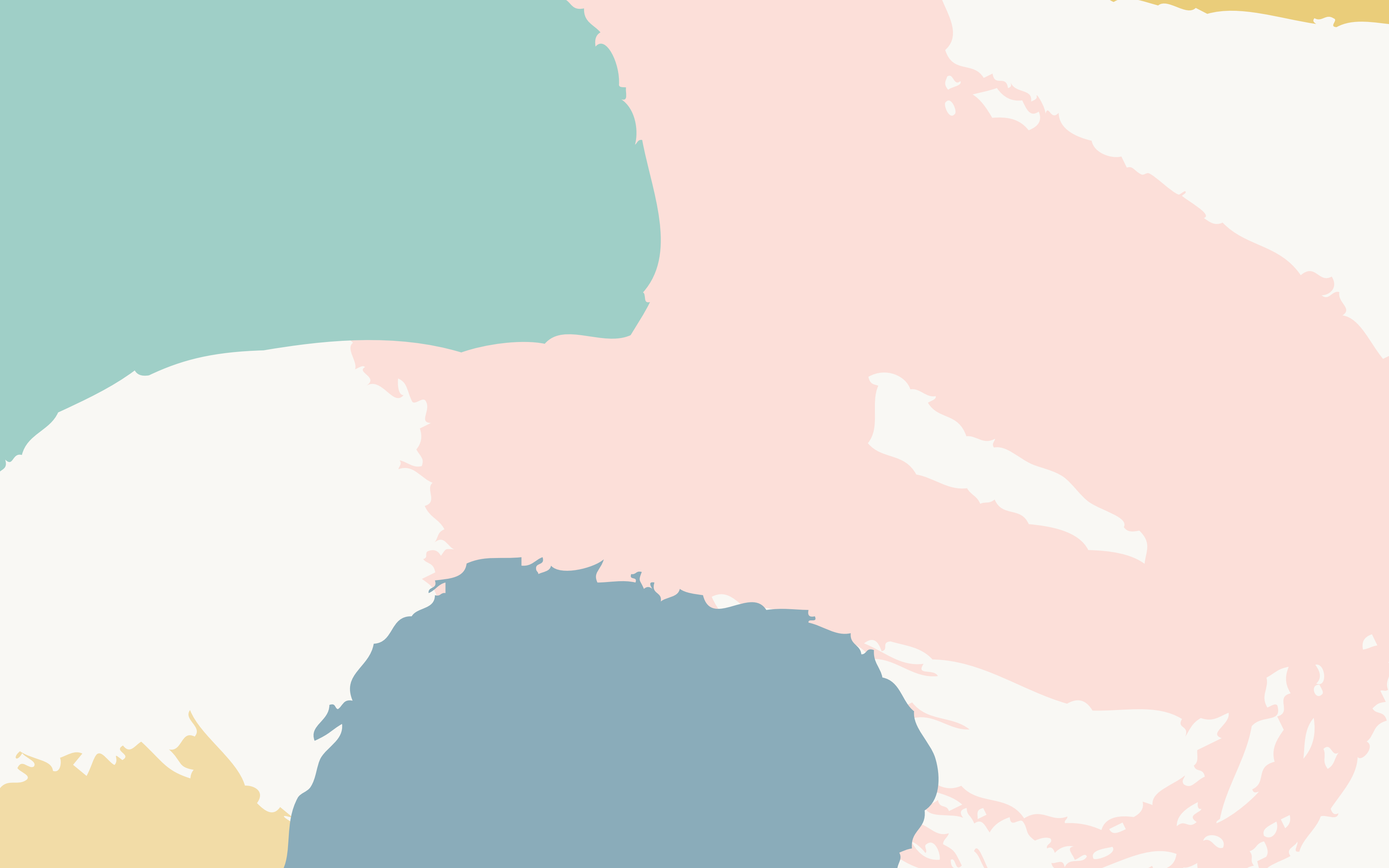

1. 高斯列主元消去法

【题2】用高斯列主元法解线性方程组 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

解：

（1）写出方程组Ax=b的增广矩阵 $(A|b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

（2）找到第一列中绝对值最大的数，并将其所在行与第一行交换。

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）用这个绝对值最大的数作为主元去消掉第一列其他的数。

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & 5/3 & 5 & 11/3 & -4 \\ 0 & -11/3 & 4 & 13/3 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

高斯消元法 | 列主元消去法 | 三角分解法 | 矩阵范数(只用... | 不用看

【题2】用高斯列主元法解线性方程组 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

（4）在去掉第一行第一列剩下的子矩阵中，继续找第二列中绝对值最大的数，所在行与第二行进行交换，并以此为主元消去第二列其他数。

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & \frac{-11}{3} & 4 & \frac{13}{3} & -11 \\ 0 & 0 & \frac{75}{11} & \frac{186}{33} & -9 \\ 0 & 0 & \frac{24}{11} & \frac{111}{33} & 6 \end{bmatrix}$$

（5）接着在去掉一二行，一二列剩下的子矩阵中重复上述操作，得到等价的三角方程组。

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & \frac{-11}{3} & 4 & \frac{13}{3} & -11 \\ 0 & 0 & \frac{75}{11} & \frac{186}{33} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{429}{275} & -\frac{78}{25} \end{bmatrix}$$

（6）解得：$x_4 = -2$，$x_3 = \frac{1}{3}$，$x_2 = 1$，$x_1 = -\frac{1}{2}$，即$x = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, -2\right)^T$。

2. 矩阵三角解法

5.3 矩阵三角解法

杜利特尔（Doolittle）分解算法的步骤

(1) 将线性方程组Ax=b中的系数矩阵A分解为A=LU，其中，L是单位下三角矩阵（对角元素为1的下三角矩阵），U是上三角矩阵。

(2)分解后，Ax=b等价于：$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$ ，这两部分就非常好解了。

(3)通过Ly=b解得 $y = y^*$ ，然后将 $y = y^*$ 代入Ux=y解得x。

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

$$Ly = b \Rightarrow y$$

$$Ux = y \Rightarrow x$$

高斯消元法 | 列主元消去法 | 三角分解法 | 矩阵范数(只用... | 不用看

条件：A的顺序主子式

$D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ 都不为0

1

【题3】用杜利特尔分解求解方程组 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\18\\20\end{bmatrix}$

A

解：①设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$

A

先通过L的第一行解U的第一行得

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$$

再通过U的第一列解L的第一列得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$$

2

通过L的第二行解U的第二行得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$$

再通过U的第二列解L的第二列得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$$

最后通过L的第三行解U的第三行得：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}$$

3.

②先解 $Ly=b$：$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\18\\20\end{bmatrix}$

得：$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-10\\-72\end{bmatrix}$

③再解 $Ux=y$：$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-10\\-72\end{bmatrix}$

得：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

3.

5.4 矩阵的范数和条件数

一、矩阵范数的定义

$\|A\|_\infty$ A $\|A\|_\infty$ ∞ $\|A\|_1$ 1

1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （矩阵的行范数：对每行元素绝对值求和，取最大值）

2) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ （矩阵的列范数：对每列元素绝对值求和，取最大值）

$\|A\|_1$

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$ （矩阵的2-范数：A^T是 A的转置，$\lambda_{\max}(A^TA)$表示 A^TA 的最大的特征值）

矩阵条件数：

$$\mathrm{cond}(A)_v = \|A^{-1}\|_v \, \|A\|_v \quad (v=1,2,\infty)$$

越大矩阵越病态.