数学物理方法 2016-2017 学年度期末考试

【学术部福利】 大梁回忆版

1 复变函数论（本题共 30 分 每小题 5 分）

1.1

把$\frac{(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)^2}{(\cos 4\alpha-i\sin 4\alpha)^3}$（$\alpha$是实常数）用代数式，指数式，三角式表示出来。

1.2

计算$i^{(3-4i)}$

1.3

已知复变函数$f(z)=(5z-2i)^2$；

(1) 求实函数 u 和 v,使得 f(z)=u+iv;

(2) 验证 u 和 v 满足 Cauchy-Riemann 条件

(3) 求$\frac{df}{dz}$

1.4

在z_0=-2，z_0=2 的邻域上，将复变函数$fLz'=\frac{z-2}{z(z+2)}$展开成幂级数，算出收敛半径，指出哪个是 Taylor 展开，哪个是 Laurent 展开。

1.5

计算回路积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos hz^2 + \sin hz^2}{z^3} dz$$

1.6

计算实变函数定积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} dx$$

2 积分变换（本题 10 分，每小题 5 分）

2.1

已知位置的平均值可表示为$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(\mathrm{p})}^{*} i\hbar \frac{d}{dp} \varphi(p)\, dp$

另外$\phi_{(x)}$可以展开为$\phi_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P) e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, dp$

将 p 用$\varphi(p)$表示出来。

2.2 利用 Laplace 变换求解下列方程

$$\ddot{x}(t) + \omega x(t) = C \sin \omega t$$

ω、C为常数

3.数学物理方程（本题共 60 分，每小题 20 分）

3.1

写出三类泛定方程的一般形式和三类边界条件的一般形式，并解释方程的和边界条件的齐次非齐次概念。

3.2

空间有一个均匀球壳，内半径为 a,外半径为 b,(b>a)，内半径 a 的电势分布为$u_0 + u_1 p_1(\cos\theta)$，外半径电势分布为$u_2 p_2(\cos\theta)$，求球壳内电势分布。

3.3

将柱坐标系下的 Laplace 方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

分离变量

（1） 写出上下底面第二类齐次边界条件下的各方程和本征解。

（2） 写出侧面第二类齐次边界条件下的各方程和本征解

（3） 写出（1）(2）情况下的一般的柱内解