

# 1 Модуль 1. Цепи постоянного тока

## 1.1 Законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи

### 1.1.1 Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС

Устанавливает связь между током и напряжением на участке цепи

$$U_{ab} = IR \quad (1)$$

$$I = \frac{\phi_a - \phi_b}{R} \quad (2)$$

### 1.1.2 Обобщенный закон Ома, для участка цепи, содержащего ЭДС

Позволяет определить ток на участке цепи с известной разностью потенциалов и ЭДС источника:

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_b) \pm E}{R} \quad (3)$$

"+" при ЭДС, направленном по обходу, и "-" при ЭДС направленном против обхода.

### 1.1.3 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов, подтекающих к узлу равна 0:

$$\sum I_i = 0 \quad (4)$$

Является следствием принципа непрерывности полного тока.

$$\oint_S \vec{\sigma} d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

, где  $\vec{\sigma}$  - плотность тока.

### 1.1.4 Второй закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме всех ЭДС в том же контуре.  $\sum IR = \sum E$
- Алгебраическая сумма всех напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю  $\sum U_{ij} = 0$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения напряжения во времени.

## 1.2 Активные и пассивные компоненты электрической цепи

В любой схеме можно выделить одну ветвь, а остальную цепь условно изобразить в виде двухполюсника. Если в двухполюснике присутствует источника тока или ЭДС, то он называется *активным* и обозначается буквой "А" если источников нет, то он называется *пассивным* и обозначается буквой "П" или вообще не обозначается.

К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия.

Активные - транзистор, диод<sup>[what?]</sup>, радиолампа и т.п.

### 1.3 Согласованный режим работы электрической цепи

Пусть дана цепь с источником ЭДС  $E$ , внутреннее сопротивление которого  $R_{in}$ , и сопротивлением нагрузки  $R$ .

Тогда мощность, выделяющаяся на нагрузке равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_{in})^2} R \quad (6)$$

Определим сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{(R + R_{in})^2} - \frac{2 R U^2}{(R + R_{in})^3} = 0 \implies R = R_{in} \quad (7)$$

$R = R_{in}$  - точка экстремума, и т.к. при  $R < R_{in} P' > 0$ ,  $R > R_{in} P' < 0$ , то  $R = R_{in}$  - точка максимума.

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_{in}} \quad (8)$$

Такой режим работы называется согласованным, КПД  $\eta = \frac{R}{R + R_{in}} = 0.5$

## 1.4 Анализ цепи с помощью метода узловых потенциалов(контурных токов)

### 1.4.1 Метод контурных токов

При расчете данным методом полагаю, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Т.о. в данном методе за искомые принимаются контурные токи.

Систему уравнений приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

В матричной форме:

$$[R][I] = [E] \quad (9)$$

, где

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$
$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}$$
$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix}$$

Уравнение решается методом Крамера:

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (10)$$

### 1.4.2 Метод узловых потенциалов

метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех ветвях.

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (11)$$

$$I_i = \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \right) = 0 \quad (13)$$

Составляем систему уравнений для n-1 узлов.

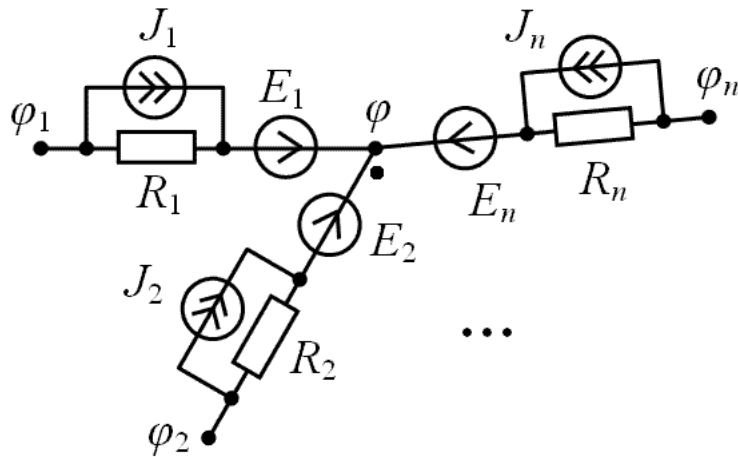


Рис. 1: Схема

## 1.5 Метод суперпозиции

Метод наложения — метод расчёта электрических цепей, основанный на предположении, что ток в каждой из ветвей электрической цепи при всех включённых генераторах, равен сумме токов в этой же ветви, полученных при включении каждого из генераторов по очереди и отключении остальных генераторов.

При этом генератор тока исключается из схемы путем радикальной дислокации, а генератор напряжения шунтируется.

Метод применим как для цепей постоянного, так и переменного тока.

Не применим для **нелинейных** цепей.

## 1.6 Матричное представление метода контурных токов и узловых потенциалов

### 1.6.1 Топологические матрицы

Узловая матрица  $[A]$  составляется для  $n-1$  узла графа цепи, в ней столбца обозначают ветви, а строки - узлы. Элемент  $= 1$ , если при выбранном направлении обхода ветвь выходит из узла,  $= -1$ , если входит,  $0$  если не относится.

Выделим в графе цепи остовное дерево. Хорды - ветви, не участвующие в остовном дереве.

Главные контура - контура, содержащие одну и только одну ветвь связи (хорду), нумеруются по номеру этой хорды. Имеют направление обхода, элементы соответственно  $-1; 1; 0$  против; по; не участвует. Матрица составляется аналогично и обозначается  $[K]$ .

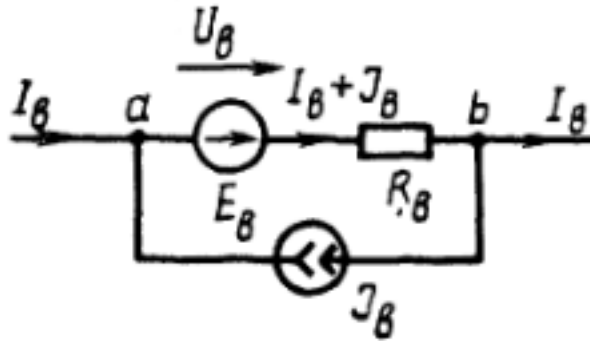


Рис. 2: обобщенная ветвь

Вводится понятие обобщенной ветви, изображенной на рисунке. Уравнение:

$$U + E = R(I + J) \quad (14)$$

или

$$I + J = g(U + E) \quad (15)$$

### 1.6.2 Для МКТ

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[K][U] + [K][E] = [K][R]([I] + [J]) \quad (16)$$

Из 2-го закона Кирхгофа  $[K][U] = 0$

И токи в ветвях могут быть записаны как  $[I] = [K]^T[I_{kk}]$

Т.о.

$$[K][E] = [K][R][K]^T[I_{kk}] + [K][R][J] \quad (17)$$

$$[I_{kk}] = ([K][R][K]^T)^{-1}([K][E] - [K][R][J]) \quad (18)$$

### 1.6.3 Для МУП

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[A][I] + [A][J] = [A][g]([U] + [E]) \quad (19)$$

Из 1-го закона Кирхгофа  $[A][I] = 0$  .

И токи в ветвях могут быть записаны как  $[U] = [A]^T[\phi_k]$  Т.о.

$$[A][J] = [A][g][A]^T[\phi_k] + [A][g][E] \quad (20)$$

$$[\phi_k] = ([A][g][A]^T)^{-1}([A][J] - [A][g][E]) \quad (21)$$

## 1.7 Теорема о эквивалентном генераторе

По отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а) эквивалентным генератором напряжения с ЭДС  $E$ , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента и с внутренним сопротивлением  $R_0$ , равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента; б) эквивалентным генератором тока с  $J$ , равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента, и с внутренней проводимостью  $G_0$ , равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента.

Вычисления:

- Найти напряжение на разомкнутой ветви  $ab$ . Т.е. напряжение на бесконечном сопротивлении, подключенному к двухполюснику.
- Определить входное сопротивление двухполюсника при закороченных генераторах ЭДС и вырванных генераторах тока
- Вычислить ток по формуле

$$I = \frac{U_{ab}}{R + R_{in}} \quad (22)$$

$R_{in}$  можно так же вычислить, измеряя ток КЗ, тогда  $R_{in} = U_{ab}/I_{kz}$



## 1.8 Зависимые источники тока и напряжения

Бывают:

- Управляемые напряжением источники напряжения. Тогда  $I_1 = 0; V_2 = \mu V_1$
- Управляемые напряжением источники тока. Тогда  $I_1 = 0; I_2 = \mu V_1$
- Управляемые током источники напряжения. Тогда  $V_1 = 0; V_2 = \mu I_1$
- Управляемые током источники тока. Тогда  $V_1 = 0; I_2 = \mu I_1$

## 1.9 Эквивалентные преобразования электрических цепей

Эквивалентные преобразования заключаются в замене некоторых участков цепи таким образом, что число выводов исходного участка соответствует числу выводов эквивалентного, и при подаче на соответствующие выводы равных потенциалов, через соответствующие узлы течет равный ток.

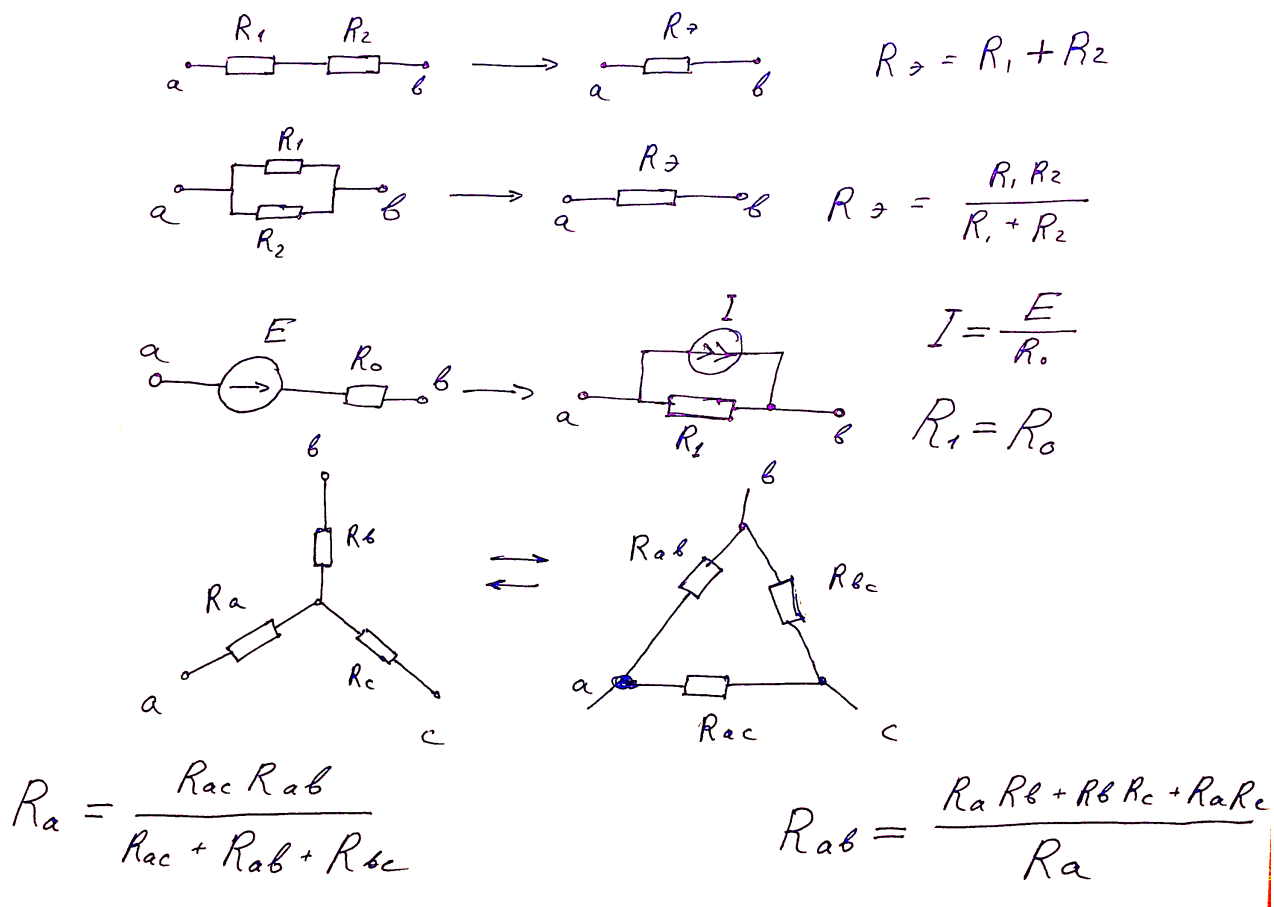


Рис. 3: преобразования

## 1.10 Нелинейные электрические цепи

Если цепь содержит элементы, ВАХ которых отлична от линейной функции, то такая цепь называется нелинейной.

С линейной частью нелинейной цепи можно осуществлять любые, справедливые для обычных линейных цепей, преобразования.

Статическая характеристика есть

$$R_{stat} = U/I \quad (23)$$

при неизменных  $U, I$ ;

Дифференциальная характеристика есть

$$R_{dif} = \frac{dU}{dI} \quad (24)$$

Дифференциальная характеристика в общем случае не равна статической.

Для расчета цепей могут применяться методы двух узлов и эквивалентного генератора. Законы Кирхгофа так же справедливы.

## 2 Модуль 2. Электрические цепи при синусоидальных воздействиях

### 2.1 Закон Ома для реактивных компонентов электрической цепи

Пусть дана цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки индуктивности и генератора синусоидального тока.

Тогда из 2-го закона Кирхгофа следует уравнение для мгновенных значений:

$$U_R + U_L + U_C = E \quad (25)$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E \quad (26)$$

Переходим к комплексному представлению

$$\dot{I}_m R + j\omega L \dot{I}_m + \dot{I}_m \frac{-j}{C\omega} = \dot{E}_m \quad (27)$$

$$\dot{I}_m (R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}) = \dot{E}_m \quad (28)$$

Множитель  $R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}$  называют комплексным сопротивлением.

$$\dot{Z} = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{C\omega} \quad (29)$$

$$\dot{Z} = R + jX \quad (30)$$

, где R - активное сопротивления, а X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (31)$$

Уравнение (28) является законом Ома для цепи синусоидального тока

## 2.2 Анализ электрической цепи методом комплексных амплитуд

Синусоидально изменяющийся ток (напряжения) удобно представлять в виде действительной части комплексного числа.

Согласно формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (32)$$

Таким образом:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t + j\phi}] \quad (33)$$

Величину  $I_m e^{j\omega t + j\phi}$  называют *комплексной амплитудой* тока и обозначают  $\dot{I}_m$ .

Сумма двух токов разной частоты есть геометрическая сумма векторов  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$ .

Амплитуда результирующего тока определяется длиной суммарного вектора а начальная фаза - углом, образованным с действительной осью +1.

Дальнейший расчет сводится к расчету для линейных цепей постоянного тока с заменой соответствующих величин на их представление в виде комплексных амплитуд.

### 2.3 Мощность в электрической цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Мгновенная мощность - произведение мгновенных значений тока и напряжения.  $p = ui$

Активная мощность - среднее значение мгновенной мощности за период  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \quad (34)$$

Если ток на участке цепи отстает от напряжения на  $\phi$ , то

$$P = U \cos(\phi) I = I^2 R \quad (35)$$

, где  $U$  &  $I$  - действующие значения напряжения и тока, в  $\sqrt{2}$  раз меньше чем  $I_m$  &  $U_m$

Реактивная мощность  $Q = UI \sin(\phi)$  - мощность, передаваемая между генератором и приемником энергии (катушками и конденсаторами). Получается из усреднения по времени энергии, передаваемой источником реактивными элементами.

Полная мощность  $S^2 = P^2 + Q^2$  - мощность, которую источник может отдать потребителю, если он представляет собой чисто активное сопротивление.

Баланс мощностей заключается в том, что полная мощность, выделяемая на источнике должна равняться полной мощности, потребляемой цепью.

$$\sum_{i=1}^n I_i^2 Z_i = \sum_{i=1}^k I_i U_i e^{j\phi_{kz}} \quad (36)$$

## 2.4 Входные сигналы (воздействия на цепь) и их математическое описание во временной и частотной областях

Синусоидальный ток - ток, изменяющий свое значение во времени по синусоидальному закону.

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (37)$$

Где:

- $I_m$  - амплитуда
- $T$  - период
- $\psi$  - сдвиг по фазе

Сигнал так же может быть представлен в комплексной форме. см. (§2.2)  
На частотной диаграмме такое отображается как вращающийся вектор.

## 2.5 Преобразование Фурье. Частотный и фазовый спектры.

Постулируется, что любую периодическую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, называемый рядом Фурье.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \quad (38)$$

Представив  $\sin$  в комплексной форме по Эйлеру, получаем:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (39)$$

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k} = A_k \cos(\psi_k) + j A_k \sin(\psi_k) \quad (40)$$

Выражения для нахождения коэффициентов:

$$A_k \cos(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (41)$$

$$A_k \sin(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (42)$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (43)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (44)$$

Совершая предельный переход  $\omega \rightarrow 0; T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (45)$$

Функция

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (46)$$

есть спектр амплитуд при непрерывном преобразовании Фурье.

Т.к. функция  $S(j\omega)$  комплексная, то выделяют отдельно амплитудный спектр  $|S(j\omega)|$  и фазовый спектр  $\phi(j\omega) = \arg(S(j\omega))$

Тогда обратное преобразование Фурье будет представлять из себя интеграл по спектру.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{jk\omega_0 t} d\omega \quad (47)$$



## 2.6 Комплексная передаточная функция электрической цепи.

Комплексная передаточная функция представляет собой отношение некоторого выходного значения, записанного в комплексной форме к некоторому входному значению также записанному в комплексной форме.

Передаточная функция непрерывной системы представляет собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях. //Википедия

Бывают передаточные функции по:

- Ток к напряжению
- Напряжение к току
- Ток к току
- Напряжение к напряжению

Т.к. функция есть комплексная величина, то ее модуль - отношение амплитуд выходного и входного сигналов, а  $\phi = \arctan\left(\frac{\Im[\dot{K}]}{\Re[\dot{K}]}\right)$  - сдвиг по фазу выходного сигнала относительно входного.

## 2.7 Особенности поведения резонансных контуров. Влияние сопротивления потерь на его свойства.

## 2.8 Добротность, полоса пропускания, прочие свойства

### 2.8.1 Параллельный контур

При параллельном соединении конденсатора и индуктивности.

Резонанс наблюдается в том случае, когда сопротивление контура стремится к бесконечности.

$$\dot{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (48)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (49)$$

Соответственно, при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной наблюдается резкое возрастание напряжения в контуре.

И резонанс токов. (т.к. напряжение одинаково)

Крутизна определяется добротностью контура  $Q$ .

Добротность определяется как отношение энергии, запасаемых в контуре, к энергии, рассеиваемой на внешней нагрузке.

Пусть есть цепь и в начальный момент времени конденсатор заряжен. Тогда ток через катушку:

$$I_L = \frac{U}{j\omega_0 L} \quad (50)$$

Через внешнюю нагрузку:

$$I_R = \frac{U}{R} \quad (51)$$

Из определения  $Q$ :

$$Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (52)$$

Полоса пропускания определяется диапазоном частот, при которых напряжение на контуре  $\geq 0,707E$ .

Записываем выражение для **амплитуд** токов и напряжений (с квадратами), в полученном выражении делаем замену на добротность, получая выражение относительно относительной расстройки.

И для параллельного и для последовательного колебательных контуров справедлива следующая формула, определяющая границу полосы пропускания(не пропускания)

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (53)$$

### 2.8.2 Последовательный контур

Образуется при последовательном соединении конденсатора и индуктивности.

Наблюдается резонанс напряжений.

Добротность определяется аналогичным образом и равняется

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (54)$$

Напряжение на контуре при резонансе  $U \rightarrow 0$ .

Полоса не пропускания аналогична параллельному контуру, но  $\leq 0,707E$ .

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (55)$$