2014-2015 学年第二学期数学物理方法期末考试(颜瑞民回忆版)

命题人：缪炎刚

一、（8 题，每题 5 分）.

1.写出 $\dfrac{(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)^3}{(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)^2}$ 的代数式，三角式，指数式.

2. i^{3-2i}.

3.将 $(z+2i)^3$ 表成 $u+iv$，求实函数 u,v，并验证柯西-黎曼条件.求 $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

4.在 $z_0=0, z_0=i$ 的邻域内，分别将 $\dfrac{z+2}{z(z-i)}$ 展开，并指出哪个是 Taylor 级数，哪个是 Laurent 级数.

5.$\oint_{|z|=1} \dfrac{\sinh z - \cosh z}{z^3} dz.$

6.计算实积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin \alpha x}{(x^2+9)^2} dx.$

7.对 Schrödinger 方程进行 Fourier 变换.

$$f(p) = F(\psi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipt/\hbar} dx,$$

$$\psi(x) = F^{-1}(f(p)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{ipt/\hbar} dp,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

已知：$F(\psi^n(x)) = (ipt/\hbar)^n f(p), F(x^n\psi(x)) = f^{(n)}(p).$

（提示:将 $V(x)$ 表成 $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{V^{(k)}(0)}{k!} x^k$ 的形式.）

8.用 Laplace 变换求解二维二阶常微分方程.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\omega\dot{y}(t) + \omega^2 x(t) = c_1, \\ \ddot{y}(t) - 2\omega\dot{x}(t) + \omega^2 y(t) = c_2. \end{cases}$$

二、（3 题，每题 20 分）.

9.写出三类泛定方程和三类边界条件以及方程齐次和边界条件齐次的意义.

10.均匀介质球壳，内半径 r_1，外半径 r_2，介电常数为 ε，将点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 与球心相距 $d<r_1$，求解全空间的电势分布.

11.

将柱坐标系下的 Laplace 方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

分离变量

（1）写出上下底面齐次边界条件下的各方程和本征解.

（2）写出侧面齐次边界条件下的各方程和本征解.

（3）写出一般的柱内解.

微信：yrm314