

2020-2021 学年数学物理方法期末试题回忆版

一、复变函数论

1. 写出 $\frac{(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)^n}{(\cos m\alpha - i \sin m\alpha)^m}$ 的指数式、三角式。

2. 求 $(1 + i\sqrt{3})^{1+i\sqrt{3}}$ 的实部和虚部。

3. (1) 写出或推导直角坐标系下的柯西-黎曼条件;
(2) 由上述结果推导极坐标系下的柯西-黎曼条件。

4. 已知函数 $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2i)}$

(1) 在 $z_0 = i$ 处进行幂级数展开, 写出收敛区间, 判断属于泰勒展开还是洛朗展开, 该点属于哪类奇点, 阶数;

(2) 在 $z_0 = 3i$ 处进行幂级数展开, 写出收敛区间, 判断属于泰勒展开还是洛朗展开, 该点是常点还是奇点。

5. 求 $\int_0^\pi \frac{2}{1+\sin^2 x} dx$, 已知 $\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 y} dy = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$ 。

二、积分变换

1. 已知方程

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + 4 \frac{d}{dx} f(x) + 4f(x) = \delta(x)$$

(1) 将方程进行傅里叶变换;
(2) 求像函数;
(3) 写出原函数的表达式并求解。

2. 利用拉普拉斯变换求解以下积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2} dx$$

已知 $t^n \rightleftharpoons \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ 。

三、数学物理方程

1. 写出三类泛定方程和三类边界条件，以及方程和边界条件的齐次和非齐次的概念。
2. 概述本课程的主要内容以及它们之间的内在联系。
3. 均匀介质球，半径为 R ，相对介电常数为 ϵ 。把介质球放入点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 的电场中，球心跟点电荷相距 $a(a < R)$ ，求解全空间的电势分布。
4. 半径为 ρ_0 的圆形膜，边缘固定，初始位置 $u|_{t=0} = (1 - \frac{\rho^4}{\rho_0^4})u_0$ ，初速度为零，求解膜的振动情况。