“第五章 留数定理” 作业题

第71页（第三版） **第55页**（第四版） **第50页**（第五版）：

第1题中（1），（2），（3），（5），（9），（10）；

第2题中（1），（4）；

第3题；

第81页（第三版） **第63页**（第四版） **第57页**（第五版）：

第1题中（4），（5），（7），（8）；

第2题中（4），（6）；

第3题中（1），（2），（7），（8）。

第二部分 积分变换

“第一章 付里叶(Fourier)变换”作业题

第91页（第三版） **第72页**（第四版） **第65页**（第五版）：

第2题；第3题；第4题中（2），（4）；第5题中（2）；第6题中（1）。

第103页（第三版） **第81页**（第四版） **第73页**（第五版）：

第1题；第3题；第5题。

知识总结

一、留数定理：——P52

设函数 $f(z)$在回路 l 所围区域 B上除有限个孤立奇点b_1，b_2，…，b_n外解析，在闭区域$\overline{B}$上除b_1，b_2，…，b_n外连续，则$f(z)$沿l正向积分$\oint_l f(z)dz$之值等于$f(z)$在l所围区域内各奇点的留数和的$2\pi i$倍.

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res} f(b_j)$$

注意：左边的积分是沿l的正向进行的；

右边的奇点是指l所围区域内的，并非是$f(z)$所有的奇点。

二、计算留数

各孤立奇点留数的计算公式

奇点类型		$\operatorname{Res} f(z_0)$
可去奇点		0
m阶极点		$\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$
一阶极点	普遍公式	$\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$
一阶极点	$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0$ $Q'(z_0)\neq 0$	$\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
本性奇点		在$0<\lvert z-z_0\rvert<R$展开$f(z)$得 $\operatorname{Res} f(z_0)=a_{-1}$

三、极点阶数判定

法一 $\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)] = a_{-m}$ = 非零的有限值

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)] = \begin{cases} 0 & \text{把极点阶数估计得过高 } (n>m) \\ a_{-m} & n\text{就是极点的阶数 } (n=m) \\ \infty & \text{把极点阶数估计得过低 } (n<m) \end{cases}$$

法二 零点和极点的关系

若$z=z_0$是 $f(z)$的m阶零点，则$z=z_0$必是$\dfrac{1}{f(z)}$的m阶极点。

知识总结

“第五章 留数定理”作业题

第71页（第三版） 第55页（第四版） 第50页（第五版）：

第1题中（1），（2），（3），（5），（9），（10）；

第2题中（1），（4）；

第3题；

第81页（第三版） 第63页（第四版） 第57页（第五版）：

第1题中（4），（5），（7），（8）；

第2题中（4），（6）；

第3题中（1），（2），（7），（8）。

1. 确定下列函数的奇点，求出函数在各奇点的留数.

(1) $e^z/(1+z)$.

解：(i) 因为

$$\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z}{1+z}\right)=\infty,$$

所以 $z_0=-1$ 是函数的极点．又因

$$\lim_{z\to -1}\left[(1+z)\left(\frac{e^z}{1+z}\right)\right]=\lim_{z\to -1}e^z=\frac{1}{e},$$

这是非零有限值，所以 $z_0=-1$ 是函数的一阶极点（或称单极点），其留数就是 $1/e$，即

$$\operatorname{Res} f(-1)=\frac{1}{e}.$$

(ii) 因为

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{e^z}{1+z}\right)\text{不存在},$$

所以 $z_0=\infty$ 是函数的本性奇点．函数在全平面上只有这两个奇点，由于全平面上所有奇点的留数之和为零，所以

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\{f(z)\text{在所有（有限个）有限远奇点的留数之和}\}=-\operatorname{Res} f(-1)=-\frac{1}{e}.$$

(2) $z/(z-1)(z-2)^2$.

解：(i) 单极点 $z_0 = 1$.

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-2)^2} = 1.$$

(ii) 又二阶极点 $z_0 = 2$，

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{z}{(z-2)^2}\right] = -1.$$

(9) $e^{\frac{1}{1-z}}$

本性奇点，$z_0=1$，要求 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 的留数，必须把 $f(z)$ 进行罗朗展开

$$f(z)=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\cdots$$

$\therefore \operatorname{Res} f(1)=-1$

(10) $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$.

解：令原式分母 $1+z^{2n}=0$，$z^{2n}=-1$，

$$z^n=\pm i=e^{i(2k+1)\pi/2},$$

所以 $z_0=e^{i(2k+1)\pi/2n}$ $(k=0,1,2,\cdots 2n-1)$

为函数$f(z)$的单极点，

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-e^{i(2k+1)\pi/2n})/(1+z^{2n})],$$

应用罗毕达法则 则

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[1/2nz^{2n-1}]=\frac{1}{2n}e^{-i\frac{(2n-1)(2k+1)}{2n}\pi}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{e^{i(2k+1)\pi/2n}}{e^{i(2k+1)\pi}}=-\frac{1}{2n}e^{i(2k+1)\pi/2n}.$$

2. 计算下列回路积分.

(1) $\oint_\ell \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$ (ℓ的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$).

解: ℓ 的方程可化为: $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$，在复平面上，它是一个以$(1,i)$为圆心， $\sqrt{2}$为半径的圆.

被积函数$f(z)=1/(z^2+1)(z-1)^2$，它有两个单极点 $z_0=\pm i$，和一个二阶极点 $z_0=1$，在这三个极点中，$z_0=-i$ 不在积分回路内，只有极点 $z_0=i$ 和 $z_0=1$ 在积分回路内，它们的留数分别为:

$$\operatorname{Res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(1-z)^2}=\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(1+z^2)^2}=-\frac{1}{2}.$$

应用留数定理:

$$\oint_\ell \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}=2\pi i[\operatorname{Res} f(i)+\operatorname{Res} f(1)]=2\pi i\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=-\frac{\pi i}{2}.$$

3. 应用留数定理计算回路积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$，函数 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域上是解析的，α 是该区域的一个内点.

解：设被积函数 $g(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$. 因为 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域内是解析的，所以 $g(z)$ 在积分回路（即 ℓ 所围区域）内只有一个单极点 $z_0=\alpha$，而

$$\mathrm{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha}(z-\alpha)\right]=f(\alpha),$$

所以

$$\oint_{\ell}\frac{f(z)z}{z-\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\alpha)=2\pi\mathrm{i}f(\alpha),$$

于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z=f(\alpha).$$

这正是柯西公式.

知识总结

傅里叶变换及其逆变换的定义

定义 假设I是数集(实数或者复数)，$K(s,x)$为$I\times[a,b]$上的函数，这里$[a,b]$为任意区间。如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$有定义并且对任意$s\in I$，$K(s,x)$和$f(x)$为$[a,b]$上可积函数，则含参变量积分

$$\int_a^b K(s,x)f(x)\mathrm{d}x=F(s)$$

定义了一个从$f(x)$到$F(s)$的变换，称为**积分变换**，$K(s,x)$为变换的**核。**

在具体的变换中，$K(s,x)$具有不同的表现形式，对$f(x)$有具体的要求。常用的积分变换有傅里叶变换和拉普拉斯变换。

定理（傅里叶积分定理） 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意有限区间上满足狄利克雷条件，即满足：

（1） 在区间上连续或只有有限个第一类间断点，

（2） 在区间上至多有有限个极值点，

且在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left(\int_{\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega;$$

若 f 在 x 点连续，则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left(\int_{\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega.$$

定义　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意有限区间上满足狄利克雷条件，在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则称广义积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

为$f(x)$的**傅里叶变换**，或者称为$f(x)$的**像函数**。通常记为$\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)$，或$\hat{f}(\omega)=F(\omega)$。

定义　称

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

为$F(\omega)$**的傅里叶逆变换**，或者称为$F(\omega)$的**像原函数**。记为$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(x)$.

傅里叶变换及其逆变换的基本性质

性质 1（线性性质） 傅里叶变换及其逆变换都是线性变换，即

$$\mathcal{F}[c_1 f + c_2 g] = c_1\mathcal{F}[f] + c_2\mathcal{F}[g] = c_1\hat{f} + c_2\hat{g},$$

$$\mathcal{F}^{-1}[c_1\hat{f} + c_2\hat{g}] = c_1\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] + c_2\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}] = c_1 f + c_2 g.$$

其中c_1，c_2是任意常数。

性质 2（相似性质） 对于任意实常数$a \neq 0$，有

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

性质 3（位移性质） 对于任意实常数a，有

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-i\omega a}\hat{f}, \qquad \mathcal{F}[f(x)e^{iax}] = \hat{f}(\omega - a).$$

性质 4（微分性质） 设f，f'的傅里叶变换存在，则

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \hat{f}(\omega).$$

一般地，若$f, f', \cdots, f^{(n)}$的傅里叶变换存在，则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

性质 5（乘多项式性质）设xf的傅里叶变换存在，则

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega).$$

性质 6 (积分性质)

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(y)dy\right] = -\frac{i}{\omega}\hat{f}(\omega).$$

性质 7 (对称性质)

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\omega).$$

定义　设函数$f(x)$和$g(x)$是$(-\infty,\infty)$上定义的函数。如果广义积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$ 对于所有的$x \in (-\infty,\infty)$都收敛，则称该积分为f与g的**卷积**。记为

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

性质 8（卷积性质）

$$\mathcal{F}[f*g]=\hat{f}\hat{g},\ \text{或者}\,\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}]=f*g.$$

性质 9（像函数的卷积性质）

$$\mathcal{F}[fg]=\frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{g},\ \text{或者}\,\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}*\hat{g}]=2\pi fg.$$

性质 10（Parseval 等式）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega.$$

习题讲解

第二部分 积分变换

“第一章 付里叶(Fourier)变换”作业题

第91页（第三版） 第72页（第四版） 第65页（第五版）：

第2题；第3题；第4题中（2），（4）；第5题中（2）；

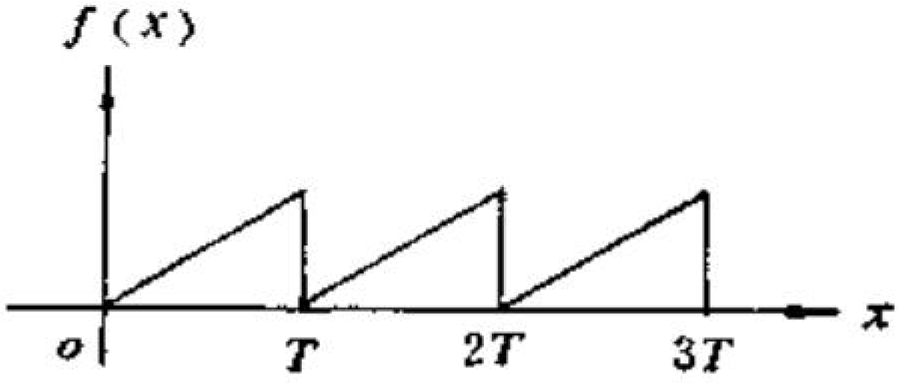
第6题中（1）。

第103页（第三版） 第81页（第四版） 第73页（第五版）：

第1题；第3题；第5题。

2. 将锯齿波展为傅里叶级数. 在 $(0,T)$ 这个周期上，该锯齿波可表为 $f(x)=x/3$.

解：锯齿波之周期为 T. 令



$$2l=T\ ,$$

得

$$l=\frac{T}{2}\ ,$$

将 l 代入以 $2l$ 为周期之傅里叶级数和傅里叶系数表达式即可得适合本题傅里叶级数和傅里叶系数表达式:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right)\ .$$

傅里叶系数的计算如下：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x \cdot \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^T = \frac{T}{6}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x\cos\frac{2n\pi}{T}x\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
$$

应用积分公式:

$$\int x\cos Px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{P^2}\cos Px + \frac{x}{P}\sin Px$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)}^{2}\cos\frac{2n\pi}{T}x + \frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T \\
&= \frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\cos\frac{2n\pi}{T}x + \frac{2n\pi}{T}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}\sin\frac{2n\pi}{T}x - \frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\cos\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T \\
&= \frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{2n\pi}{T}x - \frac{2n\pi}{t}x\cos\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T \\
&= -\frac{T}{3n\pi},
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{T}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{3n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x .
$$

4. (2)

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})+\alpha^2}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha(e^{ix}+e^{-ix})+\alpha^2}$$

令 $m=e^{ix}$

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha(m+\frac{1}{m})+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha m)(1-\frac{\alpha}{m})} = \frac{1}{1-\alpha m} + \frac{\frac{\alpha}{m}}{1-\frac{\alpha}{m}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha m)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha^k\left(m^k+\frac{1}{m^k}\right)\right]$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k(e^{ikx}+e^{-ikx})$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}2\alpha^k\cos kx$$

(4) $f(x) = \mathrm{ch}\,\alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$

$$= \frac{1}{2}(e^{i\cdot i\alpha x} + e^{-i\cdot i\alpha x}) = \cos(\alpha i x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha i)x \cos kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(\alpha i + k)x + \cos(\alpha i - k)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha i + k)x}{2(\alpha i + k)} + \frac{\sin(\alpha i + k)x}{2(\alpha i - k)}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha i + k)\pi}{\alpha + k} + \frac{\sin(\alpha i - k)\pi}{\alpha - k}\right]$$

$$= \frac{2\alpha i \sin \alpha i\pi\,(-1)^k}{(-\alpha^2 - k^2)\pi} = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{2\alpha(-1)^k}{\alpha^2 + k^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha i)x\, dx = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

$f(x)$为偶函数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2\alpha}{\alpha^2 + k^2}\cos kx\right)$$

1. 求单个锯齿脉冲 $f(t)=k t\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)$，即

$$f(t)=\begin{cases}0\ , & (t<0)\\ kt, & (0<t<T)\\ 0\ , & (t>T)\end{cases}$$

的Fourier变换

解: 因为 $f(t)$ 是无界空间中的非周期函数，它的周期为 ∞，故可展开为 Fourier 积分，其 Fourier 变换:

$$f(t)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

其中 Fourier 变换 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 为:

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} kt\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\int_{0}^{T} \omega t\cos\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) \\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\left[\cos\omega t + \omega t\sin\omega t\right]_0^T \\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}[\cos\omega T + \omega T\sin\omega T - 1],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^T kt\sin\omega t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\Big[\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\Big]_0^T \\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}[\sin\omega T - \omega T\cos\omega T],
\end{aligned}
$$

复数形式为:

$$
\frac{k}{2\pi\omega}\left[\frac{1}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}-1\right)+\mathrm{i}T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right].
$$

3. 把下列脉冲 $f(t)$ 展为 Fourier 积分，

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-T),\\ -h & (-T<t<0),\\ h & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

注意在半无界区间 $(0,\infty)$ 上，本例的 $f(t)$ 跟例1的 $f(t)$ 相同.

解: 因为 $f(t)$ 是奇函数，所以可展开为 Fourier 正弦积分:

$$f(t)=\int_0^{\infty} B(\omega t)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

其 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned}B(\omega)&=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\frac{h}{\omega}\int_0^T\sin\omega\xi\,\mathrm{d}(\omega\xi)\\ &=\frac{2h}{\pi\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^T=\frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T).\end{aligned}$$

所以

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$