数理方法补遗

2023/5/12

01

常微分方程

一阶常微分方程的类型与通解

常微分方程：未知函数为一元函数的微分方程。

Type1 $y' = f(x)$，两端积分

Type2 可分离变量型

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \to \boxed{\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx}$$

Type3 齐次方程$y' = f(\frac{y}{x})$

$$y = ux, u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = u'x + u = f(u) \to \boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}}$$

一次常微分方程的类型与通解

Type4　一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$， $Q(x)$称自由项

$Q(x)$=0时， $y' + P(x)y = 0$，称一阶齐次线性方程

$Q(x) \neq 0$时， $y' + P(x)y = Q(x)$，称一阶非齐次线性方程

求解方法：（分两步）

(1)求一阶齐次线性方程的通解

$y' + P(x)y = 0$为可分离变量的微分方程。分离变量得：

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \to \ln y = -\int P(x)dx + \ln C$$

$$\boxed{y = Ce^{-\int P(x)dx}}$$

(2)求一阶非齐次线性方程的通解

可设通解为$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$， $C(x)$为待定函数。

将通解带入方程$y' + P(x)y = Q(x)$

可得$C'(x)\, e^{-\int P(x)dx} = \mathrm{Q(x)} \to C(x) = \int \mathrm{Q(x)}\, e^{\int P(x)dx} + \mathrm{C}$

$$\boxed{y = C(x)\, e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \mathrm{Q(x)}\, e^{\int P(x)dx} + \mathrm{C}\right)}$$

二阶常微分方程的类型和通解

Type1　$y'' = f(x)$，两端连续积分两次

(注意：求得通解中含两个任意常数，需要根据初始条件定解)

Type2　$y'' = f(x, y')$，方程中不显含y

求解方法：令$y' = p(x)$，则$y'' = p'(x)$

则原方程可化为$p' = f(x, p)$，为有关p和x的一阶微分方程

(该思想为计算物理中数值求解微分方程的思路)

Type3　$y'' = f(y, y')$，方程中不显含x

求解方法：令$y' = p(y)$，则$y'' = p'(y)y' = p'p$

则原方程可化为$p'p = f(y, p)$，为有关p和y的一阶微分方程

二阶常系数齐次微分方程的求解

二阶常系数微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad ...(1)$$

若$f(x)$=0，则化为二阶常系数齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad ...(2)$$

定理1：若函数y_1、y_2为(2)的两个线性无关的解，则$y= C_1 y_1+ C_2 y_2$为(2)的特解，其中C_1、C_2为常数。

即要解方程(2)，求出两个线性无关的特解即可。

取试解$y = e^{rx}$带入方程(2)，可得特征方程$r^2 + pr + q = 0$，

该方程的根称特征根。

二阶常系数齐次微分方程的求解

特征方程：$r^2+pr+q=0$

特征根r_1、r_2有三种不同情况：

(1)$\Delta>0$，$r_1\neq r_2$

此时微分方程有两个线性无关的解$y_1=e^{r_1x}$、$y_2=e^{r_2x}$

则通解为：$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

(2) $\Delta=0$，$r_1=r_2$

此时只得到微分方程的一个解$y_1=e^{rx}$，取$y_2=xe^{rx}$

则通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

(3) $\Delta<0$，$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$y_1=e^{\alpha x}\,e^{i\beta x}$，$y_2=e^{\alpha x}\,e^{-i\beta x}$

$y=C_1y_1+C_2y_2=e^{\alpha x}\left(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x}\right)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

特殊二次常微分方程

Type1 $$\frac{d^2y}{dx^2}+\mu y=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mu>0,\mu=m^2,y=c_1\sin mx+c_2\cos mx\\&\mu=0,y=c_1+c_2x\\&\mu<0,\mu=-m^2,y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}\end{aligned}}$$

考虑边界条件$y(0)=0$，$y(l)=0$

$$\mu<0,y(0)=c_1+c_2=0,y(l)=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}=0$$

$$\mu=0,y(0)=c_1=0,y(l)=c_1+c_2l$$

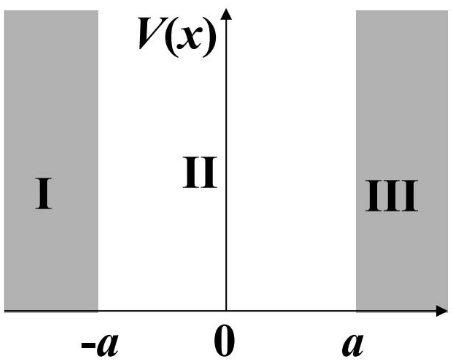
在此边界条件下均不成立。

特殊二次常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mu y=0$$ 边界条件$y(0)=0$，$y(l)=0$

$$\mu>0,\mu=m^2,y=c_1\sin mx+c_2\cos mx\Rightarrow \mu=(\frac{n\pi}{l})^2,n\in Z^+$$

模型：一维无限深势阱

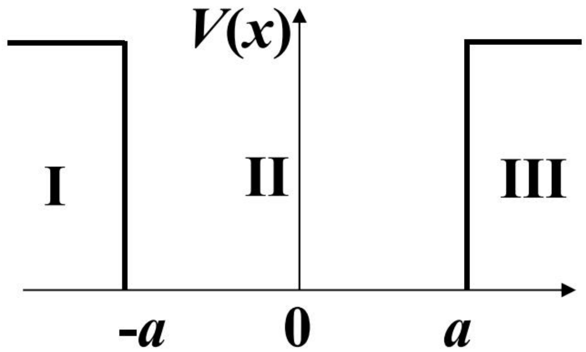


$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ \infty & |x|\geq a\end{cases}$$

一维定态薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

特殊二次常微分方程



波函数标准条件：

单值，有限，连续

$$\boxed{\varphi|_{x\to\infty} = 0, \varphi|_{x=\pm a} = 0}$$

(粒子不能穿过无穷高势垒，边界波函数为0)

I: $$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{I}(x) - \underbrace{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V-E)}_{\beta^2}\psi^{I}(x) = 0$$

β>0

II: $$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{II}(x) \underbrace{+\frac{2\mu}{\hbar^2}E}_{\alpha^2}\psi^{II}(x) = 0$$

α>0

III: $$\frac{d^2}{dx^2}\psi^{III}(x) - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V-E)\psi^{III}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{I} - \beta^2\psi^{I} = 0 \\ \dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{II} + \alpha^2\psi^{II} = 0 \\ \dfrac{d^2}{dx^2}\psi^{III} - \beta^2\psi^{III} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\psi^{I} = C_1e^{\beta x} + C_2e^{-\beta x} \qquad \psi^{II} = A\sin(\alpha x + \delta) \qquad \psi^{III} = B_1e^{\beta x} + B_2e^{-\beta x}}$$

特殊二次常微分方程

带入边界条件$\varphi|_{x\to\infty}=0,\ \varphi|_{x=\pm a}=0$，得：

$$\begin{cases}\psi^{I}=0,\\ \psi^{II}=A\sin(\alpha x+\delta),\\ \psi^{III}=0.\end{cases}$$

$$\psi^{II}(-a)=\psi^{I}(-a)\rightarrow A\sin(-\alpha a+\delta)=0$$

$$\psi^{II}(a)=\psi^{III}(a)\rightarrow A\sin(\alpha a+\delta)=0$$

连续性条件

$$\alpha^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}E=\frac{n\pi}{a}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$ 分立能级

$$E=\frac{\hbar^2}{2\mu}\alpha^2=\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}=E_n$$

此类方程+类似$\varphi|_{x=\pm a}=0$边界条件的情况：波导管、谐振腔……

方程的本征值和本征函数都是分立的（模式、选频……）

特殊二次常微分方程

Type2 欧拉型方程 $ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$

由于$x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx})\neq x^2\frac{d^2}{dx^2}$,因此不能分解为$a(x\frac{d}{dx}-x_1)(x\frac{d}{dx}-x_2)y=0$

换元法:

$$x=e^t,t=\ln x$$

$$\frac{d}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}=\frac{1}{x}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{d}{dt})=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{d}{dt}-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d}{dt})$$

带入方程得: $\boxed{[a\frac{d^2}{dt^2}+(b-a)\frac{d}{dt}+c]y=0}$ 常系数微分方程

特殊二次常微分方程解法

$$\boxed{[a\frac{d^2}{dt^2}+(b-a)\frac{d}{dt}+c]y=0}$$

(1) $(b-a)^2 > 4ac$

$$y = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} = c_1 x^{x_1} + c_2 x^{x_2}$$

(2) $(b-a)^2 = 4ac$

$$y = c_1 e^{x_1 t} + c_2 t e^{x_1 t} = x^{x_1}(c_1 + c_2 \ln x)$$

(3) $(b-a)^2 < 4ac$

$$x_1 = \alpha + i\beta, x_2 = \alpha - i\beta$$

$$y = e^{at}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

$$= x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

特殊二次常微分方程解法

Type3 任意型二阶常微分方程消去一阶项

形如 $p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\boxed{q(x)\dfrac{dy}{dx}}+r(x)y=s(x)$

令：$y=f\xi$

$$y''=f''\xi+2f'\xi'+f\xi''；\quad y'=f'\xi+f\xi'$$

$$py''+qy'=pf''\xi+2pf'\xi'+pf\xi''+qf'\xi+qf\xi'$$

$$\Rightarrow 2pf'\xi'+qf\xi'=0$$

$$\frac{f'}{f}=-\frac{q}{2p}\Rightarrow f=e^{\int -\frac{q}{2p}dx}，\quad y=f\xi$$

换元后，原方程可化为：

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+t(x)\xi=\dots.$$ 消去了一阶项

02

线性代数

矩阵求逆

定义：对于n阶矩阵**A**，有一个n阶矩阵**B**，使**AB=BA=E**，则说明矩阵**A**可逆，称**B**为**A**的逆矩阵，记为$\mathbf{A}^{-1}$。

定理1：若矩阵**A**可逆，则$|\mathbf{A}|\neq 0$，即**A**为非奇异矩阵。

定理2：$|\mathbf{A}|\neq 0$，矩阵**A**可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，其中$\boldsymbol{A}^{*}$为**A**的伴随矩阵。

逆矩阵满足以下运算规律：

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$

(2) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$

(3) **A**,**B**均可逆，则$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

矩阵求逆

矩阵求逆方法：

方法1：求伴随矩阵A^*

设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，将矩阵A的元素a_{ij}所在的第i行第j列元素划去后，剩余的各元素按原来的排列顺序组成的n-1阶矩阵所确定的行列式称为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式。

方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的各元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵A^*：

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

该矩阵A^*称为矩阵A的伴随矩阵[1]

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*}$$

矩阵求逆

矩阵求逆方法：

方法2：作n×2n矩阵(**A**|**E**),用初等行变换把左边部分化为**E**,右边一半即为**A**$^{-1}$。

例：分别用两种方法求矩阵**A**的逆

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

本征值求解

矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 若存在非零向量 $\xi=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

与一数λ_0，使 $A\xi=\lambda_0\xi$ ，则λ_0称A的特征值，ξ称A的特征向量。

求解本征值的方法为：

Step1: 求行列式$|\lambda E-A|=0$的根，即为A的全部本征值。

Step2: 把求得的特征值逐个带入方程$(\lambda E-A)\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}=0$中，解即为属于每个特征值的全部线性无关的特征向量。

相似变换

定义：

相似对角化就是通过 $P^{-1}AP = B$ 变换使得 $A \to \Lambda$

n阶方阵A与对角矩阵Λ相似↔A有n个线性无关的特征向量

$$P^{-1}AP = \Lambda$$
$$AP = P\Lambda$$
$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\Lambda$$

设$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$

显然，可建立与特征值与特征向量的关联，将特征值排列为 Λ ，将特征值对应的特征向量按列向量排列为 P

二次型

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^{\ 2}+\ldots+2a_{2n}x_2x_n+a_{nn}x_n^{\ 2}$$

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 是二次齐次多项式，称数域P上的一个二次型

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A称为二次型的矩阵

A为对称矩阵，A=A^T

$$X^TAX=(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

二次型

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

将x_i表示成y_j的和
该过程称为线性替换
经线性替换后二次型
还是二次型

$$X=CY$$

经线性替换后，原二次型$X^TAX \to Y^TBY, B=C^TAC$

标准型：只包含平方项的二次型，矩阵表示为：

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵

对于任意一个对称矩阵A，都可以找到一个可逆矩阵C，使C^TAC为对角矩阵。即总可以找到一个线性替换将二次型化为标准型。

雅可比矩阵

求二重积分

$$(x, y) \to (u, v)$$

$$\iint_R f(x, y)dxdy$$

需进行变量替换

$$x = h(u, v)$$
$$y = k(u, v)$$

则原积分可化为：

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_Q f(\underline{h}(u, v), k(u, v)) \cdot \boxed{\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv}$$

其中

$$\boxed{\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

雅可比矩阵

雅可比矩阵

设变量u和v是独立变量x和y的函数，即u $= u(x,y)$, $v = v(x,y)$，则可以定义如下雅可比行列式

$$\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\,u}{\partial\,x}\right)_y & \left(\frac{\partial\,u}{\partial\,y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial\,v}{\partial\,x}\right)_y & \left(\frac{\partial\,v}{\partial\,y}\right)_x \end{vmatrix}$$

可以证明

$$\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,x}\right)_y = \frac{\partial\,(u,y)}{\partial\,(x,y)} = \frac{\partial\,u}{\partial\,x}\frac{\partial\,y}{\partial\,y} - \frac{\partial\,u}{\partial\,y}\frac{\partial\,y}{\partial\,x}$$

若s和t也是x和y的函数，则有

$$\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(x,y)} = \frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(s,t)}\frac{\partial\,(s,t)}{\partial\,(x,y)}$$

三维空间的坐标旋转

原坐标系(e_1, e_2, e_3)

新坐标系(e_1', e_2', e_3')

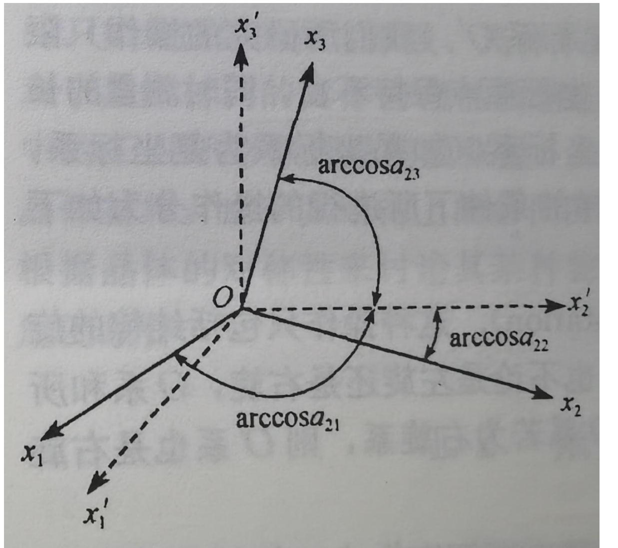


图 1.4 坐标系变换

$$\begin{cases} e_1' = \cos\alpha_1 e_1 + \cos\beta_1 e_2 + \cos\gamma_1 e_3 \\ e_2' = \cos\alpha_2 e_1 + \cos\beta_2 e_2 + \cos\gamma_2 e_3 \\ e_3' = \cos\alpha_3 e_1 + \cos\beta_3 e_2 + \cos\gamma_3 e_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

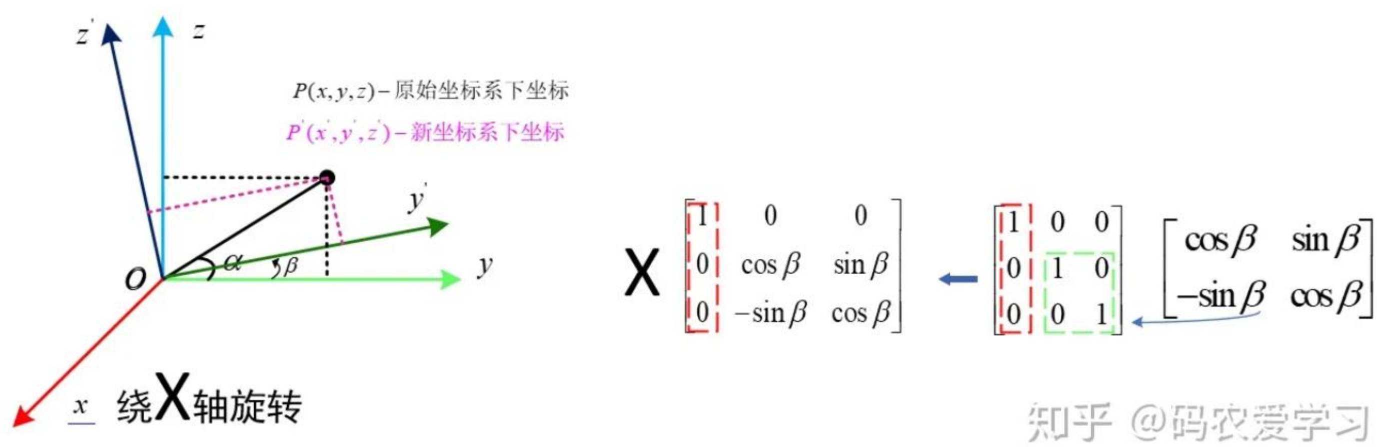
$$(A) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = A^T$

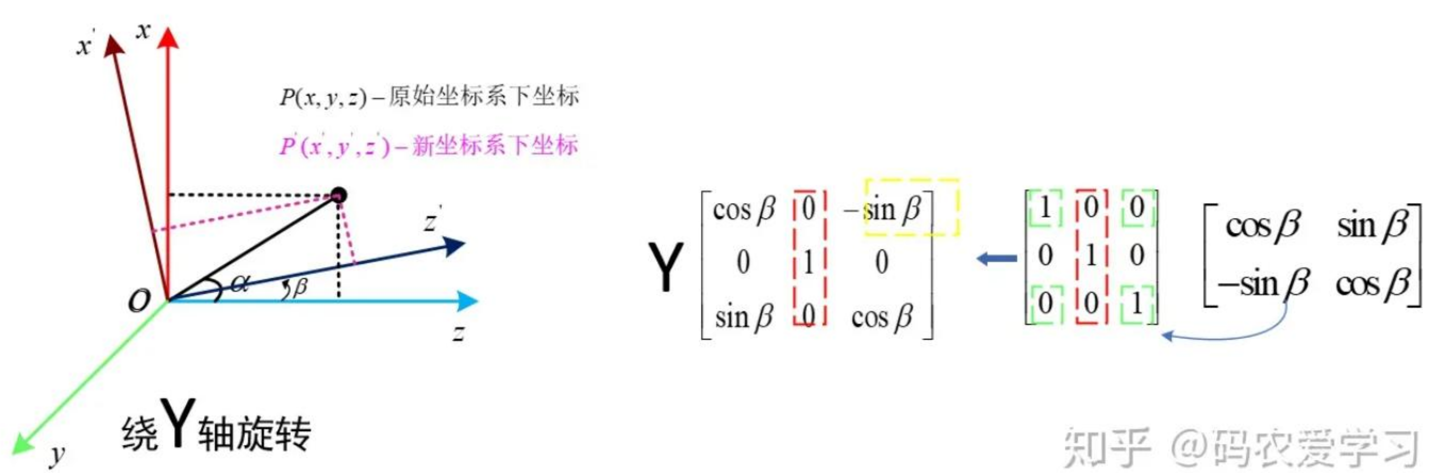
矩阵A称为从O系到O’系的正变换矩阵，
A^T即为从O’系到O系的变换矩阵。

三维空间的坐标旋转

- **绕X轴**

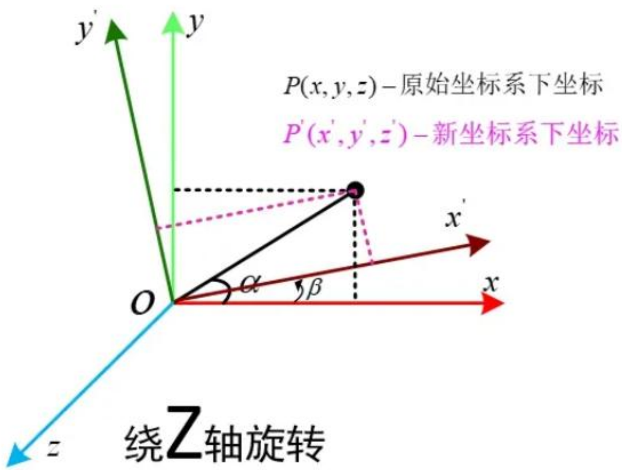


- **绕Y轴**



三维空间的坐标旋转

- **绕Z轴**



$$Z\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

03

端点反射问题

（二）、端点反射

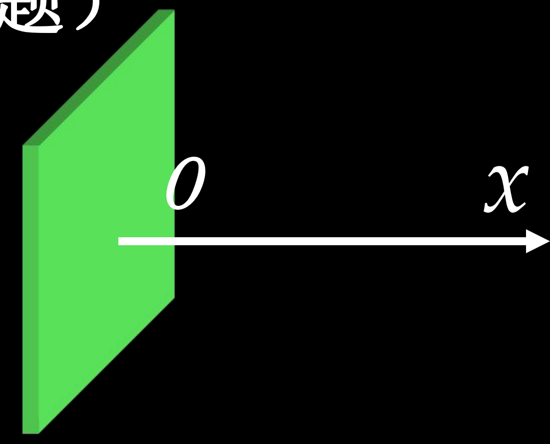
例：求一端固定弦的振动情况（反射波定解问题）

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (0 \le x < \infty)$$

$$u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 \le x < \infty)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \qquad (t > 0)$$



$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (0 \le x < \infty)$$

达朗贝尔公式 $u = f_1(x+at) + f_2(x-at)$

$x < at$ 情况如何？

u在x<0的区域没有定义

对u进行奇延拓！

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= -\varphi(-x), (x<0) \\ \psi(x) &= -\psi(-x), (x<0) \end{aligned}}$$

定解条件‘无限长’确定的通解：

$$\boxed{u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}$$

$$u(-x,t)=\frac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)]-\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$=-\frac{1}{2}[\phi(x-at)+\phi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(-\xi)d(-\xi)$$

$$=-u(x,t)$$

对u进行奇延拓 $\longrightarrow$ u是奇函数

（1）、$x \ge at$, 即 $x - at \ge 0$

$$f_1(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2}$$

$$f_2(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}$$

$$\boxed{u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}$$

与无端点反射时的情况相同，即端点对此区间的解无影响。

（2）、$x \le at$, 即 $x-at \le 0$

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), (x<0)$$
$$\psi(x) = -\psi(-x), (x<0)$$

利用奇延拓条件将$x-at \le 0$转为$at-x \ge 0$

$$u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$
$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{at-x}\psi(\xi)d\xi$$
$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}$$

$$u=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (t\le\frac{x}{a})$$

$$u=\frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \qquad (t\ge\frac{x}{a})$$

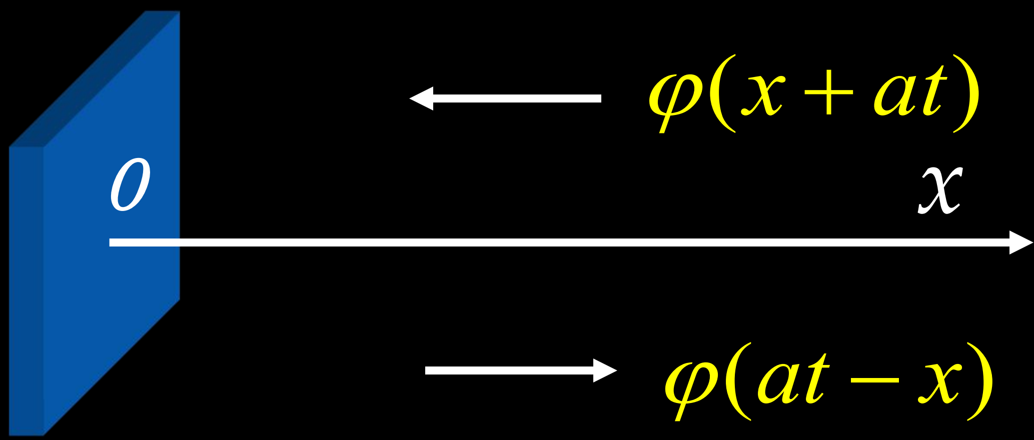
物理意义：

1. $t\le\frac{x}{a}$ 解与达朗贝尔解一致，说明端点的影响未传到。

2. $t\ge\frac{x}{a}$ 为讨论方便计设初速为0 ⇒ $\psi(x)=0$

$$u=\frac{1}{2}\varphi(x+at)-\frac{1}{2}\varphi(at-x)$$

$$u=\frac{1}{2}\varphi(x+at)-\frac{1}{2}\varphi(at-x)$$



波向相位滞后的方向传播。波源最先振动，随后途经各点振动。

$\varphi(x+at)$ 为入射波。

$\varphi(at-x)$ 为反射波。

$$u\big|_{x=0}=\frac{1}{2}\varphi(at)-\frac{1}{2}\varphi(at)=0$$

x =0处为波节。

x =0处入射波与反射波位相相反，有半波损失。

谢谢