



Portfolio Project — Data Science

Version 1.0 | February, 2026

OTTIMIZZAZIONE DEL PORTAFOGLIO CON IL MODELLO DI MARKOVITZ

Frontiera efficiente, portafogli ottimali e validazione
out-of-sample su dati di mercato

Autore: Lorenzo Scardilli

Documento tecnico. Salvo diversa indicazione, il testo e le visualizzazioni originali di questo report sono protetti da diritto d'autore; è consentita la citazione con attribuzione.

Indice

1 Introduzione	2
1.1 Contesto	2
1.2 Obiettivo del progetto	2
1.3 Impostazione e vincoli	2
2 Dati e preprocessing	3
2.1 Fonte dati e universo investibile	3
2.2 Definizione del prezzo e coerenza temporale	3
2.3 Costruzione dei rendimenti	3
2.4 Convenzioni di annualizzazione	3
3 Analisi esplorativa dei dati (EDA)	4
3.1 Andamento storico dei prezzi: confronto delle performance	4
3.2 Correlazioni tra rendimenti: implicazioni per la diversificazione	4
3.3 Sintesi quantitativa: rendimento atteso e rischio dei singoli asset	6
4 Modello di Markowitz e ottimizzazione	8
4.1 Vincoli e ipotesi operative	8
4.2 Scenario 1: minimizzazione del rischio a rendimento atteso fissato	9
4.3 Scenario 2: massimizzazione del rendimento a rischio fissato	9
4.4 Portafogli di riferimento	9
5 Risultati	10
5.1 Frontiera efficiente e portafogli chiave	10
5.2 Composizione del portafoglio Best Ret/Vol e lettura dei pesi	12
5.3 Sintesi interpretativa	13
6 Backtest out-of-sample e controlli di robustezza	14
6.1 Metriche di performance	14
6.2 Equity curve e interpretazione visiva	15
6.3 Controlli di robustezza: correlazione media e concentrazione	16
6.4 Contributi al rischio del portafoglio MinVar	16
6.5 Walk-forward e turnover: stabilità dei pesi nel tempo	16
7 Limiti e assunzioni	17
8 Conclusioni	18

1 Introduzione

1.1 Contesto

La costruzione di un portafoglio azionario non riguarda solo la scelta di “titoli migliori”, ma la definizione di una combinazione di asset che bilanci in modo razionale **rendimento atteso e rischio**. In finanza quantitativa, questo problema è formalizzato dal modello media-varianza di Markowitz, che permette di identificare portafogli efficienti: a parità di rischio massimizzano il rendimento atteso, oppure a parità di rendimento minimizzano la volatilità.

1.2 Obiettivo del progetto

L’obiettivo è applicare il modello di Markowitz a un insieme di 10 azioni large-cap statunitensi, utilizzando dati storici scaricati con yfinance, per:

- stimare rendimenti attesi e rischio (varianze e covarianze) a partire dai rendimenti storici;
- costruire la **frontiera efficiente** e visualizzare il trade-off rischio–rendimento;
- risolvere due problemi operativi di ottimizzazione:
 1. minimizzare il rischio dato un rendimento atteso fissato;
 2. massimizzare il rendimento atteso dato un livello di rischio fissato;
- individuare e interpretare portafogli chiave (es. **Global Minimum Variance**, **massimo rendimento** e **miglior rendimento/volatilità**);
- verificare la robustezza con un confronto **out-of-sample** (train/test) e una simulazione **walk-forward** con ribilanciamento periodico.

1.3 Impostazione e vincoli

Per mantenere il progetto realistico e interpretabile, l’ottimizzazione è condotta in regime **long-only** con vincolo di concentrazione:

$$0 \leq w_i \leq 0.30, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1,$$

dove w_i rappresenta il peso dell’asset i in portafoglio. Questo evita soluzioni estreme (portafogli troppo concentrati) e rende i risultati più vicini a vincoli tipici di gestione.

2 Dati e preprocessing

2.1 Fonte dati e universo investibile

I dati di mercato sono stati estratti tramite la libreria Python `yfinance`, selezionando un universo di **10 titoli azionari large-cap statunitensi** identificati dai rispettivi ticker: AAPL (Apple), MSFT (Microsoft), AMZN (Amazon), GOOGL (Alphabet/Google), KO (Coca-Cola), JNJ (Johnson & Johnson), XOM (Exxon Mobil), JPM (JPMorgan Chase), TSLA (Tesla), DIS (The Walt Disney Company). Il campione copre il periodo **2018-01-02 – 2026-02-04** con frequenza giornaliera, per un totale di **2034** osservazioni di prezzo dopo le fasi di pulizia e allineamento.

2.2 Definizione del prezzo e coerenza temporale

L'analisi utilizza i prezzi **Adjusted Close** (con fallback su **Close** in assenza del campo), così da incorporare automaticamente gli effetti di *split* e *dividendi* e rendere le serie confrontabili nel tempo. Poiché i titoli possono avere giornate non osservate in modo perfettamente coincidente (differenze di calendario, sospensioni o dati incompleti), le serie sono state **allineate temporalmente** mantenendo esclusivamente le date comuni a tutti gli asset. Operativamente, questo equivale a rimuovere le righe con almeno un valore mancante, ottenendo una matrice prezzi completa e consistente, necessaria per stimare in modo stabile la matrice di covarianza e risolvere l'ottimizzazione in chiave Markowitz. Nel campione finale non risultano valori mancanti (*missing* = 0).

2.3 Costruzione dei rendimenti

Sia $P_{t,i}$ il prezzo (adjusted) dell'asset i al tempo t . I rendimenti semplici giornalieri sono calcolati come:

$$r_{t,i} = \frac{P_{t,i}}{P_{t-1,i}} - 1.$$

La matrice dei rendimenti contiene **2033** osservazioni e **10** asset; dopo il preprocessing non sono presenti valori mancanti.

2.4 Convenzioni di annualizzazione

Per rendere confrontabili rischio e rendimento, le grandezze sono annualizzate assumendo 252 giorni di trading:

$$\mu_i = 252 \cdot \mathbb{E}[r_{t,i}], \quad \Sigma = 252 \cdot \text{Cov}(r_t), \quad \sigma_i = \sqrt{252} \cdot \text{Std}(r_{t,i}).$$

Queste convenzioni sono applicate in modo coerente all'intero workflow: stima dei parametri, costruzione della frontiera efficiente e valutazioni comparative.

3 Analisi esplorativa dei dati (EDA)

3.1 Andamento storico dei prezzi: confronto delle performance

Per confrontare correttamente l'evoluzione dei titoli nel tempo, i prezzi sono stati **normalizzati** ponendo base 100 alla prima osservazione disponibile. Questa scelta evita che il confronto sia influenzato da livelli di prezzo iniziali molto diversi tra i titoli e consente di leggere in modo immediato la **crescita relativa** e le **fasi di drawdown** nel periodo osservato.

La normalizzazione è particolarmente utile in un contesto Markowitz, perché aiuta a verificare visivamente che il campione includa profili eterogenei: titoli con crescita marcata ma più instabile e titoli con andamento più regolare. Tale eterogeneità è rilevante, poiché l'ottimizzazione non mira a “selezionare il migliore”, ma a **combinare** asset con caratteristiche diverse per costruire portafogli efficienti lungo il trade-off rischio/rendimento.



Figura 1: Prezzi normalizzati (base=100): confronto delle performance relative nel periodo 2018–2026.

Dal grafico si osserva una dispersione crescente tra i titoli, coerente con orizzonti temporali lunghi: alcune serie mostrano traiettorie di crescita molto pronunciate, mentre altre risultano più stabili o con performance complessiva più contenuta. Questa evidenza è coerente con l'impostazione successiva: la stima del rischio e la costruzione della covarianza sono giustificate dalla presenza di dinamiche differenti tra asset.

3.2 Correlazioni tra rendimenti: implicazioni per la diversificazione

Il modello di Markowitz dipende in modo cruciale non solo dai rendimenti attesi, ma anche dalla **dipendenza statistica** tra gli asset. Per questo motivo si è calcolata la

matrice di correlazione dei **rendimenti giornalieri**. La correlazione fornisce un'indicazione sintetica di quanto due titoli tendano a muoversi insieme nel breve periodo: valori più alti indicano maggiore co-movimento, mentre valori più bassi suggeriscono un potenziale beneficio di diversificazione.

La lettura della matrice ha due obiettivi:

- verificare se l'universo investibile presenta effettivamente **spazio di diversificazione** (correlazioni non prossime a 1 su tutte le coppie);
- anticipare quali gruppi di titoli possano contribuire in modo simile al rischio complessivo, influenzando la composizione dei portafogli ottimali.

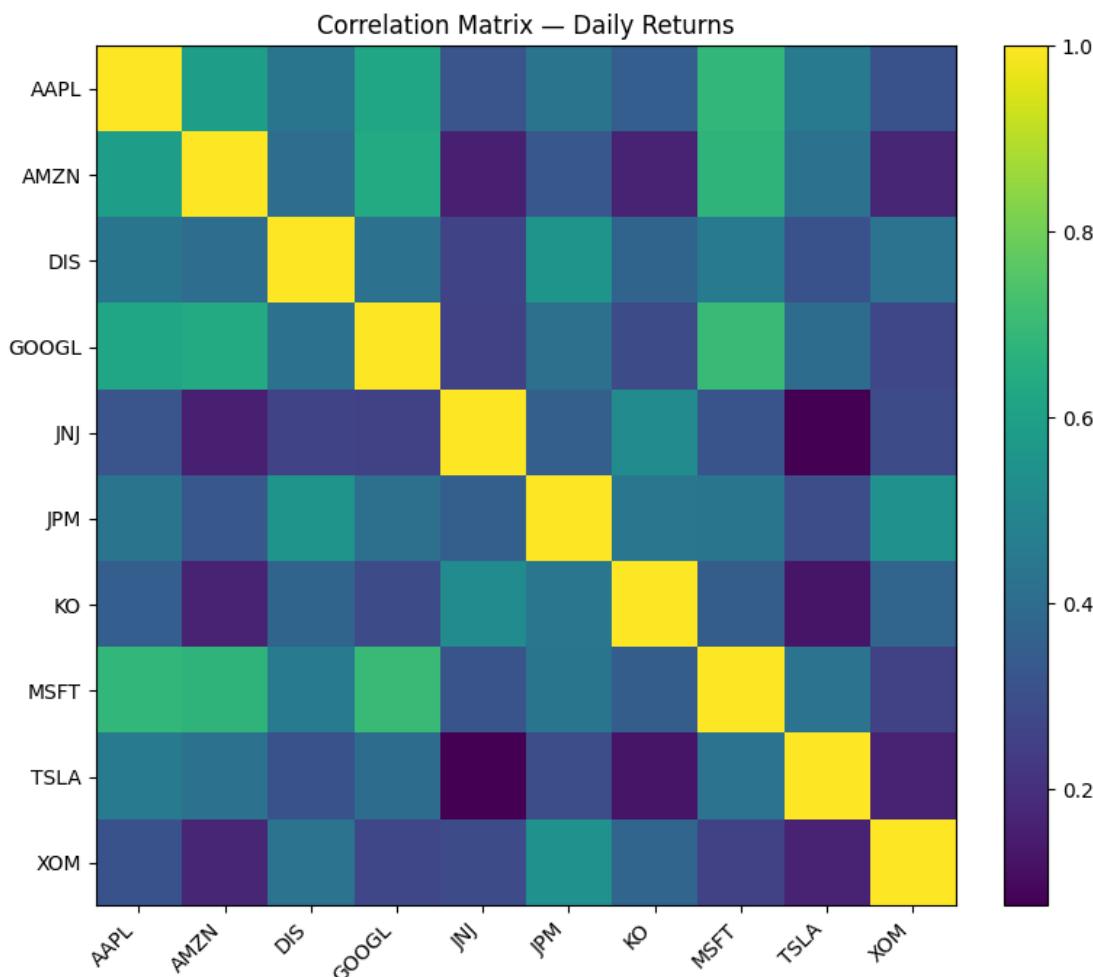


Figura 2: Matrice di correlazione dei rendimenti giornalieri (2018–2026).

La struttura osservata supporta l'idea che la diversificazione sia praticabile: non tutte le coppie mostrano correlazioni elevate. In un framework Markowitz, questa evidenza giustifica l'uso della matrice di covarianza come strumento per ridurre la volatilità complessiva rispetto a quanto sarebbe ottenibile combinando asset fortemente correlati.

3.3 Sintesi quantitativa: rendimento atteso e rischio dei singoli asset

Per passare da una lettura qualitativa a una misura coerente con l'ottimizzazione, si sono calcolate le statistiche annualizzate sui rendimenti giornalieri: **rendimento atteso** e **volatilità**. In particolare:

- il rendimento atteso annualizzato è stimato come media dei rendimenti giornalieri moltiplicata per 252;
- la volatilità annualizzata è stimata come deviazione standard dei rendimenti giornalieri moltiplicata per $\sqrt{252}$.

Queste trasformazioni rendono i valori interpretabili su scala annua e confrontabili tra asset e portafogli.

Tabella 1: Statistiche annualizzate per asset (rendimento atteso e volatilità).

Ticker	Exp Return (ann.)	Volatility (ann.)
TSLA	0.565399	0.634497
AAPL	0.285812	0.307271
GOOGL	0.274984	0.308771
MSFT	0.246089	0.285322
AMZN	0.228272	0.343464
JPM	0.203329	0.290055
XOM	0.159271	0.301695
KO	0.115302	0.193029
JNJ	0.111472	0.195534
DIS	0.048343	0.308395

Accanto a queste grandezze, si è riportato anche un indicatore sintetico **Exp Return / Volatility**, utile come proxy descrittiva del trade-off rischio/rendimento del singolo titolo. Questo rapporto non sostituisce l'ottimizzazione (che incorpora anche la covarianza tra asset), ma aiuta a capire quali titoli, presi isolatamente, presentino una combinazione più favorevole di rendimento e rischio stimati nel campione.

Tabella 2: Indicatore descrittivo rischio/rendimento per asset: Exp Return / Volatility.

Ticker	Exp Return	Volatility	Return/Vol
AAPL	0.285812	0.307271	0.930161
TSLA	0.565399	0.634497	0.891099
GOOGL	0.274984	0.308771	0.890577
MSFT	0.246089	0.285322	0.862497
JPM	0.203329	0.290055	0.701003
AMZN	0.228272	0.343464	0.664615
KO	0.115302	0.193029	0.597329
JNJ	0.111472	0.195534	0.570091
XOM	0.159271	0.301695	0.527921
DIS	0.048343	0.308395	0.156758

Questa fase di analisi esplorativa, nel complesso, ha messo in evidenza tre punti che spiegano perché ha senso passare all'ottimizzazione di portafoglio:

- i titoli non si sono mossi tutti allo stesso modo nel tempo: le performance sono state molto diverse, quindi allocare “a caso” non è una buona idea;
- le correlazioni tra i rendimenti non sono sempre alte: questo lascia spazio alla diversificazione per contenere il rischio complessivo;
- a parità di periodo osservato, alcuni titoli offrono più rendimento atteso ma anche più volatilità, mentre altri sono più stabili: per questo la frontiera efficiente è utile per scegliere combinazioni con un compromesso rischio–rendimento più favorevole.

4 Modello di Markowitz e ottimizzazione

Il problema affrontato è quello classico di Markowitz: dato un insieme di N asset, si vuole costruire un portafoglio definito da un vettore di pesi

$$w = (w_1, \dots, w_N)^\top,$$

dove w_i rappresenta la quota di capitale allocata sull'asset i .

Sulla base dei rendimenti storici giornalieri, si stimano:

$$\mu \in \mathbb{R}^N \quad (\text{rendimenti attesi annualizzati}), \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (\text{matrice di covarianza annualizzata}).$$

Per un portafoglio w , le grandezze di interesse sono:

$$\mathbb{E}[R_p] = w^\top \mu, \quad \text{Var}(R_p) = w^\top \Sigma w, \quad \sigma_p = \sqrt{w^\top \Sigma w}.$$

In questo framework, la diversificazione è catturata da Σ : due asset con volatilità elevate possono generare un portafoglio meno rischioso se la covarianza tra i rendimenti è contenuta.

4.1 Vincoli e ipotesi operative

Per rendere le soluzioni realistiche e confrontabili, l'ottimizzazione è stata svolta imponendo vincoli esplicativi:

- **Vincolo di budget:** il capitale viene interamente allocato:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

- **Long-only:** non si ammettono vendite allo scoperto:

$$w_i \geq 0 \quad \forall i.$$

- **Cap per singolo asset:** per limitare concentrazione e rendere più stabile la soluzione, si impone un tetto massimo:

$$w_i \leq 0.30 \quad \forall i.$$

Il vincolo di cap è stato mantenuto per evitare portafogli eccessivamente concentrati in pochi titoli, rendere i risultati più coerenti con una gestione prudente e ridurre l'instabilità tipica dell'ottimizzazione media-varianza su campioni finiti.

4.2 Scenario 1: minimizzazione del rischio a rendimento atteso fissato

Nel primo scenario si vuole identificare, per un dato rendimento target r^* , il portafoglio con rischio minimo. Formalmente:

$$\min_w w^\top \Sigma w \quad \text{s.t.} \quad w^\top \mu = r^*, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 0.30.$$

Ripetendo il problema su una griglia di valori r^* si ottiene la **frontiera efficiente** “classica”, cioè l’insieme dei portafogli che, per ogni livello di rendimento, minimizzano la volatilità.

4.3 Scenario 2: massimizzazione del rendimento a rischio fissato

Nel secondo scenario si vuole identificare, per un livello di rischio massimo ammesso σ^* , il portafoglio che massimizza il rendimento atteso. Formalmente:

$$\max_w w^\top \mu \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{w^\top \Sigma w} \leq \sigma^*, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 0.30.$$

Anche in questo caso, una griglia di valori σ^* consente di tracciare l’insieme dei portafogli efficienti dal punto di vista del vincolo di rischio, utile per visualizzare direttamente come cresce il rendimento massimo ottenibile quando si accetta più volatilità.

4.4 Portafogli di riferimento

Oltre alla frontiera, sono stati identificati alcuni portafogli “chiave” che aiutano a interpretare i risultati:

- **GMV (Global Minimum Variance)**: portafoglio a varianza minima sotto i vincoli (baseline di rischio minimo);
- **Max Return (vincolato)**: portafoglio che massimizza $w^\top \mu$ sotto i vincoli (estremo ad alto rendimento e alto rischio);
- **Best Return/Vol**: portafoglio che massimizza il rapporto $\frac{w^\top \mu}{\sigma_p}$ come proxy di un portafoglio “tangency-like” quando non si introduce (o non si enfatizza) un tasso risk-free.

Questi portafogli sono utili perché permettono di leggere la frontiera non come una curva astratta, ma come un insieme di soluzioni con significato operativo: rischio minimo ottenibile, rendimento massimo ottenibile sotto vincoli, e compromesso rischio/rendimento più favorevole secondo un criterio sintetico.

5 Risultati

L'allocazione è stata determinata con il modello di Markowitz (media-varianza), in cui il portafoglio è descritto da un vettore di pesi w tale che $\sum_i w_i = 1$. L'ottimizzazione utilizza rendimento atteso annualizzato μ e matrice di covarianza annualizzata Σ , stimati sui rendimenti storici giornalieri. Per mantenere soluzioni realistiche e confrontabili con un'allocazione prudente, si è adottato un vincolo *long-only* ($w_i \geq 0$) e un limite massimo per singolo titolo (*cap*) pari al 30% ($w_i \leq 0.30$), così da evitare portafogli eccessivamente concentrati.

L'analisi è stata condotta secondo due formulazioni complementari, utili per leggere il trade-off rischio–rendimento da due prospettive diverse:

- **Scenario 1 (minimizzazione del rischio a rendimento fissato).** Per una griglia di rendimenti target, si è stimato il portafoglio con volatilità minima:

$$\min_w w^\top \Sigma w \quad \text{s.t.} \quad w^\top \mu = \mu^*, \quad \sum_i w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 0.30.$$

- **Scenario 2 (massimizzazione del rendimento a rischio fissato).** Per una griglia di volatilità target, si è stimato il portafoglio con rendimento massimo:

$$\max_w w^\top \mu \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{w^\top \Sigma w} \leq \sigma^*, \quad \sum_i w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 0.30.$$

Le due formulazioni descrivono, di fatto, la stessa frontiera efficiente vista “da due lati”: la prima costruisce il *minimo rischio* per livelli crescenti di rendimento, la seconda il *massimo rendimento* per livelli crescenti di rischio.

5.1 Frontiera efficiente e portafogli chiave

La frontiera efficiente sintetizza il compromesso tra volatilità attesa e rendimento atteso ottenibile combinando gli asset dell'universo investibile sotto i vincoli imposti. La Figura 3 riporta la frontiera stimata e la Figura 4 evidenzia tre portafogli di riferimento:

- **GMV (Global Minimum Variance):** portafoglio con volatilità minima tra tutti quelli ammissibili;
- **MaxRet:** portafoglio con rendimento atteso massimo, dato il set di vincoli;
- **Best Ret/Vol:** portafoglio che massimizza il rapporto rendimento/volatilità (proxy del miglior trade-off rischio–rendimento in assenza di risk-free coerente nel modello base).

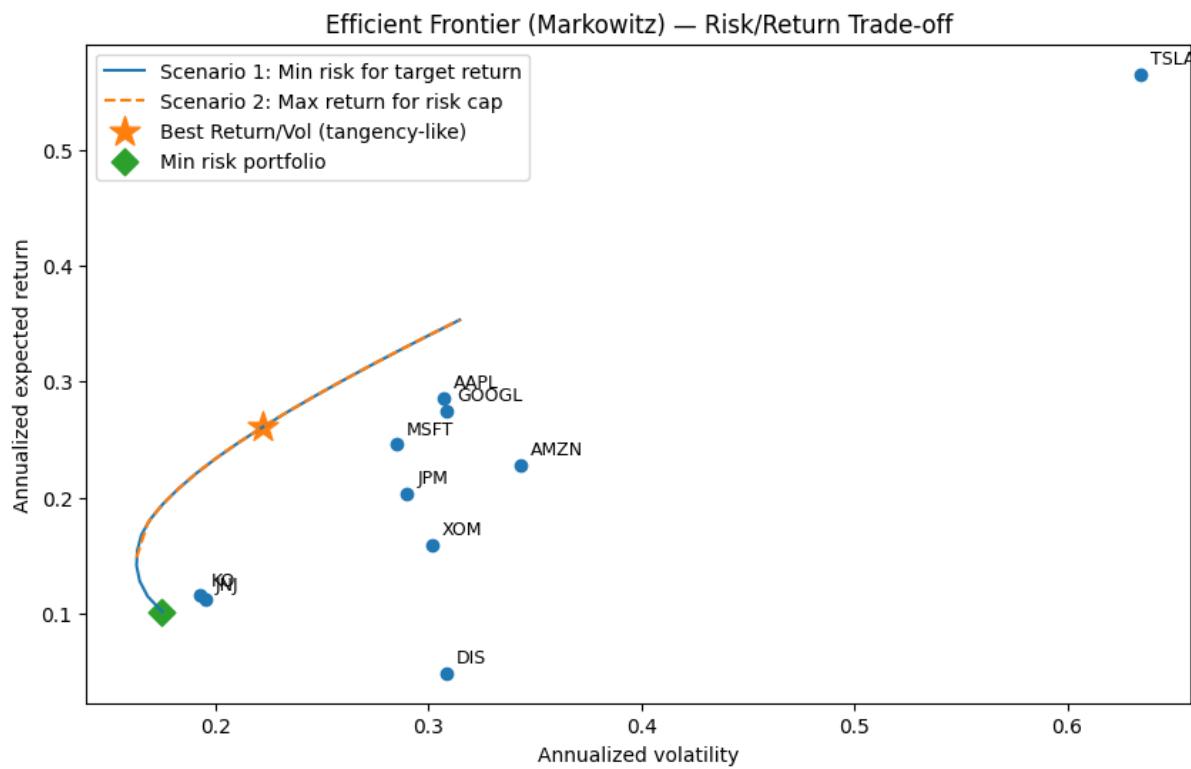


Figura 3: Frontiera efficiente: confronto tra Scenario 1 (min rischio per rendimento target) e Scenario 2 (max rendimento per rischio target).

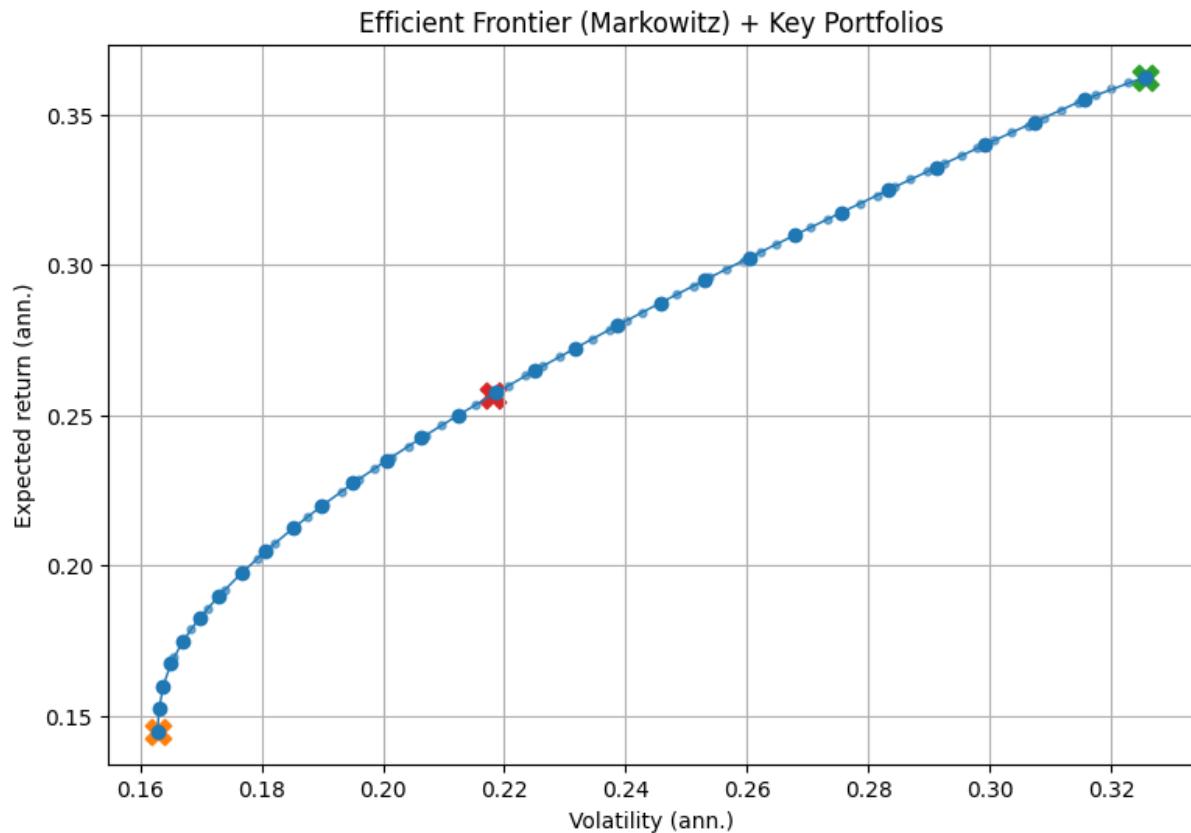


Figura 4: Frontiera efficiente con portafogli chiave (GMV, MaxRet, Best Ret/Vol).

I risultati principali dei tre portafogli chiave sono riassunti nella Tabella 3. In particolare, il portafoglio *GMV* rappresenta la soluzione più prudente in termini di rischio; *MaxRet* si colloca naturalmente all'estremo opposto; *Best Ret/Vol* si posiziona in area intermedia, dove l'incremento di rendimento atteso resta relativamente "efficiente" rispetto al rischio assunto.

Tabella 3: Portafogli chiave sulla frontiera efficiente (ann.).

Portafoglio	Volatilità	Rendimento atteso
GMV (min varianza)	0.1628	0.1447
MaxRet (max rendimento)	0.3256	0.3625
Best Ret/Vol (proxy)	0.2180	0.2566

5.2 Composizione del portafoglio Best Ret/Vol e lettura dei pesi

La Tabella/Figura 5 mostra la composizione del portafoglio *Best Ret/Vol*. Sotto i vincoli adottati (long-only e cap 30%), la soluzione tende a distribuire i pesi su più titoli, privilegiando quelli che, nel campione storico, combinano rendimento atteso relativamente alto e contributo alla diversificazione (tramite correlazioni non perfette).

Nel caso analizzato, il portafoglio *Best Ret/Vol* risulta maggiormente esposto a titoli con profili rischio-rendimento storicamente favorevoli (ad esempio growth/tech) ma conserva anche quote su titoli più difensivi, coerentemente con la logica di riduzione del rischio di portafoglio attraverso la covarianza.

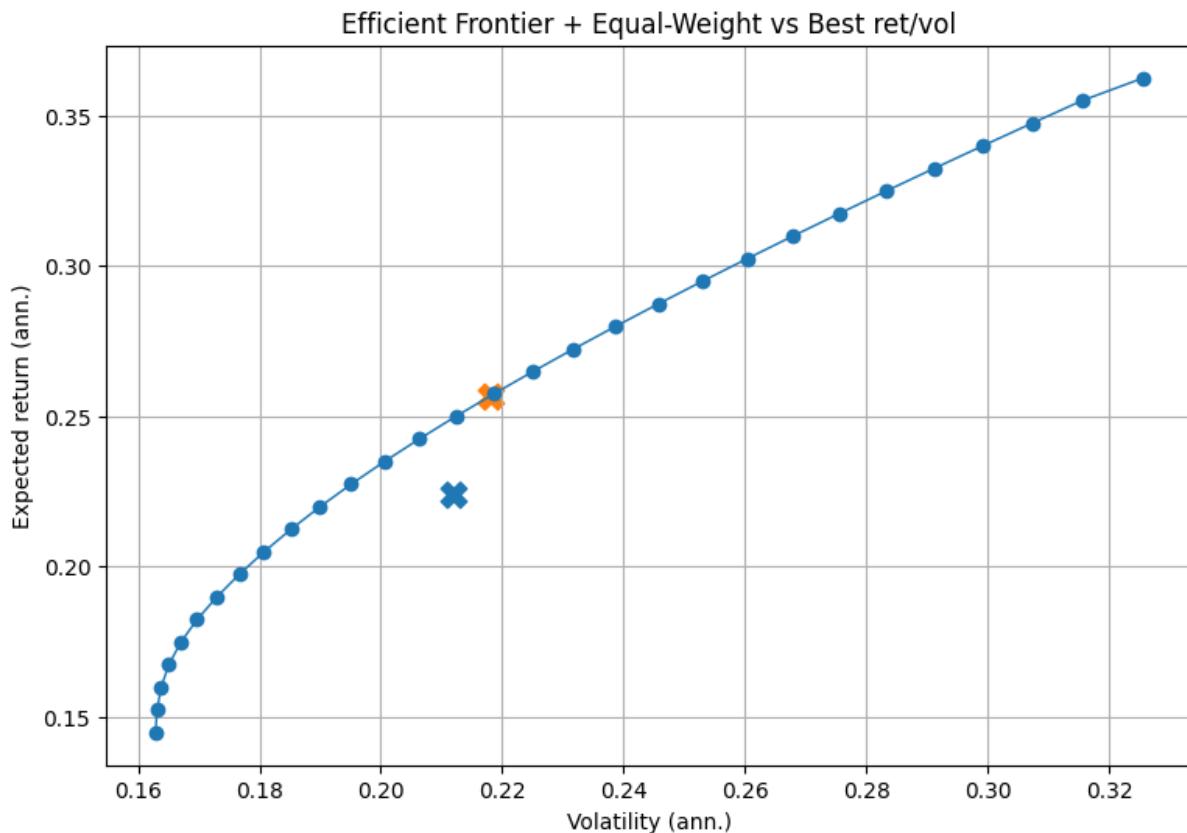


Figura 5: Pesi del portafoglio Best Ret/Vol (vincoli: long-only, cap 30%).

5.3 Sintesi interpretativa

Nel complesso, l'ottimizzazione evidenzia un punto chiave: combinare asset con profili diversi e correlazioni non perfette permette di ottenere portafogli che, a parità di rendimento atteso, riducono la volatilità rispetto all'investimento su singoli titoli. La frontiera efficiente rende esplicito questo trade-off e consente di selezionare un portafoglio coerente con un obiettivo operativo (minimizzare rischio, massimizzare rendimento, oppure scegliere un compromesso come Best Ret/Vol).

6 Backtest out-of-sample e controlli di robustezza

Per verificare se l'allocazione ottimizzata mantiene proprietà ragionevoli anche fuori campione, si è eseguito un backtest **out-of-sample** con split temporale:

- **Train:** 2018-01-03 → 2023-12-29 ($n = 1508$ rendimenti giornalieri);
- **Test:** 2024-01-02 → 2026-02-04 ($n = 525$ rendimenti giornalieri).

I pesi dei portafogli ottimizzati sono stimati **solo sul train** e applicati sul test senza ri-ottimizzazione, così da misurare la performance in condizioni più vicine a un utilizzo reale.

Nel test sono stati confrontati tre portafogli:

- **MinVar (train→test):** portafoglio a varianza minima stimato sul train (vincoli long-only e cap 30%);
- **Sharpe-like (train→test):** portafoglio selezionato sul train massimizzando il rapporto rendimento/volatilità (proxy del miglior compromesso rischio–rendimento);
- **Equal-weight (test):** baseline con pesi uguali (10% ciascuno), usata come riferimento semplice e trasparente.

6.1 Metriche di performance

La valutazione è basata su indicatori standard di performance e rischio:

- **CAGR:** rendimento composto annualizzato;
- **Volatilità:** deviazione standard annualizzata dei rendimenti;
- **Sharpe:** rapporto tra rendimento medio e volatilità (qui in forma coerente con l'implementazione del notebook);
- **Max Drawdown (MaxDD):** perdita massima picco-valle sulla curva di capitale, utile per descrivere scenari avversi.

La Tabella 4 riporta i risultati sul test. In questo campione, il portafoglio **MinVar** mostra un profilo complessivamente più “stabile”: volatilità e drawdown più contenuti rispetto alle alternative, con Sharpe più elevato. La baseline **Equal-weight** presenta un CAGR superiore, ma accompagnato da maggiore rischio e drawdown. Il portafoglio **Sharpe-like** risulta invece più esposto alla volatilità, con un MaxDD più profondo nel periodo di test.

Tabella 4: Backtest out-of-sample (Test: 2024-01-02 – 2026-02-04).

Portafoglio	CAGR	Vol	Sharpe	MaxDD
MinVar (train→test)	0.246720	0.110150	2.057838	-0.106495
Equal-weight (test)	0.276908	0.165635	1.558736	-0.200059
Sharpe-like (train→test)	0.215640	0.249227	0.907103	-0.304004

6.2 Equity curve e interpretazione visiva

La Figura 6 mostra l'evoluzione del capitale (crescita di 1 unità investita) per i tre portafogli sul periodo di test. L'evidenza grafica è coerente con la tabella: **MinVar** tende a seguire una traiettoria più regolare e con drawdown più contenuti; **Equal-weight** mostra oscillazioni più ampie; **Sharpe-like** presenta una dinamica più instabile nel periodo analizzato.

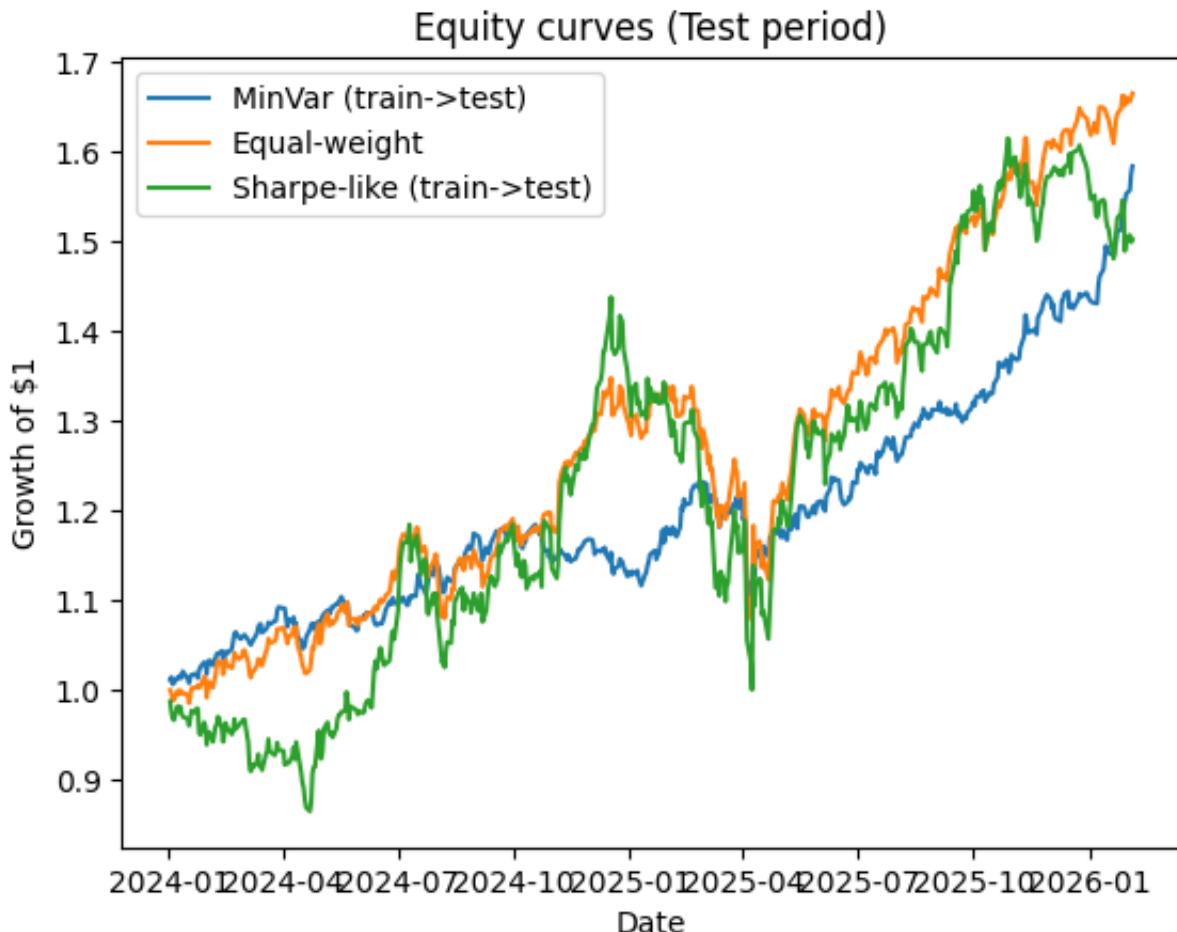


Figura 6: Equity curve sul periodo di test: confronto tra MinVar, Sharpe-like e Equal-weight.

6.3 Controlli di robustezza: correlazione media e concentrazione

Per contestualizzare la diversificazione effettiva nel periodo di test, è stata calcolata la correlazione media a coppie dei rendimenti:

$$\bar{\rho}_{test} \approx 0.21,$$

indicando che le dipendenze tra titoli non sono estreme e che esiste spazio per benefici di diversificazione.

In aggiunta, la concentrazione dei pesi è stata monitorata tramite (i) numero di posizioni “attive” e (ii) indice di Herfindahl-Hirschman (HHI), utile a descrivere quanto il portafoglio sia dominato da pochi titoli. In generale, con vincolo di cap al 30% la concentrazione è limitata per costruzione, rendendo le soluzioni meno fragili e più interpretabili.

6.4 Contributi al rischio del portafoglio MinVar

Per il portafoglio MinVar è stata analizzata la distribuzione del rischio tra i titoli (*risk contributions*) usando la covarianza stimata sul periodo di test. Questa scomposizione mostra che un titolo può incidere molto sulla volatilità complessiva anche con un peso non elevato, se risulta più volatile o più correlato con il resto del portafoglio. Nel periodo di test, i contributi principali al rischio risultano concentrati su **JNJ** e **KO**, seguiti da **AMZN** e **XOM**, mentre gli altri titoli contribuiscono in misura più contenuta (coerentemente con pesi ridotti nel MinVar).

6.5 Walk-forward e turnover: stabilità dei pesi nel tempo

Oltre allo split train/test, è stata eseguita una simulazione *walk-forward* sul portafoglio **MinVar** con finestra mobile di circa **756** giorni di trading (circa 3 anni) e **ribilanciamento mensile (67 date di rebalance)**. L'obiettivo è verificare la stabilità dell'allocazione quando i parametri vengono ri-stimati nel tempo.

La stabilità operativa è stata sintetizzata tramite il **turnover** (norma L1), definito come:

$$\text{Turnover}_t = \sum_i |w_{i,t} - w_{i,t-1}|.$$

Nel campione analizzato, il turnover medio per rebalance è pari a **0.072**, che corrisponde a un turnover annuo approssimato (ribilanciamento mensile) di circa **0.862**. Il picco massimo osservato è **0.685 (2018-02-28)**, indicando un episodio di riallocazione più marcata.

Nel complesso, sotto vincoli *long-only* e *cap* al 30%, l'allocazione MinVar risulta mediamente stabile, con ribilanciamenti generalmente contenuti e rare variazioni più intense, rilevanti in ottica di costi e operatività.

7 Limiti e assunzioni

- **Stima storica di μ e Σ .** Rendimento atteso e covarianza sono stimati a partire dai rendimenti storici del periodo 2018–2026. Questa scelta è standard nel framework Markowitz, ma implica che i parametri possano non essere stabili nel tempo (cambiamenti di regime, shock macro, variazioni strutturali dei titoli).
- **Sensibilità dell'ottimizzazione media-varianza.** Il problema di Markowitz è noto per essere sensibile a errori di stima, soprattutto su Σ e (ancor più) su μ . Per ridurre questa fragilità è stata considerata anche una covarianza shrinkage (Ledoit–Wolf), ma il rischio di instabilità non può essere eliminato del tutto.
- **Vincoli come scelta progettuale.** L'impostazione long-only e il cap al 30% rendono le soluzioni più realistiche e meno estreme, ma restringono lo spazio di ottimizzazione: la frontiera efficiente stimata è quindi condizionata da questi vincoli e non rappresenta la frontiera “teorica” senza restrizioni.
- **Costi di transazione e frizioni di mercato.** I backtest non includono commissioni, spread e impatto di mercato. In particolare, nel walk-forward il turnover osservato suggerisce che l'operatività potrebbe essere influenzata da costi di ribilanciamento, che ridurrebbero il rendimento netto rispetto a quanto mostrato.
- **Universo investibile e assenza di benchmark di mercato.** L'analisi è condotta su 10 azioni large-cap USA. I risultati dipendono dalla scelta dei titoli e non sono generalizzabili a portafogli più ampi o multi-asset. Inoltre, il confronto è fatto con baseline equal-weight, ma non con un benchmark di mercato (es. S&P 500), che potrebbe offrire un riferimento più “istituzionale”.
- **Interpretazione economica.** Il modello è costruito per descrivere un trade-off rischio-rendimento basato su varianza e rendimento atteso. Non fornisce una lettura causale né incorpora elementi come fattori di rischio, valutazioni fondamentali o vincoli regolamentari specifici.

8 Conclusioni

Il progetto ha applicato il modello media-varianza di Markowitz a un universo di 10 azioni large-cap statunitensi (2018–2026), stimando rendimenti attesi e covarianze dai rendimenti giornalieri e traducendo tali stime in scelte di allocazione sotto vincoli operativi (*long-only* e cap al 30%).

La costruzione della **frontiera efficiente** ha reso esplicito il compromesso tra rischio e rendimento: aumentando la volatilità ammissibile, cresce il rendimento atteso massimo ottenibile, mentre il portafoglio **GMV** rappresenta la soluzione più prudente (rischio minimo). Il portafoglio **Best Ret/Vol** si colloca in area intermedia e sintetizza un compromesso favorevole in termini di rendimento atteso per unità di rischio, coerente con l'evidenza che correlazioni non perfette permettono benefici di diversificazione.

La verifica **out-of-sample** (train 2018–2023, test 2024–2026) ha mostrato che il portafoglio **MinVar** mantiene un profilo più regolare nel periodo di test, con volatilità e drawdown più contenuti rispetto alle alternative considerate (equal-weight e soluzione “Sharpe-like” stimata sul train). La simulazione **walk-forward** con ribilanciamento mensile ha inoltre fornito un riscontro operativo sulla stabilità dei pesi nel tempo, evidenziando un turnover medio contenuto ma con alcuni episodi di riallocazione più marcata.

Nel complesso, l'analisi conferma l'utilità pratica del framework di Markowitz come strumento per passare da statistiche storiche (rendimento, rischio e dipendenze) a una decisione di allocazione coerente con un obiettivo esplicito. Allo stesso tempo, i risultati vanno letti tenendo presenti i limiti tipici dell'approccio media-varianza (sensibilità alla stima dei parametri, assenza di frizioni e dipendenza dal campione storico), che motivano l'uso di vincoli e di tecniche di robustezza come lo shrinkage della covarianza.