1. 根据算符∇的微分性与矢量性，推导下列公式：

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A})=\frac{1}{2}\nabla\vec{A}^2-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}$$

解：1）$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

首先，算符∇是一个微分算符，其具有对其后所有表达式起微分的作用，对于本题，∇将作用于$\vec{A}$和$\vec{B}$。

又∇是一个矢量算符，具有矢量的所有性质。

因此，利用公式$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{b})-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$可得上式，其中右边前两项是$\nabla$作用于$\vec{A}$，后两项是$\nabla$作用于$\vec{B}$

2）根据第一个公式，令$\vec{A}=\vec{B}$可得证。

2. 设 u 是空间坐标 x，y，z 的函数，证明：

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du}.$$

证明：

1）

$$\nabla f(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f(u)}{\partial z}\vec{e}_z=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z=\frac{df}{du}\nabla u$$

2）

$$\nabla\cdot\vec{A}(u)=\frac{\partial\vec{A}_x(u)}{\partial x}+\frac{\partial\vec{A}_y(u)}{\partial y}+\frac{\partial\vec{A}_z z(u)}{\partial z}=\frac{d\vec{A}_x(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{d\vec{A}_y(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{d\vec{A}_z(u)}{dz}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\nabla u\cdot\frac{d\vec{A}}{du}$$

3）

$$\nabla\times\vec{A}(u)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \vec{A}_{x(u)} & \vec{A}_y(u) & \vec{A}_z(u)\end{vmatrix}=(\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial x})\vec{e}_y+(\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial y})\vec{e}_z=$$

$$=(\frac{d\vec{A}_z}{du}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{d\vec{A}_y}{du}\frac{\partial u}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{d\vec{A}_x}{du}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{d\vec{A}_z}{du}\frac{\partial u}{\partial x})\vec{e}_y+(\frac{d\vec{A}_y}{du}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{d\vec{A}_x}{du}\frac{\partial u}{\partial y})\vec{e}_z=\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du}$$

3. 设 $r=\sqrt{(x-x^{'})^2+(y-y^{'})^2+(z-z^{'})^2}$ 为源点 $x^{'}$ 到场点 x 的距离，r 的方向规定为从源点指向场点。

1）证明下列结果，并体会对源变数求微商 $(\nabla^{'}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x^{'}}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y^{'}}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z^{'}})$ 与对场变数求微商 $(\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})$ 的关系。

$$\nabla r=-\nabla^{'}r=\frac{\vec{r}}{r},\nabla\frac{1}{r}=-\nabla^{'}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3},\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}=0,\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla^{'}\frac{\vec{r}}{r^3}=0.(r\neq 0)$$

(最后一式在人 r=0 点不成立，见第二章第五节)。

2）求

$\nabla\cdot\vec{r},\nabla\times\vec{r},(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r},\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}),\nabla\cdot[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]$及$\nabla\times[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]$,其中$\vec{a},\vec{k}$及$\vec{E}_0$均为常矢量。

证明：$\nabla\cdot\vec{r}=\frac{\partial(x-x^{'})}{\partial x}+\frac{\partial(y-y^{'})}{\partial y}+\frac{\partial(z-z^{'})}{\partial z}=3$

$$\nabla\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-x^{'} & y-y^{'} & z-z^{'}\end{vmatrix}=0$$

$$(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}=[(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z)\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z)][(x-x')\vec{e}_x+(y-y')\vec{e}_y+(z-z')\vec{e}_z]$$

$$=(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z})[(x-x')\vec{e}_x+(y-y')\vec{e}_y+(z-z')\vec{e}_z]$$

$$=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z=\vec{a}$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}\times(\nabla\times\vec{r})+(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\nabla)\cdot\vec{a}$$

$$=(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}$$

$$=\vec{a}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\nabla)\cdot\vec{a}$$

$$\nabla\cdot[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=[\nabla(\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]\cdot\vec{E}_0+\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})(\nabla\cdot\vec{E}_0)$$

$$=[\frac{\partial}{\partial x}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_z]E_0$$

$$=\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})(k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z)\vec{E}_0=\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{k}\cdot\vec{E})$$

$$\nabla\times[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=[\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]\times\vec{E}_0+\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\nabla\times\vec{E}_0$$

4. 应用高斯定理证明

$$\int_V dV\nabla\times\vec{f}=\oint_S d\vec{S}\times\vec{f}$$

应用斯托克斯（Stokes）定理证明

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla\phi=\oint_L d\vec{l}\,\phi$$

证明：1)由高斯定理

$$\int_V dV\nabla\cdot\vec{g}=\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{g}$$

即：$\int_V(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z})dV=\oint_s g_xdS_x+g_ydS_y+g_zdS_z$

而$\int_V\nabla\times\vec{f}dV=\int[(\frac{\partial}{\partial y}f_z-\frac{\partial}{\partial z}f_y)\vec{i}+(\frac{\partial}{\partial z}f_x-\frac{\partial}{\partial x}f_z)\vec{j}+(\frac{\partial}{\partial x}f_y-\frac{\partial}{\partial y}f_x)\vec{k}]dV$

$$=\int[\frac{\partial}{\partial x}(f_y\vec{k}-f_z\vec{j})+\frac{\partial}{\partial y}(f_z\vec{i}-f_x\vec{k})+\frac{\partial}{\partial z}(f_x\vec{j}-f_y\vec{i})]dV$$

又：$\oint_S d\vec{S}\times\vec{f}=\oint_S[(f_zdS_y-f_ydS_z)\vec{i}+(f_xdS_z-f_zdS_x)\vec{j}+(f_ydS_x-f_xdS_y)\vec{k}]$

$$=\oint(f_y\vec{k}-f_z\vec{j})dS_x+(f_z\vec{i}-f_x\vec{k})dS_y+(f_x\vec{j}-f_y\vec{i})dS_z$$

若令$H_x=f_y\vec{k}-f_z\vec{j},H_y=f_z\vec{i}-f_x\vec{k},H_Z=f_x\vec{j}-f_y\vec{i}$

则上式就是：

$\int_V\nabla\cdot\vec{H}dV=\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{H}$,高斯定理，则证毕。

2)由斯托克斯公式有：

$$\oint_l\vec{f}\cdot d\vec{l}=\int_S\nabla\times\vec{f}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l\vec{f}\cdot d\vec{l}=\oint_l(f_xdl_x+f_ydl_y+f_zdl_z)$$

$$\int_S\nabla\times\vec{f}\cdot d\vec{S}=\int_S(\frac{\partial}{\partial y}f_z-\frac{\partial}{\partial z}f_y)dS_x+(\frac{\partial}{\partial z}f_x-\frac{\partial}{\partial x}f_z)dS_y+(\frac{\partial}{\partial x}f_y-\frac{\partial}{\partial y}f_x)dS_z$$

而$\oint_l d\vec{l}\,\phi=\oint_l(\phi_idl_x+\phi_jdl_y+\phi_kdl_z)$

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla\phi=\int_S(\frac{\partial\phi}{\partial z}dS_y-\frac{\partial\phi}{\partial y}dS_z)\vec{i}+(\frac{\partial\phi}{\partial x}dS_z-\frac{\partial\phi}{\partial z}dS_x)\vec{j}+(\frac{\partial\phi}{\partial y}dS_x-\frac{\partial\phi}{\partial x}dS_y)\vec{k}$$

$$=\int(\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{k}-\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{j})dS_x+(\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{k})dS_y+(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{j}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{i})dS_z$$

若令 $f_x=\phi_i, f_y=\phi_j, f_z=\phi_k$

则证毕。

5. 已知一个电荷系统的偶极矩定义为：

$$\vec{P}(t)=\int_V\rho(\vec{x}^{'},t)\vec{x}^{'}dV^{'},$$

利用电荷守恒定律 $\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 证明 $\vec{P}$ 的变化率为：

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\int_V\vec{J}(\vec{x}^{'},t)dV^{'}$$

证明：$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\int_V\frac{\partial\vec{\rho}^{'}}{\partial t}\vec{x}^{'}dV^{'}=-\int_V\nabla^{'}\vec{j}^{'}\vec{x}^{'}dV^{'}$

$$(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t})\Big|_x=-\int_V\nabla^{'}\vec{j}^{'}x^{'}dV^{'}=-\int[\nabla^{'}\cdot(x^{'}\vec{j}^{'})-(\nabla^{'}x^{'})\cdot\vec{j}^{'}]dV^{'}=\int_V(j_x^{'}-\nabla^{'}\cdot(x^{'}\vec{j}^{'})dV^{'}$$

$$=\int j_x dV^{'}-\oint_S x\vec{j}\cdot d\vec{S}$$

若 $S\to\infty$,则$\oint(x\vec{j})\cdot d\vec{S}=0,(\vec{j}\big|_S=0)$

同理，$(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t})\Big|_y=\int j_y dV^{'},(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t})\Big|_z=\int j_z dV^{'}$

即：$\frac{d\vec{P}}{dt}=\int_V\vec{j}(\vec{x}^{'},t)dV^{'}$

6. 若 $\vec{m}$ 是常矢量，证明除 R＝0 点以外，矢量 $\vec{A}=\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3}$ 的梯度的负值，即

$$\nabla\times\vec{A}=-\nabla\varphi$$

其中 R 为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点。

证明：

$$\nabla\times\vec{A}=\nabla\times(\frac{\vec{m}\times\vec{R})}{R^3}=-\nabla\times[\vec{m}\times(\nabla\frac{1}{R})]=(\nabla\cdot\vec{m})\nabla\frac{1}{r}+(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}-[\nabla\cdot(\nabla\frac{1}{r})]\vec{m}-[(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\vec{m}$$

$$=(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r},(r\neq 0)$$

$$\nabla\varphi=\nabla(\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3})=-\nabla[\vec{m}\cdot(\nabla\frac{1}{r})]=-\vec{m}\times[\nabla\times(\nabla\frac{1}{r})]-(\nabla\frac{1}{r})\times(\nabla\times\vec{m})-(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$$-[(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\vec{m}=-(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$$\therefore\nabla\times\vec{A}=-\nabla\varphi$$

7．有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球，介质的电容率为 ε，使介质内均匀带静止自由电荷 ρ_f，求

（1）空间各点的电场

（2）极化体电荷和极化面电荷分布

解：1）$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int\rho_f dV$，　　($r_2>r>r_1$)

即：$D\cdot 4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}(r^3-r_1^3)\rho_f$

$$\therefore\vec{E}=\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^3}\vec{r},(r_2>r>r_1)$$

由 $\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_f}{\varepsilon_0}=\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}(r_2^3-r_1^3)\rho_f,(r>r_2)$

$$\therefore\vec{E}=\frac{(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\rho_f\vec{r},(r>r_2)$$

$r<r_1$ 时，$\vec{E}=0$

2) $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\vec{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$

$$\therefore\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot[\frac{(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon r^3}\rho_f\vec{r}]=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f\nabla\cdot(\vec{r}-\frac{r_1^3}{r^3}\vec{r})$$

$$=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f(3-0)=-(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

$$\sigma_P=P_{1n}-P_{2n}$$

考虑外球壳时，$r=r_2$，　n 从介质 1 指向介质 2（介质指向真空），$P_{2n}=0$

$$\sigma_P = P_{1n} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{r^3 - r_1^3}{3\varepsilon r^3}\rho_f \vec{r}\Big|_{r=r_2} = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{r_2^3 - r_1^3}{3r_2^3}\rho_f$$

考虑到内球壳时，r＝r_2

$$\sigma_P = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{r^3 - r_1^3}{3\varepsilon r^3}\rho_f \vec{r}\Big|_{r=r_1} = 0$$

8．内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有恒定均匀自由电流 J_f，导体的磁导率为 μ，求磁感应强度和磁化电流。

解：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = I_f$$

$$\text{当}\, r < r_1 \text{时}, I_f = 0, \text{故}\vec{H} = \vec{B} = 0$$

当 $r_2>r>r_1$ 时，$\int_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = j_f \pi (r^2 - r_1^2)$

$$\vec{B} = \frac{\mu j_f (r^2 - r_1^2)}{2r} = \frac{\mu (r^2 - r_1^2)}{2r^2}\vec{j}_f \times \vec{r}$$

当 $r>r_2$ 时， $2\pi r H = \pi j_f (r_2^2 - r_1^2)$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 (r_2^2 - r_1^2)}{2r^2}\vec{j}_f \times \vec{r}$$

$$J_M = \nabla\times\vec{M} = \nabla\times(\chi_M \vec{H}) = \nabla\times(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0})\vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\nabla\times(\vec{j}_f \times \vec{r}\frac{r^2 - r_1^2}{2r^2})$$

$$= (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\nabla\times\vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\vec{j}_f, (r_1 < r < r_2)$$

$$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1), (n\text{从介质1指向介质2})$$

$$\text{在内表面上，} M_1 = 0, M_2 = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{r^2 - r_1^2}{2r^2})\Big|_{r=r_1} = 0$$

$$\text{故}\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times\vec{M}_2 = 0, (r = r_1)$$

在上表面，r＝r_2 时

$$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(-\vec{M}_1) = -\vec{n}\times\vec{M}_1\Big|_{r=r_2} = -\frac{\vec{r}}{r}\times\frac{r^2 - r_1^2}{2r^2}\vec{j}_f \times \vec{r}\Big|_{r=r_2} = -\frac{r^2 - r_1^2}{2r}\vec{j}_f\Big|_{r_2}(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)$$

$$= -(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r^2}\vec{j}_f$$

9．证明均匀介质内部的体极化电荷密度 ρ_P 总是等于体自由电荷密度 ρ_f 的 $-(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})$ 倍。

证明：$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=-\nabla\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}=-(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$

10．证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反(但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律)

证明：

1）线圈 1 在线圈 2 的磁场中的受力：

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{I_2 d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$d\vec{F}_{12}=I_1 d\vec{l}_1\times\vec{B}_2$$

$$\therefore \vec{F}_{12}=\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\vec{l}_1\times(I_2 d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3})-\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2) \qquad (1)$$

2）线圈 2 在线圈 1 的磁场中受的力：

同 1）可得：

$$\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}d\vec{l}_1(d\vec{l}_2\cdot\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3})-\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1) \qquad (2)$$

分析表达式（1）和（2）：

（1）式中第一项为

$$\oint_{l_1}\oint_{l_2}d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3})=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\frac{dr_{12}}{r_{12}^2}=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\cdot(-\frac{1}{r_{12}})\Big|_{\text{一周}}=0$$

同理，对（2）式中第一项 $\oint_{l_2}\oint_{l_1}d\vec{l}_1(d\vec{l}_2\cdot\dfrac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3})=0$

$$\therefore \vec{F}_{12}=\vec{F}_{21}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)$$

11. 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为 l_1 和 l_2，电容率为 ε_1和ε_2，今再两板接上电动势为 E 的电池，求

（1）电容器两板上的自由电荷密度 ω_f

（2）介质分界面上的自由电荷密度ω_f

若介质是漏电的，电导率分别为σ_1和σ_2，当电流达到恒定时，上述两问题的结果如何？

解：在相同介质中电场是均匀的，并且都有相同指向

$$\text{则}\begin{cases} l_1E_1+l_2E_2=\mathrm{E} \\ D_{1n}-D_{2n}=\varepsilon_1E_1-\varepsilon_2E_2=0（\text{介质表面上}\sigma_{\mathrm{f}}=0）\end{cases}$$

故：$E_1=\dfrac{\varepsilon_2\mathrm{E}}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1},E_2=\dfrac{\varepsilon_1\mathrm{E}}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}$

又根据$D_{1n}-D_{2n}=\sigma_f$，（n 从介质 1 指向介质 2）

在上极板的交面上，

$D_1-D_2=\sigma_{f_1}$ D_2是金属板，故$D_2=0$

即：$\sigma_{f_1}=D_1=\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}$

而$\sigma_{f_2}=0$

$\sigma_{f_3}=D_1^{'}-D_2^{'}=-D_2^{'},(D_1^{'}\text{是下极板金属，故}D_1^{'}=0)$

$$\therefore\sigma_{f_3}=-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}=-\sigma_{f_1}$$

若是漏电，并有稳定电流时，

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{j}_1}{\sigma_1},\vec{E}_2=\frac{\vec{j}_2}{\sigma_2}$$

$$\text{又}\begin{cases} l_1\dfrac{\vec{j}_1}{\sigma_1}+l_2\dfrac{\vec{j}_2}{\sigma_2}=\vec{\mathrm{E}} \\ j_{1n}=j_{2n}=j_1=j_2,\text{（稳定流动，电荷不堆积）}\end{cases}$$

$$\text{得：}j_1=j_2=\frac{\mathrm{E}}{\dfrac{l_1}{\sigma_1}+\dfrac{l_2}{\sigma_2}},\text{即:}\begin{cases} E_1=\dfrac{j_1}{\sigma_1}=\dfrac{\sigma_2\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1} \\ E_2=\dfrac{j_2}{\sigma_2}=\dfrac{\sigma_1\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}\end{cases}$$

$$\sigma_{f_{\text{上}}}=D_3=\frac{\varepsilon_1\cdot\sigma_2\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}\qquad\sigma_{f_{\text{下}}}=-D_2=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}$$

$$\sigma_{f_{中}} = D_2 - D_3 = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_2\sigma_1}{l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1}\mathrm{E}$$

12. 证明

（1）当两种绝缘介质得分界面上不带面自由电荷时，电场线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

其中ε_1和ε_2分别为两种介质的介电常数，θ_1和θ_2分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

（2）当两种导电介质内流有恒定电流时，分界面上电场线曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

其中σ_1和σ_2分别为两种介质的电导率。

证明：(1)根据边界条件：$n\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$,即：$E_2\sin\theta_2 = E_1\sin\theta_1$

由于边界面上$\sigma_f = 0$，故：$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$，即：$\varepsilon_2 E_2\cos\theta_2 = \varepsilon_1 E_1\cos\theta_1$

$\therefore$ 有$\dfrac{tg\theta_2}{\varepsilon_2} = \dfrac{tg\theta_1}{\varepsilon_1}$,即:$\dfrac{tg\theta_2}{tg\theta_1} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

(2)根据：$\vec{J} = \sigma\vec{E}$ 可得，电场方向与电流密度同方向。

由于电流 I 是恒定的，故有：$\dfrac{j_1}{\cos\theta_2} = \dfrac{j_2}{\cos\theta_1}$

即：$\dfrac{\sigma_1 E_1}{\cos\theta_2} = \dfrac{\sigma_2 E_2}{\cos\theta_1}$　　而：$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ 即 $E_2\sin\theta_2 = E_1\sin\theta_1$

故有：$\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

13．试用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流的情况下，导体内电场线总是平行于导体表面。

证明：（1）导体在静电条件下达到静电平衡

$\therefore$ 导体内$\vec{E}_1$=0

而：$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

$\therefore \vec{n}\times\vec{E}_2 = 0$，故 $\vec{E}_0$ 垂直于导体表面。

（3）导体中通过恒定电流时，导体表面$\sigma_f=0$

$\therefore$导体外$\vec{E}_2=0$,即：$\vec{D}_2=0$

而：　$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f=0$,即$:\vec{n}\cdot\vec{D}_1=\vec{n}\cdot\varepsilon_0\vec{E}_1=0$

$\therefore\vec{n}\cdot\vec{E}_1=0$

导体内电场方向和法线垂直，即平行于导体表面。

14．内外半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱形电容器，单位长度电荷为λ_f，板间填充电导率为σ的非磁性物质。

（1）证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，因此内部无磁场。

（2）求λ_f随时间的衰减规律

（3）求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度

（4）求长度为 l 的一段介质总的能量耗散功率，并证明它等于这段的静电能减少率。

（1）证明：由电流连续性方程：$\nabla\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho_f}{\partial t}=0$

据高斯定理　$\rho_f=\nabla\cdot\vec{D}$

$\therefore\nabla\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\nabla\cdot\vec{D}}{\partial t}=0$，即：$\nabla\cdot\vec{J}+\nabla\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$

$\therefore\nabla\cdot(\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t})=0.\therefore\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$，即传到电流与位移电流严格抵消。

(2)解：由高斯定理得：$\int\vec{D}\cdot2\pi\vec{r}dl=\int\lambda_f dl$

$$\therefore\vec{D}=\frac{\lambda_f}{2\pi r}\vec{e}_r,\vec{E}=\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r$$

又$\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0,\vec{J}=\sigma\vec{E},\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

$$\therefore\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0,\vec{E}=\vec{E}_0e^{=\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$$\therefore\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r=\frac{\lambda_{r_0}}{2\pi\varepsilon r}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\vec{e}_r$$

$$\therefore \lambda_f = \lambda_{f_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

（3）解：

$$\vec{J} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda_{f_0}}{2\pi r} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{\lambda_f}{2\pi r}$$

能量耗散功率密度$= J^2\rho = J^2\dfrac{1}{\sigma} = \left(\dfrac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2\sigma$

（5）解：

单位体积 $dV = l\cdot 2\pi r dr$

$$\vec{P} = \int_a^b \left(\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2 \sigma l 2\pi r dr = \frac{l\sigma\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon^2}\ln\frac{b}{a}$$

静电能 $W = \int_a^b \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}dV = \int_a^b \dfrac{1}{2}\dfrac{l\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon r}dr = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{l\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\dfrac{b}{a}$

减少率 $-\dfrac{\partial W}{\partial t} = -\dfrac{l\lambda_f}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t} = \dfrac{l\lambda_f^2\sigma}{2\pi\varepsilon^2}\ln\dfrac{b}{a}$

1.一个半径为 R 的电介质球，极化强度 P=K$\frac{r}{r^2}$，电容率为 ε 。

(1)计算束缚电荷的体密度和面密度；

(2)计算自由电荷体密度；

(3)计算球外和球内的电势；

(4)求该带电介质球产生的静电场总能量。

解：(1)

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -K\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^2} = -K(\nabla\frac{1}{r^2}\cdot\vec{r} + \frac{1}{r^2}\nabla\cdot\vec{r}) = -K/r^2$$

$$\sigma_P = -\vec{n}\cdot(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\big|_R$$

又∵球外无极化电荷

$$\therefore \vec{P}_2 = 0 \quad \sigma_p = \vec{n}\cdot\vec{P}_1\big|_R = \vec{n}\cdot K\frac{\vec{r}}{r^2}\big|_R = K/R$$

(2) 由公式 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\therefore \vec{D} = \frac{\varepsilon\vec{P}}{\varepsilon - \varepsilon_0}$$

$$\therefore \rho_f = \nabla\cdot\vec{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{P} = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$$

(3)对于球外电场，由高斯定理可得：

$$\int \vec{E}_{外}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}_{外}\cdot 4\pi r^2 = \frac{\int \rho_f dV}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\cdot r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}_{外} = \frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathrm{r}^3}\vec{\mathrm{r}}$$

同理可得球内电场：$\vec{E}_{内} = \frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2}$

$$\therefore 球外电势\varphi_{外} = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathrm{r}},$$

球内电势$\varphi_{内}=\int_R^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}+\int_r^R\vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}+\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$

（4）$\omega_{内}=\frac{1}{2}\vec{D}_{内}\cdot\vec{E}_{内}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\cdot\frac{K\vec{r}}{r^2}\cdot\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2}=\frac{\varepsilon K^2}{2(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$ ∴

$$\therefore W_{内}=\int\omega_{内}dV=\iiint\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon K^2}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2r^2}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=2\pi\varepsilon R\left(\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right)^2$$

$$W_{外}=\int\omega_{外}dV=\iiint_R\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2K^2R^2}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{2\pi\varepsilon^2RK^2}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}$$

$$\therefore W=W_{内}+W_{外}=2\pi\varepsilon R(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})(\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0})^2$$

2． 在均匀外电场中置入半径为R_0的导体球，试用分离变数法球下列两种情况的电势：

（1）导体球上接有电池，使球与地保持电势差ϕ_0；

（2）导体球上带总电荷 Q.

解：（1）当导体球上接有电池，与地保持电势差ϕ_0时，以地为电势零点

本问题的定解条件如下

$\phi_{内}=\phi_0$ （R=R_0）

$\nabla^2\varphi_{外}=0$ （R>R_0）且$\begin{cases}\varphi_{外}\big|_{R\to\infty}=-E_0R\cos\theta+\varphi_0\\ \varphi_{外}\big|_{R=R_0}=\phi_0\end{cases}$ （φ_0是未置入导体球前坐标原点的电势）

根据有关的数理知识，可解得：$\varphi_{外}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nR^n+\frac{b^n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$

由于$\varphi_{外}\big|_{R\to\infty}=-E_0R\cos\theta+\varphi_0$即：

$$\varphi_{外}=a_0+a_1R\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)+\frac{b_0}{R}+\frac{b_1}{R^2}\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\Big|_{R\to\infty}=-E_0R\cos\theta+\varphi_0$$

故而有：$a_0=\varphi_0,a_1=-E_0,a_n=0(n>1),b_n=0(n>1)$

$$\therefore\varphi_{外}=\varphi_0-E_0R\cos\theta+\frac{b_0}{R}+\frac{b_1}{R^2}\cos\theta$$

又$\varphi_{外}\big|_{R=R_0}=\phi_0$,即：$\varphi_{外}\big|_{R=R_0}=\varphi_0-E_0R\cos\theta+\dfrac{\mathrm{b}_0}{R_0}+\dfrac{b_1}{R_0^2}\cos\theta=\phi_0$

故而又有： $\therefore\begin{cases}\varphi_0+\dfrac{b_0}{R_0}=\phi_0\\-E_0R_0\cos\theta+\dfrac{b_1}{R_0^2}\cos\theta=0\end{cases}$

得到： $b_0=(\phi_0-\varphi_0)R_0,b_1=E_0R_0^2$

最后，得定解问题的解为：

$$\varphi_{外}=-E_0R\cos\theta+\varphi_0+\frac{(\phi_0-\varphi_0)R_0}{R}+\frac{E_0R_0^3}{R}\cos\theta(R>R_0)$$

（2）当导体球上带总电荷 Q 时，定解问题存在的方式是：

$$\begin{cases}\nabla^2\phi_{内}=0(R<R_0)\\\nabla^2\phi_{外}=0(R>R_0)\\\phi_{内}\big|_{\mathrm{R}\to0}=\text{有限}\\\phi_{外}\big|_{\mathrm{R}\to\infty}=-E_0\mathrm{R}\cos\theta+\varphi_0(\varphi_0\text{是未置入导体球前坐标原点的电势）}\\\phi_{内}=\phi_{外}\big|_{\mathrm{R}=R_0}\\-\oint\limits_{\mathrm{s}}\varepsilon_0\dfrac{\partial\phi_{外}}{\partial R}\mathrm{ds}=Q(R=R_0)\end{cases}$$

解得满足边界条件的解是

$$\varphi_{内}=\sum_{\mathrm{n}=0}a_{\mathrm{n}}\mathrm{R}^{\mathrm{n}}P_{\mathrm{n}}(\cos\theta)\qquad\varphi_{外}=\varphi_0-E_0\mathrm{R}\cos\theta+\sum_{\mathrm{n}=0}\frac{b_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R}^{\mathrm{n}+1}}P_{\mathrm{n}}(\cos\theta)$$

由于$\varphi_{外}\big|_{R\to\infty}$的表达式中，只出现了$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$项，故，$b_n=0(n>1)$

$$\therefore\varphi_{外}=\varphi_0-E_0R\cos\theta+\frac{\mathrm{b}_0}{R}+\frac{b_1}{R^2}\cos\theta$$

又有$\varphi_{外}\big|_{R=R_0}$是一个常数（导体球是静电平衡）

$$\varphi_{外}\big|_{R=R_0}=\varphi_0-E_0R_0\cos\theta+\frac{\mathrm{b}_0}{R_0}+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\theta=C$$

$$\therefore-E_0R_0\cos\theta+\frac{b_1}{R_0^2}\cos\theta=0\text{即：}b_1=E_0R_0^3$$

$$\varphi_{外}=\varphi_0-E_0R\cos\theta+\frac{b_0}{R}+\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta$$

又由边界条件 $-\oint_s\varepsilon_0\frac{\partial\phi_{外}}{\partial r}ds=Q$ $\therefore b_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\therefore\varphi_{内}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_0}-\varphi_{0,}R<R_0$$

$$\varphi_{外}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}+\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta-E_0R\cos\theta,\ R>R_0$$

3．均匀介质球的中心置一点电荷 Q_f，球的电容率为 ε，球外为真空，试用分离变数法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较。

提示：空间各点的电势是点电荷 Q_f 的电势 $Q_f/4\pi\varepsilon R$ 与球面上的极化电荷所产生的电势的叠加，后者满足拉普拉斯方程。

解：一. 高斯法

在球外，$R>R_0$，由高斯定理有：$\varepsilon_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=Q_{总}=Q_f+Q_P=Q_f$，（对于整个导体球而言，束缚电荷 $Q_P=0$)

$$\therefore\vec{E}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

积分后得：$\varphi_{外}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R}+C.(C\text{是积分常数})$

又由于 $\varphi_{外}\big|_{R\to\infty}=0,\therefore C=0$

$$\therefore\varphi_{外}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R}(R>R_0)$$

在球内，$R<R_0$，由介质中的高斯定理：$\oint\vec{D}\cdot d\vec{s}=Q_f$

又 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\therefore\vec{E}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R^2}$

积分后得到：$\varphi_{内}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+C_2.(C_2\text{是积分常数})$

由于$\varphi_{内}=\varphi_{外}\Big|_{R=R_0}$,故而有:$\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0}=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}+C_2$

$\therefore C_2=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0}-\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}(R<R_0)$.

$$\therefore \varphi_{内}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0}-\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}(R<R_0)$$

二. 分离变量法

本题所求的电势是由点电荷Q_f与介质球的极化电荷两者各自产生的电势的叠加，且有着球对称性。因此，其解可写作：$\varphi=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\varphi'$

由于ϕ'是球对称的，其通解为 $\varphi'=a+\dfrac{b}{R}$

由于球心有Q_f的存在，所以有$\varphi_{内}\Big|_{R\to 0}=\infty$， 即$\varphi_{内}=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+a$

在球外有$\varphi_{外}\Big|_{R\to\infty}=0$， 即$\varphi_{外}=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\dfrac{b}{R}$

由边界条件得

$$\varphi_{内}=\varphi_{外}\Big|_{R=R_0},即\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}+a=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}+\frac{b}{R_0}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_{内}}{\partial R}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_{外}}{\partial R}\Big|_{R=R_0},即-\frac{\varepsilon_0 Q_f}{4\pi\varepsilon R_0^2}-\frac{\varepsilon_0 b}{R_0^2}=-\frac{\varepsilon Q_f}{4\pi\varepsilon R_0^2}$$

$$\therefore b=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right),a=\frac{Q_f}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\therefore\begin{cases}\varphi_{外}=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R},R>R_0\\ \varphi_{内}=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0}-\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0},R<R_0\end{cases}$$

4．均匀介质球（电容率为 ε_1）的中心置一自由电偶极子 $\vec{P}_f$，球外充满了另一种介质（电容率为 ε_2，求空间各点的电势和极化电荷分布。

提示：同上题，$\phi=\dfrac{\vec{P}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\phi'$,而 ϕ' 满足拉普拉斯方程。

解：$\varepsilon_1\dfrac{\partial\phi_{内}}{\partial R}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\phi_{外}}{\partial R}$

又 $\varepsilon_1\dfrac{\partial\phi_{内}}{\partial R}\Big|_{R_0}=\varepsilon_1(-\dfrac{2P_{\mathrm{f}}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 R_0^3}+\sum \mathrm{l} A_\mathrm{l} R_0^{\mathrm{l}-1}P_\mathrm{l})$

$\varepsilon_2\dfrac{\partial\phi_{外}}{\partial R}\Big|_{R_0}=\varepsilon_2(-\dfrac{2P_{\mathrm{f}}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 R_0^3}-\sum(\mathrm{l}+1)\dfrac{B_\mathrm{l}}{R_0^{\mathrm{l}+2}}P_\mathrm{l})$

比较 $P_l(\cos\theta)$ 系数：

$B_0=0$，$A_0=0$

$$-\frac{2\rho_f}{4\pi R_0^3}+\varepsilon_1 A_1=-\frac{2\varepsilon_2\rho_f}{4\pi\varepsilon_1 R_0^3}-\frac{2\varepsilon_2 B_1}{R_0^3},及A_1=\frac{B_1}{R_0^3}$$

得：$A_1=\dfrac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\rho_f}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3},B_1=\dfrac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\rho_f}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}$

比较 $P_2(\cos\theta)$ 的系数：

$$2\varepsilon_1 A_2 R_0=-\frac{3B_2}{R_0^4},A_2=\frac{B_2}{R_0^4}$$

及 $A_2(1+\dfrac{1}{\varepsilon_1 R_0})=0$

所以 $A_2=0,B_2=0$。同理，$A_l=B_l=0,(l=2,3\cdots)$

最后有：

$$\phi_{内}=\frac{\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\rho_f}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}R\cos\theta=\frac{\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3},(R<R_0)$$

$$\phi_{外}=\frac{\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\rho_f}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^2}\cos\theta=\frac{\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^3}=\frac{3\vec{\rho}_f\cdot\vec{R}}{4\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^3},(R>R_0)$$

球面上的极化电荷密度

$\sigma_P = P_{1n} - P_{2n}, \vec{n}$ 从 2 指向 1，如果取外法线方向，则

$$\sigma_p = P_{外n} - P_{球n} = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\nabla\phi_{外})]_n - [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\nabla\phi_{内})]_n$$

$$= -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{\partial\phi_{外}}{\partial R} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\partial\phi_{内}}{\partial R}\Big|_{R=R_0}$$

$$= (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{-6\rho_f\cos\theta}{4\pi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)R_0^3} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)[\frac{6(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\rho_f\cos\theta}{4\pi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)R_0^3} - \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - 2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)R_0^3}\rho_f\cos\theta]$$

$$= \frac{6\varepsilon_1(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) + 6\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)R_0^3}\rho_f\cos\theta = -\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)R_0^3}\rho_f\cos\theta$$

求极化偶极子：

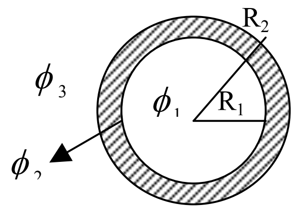
$\vec{P}_f = q\vec{l}$ 可以看成两个点电荷相距 l，对每一个点电荷运用高斯定理，就得到在每个点电荷旁边有极化电荷

$q_P = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1)q_f, -q_P = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1)(-q_f)$，两者合起来就是极化偶极子

$$\vec{P}_P = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1)\vec{P}_f$$

5.空心导体球壳地内外半径为 R_1 和 R_2，球中心置一偶极子 $\vec{P}$，球壳上带电 Q，求空间各点电势和电荷分布。

解：



$$\begin{cases} \nabla^2\phi_3 = 0, \phi_3\big|_{r\to\infty} = 0 \\ \phi_2 = C, \phi_2\big|_{r\to 0} = \infty \\ \phi_1 = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \phi_1', \phi_1'\big|_{r\to 0}\text{为有限值} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_3 = \sum\dfrac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), \phi_3\big|_{r-R_2} = C \\ \phi_2 = C, \phi_2\big|_{r=R_1} = C \\ \phi_1 = \dfrac{\vec{P}_f\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \sum A_l r^l P_l(\cos\theta) - \oint\dfrac{\partial\phi_3}{\partial r}dS\big|_{r=R_2} + \oint\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}dS\big|_{r=R_1} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{B_0}{R_2}+\dfrac{B_1}{R_2^2}\cos\theta+\dfrac{B_2}{R_2^3}P_2+\cdots=C\\ \dfrac{P_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}+A_0+A_1R_1\cos\theta+\cdots=C\end{cases}$$

即：$A_0=\dfrac{B_0}{R_2}=C,(A_1R_1+\dfrac{P_f}{4\pi\varepsilon R_1^2})\cos\theta=0,B_l=0(l=1.2.3\cdots),A_l=0(l=2.3.4\cdots)$

又：$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=-\dfrac{2P_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}+\sum lA_lR_1^{l-1}P_L=-\dfrac{P_f\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R_1^3}+A_1\cos\theta+\cdots$

$\dfrac{\partial\phi_3}{\partial r}=\sum(-l-1)\dfrac{B_l}{r^{l+2}}P_l=-\dfrac{B_0}{R_1^2}-2\dfrac{B_1}{R_1^3}\cos\theta+\cdots$

则：$-\oint\dfrac{\partial\phi_3}{\partial r}dS=\oint\dfrac{B_0}{R_1^2}dS=\dfrac{B_0}{R_1^2}\oint dS=4\pi R_1^2\dfrac{B_0}{R_1^2}=4\pi B_0$

$$\oint\frac{\partial\phi_1}{\partial r}dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}-\frac{P_f}{2\pi\varepsilon_0R_1^3}\cos\theta R_1^2\sin\theta d\theta d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{-P_f}{4\pi\varepsilon_0R_1^3}\cos\theta R_1^2\sin\theta d\theta d\varphi=0+0=0$$

故：$-\oint\dfrac{\partial\phi_3}{\partial r}dS+\oint\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=4\pi B_0=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$B_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0},A_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_2},A_1=\frac{-P_f}{4\pi\varepsilon_0R_1^3}$$

最后有：

$$\begin{cases}\phi_1=\dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}-\dfrac{\vec{P}_f\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0R_1^3}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_2},(r<R_1)\\ \phi_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r},(r>R_2)\\ \phi_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R_2},(R_1<r<R_2)\end{cases}$$

电荷分布：

在 $r=R_1$ 的面上

$$\sigma_{P_1}=\varepsilon_0\frac{\partial\phi_1}{\partial r}=\frac{-P_f\cos\theta}{2\pi R_1^3}+\frac{-P_f\cos\theta}{4\pi R_1^3}=-\frac{P_f\cos\theta}{4\pi R_1^3}$$

在 $r=R_2$ 面上

$$\sigma_{P_2}=-\varepsilon_0\frac{\partial\phi_3}{\partial r}=\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

6．在均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷 ρ_f 的绝缘介质球 ε，求空间各点的电势。

解：$$\begin{cases}\phi_{外}=\sum(A_l r^l+\dfrac{B_l}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)\\ \phi_{内}=-\dfrac{1}{6\varepsilon}\rho_f r^2+\phi^{'}\\ \nabla^2\phi^{'}=0\end{cases}$$

$\phi_{内}$ 是由高斯定理解得的，ρ_f 的作用加上 $\vec{E}_0$ 的共同作用。

$\phi_{外}\big|_{r\to\infty}=-E_0 r\cos\theta,\phi^{'}\big|_{r\to 0}$ 有限。

$$\begin{cases}\phi_{外}=-E_0 r\cos\theta+\sum\dfrac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\\ \phi_{内}=\dfrac{1}{6\varepsilon}\rho_f r^2+\sum c_e r^l P_l(\cos\theta)\end{cases}$$

$\phi_{内}=\phi_{外}(r=R_0)$：

$$-E_0R_0\cos\theta+\frac{B_0}{R_0}+\frac{B_1}{R_0{}^2}+\frac{B_2}{R_0{}^3}P_2+\quad=\frac{1}{6\varepsilon}\rho_f R_0{}^2+c_0+c_1R_0\cos\theta+c_2R_0{}^2P_2+$$

即 $\dfrac{\rho_f}{6\varepsilon}R_0{}^2+c_0=\dfrac{B_0}{R_0}$

$$-E_0R_0+\frac{B_1}{R_0{}^2}=c_1R_0$$

$$\frac{B_2}{R_0{}^3}=c_2R_0{}^2$$

$$\varepsilon\frac{\partial\phi_{内}}{\partial r}=\varepsilon_0\frac{\partial\phi_{外}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\phi_{内}}{\partial r}=\left[\frac{\rho_f}{3\varepsilon}R_0+\sum lc_lR_0{}^{l-1}P_l(\cos\theta)\ \right]=\frac{\rho_f}{3}R_0+\varepsilon c_1\cos\theta+2\varepsilon c_2R_0P_2+\cdots$$

$$\frac{\partial\phi_{外}}{\partial r}=\varepsilon_0(-E_0\cos\theta+\sum(-l-1)\frac{B_lP_l}{R_0{}^{l+2}})$$

$$= \quad -\varepsilon_0 E_0\cos\theta-\frac{\varepsilon_0 B_0}{R_0{}^2}-\frac{2\varepsilon_0 B_1}{R_0{}^3}\cos\theta-\frac{3\varepsilon_0 B_2}{R_0{}^4}P_2+\cdots\cdots$$

即：$\frac{\rho_f}{3}R_0=-\frac{\varepsilon_0 B_0}{R_0^2}$ ， $\varepsilon C_1=-\varepsilon_0 E_0-\frac{2\varepsilon_0 B_1}{R_0^3}$ ， $2\varepsilon C_2 R_0=-\frac{3\varepsilon_0 B_2}{R^4}\cdots\cdots$

解方程得： $B_0=-\frac{R_0^3}{3\varepsilon_0}\rho_f$ $C_0=-R_0^2\rho_f(\frac{1}{3\varepsilon_0}+\frac{1}{6\varepsilon})$

$$B_1=-\frac{3\varepsilon_0 E_0 R_0^3}{\varepsilon+2\varepsilon_0}+E_0R_0^3 \qquad C_1=-\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}$$

及：$2\varepsilon C_2 R_0=-3\varepsilon_0 R_0 C_2$ 即 $C_2(2\varepsilon R_0+3\varepsilon_0 R_0)=0$ $C_2=B_2=0$

同理：$C_l=B_l=0$ $l=2,3\cdots\cdots$

得：
$$\begin{cases}\phi_{外}=-E_0 r\cos\theta\pm\frac{R_0^3\rho_f}{3r\varepsilon_0}+\frac{E_0R_0^3}{r^2}\cos\theta-\frac{3\varepsilon_0 E_0 R_0^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)r^2}\cos\theta, r>R_0\\ \phi_{内}=-\frac{\rho_f}{6\varepsilon}r^2\pm R_0^2\rho_f(\frac{1}{3\varepsilon_0}+\frac{1}{6\varepsilon})-\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_2}r\cos\theta, r<R_0\end{cases}$$

7、在一个很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 δ_{f0}，今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳衡时电流和电荷分布，讨论 $\sigma_1>>\sigma_2$ 及 $\sigma_2>>\sigma_1$ 两种情况的电流分布特点。

先求空间电势：

$$\begin{cases}\nabla^2\phi_{内}=0\\ \nabla^2\phi_{外}=0\end{cases} \qquad \phi_{内}=\phi_{外} \qquad r=R_0$$

因为 $\delta_{内n}=\delta_{外n}(r=R_0)$（稳恒电流认为表面无电流堆积，即流入$_n$ = 流出$_n$）

故：$\sigma_1\frac{2\phi_{内}}{2r}=\sigma_2\frac{2\phi_{外}}{2r}$

并且 $\delta_{外}\big|_{r\to\infty}=\delta_0$ 即 $\phi_{外}\big|_{r\to\infty}=-E_0 r\cos\theta$ $(j_{f_0}=\sigma_2 E_0)$

$\phi_{内}\big|_{r\to\infty}$ 有限 可以理解为在恒流时 $r\to 0$ 的小封闭曲面流入＝流出

这时的解即为：$\begin{cases}\phi_{内}=-\dfrac{3\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}E_0 r\cos\theta, r<R_0 \\ \phi_{外}=-E_0 r\cos\theta+E_0 R_0^3(\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2})\dfrac{\cos\theta}{r^2}, r>R_0\end{cases}$

求内外电场：$E=-\nabla\phi=-(\dfrac{2\phi\vec{e}_r}{2r}+\dfrac{2\phi\vec{e}_\theta}{2\theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{2\phi}{2\Phi}\vec{e}_\phi)$

$$\vec{E}_{内}=-(\frac{2\phi_{内}\vec{e}_r}{2r}+\frac{1}{r}\frac{2\phi_{内}}{2\theta}\vec{e}_\theta)=\frac{3\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}E_0(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

$$=\frac{3\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}E_0\vec{e}_z$$

$$E_{外}=E_0(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta)+\frac{E_0R_0^3}{r^3}(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2})\left[2\cos\theta\vec{e}_r+\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$$

$$=E_0(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta)+\frac{E_0R_0^3}{r^3}(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2})\left[3\cos\theta\vec{e}_r-\cos\theta\vec{e}_r+\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$$

$$=E_0+R_0^3(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2})\left[\frac{3E_0\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r-\frac{\vec{E}_0}{r^3}\right]$$

求电流：

根据 $\vec{j}_{内}=\sigma_1\vec{E}_{内}$　　　$\vec{j}_{外}=\sigma_2\vec{E}_{外}$

及 $\begin{cases}\vec{j}_{f0}=\sigma_2\vec{E}_0 \\ \dfrac{(\vec{j}_{f_0}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}=\dfrac{\sigma_2E_0r\cos\theta r}{r^5}\vec{e}_r\end{cases}$

得：$j_{内}=\dfrac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}\vec{j}_{f_0}, j_{外}=\vec{j}_{内}+\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}R_0^3[\dfrac{3(\vec{j}_{f_0}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\dfrac{\vec{j}_{f_0}}{r^3}]$

$$\omega_f=\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n})=\varepsilon_0(E_{外n}-E_{内n})=\frac{3\varepsilon_0E_0\cos\theta}{\sigma_1+2\sigma_2}(\sigma_1-\sigma_2)$$

8.半径为 R_0 的导体球外充满均匀绝缘介质 ε，导体球接地，离球心为 a 处 $(a>R_0)$ 置一点电荷 Q_f，试用分离变数法求空间各点电势，证明所得结果与镜像法结果相同。

提示：

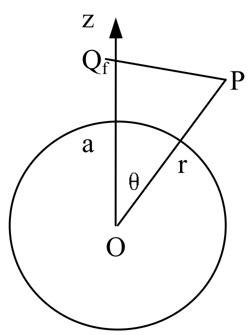
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{R}{a})^n P_n(\cos\theta).(R>a)$$

解：1）分离变数法

由电势叠加原理，球外电势：

$$\phi_{外}=\frac{Q_{\mathrm{f}}}{4\pi\varepsilon R}+\phi^{'},\phi^{'}$$是球面上感应电荷产生的电势，且满足定解条件：

$$\begin{cases}\nabla^2\phi^{'}=0,(r>R_0)\\ \phi^{'}\big|_{r\to\infty}=0\\ \phi_{外}\big|_{r=R_0}=0\end{cases}$$



根据分离变数法得：

$$\phi^{'}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta),(r>R_0)$$

$$\therefore\phi_{外}=\frac{Q_{\mathrm{f}}}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\qquad(*)$$

$$=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{a})^n P_n(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta),(r<a)$$

$$又\ \phi_{外}\big|_{r=R_0}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a}(\frac{R_0}{a})^l+\frac{B_l}{R_o^{l+1}}]P_l(\cos\theta)=0$$

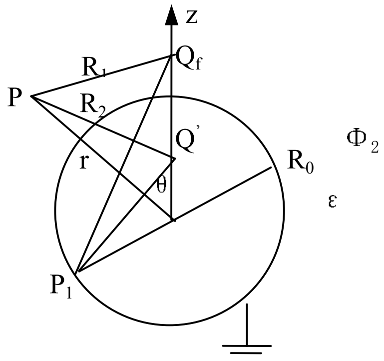
即：
$$\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a}+\frac{B_0}{R_0}=0,\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a}\frac{R_0}{a}+\frac{B_1}{R_0^2}=0,\ldots,\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a}(\frac{R_0}{a})^l+\frac{B_l}{R_0^{l+1}}=0$$

$$\therefore B_0=-R_0\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a},B_1=-\frac{R_O^3}{a}\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a},B_l=-\frac{R_0^{2l+1}}{a^l}\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a},$$

代入（*）式得解。

2）镜像法

如图建立坐标系，本题具有球对称性，设在球内 r_0 处有像电荷 Q'，Q' 代替球面上感应电荷对空间电场的作用，由对称性，Q' 在 OQ_f 的连线上。



先令场点 P_1 在球面上，根据边界条件有：

$$\frac{Q_f}{r_{Q_f}}+\frac{Q'}{r_{Q'}}=0,\text{即：}\frac{r_{Q'}}{r_{Q_f}}=-\frac{Q'}{Q_f}=\text{常数}$$

将 Q' 的位置选在使 $\Delta Q'P_1O \backsim \Delta Q_f P_1O$，则有：

$$\frac{r_{Q'}}{r_{Q_f}}=\frac{R_0}{a}\text{（常数）}$$，为达到这一目的，令 Q' 距圆心为 r_0，

则：$$\frac{r_0}{R_0}=\frac{R_0}{a},\quad r_0=\frac{R_0^2}{a}$$

并有：$$\frac{r_{Q'}}{r_{Q_f}}=-\frac{Q'}{Q_f}=\frac{R_0}{a}=\text{常数}，\quad Q'=-\frac{R_0Q_f}{a}$$

R_1

这样，满足条件的像电荷就找到了，空间各点电势为：

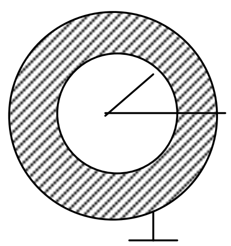
R_2

$$\phi_{外}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r_1}+\frac{Q'}{4\pi\varepsilon r_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}-\frac{R_0\,Q_f/a}{\sqrt{r^2+(\frac{R_0}{a})^2+2r\frac{R_0^2}{a}\cos\theta}}\right],(r>a).$$

将分离变数法所得结果展开为 Legend 级数，可证明两种方法所求得的电势相等。

9．接地的空心导体球的内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 $a(a<R_0)$ 处置一点电荷 Q，用镜像法求电势。导体球上的感应电荷有多少？分布在内表面还是外表面？

解：球外的电势及导体内电势恒为 0。



而球内电势只要满足 $\phi_{内}\big|_{r=R_1}=0$ 即可。

因此做法及答案与上题同，解略。

$$\phi_{内}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{QR_1/a}{\sqrt{R^2+\frac{R_1^4}{a^2}-\frac{2R_1^2R}{a}\cos\theta}}\right]$$

因为球外 $\phi=0$，故感应电荷集中在内表面，并且为－Q.

10.上题的导体球壳不接地，而是带总电荷 Q_0,或使其有确定电势 φ_0，试求这两种情况的电势。又问 φ_0 与 Q_0 是何种关系时，两种情况的解是相等的？

解：由于球壳上有自由电荷 Q_0，并且又是导体球壳，故整个球壳应该是等势体。其电势用高斯定理求得为 $\dfrac{Q+Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，所以球壳内的电势将由 Q 的电势，像电荷 $-{QR_1}/{a}$ 的电势及球壳的电势叠加而成，球外电势利用高斯公式就可得。

故：

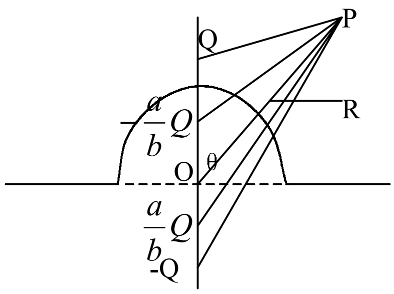
$$\phi=\begin{cases}\phi_{内}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\dfrac{{QR_1}/{a}}{\sqrt{R^2+\dfrac{R_1^4}{a^2}-\dfrac{2R_1^2R}{a}\cos\theta}}+\dfrac{Q+Q_0}{R_2}].(R<R_1)\\ \phi_{外}=\dfrac{Q+Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R},(R>R_2)\end{cases}$$

或 $$\phi=\begin{cases}\phi_{内}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\dfrac{{QR_1}/{a}}{\sqrt{R^2+\dfrac{R_1^4}{a^2}-\dfrac{2R_1^2R}{a}\cos\theta}}]+\phi_0.(R<R_1)\\ \phi_{外}=\dfrac{R_2}{r}\phi_0,(R>R_2)\end{cases}$$

当 $\phi_0=\dfrac{Q+Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ 时两种情况的解相同。

11．在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部（如图），半球的球心在导体平面上，点电荷 Q 位于系统的对称轴上，并与平面相距为 b（b>a），试用电象法求空间电势。

解：如图，利用镜像法，根据一点电荷附近置一无限大接地导体平板和一点电荷附近置一接地导体球两个模型，可确定三个镜像电荷的电量和位置。



$$Q_1=-\frac{a}{b}Q,r_1=\frac{a^2}{b}\vec{r}$$

$$Q_2=\frac{a}{b}Q,r_2=-\frac{a^2}{b}\vec{r}$$

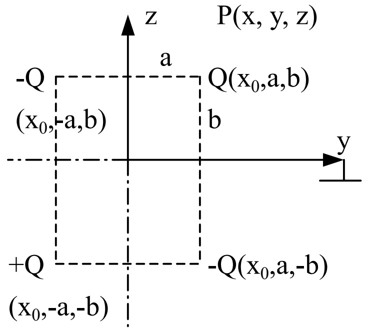
$$Q_3=-Q,r_3=-b\vec{r}$$

$$\phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2+2Rb\cos\theta}}+\frac{a}{b\sqrt{R^2+\dfrac{a^4}{b^2}+2\dfrac{a^2}{b}R\cos\theta}}$$

$$+\frac{a}{b\sqrt{R^2+\frac{a^4}{b^2}-2\frac{a^2}{b}R\cos\theta}}],(0\le\theta<\pi/2, R>a)$$

12. 有一点电荷 Q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内，它到两个平面的距离为 a 和 b，求空间电势。

解：可以构造如图所示的三个象电荷来代替两导体板的作用。

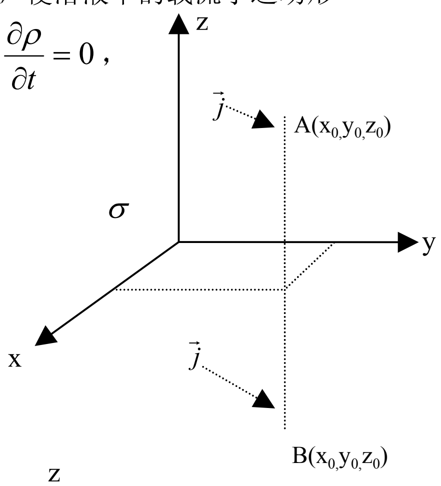


$$\phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-a)^2+(z-b)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-a)^2+(z+b)^2}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+a)^2+(z-b)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+a)^2+(z+b)^2}}],(y,z>0)$$

13.设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体。取该两平面为 xz 面和 yz 面，在（x_0,y_0,z_0）和（x_0,y_0,-z_0）两点分别置正负电极并通以电流 I，求导电液体中的电势。

解：本题的物理模型是，由外加电源在 A、B 两点间建立电场，使溶液中的载流子运动形成电流 I,当系统稳定时，是恒定场，即 $\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 中，$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，对于恒定的电流，可按静电场的方式处理。



于是，在 A 点取包围 A 的包围面：

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_n}\quad 而又有\left.\begin{matrix}I=\oint\vec{i}\cdot d\vec{s}\\ \vec{i}=\vec{E}\cdot\sigma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{\sigma}I=\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

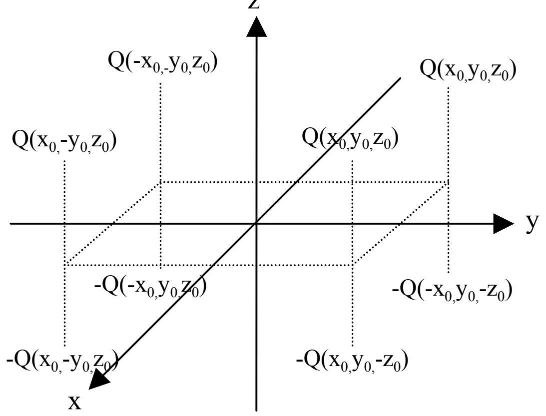
$$\therefore 有\frac{1}{\sigma}I=\frac{Q}{\varepsilon_1}\Rightarrow Q=\frac{I\varepsilon_1}{\sigma}$$

对 B Q $Q_B=-Q=-\frac{I\varepsilon_1}{\sigma}$

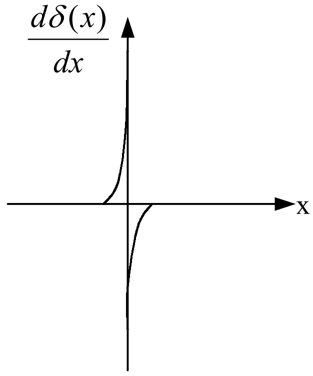
又在容器壁上，$\vec{j}_n=0$, 即元电流流入容器壁。

由：$\vec{j}=\sigma\vec{E}$，有 $\vec{j}_n=0$ 时，$\vec{E}_n=0$

$\therefore$ 可取如右图所示电像：



14.画出函数$\dfrac{d\delta(x)}{dx}$的图，说明$\rho=-(\vec{P}\cdot\nabla)\delta(\vec{x})$是一个位于原点的偶极子的电荷密度。



解：$\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases}$

$$\frac{d\delta(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x+\Delta x)-\delta(x)}{\Delta x}$$

1）$x\neq 0$时，$\dfrac{d\delta(x)}{dx}=0$

2）$x=0$时，：a）$\Delta x>0,\dfrac{d\delta(x)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-\infty}{\Delta x}=-\infty$

$$b)\Delta x<0,\frac{d\delta(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-\infty}{\Delta x}=+\infty$$

15．证明

1）$\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x).(a>0)$（若 a<0,结果如何？）

2）$x\delta(x)=0$

证明：1）根据$\delta[\phi(x)]=\sum\dfrac{\delta(x-x_k}{\left|\phi'(x_k)\right|}$，所以$\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$

2）从$\delta(x)$的定义可直接证明。

有任意良函数 f(x),则$f(x)\cdot x=F(x)$也为良函数

$$\int f(x)x\delta(x)dx=f(x)\cdot x\big|_{x=0}=0$$

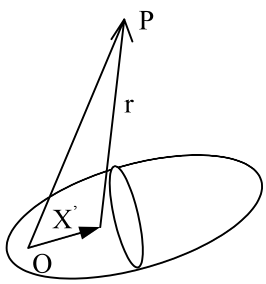
16．一块极化介质的极化矢量为$\vec{P}(\vec{x}')$，根据偶极子静电势的公式，极化介质所产生的静电势为

$$\varphi=\int_V\frac{\vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dV'$$

另外，根据极化电荷公式$\rho_{\vec{P}}=-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{x}')$及$\sigma_{\vec{P}}=\vec{n}\cdot\vec{P}$,极化介质所产生的电势又可表为

$$\varphi=-\int_V\frac{\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'+\oint_S\frac{\vec{P}(\vec{x}')\cdot d\vec{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

试证明以上两表达式是等同的



证明：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\vec{P}(\vec{x}')\cdot\vec{r}}{r^3}dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\vec{P}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}dV'$$

又有：$\nabla'^{p}(\vec{P}\frac{1}{r})=\nabla'\cdot\vec{P}\frac{1}{r}+\vec{P}\cdot\nabla'\frac{1}{r}$

则：$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{r}dV'+\int_{V'}\nabla'\cdot(\frac{\vec{P}}{r})dV']=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{r}dV'+\oint_S\frac{\vec{P}}{r}\cdot d\vec{S}]$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{r}dV'+\oint_S\frac{\vec{P}\cdot\vec{n}}{r}dS]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\int_V\frac{\rho_{\vec{P}}}{r}dV'+\oint_S\frac{\sigma_{\vec{P}}}{r}dS]$$

刚好是极化体电荷的总电势和极化面电荷产生的总电势之和。

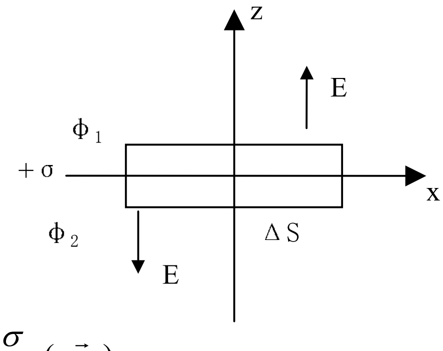
17．证明下述结果，并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化。

（1）在面电荷两侧，电势法向微商有跃变，而电势是连续的

（2）在面偶极层两侧，电势有跃变

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{n}\cdot\vec{P}$$

而电势的法向微商是连续的。（各带等量正负面电荷密度$\pm\sigma$而靠的很近的两个面，形成面偶极层，而偶极矩密度$\vec{P}=\lim\limits_{\substack{\sigma\to\infty\\ l\to 0}}\sigma\vec{l}$.）

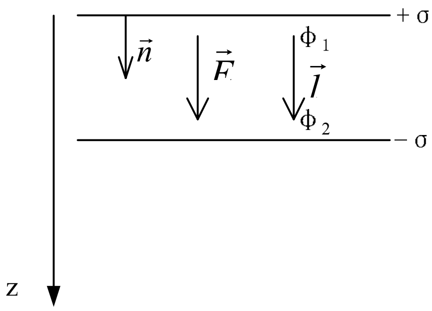


证明：1）如图可得：$2E\cdot\Delta s=\frac{\sigma\cdot\Delta s}{\varepsilon_0}$,

$$\therefore E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\phi_1-\phi_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z=0$$

面：$\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}=\vec{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$　　　　$\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}=\vec{E}_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}_z)$

$$\therefore\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}-\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



2)可得：$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$

$$\therefore\phi_2-\phi_1=\lim_{l\to 0}\vec{E}\cdot\vec{l}=\lim_{l\to 0}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}\cdot\vec{l}=\frac{\vec{n}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

又$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\vec{E},\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=\vec{E}$

$$\therefore \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0.$$

18.一个半径为 R_0 的球面，在球坐标 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 的半球面上电势为 φ_0，在 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 的半球面上电势为 $-\varphi_0$，求空间各点电势。

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}\Big|_0^1,$$

提示：$P_n(1) = 1$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, (n = \text{奇数}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6}, (n = \text{偶数}) \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_{\text{内}} = 0 \\ \nabla^2 \phi_{\text{外}} = 0 \\ \phi_{\text{内}}\big|_{r\to 0} < \infty \\ \phi_{\text{外}}\big|_{r\to\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\phi\big|_{r=R_0} = f(\theta) = \begin{cases} \phi_0, 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -\phi_0, \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

$\phi_{\text{内}} = \sum A_l r^l P_l(\cos\theta)$， 这是 $\phi_{\text{内}}$ 按球函数展开的广义傅立叶级数，$A_l r^l$ 是展开系数。

$$A_l R_0^l = f_l = \frac{2l+1}{2}[\int_{-1}^{1} \phi_{\text{内}}\big|_{R_0} P_l(\cos\theta) d\cos\theta] = \frac{2l+1}{2}[-\int_0^{\pi} \phi_{\text{内}}\big|_{R_0} P_l(\cos\theta)\cdot\sin\theta d\theta]$$

$$= \frac{2l+1}{2}[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_0 P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \phi_0 P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta]$$

$$= \frac{2l+1}{2}[\phi_0 \int_1^0 P_l(x)dx - \phi_0 \int_0^{-1} P_l(x)dx]$$

$$= \frac{2l+1}{2}\phi_0[-\int_{-1}^0 P_l(x)dx + \int_0^1 P_l(x)dx$$

由 $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

则：$A_l R_0^l = \dfrac{2l+1}{2}\phi_0[(-1)^{l+1}\int_0^1 P(x)dx + \int_0^1 P(x)dx]$

$$=\frac{2l+1}{2}\phi_0[(-1)^{l+1}+1]\int_0^1 P_l(x)dx$$

当 l 为偶数时， $A_l R_0^l=0$

当 l 为奇数时，有：

$$A_l R_0^l=\frac{2l+1}{2}\phi_0[(-1)^{l+1}+1]\int_0^1 P_l(x)dx=(2l+1)\phi_0\frac{P_{l+1}(x)-P_{l-1}(x)}{2l+1}\Big|_0^1$$

$$=-\phi_0[(-1)^{\frac{l+1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots l}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}-(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l-1)}]$$

$$=\phi_0[(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots l}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}+(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l-1)}]$$

$$=\phi_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l-1)}(\frac{l}{l+1}+1)=\phi_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}(2l+1)$$

则： $A_l=\frac{\phi_0}{R_0^l}(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}(2l+1)$

$$\phi_{内}=\sum\phi_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}(2l+1)(\frac{r}{R_0})^l P_l(\cos\theta),(l\text{取奇数，}r<R_0)$$

$$\phi_{外}=\sum\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

又 $\frac{B_l}{r^{l+1}}=\frac{2l+1}{2}[\int_{-1}^1\phi_{外}\Big|_{R_0}P_l(\cos\theta)]=\phi_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}(2l+1)$

即： $\phi_{外}=\sum(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(l-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(l+1)}(2l+1)(\frac{R_0}{r})^{l+1}P_l(\cos\theta),(l\text{为奇数，}r>R_0)$

1. 试用 $\vec{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 $\vec{B}_0$，写出 $\vec{A}$ 的两种不同表示式，证明两者之差是无旋场。

解：$\vec{B}_0$ 是沿 z 方向的均匀的恒定磁场，即 $\vec{B}_0 = B\vec{e}_z$，且 $\vec{B}_0 = \nabla\times\vec{A}$

在直角坐标系中，$\nabla\times\vec{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{e}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\vec{e}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{e}_z$

如果用 $\vec{A}$ 在直角坐标系中表示 $\vec{B}_0$，即：$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$

由此组方程，可看出 $\vec{A}$ 有多组解，如：

解 1：$A_y = A_Z = 0, A_x = -B_0 y + f(x)$

即：$\vec{A} = [-B_0 y + f(x)]\vec{e}_x$

解 2：$A_x = A_z = 0, A_Y = B_0 x + g(y)$

即：$\vec{A} = [B_0 x + g(y)]\vec{e}_y$

解 1 和解 2 之差为：$\Delta\vec{A} = [-B_0 y + f(x)]\vec{e}_x - [B_0 x + g(y)]\vec{e}_y$

则：

$$\nabla\times(\Delta\vec{A}) = [\frac{\partial(\Delta A)_z}{\partial y} - \frac{\partial(\Delta A)_y}{\partial z}]\vec{e}_x + [\frac{\partial(\Delta A)_x}{\partial z} - \frac{\partial(\Delta A)_z}{\partial x}]\vec{e}_y + [\frac{\partial(\Delta A)_y}{\partial x} - \frac{\partial(\Delta A)_x}{\partial y}]\vec{e}_z$$

$$=0$$

这说明两者之差是无旋场。

2. 均匀无穷长直圆柱形螺线管，每单位长度线圈匝数为 n，电流强度为 I，试用唯一性定理求管内外磁感应强度 B。

解：根据题意，得右图，取螺线管的中轴线为 z 轴

本题给定了空间中的电流分布，故可由 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}dV'$ 求解磁场分布，又 $\vec{J}$ 在导线上，所以 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Jd\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

1） 螺线管内：由于螺线管是无限长理想螺线管，故，由电磁学的有关知识知，其内部磁

场是均匀强磁场，故只须求出其中轴线上的磁感应强度，即可知道管内磁场。
由其无限长的特性，不妨取场点为零点，以柱坐标计算：

$$\vec{r}=-a\cos\varphi'\vec{e}_x-a\sin\varphi'\vec{e}_y-z'\vec{e}_x$$

$$d\vec{l}=-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y$$

$$\therefore d\vec{l}\times\vec{r}=(-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y)\times(-a\cos\varphi'\vec{e}_x-a\sin\varphi'\vec{e}_y-z'\vec{e}_x)$$

$$=-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+a^2d\varphi'\vec{e}_z$$

取由 $z'-z'+dz'$ 的以小段，此段上分布有电流 $nIdz'$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{nJdz'(-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+a^2d\varphi'\vec{e}_z)}{[a^2+(z')^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2dz'}{[a^2+(z')^2]^{3/2}}\cdot nI\vec{e}_z=\frac{nI\mu_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(\frac{z'}{a})}{[(\frac{z'}{a})^2+1]^{3/2}}=n\mu_0 I$$

2)螺线管外部:由于是无限长螺线管，不妨就在 xoy 平面上任取一点 $P(\rho,\varphi.0)$ 为场点 $(\rho>a)$

$$\therefore|r|=|\vec{x}-\vec{x}'|=\sqrt{(\rho\cos\varphi-a\cos\varphi')^2+(\rho\sin\varphi-a\sin\varphi')^2+z'^2}$$

$$=\sqrt{\rho^2+a^2+z'^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'=(\rho\cos\varphi-a\cos\varphi')\vec{e}_x+(\rho\sin\varphi-a\sin\varphi')\vec{e}_y-z'\vec{e}_z$$

$$d\vec{l}=-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y$$

$$\therefore d\vec{l}\times\vec{r}=-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+[a^2-a\rho\cos(\varphi'-\varphi)]d\varphi'\vec{e}_z$$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot nI[\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{az'\cos\varphi'd\varphi'}{r^3}\vec{e}_xdz'+\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{az'\sin\varphi'd\varphi'}{r^3}\vec{e}_ydz'+$$

$$+\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2-a\rho\cos(\varphi'-\varphi)}{r^3}dz'\vec{e}_z]$$

由于磁场分布在本题中有轴对称性，而螺线管内部又是匀强磁场，且螺线管又是无限长，故不会有磁力线穿出螺线管，上述积分为 0，所以 $\vec{B}=0$。

3. 设有无穷长的线电流 I 沿 z 轴流动，以 z<0 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，z>0 区域为真空，试用唯一性定理求磁感应强度 B，然后求出磁化电流分布。

解：本题的定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}_1=-\mu_0\vec{J},(z>0)\\ \nabla^2\vec{A}_2=-\mu\vec{J},(z<0)\\ \vec{A}_1=\vec{A}_2\big|_{z=0}\\ \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_2\big|_{z=0}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_1\big|_{z=0}\end{cases}$$

由本题具有轴对称性，可得出两个泛定方程的特解为：

$$\vec{A}_1(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}}{r}$$

$$\vec{A}_2(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}}{r}$$

由此可推测本题的可能解是：$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z>0)\\ \dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z<0)\end{cases}$

验证边界条件：1）$\vec{A}_1=\vec{A}_2\big|_{z=0}$,即$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$

题中，$\vec{n}=\vec{e}_z$,且$\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta=0$，所以边界条件 1）满足。

2）$\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_2\big|_{z=0}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_1\big|_{z=0}$,即$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$

本题中介质分界面上无自由电流密度，又

$$\vec{H}_1=\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}=\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{H}_2=\frac{\vec{B}_2}{\mu}=\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

$\therefore\vec{H}_2-\vec{H}_1=0$,满足边界条件$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$

综上所述，由唯一性定理可得，本题有唯一解：$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z>0)\\ \dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z<0)\end{cases}$

在介质中，$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，故在 z<0 的介质中，$\vec{M}=\dfrac{\vec{B}_2}{\mu_0}-\vec{H}_2$

即：$\vec{M}=\frac{I}{2\pi r}\cdot\frac{\mu}{\mu_0}\vec{e}_\theta-\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta$

∴　介质界面上的磁化电流密度：

$$\vec{\alpha}_M=\vec{M}\times\vec{n}=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta\times\vec{e}_z=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_r$$

总的感应电流：$J_M=\int\vec{M}\cdot d\vec{l}=\int_0^{2\pi}\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta\cdot r\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_\theta=I(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$，电流在 z<0 的空间中，沿 z 轴流向介质分界面。

4. 设 x<0 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，x>0 空间为真空，今有线电流 I 沿 z 轴流动，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：假设本题中得磁场分布仍呈轴对称，则可写作

$$\vec{B}=\frac{\mu' I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

其满足边界条件：$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\&\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}=0\end{aligned}$

即可得，在介质中：

$$\vec{H}_2=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{\mu' I}{2\pi r\mu}\vec{e}_\varphi$$

而$\vec{H}_2=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}=\frac{\mu' I}{2\pi r\mu_0}\vec{e}_\varphi-\vec{M}$

∴在 x<0 的介质中，$\vec{M}=\frac{\mu' I}{2\pi r}\frac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}\vec{e}_\varphi$

则 $I_M=\oint\vec{M}d\vec{l}$，　取积分路线为 $B\to C\to A\to B$ 的半圆。

$\because\overrightarrow{AB}\perp\vec{e}_\varphi$，　$\therefore\overrightarrow{AB}$ 段积分为零

$$I_M=\frac{I\mu'(\mu-\mu_0)}{2\mu\mu_0}$$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0(I+I_M)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

∴由 $\frac{\mu_0(I+I_M)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi=\vec{B}=-\frac{\mu' I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$，可得 $\mu'=\frac{2\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}$

$\therefore$ 空间 $\vec{B}=\frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}\frac{I}{\pi r}\vec{e}_\varphi$

$I_M=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I$　（沿 z 轴）

5. 某空间区域内有轴对称磁场，在柱坐标原点附近已知 $B_z\approx B_0-C(z^2-\frac{1}{2}\rho^2)$，其中 B_0 为常量，试求该处的 B_ρ。

提示：用 $\nabla\cdot\vec{B}=0$, 并验证所得结果满足 $\nabla\times\vec{H}=0$。

解：由 $\vec{B}$ 具有轴对称性，设 $\vec{B}=B_\rho\vec{e}_\rho+B_z\vec{e}_z$，其中 $B_z=B_0-c(z^2-\frac{1}{2}\rho^2)$

$\because \nabla\cdot\vec{B}=0$

$\therefore \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial}{\partial z}B_z=0$

即 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)-2cz=0$　　　$\therefore \rho B_\rho=cz\rho^2+A$ (常数)

取 $A=0$，得 $B_\rho=cz\rho$

$$\therefore \vec{B}=cz\rho\vec{e}_\rho+[B_0-c(z^2-\frac{1}{2}\rho^2)]\vec{e}_z \qquad (1)$$

$$\because \vec{j}=0,\vec{D}=0 \qquad \therefore \nabla\times\vec{B}=0 \text{ 即 } (\frac{\partial B_\rho}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial\rho})\vec{e}_\theta=0 \qquad (2)$$

代入（1）式可得（2）式成立，$\therefore B_\rho=cz\rho$， c 为常数。

6. 两个半径为 a 的同轴线圈形线圈，位于 $z=\pm L$ 面上，每个线圈上载有同方向的电流 I。
（1）　求轴线上的磁感应强度
（2）　求在中心区域产生最接近于均匀的磁场时的 L 和 a 的关系。

提示：用条件 $\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_z=0$

解：1）由毕－萨定律，L 处线圈在轴线上 z 处产生得磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = B_{1z}\vec{e}_z, \qquad B_{1z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{|Id\vec{l}\times\vec{r}|}{r^3}\sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia^2}{[a^2+(z-L)^2]^{3/2}}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\frac{1}{[(L-z)^2+a^2]^{3/2}}$$

同理，－L 处线圈在轴线上 z 处产生得磁感应强度为：

$$\vec{B}_2 = B_{2z}\vec{e}_z, \qquad B_{2z} = \frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\frac{1}{[(L+z)^2+a^2]^{3/2}}$$

∴　轴线上得磁感应强度

$$\vec{B} = B_z\vec{e}_z = \frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\left\{\frac{1}{[(L-z)^2+a^2]^{3/2}}+\frac{1}{[(L+z)^2+a^2]^{3/2}}\right\}\vec{e}_z$$

2）$\because \nabla\times\vec{B}=0$

$$\therefore \nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=0$$

又 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，　$\therefore \nabla^2\vec{B}=0, \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}B_z=0$ 代入（1）式中，得：

$$\frac{\left\{-[(L-z)^2+a^2]^{-\frac{1}{2}}(L-z)^2-[(L-z)^2+a^2]^{\frac{1}{2}}\right\}[(L-z)^2+a^2]^3+6(L-z)^2[(L-z)^2+a^2]^{\frac{5}{2}}}{[(L-z)^2+a^2]^6}$$

$$-\frac{\left\{[(L+z)^2+a^2]^{-\frac{1}{2}}(L+z)^2+[(L+z)^2+a^2]^{\frac{1}{2}}\right\}[(L+z)^2+a^2]^3-6(L-z)^2[(L+z)^2+a^2]^{\frac{5}{2}}}{[(L-z)^2+a^2]^6}$$

＝0

取 z＝0，得：

$$(L^2+a^2)^3[-2(L^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}L^2-2(L^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]+12(L^2+a^2)^{\frac{5}{2}}L^2=0$$

$$\therefore 5L^2 = L^2+a^2$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}a$$

7. 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 J 均匀分布于截面上，试解矢势 $\vec{A}$ 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0，导体外的磁导率为 μ。

解：定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}_{内}=-\mu_0\vec{J},(r<a)\\ \nabla^2\vec{A}_{外}=0,(r>a)\\ \vec{A}_{内}\big|_0<\infty\\ \vec{A}_{外}\big|_a=\vec{A}_{内}\big|_a\\ \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_{内}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_{外}\end{cases}$$

选取柱坐标系，该问题具有轴对称性，且解与 z 无关，令

$$\vec{A}_{内}=A_{内}(r)\vec{e}_z$$

$\vec{A}_{外}=A_{外}(r)\vec{e}_z$ 代入定解问题得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial A_{内}(r)}{\partial r})=-\mu_0 J\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial A_{外}(r)}{\partial r})=0\end{cases}$$

得：
$$A_{内}(r)=-\frac{1}{4}\mu Jr^2+C_1\ln r+C_2$$
$$A_{外}(r)=C_3\ln r+C_4$$

由 $A_{内}(r)\big|_{r=0}<\infty$ 得 $C_1=0$

由 $\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_{内}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_{外}$ 得 $C_3=-\dfrac{\mu}{2}Ja^2$

由 $\vec{A}_{外}\big|_a=\vec{A}_{内}\big|_a$，令 $\vec{A}_{外}\big|_a=\vec{A}_{内}\big|_a=0$ 得 $C_2=\frac{1}{4}\mu_0 Ja^2, C_4=\frac{\mu}{2}Ja^2\ln a$

$$\therefore \begin{cases}\vec{A}_{内}=\frac{1}{4}\mu_0\vec{J}(a^2-r^2)\\ \vec{A}_{外}=\frac{\mu}{2}\vec{J}a^2\ln\frac{a}{r}\end{cases}$$

8. 假设存在磁单极子，其磁荷为 Q_m，它的磁场强度为 $\vec{H}=\frac{Q_m}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$。给出它的矢势的一个可能的表示式，并讨论它的奇异性。

解：$\vec{H}=\frac{Q_m}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{Q_m}{4\pi\mu_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$

由 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}=\mu_0\vec{H}=\frac{Q_m}{4\pi r^2}\vec{e}_r$ 得：

$$\begin{cases}\frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}]=\frac{Q_m}{4\pi r^2}\\ \frac{1}{r}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)]=0\\ \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}]=0\end{cases}\qquad(1)$$

令 $A_r=A_\theta=0$, 得：$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)=\frac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}$

$$\therefore \sin\theta A_\phi=\int_0^\theta\frac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}d\theta$$

$$\therefore A_\phi=\frac{Q_m}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}$$

显然，A_ϕ 满足（1）式

∴ 磁单极子产生的矢势 $\vec{A}=\frac{Q_m}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi$

讨论： 当$\theta \to 0$时，$\vec{A} \to 0$

当$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{A} \to \dfrac{Q_m}{4\pi r}\vec{e}_\phi$

当$\theta \to \pi$时，$\vec{A} \to \infty$ ， 故$\vec{A}$的表达式在$\theta = \pi$具有奇异性，$\vec{A}$不合理

9. 将一磁导率为μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场$\vec{H}_0$内，求总磁感应强度$\vec{B}$和诱导磁矩$\vec{m}$。

解：根据题意，以球心为原点建立球坐标，取$\vec{H}_0$的方向为$\vec{e}_z$，此球体在外界存在的磁场的影响下极化，产生一个极化场，并与外加均匀场相互作用，最后达到平衡。保持在一个静止的状态，呈现球对称。

本题所满足的定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{m_1} = 0, R < R_0 \\ \nabla^2 \varphi_{m_2} = 0, R > R_0 \\ \varphi_{m_1} = \varphi_{m_2}, \mu \dfrac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial R} = \mu_0 \dfrac{\partial \varphi_{m_2}}{\partial R}, (R = R_0) \\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0} < \infty \\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty} = -H_0 R\cos\theta \end{cases}$$

由泛定方程和两个自然边界条件得：

$$\varphi_{m_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2} = -H_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

由两个边界条件有：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n P_n(\cos\theta) = -H_0 R_0 \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) \\ \displaystyle\mu\sum_{n=1}^{\infty} a_n n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) = -H_0 \mu_0 \cos\theta - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)d_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3\mu_0 H_0}{\mu + 2\mu_0} \\ d_1 = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 R_0^3 \\ a_n = d_n = 0, (n \neq 1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \varphi_{m_1} = -\dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu} H_0 R\cos\theta, R < R_0 \\ \varphi_{m_2} = -H_0 R\cos\theta + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2} H_0\cos\theta, R > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{H}_1 = -\nabla\varphi_{m_1} = \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \cos\theta \vec{e}_r - \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu} H_0 \sin\theta \vec{e}_\theta = \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu}\vec{H}_0 \\ \vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 = \dfrac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{H}_2 = -\nabla\varphi_{m_2} = [1 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{2R_0^3}{R^3}] H_0\cos\theta\vec{e}_r - [1 - \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^3}] H_0 \sin\theta \vec{e}_\theta \\ = \vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} R_0^3 [\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}] \\ \vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 = \mu_0\vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0 R_0^3 [\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}] \end{cases}$$

$$\therefore \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0, (R < R_0) \\ \mu_0\vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0 R_0^3 [\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}], (R > R_0) \end{cases}$$

当 $\vec{B}$ 在 $R>R_0$ 时，表达式中的第二项课看作一个磁偶极子产生的场

$\therefore \varphi_{m_2}$ 中 $\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}H_0\cos\theta$ 可看作偶极子 $\vec{m}$ 产生的势

即：$\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}H_0\cos\theta = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}\vec{H}_0\cdot\vec{R}$

$$\therefore \vec{m} = 4\pi\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot R_0^3\vec{H}$$

10. 有一个内外半径为 R_1 和 R_2 的空心球，位于均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 内，球的磁导率为 μ，求空

腔内的场 $\vec{B}$，讨论 $\mu >> \mu_0$ 时的磁屏蔽作用。

解：根据题意，以球心为原点，取球坐标，选取 $\vec{H}_0$ 的方向为 $\vec{e}_z$，在外场 $\vec{H}_0$ 的作用下， 球壳极化，产生一个附加场，并与外场相互作用，最后达到平衡，$\vec{B}$ 的分布呈现轴对称。

定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m_1}=0, R<R_1\\ \nabla^2\varphi_{m_2}=0, R_1<R<R_2\\ \nabla^2\varphi_{m_3}=0, R>R_3\\ \varphi_{m_1}=\varphi_{m_2}\Big|_{R=R_1}, \varphi_{m_2}=\varphi_{m_3}\Big|_{R=R_2}\\ \mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R}=\mu\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R=R_1}, \mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_3}}{\partial R}=\mu\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R=R_2}\\ \varphi_{m_1}\Big|_{R=0}<\infty\\ \varphi_{m_3}\Big|_{R=\infty}=-H_0R\cos\theta\end{cases}$$

由于物理模型为轴对称，再有两个自然边界条件，故，三个泛定方程的解的形式为：

$$\varphi_{m_1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2}=\sum_{n=0}^{\infty}(b_nR^n+\frac{c_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_3}=-H_0R\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

因为泛定方程的解是把产生磁场的源 $\vec{H}_0$ 做频谱分解而得出的，分解所选取的基本函数系是其本征函数系－$\{P_n(\cos\theta)\}$。在本题中，源的表示是：

$$-H_0R\cos\theta=-H_0RP_1(\cos\theta)$$

所以上面的解中，$a_n=b_n=c_n=d_n=0,(n\neq 0)$

故，解的形式简化为：

$$\varphi_{m_1}=a_1R\cos\theta$$

$$\varphi_{m_2}=(b_1R+\frac{c_1}{R^2})\cos\theta$$

$$\varphi_{m_3}=-H_0R\cos\theta+\frac{d_1}{R^2}\cos\theta$$

代入衔接条件，得：

$$\begin{cases} a_1R_1 = b_1R_1 + \dfrac{c_1}{R_1^2} \\ b_1R_2 + \dfrac{c_1}{R_2^2} = -H_0R_2 + \dfrac{d_1}{R_2^2} \\ a_1\mu_0 = \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_1^3} \\ -\mu_0H_0 - \mu\dfrac{2d_1}{R_2^3} = \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_2^3}) \end{cases}$$

解方程组得：

$$a_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^3 + 3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$b_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$c_1 = \frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3R_1^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$d_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^6 + 3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3R_1^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3} + H_0R_2^3$$

而： $\vec{B}_i = \mu_0\vec{H}_i = -\mu_0\nabla\varphi_{m_i}, (i=1,2,3)$

$$\therefore \vec{B}_1 = -\mu_0 a_1\vec{e}_z$$

$$= [1 - \frac{1-(\dfrac{R_1}{R_2})^3}{\dfrac{(\mu+2\mu_0)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2} - (\dfrac{R_1}{R_2})^3}]\mu_0\vec{H}_0$$

当 $\mu >> \mu_0$ 时：

$$\frac{(\mu+2\mu_0)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2} \approx 1$$

$$\therefore \vec{B}_1 = 0$$

即球壳腔中无磁场，类似于静电场中的静电屏障。

11. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\vec{B} = \mu\vec{H} + \mu_0 M_0, M_0$ 是恒定的与 $\vec{H}$ 无关的量，今将一个

理想铁磁体做成均匀磁化球（M_0为常值）浸入磁导率为μ'的无限介质中，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：根据题意，取球心为原点，做球坐标，以$\vec{M}_0$的方向为$\vec{e}_z$本题具有球对称的磁场分布，满足的定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m_1}=0, R<R_0\\ \nabla^2\varphi_{m_2}=0, R>R_0\\ \varphi_{m_1}=\varphi_{m_2}\Big|_{R=R_0},\\ \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R}-\mu'\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R_0}=M_0\mu_0\cos\theta\\ \varphi_{m_1}\Big|_{R=0}<\infty\\ \varphi_{m_2}\Big|_{R=\infty}=0\end{cases}$$

$$\therefore \varphi_{m_1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{b_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

代入衔接条件，对比$P_n(\cos\theta)$对应项前的系数，得：

$a_n=b_n=0,(n\neq1)$，$a_1=\dfrac{\mu_0M_0}{2\mu'+\mu}$，$b_1=\dfrac{\mu_0M_0}{2\mu'+\mu}R_0^3$

$$\therefore \varphi_{m_1}=\frac{\mu_0M_0}{2\mu'+\mu}R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=\frac{\mu_0M_0}{2\mu'+\mu}\frac{R_0^3}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

由此，$R<R_0, \vec{B}_1=\mu\vec{H}_1+\mu_0\vec{M}_0=\dfrac{2\mu'\mu_0\vec{M}_0}{2\mu'+\mu}$

$R>R_0$，$\vec{B}_2=-\mu'\nabla\varphi_{m_2}=\dfrac{\mu'\mu_0R_0^3}{2\mu'+\mu}[\dfrac{3(\vec{M}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\dfrac{\vec{M}_0}{R^3}]$

$$\therefore \vec{B}=\begin{cases}\dfrac{2\mu'\mu_0\vec{M}_0}{2\mu'+\mu},(R<R_0)\\ \dfrac{\mu'\mu_0R_0^3}{2\mu'+\mu}[\dfrac{3(\vec{M}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\dfrac{\vec{M}_0}{R^3}],(R>R_0)\end{cases}$$

又 $\vec{n}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\big|_{R_0}=\mu_0(\vec{\alpha}_M+\vec{\alpha})$，其中，$\vec{\alpha}=0$

代入 $\vec{B}$ 的表达式，得：

$$\vec{\alpha}_M=-\frac{3\mu'}{2\mu'+\mu_0}M_0\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

12. 将上题的永磁球置入均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 中，结果如何？

解：根据题意，假设均匀外场 $\vec{H}_0$ 的方向与 $\vec{M}_0$ 的方向相同，定为坐标 z 轴方向。

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m_1}=0, R<R_0\\ \nabla^2\varphi_{m_2}=0, R>R_0\\ \varphi_{m_1}=\varphi_{m_2}\big|_{R=R_0},\\ \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R}-\mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R_0}=M_0\mu_0\cos\theta\\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0}<\infty\\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty}=-H_0R\cos\theta\end{cases}$$

解得满足自然边界条件的解是：

$$\varphi_{m_1}=a_1R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=-H_0R\cos\theta+\frac{d_1}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

代入衔接条件：

$$a_1R_0=-H_0R_0+\frac{d_1}{R_0^2}$$

$$\mu_0H_0+\mu_0\frac{2d_1}{R_0^3}+\mu a_1=\mu_0M_0$$

得到：$$a_1=\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}$$

$$d_1=\frac{\mu_0M_0+(\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3$$

$$\therefore\varphi_{m_1}=\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2} = -H_0 R\cos\theta + \frac{\mu_0 M_0 + (\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R_0^3}{R^2}\cos\theta, (R > R_0)$$

$$\therefore \vec{H}_1 = -\nabla\varphi_{m_1} = -[\frac{\mu_0 M_0 - 3\mu_0 H_0}{\mu+2\mu_0}\cos\theta\vec{e}_r - \frac{\mu_0 M_0 - 3\mu_0 H_0}{\mu+2\mu_0}\sin\theta\vec{e}_\theta]$$

$$= -\frac{\mu_0\vec{M}_0 - 3\mu_0\vec{H}_0}{2\mu_0+\mu}$$

$$\vec{B}_1 = \mu\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0 = \frac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0 + \frac{2\mu_0^2}{\mu+2\mu_0}\vec{M}_0, (R < R_0)$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_{m_2} = -[(-H_0\cos\theta - \frac{\mu_0 M_0 + (\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{2R_0^3}{R^2}\cos\theta)\vec{e}_r -$$

$$-(-H_0\sin\theta + \frac{\mu_0 M_0 + (\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R_0^3}{R^2}\sin\theta)\vec{e}_\theta] = \vec{H}_0 + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 = \mu_0[\vec{H}_0 + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}],\quad \vec{m} = \frac{\mu_0\vec{M}_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3 + \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3\vec{H}_0$$

13. 有一个均匀带电的薄导体壳，其半径为 R_0，总电荷为 Q，今使球壳绕自身某一直径以角速度 ω 转动，求球内外的磁场 $\vec{B}$ 。

提示：本题通过解 $\vec{A}$ 或 φ_m 的方程都可以解决，也可以比较本题与§5 例 2 的电流分布得到结果。

解：根据题意，取球体自转轴为 z 轴，建立坐标系。

定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{m_1} = 0, R < R_0 \\ \nabla^2\varphi_{m_2} = 0, R > R_0 \\ \frac{1}{R_0}(\frac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial\theta}) = -\frac{Q\omega\sin\theta}{4\pi R_0}\Big|_{R=R_0} \\ \mu\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R} = \mu_0\frac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}, (R = R_0) \\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0} < \infty \\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty} = 0 \end{cases}$$

其中，$\sigma = \dfrac{Q\omega\sin\theta}{4\pi R_0}$ 是球壳表面自由面电流密度。

解得满足自然边界条件的解为：

$$\varphi_{m_1}=a_1R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=\frac{b_1}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

代入衔接条件：$\begin{cases}a_1R_0-\dfrac{b_1}{R_0^2}=-\dfrac{Q\omega}{4\pi R_0}\\ a_1+\dfrac{2b_1}{R_0^3}=0\end{cases}$

解得： $a_1=-\dfrac{Q\omega}{6\pi R_0}$， $b_1=\dfrac{Q\omega R_0^2}{12\pi}$

$$\therefore \varphi_{m_1}=-\frac{Q\omega}{6\pi R_0}R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=\frac{Q\omega R_0^2}{12\pi R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

$$\therefore \vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m_1}=\frac{Q\omega}{6\pi R_0}\cos\theta\vec{e}_r-\frac{Q\omega}{6\pi R_0}\sin\theta\vec{e}_\theta=\frac{Q\vec{\omega}}{6\pi R_0}$$

$$\vec{B}_1=\mu_0\vec{H}_1=\frac{Q\mu_0}{6\pi R_0}\vec{\omega}$$

$\vec{H}_2=-\nabla\varphi_{m_2}=\dfrac{2Q\omega R_0^2}{12\pi R^3}\cos\theta\vec{e}_r+\dfrac{Q\omega R_0^2}{12\pi R^3}\sin\theta\vec{e}_r=\dfrac{1}{4\pi}[\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\dfrac{\vec{m}}{R^3}]$ ， 其中 $\vec{m}=\dfrac{QR_0^2}{3}\vec{\omega}$

$$\vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}}{R^3}]$$

14. 电荷按体均匀分布的刚性小球，其总电荷为 Q，半径为 R_0，它以角速度ω绕自身某以直径转动，求

（1） 它的磁矩

（2） 它的磁矩与自转动量矩之比（设质量 M_0 是均匀分布的）

解：1）磁矩 $\vec{m}=\dfrac{1}{2}\int\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})dV$

又 $\vec{x}=\vec{R}=\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_r$， $\vec{J}(\vec{x})=\rho\vec{v}=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}(\vec{\omega}\times\vec{R})$

$$\therefore \vec{m}=\frac{1}{2}\frac{3Q}{4\pi R_0^3}\int\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})R^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{1}{2}\frac{3Q\omega}{4\pi R_0^3}\int(\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$

又 $\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi=-\vec{e}_\theta=\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)$

$$\therefore \vec{m}=\frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}[\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\vec{e}_z\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}\sin^3\theta R^4drd\theta d\phi=\frac{QR_0^2}{5}\vec{\omega}$$

2)自转动量矩 $\vec{L}=\int d\vec{L}=\int\vec{R}\times d\vec{P}=\int\vec{R}\times\vec{v}dm=\dfrac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})dV$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega(\vec{e}_r\times\vec{e}_z\times\vec{e}_r)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega(-\sin\theta\vec{e}_\phi\times\vec{e}_r)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega\sin\theta(-\vec{e}_\theta)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$
$$=\frac{3M_0\omega}{4\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}[\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$
$$=\frac{3M_0\vec{\omega}}{4\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}R^4\sin^3\theta drd\theta d\phi=\frac{2M_0R_0^2\vec{\omega}}{5}$$

$$\therefore \vec{m}/\vec{L}=\frac{QR_0^2}{5}\vec{\omega}\bigg/\frac{2M_0R_0^2}{5}\vec{\omega}=Q/2M_0$$

15. 有一块磁矩为 $\vec{m}$ 的小永磁体，位于一块磁导率非常大的实物的平坦界面附近的真空中，求作用在小永磁体上的力 $\vec{F}$.

解：根据题意，因为无穷大平面的 μ 很大，则可推出在平面上，所有的 $\vec{H}$ 均和平面垂直，类比于静电场，构造磁矩 $\vec{m}$ 关于平面的镜像 $\vec{m}'$，则外场为：

$$\begin{cases} \vec{B}_e = -\mu_0 \nabla \varphi_m \\ \varphi_m = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3} = \dfrac{m\cos\theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{B}_e = -\mu_0 \frac{m}{4\pi}[-\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r - \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta] = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(\alpha\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

$\therefore \vec{m}$ 受力为：

$$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\cdot\vec{B}_e\Big|_{\substack{r=2a\\ \theta=\alpha}} = -\frac{3m^2\mu_0}{64\pi a^4}(1+\cos^2\alpha)\vec{e}_z$$

1.考虑两列振幅相同的、偏振方向相同、频率分别为$\omega+d\varpi$和$\omega-d\omega$的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播。

（1）求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波。

（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。

解：
$$\vec{E}_1(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_1x-\omega_1t)$$
$$\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_2x-\omega_2t)$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1(\vec{x},t)+\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})[\cos(k_1x-\omega_1t)+\cos(k_2x-\omega_2t)]$$

$$=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$$

其中$k_1=k+dk,k_2=k-dk;\omega_1=\omega+d\omega,\omega_2=\omega-d\omega$

$$\therefore\vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(kx-\omega t)\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)$$

用复数表示$\vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)e^{i(kx-\omega t)}$

相速 $kx-\omega t=0$

$$\therefore v_p=\frac{\omega}{k}$$

群速 $dk\cdot x-d\omega\cdot t=0$

$$\therefore v_g=\frac{d\omega}{dk}$$

2．一平面电磁波以$\theta=45^{\circ}$从真空入射到$\varepsilon_r=2$的介质，电场强度垂直于入射面，求反射系数和折射系数。

解：$\vec{n}$为界面法向单位矢量，$<S>,<S'>,<S''>$分别为入射波，反射波和折射波的玻印亭矢量的周期平均值，则反射系数 R 和折射系数 T 定义为：

$$R=\left|\frac{<S'>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{E_0^{'2}}{E_0^2}$$
$$T=\left|\frac{<S''>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{n_2\cos\theta_2E''^2}{n_1\cos\theta E_0^2}$$

又根据电场强度垂直于入射面的菲涅耳公式，可得：

$$R=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}\right)^2$$

$$T=\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\cos\theta_2}{(\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2)^2}$$

又根据反射定律和折射定律

$$\theta=\theta_1=45^{\circ}$$
$$\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2=\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta$$

由题意， $\varepsilon_1=\varepsilon_0,\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_r=2\varepsilon_0$

$$\therefore\theta_2=30^{\circ}$$

$$\therefore R=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$T=\frac{4\varepsilon_0\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

3．有一可见平面光波由水入射到空气，入射角为 60°。证明这时将会发生全反射，并求折射波沿表面传播的相速度和透入空气的深度。设该波在空气中的波长为 $\lambda_0=6.28\times10^{-5}$cm，水的折射率为 n＝1.33。

解：由折射定律得，临界角 $\theta_c=\arcsin(\frac{1}{1.33})=48.75°$，所以当平面光波以 60° 入射时，将会发生全反射。

折射波： $k''=k\sin\theta$

相速度 $v_p=\dfrac{\omega''}{k''}=\dfrac{\omega}{k/\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

投入空气的深度 $\kappa=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=\dfrac{6.28\times10^{-5}}{2\pi\sqrt{\sin^2 60-(\frac{1}{1.33})^2}}\approx1.7\times10^{-5}$ cm

4．频率为 ω 的电磁波在各向同性介质中传播时，若 $\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}$ 仍按 $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ 变化，但 $\vec{D}$ 不再与 $\vec{E}$ 平行（即 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 不成立）。

（1）证明 $\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{k}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{E}=0$，但一般 $\vec{k}\cdot\vec{E}\neq0$

（2）证明 $\vec{D}=\dfrac{1}{\omega^2\mu}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$

（3）证明能流 $\vec{S}$ 与波矢 $\vec{k}$ 一般不在同方向上。

证明：1）由麦氏方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

得：

$$\nabla\cdot\vec{B}=\vec{B}_0\cdot\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

$$\therefore\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

同理　$\vec{k}\cdot\vec{D}=0$

$$\nabla\times\vec{H}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{H}_0=i\vec{k}\times\vec{H}=-i\omega\vec{D}$$

$$\therefore i\vec{k}\times\vec{B}=-i\mu\omega\vec{D}$$

$$\therefore\vec{B}\cdot\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega}\vec{B}\cdot(\vec{k}\times\vec{B})=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{E}_0=i\vec{k}\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$$

$$\therefore\vec{B}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})\cdot\vec{E}=0,\quad\nabla\cdot\vec{E}=i\vec{k}\cdot\vec{E}$$

$\because\vec{D}\neq\varepsilon\vec{E}$　　$\therefore\nabla\cdot\vec{E}$ 一般 $\neq0$，即 $\vec{k}\cdot\vec{E}$ 一般 $\neq0$

2）由$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 得： $\vec{B}=\dfrac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

另由$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 得： $\vec{D}=-\dfrac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{B})$

$$\therefore\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega^2}[\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})]=\frac{1}{\mu\omega^2}[(\vec{k}\times\vec{E})\times\vec{k}]=\frac{1}{\mu\omega^2}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$$

3）由$\vec{B}=\dfrac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$ 得 $\vec{H}=\dfrac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

$$\therefore\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega}\vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E})=\frac{1}{\mu\omega}[E^2\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{E}]$$

$\because\vec{k}\cdot\vec{E}$一般$\neq 0$ $\therefore\vec{S}$一般$\neq\dfrac{1}{\mu\omega}E^2\vec{k}$，即$\vec{S}$一般不与$\vec{k}$同向

5．有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播，一个波沿 x 方向偏振，另一个沿 y 方向偏振，但相位比前者超前$\dfrac{\pi}{2}$，求合成波的偏振。

反之，一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振？

解：偏振方向在 x 轴上的波可记为：

$$x=A_0\cos(\omega t-kz)=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0x})$$

在 y 轴上的波可记为：

$$y=A_0\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0y})$$

$$\Delta\varphi=\varphi_{0y}-\varphi_{0x}=\frac{\pi}{2}$$

合成得轨迹方程为：

$$x^2+y^2=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\cos^2(\omega t+\varphi_{0y})]$$

$$=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\sin^2(\omega t+\varphi_{0x})]$$

$$=A_0^2$$

即：$x^2+y^2=A_0^2$

所以合成的振动是一个圆频率为ω的沿 z 轴方向传播的右旋圆偏振。反之，一个圆偏

振可以分解为两个偏振方向垂直，同振幅，同频率，相位差为$\pi/2$的线偏振的合成。

6．平面电磁波垂直直射到金属表面上，试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热。
证明：设在 z>0 的空间中是金属导体，电磁波由 z<0 的空间中垂直于导体表面入射。

已知导体中电磁波的电场部分表达式是：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

于是，由 z＝0 的表面，单位面积进入导体的能量为：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}\text{，其中，}\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\vec{n} \times \vec{E}$$

其平均值为$\left|\bar{\vec{S}}\right| = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$

在导体内部,：$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma\vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$

所以金属导体单位面积那消耗的焦耳热的平均值为：

$$dQ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{J}^* \times \vec{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

作积分：$Q = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma}{4\alpha}E_0^2$ 即得单位面积对应的导体中消耗的平均焦耳热。

又$\because \alpha\beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2}$

$\therefore Q = \frac{\sigma}{4\alpha}E_0^2 = \frac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$ 原题得证.

7．已知海水的$\mu_r = 1, \sigma = 1S \cdot m^{-1}$，试计算频率$\nu$为$50, 10^6$和$10^9$ Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度。
解：取电磁波以垂直于海水表面的方式入射，

透射深度 $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

$\because \mu_r = 1$

$\therefore \mu = \mu_0\mu_r = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

$\therefore 1 > \nu = 50Hz\text{时}: \delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} = 72m$

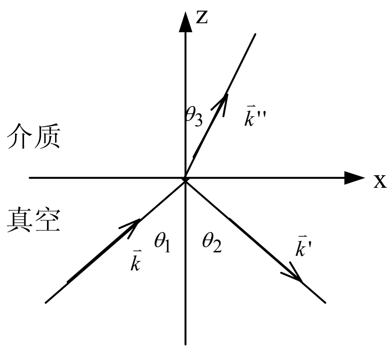
$$2>\nu=10^6Hz\text{时：}\ \delta_2=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx0.5m$$

$$3>\nu=10^9Hz\text{时}:\delta_3=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^9\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx16mm$$

8．平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上，入射角为θ_1，求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度。若导电介质为金属，结果如何？

提示：导电介质中的波矢量$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha},\vec{\alpha}$只有 z 分量（为什么？）。

解：根据题意，如图所示，入射平面是 xz 平面



导体中的电磁波表示为：$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$$\vec{k}''=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$$

与介质中的有关公式比较可得：

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

根据边界条件得：$k_x''=\beta_x+i\alpha_x=\text{实数},\therefore\alpha_x=0$

$$\text{又}\,k_x''=k_x=k\sin\theta_1=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$$

$$\therefore\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$$

而入射面是 xz 平面，故$\vec{k},\vec{k}''$无 y 分量。 $\therefore\alpha_y=0,\beta_y=0$

$\therefore\vec{\alpha}$只有α_z存在，$\vec{\beta}$有β_x与β_z，其中$\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$

$$\therefore\text{有}\begin{cases}(\frac{\omega}{c}\sin\theta_1)^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ \alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

解得：

$$\beta_z^2=\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1-\omega^2\mu\varepsilon)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=-\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

其相速度为：$v=\dfrac{\omega}{\beta}$，　衰减深度为 $1/\alpha$

如果是良导体，则：$\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1+\beta_z^2-\alpha_z^2=0\\ \alpha_z\beta_z=\dfrac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$

$$\therefore \beta_z^2=-\frac{\omega^2}{2c^2}\sin 2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^4}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=\frac{\omega^2}{2c^2}\sin^2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^2}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

9．无限长的矩形波导管，在在 z＝0 处被一块垂直地插入地理想导体平板完全封闭，求在 $z=-\infty$ 到 z＝0 这段管内可能存在的波模。

解：在此中结构得波导管中，电磁波的传播依旧满足亥姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$$

方程的通解为：

$$E(x,y,z)=(C_1\sin k_x x+D_1\cos k_x x)\cdot(C_2\sin k_y y+D_2\cos k_y y)\cdot(C_3\sin k_z z+D_3\cos k_z z)$$

根据边界条件有：

$$E_y=E_z=0,(x=0,a)\text{，}\qquad E_x=E_z=0,(y=0,b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0,(x=0,a)\text{，}\quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0,(y=0,b)\text{，}\quad \frac{\partial E_z}{\partial z}=0,(z=0)$$

故：$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\\ E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\\ E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z\end{cases}$

其中，$k_x=\dfrac{m\pi}{a},m=0,1,2\cdots$

$k_y=\dfrac{n\pi}{b},n=0,1,2\cdots$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0=\frac{\omega^2}{c^2}\text{ 且 }A_1\frac{m\pi}{a}+A_2\frac{n\pi}{b}+A_3k_z=0$$

综上，即得此种波导管种所有可能电磁波的解。

10．电磁波 $\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_2 z-\omega t)}$ 在波导管中沿 z 方向传播，试使用 $\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H}$ 及 $\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$ 证明电磁场所有分量都可用 $E_x(x,y)$ 和 $H_z(x,y)$ 这两个分量表示。

证明：沿 z 轴传播的电磁波其电场和磁场可写作：

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)},\quad \vec{H}(x,y,z,t)=\vec{H}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

由麦氏方程组得
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\mu_0\vec{H}$$
$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

写成分量式：
$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_z E_y=i\omega\mu_0 H_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=ik_z E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=i\omega\mu_0 H_y \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=i\omega\mu_0 H_z$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-ik_z H_y=-i\omega\varepsilon_0 E_x \tag{3}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=ik_z H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-i\omega\varepsilon_0 E_y \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-i\omega\varepsilon_0 E_z$$

由（2）（3）消去 H_y 得
$$E_x=\frac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}-k_z\frac{\partial E_z}{\partial x})$$

由（1）（4）消去 H_x 得 $E_y = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)}(\omega\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial x} - k_z \dfrac{\partial E_z}{\partial y})$

由（1）（4）消去 E_y 得 $H_x = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)}(-k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial x} + \omega\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial y})$

由（2）（3）消去 E_x 得 $H_y = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)}(-k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \omega\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial x})$

11．写出矩形波导管内磁场 $\vec{H}$ 满足的方程及边界条件。

解：对于定态波，磁场为 $\vec{H}(\vec{x},t) = \vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t}$

由麦氏方程组 $\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \end{cases}$

得 $\nabla\times(\nabla\times\vec{H}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H} = -i\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}$

又 $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = i\omega\mu\vec{H}$

$\therefore -i\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}$

$\therefore \begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\vec{H} = 0, k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \end{cases}$ 即为矩形波导管内磁场 $\vec{H}$ 满足的方程。

由 $\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$ 得 $\vec{n}\cdot\vec{H} = 0$，$H_n = 0$

利用 $\nabla\times\vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$ 和电场的边界条件可得：$\dfrac{\partial H_t}{\partial n} = 0$

$\therefore$ 边界条件为 $\begin{cases} H_n = 0 \\ \dfrac{\partial H_t}{\partial n} \end{cases}$

12．论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{0n} 波。

证明：已求得波导管中的电场 $\vec{E}$ 满足：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\vec{H} = -\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_3 k_y - iA_2 k_z)\sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ H_y = -\dfrac{i}{\omega\mu}(iA_1 k_z - A_3 k_x)\cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ H_z = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_2 k_x - A_1 k_y)\cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

本题讨论 TM 波，故 $H_z = 0$，即：$A_2 k_x - A_1 k_y = 0$

故：1）若 $n = 0,$ 则 $k_y = \dfrac{n\pi}{b} = 0, A_2 k_x = 0$

又 $k_x = \dfrac{m\pi}{a} \neq 0,$ 那么 $A_2 = 0$

$\therefore H_x = H_y = 0$

2）若 $m = 0,$ 则 $k_x = \dfrac{m\pi}{a} = 0, A_1 k_y = 0$

又 $k_y = \dfrac{n\pi}{b} \neq 0,$ 那么 $A_1 = 0$

$\therefore H_x = H_y = 0$

$\therefore$ 波导中不可能存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 两种模式的波

13．频率为 30×10^9 Hz 的微波，在 $0.7cm\times0.4cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？在 $0.7cm\times0.6cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？

解：1）$\nu = 30\times10^9\,Hz$，波导为 $0.7cm\times0.4cm$

由$\nu = \dfrac{\omega}{2m} = \dfrac{c}{2}\sqrt{(\dfrac{m}{a})^2 + (\dfrac{n}{b})^2}$

当$a = 0.7\times10^{-2}m., b = 0.4\times10^{-2}m$时

$$m = 1, n = 1\text{时}, \nu = 4.3\times10^{10}Hz$$
$$m = 1, n = 0\text{时}，\quad \nu = 2.1\times10^{10}Hz$$
$$m = 0, n = 1\text{时}, \nu = 3.7\times10^{10}Hz$$

∴此波可以以 TM_{10} 波在其中传播。

2）$\nu = 30\times10^{9}Hz$，波导为$0.7cm\times0.6cm$

$$m = 1, n = 1\text{时}, \nu = 2.1\times10^{10}Hz$$
$$m = 1, n = 0\text{时}，\quad \nu = 2.5\times10^{10}Hz$$
$$m = 0, n = 1\text{时}, \nu = 3.3\times10^{10}Hz$$

∴此波可以以 TE_{10} 和 TE_{01} 两种波模传播。

14．一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行与板面的 z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率。

解：在导体板之间传播的电磁波满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0\\ k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{E} = 0\end{cases}$$

令 U（x，y，z）是$\vec{E}$的任意一个直角分量，由于$\vec{E}$在 x 方向上是均匀的

$$\therefore U(x, y, z) = U(y, z) = Y(y)Z(z)$$

又在 y 方向由于有金属板作为边界，是取驻波解；在 z 方向是无界空间，取行波解

∴解得通解：$U(x, y, z) = (C_1\sin k_y y + D_1\cos k_y y)e^{ik_z z}$

由边界条件：$\vec{n}\times\vec{E} = 0, \text{和}\dfrac{\partial E}{\partial n} = 0$定解

$$E_x = A_1\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$E_y = A_2\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)}\text{ 且 }k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{n\pi}{b})^2 + k_z^2, n = 0,1,2\cdots$$
$$E_z = A_3\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

又由$\nabla\cdot\vec{E} = 0$得：A_1独立，与A_2,A_3无关，$\dfrac{n\pi}{b}A_2 = ik_z A_z$

令 k_z＝0 得截止频率：$\omega_c = \dfrac{n\pi c}{b}$

15．证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等。

证明：在谐振腔中，电场 $\vec{E}$ 的分布为：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\vec{H} = -\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_3 k_y - iA_2 k_z)\sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ H_y = -\dfrac{i}{\omega\mu}(iA_1 k_z - A_3 k_x)\cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ H_z = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_2 k_x - A_1 k_y)\cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\omega = \dfrac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$ 有，谐振腔中：

1）电场能流密度

$$\omega_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

$$\therefore \overline{\omega}_E = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})] = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}[A_1^2\cos^2 k_x x\sin^2 k_y y\sin^2 k_z z + A_2^2\sin^2 k_x x\cos^2 k_y y\sin^2 k_z z + A_3^2\sin^2 k_x x\sin^2 k_y y\cos^2 k_z z]$$

2)磁场能流密度

$$\omega_B = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

$$\overline{\omega}_B = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{H}^*\cdot\vec{B})$$

$$= \frac{1}{4\mu\omega^2}[(A_3 k_y - A_z k_z)^2\sin^2 k_x x\cos k^2 k_y y\cos^2 k_z z +$$

$$+ (A_1 k_z - A_3 k_x)^2\cos^2 k_x x\sin^2 k_y y\cos^2 k_z z +$$

$$+ (A_2 k_x - A_1 k_y)^2\cos^2 k_x x\cos^2 k_y y\sin^2 k_z z]$$

有：$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 且 $A_1k_x+A_2k_Y+A_3k_z=0$

其中：$k_x=\dfrac{m\pi}{a},k_y=\dfrac{n\pi}{b},k_z=\dfrac{p\pi}{c},m,n,p=0,1,2\cdots$

a，b，c 是谐振腔的线度，不妨令 x:0～a, y:0～b, z:0～c

于是谐振腔中电场能量对时间的平均值为：

$$\overline{W_E}=\int\overline{\omega}_E dV=\frac{\varepsilon}{4}\int_0^a\int_0^b\int_0^c(A_1^2\cos^2k_xx\sin^2k_yy\sin^2k_zz+A_2^2\sin^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz+$$

$$+A_3^2\sin^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz)dxdydz$$

$$=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

谐振腔中磁场能量的时间平均值为：

$$\overline{W_B}=\int\overline{\omega}_B dV=\frac{1}{4\mu\omega^2}\cdot\frac{abc}{8}[(A_3k_y-A_2k_z)^2+(A_1k_z-A_3k_x)^2(A_2k_x-A_1k_y)^2]$$

$$\because A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$$

$$\therefore(A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z)^2=A_1^2k_x^2+A_2^2k_y^2+A_3^2k_z^2+2A_1A_2k_xk_y+2A_1A_3k_zk_x+2A_2A_3k_yk_z=0$$

$$\therefore\overline{W_B}=\frac{abc}{32\mu\omega^2}[(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(k_x^2+k_y^2+k_z^2)]$$

$$=\frac{abck^2}{32\mu\omega^2}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

$$\therefore\overline{W_E}=\overline{W_B}$$

1.若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的(纵场)和无散的(横场)两部分，写出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的这两部分在真空所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库仑场。

解：在真空中的麦克斯韦方程组是：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

如果把此方程组中所有的矢量都分解为：无旋的纵场——用角标 L 表示，
无散的横场——用角标 T 表示。

那么： $\vec{E}=\vec{E}_L+\vec{E}_T$，且 $\nabla\times\vec{E}_L=0$，$\nabla\cdot\vec{E}_T=0$;

$\vec{J}=\vec{J}_L+\vec{J}_T$，

$\vec{B}=\vec{B}_L+\vec{B}_T$：由于 $\nabla\times\vec{B}=0$，即 $\vec{B}$ 无源场，不存在纵场分量；亦是说 $\vec{B}_L$,则$\vec{B}=\vec{B}_T$

代入上面麦氏方程组：

1>$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ：

$$\nabla\times(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\times\vec{E}_L+\nabla\times\vec{E}_T=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}$$

2>$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ ： $\nabla\cdot(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\cdot\vec{E}_L+\nabla\cdot\vec{E}_T=\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

3>$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$： $\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0(\vec{J}_L+\vec{J}_T)+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{E}_L+\vec{E}_T)$

$$=(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})+(\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t})$$

若两边同时取散度， $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}_T)=0$

$$\nabla\cdot(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})=0$$

$\therefore$ 当且仅当 $\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0$ 时，上式方成立。

综上，得麦氏方程的新表示方法：

$$\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}\;;\qquad \nabla\cdot\vec{E}_L={\rho}/{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_{0=}\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t}\;;\qquad \mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0\;;\quad \vec{B}_L=0$$

证明电场的无旋部分对应库仑场：

电场的无旋部分表达式为：$\nabla\cdot\vec{E}_L={\rho}/{\varepsilon_0}$

引入 $\vec{E}_L=-\nabla\varphi$ 于是有：$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 此泊松方程的解，即是静止电荷在真空中产生的电势分布，那么 $\vec{E}_L$ 即对应静止电荷产生的库仑场。

2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho=0,\vec{J}=0,$ 则 E 和 B 可完全由矢势 A 决定，若取 $\varphi=0,$ 这时 A 满足哪两个方程？

解：在线性各向同性均匀非导电介质中，如果令，$\vec{J}=0,\rho=0$，麦氏方程表示为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\quad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};\quad \nabla\cdot\vec{D}=0\;;\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu}$

由：$\nabla\cdot\vec{B}=0$ 引入矢势 $\vec{A}$，使 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

则 $\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ 故，$\vec{B}$ 由矢势 $\vec{A}$ 完全决定。

把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 代入 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; 有：

$$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0\quad 令\ \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\qquad 则：\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\nabla\times(-\nabla\varphi)=0$$

则：$\vec{E}=-\partial\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 故 $\vec{E}$ 有标势 $\vec{A}$ 完全决定。

如果取$\varphi=0$，有：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 代入方程 $\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\vec{D}=0$$

有： 1>$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$： $\nabla\times\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A})=-\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A})+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

2>$\nabla\cdot\vec{D}=0$： $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=0$

由于取$\varphi=0$，库仑规范$\nabla\cdot\vec{A}=0$，与洛伦兹规范$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$相同

$\therefore$ 由 1>2>得：$\vec{A}$满足的方程有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t}=0$$

3. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势$\vec{A}(\omega\tau)$表示，其中$\tau=t-{z}/{c}$，A 垂直于 z 轴方向。

证：对于沿 z 轴传播的任意一平面电磁波$\vec{E},\vec{B}$，可写作：

$$\vec{E}=E_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\vec{B}=B_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}$$

满足：1）$\vec{E},\vec{B}$均垂直于传播方向$\vec{e}_z$

2）$\vec{E},\vec{B}$相互垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$沿$\vec{k}$方向

3）$\vec{E},\vec{B}$同相，振幅比为υ（真空中为 c）

故，不妨取$\vec{A}=A_0\vec{e}_x e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}=A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$， $k=\frac{\omega}{c}$

$$\therefore \vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\vec{e}_y=ikA_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \qquad (1)$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}=i\omega A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \qquad (2)$$

可见，如果令 $kA_0=B_0,\omega A_0=E_0$，表达式（1）（2）可表示的波正是符合条件的平面波，所以命题得证。

4. 设真空中矢势 $\vec{A}(\vec{x},t)$ 可用复数傅立叶展开为 $\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+a_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$,其中

$\vec{a}_k^*$ 是 $\vec{a}_k$ 的复共轭。

（1）证明 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=0$。

（2）当选取规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$ 时，证明 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k=0$。

（3）把 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 用 $\vec{a}_k$ 和 $\vec{a}_k^*$ 表示出来。

解：（1）证明：$\because \vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore$ 根据傅立叶级数得正交性，必有：

$$\vec{a}_k(t)=\int\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$$

$$\therefore \frac{d^2a_k(t)}{dt^2}=\int\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x} \qquad (1)$$

而洛仑兹变换时，矢势 $\vec{A}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$

在真空中，$\vec{J}=0$，故，$\nabla^2\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

$\therefore$ （1）式化为 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}=\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(c^2\nabla^2\vec{A})d\vec{x}$

而 $k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$

于是：$\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int[c^2\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)+k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$ （2）

$\because \vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore \nabla^2 \vec{A}(\vec{x},t) = -k^2 \vec{A}(\vec{x},t)$

$\therefore$ （2）式右边的积分式中，被积函数为 0，积分为 0。

$\therefore \dfrac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2} + k^2c^2\vec{a}_k(t) = 0$，亦即 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程。

2）选取规范 $\nabla\cdot\vec{A} = 0, \varphi = 0$，于是有

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] = \sum_k[\vec{a}_k(t)\nabla\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t)\nabla\cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$= \sum_k[\vec{k}\cdot\vec{a}_k(t)\cdot ie^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \vec{k}\cdot\vec{a}_k^*(t)\cdot ie^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] = 0$$

$\because \vec{a}_k(t), \vec{a}_k^*(t)$ 是线性无关的正交组

$\therefore$ 要使上式成立，仅当 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k = \vec{k}\cdot\vec{a}_k^* = 0$ 时

$\therefore$ 故，证得当取 $\nabla\cdot\vec{A} = 0, \varphi = 0$ 时，$\vec{k}\cdot\vec{a}_k = 0$

3）已知 $\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$$\therefore \vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \sum_k[i\vec{k}\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - ik\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\sum_k[\frac{d\vec{a}_k(t)}{dt}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{d\vec{a}_k^*(t)}{dt}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \quad （取规范 \nabla\cdot\vec{A} = 0, \varphi = 0）$$

5. 设 $\vec{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势。

（1）引入一矢量函数 $\vec{Z}(\vec{x},t)$（赫兹矢量），若令 $\varphi = \nabla\cdot\vec{Z}$，证明 $\vec{A} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$。

（2）若令 $\rho = -\nabla\cdot\vec{P}$ 证明 $\vec{Z}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{Z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} = -c^2\mu_0\vec{P}$，写出在真空中的推迟解。

（3）证明 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 可通过 $\vec{Z}$ 用下列公式表出，$\vec{E} = \nabla\times(\nabla\times\vec{Z}) - c^2\mu_0\vec{P}, \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

解：1）证明：$\vec{A}$ 与 φ 满足洛仑兹规范，故有 $\nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

$\because \varphi = -\nabla\cdot\vec{Z}$ 代入洛仑兹规范，有：

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\cdot\vec{Z}) = 0，即 \nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t})$$

$$\therefore \vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$$

2）证明：$\because$ 标势 φ 在满足洛仑兹规范得条件下有方程：$\nabla^2\varphi-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

而 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$，故：$\nabla^2\varphi=\nabla^2(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})$$

代入原方程：

$$-[\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

令 $\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$，则上式化为：

$$\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{P}$$

即：$\nabla^2\vec{Z}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}$ （2）

由于矢势 $\vec{A}$：$\nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$ 在真空中的推迟势为：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

故，可类比得出，方程（2）在真空中的推迟势解为：

$$\vec{Z}(\vec{x},t)=\frac{c^2\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{P}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

3）$\because \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，代入 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z},\vec{A}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$ 有：

$$\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})+\nabla^2 Z-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}$$

同理：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

$$\therefore \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{Z}) - c^2 \mu_0 \vec{P}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{Z}$$

6. 两个质量，电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

证明：电偶极矩与磁偶极矩产生的辐射场分别是：

1>由电偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}$$

2>由磁偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

现有两个质量，电荷都相同的粒子相向而行，发生磁撞，在此过程中，取两个电荷的连线为 x 轴，于是，此系统的电偶极矩是：

$$\vec{p} = q\vec{x}_1 + q\vec{x}_2 = q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

由此可发现： $\ddot{\vec{p}} = \dfrac{d^2}{dt^2}[q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)] = q(\ddot{\vec{x}}_1 + \ddot{\vec{x}}_2)$

由于两个粒子质量相同，电量也相同，故当其运动时 $\ddot{\vec{x}}_1 = -\ddot{\vec{x}}_2$（牛顿第二定律）

即：$\ddot{\vec{p}} = 0$

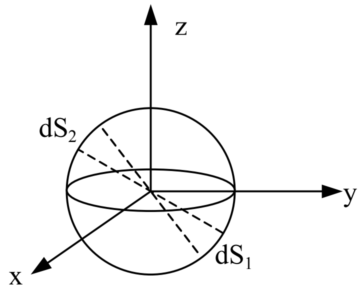
于是，系统的电偶极矩辐射场为 0

又由于，此系统的磁偶极矩 $\vec{m} = 0$， 于是，系统的磁偶极矩辐射场为 0。

综上，两个质量，电荷都相同的粒子同向而行发生磁撞，不会发生电偶极辐射和磁偶极辐射。

7. 设有一个球对称的电荷分布，以频率ω沿径向做简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释。

解：



设球面上均匀分布了总电量为 Q 的电荷，此假设满足题目中的球对称分布，于是，球面电荷密度与球面半径的关系是：

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

取如图相对的两块小面元 dS_1, dS_2， 由于两块小面元对应相同的立体角，故有相同的面积

$dS_1 = dS_2$，

于是 $\Delta Q_1 = \sigma dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_2 = \sigma dS_2 = \Delta Q_2$

考虑到两电荷元 $\Delta Q_1, \Delta Q_2$，由于是球对称，又以相同的频率 ω 作沿径向的简谐振动

$$\therefore \quad \vec{p} = \Delta Q_1 \cdot R \cdot \vec{e}_r + \Delta Q_1 \cdot R \cdot (-\vec{e}_r) = 0$$

$$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = 0$$

故，此两电荷元的振动不能产生辐射场。

根据场的叠加原理，整个球对称分布的电荷体系沿径向的简谐振荡是不能产生辐射场的振动，辐射场为 0。

8. 一飞轮半径为 R，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q。设此飞轮以恒定角速度 ω 旋转，求辐射场。

解：

设飞轮边缘的厚度为 d,于是，边缘上的电荷面密度 $\sigma = \dfrac{Q}{2\pi Rd}$

体系的电偶极矩为： $\vec{p} = \oint \dfrac{Q}{2\pi Rd} \cdot d \cdot dl \cdot \vec{x} = \dfrac{Q}{2\pi R} \oint \vec{x} \cdot dl$

$$= \frac{Q}{2\pi} [\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_x + \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_y] = 0$$

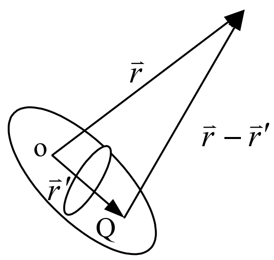
体系的此偶极矩：$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = \dfrac{Q\omega}{2\pi} \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z = \dfrac{Q\omega R^2}{2} \vec{e}_z$

由此得：$\ddot{\vec{p}} = 0 \quad \ddot{\vec{m}} = 0$

故，辐射场为 0。

9. 利用电荷守恒定律，验证 $\vec{A}$ 和 φ 的推迟势满足洛伦兹条件。

证明：如右图所示，O 是坐标原点，Q 是源点，P 是场点



于是，$\vec{A}$ 与 φ 的推迟势可写作：

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{V}} \frac{\rho(\vec{r}\,', t')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{V}$$，其中，$t' = t - \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$

因为在空间中有一个固定点，有 $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'}$，故：

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\vec{r}',t')dV'$$

而 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\cdot\vec{J}dV' \qquad (*)$$

当算符∇作用于$|\vec{r}-\vec{r}'|$的 n 次幂时，可写作：

$$\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|^n=-\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|^n$$

其中∇'只作用于$\vec{r}'$，因为$\vec{J}(\vec{r}',t')$中的变量$t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$，其中含有$\vec{r}$，故：

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla t')=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|)=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

另一方面，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$

对此上两式，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla\cdot\vec{J}$

即：$\nabla\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J}$

代入*式，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}((\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\vec{J}dV'+$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const})dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$$

因为 $\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'=\oint_{S'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{S}'$

只要把V'取得足够大，就可以使$\vec{J}(\vec{r}',t')$在V'的边界面上处处为零，结果上式便为零。

于是 $\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$

$$\therefore\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}[(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\frac{\partial\rho}{\partial t}]dV'$$

由电荷守恒定律有：

$(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t'}=0$， 式中 t' 是 $\vec{r}'$ 点的局域时间，由以上两式有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

由此可见，只要电荷守恒定律成立，则推迟势 $\vec{A}$ 和 φ 就满足洛仑兹规范。

10. 半径为 R_0 的均匀永磁体，磁化强度为 $\vec{M}_0$，求以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\vec{M}_0$ 的轴旋转，设 $R_0\omega$ <<c，求辐射场和能流。

解：

本题相当于一个位于原点的磁偶子的旋转振荡，此磁偶极子为：

$$\vec{M}=\frac{4}{3}\pi R_0^2\vec{M}_0$$

其振荡可分解为 x，y 方向上相位差为 $\pi/2$ 的简谐振荡的合成。

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\sin(\omega t)\vec{e}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

用复数形式表达为：

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0e^{-i(\omega t)}\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0ie^{-i(\omega t)}\vec{e}_y$$

根据磁偶极矩辐射场公式：

$$\vec{E}=-\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi c^2R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$$

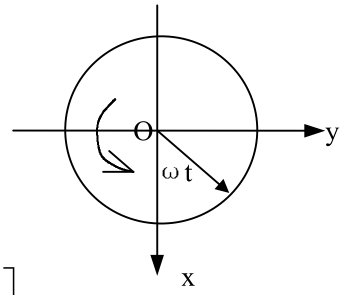
$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

1>求 $\vec{B}$

在 x 方向作简谐振荡的分量，

$$\vec{B}_x=\frac{\mu_0}{4\pi c^2R}\cdot e^{ikR}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3M_0\omega^2e^{-i\omega t}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r$$

$$=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3c^2R}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$



在 y 方向的分量，

$$\vec{B}_y=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3c^2R}(\vec{e}_y\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

根据：$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\\vec{e}_y\\\vec{e}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\\cos\theta & -\sin\phi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_R\\\vec{e}_\theta\\\vec{e}_\phi\end{bmatrix}$

得：　$\vec{B}=\dfrac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3cR}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

同理可得：$\vec{E}=\dfrac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3cR}(i\vec{e}_\theta-\vec{e}_\phi\cos\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4R_0^6M_0^2}{18c^3R^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

11. 带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω。求远处的辐射电磁场和辐射能流。

解：由题意，得右图

本题所研究的系统的磁偶极矩 $\vec{m}$ 是一个常量，因此不产生电磁辐射，但此系统的电偶极矩是一旋转的变化量

$$\vec{p}=ea\vec{e}_r$$

同 10 题的解法，把此旋转量分解到 x，y 方向上的两个简谐振荡是：

$$\vec{p}_x=ea\cos\omega t\vec{e}_x=eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$$

$$\vec{p}_y=ea\cos(\omega t-\pi/2)\vec{e}_y=eae^{-i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\vec{e}_y$$

$$=-eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

根据公式：$\vec{B}=\dfrac{i\mu_0k}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})$

$$\vec{E}=\frac{i\mu_0kc}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})\times\vec{n}$$

$$\vec{S} = \frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin\theta\vec{n}$$

有： $\dot{\vec{p}}_x = -i\omega e a e^{-i\omega t}\vec{e}_x, \ddot{\vec{p}}_x = \omega^2 e a e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\dot{\vec{p}}_y = i\omega e a i e^{-i\omega t}\vec{e}_y, \ddot{\vec{p}}_y = -\omega^2 e a i e^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

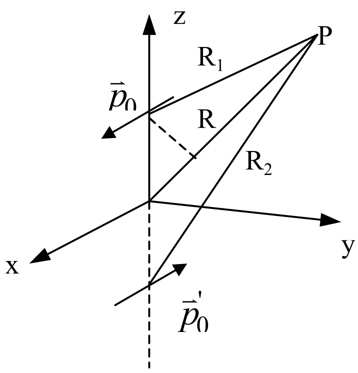
分别代入上式，可得：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2 e a}{4\pi c R}(\vec{e}_\phi\cos\theta - i\vec{e}_\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0\omega^2 e a}{4\pi R}(\vec{e}_\theta\cos\theta + i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0\omega^4 e^2 a^2}{32\pi^2 c R^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

12. 设有一电矩振幅为 $\vec{p}_0$，频率为 ω 的电偶极子距理想导体平面为 a/2 处，$\vec{p}_0$ 平行于导体平面。设 $a \ll \lambda$，求在 $R \gg \lambda$ 处电磁场及辐射能流。



解：由题，如图所示，设平面 xoy 式导体平面，

利用镜像法，构造图中的像电偶极子。

由图：$\vec{p}_0 = p_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$\vec{p}_o' = -\vec{p}_0 = -p_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

分别计算它们在场点 P 处产生的辐射场 $\vec{B}$

1）$\ddot{\vec{p}}_0 = -\omega^2 p_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}e^{ik(R-\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0\times\vec{e}_r = -e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

2）$\ddot{\vec{p}}_0' = \omega^2 p_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\cdot e^{ik(R+\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0'\times\vec{e}_r = e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega_2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

故：$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}\cdot[e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}} - e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}]$$

$$\approx \frac{ika\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \cos\theta(-\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi - \sin\phi\vec{e}_\theta)$$

$$= -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{R},t) = -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\vec{E}(\vec{R},t) = c\vec{B}\times\vec{e}_r = \frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\phi - \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2 \vec{n} = \frac{\mu_0\omega^6 p_0^2 a^2}{32\pi^2 c^3 R^2}(\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^4\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r$$

13. 设有线偏振平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上（$\vec{E}_0$ 在 z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\vec{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射。设平面波的波长 $2\pi/k$ 远大于球半径 R_0，求介质球所产生的辐射场和能流。

解：本题相当于电偶极矩

$$\vec{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z \text{ 的辐射。}$$

$$\therefore \ddot{\vec{p}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\omega^2 R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z$$

$\therefore$ 介质球产生的辐射场为：

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 cR} \cdot e^{ikR} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}(-\vec{e}_z)\times\vec{e}_r$$

$$= -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^3 R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{e}_r = -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

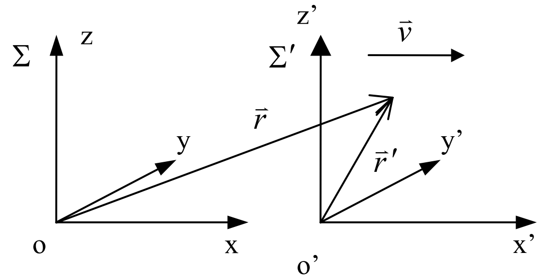
$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0}c\left|\vec{B}\right|^2\vec{e}_r = \frac{\omega^4 R_0^6 E_0^2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

1．证明牛顿定律在伽利略交换下是协变的，麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

证明：根据题意，不妨取如下两个参考系，并取分别固着于两参考系的直角坐标系，且令 t ＝0 时，两坐标系对应轴重合，计时开始后，Σ' 系沿 Σ 系的 x 轴以速度 v 作直线运动

根据伽利略变换，有：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



1）牛顿定律在伽利略变换下是协变的：

以牛顿第二定律为例：$\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

在 Σ 系下，：$\vec{F} = m\dfrac{d\ddot{x}}{dt^2}$

$\because x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$

$\therefore \vec{F} = m\dfrac{d^2[x' + vt, y', z']}{dt'^2} = m'\dfrac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}'$

可见，在 Σ' 系中，牛顿定律有相同的形式，$\vec{F}' == m'\dfrac{d^2\vec{x}'}{dt'^2}$

所以，牛顿定律在伽利略变换下是协变的。

2）麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的

以真空中的麦氏方程 $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 为例，设有一正电荷 q 位于 O' 点，并随 Σ' 系运动，

在 Σ' 中，q 是静止的，故: $\vec{E}' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{e}_{r'}$ ，$\vec{B}' = 0$

于是，方程 $\nabla' \times \vec{E}' = -\dfrac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$ 成立。

将 $\vec{E}' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{e}_{r'}$ 写成直角分量形式;

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{x'} + \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{y'} +$$

$$+ \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{z'}]$$

由伽利略变换关系有：

在Σ中，

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{x-vt}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{e}_x+\frac{y}{[(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_y+$$

$$+\frac{z}{[(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

$$\therefore\nabla\times\vec{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}[(y-z)\vec{e}_x+$$

$$+(z-x+vt)\vec{e}_y+(x-vt-y)\vec{e}_z]$$

可见$\nabla\times\vec{E}$不恒为零。

又在Σ系中观察，q 以速度 v$\vec{e}_x$运动，故产生电流$\vec{J}=qv\vec{e}_x$

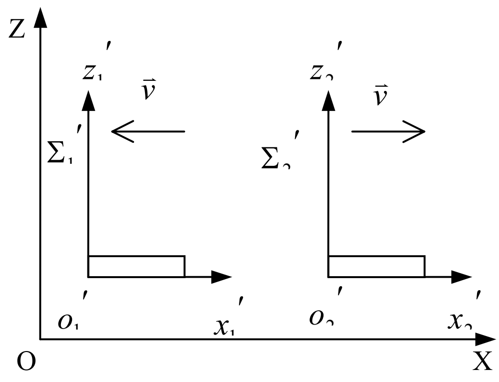
于是有磁场$B=\dfrac{\mu_0 qv}{2\pi R}$ （R 是场点到 x 轴的距离）

此时 有$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$

于是 $\nabla\times\vec{E}\neq-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

故麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

2．设有两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中的长度均为l_0，它们以相同的速率 v 相对于某一参考系运动，但运动方向相反，且平行于尺子，求站在一根尺子上测量另一根尺子的长度。



解：根据相对论速度交换公式，可得Σ_2'系相对于Σ_1'的速度大小是：

$$v'=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

$\therefore$在Σ_1'系中测量Σ_2'系中静长为l_0的尺子的长度为：

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} \quad 代入 v' = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

即得$l = l_0 \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$，此即是在$\Sigma_1{}'$系中观测到的相对于$\Sigma_2{}'$静止的尺子的长度。

3．静止长度为l_0的车厢，以速度 v 相对于地面 s 运行，车厢的后壁以速度u_0向前推出一个小球，求地面观测者看到小球从后壁到前壁的时间。

解：根据题意，取地面为参考系 S，车厢为参考系S'

于是相对于地面参考系 S，

车长：$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 车速： v 球速：$u = \dfrac{u_0+v}{1+\frac{u_0 v}{c^2}}$

故在地面参考系 S 中观察，小球在此后，由车后壁到车前壁

$$\Delta t = \frac{l}{u-v} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{u_0+v}{1+\frac{u_0 v}{c^2}}-v} = \frac{l_0(1+\frac{u_0 v}{c^2})}{u_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

4.一辆以速度 v 运动的列车上的观察者，在经过某一高大建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲电火花，电光迅速传播，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔，求列车上观察者看到的两铁塔被电光照亮的时间差。设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致，铁塔到建筑物的地面距离已知都是l_0。

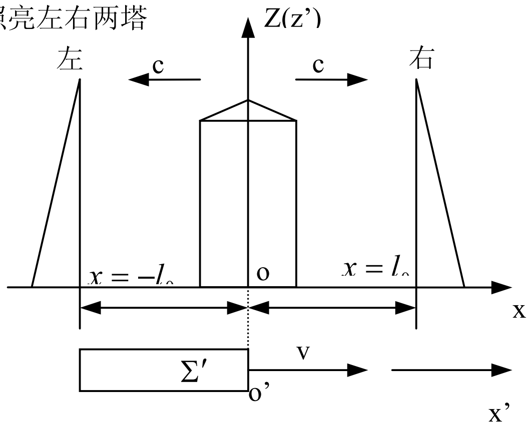
解：由题意，得右示意图。取地面为静止的参考系Σ，列车为运动的参考系Σ'。

取 x 轴与x'轴平行同向，与列车车速方向一致，令$t=0$时刻为列车经过建筑物时，并令此处为Σ系与Σ'的原点，如图。

在Σ系中，光经过$t=\dfrac{l_0}{c}$的时间后，同时照亮左右两塔

但在Σ'系中，观察两塔的位置为：

$$x'_{右} = l_0 v - \beta v l_0 = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$



$$x'_{左} = -l_0 v - \beta v l_0 = -\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

$$\therefore d'_{右} = |x'_{右} - o'| = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$

$$d'_{左} = |x'_{左} - o'| = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

时间差为：

$$\Delta t = \frac{d'_{左}}{c} - \frac{d'_{右}}{c} = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c}\left[(1+\frac{v}{c})-(1-\frac{v}{c})\right] = \frac{2vl_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

5. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l，S－R 装置浸在均匀无限的液体介质（静止折射率 n）中，试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器收到讯号所经历的时间。
（1）液体介质相对于 S－R 装置静止
（2）液体沿着 S－R 连线方向以速度 v 运动
（3）液体垂直于 S－R 连线方向以速度 v 运动

解：1）液体介质相对于 S－R 装置静止时：

$$\Delta t_1 = \frac{nl_0}{c}$$

2）液体沿着 S－R 连线方向以速度 v 运动：

取固着于介质的参考系 Σ'，Σ' 系沿 x 轴以速度 v 运动，在 Σ' 系中测得光速在各个方向上均是 $\frac{c}{n}$

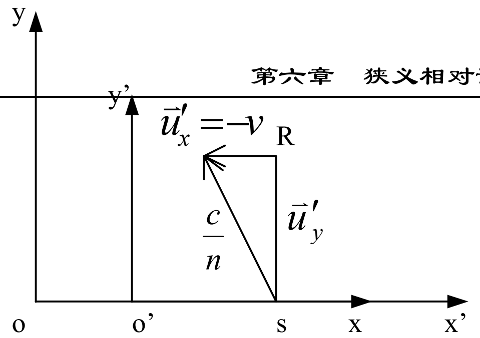
由速度变换关系得在 Σ 系中，沿介质运动方向的光速：

$$v' = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{cn}}$$

$\therefore$ R 接收到讯号的时间为　$\Delta t_2 = \dfrac{(1+\frac{v}{cn})l_0}{\frac{c}{n}+v}$

3）液体垂直于 S－R 连线方向以速度 v 运动

同（2）中取相对于 S-R 装置静止的参考系为 Σ 系，相对于介质静止的系为 Σ' 系，如下建立坐标：



可见，$u'_x=-v$

$$u'_y=\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}\ \mathrm{t}$$

$\therefore$ 在 Σ 系中，测得 y 方向上的速度：

$$u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c}}=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{(-v)\cdot v}{c}}=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \Delta t_3=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Bigg/\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}$$

6. 在坐标系 Σ 中有两个物体都以速度 u 沿 x 轴运动，在 Σ 系看来，它们一直保持距离 l 不变。今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到这两个物体的距离是多少？

解：根据题意， Σ' 系，取固着于观察者上的参考系

又取固着于 A，B 两物体的参考系为 Σ'' 系

在 Σ 中，A,B 以速度 u 沿 x 轴运动，相距为 l，在 Σ'' 系中，A，B 静止相距为 l_0，有：

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\therefore l_0=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

又 Σ' 系相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，Σ'' 系相对于 Σ 系以速度 u 沿 x 轴运动

由速度合成公式，Σ'' 系相对于 Σ' 系以速度

$$v'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\quad \text{沿 x 轴运动}$$

$\therefore$ 在 Σ' 系中看到两物体相距：

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}=\frac{l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

7. 一把直尺相对于 Σ 系静止，直尺与 x 轴交角 θ，今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到直尺与 x 轴交角 θ' 有何变化？

解：取固着于观察者上的参考系为Σ'

在Σ系中： $l_x = l\cos\theta$， $l_y = l\sin\theta$

在Σ'系中， $l_x' = l_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l\cos\theta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

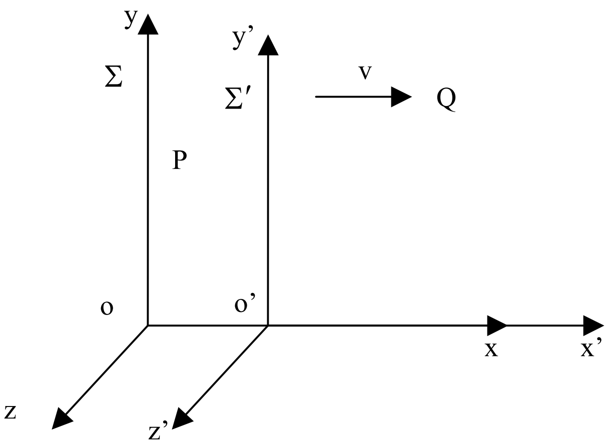
$$l_y' = l_y = l\sin\theta$$

$$\therefore tg\theta' = \frac{l_y'}{l_x'} = \frac{tg\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

8. 两个惯性系Σ和Σ'中各放置若干时钟，同一惯性系的诸时钟同步，Σ'相对于Σ以速度v沿x轴运动，设两系原点相遇时，$t_0 = t_0' = 0$，问处于Σ系中某点（x，y，z）处的时钟与Σ'系中何处时钟相遇时，指示的时刻相同？读数是多少？

解：根据变换关系，得：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots(1) \\ y' = y \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ z' = z \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ t' = \dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots(4) \end{cases}$$



设Σ系中$P(x,y,z,t)$处的时钟与Σ'系中$Q(x',y',z',t')$处时钟相遇时，指示时间相同：

$\therefore$在（4）式中，有$t = t'$，解得：$x = \frac{c^2}{v}t(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})$代入（1）式，

得：$x' = -\frac{c^2}{v}t(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}) = -x$

相遇时：$t = t' = \dfrac{x}{\frac{c^2}{v}(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})} = \frac{x}{v}(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})$

即为时钟指示的时刻。

9．火箭由静止状态加速到$v = \sqrt{0.9999}c$，设瞬时惯性系上加速度为$|\dot{\vec{v}}| = 20m\cdot s^{-2}$，问按

照静止系的时钟和按火箭内的时钟加速火箭各需要多少时间？
解：1）在静止系中，加速火箭

令静止系为Σ系，瞬时惯性系为Σ′系，且其相对于Σ系的速度为 u，可知$\vec{v},\dot{\vec{v}},\vec{u}$同向，并令此方向为 x 轴方向

由 x 轴向上的速度合成有：

$$v=\frac{v'+u}{1+\frac{uv}{c^2}}$$ （v'是火箭相对于Σ′系的速度）

$\therefore$在Σ系中，加速度为 $a=\frac{dv}{dt}=(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}\frac{a'}{(1+\frac{uv'}{c^2})^3}$ （$a'=\frac{dv'}{dt'}$）

本题中$a'=20m\cdot s^{-2}$，而Σ′系相对于火箭瞬时静止，$\therefore u=v,v'=0$

$$\therefore a=\frac{dv}{dt}=a'(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{0.9999}c}\frac{dv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}=\int_0^t a'dt$$

得： $$t=\frac{100\sqrt{0.9999}c}{a'}=47.5\text{年}$$

10．一平面镜以速度 v 自左向右运动，一束频率为ω_0，与水平线成θ_0夹角的平面光波自左向右入射到镜面上，求反射光波的频率ω及反射角θ，垂直入射的情况如何？
解：1）平面镜水平放置，取相对于平面镜静止的参考系为Σ′系，取静止系为Σ系，并令入射光线在平面 xoy 内
在Σ系中，有：

入射光线：$k_{ix}=k\cos\theta_0,k_{iy}=k\sin\theta_0,k_{iz}=0,\omega_i=\omega_0$

由变换关系，得Σ′系中的入射光线：

$$\begin{cases} k_{ix}{}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \dfrac{v}{c^2}\omega_0) \\ k_{iy}{}' = -k\sin\theta_0 \\ k_{iz}{}' = 0 \\ \omega_i{}' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0) \end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$$k_{rx}{}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}{}' = k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}{}' = 0; \omega_r{}' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)$$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$$k_{rx} = \gamma[\gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \frac{v}{c^2}\gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = k\cos\theta_0$$

$$k_{ry} = k\sin\theta_0$$

$$k_{rz} = 0$$

$$\omega_r = \gamma[v\gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = \omega_0$$

$\therefore$ 在Σ系中观察到： 入射角$=\dfrac{\pi}{2}-\theta_0=$反射角，$\omega_i = \omega_r = \omega_0$

若垂直入射，$\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$，以上结论不变。

3）镜面垂直于运动方向放置，同 1）选择参考系，并建立相应坐标系

在Σ系中，入射光线满足：$k_{ix} = -k\cos\theta_0, k_{iy} = -k\sin\theta_0, k_{iz} = 0, \omega_i = \omega_0$

由变换关系，得Σ'系中的入射光线：

$$\begin{cases} k_{ix}{}' = \gamma(-k\cos\theta_0 - \dfrac{v}{c^2}\omega_0) \\ k_{iy}{}' = -k\sin\theta_0 \\ k_{iz}{}' = 0 \\ \omega_i{}' = \gamma[\omega_0 - v(-k\cos\theta_0)] = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0) \end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$$k_{rx}{}' = -\gamma(-k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) = \gamma(k\cos\theta_0 + \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}{}' = -k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}{}' = 0; \omega_r{}' = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)$$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$$k_{rx}=\gamma[\gamma(k\cos\theta_0+\frac{v}{c^2}\omega_0)+\frac{v}{c^2}\gamma(\omega_0+vk\cos\theta_0)]$$

$$k_{ry}=-k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}=0$$

$$\omega_r=\gamma[v\gamma(k\cos\theta_0+\frac{v}{c^2}\omega_0)+\gamma(\omega_0+vk\cos\theta_0)]$$

其中，$k=\dfrac{\omega_0}{c}$. 并令 $\beta=\dfrac{v}{c}$

$\therefore$ 反射光满足： 反射角： $tg\theta=\left|\dfrac{k_{ry}}{k_{rx}}\right|=\dfrac{\sin\theta_0}{\gamma^2[(\beta+\cos\theta_0)+\beta(1+\beta\cos\theta_0)]}$

反射光频率：$\omega=\gamma^2\omega_0[(1+\beta\cos\theta_0)+\beta(\beta+\cos\theta_0)]$

如果垂直入射，$\theta_0=0$，于是，Σ 系中会观察到：$\theta_i=\theta_r=0$

反射光频率：$\omega=\gamma^2\omega_0(1+\beta)^2$

11. 在洛仑兹变换中，若定义快度 y 为 $\tanh y=\beta$

1） 证明洛仑兹变换矩阵可写为：

$$a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ishy & 0 & 0 & chy \end{bmatrix}$$

2）对应的速度合成公式 $\beta=\dfrac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可用快度表示为 $y=y'+y''$

证明：1） $a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$

其中$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(thy)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\dfrac{shy}{chy})^2}}=\dfrac{chy}{\sqrt{(chy)^2-(shy)^2}}$

$$\because (chy)^2-(shy)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$$

$\therefore \gamma=chy$

又 $\beta\gamma=thy\cdot chy=shy$

$$\therefore a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ishy & 0 & 0 & chy \end{bmatrix}$$

2）速度合成公式 ： $\beta=\dfrac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可写为 ： $thy=\dfrac{thy'+thy''}{1+thy'thy''}$

由定义 $thy'\dfrac{e^{2y'}-1}{e^{2y'}+1},thy''=\dfrac{e^{2y''}-1}{e^{2y''}+1}$

得$\dfrac{thy'+thy''}{1+thy'thy''}=\dfrac{e^{2(y'+y'')}-1}{e^{2(y'+y'')}+1}=th(y'+y'')$

$\therefore thy=th(y'+y''),y=y'+y''$

12. 电偶极子$\vec{P}_0$以速度$\vec{v}$作匀速运动，求它产生得电磁势和场$\varphi,\vec{A},\vec{E},\vec{B}$

解：选随动坐标系Σ'，$\vec{P}_0\perp\vec{v}$

在Σ'系中，$\vec{P}_0$产生的电磁势 $\varphi'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{P}_0\cdot\tilde{\vec{R}}}{\tilde{R}^3},\vec{A}=0$

电磁场 $\vec{E}'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{3(\vec{P}_0\cdot\tilde{\vec{R}})\tilde{\vec{R}}}{\tilde{R}^5}-\dfrac{\vec{P}_0}{\tilde{R}^3}],\vec{B}'=0$

四维势 $A_\mu=(\vec{A},\dfrac{i}{c}\varphi)$，由逆变换 $A_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu{}'$

得：$\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\\dfrac{i}{c}\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\dfrac{1}{c}\varphi'\end{pmatrix}$

Σ 系中，电磁势 $\varphi=\gamma\varphi'=\dfrac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{P}_0\cdot\tilde{\vec{R}}}{\tilde{R}^3}$

$$\vec{A}=A_x\vec{e}_x=\frac{\beta\gamma}{c}\varphi'\vec{e}_x=\frac{v}{c^2}\gamma\varphi'\vec{e}_x=\frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$

电磁场 $\vec{E}_{平行}=\vec{E}'_{平行}$，$\vec{E}_\perp=\gamma$（$\vec{E}'-\vec{v}\times\vec{B}')_\perp=\gamma\vec{E}'_\perp$

$$\vec{B}_{平行}=\vec{B}_{平行}=0,\ \vec{B}_{\perp e}=\gamma(\vec{B}'+\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}')_\perp=\gamma(\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}')_\perp=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_\perp$$

由坐标变换，$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu$ 得

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\ict'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\ict\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x'=\gamma x-v\gamma t\\y'=y\\z'=z\end{cases}$$

取 t=0 得 $\begin{cases}x'=\gamma x\\y'=y\\z'=z\end{cases}$，　$\therefore\tilde{\vec{R}}=(x',y',z')=(\gamma x,y.,z)$

13. 设在参考系Σ内，$\vec{E}\perp\vec{B}$，Σ'系沿$\vec{E}\times\vec{B}$的方向运动，问Σ'系应以什么样的速度相对于Σ系运动才能使其中只有电场或只有磁场？

解：如图，Σ'系以$\vec{v}$沿 x 轴方向相对于Σ系运动

由电磁场变换公式：

$$\vec{E}_{平行}{}' = \vec{E}_{平行} = 0,\quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{B}'_{平行} = \vec{B}_{平行} = 0\,,\quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})$$

令$\vec{E}_{\perp} = 0$，则 $\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = 0$

两边同时叉乘$\vec{B}$并利用矢量分析公式，得：

$$\vec{v} = \frac{1}{B^2}(\vec{E}\times\vec{B}),\ 取模\ \ v = \frac{E}{B} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

$\because v < c \qquad \therefore |\vec{E}| < c|\vec{B}|$

即若$|\vec{E}| < |\vec{B}|$，则当$\vec{v} = \dfrac{1}{B^2}(\vec{E}\times\vec{B})$时，$\vec{E}' = 0$

同理，令$\vec{B}'_{\perp} = 0$，则 $\vec{B} - \dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} = 0$

两边同时叉乘$\vec{E}$并利用矢量分析公式，得：

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E^2}(\vec{E}\times\vec{B})\,,\qquad 取模\ \ v = \frac{c^2}{E}B = c^2\frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|}$$

$\because v < c \qquad \therefore |\vec{E}| > c|\vec{B}|$

即若$|\vec{E}| > c|\vec{B}|$，则当$\vec{v} = \dfrac{c^2}{E^2}(\vec{E}\times\vec{B})$时，$\vec{B}' = 0$

14．做匀速运动的点电荷所产生的电场在运动方向发生“压缩”，这时在电荷的运动方向上电场$\vec{E}$与库仑场相比较会发生减弱，如何理解这一减弱与变换公式$E_{平行} = E'_{平行}$的关系。

解：设点电荷 e 以速度$\vec{v}$沿Σ系 x 轴方向运动，选Σ'系为 e 的随动系

在Σ'系中，$E'_{平行} = \dfrac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$为库仑场。

由变换$E_{平行} = E'_{平行}$，得 $E_{平行} = \dfrac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$，此场在$\Sigma$系中并非静电库仑场。

由坐标变换：$\begin{cases} x' = x\gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$

得　$E_{平行} = (1-\frac{v^2}{c^2})\frac{ex}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = (1-\frac{v^2}{c^2})E_0$，$E_0$ 为 Σ 系中库仑场

当 $v \approx c$ 时，$E_{平行} << E_0$（压缩）

15．有一沿 z 轴方向螺旋进动的静磁场 $\vec{B} = \vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$，其中 $k_m = 2\pi/\lambda_m$，λ_m 为磁场周期长度。现有一沿 z 轴以速度 $v = \beta c$ 运动的惯性系，求在该惯性系中观察到的电磁场。证明当 $\beta \cong 1$ 时，该电磁场类似于一列频率为 $\gamma \cdot \beta c k_m$ 的圆偏振电磁波。

解：由电磁场变换式，在 Σ' 系中：

$$\vec{E}'_{平行} = \vec{E}_{平行} = 0,$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(E + \vec{v}\times\vec{B})_{\perp} = \gamma\vec{v}\times\vec{B} = \gamma\beta c\vec{e}_z \times \vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

$$= \gamma\beta c\vec{B}_0(-\sin k_m z\vec{e}_x + \cos k_m z\vec{e}_y)$$

$$\vec{B}'_{平行} = \vec{B}_{平行} = 0,$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} = \gamma\vec{B}_{\perp} = \gamma\vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

$\therefore$ 在该惯性系中观察到的电磁场为;

$$\vec{E}' = \gamma\beta c\vec{B}_0(-\sin k_m z\vec{e}_x + \cos k_m z\vec{e}_y)$$

$$= \gamma\beta c\vec{B}_0[\cos(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec{e}_x + \sin(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

$$\vec{B}' = \gamma\vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

当 $\beta \approx 1$ 时，$v \approx c$，$\because \vec{E}'\perp(-\vec{e}_z), \vec{B}'\perp(-\vec{e}_z), \vec{E}'\perp\vec{B}', \frac{|\vec{E}'|}{|\vec{B}'|} = \beta c = v \approx c$

$\therefore$ 该电磁场类似于一列真空中的圆偏振平面电磁波。

由四维矢量 $k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$ 的变换关系得：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

$$k'_z = \gamma(k_z - \frac{v}{c^2}\omega) = \gamma k_m, k'_x = k_x = 0, k'_y = k_y = 0, \omega' = \gamma(\omega - vk_z) = -\beta c k_m$$

$\therefore$ 该圆偏振电磁波的频率为 $\gamma \cdot \beta c k_m$

16．有一无限长均匀带电直线，在其静止参考系中线电荷密度为 λ，该线电荷以速度 $v=\beta c$ 沿自身长度匀速移动，在与直线相距为 d 的地方有一以同样速度平行于直线运动的点电荷 e，分别用下列两种方法求出作用在电荷上的力：

（a） 在直线静止系中确定力，然后用四维力变换公式

(b) 直接计算线电荷和线电流作用在运动电荷上的电磁力。

解：（a）在直线静止系中，由高斯定理，d 处的电场强度为 $\vec{E}'=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$（取 $\vec{e}_r=\vec{e}_z$），

磁场 $\vec{B}'=0$. e 受力 $\vec{F}'=e(\vec{E}'+\vec{v}\times\vec{B}')=e\vec{E}'=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$

由四维矢量公式，e 受到的四维力矢量为 $k'_\mu=(\vec{k}',\dfrac{i}{c}\vec{k}'\cdot\vec{v}')=(\gamma\vec{F}',\dfrac{i}{c}\gamma\vec{F}'\cdot\vec{v}')$，其中 $\vec{v}'=0$，

$\gamma'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}=1$ （$\vec{v}'$ 为 e 相对于直线静止的速度）

$\therefore k'_\mu=(\vec{F}',0)=(0,0,\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d},0)$

根据四维力矢量的变换关系 $k_\mu=a_{\mu\nu}k'_\nu$ 得：

$$\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\\k_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\\0\end{pmatrix}$$

$\therefore k_x=k_y=k_\varphi=0, k_z=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d},\vec{K}=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$

$\therefore$ e 受力 $\vec{F}=\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\vec{K}=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec{e}_r$

（b）在直线静止系中，电流密度四维矢量 $J'_\mu=(\vec{J}',ic\rho')$

$\vec{J}'=0$，设直线截面面积为 S（设不变），则 $\rho'=\dfrac{\lambda}{S}$

$J'_\mu=(0,0,0,ic\dfrac{\lambda}{S})$，由变换公式 $J_\mu=a_{\mu\nu}J'_\nu$ 得：

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ ic\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\therefore J_x = \beta c\gamma \frac{\pi}{S}, J_y = J_z = 0, \rho = \gamma \frac{\lambda}{S}$$

$$\therefore J_\mu = (\beta c\gamma \frac{\lambda}{S}, 0, 0, \gamma \frac{\lambda}{S})$$

在 o－xyz 系中，线电荷密度为$\gamma\lambda$，电流为$I = \beta c\gamma\lambda$，流向沿 x 轴方向。

由高斯定理，e 处场强为$\vec{E} = \dfrac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$ （取$\vec{e}_r = \vec{e}_z$）

由安培环路定律得，e 处磁感应强度为$\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_y$

$\therefore$ e 所受的洛仑兹力为$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \dfrac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r - \dfrac{ev\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_r$

$$= \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(1 - \frac{v^2}{c^2})\vec{e}_r = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec{e}_r$$

17. 质量为 M 得静止粒子衰变为两个粒子m_1和m_2，求粒子m_1的动量和能量。

解：衰变前粒子的动量为$\vec{p} = 0$，能量为 $w = Mc^2$。衰变后设两粒子动量为$\vec{p}_1, \vec{p}_2$，能量分别为$w_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4}, w_2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$

由动量守恒和能量守恒得：

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} = 0 \qquad (1)$$

$$\sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} = Mc^2 \qquad (2)$$

由（1）得 $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ 代入（2）解得

$$p_1 = p_2 = p = \frac{c}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}$$

粒子m_1的能量为 $E_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} = \dfrac{c^2}{2M}[M^2 + m_1^2 - m_2^2]$

18. 已知某一粒子 m 衰变成质量为m_1和m_2，动量为p_1和p_2（两者方向夹角为θ）的两个

粒子，求该粒子的质量 m。

解：由 $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}$ 动量守恒得：

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta \qquad (1)$$ $\bar{p}$ 为 m 的动量

由能量守恒 $$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} \qquad (2)$$

（1）代入（2）得：

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2}[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2c^2)(p_2^2 + m_2^2c^2)} - p_1 p_2 \cos\theta]$$

19.（1）设 E 和 $\bar{p}$ 是粒子体系在实验室参考系 Σ 中的总能量和总动量（$\bar{p}$ 与 x 轴方向夹角为 θ），证明在另一参考系 Σ'（相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动）中的粒子体系总能量和总动量满足：

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c),\quad E' = \gamma(E - c\beta p_x),\quad tg\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta E/cp)}$$

（2）某光源发出的光束在两个惯性系中与 x 轴的夹角分别为 θ 和 θ'，证明

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta},\quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

（3）考虑在 Σ 系内立体角为 $d\Omega = d\cos\theta d\phi$ 的光束，证明当变换到另一惯性系 Σ' 时，立体角变为 $$d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 - \beta\cos\theta)^2}$$

证明：（1）

四维动量矢量 $p_\mu = (\bar{p}, \frac{i}{c}E)$，满足洛仑兹变换：

$$\begin{cases} p'_x = \dfrac{p_x - v\dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(p_x - \beta\dfrac{E}{c}) \\ p'_y = p_y \\ p'_x = p_x \\ E' = \gamma(E - vp_x) = \gamma(E - c\beta p_x) \end{cases}$$

在 Σ' 系中，$\bar{p}'$ 与 x 轴的夹角 θ' 满足：

$$tg\theta' = \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{p\sin\theta}{\gamma(p\cos\theta - \beta\dfrac{E}{c})} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta E/cp)}$$

（2）四维波矢量 $k_\mu=(\vec{k},i\frac{\omega}{c})$

对沿 x 轴方向的特殊洛仑兹变换有

$$\begin{cases}k_1'=\gamma(k_1-\frac{v}{c^2}\omega)\\ k_2'=k_2\\ k_3'=k_3\\ \omega'=\gamma(\omega-vk)\end{cases}\qquad (*)$$

在两个惯性系中有：

$$k_1=\frac{\omega}{c}\cos\theta\text{，}k_1'=\frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

代入（*）式得：

$$\omega'=\omega\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta),\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\sin\theta'=\sqrt{1-\cos'^2}=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

（3）在另一个惯性系中，$d\Omega'=d\cos\theta' d\phi'$

对沿 x 轴方向得特殊洛仑兹变换有：$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$，（2）中已证，且

$$d\phi'=d\phi\ \therefore d\cos\theta'=d(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta})=\frac{(1-\beta^2)d\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}=\frac{d\cos\theta}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$\therefore d\Omega'=d\cos\theta' d\phi'=\frac{d\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

20. 考虑一个质量为 m_1，能量为 E_1 的粒子射向另一质量为 m_2 的静止粒子的体系，通常在高能物理中，选择质心参考系有许多方便之处，在该参考系中，总动量为零。

（1）求质心系相对于实验室系的速度 β_c

（2）求质心系中每个粒子的动量，能量和总能量；

（3）已知电子静止质量 $m_ec^2=0.511MeV$ 。北京正负电子对撞机（BEPC）的设计能量为 2×2.2GeV(1GeV=10^3MeV).估计一下若用单束电子入射于静止靶，要用多大的能量才能达到与对撞机相同的相对运动能量？

解：(1)设质心系中两粒子动量分别为 $\vec{p}_1',\vec{p}_2'$，且 $\vec{p}_1'+\vec{p}_2'=0$

能量为 $E_1'^2 = p_1'^2 c^2 + m_1^2 c^4, E_2'^2 = p_2'^2 c^2 + m_2^2 c^4$

实验室系中： $p_2 = 0, p_1 \neq 0$

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4, E_2^2 = m_2^2 c^4$$

由特殊洛仑兹变换得：

$$p_1 = \frac{p_1' + \frac{\beta_c}{c^2} E_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad （1）；\quad E_1 = \frac{E_1' + \beta_c p_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad （2）；$$

$$p_2 = \frac{p_2' + \frac{\beta_c}{c^2} E_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad （3）；\quad E_2 = \frac{E_2' + \beta_c p_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad （4）$$

（1）＋（3）得：$p_1 = \gamma \frac{\beta_c}{c^2}(E_1' + E_2')$

（2）＋（4）得 $E_1 + E_2 = \gamma(E_1' + E_2')$

$$\therefore p_1 = \frac{\beta_c}{c^2}(E_1 + E_2)$$

$\therefore \beta_c = \frac{p_1 c^2}{E_1 + E_2} = \frac{\sqrt{E_1^2 + m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2} c$ 为质心系相对于实验室系的速度 β_c。

2）$|\vec{p}_1'| = \frac{m_2\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{Mc}$， $|\vec{p}_2'| = |\vec{p}_1'|$

$\therefore E_1' = \sqrt{p_1'^2 c^2 + m_1^2 c^4} = \frac{m_1^2 c^2 + m_2 E_1}{M}$， $E_2' = \sqrt{p_2'^2 c^2 + m_2^2 c^4} = \frac{m_2 E_1 + m_2^2 c^2}{M}$

总能量 $E' = E_1' + E_2' = \frac{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2 E_1}{M}$，其中 $M^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 E_1 c^2$

4）实验室系中：

$$p_\mu = [\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \frac{i}{c}(E_1 + E_2)] = (\vec{p}, \frac{i}{c}(E_1 + E_2)]$$

质心系中 $p_\nu' = [\vec{p}_1' + \vec{p}_2', \frac{i}{c}(E_1' + E_2')] = [0, \frac{i}{c} 2E_1']$

由不变量 $p_\mu p_\mu' = p_\nu p_\nu'$

得：$-2m_e E_1 = -\frac{1}{c^2} 4E_1'^2$

$$\therefore E_1=\frac{2E_1'^2}{m_ec^2}=1.9\times10^4 GeV$$

21. 电荷为 e，质量为 m 的粒子在均匀电场 $\vec{E}$ 内运动，初速度为零，试确定粒子的运动轨迹与时间的关系，并研究非相对论情况。

解：1）相对论情况

力学方程为 $\dfrac{d\vec{P}}{dt}=e\vec{E},\vec{P}=\dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

分量式为 $\dfrac{dP_x}{dt}=0,\dfrac{dP_y}{dt}=0,\dfrac{dP_z}{dt}=eE$

由题意，$P_x=P_y=0$，当 $t=0$ 时，$P_z=0$，$\therefore P_z=eEt$

粒子能量 $w=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{P^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{P_z{}^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{e^2E^2c^2+m^2c^4}$

由 $\dfrac{dP_z}{dt}=\dfrac{P_z}{m\Big/\sqrt{1-v^2\big/c^2}}=\dfrac{P_z}{w\big/c^2}=\dfrac{eEc^2t}{\sqrt{e^2E^2c^2+m^2c^4}}$

设粒子从 z＝0 运动，则：

$$z=\int_0^t\frac{eEc^2tdt}{\sqrt{e^2E^2c^2+m^2c^4}}=\frac{1}{eE}[\sqrt{e^2E^2c^2+m^2c^4}-mc^2]$$

$$=\frac{mc^2}{eE}[\sqrt{1+(\frac{eE}{mc}t)^2}-1]$$

2）非相对论情况

力学方程 $e\vec{E}=\dfrac{d\vec{P}}{dt},\vec{P}=m\vec{v}$

分量式 $\dfrac{dP_x}{dt}=0,\dfrac{dP_y}{dt}=0,\dfrac{dP_z}{dt}=eE$

由题意，$P_x=P_y=0$，当 $t=0$ 时，$P_z=0$，$\therefore P_z=eEt$

由 $\dfrac{dP_z}{dt}=\dfrac{P_z}{m}=\dfrac{eEt}{m}$，设粒子从 z＝0 运动，则：$z=\dfrac{eE}{m}\displaystyle\int_0^t tdt=\dfrac{eE}{2m}t^2$

22.利用洛仑兹变换，试确定粒子在互相垂直的均匀电场 $E\vec{e}_x$ 和磁场 $B\vec{e}_y\,(E>cB)$ 内的运动规律，设粒子初速度为零。

解：设 Σ' 系 $o'-x'y'z'$ 以 $\vec{u}$ 沿 z 轴运动，t=0 时，o',o 重合。

$\because E>cB$

$\therefore$ 当 $\vec{u}=\dfrac{c^2}{E^2}\vec{E}\times\vec{B}$ 时，在 Σ' 内 $\vec{B}'=0$

此时，$\vec{E}'_{平行}=\vec{E}_{平行}=0$，$\vec{E}'_{\perp}=\gamma_u(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})_{\perp}=\gamma_u(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})$

$$=\gamma_u(\vec{E}-c^2\frac{B^2}{E^2}\vec{E})=\gamma_u\vec{E}(1-\frac{u^2}{c^2})=\frac{\vec{E}}{\gamma_u}$$

即：$\vec{E}'=\dfrac{\vec{E}}{\gamma_u}$

由 21 题结果，粒子 e 在 Σ' 系中的运动轨迹与时间的关系为：

$$x'=\frac{mc^2}{eE'}[\sqrt{1+(\frac{eE'}{mc}t')^2}-1],y'=0,z'=0$$

由洛仑兹变换 $\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ ict \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & -i\beta\gamma_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma_u & 0 & 0 & \gamma_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \\ ict' \end{pmatrix}$ 得：

$$\begin{cases} z=\gamma_u z'+\beta c\gamma_u t'=ut \\ x=x' \\ y=y'=0 \\ t=\gamma_u t' \end{cases}$$

$\therefore$ e 在互相垂直得均匀电磁场中的运动规律为

$$x=\frac{mc^2\gamma_u}{eE}[\sqrt{1+(\frac{eE}{\gamma_u^2 mc}t)^2}-1],y=0,z=ut,\text{ 其中 }\ u=\frac{c^2}{E}B,\gamma_u=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

23. 已知 t=0 时点电荷 q_1 位于原点，q_2 静止于 y 轴 $(0,y_0,0)$ 上，q_1 以速度 v 沿 x 轴匀速运动，试分别求出 q_1，q_2 各自所受的力，如何解释两力不是等值反向？

解：选参考系 Σ' 固定在粒子 q_1 上，在 Σ' 系观察时，粒子静止，只有静电场，电磁场强度

为 $\vec{E}_1' = \dfrac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \vec{B}_1' = 0$

在Σ系中观察，q_1以速度$\vec{v}$沿 x 轴方向运动，由速度变换关系得：

$$E_{1x} = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}，\quad E_{1y} = \gamma\frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}，\quad E_{1z} = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$B_{1x} = 0，\qquad B_{1y} = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}，\quad B_{1z} = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = (1-\gamma^2)\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0[(1-\beta^2)r^2 + (\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c})^2]^{\frac{3}{2}}}，\quad \vec{B}_1 = \frac{\vec{v}\times\vec{E}_1}{c}$$

在q_2处，$\vec{E}_1 = \dfrac{q_1\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,y_0^2}, \vec{B}_1 = \dfrac{\vec{v}\times\vec{E}_1}{c^2}$

q_2受力$\vec{F}_{12} = q_2(\vec{E}_1 + \vec{0}\times\vec{B}_1) = \dfrac{q_1q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,y_0^2}$

同理，q_2产生场 $\vec{E}_2 = \dfrac{q_2\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \vec{B}_2 = 0$

在q_1处，$\vec{E}_2 = -\dfrac{q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}, \vec{B}_2 = 0$

$\therefore q_1$受力 $\vec{F}_{21} = q_1(\vec{E}_2 + \vec{v}\times\vec{B}) = -\dfrac{q_1q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$

24. 试比较下列两种情况下两个电荷的相互作用力：（1）两个静止电荷 q 位于 y 轴上相距为 l;（2）两个电荷都以相同的速度$\vec{v}$平行于 x 轴匀速运动。

解：（1）此属于静电场情况，两电荷之间的静电库仑为

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}，\text{为排斥力。}$$

由上题求得，原点处 q 在 y=l 处产生的电磁场为

$$\vec{E} = \frac{q\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,l^2}，\quad \vec{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2} = \frac{1}{c^2}vE\vec{e}_z$$

y=l 处 q 受洛仑兹力为

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=q\vec{E}+\frac{q}{c^2}vE\vec{v}\times\vec{e}_z=q(1-\beta^2)\vec{E}=\frac{q^2\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$\left|\vec{F}\right|<\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

25. 频率为ω的光子（能量为$\hbar\omega$，动量为$\hbar\vec{k}$）碰在静止的电子上，试证明：

（1）电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足；

（2）电子可以散射这个光子，散射后光子频率ω'比散射前光子频率ω小（不同于经典理论中散射光频率不变的结论）

证明：1）设电子可以吸收这个光子，反应后它的动量为$\bar{p}$，反应前光子能量$\hbar\omega$，电子能量m_ec^2，反应后能量为 $\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}$

由动量守恒 $\hbar\vec{k}=\bar{p}$　　$\therefore \hbar k=p$　　（1）

能量守恒 $\hbar\omega+m_ec^2=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}$　　（2）

（1）式代入（2）式得：

$$\hbar\omega+m_ec^2=\sqrt{m_e^2c^4+(\hbar kc)^2}=\sqrt{m_e^2c^4+(\hbar\omega)^2}$$

$\therefore 2\hbar\omega m_ec^2=0$， 显然此式不成立，所以电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足

2) 电子可散射这个光子，散射后的频率为ω'，电子的动量变为$\bar{p}$

由动量守恒定律得　$\hbar\vec{k}=\hbar\vec{k}'+\bar{p}$

$$\therefore p^2=(\hbar k)^2+(\hbar k')^2-2\hbar^2kk'\cos\theta$$

由能量守恒定律得　$\hbar\omega+m_ec^2=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}+\hbar\omega'$

$$\therefore \hbar(\omega-\omega')=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}-m_ec^2$$

$\because p>0$　　$\therefore \hbar(\omega-\omega')>0$，即 $\omega>\omega'$，散射后频率降低。

26. 动量为$\hbar\vec{k}$，能量为$\hbar\omega$的光子撞在静止的电子上，散射到与入射方向夹角为θ的方向上，证明散射光子的频率变换量为$\omega-\omega'=\dfrac{2\hbar}{m_0c^2}\omega\omega'\sin^2\dfrac{\theta}{2}$。亦即散射光波长

$\lambda' = \lambda + \dfrac{4\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，$\lambda$ 为散射前光子波长 $2\pi/k$，m_0 为电子的静止质量。

解：设碰撞后，光子动量变为 $\hbar\vec{k}'$，能量变为 $\hbar\omega'$，电子碰撞后动量为 $\vec{p}$，能量为 $w = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$， 四维动量 $p_\mu = (\vec{p}, \dfrac{i}{c}\omega)$

由碰撞前后动量守恒得 $p_{\mu 1} = p_{\mu 2}$

$$\begin{cases} \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}, (1) \\ \hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, (2) \end{cases}$$

对（1）式，由余弦定理，$p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2 kk'\cos\theta$

$$= \frac{\hbar\omega^2}{c^2} + \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - 2\hbar^2\frac{\omega\omega'}{c^2}\cos\theta$$

代入（2）式得 $\hbar\omega - \hbar\omega' = \sqrt{(\hbar\omega)^2 + (\hbar\omega')^2 - 2\hbar^2\omega\omega'\cos\theta + m_0^2c^4} - m_0c^2$

平方整理得：

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar\omega\omega'}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

代入 $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}, \omega' = \dfrac{2\pi c}{\lambda'}$ 得 $\lambda' = \lambda + \dfrac{4\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

27. 一个总质量为 M_0 的激发原子，对所选定的坐标系静止，它在跃迁到能量比之低 Δw 的基态时，发射一个光子（能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec{k}$），同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \dfrac{\Delta w}{h}$，而要略小一些，证明这个频率 $\nu = \dfrac{\Delta w}{h}(1 - \dfrac{\Delta w}{2M_0c^2})$

证明：设基态原子静止质量为 M_1，跃迁后基态原子反冲动量为 $\vec{p}$

跃迁前四维动量为 $p_{\mu 1} = (0, M_0c^2)$

跃迁后四维动量为 $p_{\mu 2} = (\vec{p} + \hbar\vec{k}, \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases} \vec{p} + \hbar\vec{k} = 0, (1) \\ M_0c^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4}, (2) \end{cases}$

由（1）得 $p=\hbar k=\hbar\dfrac{\omega}{c}$ 　　$\therefore p^2c^2=\hbar^2\omega^2$ 　（3）

又 $M_0c^2-M_1c^2=\Delta w$ 　　$\therefore M_1^2c^4=(M_0c^2-\Delta w)^2$ 　（4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_0c^2-\hbar\omega)^2=\hbar^2\omega^2+(M_0c^2-\Delta w)^2$

整理得 $2M_0c^2\hbar\omega=2M_0c^2h\nu=2M_0c^2\Delta w-\Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu=\dfrac{\Delta w}{h}(1-\dfrac{\Delta w}{2M_0c^2})$

28. 一个处于基态的原子，吸收能量为 $h\nu$ 的光子跃迁到激发态，基态能量比激发态能量低 Δw，求光子的频率。

解：设原子基态静止质量为 M_1，激发态静止质量为 M_0，光子能量为 $h\nu=\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec{k}$，原子吸收光子后动量为 $\vec{p}$，设原子基态时静止。

吸收前四维动量为 $p_{\mu1}=(\hbar\vec{k},M_1c^2+\hbar\omega)$

吸收后四维动量为 $p_{\mu2}=(\vec{p},\sqrt{p^2c^2+M_0^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases}\vec{p}=\hbar\vec{k},(1)\\ M_1c^2+\hbar\omega=\sqrt{p^2c^2+M_1^2c^4},(2)\end{cases}$

由（1）得 $p=\hbar k=\hbar\dfrac{\omega}{c}$，得 $p^2c^2=\hbar^2\omega^2$ 　（3）

又 $M_0c^2-M_1c^2=\Delta w$ 　得 $M_0^2c^4=(M_1c^2+\Delta w)^2$ 　（4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_1c^2+\hbar\omega)^2=\hbar^2\omega^2+(M_1c^2+\Delta w)^2$

整理得 $2M_1c^2\hbar\omega=2M_1c^2h\nu=2M_1c^2\Delta w+\Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu=\dfrac{\Delta w}{h}(1+\dfrac{\Delta w}{2M_1c^2})$