

Sistema dinàmic de Ramsey-Cass-Koopmans

Mètodes Numèrics i Probabilístics

Joaquin Flores Ruiz
Genís Ruiz Menárguez
Pol Abadia Conejos
Oliver Einard Tarragó Boardman
Francesco Tedesco



Continguts

- 1 Introducció al model Ramsey-Cass-Koopmans
- 2 Descripció del sistema
- 3 Per què Runge Kutta 4 2D?
- 4 Implementació Runge-Kutta 4 2D en Python
- 5 Exemple i interpretació
- 6 Conclusió

Introducció al model Ramsey-Cass-Koopmans

Objectiu

Predir com el rendiment a llarg termini de sistemes macroeconòmics, basantse es dos factors principals:

- Acumulació de capital
- Creixement del consum

Aplicacions en la indústria

Aquest model és utilitzat en empresa per poder prendre decisions respecte

- Gestió d'inversions
- Plans d'expansió
- Activitats de Recerca i Desenvolupament (R&D)

Com que es tracta d'un model teòric, per poder aplicar els resultat hem de fer una anàlisi de la situació avançada, ja que hem de tenir en compte:

- La simplificació per part del model
- Possibles fenòmens no considerats pel model

Descripció del sistema

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = k^\alpha - c - (\phi + \xi + \delta) \cdot k \\ \frac{dc}{dt} = c \cdot \left(\frac{\alpha \cdot k^{\alpha-1} - \theta - \xi - \delta}{\rho} - \phi \right) \end{cases}$$

- $k(t)$: **Capital per capita**
- $c(t)$: **Consum per capita**
- α : Elasticitat de la producció amb respecte al capital.
- δ : Tassa de depreciació del capital
- ϕ : Tassa de creixement de la productivitat de la força de treball.
- ρ : Tassa de preferència temporal, o aversió al risc.
- ξ : Tassa de creixement de la força de treball.
- θ : Paràmetre de suavització del consum

Per què Runge Kutta 4 2D?

Runge Kutta 4 2D és un mètode numèric utilitzat per a resoldre equacions diferencials ordinàries les quals no tenen una solució analítica.

Algunes raons per les quals aquest model és utilitzat en indústria:

Precisió

És tracta d'un mètode que pot aconseguir una major precisió degut a les diferents avaluacions del pendent per a poder aproximar el següent pas.

Simplicitat

És un mètode fàcilment implementable i ofereix una considerable eficiència, en el nostre cas ho farem en Python.

Versatilitat

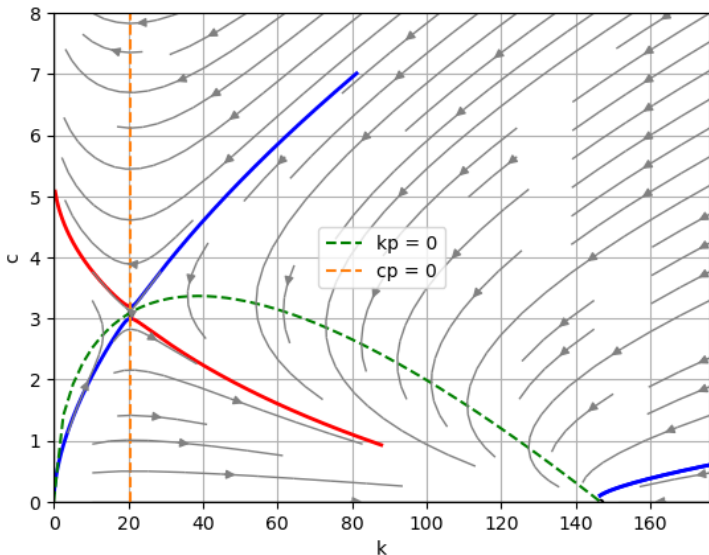
Aquest mètode pot ser utilitzat per a resoldre un nombre ampli d'equacions diferencials ordinàries, fàcilment aplicable a sistemes de 2 dimensions.

Implementació Runge-Kutta 4 2D en Python

```
# Función de resolución del sistema de ecuaciones diferenciales
def runge_kutta_2D(xp, yp, x0, y0, t0, tf, h):
    N = int((tf - t0) / abs(h))
    t = np.linspace(t0, tf, N+1)
    x = np.zeros(N+1)
    y = np.zeros(N+1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(N):
        # Cálculo de las pendientes en los puntos intermedios
        k1 = xp(x[i], y[i])
        l1 = yp(x[i], y[i])
        k2 = xp(x[i] + h * k1 / 2, y[i] + h * l1 / 2)
        l2 = yp(x[i] + h * k1 / 2, y[i] + h * l1 / 2)
        k3 = xp(x[i] + h * k2 / 2, y[i] + h * l2 / 2)
        l3 = yp(x[i] + h * k2 / 2, y[i] + h * l2 / 2)
        k4 = xp(x[i] + h * k3, y[i] + h * l3)
        l4 = yp(x[i] + h * k3, y[i] + h * l3)
        # Cálculo de los nuevos valores de x e y utilizando el método
        # de Runge-Kutta de cuarto orden
        x[i+1] = x[i] + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        y[i+1] = y[i] + h * (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6
    return t, x, y
```

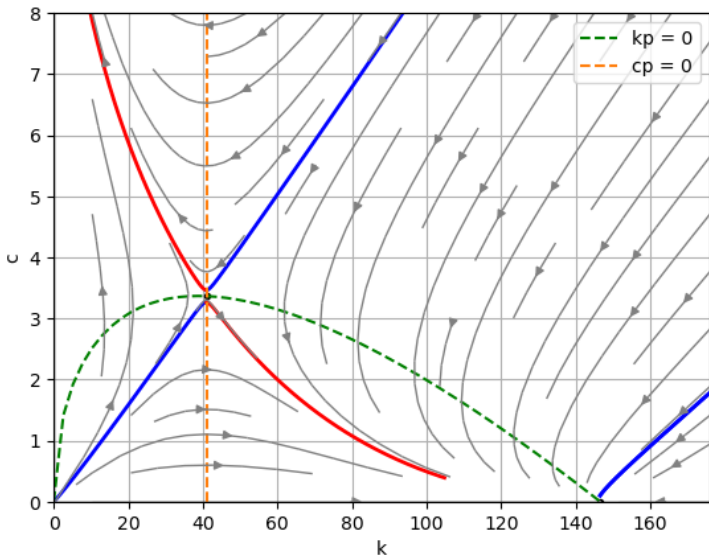
Exemple i interpretació

$\alpha : 0.55$
 $\delta : 0.08$
 $\phi : 0.025$
 $\rho : 2$
 $\xi : 0.001$
 $\theta : 0.01$



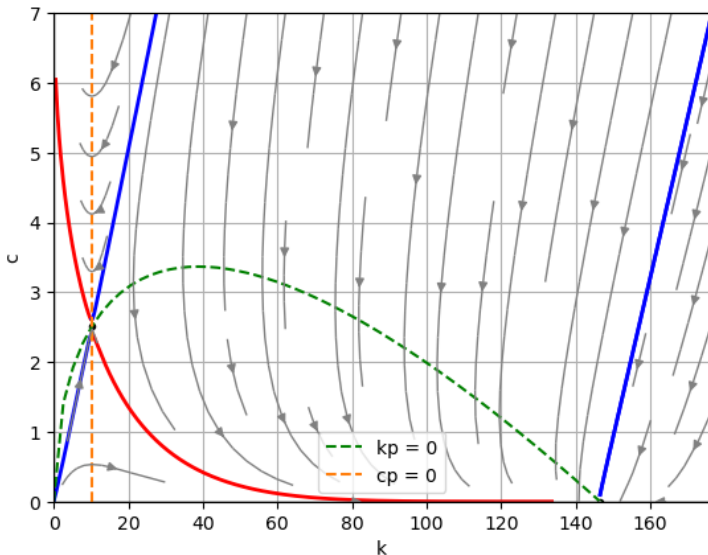
Exemple i interpretació

$\alpha : 0.55$
 $\delta : 0.08$
 $\phi : 0.025$
 $\rho : 0.5$
 $\xi : 0.001$
 $\theta : 0.01$



Exemple i interpretació

$\alpha : 0.55$
 $\delta : 0.08$
 $\phi : 0.025$
 $\rho : 0.5$
 $\xi : 0.001$
 $\theta : 0.1$



Conclusió

Condicció d'estabilitat

El mètode **Runge-Kutta 4 2D** ens permet determinar numèricament la **condició d'estabilitat**, és a dir, el consum inicial respecte el capital inicial i el paràmetres que defineixen el context.

Simple i eficient

Es tracta d'un mètode numèric **simple**, però que a la vegada ens proporciona la **precisió suficient** per fer una anàlisi amb prou seguretat.

Ús en la indústria

Gràcies a la seva **simplicitat** i als resultats als quals es poden arribar utilitzant RK4 2D per resoldre les equacions d'aquest model, trobem coherent que sigui utilitzat en la **indústria**.

Moltes gràcies
per la vostra atenció!