数理方法习题课

2023/4/26

01

期中考试

期中考试

分数段	人数
0-59	8
60-69	6
70-79	11
80-89	10
90-99	10

期中考试

求 $\dfrac{\sin iz}{\sinh z},\dfrac{\cos iz}{\cosh z},\dfrac{\tan iz}{\tanh z},\dfrac{\cot iz}{\coth z},z\in C$ 的取值、奇点和奇点类型。

解：$\sin iz=\dfrac{1}{2i}(e^{-z}-e^{z}),\quad \sinh z=\dfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}),\quad \sin iz=i\sinh z$

$\cos iz=\dfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}),\quad \cosh z=\dfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}),\quad \cos iz=\cosh z$

$\tan iz=\dfrac{\sin iz}{\cos iz},\quad \tanh z=\dfrac{\sinh z}{\cosh z},\quad \tan iz=\dfrac{i\sinh z}{\cosh z}=i\tanh z$

$\cot iz=\dfrac{\cos iz}{\sin iz},\quad \coth z=\dfrac{\cosh z}{\sinh z},\quad \cot iz=\dfrac{\cosh z}{i\sinh z}=-i\coth z$

即：$\dfrac{\sin iz}{\sinh z}=i,\quad \dfrac{\cos iz}{\cosh z}=1,\quad \dfrac{\tan iz}{\tanh z}=i,\quad \dfrac{\cot iz}{\coth z}=-i$

极点类型：都是可去奇点

$\sinh z=\dfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})=0\rightarrow e^{2z}=1,z=ik\pi$

$\cosh z=\dfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})=0\rightarrow e^{2z}=-1,z=i\dfrac{\pi}{2}+ik\pi$

$\dfrac{\tan iz}{\tanh z}=\dfrac{\sin iz}{\cos iz}/\dfrac{\sinh iz}{\cosh iz}$，需考虑$\sinh iz=0,\cos iz=0,\cosh iz=0$

奇点为$z=\dfrac{ik\pi}{2}$

$\dfrac{\cot iz}{\coth z}=\dfrac{\cos iz}{\sin iz}/\dfrac{\cosh iz}{\sinh iz}$，需考虑$\sin iz=0,\sinh iz=0,\cosh iz=0$

奇点为$z=\dfrac{ik\pi}{2}$

算出比值4*5=20分
判定可去奇点2分
每个式子的奇点都2*4分

未考虑多值函数-2分
未考虑tanhz,taniz本身奇点-2分

期中考试

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mxdx}{(x^2+a^2)^2}$$ $m<0$ $a>0$和$a<0$的结果一样吗?

本题属于留数定理计算定积分类型3：

$\int_0^{\infty}F(x)\cos mxdx, F(x)$偶函数;$\int_0^{\infty}G(x)\sin mxdx$，$G(x)$奇函数。

条件：$F(x)$，$G(x)$实轴上无奇点，上半平面除有限极点外解析；

z在上半平面或实轴上$\rightarrow 0$时$F(z)$，$G(z)$一致趋于0。

由约当定理，得当$m>0$时，

$$\begin{cases}\int_0^{\infty}F(x)\cos mxdx=\pi i\{F(z)e^{imz}\text{在上半平面所有奇点留数和}\}\\ \int_0^{\infty}G(x)\sin mxdx=\pi\{G(z)e^{imz}\text{在上半平面所有奇点留数和}\}\end{cases}$$

约当引理(P60)：m为正数，C_R是以原点为圆心而位于上半平面的半圆，设当z在上半平面及实轴上→∞时F(z)一致→0，

则有 $\lim_{R\rightarrow\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz=0$

若m<0,则约当引理为：$\lim_{R\rightarrow\infty}\int_{C'_R}F(z)e^{imz}dz=0$

C'_R为C_R对实轴的映像。

期中考试

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mxdx}{(x^2+a^2)^2}$$ $m<0$ $a>0$和$a<0$的结果一样吗?

(一) $m<0$转为$|m|>0$,再利用$|m|=-m$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mxdx}{(x^2+a^2)^2}=-\int_0^{\infty}\frac{x\sin|m|xdx}{(x^2+a^2)^2},\quad (|m|>0)$$

$$G(x)=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$I=-\pi\operatorname{Res}(G(x)e^{i|m|x})$$

$x^2+a^2=0\Rightarrow x=\pm|a|i$,其中$+|a|i$在上半平面，为二阶奇点。

$$\operatorname{Res}(|a|i)=\lim_{z\to|a|i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}[(z-|a|i)^2\frac{z}{(z^2+a^2)}e^{i|m|z}]=\lim_{z\to|a|i}\frac{d}{dz}[\frac{z}{(z+|a|i)^2}e^{i|m|z}]$$

$$=\lim_{z\to|a|i}(-\frac{2ze^{i|m|z}}{(z+|a|i)^3}+\frac{(i|m|z+1)e^{i|m|z}}{(z+|a|i)^2})=\frac{|m|}{4|a|}e^{-|m||a|}$$

$$I=-\frac{\pi|m|}{4|a|}e^{-|m||a|}$$

$$a>0,|a|=a,|m|=-m,I=-\frac{\pi|m|}{4|a|}e^{-|m||a|}=\frac{\pi m}{4a}e^{ma}$$

$$a<0,|a|=-a,|m|=-m,I=-\frac{\pi|m|}{4|a|}e^{-|m||a|}=-\frac{\pi m}{4a}e^{-ma}$$

则原式的值为$\begin{cases}-\dfrac{\pi m}{4a}e^{-ma} & a<0\\ \dfrac{\pi m}{4a}e^{ma} & a>0\end{cases}$

思路正确20分(积分-带入公式-计算留数)
留数定理公式3分
考虑到m<0与a>0,a<0不同3分
计算结果4分

期中考试

$g(x)=A\exp[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}]$ A为幅度，σ为方差，x_0为平均值， 证明高斯函数的傅里叶变换仍是高斯函数，并分析傅里叶变换前后方差，幅度和平均值的变换关系。

解：对$g(x)$做傅里叶变换：

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp[(-\frac{(\xi-x_0)^2}{2\sigma^2})]\exp(-i\omega\xi)d\xi$$

设$\xi-x_0$=t,则$\xi=t+x_0,d\xi=dt$

$$\text{则}F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp[(-\frac{t^2}{2\sigma^2})]\exp[-i\omega(t+x_0)]dt$$

$$=\frac{A}{2\pi}\exp(-i\omega x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[(-\frac{t^2}{2\sigma^2})]\exp[-i\omega t]dt$$

$$=\frac{A}{2\pi}\exp(-i\omega x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(t^2+2i\sigma^2\omega t-\sigma^4\omega^2)]\exp[-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}]dt$$

$$=\frac{A}{2\pi}\exp(-i\omega x_0)\exp[-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}]\sqrt{2\pi}\sigma$$

$$=\frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp(-i\omega x_0)\exp[-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}]$$

$$=\frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{\sigma^2}{2}(\omega^2+\frac{i2x_0}{\sigma^2}\omega^2+(\frac{ix_0}{\sigma^2})^2)-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}]$$

$$=\frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2})\exp[-\frac{\sigma^2}{2}(\omega+\frac{ix_0}{\sigma^2})^2]$$

g(x)经傅里叶变换后仍是高斯函数。

方差：$\sigma\rightarrow\frac{1}{\sigma}$

幅度：$A\rightarrow\frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2})$

平均值：$x_0\rightarrow-\frac{ix_0}{\sigma^2}$

思路正确30分(傅里叶积分公式-配方-凑高斯型积分)
傅里叶积分公式4分
方差幅度平均值一个2分(2*3=6)

02

作业题讲解

知识点总结

拉普拉斯变换

正变换：$\overline{f}(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \overline{f}(p)e^{pt}dp$

常使用定义进行正变换，逆变换一般采用凑出特殊形式(如指数，分式，三角函数)的变换结果进行计算。

2. 一些特殊值

$L[1]=\frac{1}{p}$ (Rep>0) $L[1]=\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}$

$L[t]=\frac{1}{p^2}$ (Rep>0) $L[t]=\int_0^\infty te^{-pt}dt=\int_0^\infty -\frac{1}{p}t\,de^{-pt}=-\frac{1}{p}[te^{-pt}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-pt}dt]=\frac{1}{p^2}$

$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}$ $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt=n!$ 分部积分

位移定理(异号)

$L[e^{st}]=\frac{1}{p-s}$ $L[t\cdot e^{st}]=\frac{1}{(p-s)^2}$ · $L[e^{st}]=\int_0^\infty e^{-(p-s)t}dt=\frac{1}{p-s}$

$L[t^ne^{st}]=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$ (Rep>Res)

$L[tf(t)]=-\frac{dF(p)}{dp}$ $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ $\frac{dF(p)}{dp}=\int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt=-L[tf(t)]$

$L[t^nf(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n}$ (对e^{-pt}中的p求n次) 注意$(-1)^n$

延迟定理(同号)

$L[H(t-a)]=\frac{e^{-ap}}{p}$ $L[H(t)]=\frac{1}{p}\Rightarrow L^{-1}[\frac{1}{p}]=H(t)$

重要的四个分式型

分式中用来配方，反实化简 分子有w

$L[\sin wt]=\frac{w}{p^2+w^2}$ $\sin wt=\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}$ $L[\sin wt]=\frac{1}{2i}L[e^{iwt}-e^{-iwt}]=\frac{1}{2i}[\frac{1}{p-iw}-\frac{1}{p+iw}]=\frac{w}{p^2+w^2}$ 异号

$L[\cos wt]=\frac{p}{p^2+w^2}$ $\cos wt=\frac{1}{2}(e^{iwt}+e^{-iwt})$ $L[\cos wt]=\frac{1}{2}L[e^{iwt}+e^{-iwt}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{p-iw}+\frac{1}{p+iw}]=\frac{p}{p^2+w^2}$

$L[\sinh wt]=\frac{w}{p^2-w^2}$ $\sinh wt=\frac{1}{2}(e^{wt}-e^{-wt})$ $L[\sinh wt]=\frac{1}{2}[\frac{1}{p-w}-\frac{1}{p+w}]=\frac{w}{p^2-w^2}$

$L[\cosh wt]=\frac{p}{p^2-w^2}$ $\cosh wt=\frac{1}{2}(e^{wt}+e^{-wt})$ $L[\cosh wt]=\frac{1}{2}[\frac{1}{p-w}+\frac{1}{p+w}]=\frac{p}{p^2-w^2}$

3. 拉普拉斯变换的性质.

1. 线性定理.

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1\bar{f}_1(p) + c_2\bar{f}_2(p)$$

2. 导数定理 将求导转成乘法

$$L[f'(t)] = p\bar{f}(p) - f(0)$$

证: $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}df(t) = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n\bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

补: 像的导数

$$\bar{f}^{(n)}(p) = L[(t)^n f(t)](-1)^n$$

3. 积分定理 将积分转成除法.

$$L\left[\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}\Psi(p)$$

$\int_0^\infty \int_0^t \psi(\tau)d\tau\, e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \int_0^t \psi(\tau)d\tau\, de^{-pt}$

补: 像的积分

$$\int_p^{\infty}\bar{f}(p)dp = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

4. 相似定理

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$$

换元. $at = t'$ $t = \frac{t'}{a}$. $e^{-pt} \to e^{-\frac{t'}{a}\cdot p}$

5. 延迟定理

$$L[f(t-t_0)] = e^{-pt_0}\bar{f}(p)$$

$t - t_0 = t'$ $t = t' + t_0$ $e^{-pt} \to e^{-p(t'+t_0)} = e^{-pt'}e^{-pt_0}$

6. 位移定理 异号

$$L[e^{-\lambda t}f(t)] = \bar{f}(p+\lambda)$$

$e^{-\lambda t}\cdot e^{-pt} = e^{-(p+\lambda)t} \to \bar{f}(p+\lambda)$

7. 卷积定理.

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \bar{f}_1(p)\,\bar{f}_2(p)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

<注意积分上下限变化, 与傅里叶时 卷积定理的积分上限不同> $\int_{-\infty}^{\infty}$

第七次作业

$$\bar{j}(p)=\frac{E}{Lp^2+Rp+\frac{1}{c}}$$ 的原函数

$$\bar{j}(p)=\frac{E}{Lp^2+Rp+\frac{1}{c}}$$

配方

原式 $=\frac{E}{L}\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}}$

$=\frac{E}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}$

下面判断 $\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2} \gtrless 0$

① $\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}>0 \Rightarrow R^2-\frac{4L}{c}<0$

$\sin\omega t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$

原式 $=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}{(p+\frac{R}{2L})^2+\left(\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)^2}$

$\rightleftharpoons \boxed{\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin\omega t\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}}$ $\left(\omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)$

② $R^2-\frac{4L}{c}>0$

$\operatorname{sh}\omega t\, e^{-\frac{R}{2L}t}$

原式 $=\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}{(p+\frac{R}{2L})^2-\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}\right)^2}$

$\rightleftharpoons \boxed{\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}\operatorname{sh}\omega t\, e^{-\frac{R}{2L}t}}$ $\left(\omega=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)$

③ $R^2-\frac{4L}{c}=0$

原式 $=\frac{E}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2}\rightleftharpoons \boxed{\frac{E}{L}t\,e^{-\frac{R}{2L}t}}$

第七次作业

7. 求 $\overline{T}(p)=\dfrac{1}{p^2+\omega^2a^2}\overline{g}(p)$ 的原函数，$\overline{g}(p)$ 是某个已知的 $\dot{g}(t)$ 的像函数.

$$\frac{1}{p^2+\omega^2a^2}\rightleftarrows\frac{1}{\omega a}\sin\omega at$$

由卷积定理

$$T(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{\mathrm{t}}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega a}\int_0^t\sin\omega a(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

第七次作业

已知$\bar{y}(p)=\dfrac{(p-1)^{\lambda}}{p^{\lambda+1}}$，$\lambda$怎样取值原函数为多项式？

$$L(t^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

若要原函数为多项式，则$\bar{y}(p)$需能分解为$\dfrac{1}{p^{n+1}}$的线性组合。

即只有λ取正整数时，原函数为多项式。

当λ取正整数时，

$$(p-1)^{\lambda}=\sum_{i=0}^{\lambda}C_{\lambda}^{\,i}p^{i}(-1)^{\lambda-i}$$

$\bar{y}(p)=\dfrac{(p-1)^{\lambda}}{p^{\lambda+1}}=\displaystyle\sum_{i=0}^{\lambda}C_{\lambda}^{\,i}\frac{1}{p^{\lambda+1-i}}(-1)^{\lambda-i}$为$\dfrac{1}{p^{n+1}}$的线性组合，原函数为多项式。

第七次作业

4. 设地面有一震动，其速度 $v = \mathrm{H}(t)$，地震仪中的感生电流 j 遵守规律

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} + 2cj + c^2\int_0^t j\mathrm{d}t = \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

这电流通过检流计，使检流计发生偏转．偏转 y 遵守规律

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c^2y = \mu j.$$

求解偏转 y 的变化情况 $y(t)$.

$$\begin{cases}\frac{dj}{dt}+2cj+c^2\int_0^t j\,dt=\lambda\frac{dv}{dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}+c^2y=\mu j\end{cases} \Rightarrow y(t)?$$

偏转y

初始条件.

$$\begin{cases} j(0)=0\\ y(0)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1]=\mathcal{L}[H(t)]=\frac{1}{p}=\bar{v}$$

对方程组进行Laplace变换.

$$\begin{cases} p\bar{j}+2c\bar{j}+\frac{c^2}{p}\bar{j}=\lambda p\bar{v}\\ p^2\bar{y}+2cp\bar{y}+c^2\bar{y}=\mu\bar{j}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(p+2c+\frac{c^2}{p})\bar{j}=\lambda\\ (p^2+2cp+c^2)\bar{y}=\mu\bar{j}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\bar{j}=\frac{\lambda p}{p^2+2cp+c^2}=\frac{\lambda p}{(p+c)^2}\\ \bar{y}=\frac{\mu\lambda p}{(p^2+2cp+c^2)^2}\quad\frac{\mu\lambda p}{(p+c)^4}\end{cases}$$

$$\frac{p}{(p+c)^4}=\frac{1}{(p+c)^3}\,\frac{p}{(p+c)}=\frac{1}{(p+c)^3}\left(1-\frac{c}{p+c}\right)$$

$$=\frac{1}{(p+c)^3}-\frac{c}{(p+c)^4}$$

$$\frac{1}{2}t^2e^{-ct}\qquad\qquad\frac{c}{6}t^3e^{-ct}$$

即 $y(t)=\frac{\mu\lambda}{2}e^{-ct}\left(t^2-\frac{c}{3}t^3\right)$

第七次作业

9. 埃尔米特方程$\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$里的$\lambda$应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式?

利用级数法进行求解

设该方程的解$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$

带入方程$y''-2ty'+\lambda y=0$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n,\ y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$$

方程化为$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_n t^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$

t^n系数:$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n-\lambda)a_n,(n>2)$

若解为多项式，则只有有限项，需截断

y为m阶多项式，$a_{m+2}=0,a_n\neq 0\rightarrow\lambda=2m$

即λ为偶数

偶数阶的厄米多项式只有偶数项，为偶函数；奇数阶的厄米多项式只有奇数项，为奇函数。

谢谢