1 Модуль 1. Цепи постоянного тока

1.1 Законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи

1.1.1 Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС

Устанавливает связь между током и напряжением на участке цепи

$$U_{ab} = IR \tag{1}$$

$$I = \frac{\phi_a - \phi_b}{R} \tag{2}$$

1.1.2 Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС

Позволяет определить ток на участке цепи с известной разностью потенциалов и ЭДС источника:

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_b) \pm E}{R} \tag{3}$$

"+"при ЭДС, направленном по обходу, и "−"при ЭДС направленном против обхода.

1.1.3 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов, подтекающих к узлу равна 0:

$$\sum I_i = 0 \tag{4}$$

Является следствием принципа непрерывности полного тока.

$$\oint_S \overrightarrow{\sigma} d\overrightarrow{S} = 0 \tag{5}$$

, где $\overrightarrow{\sigma}$ - плотность тока.

1.1.4 Второй закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме всех ЭДС в том же контуре. $\sum IR = \sum E$

- Алгебраическая сумма всех напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю $\sum U_{ij} = 0$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения напряжения во времени.

1.2 Активные и пассивные компоненты электрической цепи

В любой схеме можно выделить одну ветвь, а остальную цепь условно изобразить в виде двухполюсника. Если в двухполюснике присутствует источника тока или ЭДС, то он называется *активным* и обозначается буквой "А если источников нет, то он называется *пассивным* и обозначается буквой "П"или вообще не обозначается.

К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия.

Активные - транзистор, диод$^{[what?]}$, радиолампа и т.п.

1.3 Согласованный режим работы электрической цепи

Пусть дана цепь с источником ЭДС E, внутреннее сопротивление которого R_{in}, и сопротивлением нагрузки R.

Тогда мощность, выделяющаяся на нагрузке равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_{in})^2} R \tag{6}$$

Определим сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{\left(R + R_{in}\right)^2} - \frac{2\,R\,U^2}{\left(R + R_{in}\right)^3} = 0 \Longrightarrow R = R_{in} \tag{7}$$

$R = R_{in}$ - точка экстремума, и т.к. при $R < R_{in} P' > 0, R > R_{in} P' < 0$, то $R = R_{in}$ - точка максимума.

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_{in}} \tag{8}$$

Такой режим работы называется согласованным, КПД $\eta = \frac{R}{R+R_{in}} = 0.5$

1.4 Анализ цепи с помощью метода узловых потенциалов(контурных токов)

1.4.1 Метод контурных токов

При расчете данным методом полагаю, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Т.о. в данном методе за искомые принимаются контурные токи.

Систему уравнений приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

В матричной форме:

$$[R][I] = [E] \tag{9}$$

, где

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix}$$

Уравнение решается методом Крамера:

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{10}$$

1.4.2 Метод узловых потенциалов

метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех ветвях.

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{11}$$

$$I_i = \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i) = 0 \tag{13}$$

Составляем систему уравнений для n-1 узлов.

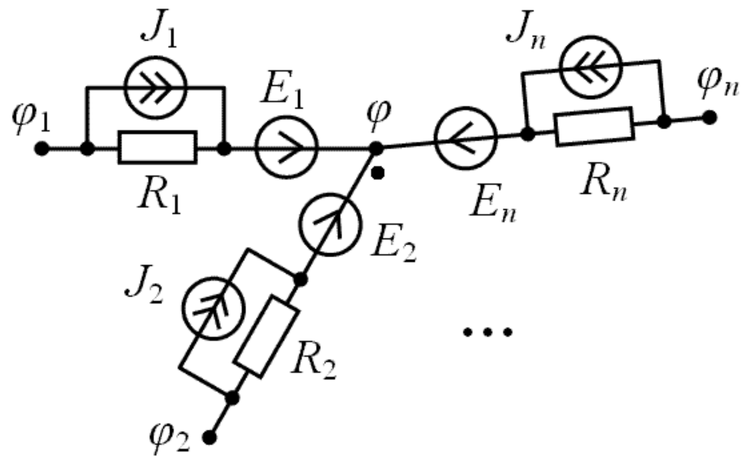

Рис. 1: Схема

1.5 Метод суперпозиции

Метод наложения — метод расчёта электрических цепей, основанный на предположении, что ток в каждой из ветвей электрической цепи при всех включённых генераторах, равен сумме токов в этой же ветви, полученных при включении каждого из генераторов по очереди и отключении остальных генераторов.

При этом генератор тока исключается из схемы путем радикальной дислокации, а генератор напряжения шунтируется.

Метод применим как для цепей постоянного, так и переменного тока.

Не применим для **нелинейных** цепей.

1.6 Матричное представление метода контурных токов и узловых потенциалов

1.6.1 Топологические матрицы

Узловая матрица [A] составляется для n-1 узла графа цепи, в ней столбца обозначают ветви, а строки - узлы. Элемент = 1, если при выбранном направлении обхода ветвь выходит из узла, = -1, если входит, 0 если не относится.

Выделим в графе цепи остовное дерево. Хорды - ветви, не участвующие в остовном дереве.

Главные контура - контура, содержащие одну и только одну ветвь связи (хорду), нумеруются по номеру этой хорды. Имеют направление обхода, элементы соответственно -1;1;0 против;по;не участвует. Матрица составляется аналогично и обозначается [K].

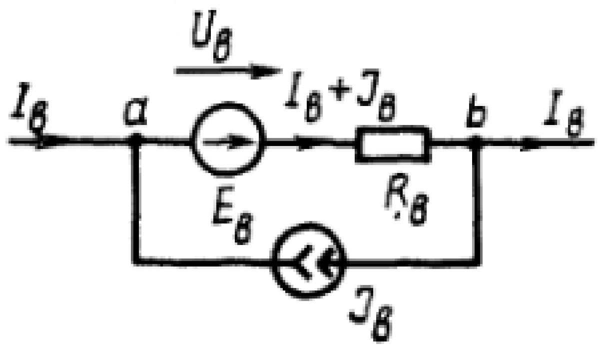

Рис. 2: обобщенная ветвь

Вводится понятие обобщенной ветви, изображенной на рисунке. Уравнение:

$$U + E = R(I + J) \tag{14}$$

или

$$I + J = g(U + E) \tag{15}$$

1.6.2 Для МКТ

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[K][U] + [K][E] = [K][R]([I] + [J]) \tag{16}$$

Из 2-го закона Кирхгофа $[K][U] = 0$

И токи в ветвях могут быть записаны как $[I] = [K]^T[I_{kk}]$

Т.о.

$$[K][E] = [K][R][K]^T[I_{kk}] + [K][R][J] \tag{17}$$

$$[I_{kk}] = ([K][R][K]^T)^{-1}([K][E] - [K][R][J]) \tag{18}$$

1.6.3 Для МУП

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[A][I] + [A][J] = [A][g]([U] + [E]) \tag{19}$$

Из 1-го закона Кирхгофа $[A][I] = 0$.

И токи в ветвях могут быть записаны как $[U] = [A]^T[\phi_k]$ Т.о.

$$[A][J] = [A][g][A]^T[\phi_k] + [A][g][E] \tag{20}$$

$$[\phi_k] = ([A][g][A]^T)^{-1}([A][J] - [A][g][E]) \tag{21}$$

1.7 Теорема о эквивалентном генераторе

По отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а)эквивалентным генератором напряжения с ЭДС E , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента и с внутренним сопротивлением R0, равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента; б)эквивалентным генератором тока с J, равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента, и с внутренней проводимостью G0, равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента.

Вычисления:

- Найти напряжение на разомкнутой ветви ab. Т.е. напряжение на бесконечном сопротивлении, подключенному к двухполюснику.
- Определить входное сопротивление двухполюсника при закороченных генераторах ЭДС и вырванных генераторах тока
- Вычислить ток по формуле
$$I = \frac{U_{ab}}{R + R_{in}} \tag{22}$$

R_{in} можно так же вычислить, измеряя ток КЗ, тогда $R_{in} = U_{ab}/I_{kz}$

1.8 Зависимые источники тока и напряжения

Бывают:

- Управляемые напряжением источники напряжения. Тогда $I_1 = 0; V_2 = \mu V_1$
- Управляемые напряжением источники тока. Тогда $I_1 = 0; I_2 = \mu V_1$
- Управляемые током источники напряжения. Тогда $V_1 = 0; V_2 = \mu I_1$
- Управляемые током источники тока. Тогда $V_1 = 0; I_2 = \mu I_1$

1.9 Эквивалентные преобразования электрических цепей

Эквивалентные преобразования заключаются в замене некоторых участков цепи таким образом, что число выводов исходного участка соответствует числу выводов эквивалентного, и при подаче на соответствующие выводы равных потенциалов, через соответствующие узлы течет равный ток.

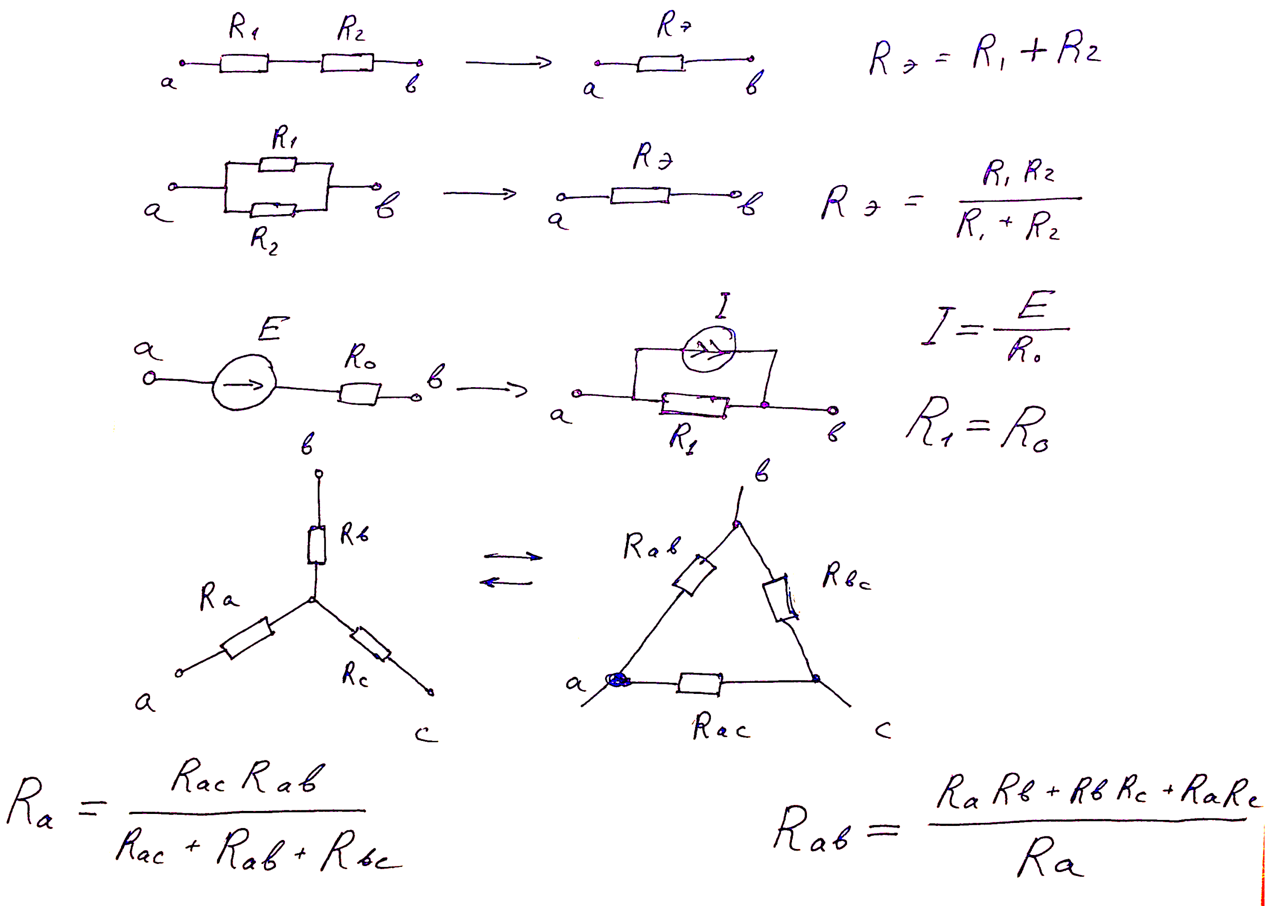

Рис. 3: преобразования

1.10 Нелинейные электрические цепи

Если цепь содержит элементы, ВАХ которых отлична от линейной функции, то такая цепь называется нелинейной.

С линейной частью нелинейной цепи можно осуществлять любые, справедливые для обычных линейных цепей, преобразования.

Статическая характеристика есть

$$R_{stat} = U/I \tag{23}$$

при неизменных U,I;

Дифференциальная характеристика есть

$$R_{dif} = \frac{dU}{dI} \tag{24}$$

Дифференциальная характеристика в общем случае не равна статической.

Для расчета цепей могут применяться методы двух узлов и эквивалентного генератора. Законы Кирхгофа так же справедливы.

2 Модуль 2. Электрические цепи при синусоидальных воздействиях

2.1 Закон Ома для реактивных компонентов электрической цепи

Пусть дана цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки индуктивности и генератора синусоидального тока.

Тогда из 2-го закона Кирхгофа следует уравнение для мгновенных значений:

$$U_R + U_L + U_C = E \tag{25}$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E \tag{26}$$

Переходим к комплексному представлению

$$\dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \dot{I}_m \frac{-j}{C\omega} = \dot{E}_m \tag{27}$$

$$\dot{I}_m(R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}) = \dot{E}_m \tag{28}$$

Множитель $R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}$ называют комплексным сопротивлением.

$$\dot{Z} = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{C\omega} \tag{29}$$

$$\dot{Z} = R + jX \tag{30}$$

, где R - активное сопротивления, а X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{31}$$

Уравнение (28) является законом Ома для цепи синусоидального тока

2.2 Анализ электрической цепи методом комплексных амплитуд

Синусоидально изменяющийся ток (напряжения) удобно представлять в виде действительной части комплексного числа.

Согласно формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \tag{32}$$

Таким образом:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = Re[I_m e^{\omega t + \phi}] \tag{33}$$

Величину $I_m e^{\omega t + \phi}$ называют *комплексной амплитудой* тока и обозначают $\dot{I}_m$

Сумма двух токов разной частоты есть геометрическая сумма векторов $\dot{I}_{m1} \& \dot{I}_{m2}$

Амплитуда результирующего тока определяется длинной суммарного вектора а начальная фаза - углом, образованным с действительной осью $+1$.

Дальнейший расчет сводится к расчету для линейных цепей постоянного тока с заменой соответствующих величин на их представление в виде комплексных амплитуд.

2.3 Мощность в электрической цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Мгновенная мощность - произведение мгновенных значений тока и напряжения. $p = ui$

Активная мощность - среднее значение мгновенной мощности за период T

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T}\int_0^T uidt \tag{34}$$

Если ток на участке цепи отстает от напряжения на ϕ, то

$$P = U\cos(\phi)I = I^2R \tag{35}$$

, где U & I - действующие значения напряжения и тока, в $\sqrt{2}$ раз меньшие чем $I_m\&U_m$

Реактивная мощность $Q = UI\sin(\phi)$ - мощность, передаваемая между генератором и приемником энергии (катушками и конденсаторами). Получается из усреднения по времени энергии, передаваемой источником реактивным элементам.

Полная мощность $S^2 = P^2 + Q^2$ - мощность, которую источник может отдать потребителю, если он представляет собой чисто активное сопротивление.

Баланс мощностей заключается в том, что полая мощность, выделяемая на источнике должна равняться полной мощности, потребляемой цепью.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i^2 Z_i = \sum_{i=1}^{k} I_i U_i e^{j\phi_{kz}} \tag{36}$$

2.4 Входные сигналы (воздействия на цепь) и их математическое описание во временной и частотной областях

Синусоидальный ток - ток, изменяющий свое значение во времени по синусоидальному закону.

$$I = I_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi) \tag{37}$$

Где:

- I_m - амплитуда
- T - период
- ψ - сдвиг по фазе

Синал так же может быть представлен в комплексной форме. см. (§2.2)
На частотной диаграмме такое отображается как вращающийся вектор.

2.5 Преобразование Фурье. Частотный и фазовый спектры.

Постулируется, что любую периодическую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \tag{38}$$

Представив sin в комплексной форме по Эйлеру, получаем:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \tag{39}$$

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi k} = A_k \cos(\psi_k) + jA_k \sin(\psi_k) \tag{40}$$

Выражения для нахождения коэффициентов:

$$A_k \cos(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \tag{41}$$

$$A_k \sin(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \tag{42}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt \tag{43}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_o t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt \tag{44}$$

Совершая предельный переход $\omega \to 0; T \to \infty$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_o t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{45}$$

Функция

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{46}$$

есть спектр амплитуд при непрерывном преобразовании фурье.

Т.к. функция $S(j\omega)$ комплексная, то выделяют отдельно амплитудный спектр $|S(j\omega)|$ и фазовый спектр $\phi(j\omega) = arg(S(j\omega))$

Тогда обратное преобразование Фурье будет представлять из себя интеграл по спектру.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{jk\omega_o t} d\omega \tag{47}$$

2.6 Комплексная передаточная функция электрической цепи.

Комплексная передаточная функция представляет собой отношение некоторого выходного значения, записанного в комплексной форме к некоторому входному значению также записанному в комплексной форме.

Передаточная функция непрерывной системы представляет собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях. //Википедия

Бывают передаточные функции по:

- Ток к напряжению
- Напряжение к току
- Ток к току
- Напряжение к напряжению

Т.к. функция есть комплексная величина, то ее модуль - отношение амплитуд выходного и входного сигналов, а $\phi = \arctan(\frac{\Im[\dot{K}]}{\Re[\dot{K}]})$ - сдвиг по фазу выходного сигнала относительно входного.

2.7 Особенности поведения резонансных контуров. Влияние сопротивления потерь на его свойства.

2.8 Добротность, полоса пропускания, прочие свойства

2.8.1 Параллельный контур

При параллельном соединении конденсатора и индуктивности.

Резонанс наблюдается в том случае, когда сопротивление контура стремится к бесконечности.

$$\dot{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \tag{48}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{49}$$

Соответственно, при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной наблюдается резкое возрастание напряжения в контуре.

И резонанс токов. (т.к. напряжение одинаково)

Крутизна определяется добротностью контура Q.

Добротность определяется как отношение энергии, запасаемых в контуре, к энергии, рассеиваемой на внешней нагрузке.

Пусть есть цепь и в начальный момент времени конденсатор заряжен. Тогда ток через катушку:

$$I_L = \frac{U}{j\omega_0 L} \tag{50}$$

Через внешнюю нагрузку:

$$I_R = \frac{U}{R} \tag{51}$$

Из определения Q:

$$Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{52}$$

Полоса пропускания определяется диапазоном частот, при которых напряжение на контуре $\geq 0,707E$.

Записываем выражение для **амплитуд** токов и напряжений (с квадратами), в полученном выражении делаем замену на добротность, получая выражение относительно относительной расстройки.

И для параллельного и для последовательного колебательных контуров справедлива следующая формула, определяющая границу полосы пропускания(не пропускания)

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{53}$$

2.8.2 Последовательный контур

Образуется при последовательном соединении конденсатора и индуктивности.

Наблюдается резонанс напряжений.

Добротность определяется аналогичным образом и равняется

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{54}$$

Напряжение на контуре при резонансе $U \to 0$.

Полоса не пропускания аналогична параллельному контуру, но $\leq 0,707E$.

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{55}$$

2.9 Фильтры верхней частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Фильтры представляю собой четырехполюсники, устанавливаемые между источником питания и нагрузкой, назначение которых заключается в том, что они пропускают без затухания или с малым затуханием токи одних частот, и не пропускают, или пропускают с большим затуханием токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых без затухания, называется полосой пропускания.

Фильтр верхних частот пропускает только высокие частоты и задерживает низкие.

Простейший электронный фильтр верхних частот состоит из последовательно соединённых конденсатора и резистора.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных катушки и резистора, где напряжение снимается с катушки.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = \frac{i\,\omega\,L}{R + i\,\omega\,L} \tag{56}$$

$$|K| = \sqrt{\frac{\omega^2\,L^2\,R^2}{\left(R^2+\omega^2\,L^2\right)^2} + \frac{\omega^4\,L^4}{\left(R^2+\omega^2\,L^2\right)^2}} \tag{57}$$

$$|K| = \frac{|\omega|\ |L|}{\sqrt{R^2+\omega^2\,L^2}} = \sqrt(2) \tag{58}$$

$$\omega = \frac{R}{L} \tag{59}$$

2.10 Фильтры нижних частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Пропускает низкие чистоты, не пропускает верхние.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных конденсатора и резистора, где напряжение снимается с конденсатора.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = -\frac{i}{\omega\, C\, \left(R - \frac{i}{\omega\, C}\right)} \tag{60}$$

$$|K| = \sqrt{\frac{R^2}{\omega^2\, C^2\, \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2\, C^2}\right)^2} + \frac{1}{\omega^4\, C^4\, \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2\, C^2}\right)^2}} \tag{61}$$

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\, C^2\, R^2 + 1}} = \sqrt(2) \tag{62}$$

$$\omega = \frac{1}{CR} \tag{63}$$

2.11 Четырехполюсники. Способы формирования описания поведения четырехполюсника. Система параметров

Четырехполюсник - обобщенное понятие электрической цепи, рассматриваемой по отношению к четырем ее зажимам.

Бывают активные и пассивные, в зависимости от наличия источников тока или напряжения внутри.

Работа четырехполюсника характеризуется $U_1 U_2 I_1 I_2$;

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде шести систем уравнений. (Все возможные перестановки), например:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = & \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + & Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = & \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + & Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

3 Модуль 3. Переходные процессы в электрических цепях

3.1 Классический метод анализа переходных процессов в электрических цепях. Свободная и вынужденная составляющие решения уранений и их опредления

Приведем задачу о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Из второго закона Кирхгофа:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} + \int_0^t idt = E \tag{64}$$

Определение тока как функции времени будет являться решением данного уравнения.

Решение уравнения проводится разными способами, некоторые из них:

- Классический
- Операторный
- Интеграл Дюамеля
- Метод пространственных состояний

Из курса математического анализа известно, что решением дифференциального уравнения является сумма частного неоднородного решения и общего неоднородного.

Т.е. для уравнения

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E \tag{65}$$

$I = \frac{E}{R}$ - частное решение. Эта составляющая тока называется принужденной. Принужденная составляющая представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующий в цепи ЭДС.

$I = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ - общее однородное решение. Эта составляющая тока называется свободной. Затухает по экспоненциальному закону.

Сумма свободного и вынужденного составляющих определяет действующее значение токов или напряжений.

Решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательных функций Ae^{pt}, таким образом уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде $Ae^{pt} = i_{CB}$. Постоянная А для каждого свободного тока, в общем случае, разная, а параметр p одинаков для свободных токов ветвей.

Тогда составляя систему уравнений для свободных токов можно избавиться от операций дифференцирования и интегрирования заменив их на умножение на p и деление на p соответственно.

3.2 Характеристическое уравнение.