



自动化学报

Acta Automatica Sinica

ISSN 0254-4156, CN 11-2109/TP

《自动化学报》网络首发论文

题目: 松弛图嵌入的判别宽度学习系统以及在视觉识别中的应用
作者: 金军委, 常少凯, 耿彪, 李艳婷, 赵孟, 王震, 陈俊龙, 李鹏
DOI: 10.16383/j.aas.c240734
收稿日期: 2024-11-13
网络首发日期: 2025-05-09
引用格式: 金军委, 常少凯, 耿彪, 李艳婷, 赵孟, 王震, 陈俊龙, 李鹏. 松弛图嵌入的判别宽度学习系统以及在视觉识别中的应用[J/OL]. 自动化学报. <https://doi.org/10.16383/j.aas.c240734>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

松弛图嵌入的判别宽度学习系统以及在视觉识别中的应用

金军委¹ 常少凯¹ 耿彪¹ 李艳婷² 赵孟¹ 王震³ 陈俊龙⁴ 李鹏⁵

摘要 宽度学习系统作为一种轻量级网络,在效率和准确性之间实现良好的平衡。然而,宽度学习系统主要依赖严苛的二元标签进行监督并且在数据变换过程中忽视局部结构信息,这些问题限制了模型的性能。为解决此问题,提出一种松弛图嵌入的判别宽度学习系统模型并将其应用于视觉识别,旨在通过松弛图结构与柔性标签的引入提升模型性能。创新性如下:1) 创新地使用双变换矩阵构建松弛图,将变换矩阵的责任分离,减少变换矩阵的负担,从而学习更加灵活的变换矩阵,解决模型过拟合问题;2) 引入柔性标签策略,扩大不同类别标签之间的距离,解决严苛二元标签的问题,提高模型的判别能力;3) 提出一种基于交替方向乘子法的迭代优化算法,实现模型的高效优化。在人脸图像数据集、物体图像数据集、场景图像数据集以及手写体图像数据集上的大量实验证明提出的模型与其他先进的识别算法相比具有优势。

关键词 宽度学习系统, 松弛图, 柔性标签, 视觉识别

引用格式 金军委, 常少凯, 耿彪, 李艳婷, 赵孟, 王震, 陈俊龙, 李鹏. 松弛图嵌入的判别宽度学习系统以及在视觉识别中的应用. 自动化学报

DOI 10.16383/j.aas.c240734

CSTR 32138.14.j.aas.c240734

Relaxed-graph Embedding Discriminative Broad Learning System and Its Application in Visual Recognition

JIN Jun-Wei¹ CHANG Shao-Kai¹ GENG Biao¹ LI Yan-Ting²
ZHAO Meng¹ WANG Zhen³ CHEN C. L. Philip⁴ LI Peng⁵

Abstract The broad learning system, as a lightweight network, achieves a good balance between efficiency and accuracy. However, it primarily relies on strict binary labels for supervision and neglects local structural information during data transformation, limiting the model's performance. To address this issue, this paper proposes a relaxed-graph embedding discriminative broad learning system model and applies it to visual recognition, with the goal of enhancing model performance through the introduction of flexible labels and a relaxed-graph structure. The innovations of this paper are as follows: 1) We innovatively use double transformation matrices to construct the relaxed-graph, separating the responsibilities of the transformation matrix. This reduces the burden on the transformation matrix and allows for the learning of more flexible transformation matrix, thereby mitigating the overfitting problem; 2) We introduce a flexible label strategy that increases the distance between different categories labels, addressing the issue of strict binary labels, and thereby enhancing the model's discriminative ability; 3) An iterative optimization algorithm based on the alternating direction method of multipliers is proposed to achieve efficient model optimization. Extensive experiments on facial image datasets, object image datasets, scene image datasets, and handwritten character image datasets demonstrate that the proposed model outperforms other advanced recognition algorithms.

Key words Broad learning system, relaxed-graph, flexible label, visual recognition

Citation Jin Jun-Wei, Chang Shao-Kai, Geng Biao, Li Yan-Ting, Zhao Meng, Wang Zhen, Chen C. L. Philip, Li Peng. Relaxed-graph embedding discriminative broad learning system and its application in visual recognition. *Acta Automatica Sinica*

收稿日期 2024-11-13 录用日期 2025-04-10

Manuscript received November 13, 2024; accepted April 10, 2025

国家自然科学基金 (62106068, 62106233, 62073123, 62375078, U1813203), 河南省科技攻关项目 (222102210058, 232102210062, 232102210007) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62106068, 62106233, 62073123, 62375078, U1813203), and Science and Technology Research Project of Henan Province (222102210058, 232102210062, 232102210007)

本文责任编辑 赫然

Recommended by Associate Editor HE Ran

1. 河南工业大学人工智能与大数据学院 郑州 450001 2. 郑州

轻工业大学计算机科学与技术学院 郑州 450001 3. 西北工业大学网络空间安全学院 西安 710072 4. 华南理工大学计算机科学与工程学院 广州 510641 5. 河南工业大学复杂性科学研究院 郑州 450001

1. School of Artificial Intelligence and Big Data, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001 2. School of Computer Science and Technology, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450001 3. School of Cybersecurity, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 4. School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641 5. Institute for Complexity Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001

随着人工智能领域的快速发展, 基于神经网络的方法被大量开发并用于处理分类识别任务, 涵盖从人脸识别^[1]、动作识别^[2]、医学图像分析^[3]到遥感图像分类^[4]等各种实际应用. 深度神经网络因其能够拟合复杂函数的特点, 被广泛应用于提取图像、语音、文本等数据的抽象特征^[5], 且提取的特征比人为设定的特征具有更强的泛化性能. 然而, 深度神经网络涉及大量的超参数, 导致难以从理论上进行分析. 此外, 这些超参数通常通过梯度下降进行优化, 导致训练时间过长等问题.

近年来, Chen 等^[6]提出一种新型的随机神经网络结构—宽度学习系统 (Broad learning system, BLS), 因其随机化和扁平化的结构避免耗时的参数训练过程, 在分类准确性与计算效率^[7]之间实现良好的平衡, 在人工智能领域引起极大的关注. 标准 BLS 的整体架构如图 1 所示, 输入数据首先通过映射产生一系列的随机特征, 随后将这些随机特征传播到增强特征. 最后, 将这两种类型特征结合为宽度转换特征并连接到标签空间, 其中连接所需权重可以通过解析求解岭回归得到. 此外, BLS 的通用逼近能力也得到证明^[8]. BLS 简洁的网络架构和计算吸引力, 吸引了众多学者的进一步研究. 例如, 赵慧敏等^[9]提出基于流形正则化框架和最大均值差异的域自适应 BLS 模型, 用于跨域图像分类. Duan 等^[10]研究新型级联模糊 BLS 算法, 通过将多个模糊 BLS 块组合或级联在一起, 解决传统 BLS 性能饱和的问题^[11]. Liu 等^[12]提出一种基于模态回归的 BLS 模型, 用于处理受噪声和异常值影响的回归和分类任务. Shi 等^[13]提出一种用于旋转机械故障的半监督类增量宽度网络, 应对工业数据不断增长和标签样本不足的挑战^[14]. Jin 等^[15]基于标准 BLS 进一步设计最大似然鲁棒宽度学习. 在大多数情况下, BLS 及其变

体能够在识别任务中取得良好效果. 然而, 在复杂情境下, 这些方法依赖于严苛的二元标签向量, 限制模型的灵活性^[16]. 同时, 二元标签将不同类别之间的距离固定为 $\sqrt{2}$, 导致难以有效区分样本, 进而影响模型的泛化能力^[17]. 为解决严苛二元标签的限制, Xiang 等^[18]提出一种拖拽技术强制将不同类别的标签朝相反方向移动, 以此来扩大不同类别标签之间的距离. 基于这种思想, Jin 等^[19]进一步发展出柔性标签策略并引入到 BLS 中, 提出基于标签拖拽的流形宽度学习系统 (Label dragging-based manifold broad learning system, LDMBLS) 并将其应用于多类图像识别, 该模型通过引入柔性标签策略以及构建类紧致图进一步提升模型效果.

虽然 LDMBLS 通过构建类紧致图捕获数据的局部结构, 但图构建时使用的变换矩阵仍需负责将样本映射至标签空间, 这样学习到的变换矩阵过于严苛. 因为变换矩阵 \mathbf{W} 不仅负责将宽度特征转换到柔性标签空间中, 而且还要负责保持数据的局部结构. 由于要兼顾这两方面, 变换矩阵 \mathbf{W} 的自由度不可避免地受到限制, 难以学习到更加具有灵活性与判别性的变换矩阵, 从而无法完美解决过拟合问题, 影响模型的泛化能力. 为解决这一问题, 本文通过引入新变换矩阵, 分担 \mathbf{W} 保留数据局部结构的责任, 使用双变换矩阵构建松弛图, 给予 \mathbf{W} 更多的自由度, 从而学习到更具判别性的变换矩阵. 本文的核心贡献如下:

- 1) 引入双变换矩阵完美分离映射样本至标签空间以及保持数据流形结构这两方面责任, 并且引入柔性标签策略, 尽可能地扩大不同类别标签之间的距离, 增强模型的判别能力;
- 2) 通过结构一致性约束项以及双变换矩阵构建松弛图嵌入, 使得在增强 \mathbf{W} 的判别能力的同时

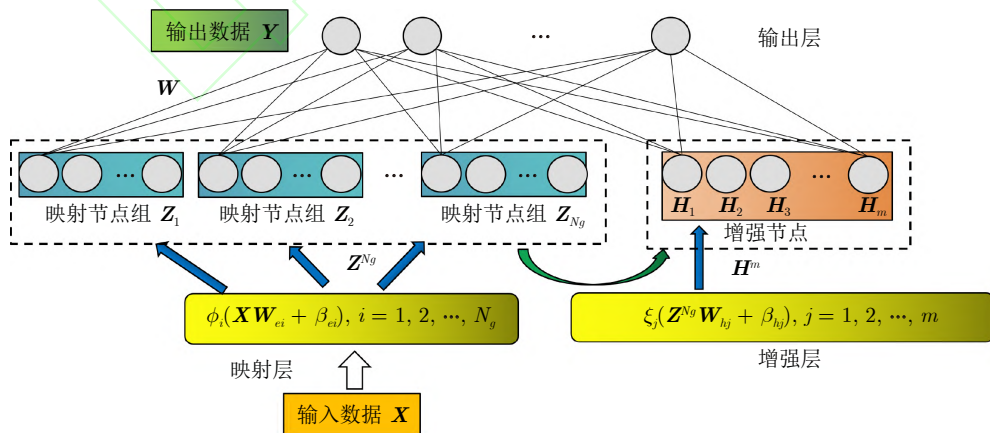


图 1 标准宽度学习系统网络架构

Fig.1 The network structure of the standard broad learning system

提升 \mathbf{W} 的灵活性, 解决模型的过拟合问题;

3) 提出一种用于求解所提模型的优化算法, 并对其进行全面的理论分析, 在多种数据集上与众多先进方法进行大量的对比实验, 验证提出方法的优越性.

1 相关背景知识

1.1 标准 BLS

给定训练数据 $\{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{N \times d_x}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{N \times C}\}$, N 表示训练数据的样本数, d_x 表示训练数据的特征维度, C 表示训练数据的类别数. 随机生成权重 \mathbf{W}_{e_i} 和偏置 β_{e_i} , 通过线性变换函数 $\phi(\cdot)$ 映射生成 N_g 组特征映射节点, 每组包含 N_f 个节点, 其中第 i 组特征映射节点可以表示为:

$$\mathbf{Z}_i = \phi_i(\mathbf{X}\mathbf{W}_{e_i} + \beta_{e_i}), \quad i = 1, 2, \dots, N_g \quad (1)$$

将所有这些节点组合起来得到 BLS 的随机映射特征:

$$\mathbf{Z}^{N_g} := [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_{N_g}] \in \mathbf{R}^{N \times (N_g \times N_f)} \quad (2)$$

在得到随机映射特征 \mathbf{Z}^{N_g} 后, 将其映射到增强层生成 m 个增强节点, 第 j 组增强节点可以表示为:

$$\mathbf{H}_j = \xi_j(\mathbf{Z}^{N_g}\mathbf{W}_{h_j} + \beta_{h_j}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

其中, $\xi(\cdot)$ 表示非线性激活函数; 权重矩阵 \mathbf{W}_{h_j} 和偏差 β_{h_j} 仍然是随机生成的. 将这些增强节点组合得到 BLS 的增强特征:

$$\mathbf{H}^m := [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_m] \in \mathbf{R}^{N \times m} \quad (4)$$

其中, m 表示增强特征的维度.

进一步, 组合获得的随机映射特征 \mathbf{Z}^{N_g} 和增强特征 \mathbf{H}^m , 可以得到宽度转换特征如下:

$$\mathbf{A} := [\mathbf{Z}^{N_g}, \mathbf{H}^m] \in \mathbf{R}^{N \times (N_g \times N_f + m)} \quad (5)$$

上面得到的宽度转换特征 \mathbf{A} 可以通过权重矩阵 \mathbf{W} 连接到标签矩阵 \mathbf{Y} . 那么, 接下来的关键问题就是如何学习到一个具有判别性的权重矩阵 \mathbf{W} . 与之前随机获得的权重不同, 这里的 \mathbf{W} 可以通过优化最小二乘问题获得:

$$\min_{\mathbf{W}} \|\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{Y}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{W}\|_F^2 \quad (6)$$

其中, 第一项用于测量预测标签与真实标签之间的误差; 第二项用于平滑 \mathbf{W} 的分布以避免过拟合; λ 是一个正则化参数, 用来平衡这两项的重要性. 上述函数被称为标准 BLS 的目标函数, 将其对 \mathbf{W} 的导数设为 $\mathbf{0}$ 即可求解, 得到权重矩阵 \mathbf{W} 的解析解为:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (7)$$

其中, \mathbf{I} 表示单位矩阵.

1.2 LDMBLS

标准 BLS 中严苛的二元标签矩阵 \mathbf{Y} 限制了模型的性能. 为解决此问题, LDMBLS 引入标签拖拽技术, 扩大不同类标签之间的边缘距离, 从而学习到更加具有判别性的权重矩阵 \mathbf{W} . LDMBLS 中的柔性标签记作:

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{B} \odot \mathbf{M} \quad \text{s.t. } \mathbf{M} \geq \mathbf{0} \quad (8)$$

其中, \mathbf{B} 表示标签拖拽方向; \mathbf{M} 是一个非负矩阵, 表示标签拖拽的距离; $\mathbf{0}$ 是全零矩阵; \odot 表示元素乘积运算. 矩阵 \mathbf{B} 的元素定义如下:

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{cases} +1, & \mathbf{Y}_{ij} = 1 \\ -1, & \mathbf{Y}_{ij} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

为清晰说明标签拖拽的作用, 通过一个 3×3 的标签矩阵 \mathbf{Y} 进行举例说明. 在此例子中, \mathbf{Y} 被定义为:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3} \quad (10)$$

显然, 不同类别之间的距离固定为 $\sqrt{2}$. 但是在实际情况中, 不同类之间的距离不可能一直是固定的, 同一类的样本也会存在噪声等区别. 经过标签拖拽后, 得到的柔性标签为:

$$\Delta \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_{11} & 1 + \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} & 1 + \varepsilon_{23} \\ 1 + \varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中, ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 均大于 0. $\Delta \mathbf{Y}$ 每行表示一个样本, 以第二个样本和第三个样本为例, 它们之间的距离被松弛为:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-\varepsilon_{21} - 1 - \varepsilon_{31})^2 + (-\varepsilon_{22} + \varepsilon_{32})^2 + (1 + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33})^2} \\ & \geq \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

标签拖拽扩大不同类别之间的距离, 有助于分类任务的执行, 但是该方法也造成容易过度拟合柔性标签的问题. 通过引入类紧致图, 将来自同一类的样本在转换到柔性标签空间时可以保持靠近, 这样就可以在一定程度上避免过拟合的问题. 将训练数据 \mathbf{X} 视为无向图 $E_M(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ 的顶点集, 选用热核函数来确定点与点之间的权重大小, 如果数据点 x_i 和点 x_j 相连, 那么它们关系的权重设定为 \mathbf{V}_{ij} , 定义为:

$$V_{ij} = \begin{cases} e^{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{\sigma}}, & \text{label}(x_i) = \text{label}(x_j) \\ 0, & \text{label}(x_i) \neq \text{label}(x_j) \end{cases} \quad (13)$$

其中, V_{ij} 表示两个样本间的相似性; σ 表示热核函数带宽; $\text{label}(\cdot)$ 表示数据点对应的标签. 通过最小化式 (14) 可以很好地保持数据变换过程中的相似性:

$$\sum_{i,j} \|A_i W - A_j W\|_2^2 V_{ij} = \text{tr}(W^T A^T L A W) \quad (14)$$

其中, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹; $L = D - V$ 是图的拉普拉斯矩阵; D 是图的度矩阵 ($D_{ii} = \sum_j V_{ij}$). 在引入柔性标签和类紧致图后, LDMBLS 的目标函数可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_{W, M} & \|A W - (Y + B \odot M)\|_F^2 + \lambda_2 \|W\|_F^2 + \\ & \lambda_1 \text{tr}(W^T A^T L A W) \\ \text{s.t. } & M \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中, λ_1 和 λ_2 是正则化参数.

2 松弛图嵌入的判别宽度学习系统模型

2.1 模型设计

虽然 LDMBLS 的提出在很大程度上提高了标准 BLS 的性能, 但其中的类紧致图嵌入并不能很好地解决模型的过拟合问题. 通过分析 LDMBLS 的目标函数 (15) 可以看出, 变换矩阵 W 承担着两个重要的职责. 一方面, 需要将宽度特征转换到对应的柔性标签空间, 并尽可能地扩大不同类别之间的距离; 另一方面, 需要保证类紧致图的有效性, 保证同类样本在转换时的紧密性. 由于要兼顾这两方面, 变换矩阵 W 的自由度不可避免地受到限制, 难以学到更加具有判别性的变换矩阵.

变换矩阵 W 的自由度因为同时考虑变换到柔性标签空间和数据的局部结构而受到限制, 通过分担 W 的责任, 使其能够专注于将样本变换到柔性标签空间就可以很好地减轻 W 的限制. 具体而言,

引入一个新的变换矩阵 P , 用于分担 W 保持数据局部结构的责任, 从而减轻 W 的约束, 使其更加专注于特征到柔性标签空间的映射. 通过这种设计, 构造具有双变换矩阵的松弛图, 使得学习到的 W 更加灵活, 并且具有更强的判别能力. 基于以上思路, 将提出的模型初步表述为:

$$\begin{aligned} \min_{W, M, P} & \|A W - (Y + B \odot M)\|_F^2 + \lambda_2 \|W\|_F^2 + \\ & \lambda_1 \sum_{i,j} \|A_i W - A_j P\|_2^2 V_{ij} \\ \text{s.t. } & M \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中, P 是引入的另一个变换矩阵, 用于分担变换矩阵 W 保留数据局部结构的责任. 很容易看出, 两个变换矩阵之间应该具有相似的结构. 换句话说, W 和 P 之间应该有一些对应关系. 为捕捉这种结构上的相似性, 定义一个矩阵 T , 表示 W 和 P 之间的对应关系, 使得 $W = PT$. 构造结构一致性项 $\|W - PT\|_F^2$, 对它们之间的相似性进行建模, 将其添加到式 (16) 中来最小化此项, 确保两者的结构一致性. 在此基础上, 提出最终的松弛图嵌入的判别宽度学习系统 (Discriminative relaxed-graph embedding broad learning system, DREBLS), 模型流程图如图 2 所示, 其目标函数为:

$$\begin{aligned} \min_{W, M, P, T} & \|A W - (Y + B \odot M)\|_F^2 + \\ & \lambda_1 \sum_{i,j} \|A_i W - A_j P\|_2^2 V_{ij} + \\ & \lambda_2 \|W - PT\|_F^2 \\ \text{s.t. } & M \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中, 构建松弛图时点与点之间的权重 V 与构建类紧致图的方法一样. 从上述 DREBLS 的目标函数可以看到, 柔性标签替代严苛的二元标签用来提供更加明智的监督信息. 在此基础上, 通过双变换矩阵构建松弛图, 其优点如下: 1) 保留数据的局部结

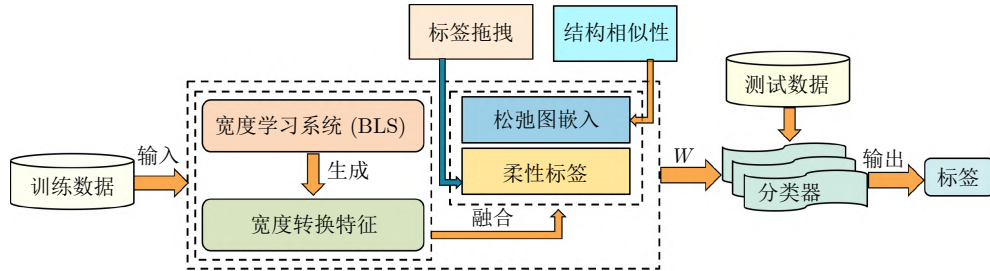


图 2 DREBLS 模型的流程图

Fig.2 Flowchart of DREBLS model

构, 增强模型的判别能力; 2) 松弛图的嵌入使得来自同一类别的样本在变换到其标签空间时能够紧密聚集在一起, 有效避免过拟合的问题; 3) 双变换矩阵的引入可以减轻变换矩阵的限制, 学习到更加灵活, 更具判别能力的变换矩阵. 此外, 引入结构性项来捕获两个变换矩阵 \mathbf{W} 和 \mathbf{P} 之间的相似性. 在结构性项中, 当矩阵 \mathbf{T} 为单位矩阵时, 两个变换矩阵相等, 这也就意味着此时所提出的模型将退化为 LDMBLS 模型. 换句话说, LDMBLS 是所提 DREBLS 模型的特例.

2.2 DREBLS 模型求解

在本节中, 对提出的 DREBLS 进行求解. 由于模型中存在四个未知变量, 问题 (17) 无法直接用解析求解进行优化. 采用交替方向乘法 (Alternating direction method of multipliers, ADMM) 在全局范围内收敛到原始优化问题的最小值, 在每次迭代中分别优化目标函数的子问题, 并逐渐强化约束条件. 通过固定无关变量来求取最优解, 然后不断迭代进行优化求解.

为便于优化求解, 将提出的式 (17) 重写:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{W}, \mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{T}) = & \|\mathbf{A}\mathbf{W} - (\mathbf{Y} + \mathbf{B} \odot \mathbf{M})\|_F^2 + \\ & \lambda_1 \{ \text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{W}) + \text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{P}) - \\ & 2 \text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{P}) \} + \lambda_2 \|\mathbf{W} - \mathbf{P}\mathbf{T}\|_F^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{M} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (18)$$

具体求解步骤如下:

1) 初始化 \mathbf{W} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{M} , 更新 \mathbf{T} .

首先去掉柔性标签以及松弛图嵌入, 将 \mathbf{M} 初始化为全 1 矩阵, 通过对 \mathbf{W} 求导设为零可以得到:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (19)$$

初始化 $\mathbf{P} = \mathbf{W}$. 然后, 对 \mathbf{T} 求导设为零得到:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (20)$$

其中, δ 是一个非常小的正数, 避免矩阵奇异问题.

2) 固定 \mathbf{W} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{M} , 更新 \mathbf{P} .

通过对式 (18) 中的 \mathbf{P} 求导并设为零, 可得:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{P} + \rho \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{W} + \rho \mathbf{W} \mathbf{T}^T \quad (21)$$

其中, $\rho = \lambda_2 / \lambda_1$. 式 (21) 是一个 Sylvester 方程, 直接调用 MATLAB 内置的 Sylvester 函数来更新 \mathbf{P} .

3) 固定 \mathbf{P} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{M} , 更新 \mathbf{W} .

通过对式 (18) 中的 \mathbf{W} 求导并设为零, 可得:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R} \quad (22)$$

其中, $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T (\mathbf{Y} + \mathbf{B} \odot \mathbf{M}) + \lambda_1 \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{P} + \lambda_2 \mathbf{P} \mathbf{T}$.

4) 固定 \mathbf{P} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{W} , 更新 \mathbf{M} .

在更新矩阵 \mathbf{M} 时, 忽略式 (18) 中的其他无关项, 最小化问题可重写为:

$$\min_{\mathbf{M}} \|\mathbf{E} - \mathbf{B} \odot \mathbf{M}\|_F^2 \quad \text{s.t. } \mathbf{M} \geq \mathbf{0} \quad (23)$$

其中, $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{Y}$. 考虑到矩阵的 Frobenius 范数的平方可以逐元素解耦, 问题 (23) 可分解为 $N \times C$ 个子问题, 每个子问题可逐一优化. 对于第 i 行第 j 列的元素 M_{ij} , 派生出的子问题如下:

$$\min_{M_{ij}} (\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{B}_{ij} M_{ij})^2, \quad \text{s.t. } M_{ij} \geq 0 \quad (24)$$

根据拖拽方向矩阵 \mathbf{B} 的构造方式可知 $\mathbf{B}_{ij}^2 =$

1. 从而, 可得:

$$(\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{B}_{ij} M_{ij})^2 = (\mathbf{B}_{ij} \mathbf{E}_{ij} - M_{ij})^2 \quad (25)$$

因为 \mathbf{M} 是非负矩阵, 所以 \mathbf{M} 可以表示为:

$$\mathbf{M} = \max(\mathbf{B} \odot \mathbf{E}, \mathbf{0}) \quad (26)$$

在算法实施过程中, 重复迭代上述四个步骤, 直到两次迭代之间的差异小于预定的阈值, 迭代停止. 算法 1 总结 DREBLS 模型的完整过程.

算法 1. DREBLS 算法伪代码

输入. 训练数据 \mathbf{X} , 标签矩阵 \mathbf{Y} , 随机映射特征组数 N_g , 每组映射特征中的特征数 N_f , 增强节点数 m , 正则化参数 λ_1 和 λ_2 , 最大迭代次数 $t_{max} = 30$.

输出. 变换矩阵 \mathbf{W} .

- 1) 生成 N_g 组随机权重 \mathbf{W}_{e_i} 和偏差 β_{e_i} ;
- 2) 计算映射特征 $\mathbf{Z}^{N_g} := [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_{N_g}]$;
- 3) 生成 m 组随机权重 \mathbf{W}_{h_j} 和偏差 β_{h_j} ;
- 4) 计算增强特征 $\mathbf{H}^m := [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_m]$;
- 5) 计算宽度转换特征 $\mathbf{A} := [\mathbf{Z}^{N_g}, \mathbf{H}^m]$;
- 6) 初始化 \mathbf{M} , \mathbf{W} 、 \mathbf{P} 以及迭代次数 $t = 0$;
- 7) **while** 迭代次数 $t < t_{max}$
- 8) 通过式 (20) 更新 \mathbf{T} ;
- 9) 通过式 (21) 更新 \mathbf{P} ;
- 10) 通过式 (22) 更新 \mathbf{W} ;
- 11) 通过式 (26) 更新 \mathbf{M} ;
- 12) 迭代次数 $t = t + 1$;
- 14) **end while**

2.3 收敛性与时间复杂度分析

首先, 分析算法 1 中迭代优化过程的收敛性. 其收敛性可由定理 1 保证.

定理 1. 记 $(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t)$ 为第 t 次迭代后的优化结果. 随着迭代进行, 目标函数序列 $F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t)$ 可持续减小, 直至收敛到最小值.

证明. 根据 ADMM 算法的优化求解原则, 函

数的解模块 $(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t)$ 交替优化得到. 因此, 在第 $t+1$ 次迭代中, 首先保持 \mathbf{W}^t 、 \mathbf{P}^t 和 \mathbf{M}^t 不变, 然后求解子问题:

$$\arg \min_{\mathbf{T}} F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}, \mathbf{M}^t) \quad (27)$$

其最优解为 \mathbf{T}^{t+1} . 由于上述问题的凸性, 满足:

$$F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \leq F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t) \quad (28)$$

接下来, 固定 \mathbf{T}^{t+1} 、 \mathbf{W}^t 和 \mathbf{M}^t , 并求解子问题:

$$\arg \min_{\mathbf{P}} F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \quad (29)$$

通过求解得到的最优解为 \mathbf{P}^{t+1} . 由于该问题是一个凸优化问题, 可以得出:

$$F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \leq F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \quad (30)$$

接下来, 固定 \mathbf{P}^{t+1} 、 \mathbf{T}^{t+1} 和 \mathbf{M}^t , 并求解子问题:

$$\arg \min_{\mathbf{W}} F(\mathbf{W}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \quad (31)$$

得到最优解 \mathbf{W}^{t+1} , 由于该问题的凸性, 可以得出:

$$F(\mathbf{W}^{t+1}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \leq F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \quad (32)$$

最后, 固定 \mathbf{W}^{t+1} 、 \mathbf{P}^{t+1} 和 \mathbf{T}^{t+1} , 并求解子问题:

$$\arg \min_{\mathbf{M}} F(\mathbf{W}^{t+1}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}) \quad (33)$$

得到最优解 \mathbf{M}^{t+1} , 由于该问题的凸性, 满足:

$$F(\mathbf{W}^{t+1}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^{t+1}) \leq F(\mathbf{W}^{t+1}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^t) \quad (34)$$

综合式 (28)、(30)、(32) 和 (34), 可以得到:

$$F(\mathbf{W}^{t+1}, \mathbf{P}^{t+1}, \mathbf{T}^{t+1}, \mathbf{M}^{t+1}) \leq F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t) \quad (35)$$

因此, 可知迭代序列 $F(\mathbf{W}^t, \mathbf{P}^t, \mathbf{T}^t, \mathbf{M}^t)$ 是单调递减的. 其次, 由于式 (17) 的每一项均是非负的, 因此目标函数 $F(\mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{M})$ 也是非负的. 这意味着目标函数存在下界 0. 根据单调有界定理^[20], 可以得出目标函数 $F(\mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{M})$ 应当收敛最小值点.

接下来, 分析算法 1 中迭代优化过程的计算时间复杂度. 为便于表达, 将宽度变换特征表示为 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times d}$, 其中 n 和 d 分别表示样本的数量和维度. 一般的矩阵乘法的时间复杂度为 $O(n^3)$, 因此 k 次矩阵乘法需要 $O(kn^3)$. $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{I}$ 仅需在迭代开始前求解一次, 其复杂度为 $O(n^3)$. $n \times n$ 矩阵的逆矩阵为 $O(n^3)$. 迭代过程中更新 \mathbf{T} 和 \mathbf{W}

时需要求逆, 且均为 $O(n^3)$, 因此每次迭代求逆耗时 $2O(n^3)$. 更新 \mathbf{P} 时, Sylvester 方程经典解的复杂度为 $O(d^3)$. 综上, 算法的最终时间复杂度为 $O(n^3 + t((k+2)n^3 + d^3))$, 其中 t 表示迭代次数.

3 实验结果

在本节, 将所提出的方法在不同分类识别任务上进行评估, 包括人脸识别任务、场景和物体识别任务以及手写数字识别任务, 并且将所提方法与 SRC (Sparse representation classification), DLSR^[18] (Discriminative low-rank sparse representation), CRC^[21] (Collaborative representation-based classification), LLC^[22] (Locality-constrained linear coding), LRC^[23] (Linear regression classification), LRSIC^[24] (Low-rank matrix recovery with structural incoherence-based classification), LRRC^[25] (Low-rank representation for classification), SLRRC^[25] (Structured low-rank representation for classification), TDDL^[26] (Task-driven dictionary learning), SVM (Support vector machine), RLR^[27] (Robust linear regression), Robust PCA^[28] (Robust principal component analysis), LatLRR^[29] (Latent low-rank representation), LRLR^[30] (Low-rank linear regression), LRRR^[30] (Low-rank ridge regression), SLRR^[30] (Sparse low-rank regression), LRSI^[31] (Low-rank matrix recovery with structural incoherence), CBDS^[32] (Class-wise block-diagonal structure), ELM^[33] (Extreme learning machine), RF^[33] (Random forest), DRAGD^[34] (Discriminative regression with adaptive graph diffusion), FRBLS^[35] (Fisher regularized discriminative broad learning system), LDMBLS^[19] 等先进分类算法进行对比. 为排除样本的随机抽取方式等因素对实验结果的干扰, 每种方法都独立运行 30 次, 并对结果取平均值进行比较分析. 针对 DREBLS 所需的两个正则化参数 λ_1 和 λ_2 , 根据经验将这两个正则化参数的选择范围设置为 $\{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-8}\}$, 并使用网格搜索寻找最优的参数组合. 本文所有实验都是基于 Windows 11 平台下的 MATLAB 2018 a 软件平台, 设备配置为 Intel-i 7, 2.10 GHz CPU 和 16 GB 内存.

3.1 数据集

本文实验使用的数据集包括人脸图像分类数据集、场景图像和物体图像分类数据集以及手写体图像分类数据集. 这些数据集在所采取先进的对比分

类算法研究中均有应用, 是多个领域评估模型性能的基准. 因此, 具有挑战性的识别结果足以验证方法的优越性. 通过选择这些数据, 能够与现有技术进行公平对比, 并确保实验结果的广泛适用性与可靠性. 表 1 描述使用的六个数据集的样本总数量、维度以及类别数的概要信息, 以下为各数据集的详细介绍.

表 1 实验中使用的 6 个数据集的简要信息
Table 1 The brief information of the 6 datasets used in the experiments

数据集	样本总数量	维度	类别数
Extended YaleB	2 414	1 024	38
AR	2 600	540	100
Fifteen Scenes	4 485	3 000	15
COIL100	7 200	1 024	100
MNIST	70 000	784	10
USPS	9 298	256	10

1) Extended YaleB^[36]: 该数据集由 38 个人一共 2 414 张裁剪的正面人脸图像组成. 每个人大约有 64 张不同表情和服装的近正面图像, 每个图像的大小为 32×32 像素.

2) AR^[19]: 该数据集包含有 126 人 (70 名男性和 56 名女性) 的 4 000 多张彩色图像. 每个人提供两次期间拍摄的 26 张人脸图像. 在每次拍摄期间, 每个人提供 13 张图像, 其中 3 张带太阳镜的图像, 另外 3 张带围巾的图像, 剩余的 7 张具有不同的面部表情和光照条件. 在本次实验中, 使用一个由 2 600 张图像组成的子集, 其中包括 50 名男性图像和 50 名女性图像.

3) Fifteen Scenes^[37]: 该数据集包含 15 个类别的场景数据, 有 4 485 个场景图像, 包括厨房、工厂和街道等.

4) COIL100^[38]: 该数据集由 7 200 张灰度图像组成, 包含 100 个物体. 每个物体由 72 张图像组成, 这些图像是从不同的视角和不同的照明条件下拍摄的.

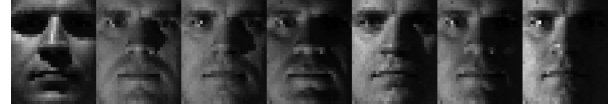
5) MNIST: 该数据集集中有 70 000 张手写数字图像, 这些数字图像的大小均为 28×28 像素. 这些样本分为 10 个类, 即数字 $\{0, 1, \dots, 9\}$.

6) USPS: 该数据集包含 9 298 个手写数字图像, 同样被分为 10 个类, 即数字 $\{0, 1, \dots, 9\}$, 所有数字图像的大小均为 16×16 像素.

3.2 人脸图像数据集分类任务结果评估

在 Extended YaleB 人脸图像数据集上的实验

中, 分别从每类随机抽取 10 张、15 张、20 张以及 25 张图像进行训练, 剩余的图像用作测试集; 在 AR 人脸图像数据集上的实验中, 每类随机选择 20 张图像用于训练, 剩余的图像用作测试集. Extended YaleB 和 AR 数据集的部分人脸图像如图 3 所示.



(a) Extended YaleB 人脸图像
(a) Extended YaleB face images



(b) AR 人脸图像
(b) AR face images

图 3 部分人脸数据集图像

Fig.3 Some images of face datasets

在 Extended YaleB 人脸数据集上的实验结果如表 2 所示, 其中黑色粗体代表最佳分类精度. 与其他先进算法的实验对比, 提出的算法效果非常优秀, 无论训练样本抽取数量是 10 张, 15 张, 20 张还是 25 张, DREBLS 始终取得最佳的分类效果. 在

表 2 Extended YaleB 数据集不同方法的分类准确率以及标准差

Table 2 Classification accuracy and standard deviation of different methods on the Extended YaleB dataset

算法	10 样本	15 样本	20 样本	25 样本
SRC	87.8 ± 0.3	92.6 ± 0.6	94.4 ± 0.6	96.7 ± 0.5
CRC	86.1 ± 0.5	90.7 ± 0.3	93.0 ± 0.2	94.1 ± 0.3
LRC	83.3 ± 0.4	89.4 ± 0.5	92.4 ± 0.2	93.6 ± 0.3
TDDL	84.3 ± 0.6	88.9 ± 0.3	92.5 ± 0.4	95.0 ± 0.6
Robust PCA	86.1 ± 0.2	90.5 ± 0.4	93.5 ± 0.6	95.4 ± 0.3
LatLRR	84.0 ± 0.5	88.8 ± 0.3	92.1 ± 0.5	93.8 ± 0.6
SVM	81.5 ± 1.4	89.2 ± 0.9	92.6 ± 0.7	94.5 ± 0.6
ELM	85.5 ± 0.2	91.2 ± 0.6	93.7 ± 0.4	95.2 ± 0.5
RF	83.4 ± 0.4	88.5 ± 0.3	91.1 ± 0.5	94.6 ± 0.4
RLR	88.4 ± 0.3	92.8 ± 0.4	96.1 ± 0.3	97.5 ± 0.2
DLSR	86.2 ± 0.9	92.3 ± 0.7	94.7 ± 0.7	95.8 ± 0.4
LRLR	78.2 ± 1.7	82.0 ± 0.9	83.8 ± 1.5	85.0 ± 1.0
SLRR	78.0 ± 1.7	82.3 ± 1.0	84.2 ± 0.7	85.1 ± 1.1
LRSI	87.1 ± 0.6	92.7 ± 0.5	94.2 ± 0.3	96.1 ± 0.5
CBDS	85.8 ± 1.8	93.1 ± 1.3	95.8 ± 1.0	96.3 ± 0.8
DRAGD	88.8 ± 0.7	94.2 ± 0.5	96.7 ± 0.4	97.6 ± 0.4
FRBLS	88.9 ± 1.4	93.0 ± 1.1	95.3 ± 0.6	96.2 ± 0.7
LDMBLS	88.1 ± 1.4	93.3 ± 0.9	96.6 ± 0.8	97.4 ± 1.2
DREBLS	89.0 ± 0.8	94.3 ± 0.6	97.0 ± 0.9	97.9 ± 0.6

AR 人脸数据集上的实验结果如表 3 所示. 在引用部分实验结果时, 参考文献 [37] 中的相关数据, 以确保结果的完整性和准确性. 与其他主流分类算法相比较, 所提方法依旧有着最好的分类精度. DREBLS 不仅仅是在分类精度上取得显著提升, 还在处理复杂的人脸特征和多变的环境条件下表现出良好的泛化能力. 这对于实际应用场景尤为重要, 其是在外物遮挡、表情变化等具有挑战性的情况下. 从实验中与先进算法进行对比的结果上看, 本文方法在当前人脸识别领域的研究中具有竞争力和前瞻性.

表 3 AR 数据集不同方法的分类准确率

Table 3 Classification accuracies of different methods on the AR dataset

算法	准确率 (%)
K-SVD (每人 5 个样本)	86.5
D-SVD (每人 5 个样本)	88.8
CRC	97.3
LRC	94.5
LC-KSVD1 (每人 5 个样本)	92.5
LC-KSVD2 (每人 5 个样本)	93.7
LC-KSVD2 (所有训练样本)	97.8
SVM	96.7
RLR	98.1
LatLRR	97.6
ELM	96.4
DLSR	97.6
DRAGD	99.0
FRBLS	99.0
LDMBLS	98.3
DREBLS	99.2

3.3 场景图像数据集和物体图像数据集分类任务结果评估

在场景图像分类任务中, 在 Fifteen Scenes 场景数据集上进行实验, 从每个类别随机选择 100 张图像作为训练集, 剩下的作为测试集. 图 4(a) 显示来自该数据集的一些图像. 在 Fifteen Scenes 数据集上的实验结果如表 4 所示, 其中, 采用的对比方法结果也是直接引用文献 [37] 中的实验数据, 可以发现所提算法效果在所有的对比方法中效果最佳, 达到 98.5%, 比 LDMBLS 效果还要高出 0.2%, 这表明所提出的松弛图嵌入方法可以有效提升模型的表现能力.

对于物体图像分类任务, 在 COIL 100 物体图像数据集上进行实验, 每个类中将分别随机抽取 10



(a) Fifteen scenes 场景图像

(a) Fifteen scenes scene images



(b) COIL100 物体图像

(b) COIL100 object images

图 4 场景与物体数据集部分图像

Fig. 4 Some images of scene and object datasets

表 4 Fifteen Scenes 数据集不同方法的分类准确率

Table 4 Classification accuracies of different methods on the Fifteen Scenes dataset

算法	准确率 (%)	算法	准确率 (%)
LLC	79.4	Robust PCA	92.1
LLC*	89.2	Lazebnik	81.4
LRC	91.9	SVM	93.6
LRSIC	92.4	RLR	96.8
LRRC	90.1	Yang	80.3
SLRRC	91.3	Lian	86.4
Boureau	84.3	LC-KSVD1	90.4
LC-KSVD2	92.9	DLSR	95.9
ELM	94.5	CBDS	95.7
Gemert	76.7	LRLR	94.5
LRRR	88.1	SLRR	89.6
DRAGD	98.4	FRBLS	98.4
LDMBLS	98.3	DREBLS	98.5

张、15 张、20 张以及 25 张图像进行训练, 剩余的图像用作测试集. 图 4(b) 显示来自 COIL 100 的一些物体图像. 在 COIL 100 数据集上的实验结果如表 5 所示, 可以看到, 随着训练样本数量的增加, 所有算法的性能都可以得到提高. 在训练样本为 10 张、15 张、20 张以及 25 张时, DREBLS 分类精度分别达到 86.0%、91.0%、95.1% 以及 97.2%, 与其他竞争算法相比, 提出的 DREBLS 方法在不同训练样本数量下都能获得更好的分类精度. 总之, 实验结果进一步说明提出的方法在场景和物体分类问题上也有着很棒的潜力和应用前景.

3.4 手写体图像数据集分类任务结果评估

在本节中, 进行手写体图像数据集分类任务. 但与上述人脸图像分类任务以及场景图像与物体图像分类任务设置不同, 在手写体图像数据集分类任务中, 将所提算法与标准 BLS 以及 LDMBLS 进行

表 5 COIL100 数据集不同方法的分类准确率以及标准差
Table 5 Classification accuracy and standard deviation of different methods on the COIL100 dataset

算法	10样本	15样本	20样本	25样本
SRC	80.4 ± 0.6	86.1 ± 0.8	89.4 ± 0.4	91.9 ± 0.4
CRC	76.2 ± 0.6	81.3 ± 0.4	84.2 ± 0.5	86.3 ± 0.5
LRC	79.9 ± 0.7	85.3 ± 0.6	88.7 ± 0.7	91.0 ± 0.5
TDDL	83.3 ± 0.6	87.9 ± 0.3	90.8 ± 0.4	90.0 ± 0.7
Robust PCA	82.5 ± 0.6	88.3 ± 0.8	91.7 ± 0.3	93.5 ± 0.3
LatLRR	79.6 ± 0.5	85.3 ± 0.4	88.4 ± 0.4	90.7 ± 0.4
SVM	79.2 ± 0.5	84.8 ± 0.6	88.1 ± 0.4	90.8 ± 0.6
ELM	81.2 ± 0.4	85.6 ± 0.7	89.7 ± 0.4	92.1 ± 0.6
RF	84.3 ± 0.5	88.3 ± 0.5	91.1 ± 0.5	93.3 ± 0.5
RLR	80.1 ± 0.6	83.4 ± 0.7	85.9 ± 0.8	87.2 ± 0.6
DLSR	84.8 ± 0.5	88.0 ± 0.5	90.1 ± 0.3	92.0 ± 0.4
LRLR	66.2 ± 0.8	71.2 ± 0.6	73.7 ± 0.8	75.7 ± 0.7
SLRR	69.1 ± 0.8	73.0 ± 0.6	74.5 ± 0.6	75.9 ± 0.7
LRSI	79.7 ± 0.5	87.8 ± 0.3	91.4 ± 0.4	93.6 ± 0.6
CBDS	73.7 ± 0.5	78.6 ± 0.8	80.9 ± 0.7	81.3 ± 0.5
DRAGD	83.5 ± 0.5	88.6 ± 0.4	94.8 ± 0.3	96.0 ± 0.3
FRBLS	84.8 ± 0.7	90.2 ± 0.6	94.7 ± 0.7	96.4 ± 0.5
LDMBLS	83.6 ± 1.1	89.3 ± 1.3	94.0 ± 0.9	96.1 ± 1.0
DREBLS	86.0 ± 0.5	91.0 ± 0.6	95.1 ± 0.6	97.2 ± 0.6

对比, 目的是展现所提模型中柔性标签策略以及松弛图嵌入的有效性.

手写体图像分类任务中, 在两种经典的手写体数据集 USPS 和 MNIST 上进行实验, 比较它们在不同训练样本数量下的分类准确率和最优网络参数设置. USPS 和 MNIST 数据集的部分手写体图像如图 5 所示. 对于 USPS 数据集, 随机选择每类 100 张、150 张、200 张以及 250 张图像进行训练, 剩余的图像用于测试, 网络节点参 (N_g, N_f, m) 在 $[5, 6, \dots, 30] \times [15, 16, \dots, 40] \times [100, 110, \dots, 1\ 200]$ 范围上通过网格搜索确认; 对于 MNIST 数据集, 在每一类中随机选择 100 张、300 张、500 张以及 800 张图像进行训练, 剩余图像作为测试集, 网络节点参数 (N_g, N_f, m) 在 $[5, 6, \dots, 40] \times [10, 11, \dots, 50] \times [400, 500, \dots, 2\ 000]$ 范围上通过网格搜索确认. 表 6 和表 7 分别展示在 USPS 和 MNIST 数据集上的实验结果. 首先, 可以从网络节点参数设置上可以看出, 三种方法的网络参数设置几乎在同一个数量级上, 这反映柔性标签策略和松弛图嵌入不影响方法的运行效率; 其次, 从识别精度上可以看出, LDMBLS 比 BLS 性能更好, 这表明柔性标签策略与类紧致图相结合可以提高模型分类性能, 而 DREBLS 相较于 LDMBLS 进一步提高了识别精



(a) USPS 人脸图像

(a) USPS handwritten character images



(b) MNIST 手写图像

(b) MNIST handwritten character images

图 5 手写体数据集部分图像

Fig. 5 Some images of handwritten character datasets

度, 这表明松弛图嵌入比类紧致图能够更加有效地提升模型性能.

3.5 收敛性分析

本节中, 通过实验验证 DREBLS 在不同数据集和参数设置下良好的收敛性. 首先, 定义一个收敛准则, 即算法在迭代过程中的误差变化趋于稳定; 然后, 在多个实验中运行算法, 并记录每次迭代的误差变化情况. 通过分析这些结果, 发现算法在不同情况下都能够达到较低的误差, 并且误差变化趋势趋于收敛. 这表明算法具有良好的收敛性, 能够有效地解决相关问题.

在 COIL100 和 AR 数据集上运行所提方法, 从 COIL100 数据集每个类随机选取 25 个样本作为训练集. 其余样本作为测试集; 对于 AR 数据集, 每个类随机选择 20 个样本作为训练样本, 剩下的作为测试集. 绘制在这两个数据集上目标函数值和分类精度相对于迭代次数的双曲线, 如图 6 所示. 结果表明, 在给定的数据集上识别精度在初始迭代阶段显著提高, 之后趋于稳定. 类似地, 随着迭代次数的增加, 目标函数值开始减少, 然后趋于稳定. 还可以看到, 所提出的优化算法收敛速度很快, 通常 20 次左右的迭代之后就可以达到需要的效果.

3.6 参数选择

在本节中, 将通过实验可视化讨论参数的敏感性. 根据 DREBLS 的目标函数式 (17) 可以知道, DREBLS 需要事先设置两个正则化参数 λ_1 和 λ_2 . 根据经验将这两个正则化参数的选择范围设置为 $\{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-8}\}$, 在 USPS 和 MNIST 数据集上运行所提方法. USPS 数据集每个类随机选取 100 个样本作为训练集, 其余样本作为测试集. 对于 MNIST 数据集, 每个类随机选择 300 个样本作为训练样本, 剩下的作为测试集. 两个数据集在不

表 6 BLS、LDMBLS 和 DREBLS 方法在 USPS 数据集上的分类准确率及标准差

Table 6 Classification accuracy and standard deviation of BLS, LDMBLS and DREBLS methods on the USPS dataset

样本数量	BLS				LDMBLS				DREBLS			
	N_g	N_f	m	准确率 (%)	N_g	N_f	m	准确率 (%)	N_g	N_f	m	准确率 (%)
100	5	15	180	90.88 ± 0.56	10	10	150	94.45 ± 0.65	10	15	150	94.71 ± 0.79
150	10	20	300	92.62 ± 0.87	10	15	200	95.38 ± 0.37	10	20	200	95.58 ± 0.64
200	20	30	500	93.37 ± 0.68	15	20	400	96.23 ± 0.31	18	25	420	96.70 ± 0.52
250	20	40	1 200	94.08 ± 0.50	20	30	1 000	96.99 ± 0.59	25	30	1 100	97.40 ± 0.42

表 7 BLS、LDMBLS 和 DREBLS 方法在 MNIST 数据集上的分类准确率及标准差

Table 7 Classification accuracy and standard deviation of BLS, LDMBLS and DREBLS methods on the MNIST dataset

样本数量	BLS				LDMBLS				DREBLS			
	N_g	N_f	m	准确率 (%)	N_g	N_f	m	准确率 (%)	N_g	N_f	m	准确率 (%)
100	7	15	500	90.80 ± 0.85	8	10	400	92.16 ± 0.41	10	10	400	92.91 ± 0.87
300	25	40	1 200	94.04 ± 0.88	20	35	1 000	94.95 ± 0.51	30	30	1 000	95.06 ± 0.23
500	30	40	1 500	95.94 ± 0.52	30	35	1 300	96.06 ± 0.19	30	38	1 200	96.16 ± 0.15
800	30	50	2 000	96.96 ± 0.47	30	45	1 500	96.67 ± 0.11	40	40	1 800	96.99 ± 0.15

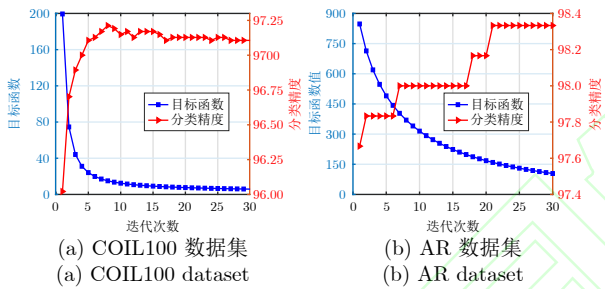


图 6 分类精度 (%) 和目标函数值随迭代次数的变化曲线
Fig.6 Variation curves of the recognition rates (%) and objective function values versus the number of iterations

同参数下的分类准确率变化如图 7 所示. 可以看出, 对于不同的数据集, 模型性能变化有所不同. 然而, 分类准确率达到最好时, 它们有着类似的参数选择范围: 在 $\lambda_2 \in \{10^{-3}, \dots, 10^{-1}\}$, $\lambda_1 \in \{10^{-8}, \dots, 10^{-6}\}$ 时分类效果最好, 这说明当 λ_2 较大, λ_1 较小时, 所提算法表现出较好的性能. 换句话说, λ_2 对应的项, 也就是结构一致性项, 对于学习理想的变换矩阵更为重要, 这也从侧面说明引入新的变换矩阵分摊 \mathbf{W} 的部分责任思想的有效性. λ_1 控制的项只是单纯的引入一个变换矩阵, 但是 λ_2 控制的项是直接指导学习新的变换矩阵, 学习双变换矩阵之间相似的结构, 所以结构一致性约束更为重要, 发挥的作用更大. 将在第 3.7 节中进一步详细分析结构一致性的有效性.

3.7 结构一致性分析

在第 3.6 节中, 通过实验可视化分析得出结构

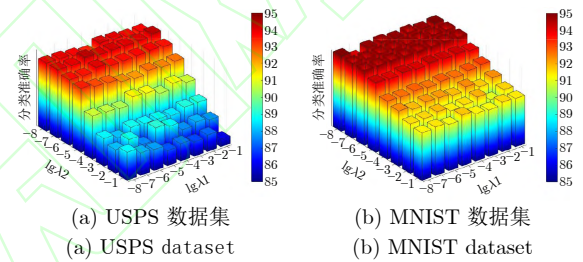


图 7 正则化参数 λ_1 和 λ_2 选用不同值时的分类准确率 (%)

Fig.7 Classification accuracy (%) of different values of regularization parameters λ_1 and λ_2

一致性约束更为重要. 在本节中, 着重分析结构一致性. 从目标函数的角度, 可以看出所提 DREBLS 与 LDMBLS 的区别主要在于结构一致性约束以及新的变换矩阵的引入. 可以发现, 其实如果 \mathbf{T} 等于单位矩阵, DREBLS 将退化为 LDMBLS. 因此, 从理论上分析, DREBLS 的性能至少等于 LDMBLS 的性能. 但是, 学习到的矩阵 \mathbf{T} 不应该是一个单位矩阵, 因为如果矩阵 \mathbf{T} 为单位矩阵, 那么引入的新的矩阵将与之前的变换矩阵是相同的. 为验证这一点, 在 USPS、Fifteen Scenes、Extend YaleB 和 AR 数据集上对学习到的矩阵 \mathbf{T} 进行可视化, 结果如图 8 所示. 从图 8 的可视化效果可以看出, 所得 \mathbf{T} 不是一个单位矩阵, 而是一个块对角矩阵, 这说明矩阵 \mathbf{W} 和 \mathbf{P} 并不是相等的, 它们的元素之间确实存在对应关系. 这种关系保证两个变换矩阵之间共享相似的数据结构, 说明 DREBLS 的提出是有效果的. 将在第 3.8 节通过多指标实验进一步验证

引入结构一致性的必要性.

3.8 多指标对比

以上对比主要集中在分类精度上. 在本节中, 将采用诸如召回率、F1 分数和训练时间等更多指标对相似算法进行对比分析, 同时验证引入变换矩阵 \mathbf{P} 及结构一致性项的优势. 选择 BLS、LDMBLS、DREBLS 及 DREBLS* 进行比较. 具体而言, LDMBLS 中采用传统的类紧致图, 而 DREBLS 则引入变换矩阵 \mathbf{P} 及结构一致性项, 且构造松弛图. DREBLS* 是设计的对比方法. 与 DREBLS 相比, 它仅引入变换矩阵 \mathbf{P} , 未考虑结构一致性项.

首先, 评估相似算法在准确率、召回率及 F1 分数三个分类指标上的表现. 这里选择 Fifteen Scenes 数据集作为实验数据, 每类随机抽取 20 个样本作为训练集, 其余样本用于测试. 通过准确率、召回率及 F1 分数进行对比, 为节省版面, 只将前 10 类的结果呈现, 实验结果见表 8. 结果表明, 由于仅引入变换矩阵 \mathbf{P} 而忽略变换矩阵 \mathbf{W} 与 \mathbf{P} 之间的结

构一致性关系, DREBLS* 的性能不如使用类紧致图的 LDMBLS 和构建松弛图的 DREBLS. 与采用类紧致图的 LDMBLS 相比, 由于变换矩阵 \mathbf{P} 能够释放单纯输出矩阵 \mathbf{W} 的自由度, 所提 DREBLS 模型具备明显的优势. 因此, 结合这三个分类指标, 提出的 DREBLS 的表现始终最优, 这充分说明引入变换矩阵 \mathbf{P} 并结合结构一致性项约束, 能够有效提升模型的分类性能.

其次, 进一步对比算法的时间效率. 选取 AR、COIL100 及 USPS 三个数据集作为实验数据, 分别从训练时间、测试时间与分类准确率三个方面对比. AR 数据集中, 每类随机选取 20 个样本作训练集, 其余样本用于测试. COIL100 数据集中, 每类随机选取 15 个样本作训练集, 其余样本用于测试. 对于 USPS 数据集, 每类随机选取 150 个样本作训练集, 其余样本用于测试. 实验结果如表 9 所示, 可以发现这些方法在测试时间上的差异较小. BLS 的训练时间最短, 但其分类准确率明显低于其他方法. 尽管 DREBLS* 在部分数据集上训练时间短于

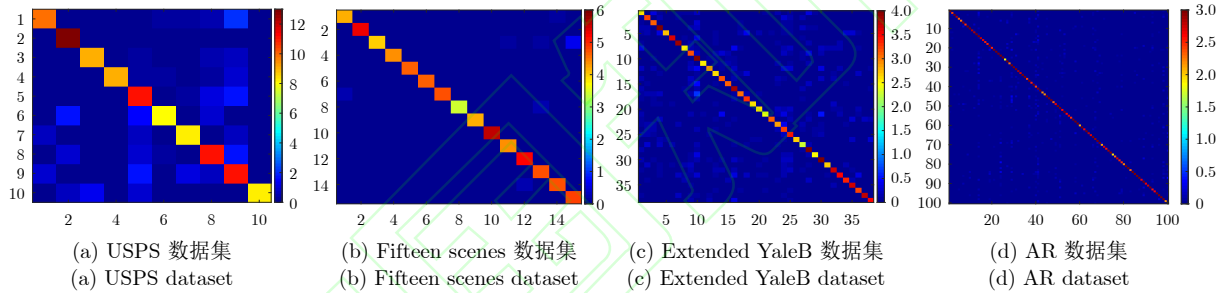


图 8 矩阵 \mathbf{T} 在不同数据集的可视化效果

Fig. 8 Visualization effects of matrix \mathbf{T} in different datasets

表 8 BLS、LDMBLS、DREBLS* 及 DREBLS 方法在 Fifteen Scenes 数据集上的分类多指标评估
Table 8 Classification multi-metric evaluation of BLS, LDMBLS, DREBLS* and DREBLS methods on Fifteen Scenes dataset

指标	算法	类别 1	类别 2	类别 3	类别 4	类别 5	类别 6	类别 7	类别 8	类别 9	类别 10	平均值
准确率	BLS	93.2	94.4	88.3	92.9	86.5	92.4	95.9	96.3	83.6	100.0	92.0
	LDMBLS	98.6	95.9	95.8	90.8	100.0	97.5	98.5	99.3	89.3	98.5	95.5
	DREBLS*	96.4	92.9	88.3	93.8	99.0	92.1	97.0	97.4	92.2	97.4	94.5
	DREBLS	96.8	97.4	98.7	94.6	99.0	97.7	99.5	99.6	95.8	98.5	97.3
召回率	BLS	98.6	98.2	98.6	99.6	94.3	97.9	99.2	100.0	100.0	50.1	94.8
	LDMBLS	98.6	98.2	98.6	99.6	94.3	97.9	99.2	100.0	100.0	50.1	94.8
	DREBLS*	98.6	99.1	87.5	97.0	82.4	96.5	100.0	100.0	96.0	88.4	94.5
	DREBLS	99.1	98.2	95.3	100.0	92.5	97.7	99.2	100.0	98.8	99.0	98.0
F1 分数	BLS	95.8	96.3	93.2	96.1	90.2	95.1	97.5	98.1	90.9	66.8	94.0
	LDMBLS	98.2	97.5	95.5	94.9	94.0	96.5	99.2	98.7	94.0	93.4	95.2
	DREBLS*	97.5	96.0	87.9	95.3	89.9	94.2	98.3	99.0	94.1	92.7	94.0
	DREBLS	97.9	97.8	97.0	97.0	95.6	97.7	99.4	100.0	97.3	98.7	98.0

表 9 算法运行的时间效率对比
Table 9 Time efficiency comparison of algorithm execution

数据集	算法	训练时间 (s)	测试时间 (s)	准确率 (%)
AR	BLS	2.407	0.497 8	95.4
	LDMBLS	3.973 9	0.628 4	98.3
	DREBLS*	3.640 5	0.599 3	98.0
	DREBLS	3.847 8	0.598 9	99.2
COIL100	BLS	1.795 7	0.305 4	82.5
	LDMBLS	2.796 8	0.476 9	89.3
	DREBLS*	2.181 7	0.424 1	86.6
	DREBLS	2.872 8	0.432 3	91.0
USPS	BLS	1.692 4	0.342 4	92.6
	LDMBLS	2.873 9	0.448 8	95.4
	DREBLS*	2.556 1	0.401 5	93.7
	DREBLS	2.596 8	0.403 5	95.6

DREBLS, 但由于未考虑结构一致性, 导致其准确率低于 DREBLS. LDMBLS 与 DREBLS 的训练时间差异仅为 0.1 s, 但 DREBLS 的分类准确率均比 LDMBLS 高. 因此, 综合考虑分类效果和运行时间, 所提算法的优势是十分明显的.

3.9 原始特征与转换空间特征对比分析

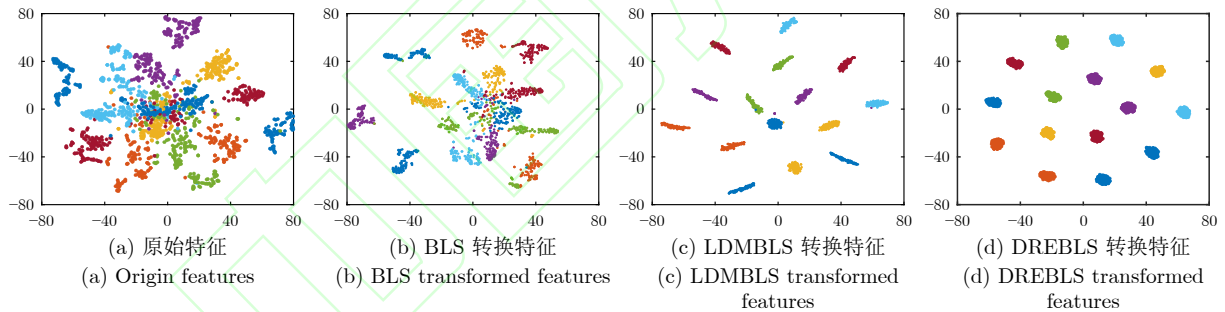


图 9 不同算法在 Fifteen Scenes 数据集上的转换特征进行 t-SNE 可视化

Fig.9 The t-SNE visualization of transformed features by different algorithms on the Fifteen Scenes dataset

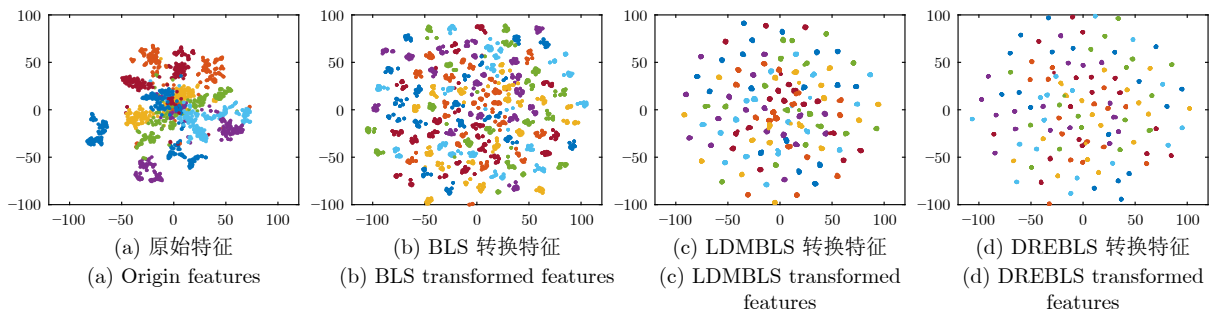


图 10 不同算法在 AR 数据集上的转换特征进行 t-SNE 可视化

Fig.10 The t-SNE visualization of transformed features by different algorithms on the AR dataset

为进一步验证所提的方法中松弛图嵌入以及柔性标签两种策略引入的有效性, 使用 t-SNE 算法分别在 Fifteen Scenes 和 AR 数据集上对原始特征样本和标准 BLS、LDMBLS 以及 DREBLS 的转换特征进行可视化, 结果如图 9 和图 10 所示, 从图 9(a) 和图 10(a) 中可以明显看出, 两个数据集上原始特征是杂乱的混合结构, 这不利于分类. 通过在标准 BLS 模型中对原始特征进行映射组合, 从图 9(b) 和图 10(b) 可以发现 Fifteen Scenes 数据集和 AR 数据集的 BLS 特征空间是紧致的和可分离的. 尽管如此, 来自不同类别的许多样本点仍然相互混合, LDMBLS 转换后的特征可以缓解这些缺点, 如图 9(c) 和图 10(c), 来自同一类的数据显示出具有可分离表征的清晰聚类. 而可以进一步发现, 图 9(d) 以及图 10(d) 中 DREBLS 转换后的特征有着更加紧凑的簇状特征, 相同类更加紧凑, 不同类之间更具可分性, 也证明提出的方法有着更强的分类性能. 除此之外, 使用 Calinski-Harabasz 指数和 Davies-Bouldin 指数量化分析 t-SNE 可视化结果. Calinski-Harabasz 指数是基于类内离散度和类间离散度之间的比率, 衡量类内数据点紧密度与类间数据点分离度之间的平衡程度. 指数值越高, 表示聚类结果越好. Davies-Bouldin 指数是一种基于类别之间的

平均距离和类内的紧密度之间的比率来评估聚类质量的指标, 指数值越低, 表示聚类效果越好. 在 Fifteen Scenes 数据集和 AR 数据集上两种 t-SNE 指标对比结果如图 11 所示. 从图 11(a)和图 11(b) 可以发现, DREBLS 在两个数据集的 Calinski-Harabasz 指数均为最大值, Davies-Bouldin 指数均为最小值. 这从量化分析角度表明 DREBLS 相较于 BLS 和 LDMBLS 具有更加优秀的类内紧凑性和类间可分性. 由此, 可以得出结论, 柔性标签和流形图嵌入项可以很好地协同工作, 使用双重变换矩阵所构建的松弛图嵌入能够进一步指导学习更好的 W .

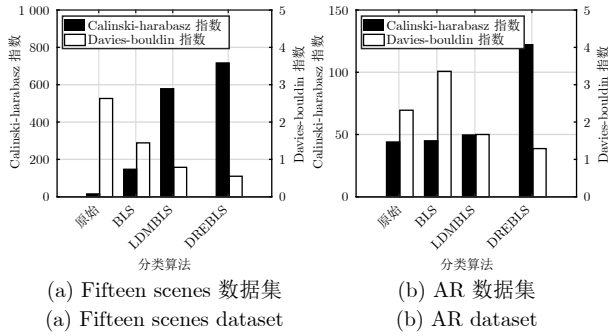


图 11 Calinski-Harabasz 与 Davies-Bouldin 指数量化分析

Fig.11 Quantitative analysis using the Calinski-Harabasz index and Davies-Bouldin index

4 结束语

本文所提出的松弛图嵌入的判别宽度学习系统为图像分类领域带来新的思路和方法. 首先, 柔性标签策略以及松弛图嵌入的引入使得模型在分类任务中既考虑到不同类别之间的可分性, 又考虑到相同类别之间的紧密性. 传统的分类方法通常只考虑类别之间的边界, 忽略同一类别内部的分布情况. 而松弛图嵌入的判别技术能够同时优化类间距离和类内距离, 从而更好地保持类别之间的区分度和同一类别内部的紧密性, 提高分类的准确性和稳定性. 此外, DREBLS 还引入结构一致性项, 以确保两个变换矩阵之间具有相似的结构, 从而提高模型的泛化能力和鲁棒性. 最后, 在多个图像分类数据集上进行实验验证, 验证所提模型在分类精度和效率方面的优越性. 这种结合理论分析和实验验证的方法, 为图像分类领域的进一步研究和发展提供重要的参考和启示.

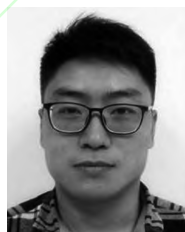
尽管 DREBLS 算法表现出色的效果, 但仍有一些问题需要在未来工作中进一步研究. 首先, 宽度网络在具有速度优势的同时, 在特征提取方面仍

略微落后于深度神经网络. 因此, 将 DREBLS 与其他更多先进网络架构相结合以改进特征提取效果是未来亟需的研究方向之一. 其次, 在参数调整方面所使用的网格搜索虽然可以用于寻找最优的参数组合, 但搜索过程较为耗时. 因此, 将在未来工作中研究如何使用自动化参数调整方法, 实现高效调参. 最后, 所提出的 DREBLS 目前主要应用于图像分类, 但在医学诊断和语义分割等潜在应用领域还未得到充分的探索和拓展, 这将是未来另一项有意义的工作.

References

- He M, Zhang J, Shan S, Chen X. Enhancing face recognition with detachable self-supervised bypass networks. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2024, **33**: 1588–1599
- Sun Z, Ke Q, Rahmani H, Bennamoun M, Wang G, Liu J. Human action recognition from various data modalities: A review. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2023, **45**(3): 3200–3225
- Huang H, Oh S K, Fu Z, Wu C, Pedrycz W, Kim J Y. FSCNN: Fuzzy channel filter-based separable convolution neural networks for medical imaging recognition. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, **32**(10): 5449–5461
- Cheng X, He X, Qiao M, Li P, Chang P, Zhang T, et al. Multi-view graph convolutional network with spectral component decompose for remote sensing images classification. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2025, **35**(1): 3–18
- Li X, Zhao C, Hu Y, Xie H, Wang Y, Zhao J. Precursor of privacy leakage detection for individual user. *Computers & Security*, 2024, **142**: Article No. 103879
- Chen C L P, Liu Z. Broad learning system: An effective and efficient incremental learning system without the need for deep architecture. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(1): 10–24
- Wang Z, Jusup M, Shi L, Lee J H, Iwasa Y, Boccaletti S. Exploiting a cognitive bias promotes cooperation in social dilemma experiments. *Nature Communications*, 2018, **9**(1): Article No. 2954
- Wu S, Wang J, Sun H, Zhang K, Pal N R. Fractional approximation of broad learning system. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(2): 811–824
- Zhao Hui-Min, Zheng Jian-Jie, Guo Chen, Deng Wu. Domain adaptive BLS model based on manifold regularization framework and MMD. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(7): 1458–1471
(赵慧敏, 郑建杰, 郭晨, 邓武. 基于流形正则化框架和 MMD 的域自适应 BLS 模型. *自动化学报*, 2024, **50**(7): 1458–1471)
- Duan J, Yao S, Tan J, Liu Y, Chen L, Zhang Z, et al. Extreme fuzzy broad learning system: Algorithm, frequency principle, and applications in classification and regression. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2025, **36**(2): 2946–2957
- Wang Z, Jusup M, Wang R W, Shi L, Iwasa Y, Moreno Y, et al. Onymitypromotes cooperation in social dilemma experiments. *Science Advances*, 2017, **3**(3): Article No. e1601444
- Liu L, Liu T, Chen C L P, Wang Y. Modal-regression-based broad learning system for robust regression and classification. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*,

- 2024, **35**(9): 12344–12357
- 13 Shi M, Ding C, Wang R, Shen C, Huang W, Zhu Z. Semi-supervised class incremental broad network for continuous diagnosis of rotating machinery faults with limited labeled samples. *Knowledge-Based Systems*, 2024, **286**: Article No. 111397
 - 14 Wang Z, Jusup M, Guo H, Shi L, Gecek S, Anand M, et al. Communicating sentiment and outlook reverses inaction against collective risks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2020, **117**(30): 17650–17655
 - 15 Jin J, Li Y, Chen C L P. Pattern classification with corrupted labeling via robust broad learning system. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, **34**(10): 4959–4971
 - 16 Jin J, Chang S, Duan J, Li Y, Ding W, Wang Z, et al. Group-wise label enhancement broad learning system for image classification. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, 1–14
 - 17 Wang Z, Mu C, Hu S, Chu C, Li X. Modelling the dynamics of regret minimization in large agent populations: A master equation approach. In: *Proceedings of the Thirty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Vienna, Austria: Morgan Kaufmann, 2022. 534–540
 - 18 Xiang S, Nie F, Meng G, Pan C, Zhang C. Discriminative least squares regression for multiclass classification and feature selection. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **23**(11): 1738–1754
 - 19 Jin J, Geng B, Li Y, Liang J, Xiao Y, Chen C L P. Flexible label-induced manifold broad learning system for multiclass recognition. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, **35**(11): 16076–16090
 - 20 Rudin W. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw-hill, 1976.
 - 21 Zhang L, Yang M, Feng X, Ma Y, Zhang D. Collaborative representation based classification for face recognition. arXiv: 1204.2358, 2012.
 - 22 Wang J, Yang J, Yu K, Lv F, Huang T, Gong Y. Locality-constrained linear coding for image classification. In: *Proceedings of the 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco, USA: IEEE, 2010. 3360–3367
 - 23 Naseem I, Togneri R, Bennamoun M. Linear regression for face recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, **32**(11): 2106–2112
 - 24 Chen C, Wei C, Wang Y F. Low-rank matrix recovery with structural incoherence for robust face recognition. In: *Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Providence, USA: IEEE, 2012. 2618–2625
 - 25 Zhang Y, Jiang Z, Davis L S. Learning structured low-rank representations for image classification. In: *Proceedings of the 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco, USA: IEEE, 2013. 676–683
 - 26 Julien M, Francis B, Jean P. Task-driven dictionary learning. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, **34**(4): 791–804
 - 27 Fang X, Xu Y, Li X, Lai Z, Wong W K, Fang B. Regularized label relaxation linear regression. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(4): 1006–1018
 - 28 Candès E J, Li X, Ma Y, Wright J. Robust principal component analysis? *Journal of the ACM (JACM)*, 2011, **58**(3): 1–37
 - 29 Liu G, Yan S. Latent low-rank representation for subspace segmentation and feature extraction. In: *Proceedings of the 2011 International Conference on Computer Vision*. Barcelona, Spain: IEEE, 2011. 1615–1622
 - 30 Cai X, Ding C, Nie F, Huang H. On the equivalent of low-rank linear regressions and linear discriminant analysis based regressions. In: *Proceedings of the 19th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Chicago, USA: ACM, 2013. 1124–1132
 - 31 Wei C, Chen C, Wang Y. Robust face recognition with structurally incoherent low-rank matrix decomposition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, **23**(8): 3294–3307
 - 32 Li Y, Liu J, Lu H, Ma S. Learning robust face representation with classwise block-diagonal structure. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2014, **9**(12): 2051–2062
 - 33 Fernández-Delgado M, Cernadas E, Barro S, Amorim D. Do we need hundreds of classifiers to solve real world classification problems? *The Journal of Machine Learning Research*, 2014, **15**(1): 3133–3181
 - 34 Wen J, Deng S, Fei L, Zhang Z, Zhang B, Zhang Z, et al. Discriminative regression with adaptive graph diffusion. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, **35**(2): 1797–1809
 - 35 Li X, Wei J, Jin J, Xu T, Yu D. Fisher regularized discriminative broad learning system for visual classification. *Applied Soft Computing*, 2024, **167**: Article No. 112341
 - 36 Georgiades A S, Belhumeur P N, Kriegman D J. From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, **23**(6): 643–660
 - 37 Jiang Z, Lin Z, Davis L S. Label consistent K-SVD: Learning a discriminative dictionary for recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(11): 2651–2664
 - 38 Mohan B C, Chaitanya T K, Tirupal T. Fast and accurate content based image classification and retrieval using gaussian hermite moments applied to coil 20 and coil 100. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*. Kanpur, India: IEEE, 2019: 1–5



金军委 河南工业大学人工智能与大数据学院副教授. 主要研究方向为机器学习, 计算机视觉和神经网络. 本文通信作者.

E-mail: jinjunwei24@163.com

(JIN Jun-Wei Associate professor at the School of Artificial Intelligence and Big Data, Henan University of Technology. His main research interest is machine learning, computer vision, and neural networks. Corresponding author of this paper.)



常少凯 河南工业大学人工智能与大数据学院硕士研究生. 主要研究方向为计算机视觉, 标签增强和宽度学习.

E-mail: csk4188@163.com

(CHANG Shao-Kai Master student at the School of Artificial Intelligence and Big Data, Henan University of Technology. His main research interest is computer vision, label enhancement, and broad learning.)



耿彪 河南工业大学人工智能与大数据学院本科生, 主要研究方向为神经网络, 机器学习和计算机视觉.

E-mail: gengbiao2002@163.com

(GENG Biao Undergraduate at the School of Artificial Intelligence and Big Data, Henan University of

Technology. His main research interest is neural networks, machine learning, and computer vision.)



李艳婷 郑州轻工业大学计算机科学与技术学院讲师. 主要研究方向为函数解析理论, 图像处理, 稀疏编码和机器学习.

E-mail: ytli1227@126.com

(LI Yan-Ting Lecturer at the School of Computer Science and

Technology, Zhengzhou University of Light Industry. Her research interest covers function approximation theory, image processing, sparse coding, and machine learning.)



赵孟 河南工业大学人工智能与大数据学院讲师. 主要研究方向为人机对话系统, 生成式人工智能和自然语言处理. E-mail: zm@haut.edu.cn

(ZHAO Meng Lecturer at the School of Artificial Intelligence and Big Data, Henan University of

Technology. His main research interest is dialogue systems, generative artificial intelligence, and natural language processing.)



王震 西北工业大学网络空间安全学院教授. 主要研究方向为复杂网络, 进化博弈和数据科学.

E-mail: w-zhen@nwpu.edu.cn

(WANG Zhen Professor at the School of Cybersecurity, Northwestern Polytechnical University. His

main research interest is complex networks, evolutionary game, and data science.)



陈俊龙 华南理工大学计算机科学与工程学院教授. 主要研究方向为控制论, 系统和计算智能.

E-mail: philip.chen@ieee.org

(CHEN C. L. Philip Professor at the School of Computer Science and Engineering, South China Uni-

versity of Technology. His main research interest is cybernetics, systems, and computational intelligence.)



李鹏 河南工业大学复杂性科学研究院教授. 主要研究方向为中医大数据和人工智能.

E-mail: lipeng@haut.edu.cn

(LI Peng Professor at the Institute for Complexity Science, Henan University of Technology. His main

research interest is big data and artificial intelligence in traditional Chinese medicine.)