная характеристика - это реакция системы на входное воздействие в виде функции Хевисайда (единичное ступенчатое воздействие)

Пусть функция Хевисайда -  $l(t)$ , ее изображение  $\frac{1}{p}$ , а изображение переходной функции -  $H(p)$ , тогда

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} \quad (75)$$

$$K(p) = pH(p) \quad (76)$$

$$h(t) \doteq \frac{K(p)}{p} \quad (77)$$

, где  $K(p)$  - комплексная передаточная функция

### 3.5 Последовательность анализа цепи операторным методом.

В общем случае порядок расчета переходных процессов операторным методом следующий:

- Выбираются положительные направления токов в ветвях и записываются интегродифференциальные уравнения Кирхгофа для цепи после коммутации.
- С помощью преобразования Лапласа переходим к изображениям слагаемых в составленных уравнениях.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (78)$$

Записываются те же уравнения для изображений с учетом независимых начальных условий в виде внутренних источников ЭДС.

- Полученные в операторной форме алгебраические уравнения решаются относительно изображения искомой величины.
- На основе полученного изображения находится оригинал искомой функции. В общем случае оригинал можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi-i\infty}^{\phi+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (79)$$

Если  $F(p)$  представлено в виде  $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}$ , где  $M(p)$  - многочлен степени  $m$ ,  $N(p)$  - многочлен степени  $n$ ,  $n > m$ , то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (80)$$

Где  $p_k$  - корни  $F_2(p) = 0$ .

Если один из корней  $p_k = 0$ , то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (81)$$

Где  $F_2(p) = p F_3(p)$