№7 Кол-во непростых чисел с 2020 из 2020:

$$|2020| - \varphi(2020) = 2020 - \varphi(2020) = 2020 - \varphi(4)\cdot\varphi(5)\cdot\varphi(101) =$$

$$= 2020 - 2\cdot 4\cdot 100 = 2020 - 800 = 1220$$

№3 Яблоки (6): $C_{6+4-1}^{4-1} = C_9^3 = 84$

Груши (3): $C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = 20$

Сливы (2): $C_{2+4-1}^{4-1} = C_5^3 = 10$

Ответ: $84\cdot 20\cdot 10 = 16800$

№4 Ищем решение уравнения: $2a+7b+9c=57$, $a+b+c=20$

$a = 20-b-c$

$$2(20-b-c)+7b+9c=57$$

$$40-2b-2c+7b+9c=57$$

$$5b+7c=17 \Rightarrow b=2,\ c=1,\ a=17$$

Коэффициент: $\frac{20!}{17!\cdot 2!\cdot 1!} = 3420$

№5 Общее число способов: 3^7

Вычтем случаи, когда хотя бы один карман пуст:

$$C_3^1\cdot 2^7 - C_3^2\cdot 1^7 = 3\cdot 128 - 3 = 381$$

Ответ: $3^7 - 381 = 2187 - 381 = 1806$

№2 Будет по 3 чётных и нечетных чисел.

Чётные: выберем для них 3 места: C_6^3 вариантов. Расставим 5 цифр: $C_6^3 \cdot 5^6$. Нужно убрать числа, начинающиеся с 0. Тогда выберем 2 места для четных цифр и расставим все цифры: $C_5^2 \cdot 5^5$

Итог: $C_6^3 \cdot 5^6 - C_5^2 \cdot 5^5 = 5^5\left(\frac{5\cdot\cancel{2\cdot3}\cdot5\cdot4\cdot\cancel{6}}{\cancel{2\cdot3}\cdot\cancel{2\cdot3}} - \frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot5}{\cancel{2\cdot2\cdot3}}\right) = 5^5(100-10) = 5^5\cdot 90 =$

$= 281250$

№6 Выберем 4 книги из 10, которые останутся на местах: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$

Для остальных 6 книг найдем количество перестановок без неподвижных точек по формуле: $D(6) = 6!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 720\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) = 265$

Итог: $210 \cdot 265 = 55650$

№7 Пусть $f(x)$ всюду дифф и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Д-ть $\exists$ т. ξ, $f'(\xi)=0$

1. Если $f(x)$ постоянна, то $f'(x) = 0$ $\forall$ x и утв тривиально
2. Предполож. $f(x)$ не пост. $\exists$ c, $f(c)\neq 0$

   Если $f(c) > 0 \Rightarrow$ по т. Бол.-Коши и (т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$) $\exists d > c$, $f(d) = \frac{f(c)}{2}$

   По т. Ролля на $[c;d]$ $\exists\, \xi \in (c,d)$, $f'(\xi) = 0$

   Аналог. для $f(c) = 0$

№1

а). $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1) C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$

Т.к. это разложение, то $(1+(-1))^n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1^{n-k}(-1)^k \cdot C_n^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0^n = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

б). $\sum_{2|k} C_n^k = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{[n/2]}$

Из (а). $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$, то $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{2|k} C_n^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

в) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k - C_{n+1}^0 \right) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

№8 Если выбираем одну цифру: $C_7^1 \cdot C_9^1$. Если выбираем две: $C_7^2 \cdot C_9^2$

И так далее до $C_7^7 \cdot C_9^7$: $C_7^1 \cdot C_9^1 + C_7^2 \cdot C_9^2 + C_7^3 \cdot C_9^3 + C_7^4 \cdot C_9^4 + C_7^5 \cdot C_9^5 +$

$$+ C_7^6 \cdot C_9^6 + C_7^7 \cdot C_9^7 = \frac{7!}{6!} \cdot \frac{9!}{8!} + \frac{7! \cdot 9!}{2 \cdot 5! \cdot 2 \cdot 7!} + \frac{7! \cdot 9!}{3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6!} + \frac{7! \cdot 9!}{4! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} + \frac{7! \cdot 9!}{5! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 4!} + \frac{7! \cdot 9!}{6! \cdot 6! \cdot 3!} + \frac{7! \cdot 9!}{7! \cdot 7! \cdot 2!} =$$

$$= 7 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9 + 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 35 \cdot 18 \cdot 7 + 21 \cdot 42 \cdot 3 + 49 \cdot 12 + 4 \cdot 9 = 11439$$