1 Модуль 1. Цепи постоянного тока

1.1 Законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи

1.1.1 Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС

Устанавливает связь между током и напряжением на участке цепи

$$U_{ab} = IR \tag{1}$$

$$I = \frac{\phi_a - \phi_b}{R} \tag{2}$$

1.1.2 Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС

Позволяет определить ток на участке цепи с известной разностью потенциалов и ЭДС источника:

$$I = \frac{(\phi_a - \phi_b) \pm E}{R} \tag{3}$$

"$+$"при ЭДС, направленном по обходу, и "$-$"при ЭДС направленном против обхода.

1.1.3 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов, подтекающих к узлу равна 0:

$$\sum I_i = 0 \tag{4}$$

Является следствием принципа непрерывности полного тока.

$$\oint_S \overrightarrow{\sigma} d\overrightarrow{S} = 0 \tag{5}$$

, где $\overrightarrow{\sigma}$ - плотность тока.

1.1.4 Второй закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме всех ЭДС в том же контуре. $\sum IR = \sum E$
- Алгебраическая сумма всех напряжений вдоль любого замкнутого контура равна нулю $\sum U_{ij} = 0$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения напряжения во времени.

1.2 Активные и пассивные компоненты электрической цепи

Элементом электрической цепи называют идеализированное устройство, отображающее какое-либо из свойств реальной электрической цепи. В теории электрических цепей различают **активные** и **пассивные** элементы. Первые вносят энергию в электрическую цепь, а вторые ее потребляют.

1.2.1 Пассивные компоненты электрической цепи

- Резистивный элемент (резистор)

  Условное графическое изображение резистора приведено на рис. 1,а. Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами тела и свойствами материала. Характеризуется сопротивлением R, [Ом] или обратной величиной, проводимостью $G = R^{-1}$, [См]

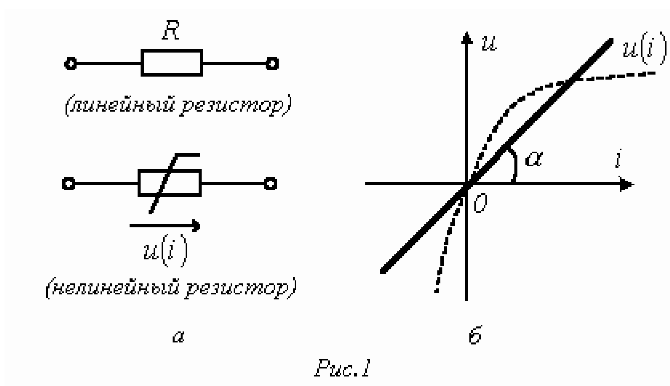

Рис. 1: ВАХ линейного и нелинейного резистора

  Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость $u(i)$, называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см.рис. 1), то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$R = \frac{U}{I}$$

  Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна (рис. 1,б), характеризуется несколькими параметрами. В частности безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое и дифференциальное сопротивления.

$$R_{stat} = \frac{u}{i}$$

$$R_{dif} = \frac{\partial u}{\partial i}$$

- Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рис. 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

, [Гн]

Связь напряжения на катушке с током, протекающим через нее:

$$U = -L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Основной характеристикой катушки является Веббер-амперная характеристика:

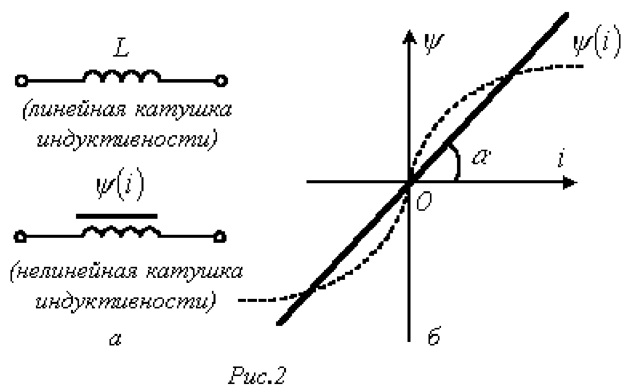

Рис. 2: Веббер-амперная характеристика катушки

В свою очередь, катушки бывают линейными и нелинейными. Нелинейные характеризуются статической и дифференциальной индуктивностями.

- Емкостный элемент (конденсатор) Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда q на обкладках конденсатора к напряжению u между ними

$$C = \frac{q}{u}$$

, [Ф] Связь напряжения на пластинах конденсатора с протекающим через него током:

$$U = \frac{1}{C}\int idt$$

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рис. 3,а.

Большинство диэлектриков, используемых на практике, являются линейными, а значит и конденсаторы представляют собой линейные элементы. У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обусловливает нелинейность зависимости $q(u)$ (рис. 3,б) Для нелинейных конденсаторов выделяют статическую и дифференциальную ёмкости.

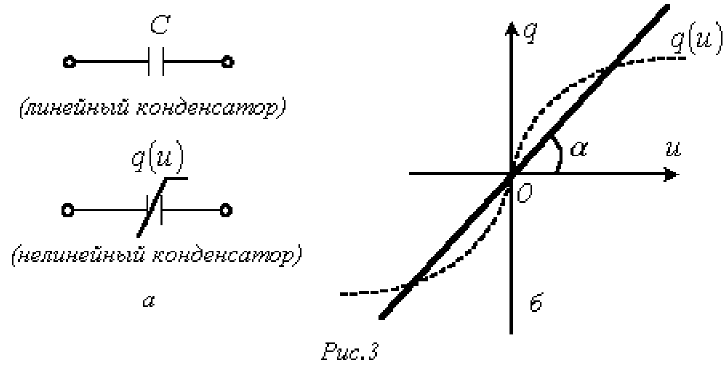

Рис. 3: Кулон-вольтная характеристика конденсатора

1.2.2 Активные компоненты электрической цепи

- Источник напряжения (ЭДС)

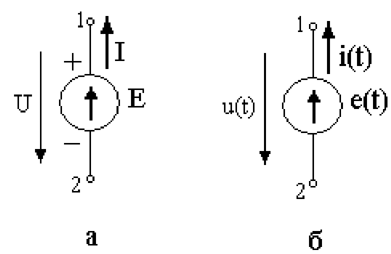

Рис. 4: Источник ЭДС

Идеальным источником ЭДС (графическое изображение рис.4) называется активный элемент с двумя выводами (активный двухполюсник), напряжение на которых не зависит от величины тока, проходящего через источник.

На рис.4 (а) показан источник постоянной ЭДС, а на рис.4 (б) источник переменной ЭДС.

Выходной характеристикой элемента является вольтамперная характеристика (ВАХ). В соответствии с определение ВАХ идеального источника ЭДС это прямая линия (показана на рис. 5).

Такая вольтамперная характеристика возможна только в том случае, если сопротивление внутренней структуры источника равно нулю.

На практике идеальных источников не существует. Это объясняется наличием сопротивления во внутренней структуре источника (Rвн). Величина этого сопротивления определяется сопротивлениями соединительных проводов, коммутирующей аппаратуры, обмоток трансформаторов, внутренних структур полупроводниковых элементов и пр.

Источник ЭДС в котором учтено внутреннее сопротивление, называется реальным источником ЭДС.

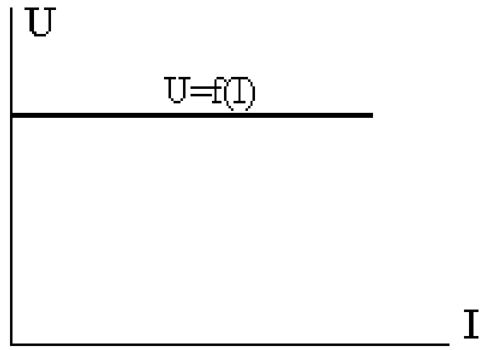

Рис. 5: ВАХ Источника ЭДС

Источник ЭДС может работать в двух режимах – в режиме генератора мощности и в режиме потребителя. В режиме генератора направление тока через источник и ЭДС совпадают, а в режиме потребителя направлены встречно.

- Источник тока

  Идеальным источником тока называется активный элемент с двумя выводами (активный двухполюсник) величина тока, через который не зависит от величины приложенного к выводам напряжения. Графическое изображение источника постоянного тока показано на рис, а изображение источника переменного тока показано на рис. Вольтамперная характеристика (ВАХ) идеального источника тока показана на рис.

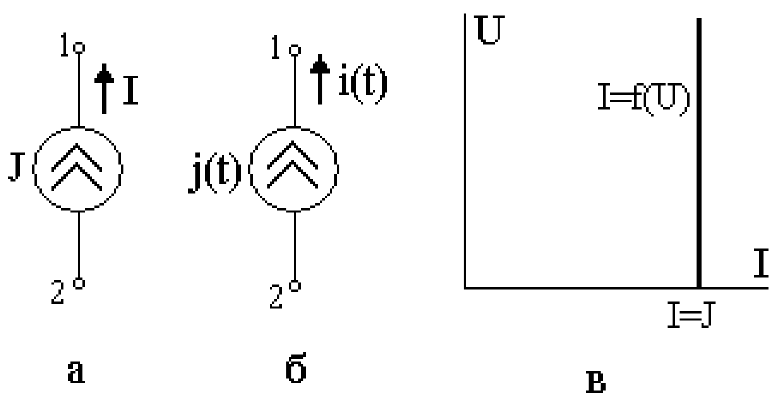

Рис. 6: Источник тока

Такая вольтамперная характеристика возможна только в том случае, если сопротивление внутренней структуры источника равно бесконечности.

На практике идеальных источников не существует. Это объясняется теми же причинами, что и в случае источником ЭДС.

Источник тока в котором учтено внутреннее сопротивление, называется реальным источником тока.

1.3 Согласованный режим работы электрической цепи

Пусть дана цепь с источником ЭДС E, внутреннее сопротивление которого R_{in}, и сопротивлением нагрузки R.

Тогда мощность, выделяющаяся на нагрузке равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_{in})^2} R \tag{6}$$

Определим сопротивление нагрузки, при котором мощность максимальна.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{\left(R + R_{in}\right)^2} - \frac{2\,R\,U^2}{\left(R + R_{in}\right)^3} = 0 \Longrightarrow R = R_{in} \tag{7}$$

$R = R_{in}$ - точка экстремума, и т.к. при $R < R_{in} P' > 0, R > R_{in} P' < 0$, то $R = R_{in}$ - точка максимума.

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_{in}} \tag{8}$$

Такой режим работы называется согласованным, КПД $\eta = \frac{R}{R+R_{in}} = 0.5$

1.4 Анализ цепи с помощью метода узловых потенциалов(контурных токов)

1.4.1 Метод контурных токов

При расчете данным методом полагаю, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток. Т.о. в данном методе за искомые принимаются контурные токи.

Систему уравнений приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

В матричной форме:

$$[R][I] = [E] \tag{9}$$

, где

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix}$$

Уравнение решается методом Крамера:

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \tag{10}$$

1.4.2 Метод узловых потенциалов

метод расчета электрических цепей путём записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также, при необходимости, токи во всех ветвях.

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{11}$$

$$I_i = \frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\phi_i - \phi + E_i}{R_i} + J_i\right) = 0 \tag{13}$$

Составляем систему уравнений для n-1 узлов.

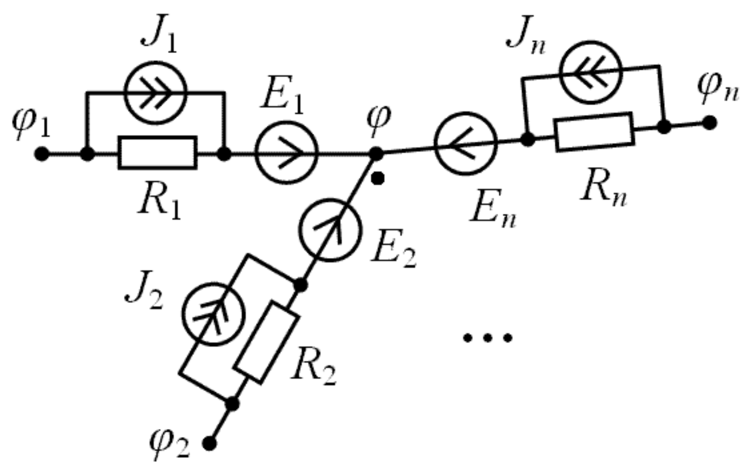

Рис. 7: Схема

1.5 Метод суперпозиции

Метод наложения — метод расчёта электрических цепей, основанный на предположении, что ток в каждой из ветвей электрической цепи при всех включённых генераторах, равен сумме токов в этой же ветви, полученных при включении каждого из генераторов по очереди и отключении остальных генераторов.

Обоснование: Основываясь на МКТ, получив n уравнений,где n = количество независимых контуров, каждый контурный ток I_{kk} можно получить при помощи правила Крамера, т.е.

$$I_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

, где Δ_k - определитель, полученный заменой k-ого столбца на столбец свободных членов. В нашем случае - [E].

Тогда определитель Δ_k равен

$$E_{11}A_{k1} + E_{22}A_{k2} + ... + E_{nn}A_{kn}$$

,где A_{km} - алгебраическое дополнение Δ k-ого столбца и m-ой строки.

Тогда ток I_{kk} может быть представлен в виде

$$I_{kk} = E_{11}\frac{A_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{A_{k2}}{\Delta} + ... + E_{nn}\frac{A_{kn}}{\Delta}$$

Постулируется, что всегда можно составить общее выражение для тока в k-й ветви сложной схемы, причем при составлении используются уравнения МКТ, а контуры выбраны так, чтобы k-ая ветвь входила только в один k-контур. В таком случае $I_k = I_{kk}$ тогда можно записать, что

$$I_k = E_{11}\frac{A_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{A_{k2}}{\Delta} + ... + E_{nn}\frac{A_{kn}}{\Delta}$$

В свою очередь, E_{ii} (контурная ЭДС) можно выразить через сумму ЭДС ветвей $E_1, E_2...E_n$. Сгруппировав коэффициенты при E_i, получаем

$$I_k = E_1g_{k1} + E_2g_{k2} + ... + E_{kn}g_{kn}$$

В частном случае, когда какая-либо ЭДС, например m-ая, входит только в 1 m-контур, $g_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$

При этом генератор тока исключается из схемы путем радикальной дислокации, а генератор напряжения шунтируется.

Метод применим как для цепей постоянного, так и переменного тока.

Неприменим для **нелинейных** цепей.

1.6 Матричное представление метода контурных токов и узловых потенциалов

1.6.1 Топологические понятия и топологические матрицы

Положим, что в схеме имеется y узлов и b ветвей. Каждая пара узлов соединена одной ветвью. Перед составленем матриц схемы графа нумеруют и на них ставят стрелки, указывающие положительные нарпавления для отсчёта тока и напряжения на каждой ветви. Перед нумерацией графа выбирается дерево.

Дерево представляет собой такую совокупность узлов схемы, когда ветви касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Число ветвей дерева, таким образом, равно y-1. Нумерацию ветвей графа начинают с нумерации ветвей дерева(с 1 по y-1). Номера с y по b придают ветвям графа, не вошедшим в выбранное дерево. Их называют **ветвями связи** или **хордами**

- Узловая матрица $[A]$ составляется для n-1 узла графа цепи, в ней столбцы обозначают ветви, а строки - узлы. Элементы: 1,-1,0. Делается следующее:
  - Каждый узел охватывается некоторой поверхностью, след которой можно показать кружком
  - В соответствующую ячейку матрицы ставят знак 1, если стрелка ветви направлена из кружка, -1, если внутрь и 0, если ветвь не затронута кружком.
- Матрицу сечений $[Q]$ составляют для любых сечений графа, а матрицу главных сечений $[Q_{main}]$ - для главных сечений выбранного дерева. След сечения на рисунке показывают овалами, вычерченными тонкими линиями.

  Главными сечениями называют сечения, каждое из которых рассекает несколько ветвей связи и только 1 ветвь выбранного дерева. Главные сечения нумеруют. Делается следующее:
  - В ячейках соответствующей строки матрицы Q_{main} ставят 1 для рассекаемой этим сечением ветви дерева.
  - Если линии связи ориентированы относительно поверхности сечения так же, как и данная ветвь дерева, то ставится знак 1. В противоположном случае — -1, в другом случае 0.
- *Главными контурами* называют контуры, в каждый из которых входит только по 1 ветви связи. Нумеруют главные контуры теми же номерами, какие присвоены ветвям связи в них.

  Матрицей главных контуров $[K_{main}]$ называют матрицу, составленную из чисел 0,1,-1, строки которой соответствуют номеру главного контура, а столбцы - номеру ветви. Делается следующее:
  - Главные контуры при составлении матрицы обходят в направлении **ветви связи** соответствующего контура.
  - Если при таком обходе направление стрелки совпадает с направлением обхода - пишется 1.

1.6.2 Запись уравнений по законам Кирхгофа

- Совокупность уравнений по первому закону Кирхгофа: $[A][I_v] = 0$, где $[I_v]$ - транспонированная матрица-строка токов ветвей.

- Совокупность уравнений по второму закону Кирхгофа: $[K_{main}][U_v] = 0$, где $[U_v]$ - матрица-столбец напряжения ветвей.

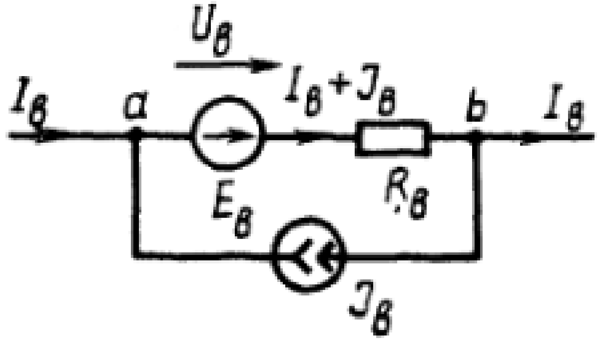

Рис. 8: обобщенная ветвь

Вводится понятие обобщенной ветви, изображенной на рисунке. Уравнение:

$$U + E = R(I + J) \tag{14}$$

или

$$I + J = g(U + E) \tag{15}$$

1.6.3 Для МКТ

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[K][U] + [K][E] = [K][R]([I] + [J]) \tag{16}$$

Из 2-го закона Кирхгофа $[K][U] = 0$
И токи в ветвях могут быть записаны как $[I] = [K]^T[I_{kk}]$
Т.о.

$$[K][E] = [K][R][K]^T[I_{kk}] + [K][R][J] \tag{17}$$

$$[I_{kk}] = ([K][R][K]^T)^{-1}([K][E] - [K][R][J]) \tag{18}$$

1.6.4 Для МУП

Записываем матричное уравнение обобщенных ветвей.

$$[A][I] + [A][J] = [A][g]([U] + [E]) \tag{19}$$

Из 1-го закона Кирхгофа $[A][I] = 0$
И токи в ветвях могут быть записаны как $[U] = [A]^T[\phi_k]$ Т.о.

$$[A][J] = [A][g][A]^T[\phi_k] + [A][g][E] \tag{20}$$

$$[\phi_k] = ([A][g][A]^T)^{-1}([A][J] - [A][g][E]) \tag{21}$$

1.7 Теорема о эквивалентном генераторе

По отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а)эквивалентным генератором напряжения с ЭДС Е , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента и с внутренним сопротивлением R0, равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента; б)эквивалентным генератором тока с J, равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента, и с внутренней проводимостью G0, равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента.

Вычисления:

- Найти напряжение на разомкнутой ветви ab. Т.е. напряжение на бесконечном сопротивлении, подключенному к двухполюснику.
- Определить входное сопротивление двухполюсника при закороченных генераторах ЭДС и вырванных генераторах тока
- Вычислить ток по формуле

$$I = \frac{U_{ab}}{R + R_{in}} \tag{22}$$

R_{in} можно так же вычислить, измеряя ток КЗ, тогда $R_{in} = U_{ab}/I_{kz}$

1.8 Зависимые источники тока и напряжения

Зависимый или управляемый источник напряжения(тока) представляет собой четырех(трех)полюсник, выходное напряжение(ток) которого пропорционально входному напряжению(току), а сам он обладает свойством источника напряжения или источника тока.

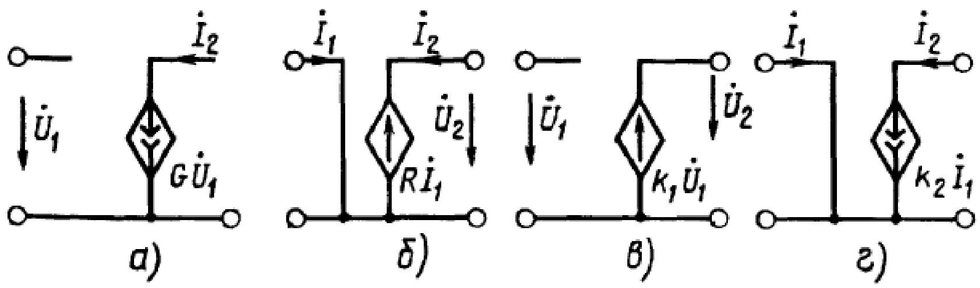

Рис. 9: Зависимые источники

Бывают:

- Управляемые напряжением источники напряжения.

  Тогда входной ток $I_1 = 0$, выходное напряжение пропорционально входному $V_2 = \mu V_1$ Входное сопротивление бесконечно велико, а выходное равно нулю.

- Управляемые напряжением источники тока.

  Тогда входной ток $I_1 = 0$ Выходной ток пропорционален входному напряжению: $I_2 = \mu V_1$, входное и выходное сопротивления бесконечно велики.

- Управляемые током источники напряжения.

  Тогда входное напряжение $V_1 = 0$, выходное наприяжение пропорционально входному току $V_2 = \mu I_1$

- Управляемые током источники тока.

  Тогда входное напряжение $V_1 = 0$, выходной ток пропорционален входному: $I_2 = \mu I_1$

Для всех перечисленных управляемых источников выходная величина не влияет на входную, а входная мощность равна нулю, так как входной ток или входное напряжение равно нулю.

1.9 Эквивалентные преобразования электрических цепей

Эквивалентные преобразования заключаются в замене некоторых участков цепи таким образом, что число выводов исходного участка соответствует числу выводов эквивалентного, и при подаче на соответствующие выводы равных потенциалов, через соответствующие узлы течет равный ток.

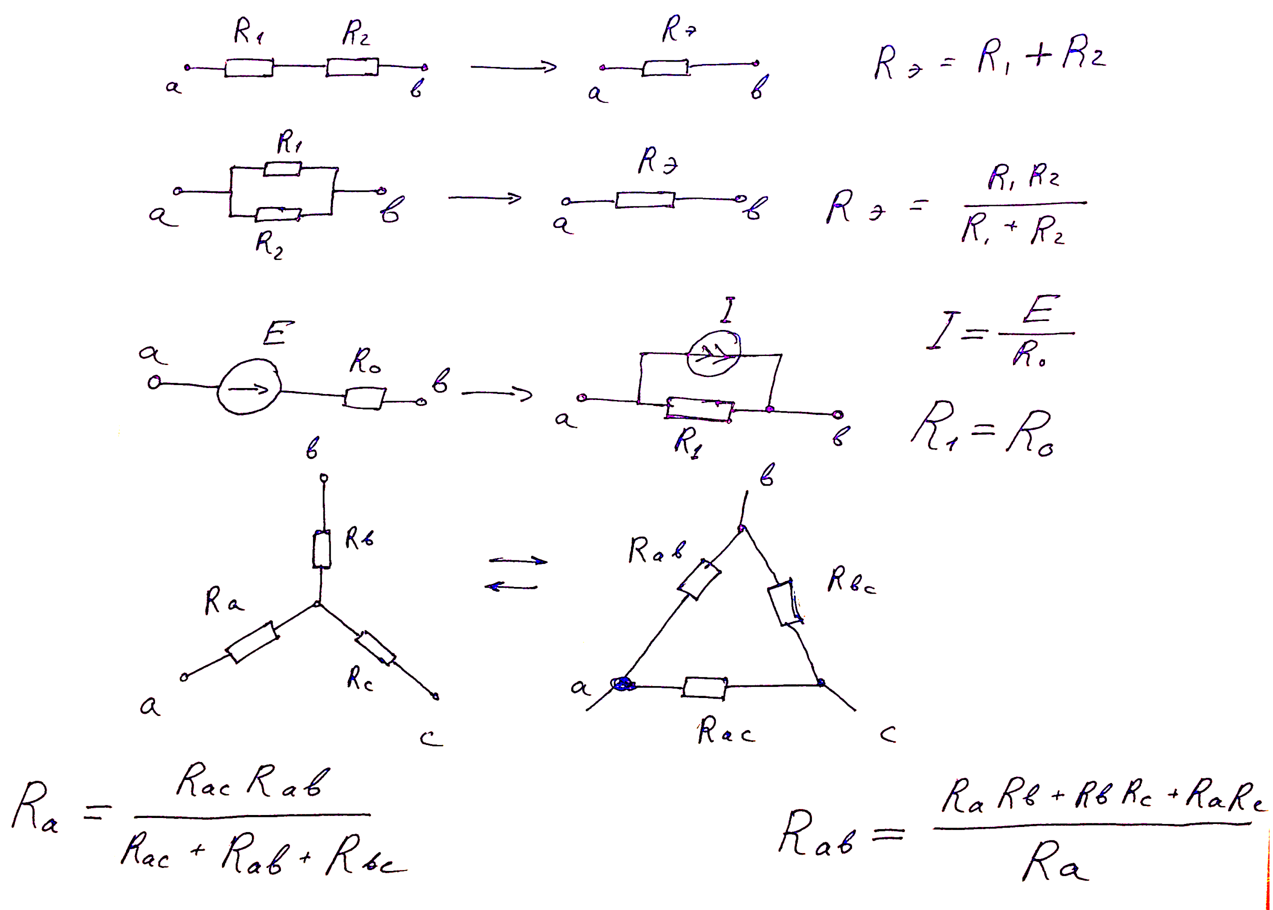

Рис. 10: преобразования

1.10 Нелинейные электрические цепи

Если цепь содержит элементы, ВАХ которых отлична от линейной функции, то такая цепь называется нелинейной.

С линейной частью нелинейной цепи можно осуществлять любые, справедливые для обычных линейных цепей, преобразования.

Статическая характеристика есть

$$R_{stat} = U/I \tag{23}$$

при неизменных U,I;

Дифференциальная характеристика есть

$$R_{dif} = \frac{dU}{dI} \tag{24}$$

Дифференциальная характеристика в общем случае не равна статической.

Для расчета цепей могут применяться методы двух узлов и эквивалентного генератора. Законы Кирхгофа так же справедливы.

2 Модуль 2. Электрические цепи при синусоидальных воздействиях

2.1 Закон Ома для реактивных компонентов электрической цепи

Пусть дана цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора, катушки индуктивности и генератора синусоидального тока.

Тогда из 2-го закона Кирхгофа следует уравнение для мгновенных значений:

$$U_R + U_L + U_C = E \tag{25}$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E \tag{26}$$

Переходим к комплексному представлению

$$\dot{I}_m R + j\omega L\dot{I}_m + \dot{I}_m\frac{-j}{C\omega} = \dot{E}_m \tag{27}$$

$$\dot{I}_m(R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}) = \dot{E}_m \tag{28}$$

Множитель $R + j\omega L - \frac{j}{C\omega}$ называют комплексным сопротивлением.

$$\dot{Z} = ze^{j\phi} = R + j\omega L - \frac{j}{C\omega} \tag{29}$$

$$\dot{Z} = R + jX \tag{30}$$

, где R - активное сопротивления, а X - реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{31}$$

Уравнение (28) является законом Ома для цепи синусоидального тока

2.2 Анализ электрической цепи методом комплексных амплитуд

Синусоидально изменяющийся ток (напряжения) удобно представлять в виде действительной части комплексного числа.

Согласно формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \tag{32}$$

Угол в этой формуле может быть любым. Предположим,что α изменяется по закону $\alpha = \omega t + \phi$

Тогда

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

Принимает вид

$$e^{j\omega t+\phi} = \cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)$$

Это ни что иное, как множитель при амплитудном значении какой-либо величины, изменяющейся во времени. К примеру, если мы возьмём не $e^{j\omega t+\phi}$, а $I_m e^{j\omega t+\phi}$, то поведение функции не изменится, просто ее амплитудное значение изменится.

Пусть имеется сигнал, изменяющийся по закону $i(t) = I_m \cos(\omega t+\phi)$ Можно показать, что

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = Re[I_m e^{\omega t+\phi}] \tag{33}$$

Исторически сложилось, что за основу действительного сигнала обычно берут действительную часть мнимого числа. Но т.к. амплитуды действительного значения сигнала и комплексного его представления совпадают, справедливо ввести величину $I_m e^{\omega t+\phi}$, которую называют *комплексной амплитудой* тока и обозначают $\dot{I}_m$

Метод комплексных амплитуд удобен тем, что можно легко подсчитать амплитудные значения на всех элементах цепи.

Сумма двух токов разной частоты есть геометрическая сумма векторов $\dot{I}_{m1}\&\dot{I}_{m2}$

Амплитуда результирующего тока определяется длинной суммарного вектора а начальная фаза - углом, образованным с действительной осью $+1$.

Дальнейший расчет сводится к расчету для линейных цепей постоянного тока с заменой соответствующих величин на их представление в виде комплексных амплитуд.

- Резистивный элемент Пусть $i = I_m \sin(\omega t+\phi)$ согласно закону Ома, $u = iR = RI_m \sin(\omega t+\phi)$ Комплексная амплитуда тока может быть представлена как

  $$\dot{I}_m = I_m e^{\omega t+\phi}$$

  Комплексная амплитуда напряжения:

  $$\dot{U}_m = R\dot{I}_m = RI_m e^{\omega t+\phi}$$

- Индуктивный элемент Пусть $i = I_m \sin(\omega t)$ Тогда

  $$U_L = -e_L = U_m = -(-L\frac{di}{dt}) = \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

  Тогда

  $$\dot{U}_m = \omega L\dot{I}_m$$

  Сопротивление катушки обозначается $X_L = \omega L$ Видно, что напряжение на катушке опережает ток на $\pi/2$

- Ёмкостный элемент Пусть $u = U_m \sin(\omega t)$ Тогда $q = Cu = CU_m \sin(\omega t)$ Следовательно

  $$i = \frac{dq}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t) = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

  Видно, что напряжение на конденсаторе отстаёт от тока, текущего через него по фазе на $\pi/2$ Емкостное сопротивление обозначается $X_C = \frac{1}{\omega C}$, тогда $I_m = U_m/X_C$, а комплексная амплитуда напряжения

  $$\dot{U}_m = X_C \dot{I}_m$$

- Стоит заметить, что напряжения на конденсаторе и катушке действуют в противофазе.

2.3 Мощность в электрической цепи синусоидального тока. Баланс мощностей.

Мгновенная мощность - произведение мгновенных значений тока и напряжения. $p = ui$ Стоит выделить мгновенную мощность на

- Резистивном элементе

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t)$$

  или

$$p = \frac{U_m I_m}{2}(1 - \cos(2\omega t)$$

- Индуктивном элементе

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

- Емкостном элементе

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

Активная мощность P - среднее значение мгновенной мощности p за период T

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T}\int_0^T uidt \tag{34}$$

Если ток $i = I_m \sin(\omega t)$, а напряжение на участке цепи $u = U_m \sin(\omega t + \phi)$

$$P = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\phi) = UI\cos(\phi) = I^2 R \tag{35}$$

, где U & I - действующие значения напряжения и тока, в $\sqrt{2}$ раз меньшие чем $I_m \& U_m$

Фактически, активная мощность представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты на участке цепи с сопротивлением R. В самом деле, $U\cos(\phi) = IR$, Следовательно

$$P = UI\cos(\phi) = I^2 R$$

Реактивная мощность $Q = UI\sin(\phi)$ - мощность, обусловленная наличием реактивных элементов цепи. Разберемся, что же она из себя представляет.

Возьмём цепочку с последовательно соединенными R, L, C. Запишем выражение для мгновенного значения суммы энергий магнитного и электрического полей цепи:

$$W = W_m + W_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI^2}{2}(1 - \cos(2\omega t)) + \frac{I^2}{2\omega^2 C}(1 + \cos(2\omega t))$$

Видно, что W имеет постоянную и переменную составляющие.

$$W = W_{me0} - w_{me}$$

На создание постоянной составляющей была затрачена энергия в процессе становления данного периодического режима. Получим среднее значение энергии w_{me}, поступающей от источника за интервал времени от $-T/8$ до $+T/8$

$$W_{sred} = \frac{4}{t}\int_{-T/8}^{+T/8} w_{me}dt = ... = \frac{2}{\pi\omega}I^2(X_L - X_C) = \frac{2}{\pi\omega}UI\sin(\phi) = \frac{2}{\pi\omega}Q$$

Таким образом, реактивная мощность Q пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдаётся источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля индуктивной катушки и конденсатора.

За один период переменного тока эта энергия дважды отдаётся генератором в цепь и дважды он получает ее обратно, т.е. **реактивная мощность способствует обмену энергии между генератором и приемником**

Полная мощность $S = UI$. Мощности также связаны зависимостью $S^2 = P^2 + Q^2$ - мощность, которую источник может отдать потребителю, если он представляет собой чисто активное сопротивление.

Баланс мощностей заключается в том, что полая мощность, выделяемая на источнике должна равняться полной мощности, потребляемой цепью.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i^2 Z_i = \sum_{i=1}^{k} I_i U_i e^{j\phi_{kz}} \tag{36}$$

2.4 Входные сигналы (воздействия на цепь) и их математическое описание во временной и частотной областях

Синусоидальный ток - ток, изменяющий свое значение во времени по синусоидальному закону.

$$I = I_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi) \tag{37}$$

Где:

- I_m - амплитуда
- T - период
- ψ - сдвиг по фазе

Синал так же может быть представлен в комплексной форме. см. (§2.2)
На частотной диаграмме такое отображается как вращающийся вектор.

2.5 Преобразование Фурье. Частотный и фазовый спектры.

Любую периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье. Переменная величина x связана со временем t соотношением

$$x = \omega t = 2\pi t/T$$

, где T - период ф-ции во времени. Для такой функции ряд Фурье записывают так:

$$f(x) = A_0 + A_1' \sin(x) + A_2' \sin(2x) + ... + A_1'' \cos(x) + A_2'' \cos(2x) + ...$$

Здесь

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$A_k' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx$$

$$A_k'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx$$

пользуясь формулой сложения, получаем

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \psi_k) \tag{38}$$

Обозначим период функции T, основную частоту $\omega_0 = 2\pi/T$. Тогда ряд Фурье можно записать двумя способами:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k)$$

или

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \sin(k\omega_0 t) + A_k'' \cos(k\omega_0 t)$$

Здесь $A_k' = A_k \cos(\psi_k)$; $A_k'' = A_k \sin(\psi_k)$

Выражения для нахождения коэффициентов:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$A_k \cos(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t)dt$$

$$A_k \sin(\psi_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t)dt$$

Представив sin в комплексной форме по Эйлеру, получаем:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} \tag{39}$$

,где
$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi k} = A_k \cos(\psi_k) + jA_k \sin(\psi_k) = A'_k + jA''_k \tag{40}$$
Тогда
$$\dot{A}_k = \frac{2j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_o t}dt \tag{41}$$
С учетом последней формулы,
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_o t}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_o t}dt \tag{42}$$

Под **интегралом Фурье** понимают тригонометрический ряд, представляющий непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа синусоид, амплитуды которых бесконечно малы, а аргументы соседних синусоид отличаются на бесконечно малые значения.

Формулу для интеграла Фурье получают из формулы для ряда Фурье(см. предыдущую формулу) предельным переходом, а именно $T \to \infty$ При этом на функцию накладывается обязательное условие сходимости $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

Нетрудно заметить,что $A_0 \to 0$

Выполним преобразование интеграла, стоящего под знаком суммы:
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$
С этой целью положим $\omega = k\omega_0$ (ω есть текущая, изменяющаяся частота) В ряде Фурье разность двух смежных частот $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T => 1/T = \Delta\omega/(2\pi)$ Т.к. T велико, можно заменить $\Delta\omega$ на $d\omega$, получаем:
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{43}$$

Функция
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{44}$$

есть спектр амплитуд при непрерывном преобразовании фурье. Называется также **Прямым преобразованием Фурье**

Т.к. функция $S(j\omega)$ комплексная, то выделяют отдельно амплитудный спектр $|S(j\omega)|$ и фазовый спектр $\phi(j\omega) = arg(S(j\omega))$

Тогда обратное преобразование Фурье будет представлять из себя интеграл по спектру.
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{jk\omega_o t}d\omega \tag{45}$$
Последняя формула представляет собой запись **интеграла Фурье**.

2.6 Комплексная передаточная функция электрической цепи.

Комплексная передаточная функция представляет собой отношение некоторого выходного значения, записанного в комплексной форме к некоторому входному значению также записанному в комплексной форме.

Передаточная функция непрерывной системы представляет собой отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях.

Бывают комплексные передаточные функции по:

- **напряжению**

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$$

, где U_{m1}, U_{m2}, U_1, U_2 соответственно комплексные амплитудные и действующие значения напряжения на входе и на выходе.

- **току**

$$H_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

, где I_{m1}, I_{m2}, I_1, I_2 соответственно комплексные амплитудные и действующие значения тока на входе и на выходе.

- **сопротивлению**

$$H_Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m1}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$$

,где I_{m1}, U_{m2}, I_1, U_2 соответственно комплексные амплитудные и действующие значения тока и напряжения на входе и на выходе.

- **проводимости**

$$H_Y(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$$

,где U_{m1}, I_{m2}, U_1, I_2 соответственно комплексные амплитудные и действующие значения напряжения и тока на входе и на выходе.

Комплексные функции определяются на частоте ω сигнала воздействия и зависят только от параметров цепи.

При помощи каждой из этих функций можно получить полную информацию о нужном нам участке цепи. Самая удобная для получения и использования функция **по напряжению** поэтому чаще всего используется именно она.

Т.к. комплексная передаточная функция представляет собой комплексное число, его можно представить в форме

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega)$$

суммы действительной и мнимой части. Модуль $|H(j\omega)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой цепи*, а аргумент $\phi(\omega) = argH(j\omega)$ комплексной передаточной функции называют *фазо-частотной характеристикой цепи*

Нетрудно получить соотношения, связывающие АЧХ и ФЧХ с вещественными и мнимыми частями комплексной передаточной функции $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \arctan(\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)})$$

АЧХ и ФЧХ являются наиболее фундаментальными понятиями теории цепей и широко используются на практике. Требования к АЧХ и ФЧХ различных устройств являются определяющими при проектировании любой аппаратуры связи.

К примеру, для H_U коэффициента передачи по напряжению, АЧХ показывает отношение амптитуд сигнала(выходного к входному), а ФЧХ показывает разность фаз между **входным и выходным** сигналами.

2.7 Особенности поведения резонансных контуров. Влияние сопротивления потерь на его свойства.

2.8 Добротность, полоса пропускания, прочие свойства

2.8.1 Параллельный контур

При параллельном соединении конденсатора и индуктивности.

Резонанс наблюдается в том случае, когда сопротивление контура стремится к бесконечности.

$$\dot{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \tag{46}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{47}$$

Соответственно, при приближении частоты внешнего воздействия к резонансной наблюдается резкое возрастание напряжения в контуре.

И резонанс токов. (т.к. напряжение одинаково)

Крутизна определяется добротностью контура Q.

Добротность определяется как отношение энергии, запасаемых в контуре, к энергии, рассеиваемой на внешней нагрузке.

Пусть есть цепь и в начальный момент времени конденсатор заряжен. Тогда ток через катушку:

$$I_L = \frac{U}{j\omega_0 L} \tag{48}$$

Через внешнюю нагрузку:

$$I_R = \frac{U}{R} \tag{49}$$

Из определения Q:

$$Q = \frac{P_L}{P_R} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{50}$$

Полоса пропускания определяется диапазоном частот, при которых напряжение на контуре $\geq 0,707E$.

Записываем выражение для **амплитуд** токов и напряжений (с квадратами), в полученном выражении делаем замену на добротность, получая выражение относительно относительной расстройки.

И для параллельного и для последовательного колебательных контуров справедлива следующая формула, определяющая границу полосы пропускания(не пропускания)

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{51}$$

2.8.2 Последовательный контур

Образуется при последовательном соединении конденсатора и индуктивности.

Наблюдается резонанс напряжений.

Добротность определяется аналогичным образом и равняется

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{52}$$

Напряжение на контуре при резонансе $U \to 0$.

Полоса не пропускания аналогична параллельному контуру, но $\leq 0,707E$.

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{53}$$

2.9 Фильтры верхней частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Фильтры представляю собой четырехполюсники, устанавливаемые между источником питания и нагрузкой, назначение которых заключается в том, что они пропускают без затухания или с малым затуханием токи одних частот, и не пропускают, или пропускают с большим затуханием токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых без затухания, называется полосой пропускания.

Фильтр верхних частот пропускает только высокие частоты и задерживает низкие.

Простейший электронный фильтр верхних частот состоит из последовательно соединённых конденсатора и резистора.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных катушки и резистора, где напряжение снимается с катушки.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = \frac{i\,\omega\,L}{R + i\,\omega\,L} \tag{54}$$

$$|K| = \sqrt{\frac{\omega^2\,L^2\,R^2}{\left(R^2 + \omega^2\,L^2\right)^2} + \frac{\omega^4\,L^4}{\left(R^2 + \omega^2\,L^2\right)^2}} \tag{55}$$

$$|K| = \frac{|\omega|\;|L|}{\sqrt{R^2 + \omega^2\,L^2}} = \sqrt{(}2) \tag{56}$$

$$\omega = \frac{R}{L} \tag{57}$$

2.10 Фильтры нижних частоты. Связь между параметрами деталей и полосой пропускания

Пропускает низкие чистоты, не пропускает верхние.

Фильтр может быть реализован, например, из последовательно соединенных конденсатора и резистора, где напряжение снимается с конденсатора.

Определим частоту среза.

$$\dot{K} = -\frac{i}{\omega\, C\, \left(R - \frac{i}{\omega\, C}\right)} \tag{58}$$

$$|K| = \sqrt{\frac{R^2}{\omega^2\, C^2\, \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2\, C^2}\right)^2} + \frac{1}{\omega^4\, C^4\, \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2\, C^2}\right)^2}} \tag{59}$$

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\, C^2\, R^2 + 1}} = \sqrt{(}2) \tag{60}$$

$$\omega = \frac{1}{CR} \tag{61}$$

2.11 Четырехполюсники. Способы формирования описания поведения четырехполюсника. Система параметров

Четырехполюсник - обобщенное понятие электрической цепи, рассматриваемой по отношению к четырем ее зажимам.

Бывают активные и пассивные, в зависимости от наличия источников тока или напряжения внутри.

Работа четырехполюсника характеризуется $U_1 U_2 I_1 I_2$;

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде шести систем уравнений. (Все возможные перестановки), например:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = & \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + & Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = & \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + & Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

3 Модуль 3. Переходные процессы в электрических цепях

3.1 Классический метод анализа переходных процессов в электрических цепях. Свободная и вынужденная составляющие решения уранений и их опредления

Приведем задачу о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Из второго закона Кирхгофа:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} + \int_0^t idt = E \tag{62}$$

Определение тока как функции времени будет являться решением данного уравнения.

Решение уравнения проводится разными способами, некоторые из них:

- Классический
- Операторный
- Интеграл Дюамеля
- Метод пространственных состояний

Из курса математического анализа известно, что решением дифференциального уравнения является сумма частного неоднородного решения и общего неоднородного.

Т.е. для уравнения

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E \tag{63}$$

$I = \frac{E}{R}$ - частное решение. Эта составляющая тока называется принужденной. Принужденная составляющая представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующий в цепи ЭДС.

$I = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ - общее однородное решение. Эта составляющая тока называется свободной. Затухает по экспоненциальному закону.

Сумма свободного и вынужденного составляющих определяет действующее значение токов или напряжений.

Решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательных функций Ae^{pt}, таким образом уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде $Ae^{pt} = i_{CB}$. Постоянная А для каждого свободного тока, в общем случае, разная, а параметр p одинаков для свободных токов ветвей.

Тогда составляя систему уравнений для свободных токов можно избавиться от операций дифференцирования и интегрирования заменив их на умножение на p и деление на p соответственно.

Классический метод заключается в поиске свободных токов

$$i = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} \tag{64}$$

Где n - число корней характеристического уравнения. p_i - корни.

Начальные значения токов и все их производные считаются известными (и равными нулю при нулевых начальных условиях).

Тогда дифференцируем уравнение

$$i = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} \tag{65}$$

столько раз, сколько потребуется для составления системы, составляем систему м решаем.

3.2 Характеристическое уравнение.

После алгебраизации системы уравнений (см. 3.1) получаем систему уравнений относительно свободных токов.

Например:

$$\begin{cases} i_{CB1} & - & i_{CB2} & - & i_{CB3} & = 0 \\ (L_1p+R_1)i_{CB1} & + & R_2 i_{CB2} & & & = 0 \\ R_2 i_{CB2} & - & & & \frac{i_{CB3}}{Cp} & = 0 \end{cases}$$

Тогда решение этой системы методом Крамера представляет собой:

$$i_{CB1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{66}$$

$$i_{CB2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{67}$$

$$i_{CB3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{68}$$

Где Δ - определитель матрицы системы

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 = 0$ т.к. в них присутствуют нулевые столбцы. Следовательно:

$$i_{CB1} = \frac{0}{\Delta} \tag{69}$$

$$i_{CB2} = \frac{0}{\Delta} \tag{70}$$

$$i_{CB3} = \frac{0}{\Delta} \tag{71}$$

Из физических соображений ясно, что токи не могут равняться нулю, по этому

$$\Delta = 0 \tag{72}$$

Что и является характеристическим уравнением, из которого определяется p

3.3 Операторная схема схема замещения электрических цепей при нулевых и ненулевых начальных условиях

Сущность операторного метода заключается в том, что функции вещественной переменной t, которую называют оригиналом, ставится в соответствие функция комплексной переменной p, которую называют изображением. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p, а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы.

Центральным принципом решения переходного процесса операторным методом является преборазования обычной электрической схемы к операторной схеме замещения переменной p. Полученную схему рассчитывают любым известным методом (методом узловых потенциалов, контурных токов или эквивалентных преобразований например).

На рисунках ниже приведена схема электрической цепи и её операторная схема замещения соответственно:

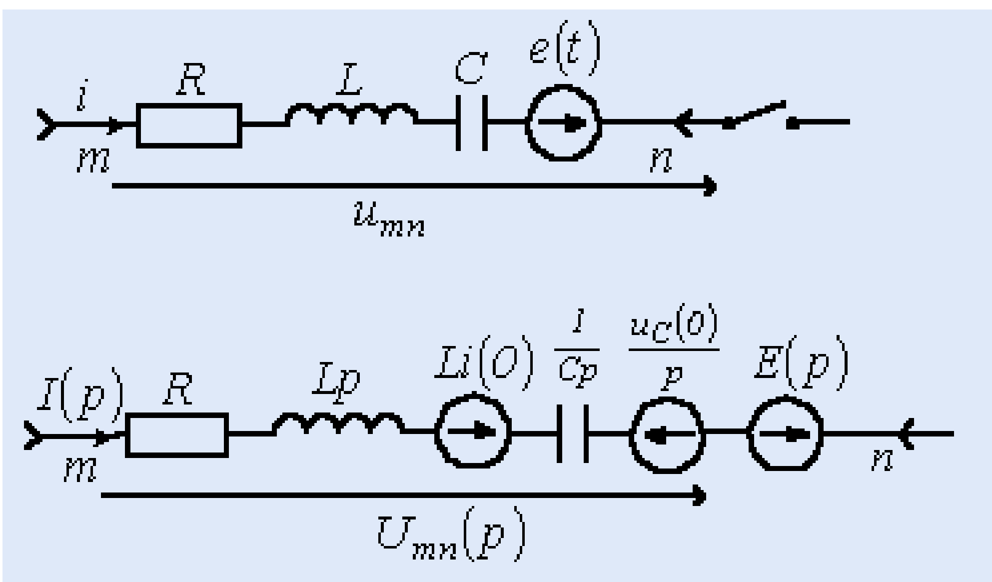

Рис. 11: Замещение

Таким образом правила преобразования основных элементов электрической цепи:

- Активное сопротивление остаётся без изменений
- Конденсатор ёмкостью C заменяется двумя элементами — конденсатором 1/pC и источником ЭДС
- Uc(0)/p, который характеризует начальный заряд на конденсаторе

- Индуктивность L заменяется двумя элементами — Индуктивностью pL и источником ЭДС L·iL(0), который характеризует начальный ток через индуктивность
- Постоянный источник ЭДС или тока J, E заменяются на J/p и E/p соответственно

3.4 Переходная характеристика электрической цепи и ее связь с частотной характеристикой

Переходная характеристика - это реакция системы на входное воздействие в виде функции Хевисайда (единичное ступенчатое воздействие)

Пусть функция Хевисайда - $l(t)$, ее изобрадение $\frac{1}{p}$, а изображение переходной функции - $H(p)$, тогда

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} \tag{73}$$

$$K(p) = pH(p) \tag{74}$$

$$h(t) \risingdotseq \frac{K(p)}{p} \tag{75}$$

, где $K(p)$ - комплексная передаточная функция

3.5 Последовательность анализа цепи операторным методом.

В общем случае порядок расчета переходных процессов операторным методом следующий:

- Выбираются положительные направления токов в ветвях и записываются интегродифференциальные уравнения Кирхгофа для цепи после коммутации.
- С помощью преобразования Лапласа переходим к изображениям слагаемых в составленных уравнениях.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \tag{76}$$

  Записываются те же уравнения для изображений с учетом независимых начальных условий в виде внутренних источников ЭДС.

- Полученные в операторной форме алгебраические уравнения решаются относительно изображения искомой величины.
- На основе полученного изображения находится оригинал искомой функции. В общем случае оригинал можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi - i\infty}^{\phi - i\infty} e^{pt} F(p) dp \tag{77}$$

  Если $F(p)$ представлено в виде $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}$, где $M(p)$ - многочлен степени m, $N(p)$ - многочлен степени n, n>m

  , то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \tag{78}$$

  Где p_k - корни $F_2(p) = 0$.

  Если один из корней $p_k = 0$, то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{pF_3'(p_k)} e^{p_k t} \tag{79}$$

  Где $F_2(p) = pF_3(p)$