

2018-2019 学年第二学期数学物理方法期末考试

回忆版

第一部分：每小题 6 分，共 30 分。

1.1 求 $\frac{(\cos 4\alpha - i \sin 4\alpha)^3}{(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha)^4}$ 的三角式、指数式、标准式。

1.2 $(a + bi)^{c+di}$

1.3 (1) 请推导或写出平面直角坐标系下的柯西-黎曼条件。

(2) 请根据 (1) 中得到的公式推导平面极坐标系下的柯西-黎曼条件。

1.4 已知 $f(z) = \frac{z-1}{z(z-i)}$ 。写出 $f(z)$ 在下列 z_0 处的展开式，判断是常点还是奇点，若为极点，

写出阶数；并判断它是泰勒展开还是洛朗展开，同时求出收敛域。

(1) $z_0 = i$ (2) $z_0 = 1$

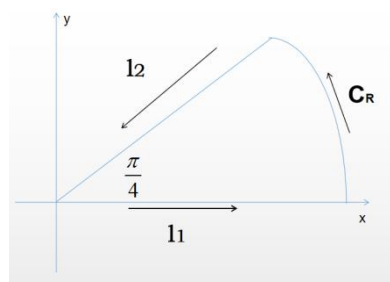
1.5 已知 $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, I_2 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$

有提示如下：①利用公式 $I = I_1 + iI_2 = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ ，②积分区域选择如图所示区域

(1) 写出该区域内的留数定理。

(2) 写出 I_2 上的积分表达式。

(3) 证明积分在 C_R 上的值为 0，即 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$



第二部分：每小题 5 分，共 10 分。

2.1 已知 $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$

(1) 写出 Fourier 变换

(2) 写出像函数表达式

(3) 写出反演公式

2.2 令 $f(t) = \int_0^{+\infty} \sin(tx^2) dx$ ，求出 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

提示：(1) 为计算方便，可把 p 看作正实数。(2) $\sin(tx^2)$ 的拉普拉斯变换像函数为 $\frac{x^2}{p^2 + x^4}$

第三部分：每小题 20 分，共 60 分。

3.1 写出三类泛定方程及三类边界条件，并解释方程和边界条件齐次与非齐次的概念。

3.2 已知 $u_{tt} - a^2 \Delta u + \omega^2 u = 0$ ，球函数下

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = g(\theta) e^{i\omega t}$ $u \Big|_{r=0}$ 有限

提示：定义在 $(0, \pi)$ 上的函数 $f(\theta)$ 可用勒让德多项式分解为

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l P_l(\cos \theta) \quad C_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

(1) 试用分离变数法求出 $u(\rho, \varphi, \theta, t)$ 几个变数的常微分方程。

(2) 写出问题的解

3.3 已知 $u_t - a^2 \nabla^2 u = 0$ ，柱函数下 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(1) 分离变量

(2) 解出 $T(t)$ ，利用自然边界条件解出 $\Phi(\varphi)$

(3) 若上下底面为第二类齐次边界条件，写出解

(4) 若侧面为第一类齐次边界条件，写出解

(5) 若边界条件为 $u \Big|_{r=r_0} = g(\theta, \varphi)$ ，写出一般的柱内解。

致谢

感谢曹远帆、汪芷砚、王博斌同学对此试卷回忆工作的支持！

The end

回忆人：陶茂翔
2019 年 6 月 15 日