第一章 概率

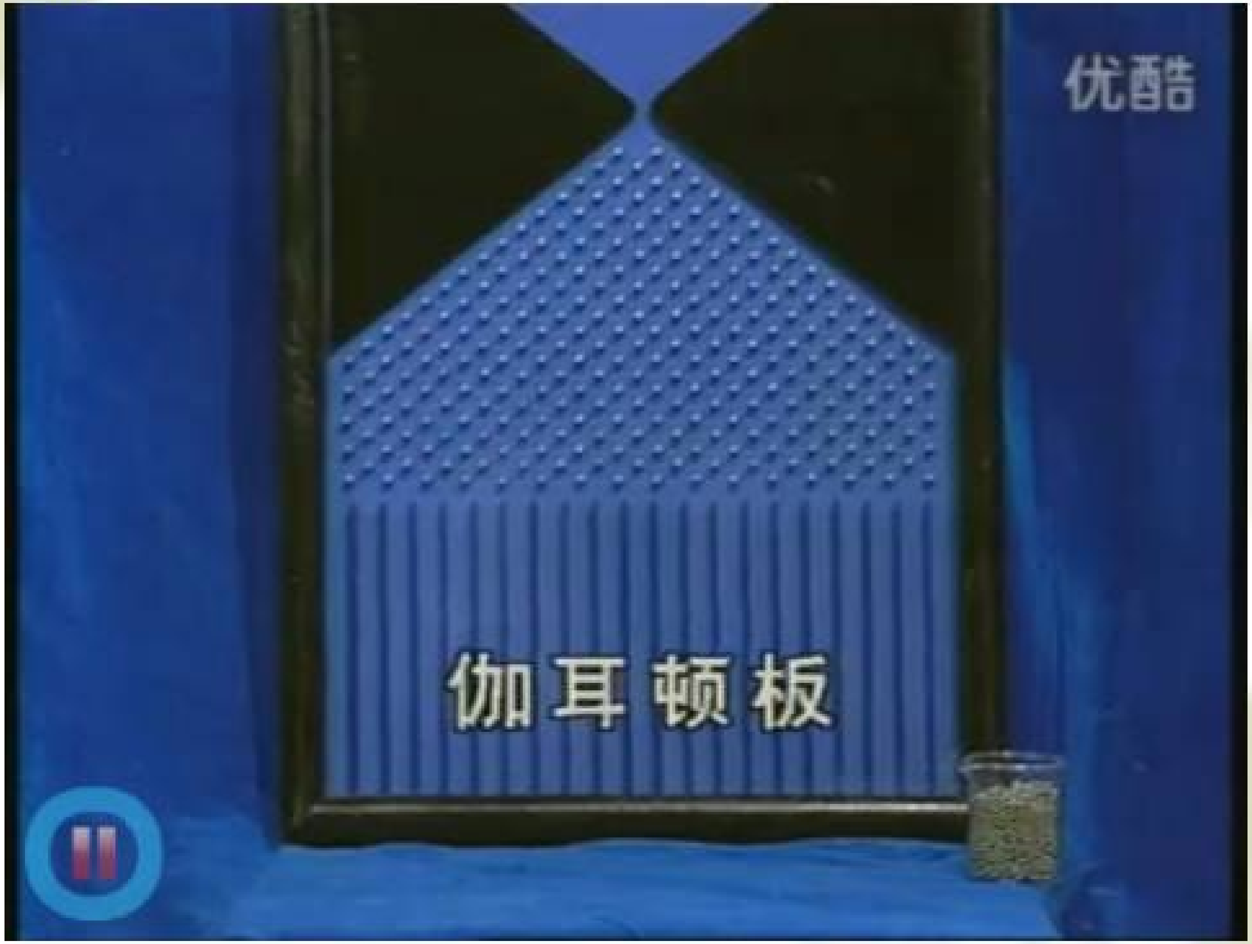
- 概率的基本概念
  - 随机现象与随机事件
  - 统计规律性
  - 概率的定义
  - 概率的基本性质
  - 概率的简单计算
- 随机变量与概率分布
  - 随机变量
  - 离散型随机变量的概率分布
  - 连续型随机变量的概率密度分布函数

概率的基本概念

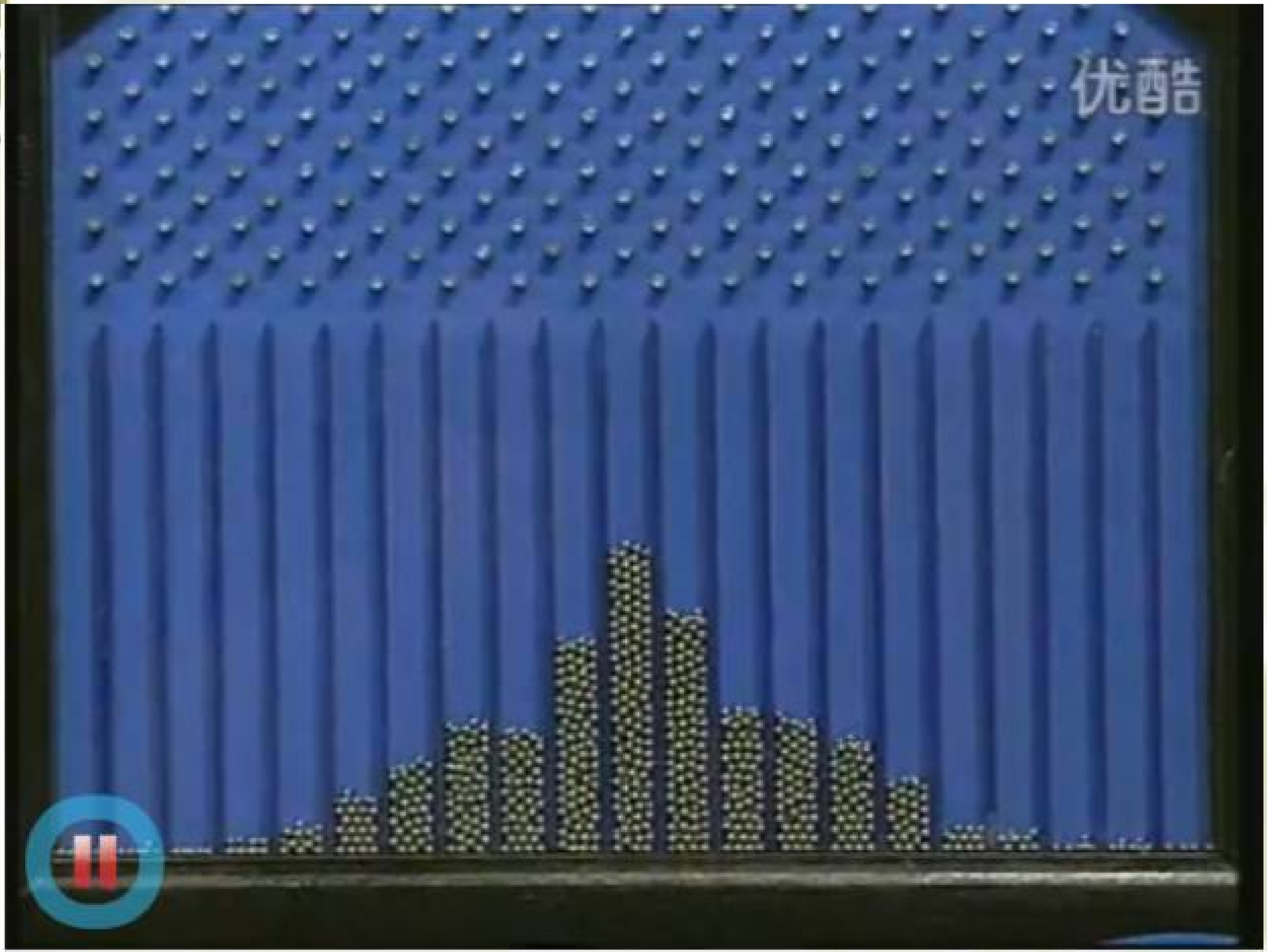
- 确定性事件与随机事件
  - 所谓的随机，只是不能人为控制或预测，并非“不可知论”。
- 基本随机事件与基本事件组
- 复杂随机事件
- 互不相容随机事件与互不相关随机事件
  - 基本随机事件组内的事件都是互不相容的。

统计的规律性

❖ 伽尔顿板实验




优酷


优酷

统计规律性

- 单个随机事件的不确定性
- 大量随机事件的规律性
- 涨落，即围绕统计平均值的偏差。体现了单个随机事件的偶然性与大量随机事件的必然性的辩证关系。

概率的定义

- 频数：在多次实验中，某一单个事件出现次数与实验总数的比率。
- $v_A = N_A / N$
- 当N极大时，频数趋向于一个极限，即概率。
- $\lim v_A = P_A$
- 概率指一随机事件发生的可能性有多大。

概率的基本性质

- 取值在0与1之间。概率为0，称为不可能事件。概率为1，称为必然事件。
- 加法定理：两个不相容随机事件发生的概率为两者概率之和。称为两事件的“或”或“和”。
- 归一化条件：基本随机事件组中各事件概率归一。

- 乘法定理：两个相容事件都发生的概率是两个事件各自发生概率的乘积，称为“交”或“积”。
- B依赖于A的情况：只有在A发生的前提下，才有可能发生B。A发生不一定有B发生，B发生必然有A发生。
  - $P_C=P(A\cap B)=P_A\cdot P(B|A)$
- 互不依赖的情况
  - $P_C=P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_n)=P_{A1}P_{A2}\cdots P_{AN}$

概率的简单计算

- 实际问题中，可以利用长期积累的经验来分析事件发生的可能性。
- 古典式随机现象的概率：
  - 该随机现象的基本随机事件组的事件数目有限
  - 每一基本随机事件发生的概率相等。

随机变量与概率分布

- 若在确定条件下，随机现象中的每一个随机事件ω都唯一的与一个实数值X(ω)相对应，则称X(ω)为一个随机变量。

例：

- 设盒中有3个白球，2个黑球。从中随机摸取三个球。问：摸到的三个球中，黑球的数目。
- 可定义X(ω)即黑球的数目。

表 1.2.1　随机事件 ω 与随机变量 $X(\omega)$

ω	$X(\omega)$
(1) (2) (3)	0
(1) (2) (4)	1
(1) (2) (5)	1
(1) (3) (4)	1
(1) (3) (5)	1
(2) (3) (4)	1
(2) (3) (5)	1
(1) (4) (5)	2
(2) (4) (5)	2
(3) (4) (5)	2

例：

- 硬币一面刻着国徽，另一面刻着币值。
- 可定义国徽一面向上为X=1，币值一面向上为X=0。

随机变量组

- 例：气体分子处于不停的、无规则热运动中。任何单个分子所在的空间及运动速度都在随机变化。
  - 可以把单个分子的速率v取做随机变量；
  - 将速度分量(v_x, v_y, v_z)取做随机变量组；
  - 还可以将空间位置坐标(x,y,z)取做随机变量组。

离散型随机变量

- 若随机变量（组）能取的值可以一一列出来，则称为离散型随机变量。否则称为非离散型随机变量。
- 实际遇到的非离散型随机变量大都有很好的数学性质，是连续性随机变量。比如粒子的空间坐标。

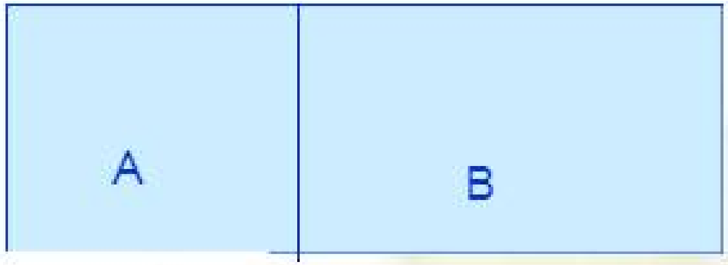
离散型随机变量的概率分布

- 设X可能取的值是$x_1,x_2\cdots x_n$，相应的概率分别是$P(x=x_1),P(x=x_2),\cdots,P(x=x_n)$
- 经过适当的选定随机变量，可以把不同随机事件的概率P写成各事件相应的随机变量X的函数：$P=f(x)$，这叫做离散型随机变量的概率分布函数。

二项式分布

- 假设A与B各自的概率为p和q，
  - 必然有p+q=1
- 求N次实验结果中，出现n_1次A的概率。

$$p^{n_1}q^{N-n_1}$$



$$P_N(n_1)=\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}$$

- 归一化：

$$\sum_{n_1=0}^{N}P_N(n_1)=\sum_{n_1=0}^{N}C_N^{n_1}p^{n_1}q^{N-n_1}=(p+q)^N=1$$

例：醉汉行走

- （一维）假设醉汉每一步的步长都是l，但是每一步是朝东还是朝西不受上一步的影响。求他走出N步后，离电线杆距离为x的概率。

$$P_N(n_1)=\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}$$

$$n_1=\frac{x}{2l}+\frac{N}{2},\qquad n_2=\frac{N}{2}-\frac{x}{2l}$$

$$P_N(x)=\frac{N!}{\left(\frac{x}{2l}+\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}-\frac{x}{2l}\right)!}p^{\left(\frac{x}{2l}+\frac{N}{2}\right)}q^{\left(\frac{N}{2}-\frac{x}{2l}\right)}$$

连续型随机变量的概率密度分布函数

- 对于连续型随机变量，某一确定值的概率必然为无限小。所以必须引入连续型随机变量概率密度分布函数。
- 以分子速率为例：

<table>
<tr><th>速率(m/s)区间</th><th colspan="15">0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700～∞</th></tr>
<tr><td>分子比率$\frac{\Delta N}{N}$(%)</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">21</td><td colspan="2">17</td><td colspan="2">10</td><td>8</td></tr>
<tr><td>单位速率间隔的分子比率 $\Delta N/(N\Delta v)$(% s/m)</td><td colspan="2">0.01</td><td colspan="2">0.08</td><td colspan="2">0.15</td><td colspan="2">0.20</td><td colspan="2">0.21</td><td colspan="2">0.17</td><td colspan="2">0.10</td><td></td></tr>
<tr><td>分子比率$\frac{\Delta N}{N}$(%)</td><td>0.2</td><td>0.8</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td><td>9.5</td><td>10.5</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>单位速率间隔的分子比率 $\frac{\Delta N}{N\Delta v}$(%s/m)</td><td>0.004</td><td>0.016</td><td>0.06</td><td>0.10</td><td>0.14</td><td>0.16</td><td>0.19</td><td>0.21</td><td>0.22</td><td>0.20</td><td>0.18</td><td>0.16</td><td>0.12</td><td>0.08</td><td></td></tr>
</table>

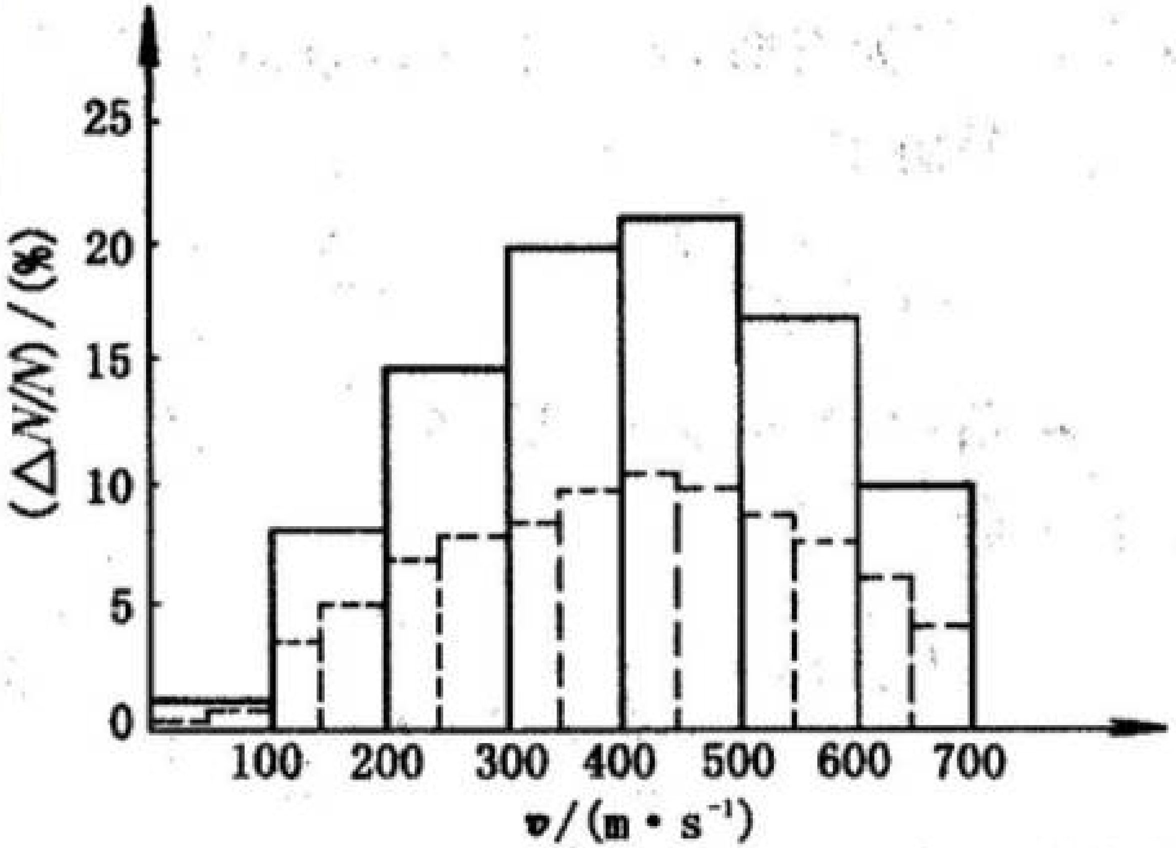


图 1.2.1　分子按速率分布的一种图示

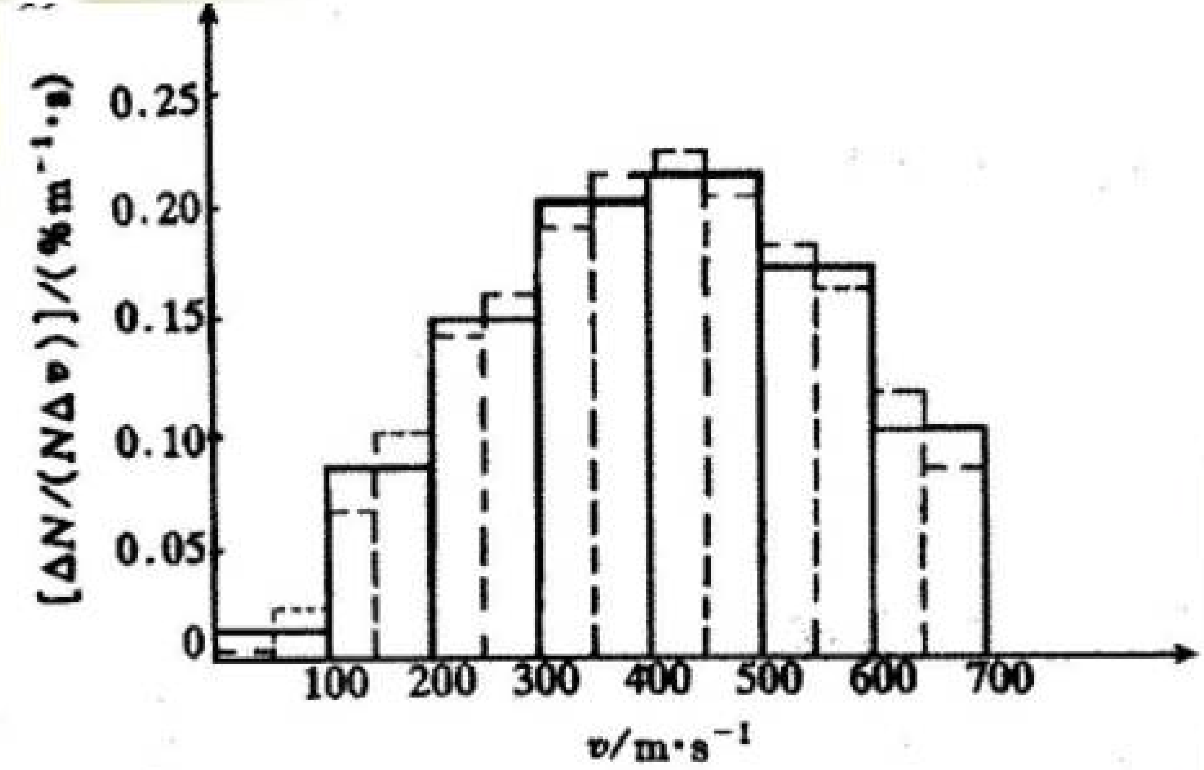


图 1.2.2 分子按速率的分布

概率密度分布函数

- 当速率间隔足够小时， $\Delta v \to dv$
- 定义速率分布曲线为：f(v)=dN/(Ndv)
- 任意分子其速率在v附近的概率为f(v)dv，所以f(v)是概率密度。
- 同时它反映了不同v附近概率密度随v的变化。

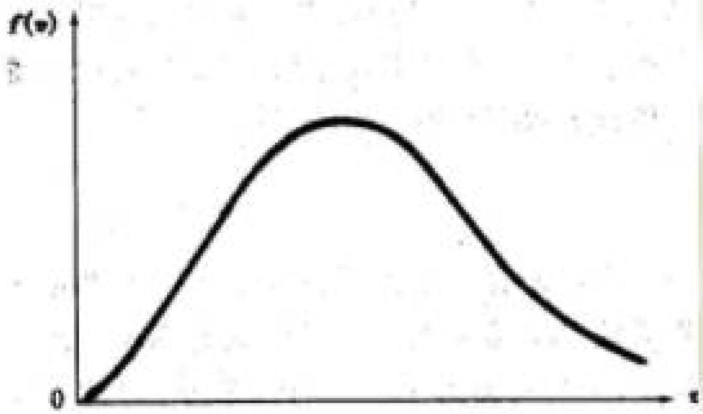


图 1.2.3　速率分布曲线

连续型随机变量的归一化

- 对于分子速度：

$$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v = 1$$

- 一般情况：

$$\int p(x)\mathrm{d}x = 1$$