

第二章 静电场中的导体和电介质

§ 3 静电场中的电介质

3.1 电介质对电场的影响

3.2 电介质的极化

一、电介质的分子 二、电介质的极化

3.3 电极化强度和极化电荷的关系

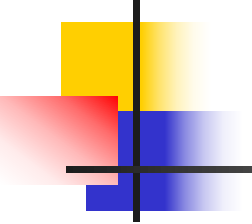
3.4 电介质的极化规律 退极化场

§ 4 有电介质时的高斯定理

电位移矢量

铁电体、永电体和压电体

§ 2.3 静电场中的电介质



导体中有许多可以自由移动的电子或离子。然而也有一类物质, 其电子被**束缚**在自身所属的原子核周围(离子化合物)或夹在原子核中间(共价化合物), 这些电子可以相互交换位置, 多少活动一些, 但是不能到处移动, 就是所谓的**非导体**或**绝缘体**。绝缘体不能导电, 但电场可以在其中存在, 并且在电学中起着重要的作用。

从电场的角度看, 特别地把绝缘体叫做**电介质**。

电介质可分为**各向同性**和**各向异性**两种。

从**电学性质**看各向同性电介质的分子可分为两类:

无极分子、有极分子

它们在电场中的行为: 有**位移极化**和**取向极化**。



3.1 电介质对电场的影响

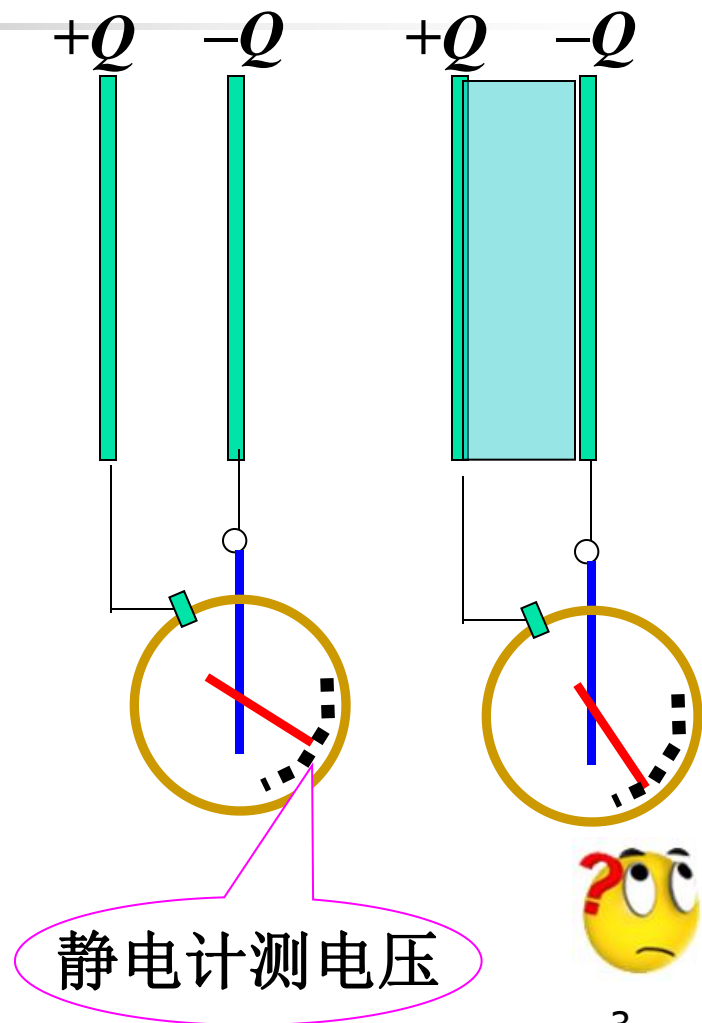
•电介质

是由大量电中性的分子组成的绝缘体。紧束缚的正负电荷在外场中要发生变化。

在外电场中电介质要受到电场的影响，同时也影响外电场。

在以平行板电容器有电介质与无电介质时，极板上电压的变化为例说明

本章只限于讨论各向同性的均匀的电介质。



插入电介质前后两极板间的电压分别用 U_0 、 U 表示，它们的关系：

$$U = \frac{1}{\epsilon_r} U_0$$

ϵ_r 是一个大于 1 的常数，其大小随电介质的种类和状态的不同而不同，是电介质的特征常数，称为电介质的**相对介电常数**(相对电容率)

空气的**相对介电常数1.00059** (0°C, 1 atm) 35

上述实验表明：插入电介质后两极板间电压减小，说明其间电场减弱了。电容增大了。

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$$

电场减弱的原因可用电介质与外电场的相互影响，即从微观结构上来解释。---极化现象

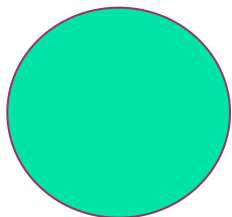
3.2 电介质的极化

一、电介质的分子

①无极分子 (*Nonpolar molecule*)

在无外场作用下整个分子**无电矩**。

例如 CO_2 , H_2 , N_2 , O_2 , He

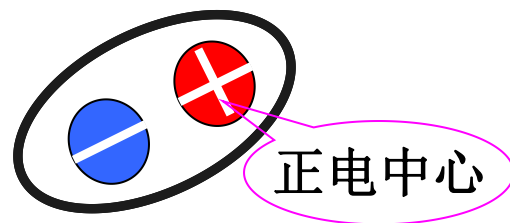


②有极分子 (*Polar molecule*)

在无外场作用下存在**固有电矩**

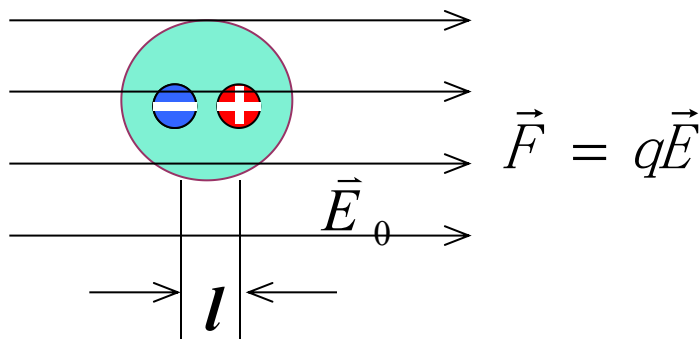
例如, H_2O , HCl , CO , SO_2

因无序排列对外不呈现电性。



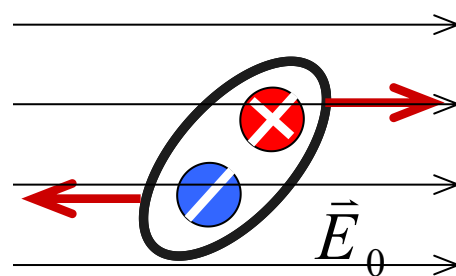
二、电介质的极化: *Polarization*

位移极化



无极分子只有位移极化, 感应电矩的方向沿外场方向。

$$\vec{M} = \vec{P}_e \times \vec{E}$$



取向极化

有极分子以取向极化为主; 而在高频下只有位移极化。



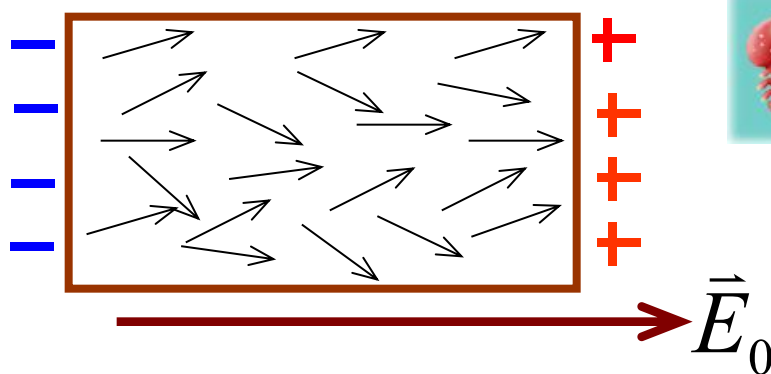
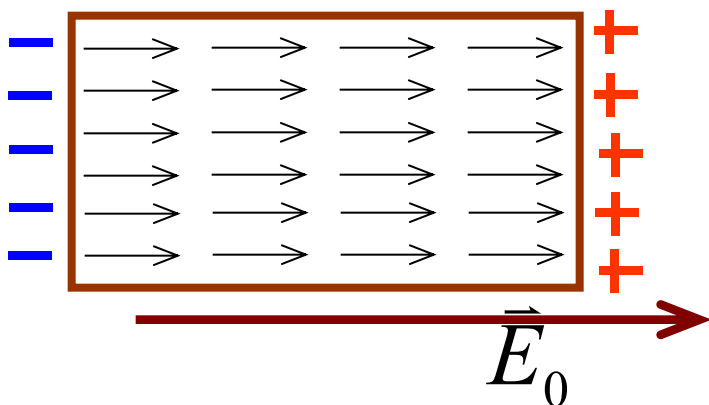
无外场下，所具有的电偶极矩称为固有电偶极矩。

在外电场中产生感应电偶极矩。

极化电荷 *Polarization charge or bound charge*

在外电场中，均匀介质内部各处仍呈电中性，但在介质表面要出现电荷，这种电荷不能离开电介质到其它带电体，也不能在电介质内部自由移动。我们称它为**束缚电荷**或**极化电荷**。它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走。

在外电场中，出现束缚电荷的现象叫做**电介质的极化**。



3.3 电极化强度 (*Polarization*) 和极化电荷的关系

在宏观上测量到的是大量分子电偶极矩的统计平均值。为了描述电介质在外场中的行为引入一个物理量：

一、电极化强度矢量

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V} \frac{\sum_i \vec{p}_{ei}}{\Delta V}$$

其中 \vec{p}_{ei} 是第 i 个分子的电偶极矩

单位是[库仑/米²]、[C/m²].



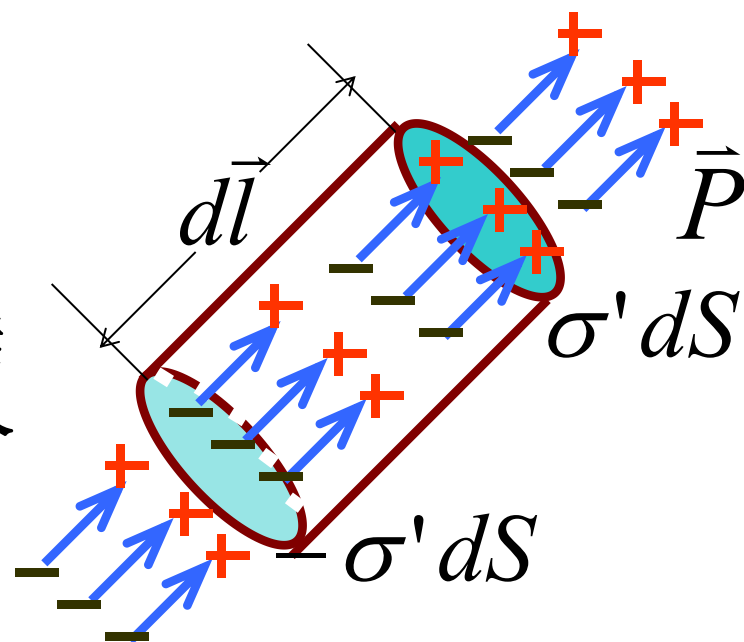
以下将电极化强度矢量简称为极化强度
束缚电荷就是指极化电荷。

二、极化（束缚）电荷与极化强度的关系

可证明对于均匀电介质，极化电荷集中在它的表面。电介质产生的一切宏观效果都是通过未抵消的极化电荷来体现。

在介质中引入极化强度力线来描述它在外场中的极化。

沿着此曲线取一长度为 dl ，与垂直于此曲线的横截面 dS 组成一个小圆柱体，在其内部极化可视为是均匀的。因而该体元具有电偶极矩 $\vec{P} \cdot dl \cdot dS$ ，根据定义它可视为两端具有 $\pm \sigma' dS$ 电荷的偶极矩



$$\therefore P \cdot dS \cdot dl = \sigma' dS dl$$

如果在电介质内任选一面
 dS 的法线 \hat{n} 与 \vec{P} 成 θ 角

则

$$\sum_i \vec{P}_{ei} = \sigma' \cdot dS \cdot d\vec{l}$$

从另一方面看

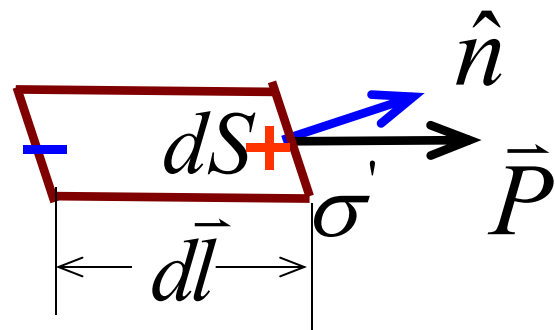
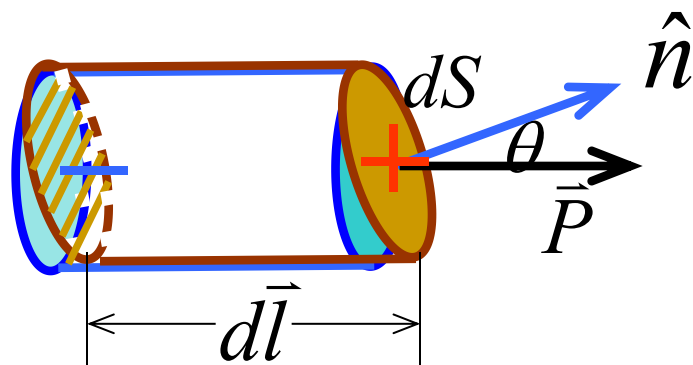
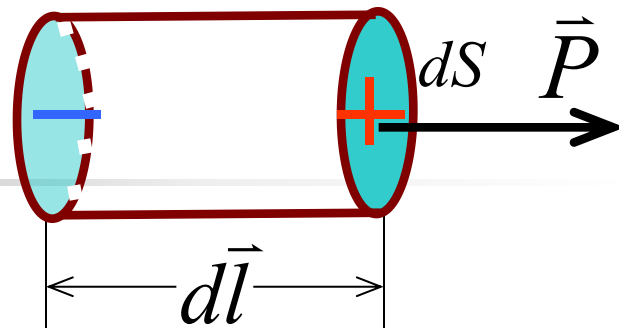
$$\sum_i \vec{P}_{ei} = [d\vec{l} \cdot d\vec{S}] \cdot \vec{P} = [dl \cdot dS \cdot \cos\theta] \cdot \vec{P}$$

$$= d\vec{l} \cdot dS \cdot (\vec{P} \cdot \hat{n})$$

$$\therefore \vec{P} \cdot \hat{n} = P_n = \sigma'$$

表明： 任选一面 dS 上束缚电荷
 面密度 σ' 等于极化强度矢量在
 该面法线方向上的分量

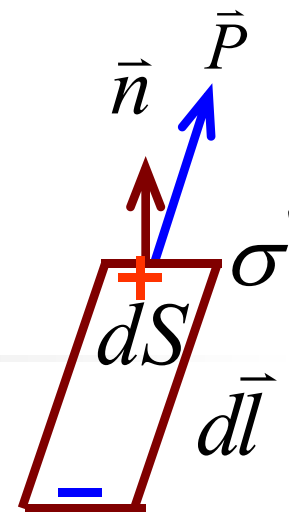
$$\therefore P = \sigma'$$



$$P_n = \sigma'$$

♣在均匀电介质内部，束缚电荷彼此抵消，束缚电荷仅出现在介质表面。

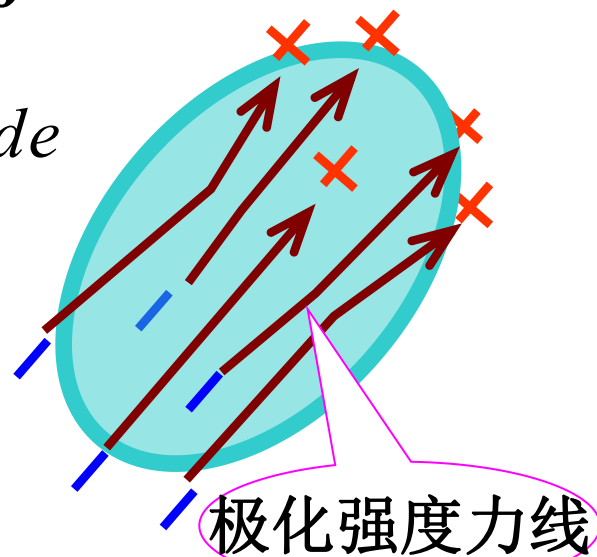
通常定义 \hat{n} 为介质外法线方向。



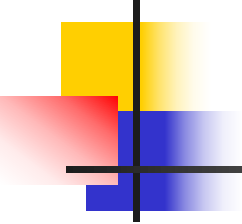
$$P_n > 0 \quad \sigma' > 0, \quad P_n < 0 \quad \sigma' < 0$$

$$\therefore \vec{P} \cdot d\vec{S} = \sigma' dS \quad \therefore \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ inside}$$

♣在非均匀电介质中，有束缚电荷的积累。根据电荷守恒得：



$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \sigma' dS = \sum q'_{\text{surface}} = - \sum_{S_{\text{inside}}} q'$$


$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \sigma' dS = - \sum_{S_{inside}} q'$$

在任一曲面内极化电荷的负值等于极化强度的通量。

微分形式

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_{S\text{内}} q' = -\iiint_V \rho' dV$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{P} dV = -\iiint_V \rho' dV$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho'$$

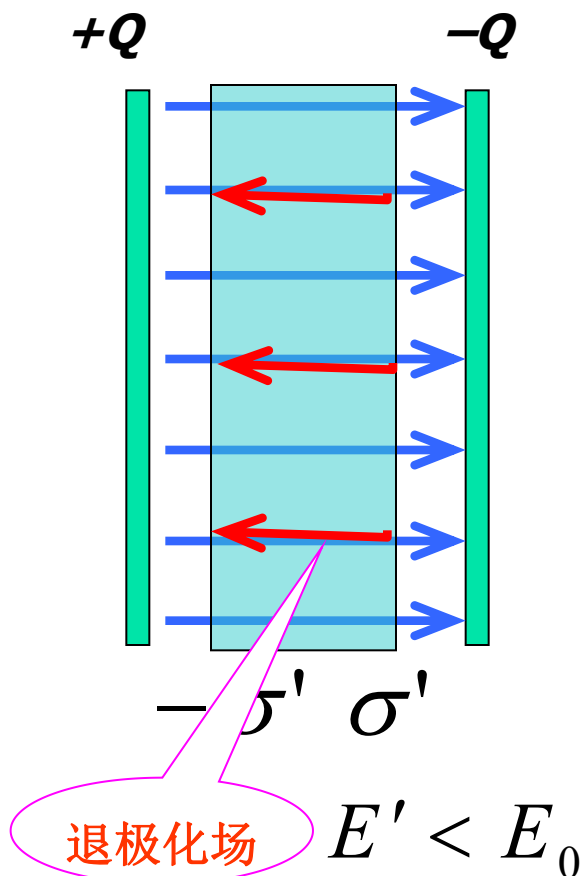
- 介质中任意一点的极化强度矢量的散度等于该点的极化电荷密度
- 均匀极化的电介质内部 $\vec{P} = \text{常数}, \rho' = 0$

●退极化场

电介质在外场中的性质相当于在真空中有适当的束缚电荷体密度分布在其内部。因此可用 ρ' 和 σ' 的分布来代替电介质产生的电场。

在外电场 \vec{E}_0 中，介质极化产生的束缚电荷，在其周围无论介质内部还是外部都产生附加电场 \vec{E}' 称为退极化场。任一点的总场强为：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ 是电介质中的总电场强度。

\vec{E}_0 是自由电荷产生的电场

极化电荷产生的退极化场

depolarization field

$$\sigma' = P_n = P \cos \theta$$

3.4 电介质的极化规律

实验表明: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

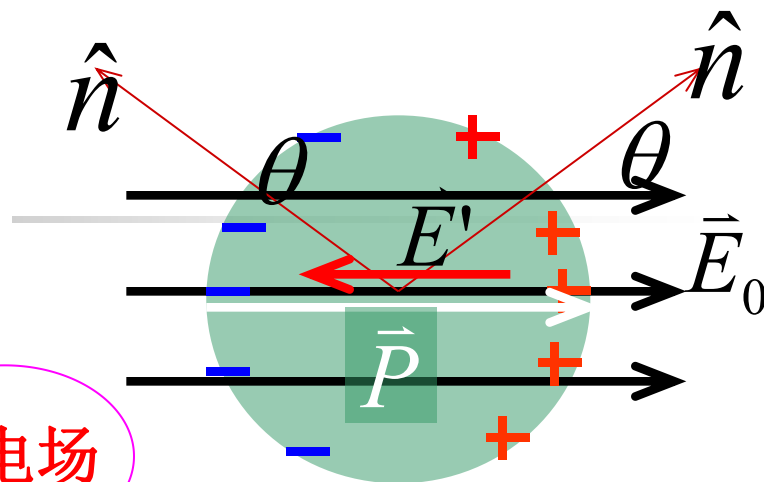
χ_e 称为电极化率或极化率 **polarizability**

在各向同性线性电介质中它是一个纯数。

介质球壳

$$\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P} \Rightarrow \sigma' \Rightarrow \vec{E}' \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{P}$$

相互依赖、相互制约，无法直接使用**高斯定理**



总电场

退极化场依赖于电介质的几何形状和极化率

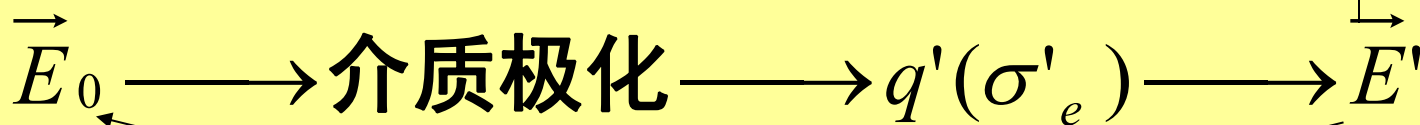


极化强度矢量P与总场强E的关系

极化规律

极化电荷
产生的附
加场

退极化场



影响

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

- 猜测E与P可能成正比（但有条件）——两者成线性关系（有的书上说是实验规律，实际上没有做多少实验，可以说是定义）

电极化率：由物质的属性决定

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

■ P与E 是否成比例

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

- 凡满足以上关系的介质——线性介质
- 不满足以上关系的介质——非线性介质

■ 介质性质是否随空间坐标变 （空间均匀性）

- χ_e —常数：均匀介质；
- χ_e —坐标的函数：非均匀介质

■ 介质性质是否随空间方位变 （方向均匀性）

- χ_e —标量：各向同性介质；
- χ_e —张量：各向异性介质

■ 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质

- 空气：各向同性、线性、非均匀介质
- 水晶：各向异性、线性介质
- 酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性介质——铁电体

电
极
化
率

铁电体

■ 铁电体的极化特征：

极化状态不仅决定于电场，还与极化历史有关，其性质类似于铁磁体

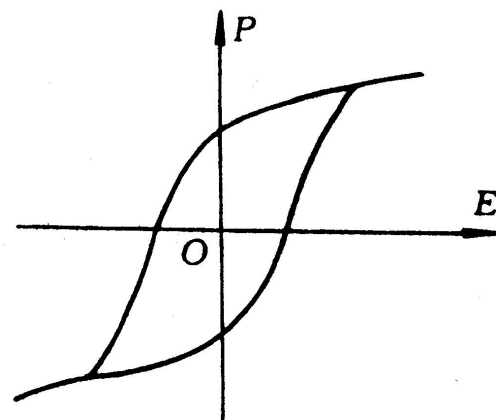
- 电滞回线：铁电体极化过程中极化强度矢量 P 随外场的变化曲线是非线性的，类似于铁磁体的磁滞回线（如图）

■ 铁电体是一类特殊的电介质，其电容率的特点是：

- 数值大、非线性效应强；
- 有显著的温度依赖性和频率依赖性；
- 有很强的压电效应和电致伸缩效应

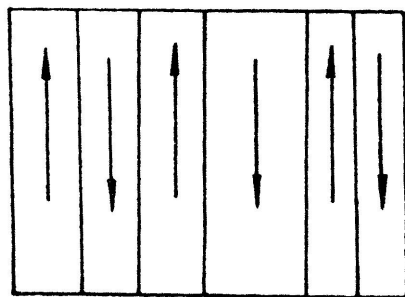
■ 作为重要的功能材料

- 绝缘和储能方面；
- 换能、热电探测、电光调制；
- 非线性光学、光信息存储和实时处理等



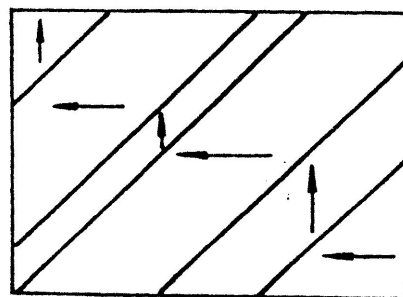
- 有铁电体特征的晶体内部存在着各个不同方向的自发极化小区域
- 在每个小区域内，极化均匀、方向相同，存在一固有电矩——电畴
- 电畴是不能任意取向的，只能沿着晶体的几个特定的晶向取向，即取决于铁电晶体原型结构的对称性

铁电体的极化微观机制



(a)

(a) 180°畴



(b)

(b) 90°畴

图 4-3 BaTiO₃ 晶片的电畴结构

钛酸钡 (BaTiO₃) 晶片，自发极化方向可以与三个结晶轴的任一个同方向

感应、极化 自由、束缚

感应电荷：导体中自由电荷在外电场作用下作宏观移动使导体的电荷重新分布——感应电荷、感应电场

- 特点：导体中的感应电荷是自由电荷，可以从导体的一处转移到另一处，也可以通过导线从一个物体传递到另一个物体

■ **极化电荷：**电介质极化产生的电荷

- 特点：极化电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，既不能从介质的一处转移到另一处，也不能从一个物体传递到另一个物体。若使电介质与导体接触，极化电荷也不会与导体上的自由电荷相中和。因此往往称极化电荷为束缚电荷。

束缚电荷 极化电荷否！

用摩擦等方法使绝缘体带电

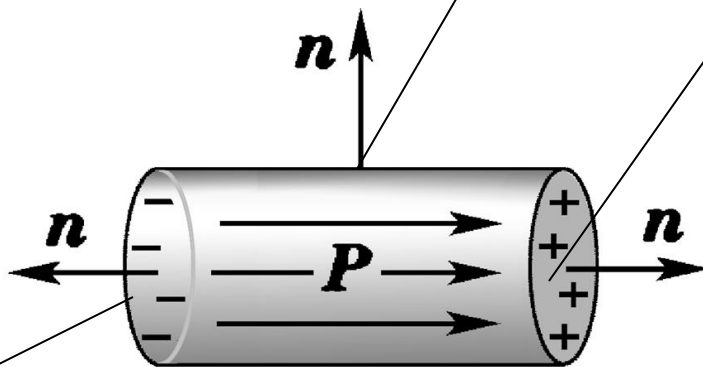
- 绝缘体上的电荷——束缚电荷
 - 并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和
 - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷
- 介质在随时间变化的电场作用下
 - 由极化产生的极化电荷——束缚电荷（约束在原子范围内）
 - 不可能与自由电荷中和
 - 它能移动并产生电流——极化电流，由 $\partial P / \partial t$ 决定
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因

例题一：求沿轴均匀极化电介质圆棒上极化电荷分布

- P 是常数

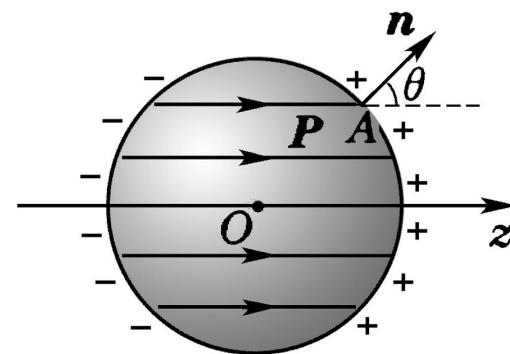
$$\theta = \frac{\pi}{2}, \sigma_e' = 0$$

$$\theta = 0, \sigma_e' = P$$



$$\theta = \pi, \sigma_e' = -P$$

例题二：求一均匀极化的电介质球表面上极化电荷和退极化场



- 已知极化强度矢量 P
- 均匀极化—— P 为常数
- 球关于 z 轴旋转对称
- 其表面任意一点的极化电荷面密度 σ'_e 只与 θ 有关，则有

$$\sigma'_e = P \cos \theta \begin{cases} \text{右半球, } \theta < 90^\circ, \sigma'_e > 0 \\ \text{左半球, } \theta > 90^\circ, \sigma'_e < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0, \quad \theta = 0, \pi, |\sigma'_e| \text{最大} \end{cases}$$

■ 求极化电荷在球心O处产生的退极化场

即已知电荷分布求场强的问题

■ 电荷是面分布，

■ 可以在球坐标系中取面元 dS

■ dS 上的极化电荷 $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

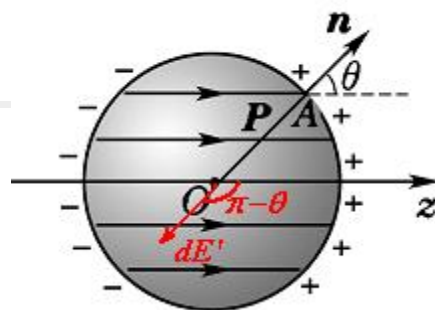
$$dq' = \sigma' dS = P \cos \theta dS = PR^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dE_o' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

■ 对称性分析：

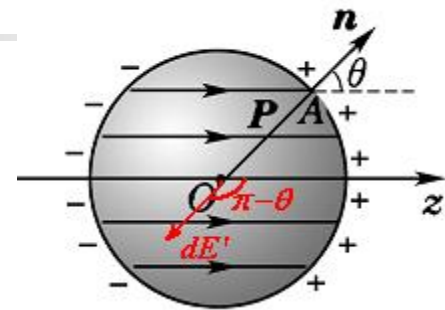
■ 退极化场由面元指向O（如图）

■ 只有沿z轴电分量未被抵消，且与P相反



$$dE'_z = dE'_o \cos(\pi - \theta) = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dE'_o = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$



■ 整个球面在球心0处产生的退极化场

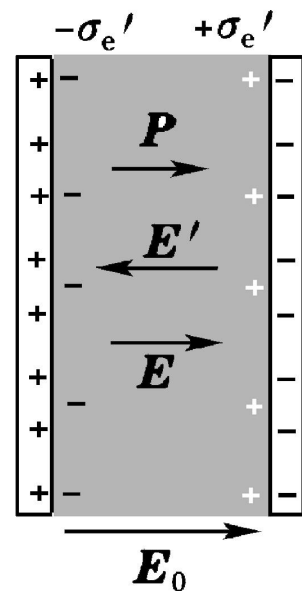
$$E' = E'_z = \oiint_S dE'_z = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

例题三

■ 平行板电容器，极板面积 S ，间距为 d ，充有各向同性均匀介质，求充介质后的 E 和电容 C

■ 设：两极板上所带的自由电荷为 $\pm \sigma_e$



未充介质时 $E_0 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \longrightarrow$

充介质后，退极化场 $E' = \frac{\sigma_e'}{\epsilon_0} \longleftarrow$

$$p = \sigma_e'$$

$$= \chi_e \epsilon_0 E$$

总场强 $E = E_0 - E' = \frac{\sigma_e - \sigma_e'}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$

$$E = E_0 - \chi_e E \Rightarrow$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

- 插入介质后电容器中的场被削弱了
- 求电容

相对介电常数 ε

$$U = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)} d = \frac{qd}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)S}$$

电容器的电容增大了 ε 倍

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0(1 + \chi_e)S}{d} = \varepsilon C_0$$

§ 2.3 电位移矢量、有电介质时的高斯定理

一、电位移矢量

根据介质极化和真空中高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_S (q_0 + q')$$

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \sum_S q'$$

自由电荷

束缚电荷

• 定义:

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

电位移矢量

electric displacement vector

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\vec{D} \stackrel{def}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

二、有电介质时的高斯定理

自由电荷

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_e dV$$

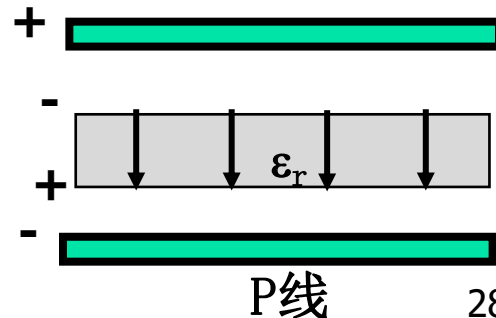
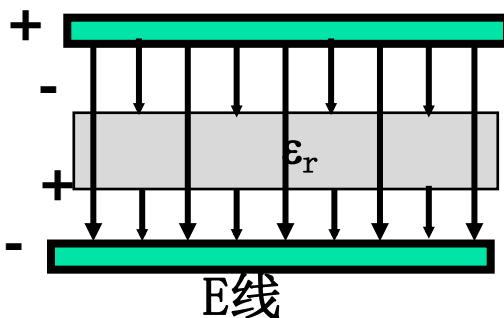
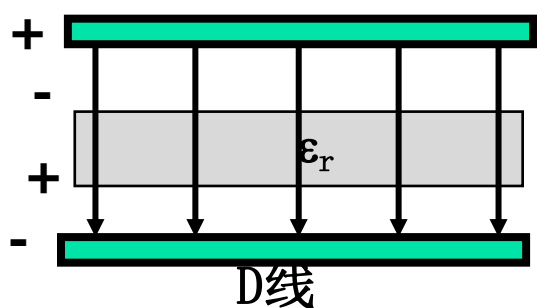
物理意义

通过任一闭合曲面的电位移通量，等于该曲面内所包围的自由电荷的代数和。

电力线起始于正电荷终止于负电荷。包括自由电荷和与极化电荷。

电位移线起始于正自由电荷(感应电荷)终止于负自由电荷。与极化电荷无关。

极化强度力线起始于负极化电荷终止于正极化电荷。



• \vec{P} 、 \vec{D} 、 \vec{E} 之间的关系: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$$

$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$ 称为**相对电容率**
或**相对介电常量**。

介质方程:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

ϵ 称为**电容率** *permittivity*
或**介电常量** *dielectric constant*。

在有一定对称的情况下, 无需知道极化电荷的分布就可以利用 D 的高斯定理求出 D 的分布, 然后求出 E 、 P 、 σ' 等。

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_e dV$$

例一：一个金属球半径为 R ，带电量 q_0 ，放在均匀的相对介电常数为 ϵ_r 的电介质中。求任一点场强及界面 σ' ？

解：导体内场强为零。

q_0 均匀地分布在球表面上，
球外的场具有球对称性

$$\because \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 \quad \therefore \vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > R$$

$$\text{因为 } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \therefore \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad r > R$$

$$\because \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore \sigma' = P_n = -\chi_e \epsilon_0 E = -(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

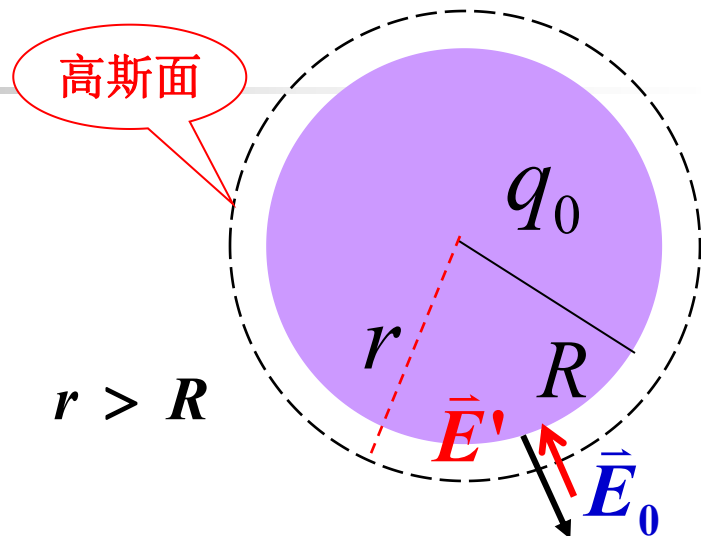
介质内表面（界面）处

$$\therefore \sigma' = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) \frac{q_0}{4\pi R^2}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} + \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

自由电荷的场

束缚电荷的场

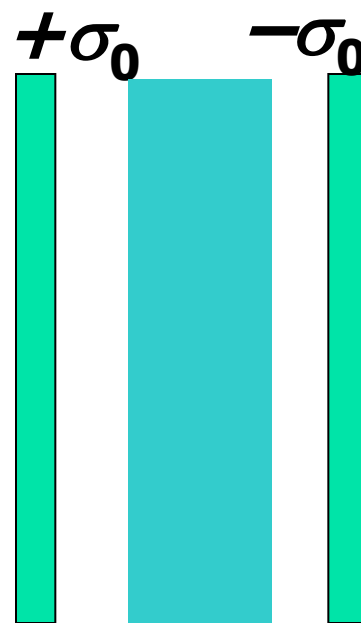


上例也说明当均匀电介质充满电场的全部空间时，
或当均匀电介质的表面正好是等势面时，有

$$\therefore \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

真空中： $\therefore \vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r \quad \therefore \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$

例二：平行板电容器充电后，极板上电荷密度 σ_0 ，将两板与电源断电以后，再插入 ϵ_r 的电介质后计算空隙中和电介质中的 \vec{E} 、 \vec{D} 、 \vec{P}



解：因断电后插入介质，所以极板上电量不变，电荷面密度不变。

电位移线垂直与极板，
根据高斯定理

$$(D_I + D_{II}) \Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D_{II} = D_{III} = \sigma_0$$

$$E_{II} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$E_{III} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\therefore \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore P = \chi_e \epsilon_0 E_{III} = (\epsilon_r - 1) \frac{\sigma_0}{\epsilon_r}$$

$$\therefore \sigma'_{III} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0$$

右侧面极化电荷为正
左侧面极化电荷为负

