№1 Рассм. 2 случая:

I случай: Если B конечно, то $A \setminus B$ от A на конечное число эл-ов.

$A \setminus B$ бесконечно $\Rightarrow$ A тоже бесконечно, т.к. удаление конечного числа эл-ов из бесконечного мн-ва сохраняет его бесконечность, а любое бесконечное мн-во привести в биективное соотв. с его подмн-ом, полученным удалением конечного числа эл-ов $\Rightarrow A \setminus B \sim A$

II случай: Если B счетно, то $A \setminus B$ отличается от A на счетное число эл-ов. Т.к. $A \setminus B$ бесконечно, то A тоже бесконечно, т.к. объединение счётного мн-ва с бесконечным мн-ом даёт бесконечное мн-во, а $\forall$ бесконечное мн-во можно привести в биективное соотв. с его подмн-ом, полученным удалением счетного числа эл-ов $\Rightarrow A \setminus B \sim A$

№2 Предположим, что год не високосный и в году 365 дней. Если n будет больше 365, то по принципу Дирихле хотя бы у двух человек ДР совпадут $\Rightarrow$ наименьшее n, гарантирующее совпадение ДР, равно $n=366$

№3 Пусть N_k - число, состоящее из k единиц. Рассм. первые 2022 таких чисел, разделим каждое из них на 2021 и рассм остатки от деления. Всего возможно 2021 остаток (от 0 до 2020). По принципу Дирихле хотя бы два числа дадут одинаковый остаток. Пусть N_i и N_j $(i>j)$ - два числа, дающие одинаковый остаток при делении на 2021, тогда их разность делится на 2021. Число N_i состоит из i единиц, а N_j - из j единиц. Их разность можно записать как

$$N_i - N_j = \underbrace{11\ldots1}_{i\text{ единиц}} - \underbrace{1\ldots1}_{j\text{ единиц}} = \underbrace{11\ldots1}_{i-j\text{ единиц}} \cdot 10^j = N_{i-j} \cdot 10^j$$

Т.к. 10 и 2021 взаимнопросты, N_{i-j} делится на 2021 ⇒ существует такое число, ч.т.д.

№4 $1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \Rightarrow \text{число делителей} - (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$$

$$\Rightarrow (3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

№5 Каждая монета может быть положена в один из 3х карманов: $3^7 = 2187$

Made with Goodnotes

№7 Робот должен сделать m шагов вправо и n шагов вверх, т.е. $m+n$ шагов. Количество различных путей равно числу способов выбрать m шагов вправо из $m+n$ шагов: C_{m+n}^{m}

№8 Рассм произведение $A = a(a+1)\ldots(a+n-1)$

Заметим, что A равно числу способов выбрать n эл-ов из $a+n-1$ эл-ов с учетом порядка, т.е.: $A = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$

Это выражение можно записать через биномиальный коэфф.:

$A = C_{a+n-1}^{n} \cdot n!$. Т.к. C_{a+n-1}^{n} всегда целое число, то A кратно $n!$

№9 Для каждого эл-та $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ есть 4 варианта:

1). $i \notin C$

2). $i \in C$, но $i \notin B$

3). $i \in B$, но $i \notin A$

4). $i \in A$

Т.к. выбор для $\forall$ эл-та независим, то общее кол-во троек (A, B, C) равно 4^n

№6 $\alpha = cbcad$, а латинский ал-т состоит из 26 букв

Перед α кол-во слов длины

1. $|\underline{26}^1| = 26^1 = 26$

2. $|\underline{26}^2| = 26^2$

3. $|\underline{26}^3| = 26^3$

4. $|\underline{26}^4| = 26^4$

5. если 1 буква a или b : $2 \cdot 26^4$

   если первая c, а вторая не b : 26^3

   если первая c, вторая b, третья не c : $2 \cdot 26^2$

   если первая c, вторая b, третья c, четвертая a : 3

Перед α было $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 2 \cdot 26^4 + 26^3 + 2 \cdot 26^2 + 3 =$

$= 3 \cdot 26^4 + 2 \cdot 26^3 + 3 \cdot 26^2 + 26 + 3$ слов