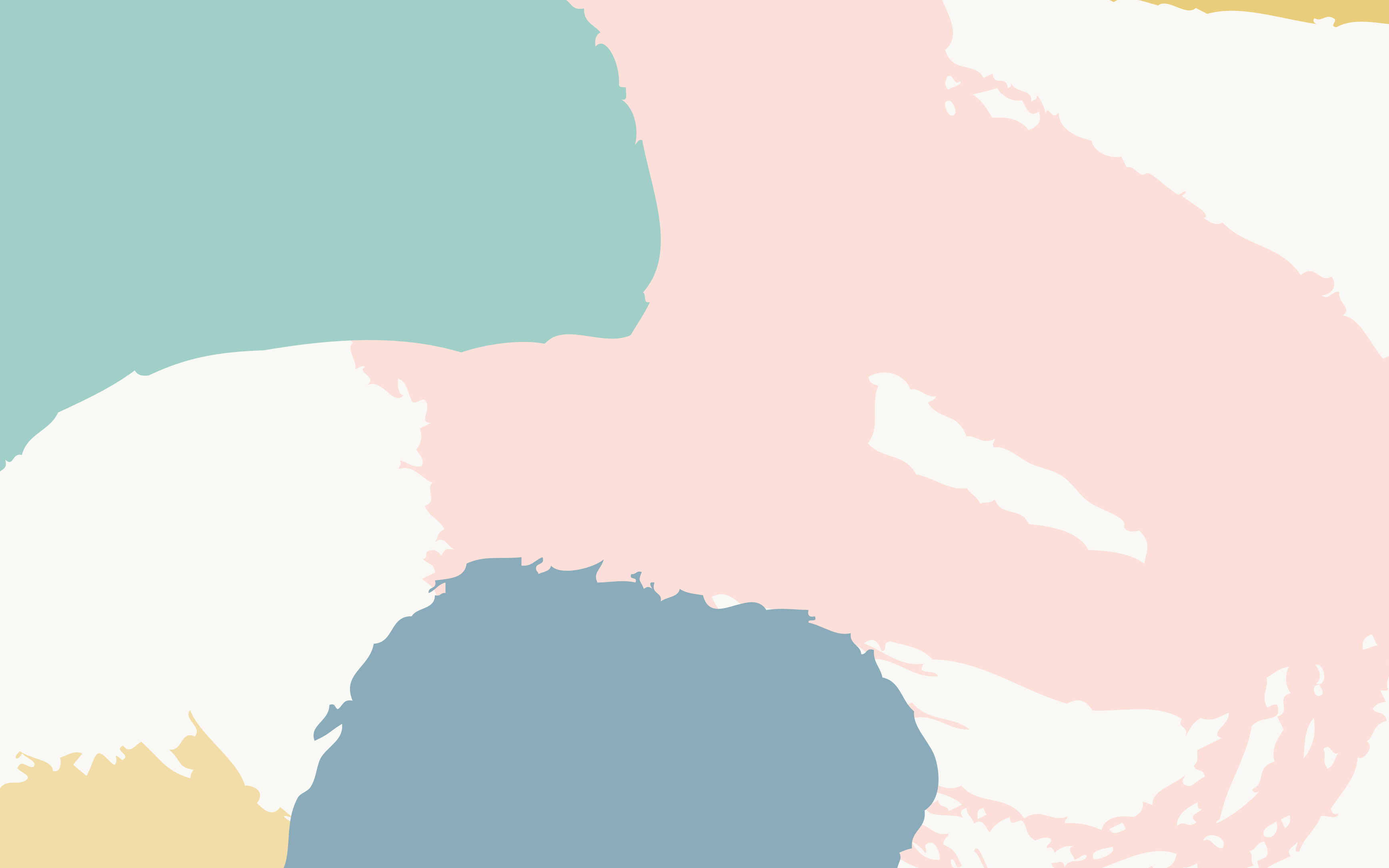


1. 取区间 $[a,b]$ 内 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$，通过某种加权平均的方法近似地得到平均高度：

$$f(\xi) \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

于是 $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$，或写成：$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \approx \boxed{\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)} \triangleq I_n(f)$

其中，A_k 称为求积系数，x_k 称为求积节点，$R(f) = I(f) - I_n(f)$ 称为求积余项。

$A_k = \lambda_k (b-a)$

2. 1) 矩形公式：若简单选取区间 $[a,b]$ 中点的函数值作为平均高度，则可得一点求积公式如下：$I(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2) 梯形公式：若取区间 $[a,b]$ 的两个端点 a 和 b，并令 $f(\xi) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$，

可得梯形公式：$I(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

3) 辛普森（Simpson）公式：若取区间 $[a,b]$ 三点 a，b，$c = \frac{a+b}{2}$，

并令 $f(\xi) = \frac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}$，可得辛普森（Simpson）公式：

$$I(f) = (b-a)\frac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}$$

3. 代数精度

代数精度的定义：如果求积公式 $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 满足：

$$R(x^k)=I(x^k)-I_n(x^k)=0\,(0\le k\le m),\ R(x^{m+1})\ne 0,$$

则称求积公式 $I_n(f)$ 具有 m 次代数精度。

$$\int_a^b x^k\,dx = I_n(x^k) \qquad 0\le k\le m \quad k\in N^+$$

$$k=m+1\text{ 时}:\ \int_a^b x^k\,dx \ne I_n(x^k)$$

4. 插值型求积公式

在区间 $[a,b]$ 上取 $n+1$ 个节点 x_i，$i=0,1,\cdots,n$，作 $f(x)$ 的 n 次插值多项式，

$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)f(x_k)$ 。于是有如下求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\Big[\underbrace{\int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x}_{A_k}\Big]f(x_k)$$

其中求积系数 $A_k=\int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x$ 由节点决定，与 $f(x)$ 无关。求积余项

$$R(f)=I(f)-I_n(f)=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

当且仅当为插值型求积公式，

代数精度至少为n

5.

4.5 Newton-Cotes公式

一、定义

按照等距分布取上述节点，$x_i = a + ih$，$h = \frac{b-a}{n}$，$i = 0, 1, \cdots, n$。 $A_k = \int_a^b l_k(x)\,dx$

由此构造的插值型求积公式称为Newton-Cotes公式。此时求积系数为：

$$A_k = \frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{nk!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{j\neq k}(t-j)\mathrm{d}t$$

n+1

其中，$\frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j\neq k}(t-j)\mathrm{d}t$ 称为Cotes系数，记为 $C_k^{(n)}$。

二、定理

当阶数 n 为偶数时，Newton-Cotes公式至少具有 $n+1$ 次代数精度。

数值积分的原理 | 代数精度 | 不用看 | 复合求积公式 | 不用看

知道就可以，
不考！

6.

1) $n=1$时：$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$，此时为梯形公式。

2) $n=2$时：$C_0^{(2)} = \frac{1}{6}, C_1^{(2)} = \frac{2}{3}, C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$，此时为辛普森公式。

3) $n=3$时：$C_0^{(3)} = C_4^{(3)} = \frac{7}{90}$，$C_1^{(3)} = C_3^{(3)} = \frac{32}{90}$，$C_2^{(3)} = \frac{12}{90}$，此时为Cotes公式。

←低阶 Newton-Cotes公式，
要会

7. 复合梯形公式

将区间 $[a, b]$ 等分为 n 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$，其中 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}$，$k = 0, 1, \cdots, n-1$，并且在每个小区间上应用梯形公式，得到复合梯形公式:

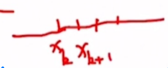
$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

余项为：$R_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \xi \in (a, b)$

复合辛普森公式

记每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$，且在每个小区间上应用辛普森公式，得到复合辛普森公式:

$$S_n = \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k) + 4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{k+1})\right]$$



余项为：

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi), \xi \in (a, b)$$

考试之前背一下余项

8. 高斯型求积公式

听一下，没听完