南开大学 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

1. (1) $|z|\le 2$ $\quad |x+iy|\le 2$ $\quad \sqrt{x^2+y^2}\le 2$ 即 $x^2+y^2\le 4$

(2) $|z-a|=|z-b|$ 设 $z=x+iy$ $\quad a=a_1+ia_2$ $\quad b=b_1+ib_2$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$

$$(2y-a_1-b_1)(b_1-a_1)=(2x-a_2-b_2)(a_2-b_2)$$

$$\therefore \frac{y-\frac{a_2+b_2}{2}}{x-\frac{a_1+b_1}{2}}=\frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}$$

为过 a, b 中点且与 a b 连线垂直的直线

(4) $|z|+\mathrm{Re}\,z\le 1$

$x^2+y^2\le(1-x)^2$ 即 $y^2\le 1-2x$

表示抛物线 $y^2=1-2x$ 即及内部

(6) $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$ 令 $z=x+iy$

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{-2xi}{x^2+(y+1)^2}=z'$$

$\therefore$ 原式即要求 $0<\arg z'<\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\begin{cases}\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0\\ 0<\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}<1\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x<0\\ x^2+y^2-1>0\\ x^2+y^2+2x-1>0\end{cases}$$

$\therefore x<0 \quad (x+1)^2+y^2>2$

表示左半平面 $x<0$，但除去圆周 $(x+1)^2+y^2=2$ 及其内部

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

∵这是一个恒等式，证明如下：

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

表示复平面上 两平行四边形两邻边对角线平方和等于两邻边平方和的二倍

2. (1) i 本身为代数式

三角式 $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

指数式：$z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

(2) -1 本身为代数式

三角式 $z=\cos\pi+i\sin\pi$

指数式：$z=e^{i\pi}$

(3) $1+i\sqrt{3}$ 为代数式

三角式 $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

指数式 $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(7) $\frac{1-i}{1+i}$ 代数式：$z=-i$

三角式：$z=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$

指数式：$z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

3. (1) $\sqrt{a+ib}=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sqrt{a+ib}=\sqrt[4]{a^2+b^2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})=\sqrt[4]{a^2+b^2}[\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}})$

$=\sqrt[4]{a^2+b^2}[\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})}+i\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})}]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$

(2) $\sqrt[3]{i}$ $i=\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$

$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3})]$

即 $\sqrt[3]{i}=e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3})}$, $n=0,1,2$

(3) i^i $\because i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$

$\therefore i^i = [e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}]^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}$, $n=0,\pm1,\pm2\cdots$

(7) $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi$

$= \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}[\sin(n+\frac{1}{2})\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}]$

(8) $\sin\varphi+\cdots+\sin n\varphi = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\varphi]$

复变函数

2. (1) $\sin(a+ib) = \frac{1}{2i}[e^{i(a+ib)} - e^{-(a+ib)i}] = \frac{1}{2i}[e^{-b}(\cos\alpha+i\sin\alpha)] - e^{-b}(\cos\alpha-i\sin\alpha)]$

$= \frac{1}{2}[e^{-b}\sin\alpha+e^{b}\sin\alpha+i(e^{b}\cos\alpha-e^{-b}\cos\alpha)] = \frac{1}{2}[(e^{b}+e^{-b})\sin\alpha]+\frac{i}{2}(e^{b}-e^{-b})\cos\alpha$

(3) $\ln(-1) = \ln e^{i(\pi+2n\pi)} = i(2n+1)\pi$, $n=0,\pm1,\pm2\cdots$

(5) $\cos ix = \frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x$

(7) $\mathrm{ch}\,ix = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$

(9) $|e^{iaz-ib\sin z}|$ $\because \sin z = \sin(x+iy) = \frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x]$

$\therefore$ 原式 $= |e^{ia(x+iy)-ib\frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x]}|$

$= |e^{-ay}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x-\frac{bi}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x]}|$

$= |e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x]}|$

$= e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x} = e^{-ay+b\,\mathrm{sh}\,y\cos x}$

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

3. 求解 $\sin z=2$

$\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=2$ 即 $e^{iz}-e^{-iz}=4i$

亦即 $(e^{iz})^2-4i(e^{iz})-1=0$

$e^{iz}=2i\pm\sqrt{(2i)^2+1}=(2\pm\sqrt{3})i$

$\therefore iz=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln i=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln(e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)})$

$\cancel{\ln(2i}=\ln(2\pm\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$

$\therefore z=\frac{1}{i}[\ln(2\pm\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)]$

$=\frac{\pi}{2}+2n\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$

又 $\because \ln(2\pm\sqrt{3})=-\ln(2\mp\sqrt{3})$

$\therefore z=\frac{\pi}{2}+2n\pi\pm i\ln(2\mp\sqrt{3})$, $n=0,1,2\cdots$