数理方法习题课

2023/3/24

01

知识点总结

知识点总结

- 单连通区域的柯西定理

  若f(z)在闭单连通区域B上解析，则沿B上任一分段光滑闭合曲线l(包含B边界)，有

$$\oint \mathrm{f}(z)dz = 0$$

- 复连通区域的柯西定理(注意积分域方向一直在线左边，据此定正方向)

  若f(z)在闭复连通区域上单值解析函数，则有

$$\oint_l f(z)dz+\sum^{n}\oint_{l_i} f(z)dz=0$$

  即沿内外边界线逆时针方向积分相等->积分与具体路径无关，只与包含的奇点有关

- 柯西积分公式：f(z)在区域B上解析，曲线l为B边界，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

知识点总结

- 幂级数：$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)$
- 收敛半径(注意分子分母顺序)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|z-z_0|<1 \longrightarrow R=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

- 分式形式的级数展开

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k \quad (|t|<1) \quad ; \quad \frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}t^{(2k-2)}$$

- 几种常见的泰勒级数展开形式

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \quad \sin z, \quad \cos z \quad (z=0\text{附近})$$

$$\ln z=\boxed{n2\pi i}+(z-1 -\frac{1}{2}\ z-1\ ^2+\frac{1}{3}\ z-\ )^3-\frac{1}{4}(z-1)^4+\ldots \quad (z=1\text{处展开})$$

注意lnz展开式是多值的

- 洛朗展开(研究的区域上有奇点)

几种常见的洛朗展开形式+例题

02

作业题讲解

第三次作业

第38页（第三版） 第31页（第四版） 第28页（第五版）：第2题

已知函数 $\psi(t,x)=e^{-\frac{xt}{1-t}}/(1-t)$ ，将x作为参数，t为复变数，试应用柯西公式将 $\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}|_{t=0}$ 表示为回路积分。

对回路积分进行积分变数的替换 $\zeta=(z-x)/z$ ，并借此证明：$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}|_{t=0}=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

柯西积分公式

(1) $$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}}{(\zeta-t)^{n+1}(1-\zeta)}d\zeta\xrightarrow{t=0}\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}d\zeta$$

(2) $\zeta=(z-x)/z$

$$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{\exp(-x(\frac{z-x}{z})/(1-\frac{z-x}{z}))}{(\frac{z-x}{z})^{n+1}(1-\frac{z-x}{z})}(\frac{x}{z^2})dz$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^{n+1}\mathrm{e}^{-(z-x)}}{(z-x)^{n+1}}\frac{z}{x}(\frac{x}{z^2})dz=e^x\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^n\mathrm{e}^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

第三次作业

母函数:

第38页（第三版） 第31页（第四版） 第28页（第五版）：

第1题 $\psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$ 为埃尔米特多项式的母函数。

第2题 $\psi(t,x)=e^{-\frac{xt}{1-t}}/(1-t)$ 为拉盖尔多项式的母函数。

$\boxed{\text{何为母函数?}}$

母函数，又称生成函数

对于任意数列$\{a_n\}$，可用一个函数$G(x)$通过级数的形式联系起来，即有$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$,则称$G(x)$为数列$\{a_n\}$的生成函数，即母函数。

第三次作业

现以第一题$\psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$为例：

埃尔米特方程： $y''-2xy'+\lambda y=0 \quad (-\infty<x<\infty)$

利用级数法解该微分方程，通过选取合适的参数λ，可以使级数截断为多项式，称埃尔米特多项式。

函数 $\psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$ **在$t_0=0$领域解析，因此可在$t_0=0$领域展开成泰勒级数：**

$$\psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

可以证明式中Hn(x)即为埃尔米特多项式。

易证$\psi(t,x)$满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=2t\psi,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}+2(t-x)\psi=0$$

将$\psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$代入上式，可以证明$H_n(x)$满足：

$$H_n(x)-\frac{x}{n}H_n'(x)+\frac{1}{2n}H_n''(x)=0,$$

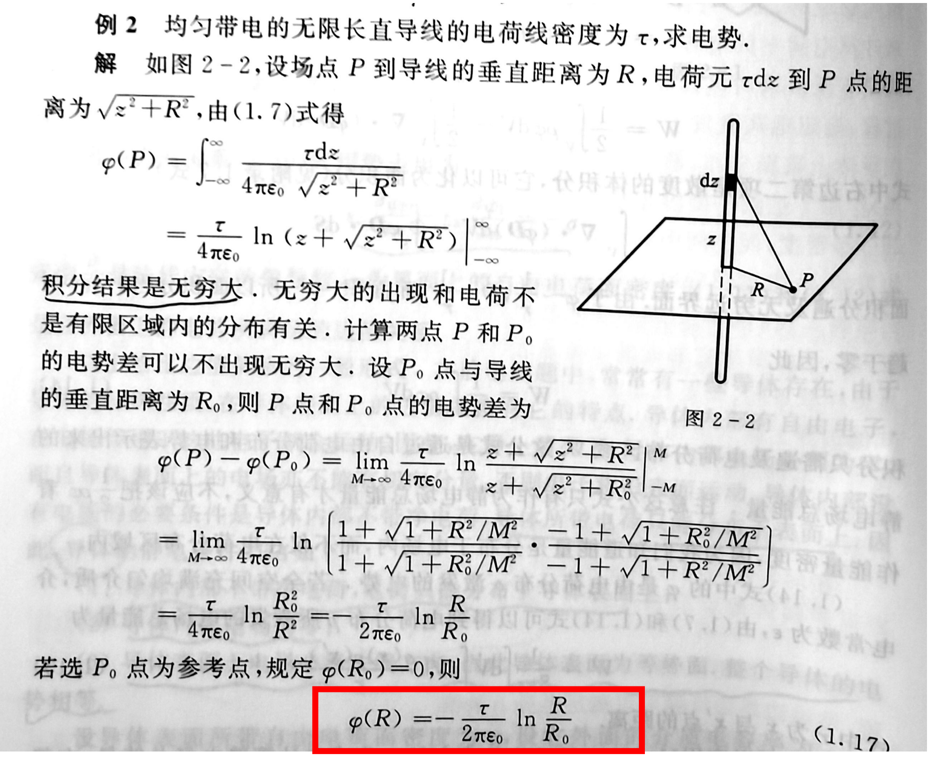
正是埃尔米特方程的形式。

埃尔米特方程的解唯一，即可得$H_n(x)$确实为埃尔米特多项式。

p.s.详细证明请参考书附录十P410页相关内容。

第三次作业

补充题1：有一无限长的均匀带电导线与Z轴平行,且与XY平面相交于α，线电荷密度为λ，求此平面场的复势，并说明积分$\oint_l \frac{dz}{z-\alpha}$的物理意义。



例 2 均匀带电的无限长直导线的电荷线密度为 τ，求电势.

解 如图 2－2，设场点 P 到导线的垂直距离为 R，电荷元 τdz 到 P 点的距离为 $\sqrt{z^2+R^2}$，由(1.7)式得

$$\varphi(P)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(z+\sqrt{z^2+R^2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

积分结果是无穷大．无穷大的出现和电荷不是有限区域内的分布有关．计算两点 P 和 P_0 的电势差可以不出现无穷大．设 P_0 点与导线的垂直距离为 R_0，则 P 点和 P_0 点的电势差为

图 2－2

$$\varphi(P)-\varphi(P_0)=\lim_{M\to\infty}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+\sqrt{z^2+R^2}}{z+\sqrt{z^2+R_0^2}}\Big|_{-M}^{M}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+R^2/M^2}}{1+\sqrt{1+R_0^2/M^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{1+R_0^2/M^2}}{-1+\sqrt{1+R^2/M^2}}\right]$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0^2}{R^2}=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$$

若选 P_0 点为参考点，规定 $\varphi(R_0)=0$，则

$$\boxed{\varphi(R)=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}} \qquad (1.17)$$

电动力学 郭硕鸿 P42

复势$f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$

$$u(r,\varphi)=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\rho-\alpha)+C$$

由柯西-黎曼方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\\[2ex]\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\end{cases}$$

可得复势

$$f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln(\rho-\alpha)+\ln i\varphi)+C$$

$$=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(z-\alpha)+C$$

对复势$f(z)$求梯度，可得

$$E(z)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{z-\alpha}$$ （只有一个方向有分量）

即$\oint_l \frac{dz}{z-\alpha}$的物理意义为电场沿复平面一个闭合环路的积分。

第四次作业

第46页（第三版） 第37页（第四版） 第34页（第五版）

第3题 (2) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k}(z-2)^k$ 求级数收敛圆

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}}, a_k = k^{lnk}$$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = k^{-\frac{\ln k}{k}}$$,考虑取对数

$$\ln(k^{-\frac{\ln k}{k}}) = -\frac{(\ln k)^2}{k}$$

$k\to\infty$时，由洛必达法则可知：

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{(\ln k)^2}{k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2\ln k}{k} = 0$$

收敛圆半径$R = \lim_{k\to\infty} k^{-\frac{\ln k}{k}} = 1$

收敛圆$|z-2|=1$

两种判定幂级数收敛半径的方法：

比值判别法：$R = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$

根值判别法：$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

本题采用根植判别法较好。

第四次作业

第52页（第三版） 第41页（第四版） 第37页（第五版）：（3），（4）

(3) $\ln z$在$z_0=i$

$$\ln z=\ln i+\frac{1}{i}(z-i)-\frac{1}{2i^2}(z-i)^2+\frac{1}{3i^3}(z-i)^3-\frac{1}{4i^4}(z-i)^4+\ldots$$

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{ki^k}\quad (k=1,2,3,\ldots)\quad |z-i|<1$$

$$i=\exp[i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)]$$

$$\ln i=i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$$

多值函数

(4) $\sqrt[m]{z}$在$\mathrm{z}_0=1$

$$f(z)=1^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}(z-1)+\frac{1-m}{2!m^2}(z-1)^2+\ldots$$

$$1=\exp(i2n\pi)$$

$$1^{\frac{1}{m}}=\exp(i\frac{2n\pi}{m})$$

或可以考虑二项式定理

$$z^{\frac{1}{m}}=(z-1+1)^{\frac{1}{m}},\text{通项公式为}\begin{pmatrix}1/m\\k\end{pmatrix}$$

$$(1+z)^m=1^m\sum_{k=1}^{\infty}C_m{}^k z^k$$

(m不一定为整数，为非整数时1^m为多值函数)

指数为非整数的二项式定理

第四次作业

第60页（第三版） 第47页（第四版） 第43页（第五版）：（2）（15）

$$(2)\frac{1}{z^2(z-1)}\text{在}z_0=1$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{[1-(1-z)]^2}.$$

注意到有 $|t|<1$ 时

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\sum_{k=1}^{\infty}k\,t^{k-1}$$

设 $t=1-z$，则可得出

$0<|z-1|<1$ 时

$$\frac{1}{[1-(1-z)]^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-z)^{k-1}$$

即原式 $=\sum_{k=1}^{\infty}-k(1-z)^{k-2}=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}k(z-1)^k$

$(0<|z-1|<1)$ 换求和指标时注意，式中也要改动

洛朗级数：主要运用常见的泰勒级数展开来求解，尤其是分式型的泰勒展开

$$\boxed{\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k \quad (|t|<1)}$$

第四次作业

$$(15)\ \frac{1}{z^2(z^2-1)^2}\ 在0<|z|<1,在1<|z|<\infty$$

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}$$

① $0<|z|<1$ 时. z 满足 $\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 的收敛标准.

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)=\frac{1}{2z}\ \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}$$

则原式 $=\frac{1}{2z^3}\sum_{k=1}^{\infty} 2k\ z^{2k-1}=\sum_{k=-1}^{\infty}(k+2)\ z^{2k}$

② 在 $1<|z|<\infty$ 时 $\boxed{0<\left|\frac{1}{z}\right|<1}$

原式 $=\frac{1}{z^6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}$

设 $t=\frac{1}{z}$. 则有 $\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$ $\quad dt=-\frac{1}{z^2}dz$

$\Rightarrow dz=-z^2dt$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}=-\frac{z^3}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}\right)$$

$$=-\frac{z^3}{2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k}=z^3\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot z^{-(2k+1)}$$

原式 $=\frac{1}{z^6}\cdot z^3\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot z^{-(2k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot z^{-(2k+4)}$

$\boxed{令\ k=-(k+2)}$

$\Rightarrow$ 原式 $=-\sum_{k=-\infty}^{-3}(k+2)z^{2k}$.

$$\boxed{\frac{1}{1-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}\quad (|t|<1)}$$

谢
谢