第 1 题中（1），（3）；第 4 题，第 6 题，第 7 题，第 9 题。

1) shωt, chωt

$\varphi(t) = sh\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

$\varphi(t) = ch\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2}$

(2) $e^{-\lambda t}\sin\omega t$, $e^{-\lambda t}\cos\omega t$

$\varphi(t) = e^{-\lambda t}\sin\omega t = \frac{e^{-\lambda t}}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega} - \frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right) = \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$

$\varphi(t) = e^{-\lambda t}\cos\omega t = \frac{e^{-\lambda t}}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega} + \frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right] = \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$

1. (2) $\bar{y}(p) = \frac{3p}{p^2-1}$

$\frac{3p}{p^2-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\right) = \frac{3}{2}(e^{-t} + e^{t}) = 3\,ch\,t$

(4) $\bar{y}(p) = \frac{2}{(p-1)^5}$ $\quad \frac{2}{(p-1)^{4+1}} = \frac{2}{4!}t^4e^t$

2. 求 $j(p) = \frac{E}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}$ 的原函数

$j(p) = \frac{E}{L\left(p+\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)\left(p+\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)}$

(1) $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$, $j(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2} = \frac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t} = j(t)$

(2) $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$, $j(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2 - (\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC})}$

$= \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}} \cdot e^{-\frac{Rt}{2L}}\, sh\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\,t$

(3) 如果 $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$, $j(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})} = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t$

第 1 题中（1），（3）；第 4 题，第 6 题，第 7 题，第 9 题。

5. 求 $j(p)=\frac{E_0 w}{(p+\frac{1}{RC})(p^2+w^2)}$ 的原函数

$j(p)=\frac{E_0 wp}{R(p+\frac{1}{RC})(p^2+w^2)}=\frac{Ap}{p^2+w^2}+\frac{B}{p^2+w^2}+\frac{D}{p+\frac{1}{RC}}$

可以求出：$A=\frac{E_0}{R^2wC+\frac{1}{Cw}}$. $B=\frac{E_0}{R}\left(\frac{w}{1+\frac{1}{R^2C^2w^2}}\right)$ $D=\frac{-E_0}{R^2Cw+\frac{1}{Cw}}$

$\therefore j(p)=\frac{E_0}{R^2Cw+\frac{1}{Cw}}\frac{p}{p^2+w^2}+\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{R^2C^2w^2}}\right)\frac{w}{p^2+w^2}-\frac{E_0}{R^2C^2w+\frac{1}{Cw}}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{CR}}$

$=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2w^2}}\left(\frac{pw}{p^2+w^2}+\frac{p}{Cw(p^2+w^2)}\right)-\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2w^2}}\cdot\frac{1}{Cw}\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}$

$j(t)=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2w^2}}\left(R\sin wt+\frac{1}{Cw}\cos wt\right)-\frac{E_0/Cw}{R^2+\frac{1}{C^2w^2}}e^{-\frac{t}{RC}}$

7. 求 $\bar{T}(p)=\frac{\bar{g}(p)}{p^2+w^2a^2}$ 的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知 $g(t)$ 的像函数

解：设 $\bar{f}(p)=\frac{1}{p^2+w^2a^2}$，则 $f(t)=\frac{\sin wat}{wa}=\frac{1}{wa}\cdot\frac{1}{2i}(e^{iwat}-e^{-iwat})$

根据卷积定理：因为 $\bar{f}(p)=f(t)$，$\bar{g}(p)=g(t)$

$\therefore T(t)=\bar{f}(p)\bar{g}(p)=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$

$=\frac{1}{wa}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(t)[e^{iwa(t-\tau)}-e^{-iwa(t-\tau)}]d\tau$

8. 求 $\bar{T}(p)=\frac{1}{p^2+w^2a^2}\bar{g}(p)$ 的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知 $g(t)$ 的像函数

解：设 $\bar{f}(p)=\frac{1}{p+w^2a^2}$，则 $f(t)=e^{-w^2a^2t}$

根据卷积定理，$\bar{f}(p)=f(t)$，$\bar{g}(p)=g(t)$

$\therefore T(t)=\bar{f}(p)\bar{g}(p)=\int_0^t g(t)e^{-w^2a^2(t-\tau)}d\tau$

第1题中（1），（3）；第4题，第6题，第7题，第9题。

10. 已知 $\bar{y}(p) = \frac{(p-1)^\lambda}{p^{\lambda+1}}$，问 λ 取何值，原函数才是多项式

当 λ 为正整数，$\bar{y}(p) = \frac{(p-1)^\lambda}{p^{\lambda+1}} = \frac{1}{p^{\lambda+1}}[p^\lambda - \lambda p^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} p^{\lambda-2} - \cdots$

$+ (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} p^{\lambda-k} + \cdots + (-1)^\lambda]$

$= \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{p^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} \cdot \frac{1}{p^2} - \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} \frac{(-1)^k}{p^{k+1}}$

$+ \cdots + \frac{(-1)^k}{p^{\lambda+1}}$

因此我们可以知道 $\bar{y}(p)$ 为 $\frac{1}{p}$ 的多项式，

相应的原函数亦必为多项式

1. $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 6e^{-t}$

$y(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = 0$

解. 对该方程进行拉普拉斯变换

得 $\bar{y}(p) = \frac{6}{(p+1)^4}$，

再求出 $\bar{y}(p)$ 的原函数为 $y(t) = t^3 e^{-t}$ 为该常微分方程的解.

页面: 4/6 节: 1/1 设置值: 2.5厘米 行: 1 列: 1 字数: 1738 拼写检查 · 内容检查 · 兼容模式 缺失字体

第 6 题,

搜索

年 月 日 第 页

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t} \\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t} \end{cases}$ $\begin{cases} y(0)=1 \\ z(0)=3 \end{cases}$

对该方程进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} (p+2)\bar{y}(p)+2\bar{z}(p)=\dfrac{10}{p-2}+1=\dfrac{p+8}{p-2} \\ (p+1)\bar{z}(p)-2\bar{y}(p)=\dfrac{7}{p-2}+3=\dfrac{3p+1}{p-2} \end{cases}$$

$$\bar{y}(p)=\frac{\begin{vmatrix} (p+8)/(p-2) & 2 \\ (3p+1)/(p-2) & p+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{p-2}$$

$$\bar{z}(p)=\frac{\begin{vmatrix} p+2 & (p+8)/(p-2) \\ -2 & (3p+1)/(p-2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{p-2}$$

再求出$\bar{y}(p)$和$\bar{z}(p)$的原函数 $y(t)=e^{2t}$, $z(t)=3e^{2t}$

为该常微分方程的解

4. $\frac{dj}{dt}+2cj+c^2\int_0^t j\,dt=\lambda\frac{dU}{dt}$　　$\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}+c^2y=\mu j$

其中 $j(0)=0$　$y(0)=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0$

$dv=H(t)=\frac{1}{p}$　$\therefore \frac{dH}{dt}=1$

对上式方程组进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}(p+2c+\frac{c^2}{p})\bar{j}=\lambda\\(p^2+2cp+c^2)\bar{y}(p)=\mu\bar{j}(p)\end{cases}\qquad \bar{j}(p)=\frac{\lambda p}{p^2+2cp+c^2}$$

$$\bar{y}(p)=\frac{\mu\bar{j}(p)}{p^2+2cp+c^2}=\frac{\mu\lambda p}{(p^2+2cp+c^2)^2}=\frac{\mu\lambda p}{(p+c)^4}$$

再求出 $\bar{y}(p)$ 的原函数：$y(t)=\frac{1}{2}\lambda\mu e^{-ct}(t^2-\frac{c}{3}t^3)$

6. 求解 $\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{\pi^2a^2T}{l^2}=A\sin wt$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$

对该方程进行拉普拉斯变换后得

$$p^2\bar{T}(p)+\frac{\pi^2a^2}{l^2}\bar{T}(p)=A\frac{w}{p^2+w^2}$$

$$\bar{T}(p)=A\frac{w}{p^2+w^2}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{\pi^2a^2}{l^2}}$$

然后求出 $\bar{T}(p)$ 的原函数为

$$T(t)=\frac{lA}{\pi a}\cdot\frac{1}{w^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(w\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin wt\right)$$

7. 求解 $\frac{d^2T}{dt^2}+w^2a^2T=g(t)$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$，$g(t)$ 为某个已知函数

对该方程进行拉普拉斯变换后得：

$$p^2\bar{T}(p)+w^2a^2\bar{T}(p)=\bar{g}(p)$$

$$\bar{T}(p)=\frac{1}{p^2+w^2a^2}\bar{g}(p)$$

得出原函数为 $T(t)=\frac{1}{wa}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(\tau)\left[e^{iwa(t-\tau)}-e^{-iwa(t-\tau)}\right]d\tau$

9. 埃尔米特方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$，里的λ值应取怎样数值才可能使方程的解为多项式

$$2P\frac{d\bar{y}(P)}{dP}+(P^2+2+\lambda)\bar{y}(P)=Py(0)+y'(0)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dP}+\frac{P^2+2+\lambda}{2P}\bar{y}(P)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0)$$

$$\bar{y}(P)=e^{-\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0)\right]e^{\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP}dP\right\}$$

$$=e^{-\frac{P^2}{4}}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{y'(0)}{2P}\right]e^{-\frac{P^2}{4}}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}dP\right\}$$

$$=e^{-\frac{P^2}{4}}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-\frac{P^2}{4}}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\times\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{y'(0)}{2P}\right]dP$$

记 $\frac{y(0)}{2}=C_1$，$\frac{y'(0)}{2}=C_2$

则 $\bar{y}(P)=e^{-\frac{P^2}{4}}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-\frac{P^2}{4}}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\cdot(C_1+\frac{C_2}{P})dP$

(i) 如果 $\frac{\lambda}{2}$ 是偶数，可选 $C_1\neq0$，$C_2=0$ 一次又一次的分部积分

可得 $\bar{y}(P)$ 为 $\frac{1}{P}$ 的多项式，相应的原函数必亦为多项式

(ii) 如 $\frac{\lambda}{2}$ 是奇数，可选 $C_2\neq0$，$C_1=0$ 亦可得多项式

(iii) 如 $\frac{\lambda}{2}$ 不是整数，则不可能得到多项式