СОДЕРЖАНИЕ

1 Электро(статика/динамика), теория поля

1.1 Электростатика

1.1.1 Теорема Гаусса

Поток вектора $\overrightarrow{E}$ через произвольную замкнутую поверхность зависит только от суммы зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

$$\oint_S \overrightarrow{E} d\overrightarrow{S} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Разделим правую и левую часть уравнения (1) на объем V и устремим его к 0.

$$\lim_{V->0} \frac{1}{V} \oint_S \overrightarrow{E} d\overrightarrow{S} = \frac{<p>}{\epsilon_0} \tag{2}$$

Согласно определению, отношение потока через замкнутую поверхность к объему этой поверхности при стремлении объёма к нулю есть дивергенция вектора поля.

$$div\overrightarrow{E} = \lim_{V->0} \frac{1}{V} \oint_S \overrightarrow{E} d\overrightarrow{S} \tag{3}$$

Таким образом:

$$div\overrightarrow{E} = \frac{p}{\epsilon_0} \tag{4}$$

или

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{p}{\epsilon_0} \tag{5}$$

, где p - плотность заряда в точке
$\nabla = \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}$
Уравнение (5) есть запись уравнения Гаусса в дифференциальной форме.

1.1.2 Потенциал

Из механики известно, что любое поле центральных сил я является консервативным, т.е. работа силы при перемещении по замкнутому контуру равняется нулю.

Из этого следует теорема о циркуляции:

Циркуляция вектора $\overrightarrow{E}$ по любому замкнутому контуру равняется нулю.

$$\oint \overrightarrow{E} d\bar{l} = 0 \tag{6}$$

Поле, обладающее данным свойством, называют потенциальным. Любое электростатическое поле является потенциальным.

Потенциал - это величина, численно равная энергии частицы с единичным положительным зарядом в данной точке поля.

$$\int_1^2 \overrightarrow{E} d\bar{l} = \phi_1 - \phi_2 \tag{7}$$

Пусть проекция приращение расстояние dl на ось X есть $\bar{i}dx$. Тогда

$$E_xW = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

отсюда:

$$\overline{E} = -\nabla \phi \tag{8}$$

1.1.3 Диполь

Диполь - система одинаковых по модулю, разноименных точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Предполагается, что расстояние между зарядами много меньше, чем до некоторых, интересующих нас точек.

Поле диполя обладает осевой симметрией.

Потенциал поля:

$$\phi = \frac{ql\cos(\gamma)}{4\pi\epsilon_o r^2} \tag{9}$$

Где γ - угол между осью диполя и прямой, соединяющей точки и геометрический центр диполя.

$$p = ql$$

- электрический момент диполя.

Модуль напряженности поля, создаваемого диполем можно определить по формуле:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\gamma^2} \tag{10}$$

Где

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$E_\gamma = -\frac{\partial \phi}{r\partial \gamma}$$

Сила, действующая на заряд диполя равняется разности напряженности поля в точке положительного и отрицательного зарядов. Таким образом, так как расстояние между зарядами мало, то

$$\overline{F} = ql\frac{\partial \overline{E}}{\partial l} = p\frac{\partial \overline{E}}{\partial l} \tag{11}$$

Где $\frac{\partial \overline{E}}{\partial l}$ - производная по направлению l.

Момент сил, действующих на диполь:

$$M = [\overline{p}, \overline{E}] \tag{12}$$

Энергия диполя:

$$W = -\overline{p}\overline{E} \tag{13}$$

1.2 Поле в веществе

1.2.1 Поле в проводнике

Т.к. в проводнике присутствуют свободные заряды, то при наличии в проводнике электрического поля, заряды выстраиваются таким образом, чтобы компенсировать данное поле. Следовательно, электрическое поле в проводнике отсутствует.

Поле у поверхности проводника может быть определено с помощью теоремы Гаусса. Рассмотрим цилиндр, перпендикулярный поверхности и пересекающий ее. Тогда поток $\overline{E}$ через поверхность цилиндра будет определяться только потоком через его основание, не лежащее в проводнике. Т.о.

$$\Delta S E = \frac{\Delta S \sigma}{\epsilon_o} \tag{14}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{15}$$

1.2.2 Конденсаторы, электроемкость

Электроемкостью уединенного проводника называют отношение заряда проводника к потенциалу, создаваемому проводником. При условии, что потенциал на бесконечности равен нулю.

$$C = \frac{q}{\phi} \tag{16}$$

Конденсатор.

Конденсатор - система тел, емкость которых значительно больше, чем емкость уединенных проводников.

Простейший конденсатор состоит из двух металлических пластин, находящихся на близком расстоянии друг от друга.

Емкость конденсатора понимается как отношение заряда положительно обкладки к разности потенциала между обкладками.

Например, емкость плоского конденсатора

$$= \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

1.2.3 поле в диэлектрике

Поле в диэлектрике является суперпозицией сторонних и связанных зарядов.

Поляризованность диэлектрика есть усредненный по объему электрический момент диэлектрика. Т.е. сумма моментов диполей в данном объеме, отнесенная к этому объему.

Для обширного класса диэлектриков, поляризованность линейно зависит от напряженности:

$$\overline{P} = \chi \epsilon_0 \overline{E} \tag{17}$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость

Теорема Гаусса для вектора $\overline{P}$.

$$\oint_s \overline{P} d\overline{S} = -q'_{inner} \tag{18}$$

Поток вектора поляризованности через замкнутую поверхность равен связанному избыточному заряду диэлектрика, взятого с обратным знаком.

В дифференциальной форме:

$$\nabla \cdot \overline{P} = -p' \tag{19}$$

Далее, только формулы, ибо не успеваю.

$$\oint_s (\epsilon_0 \overline{E}) = (q + q')_{inner} \tag{20}$$

$$\oint_s (\epsilon_0 \overline{E} + \overline{P}) = q_{inner} \tag{21}$$

$$\overline{D} = \epsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = p \tag{23}$$

$$\overline{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \overline{E} \tag{24}$$

$$\overline{D} = \epsilon \epsilon_0 \overline{E} \tag{25}$$

Граничные условия для векторов E и D определяются из рассмотрения теоремы о циркуляции и теоремы Гаусса для данных векторов соответственно.

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \phi_i \tag{26}$$

Где ϕ - потенциал в точке и-того заряда, создаваемого всеми остальными зарядами

$$W = \frac{q\phi}{2} \tag{27}$$

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} \tag{28}$$

$$w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\overline{ED}}{2} \tag{29}$$

1.3 Ток, магнитное поле

Принцип непрерывности.

$$\oint_S \overline{j} d\overline{S} = -\frac{dq}{dt} \tag{30}$$

Сила Лоренца

$$\overline{F} = q\overline{E} + q[\overline{vB}] \tag{31}$$

$$\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\overline{v,r}]}{r^3} \tag{32}$$

Закон Био-Савара

$$d\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[\overline{dl,r}]}{r^3} \tag{33}$$

Поле бесконечного проводника:

$$\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b} \tag{34}$$

Теорема Гаусса для B

$$\oint_s \overline{B}d\overline{S} = 0 \tag{35}$$

Теорема о циркуляции

$$\oint_l \overline{B}d\bar{l} = \mu_0 I \tag{36}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{I} \tag{37}$$

Закон ампера

$$d\overrightarrow{F} = I[d\overrightarrow{l}, \overrightarrow{B}] \tag{38}$$

$$\oint \overrightarrow{J} d\overrightarrow{l} = I' \tag{39}$$

$$\oint \overrightarrow{B} d\overrightarrow{l} = \mu_0(I + I') \tag{40}$$

$$\oint (\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{J}) d\overrightarrow{l} = I \tag{41}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{J} \tag{42}$$

$$\oint \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = I \tag{43}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu\mu_0\overrightarrow{H} \tag{44}$$

1.4 Индукция

1.5 Максвелл

$$\overrightarrow{j_{full}} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{45}$$

$$\oint \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \int (\overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}) d\overrightarrow{S} \tag{46}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{47}$$

Уравнения Максвелла.

$$\oint \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l} = -\oint \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} d\overrightarrow{S} \tag{48}$$

$$\oint \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \int (\overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}) d\overrightarrow{S} \tag{49}$$

$$\oint \overrightarrow{D} d\overrightarrow{S} = \int p dV \tag{50}$$

$$\oint \overrightarrow{B} d\overrightarrow{S} = 0 \tag{51}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{52}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{53}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = p \tag{54}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{55}$$

Материальные уравнения

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \overrightarrow{E} \tag{56}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu \mu_0 \overrightarrow{H} \tag{57}$$

$$\overrightarrow{j} = \sigma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{E}^*) \tag{58}$$

Теорема Пойнтинга:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \overrightarrow{S} d\overrightarrow{A} + P \tag{59}$$

Где S - плотность потока энергии A - элемент поверхности P - работа поля над зарядом

$$\overrightarrow{S} = [\overrightarrow{E}\overrightarrow{H}] \tag{60}$$

Импульс появляется вследствие воздействия магнитного поля волны на ток в проводнике, индуцируемый электрическим полем волны.

$$\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E} \tag{61}$$

$$\overrightarrow{F} = [\overrightarrow{j}\overrightarrow{B}] = \sigma[\overrightarrow{E}\overrightarrow{B}] \tag{62}$$

Плотность импульса

$$\overrightarrow{G} = \frac{\overrightarrow{S}}{c^2} \tag{63}$$

1.5.1 Волновое уравнение

Выводится из уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$\nabla^2\overrightarrow{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{64}$$

$$\nabla^2\overrightarrow{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{H}}{\partial t^2} \tag{65}$$

Для плоской волны выполняется условие

$$\frac{\partial\overrightarrow{E_y}}{\partial x} = -\mu\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial t} \tag{66}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{H_z}}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E_y}}{\partial t} \tag{67}$$

Если обозначить

$$E_y = E_y(t - x/v) \tag{68}$$

$$H_z = H_z(t - x/v) \tag{69}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z \tag{70}$$