第二章　静电场中的导体和电介质

带电体系静电能

一、 点电荷系的相互作用能

二、连续带电体的能量

带电体系在外电场中的能量

一、 电荷在外电场中的静电势能

电场的能量和能量密度

一、 电容器储存的能量

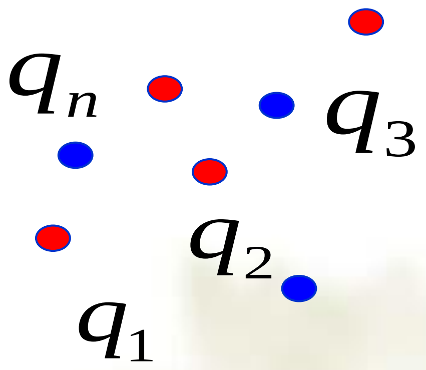
二、电场的能量密度

唯一性定理

§5　静电场中的能量

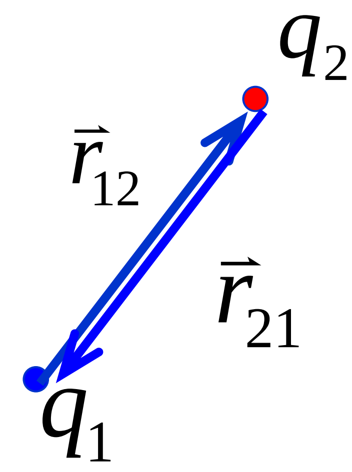
5.1 带电体系的静电能

一、点电荷系的相互作用能



设有 n 个电荷组成的系统。将各电荷从现有位置彼此分开到无限远时，他们之间的静电力所做的功定义为电荷系在原来状态的静电能。

1、以两个点电荷系统为例：



将q_2从q_1的场中移到无穷远，电场力做的功

$$A_{12} = q_2\int_{r_{12}}^{\infty}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

将q_1从q_2的场中移到无穷远电场力做的功

$$A_{21} = q_1\int_{r_{21}}^{\infty}\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$W_{21} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}$$

q_1的电势，或者为去掉q_2其他电荷的在q_2处电势

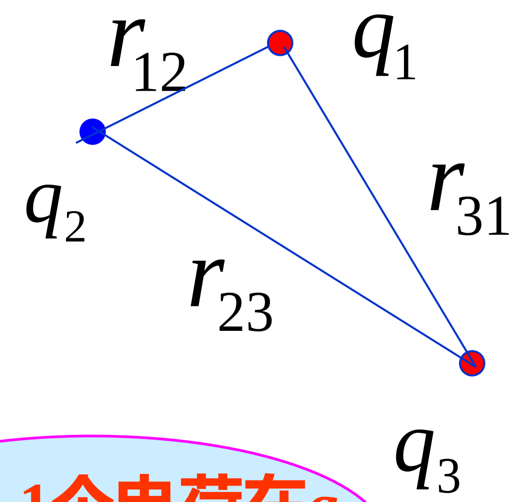
$$W_{12} = W_{21} = W$$

$$\because W_{12} = q_2 U_2$$

$$\because W_{21} = q_1 U_1$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i U_i$$

2、三个点电荷系统的静电能



$$W=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}+\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_o r_{13}}+\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_o r_{23}}$$

$$=\frac{1}{2}[q_1(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_o r_{13}})$$

$$+q_2(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_{21}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_o r_{23}})+q_3(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_{31}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{32}})]$$

其余n-1个电荷在q_i处的电势

$$W=\frac{1}{2}(q_1U_1+q_2U_2+q_3U_3)\qquad \therefore W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iU_i$$

3、 n个点电荷系统的静电能

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

多个点电荷的情形

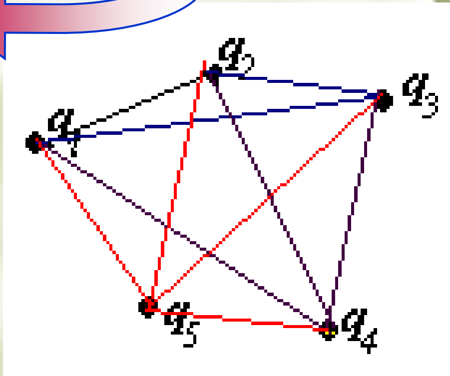
❖ 把无限分散的多个点电荷逐个从无穷远移至相应位置，计算外力所做的功

$$A'_1=0,\quad A'_2=q_2U_{12},\quad A'_3=q_3(U_{13}+U_{23})\cdots$$

$$A'_n=q_n(U_{1n}+U_{2n}+\cdots+U_{n-1,n})\Rightarrow A'_i=q_i\sum_{j=1}^{i-1}U_{ji}$$

代表第j个电荷在第i个电荷所在位置P_i处产生的电势

$$U_{ji}=U_j(P_i)=-\int_{\infty}^{P_i}\overrightarrow{E_j}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$$



■点电荷组的总功应为

$$A'=A'_1+A'_2+A'_3+\cdots+A'_n=\sum_{i=1}^{n}A'_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}q_i\sum_{j=1}^{i-1}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}\qquad(1)$$

第二种表达式

- 可以证明，静电能值与电荷移动的次序无关

$$q_j U_{ij} = q_i U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

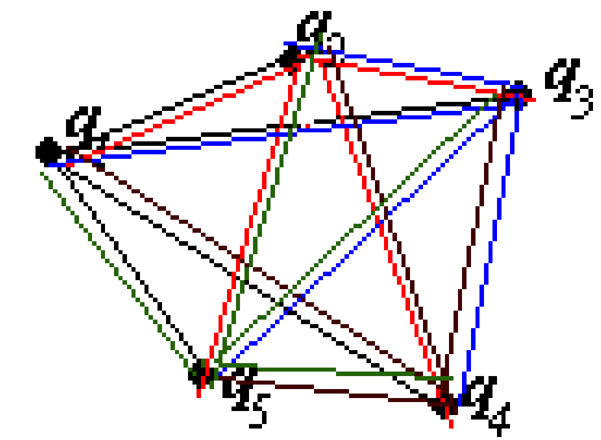
$$\therefore q_j U_{ij} = q_i U_{ji} = \frac{1}{2}(q_j U_{ij} + q_i U_{ji})$$

$$A' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\underline{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} U_{ji}} \right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ji}} \qquad (2)$$

$$U_i = U(P_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{q_j}{r_{ji}}$$

U_i:除点电荷i外其它点电荷单独存在时q_i所在处的电势总和

$$A' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i \qquad (3)$$



点电荷组的相互作用能

- 点电荷组的静电势能W_e等于克服电场力所做的功A'
- 相应的表达式为p266(4.109)、(4.110)、(4.111)
- /p57 (1.57)、(1.58)、(1.59)

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{r_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_{ji} \qquad (1)$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ji}} \qquad (2)$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i \qquad (3)$$

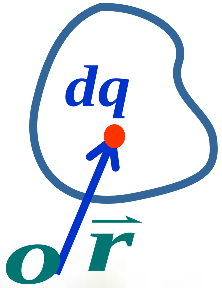
U_i:除点电荷 i 外其它点电荷单独存在时 q_i 所在处的电势总和

二、连续带电体的静电能

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

$$W=\frac{1}{2}\int_q U\,dq$$

对所有电荷分布区域进行积分



$$W=\frac{1}{2}\iiint_V U\cdot\rho_e\,dV$$

ρ_e 为电荷的体密度。

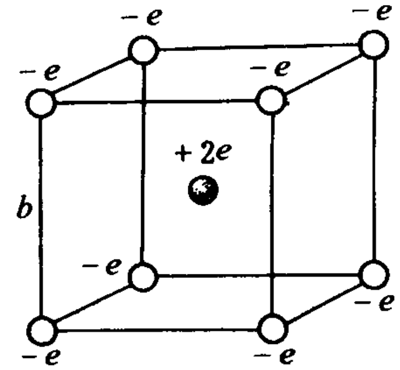
$$W=\frac{1}{2}\iint_S U\cdot\sigma_e\,dS$$

σ_e 为电荷的面密度。

$$W=\frac{1}{2}\int_L U\cdot\eta_e\,dl$$

η_e 为电荷的线密度。

例题一：一个边长为b的立方体各顶点放一个负点电荷$-e$，在立方体中心放一个点电荷 $+2e$，求体系 相互作用能We



- 从这些电荷中，不重复地选出各种可能的配对，则总相互作用能是这些配对能量之和。
- 解：相邻顶点之间的距离为b　　12对　$12e^2k/b$　　$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

- 面对角线长度为　$\sqrt{2}b$　　12对　$12e^2k/\sqrt{2}b$
- 体对角线长度为　$\sqrt{3}b$　　4对　$4e^2k/\sqrt{3}b$
- 中心到顶点距离　$\sqrt{3}b/2$　　8对　$8(-2e^2)k/\sqrt{3}b/2$

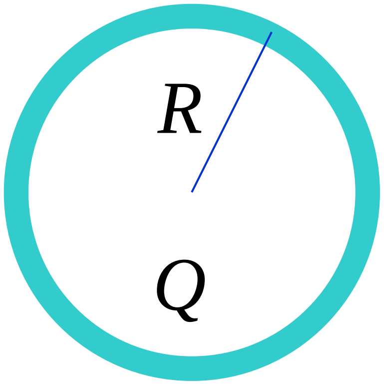
总相互作用能

$$w_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{12e^2}{b}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}b}+\frac{4e^2}{\sqrt{3}b}-\frac{32e^2}{3b}\right)=\frac{0.344e^2}{\varepsilon_0 b}$$

自能和相互作用能

- 相互作用能：把每一个带电体看作一个不可分割的整体，将各带电体从无限远移到现在位置所做的功等于它们的相互作用能。
- 自能：把全部电荷从无限分散的情况下聚集到带电体上的过程中外力克服电场力所做的功。

例二： 均匀带电球面，半径为R，总电量为Q，求这一带电系统的静电能。



带电球面是一个等势体，以无穷远为势能零点，其电势为：

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

所以，此电荷系的静电能为：

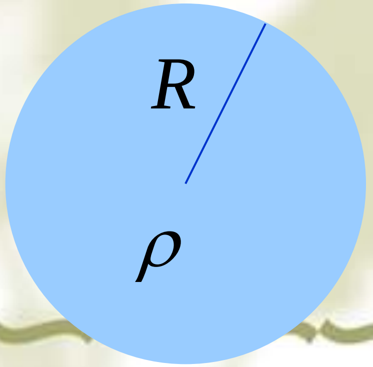
$$W=\frac{1}{2}\int U dq=\frac{1}{2}\int\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}dq=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$$

也称它是均匀带电球面系统的自能

自能和互能

例三：均匀带电球体，半径为R，电荷体密度为ρ，求这一带电球体的静电能。

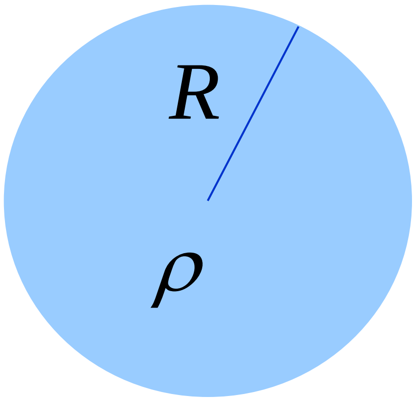
系统分布具有球对称性
电荷所在处电势不再相等



场强分布

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}\hat{r} \qquad r \le R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r} \qquad r \ge R$$



由电势定义得

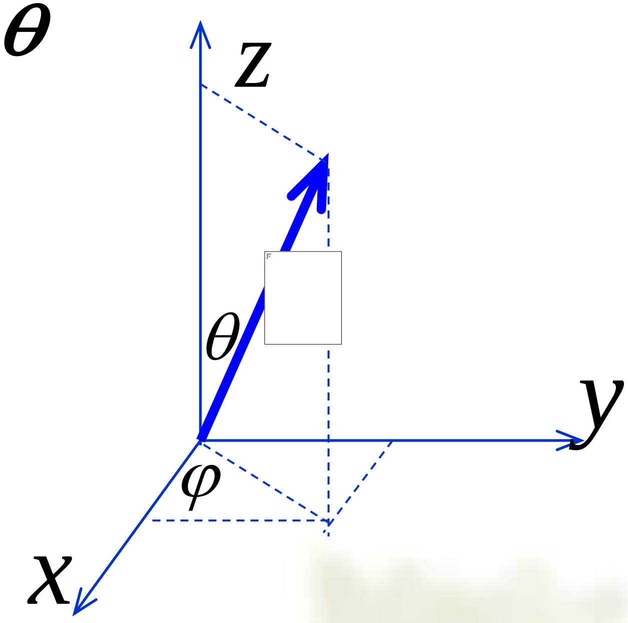
$$U = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr$$

$$= \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} dr \qquad r \le R$$

$$\therefore U = \frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2) \qquad r \le R$$

$$\because dV = dr \cdot r\sin\theta d\varphi \cdot r d\theta$$

球坐标的体元



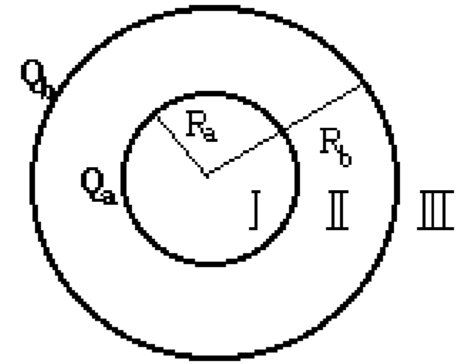
均匀带电球体系统的自能

$$\because U = \frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2) \qquad r \le R$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int U dq = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2)\rho r^2 dr \int_o^{\pi} \sin\theta d\theta \int_o^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho^2}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2)4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\rho^2 R^5$$

例题四：两个半径为R_1、R_2的同心球壳，均匀带电，电量分别为Q_1、Q_2, 求带电体系的相互作用能。



- 方法一：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i=\frac{1}{2}(Q_1U_1+Q_2U_2)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_2}$$

U_i：除点电荷 i外其它点电荷单独存在时q_i所在处的电势总和

❖方法二：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho U dV$$

带电体各部分电荷在积分处的总电势

$$W_e = \frac{1}{2}\iint \sigma U dS = \frac{1}{2}\iint_{S_1} \sigma_1 U_1 dS + \frac{1}{2}\iint_{S_2} \sigma_2 U_2 dS$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right), \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{R_2}$$

Q_1自能

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1^2}{2R_1} + \frac{Q_2^2}{2R_2} + \frac{Q_1 Q_2}{R_2}\right]$$

相互作用能

Q_2自能

例题五：原子核静电能——近似模型为均匀带电球体，半径为R，带电量为Q，球外真空

$$E=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^3}r, & r<R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r>R\end{cases}\Rightarrow U=\begin{cases}\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{R}-\dfrac{r^2}{R^3}\right)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}\end{cases}$$

$$W_e==\frac{1}{2}\iiint\rho_e U dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{5R}$$

$$\text{或}W_e=\iiint\omega_e dV=\iiint\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{5R}$$

讨论：

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{5R} \qquad \text{若令} R \longrightarrow 0$$

- 带电球缩成点电荷，显然点电荷的自能为无穷
- 如果把电子看成点电荷，它将具有无穷大的自能
- 理论上造成“发散困难”
- 如果把电子看成有一定半径的带电体，则它的自能与电荷分布情况有关
- 实际上一个电子的质量与它的精度自能有关，按相对论的质能关系可估算出电子的经典半径为

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \approx 2.8\times10^{-15}\,m$$

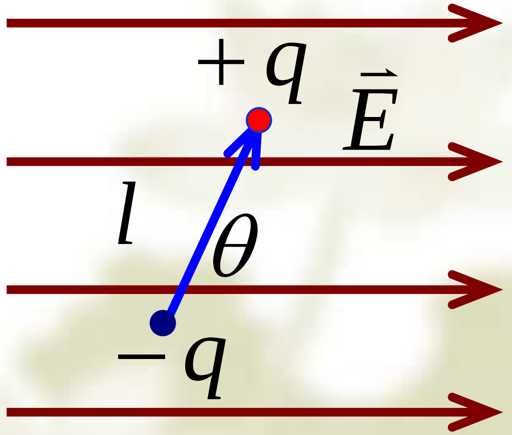
三、 电荷在外电场中的静电势能

1、点电荷 q_o 在外电场中的静电势能

$$W = q_0 U$$

一个电荷在外电场中的电势能是属于该电荷与产生电场的电荷系所共有。

2、电偶极子在均匀外电场中的静电势能：



$$W = qU_+ - qU_-$$

$$= -qlE\cos\theta = -\vec{P}_e \cdot \vec{E}$$

上式表明：电偶极子取向与外电场一致时，电势能最低；取向相反时,电势能最高。

带电体系在外场中受的力或力矩与静电势能的关系——虚功原理

- 设处在一定位形的带电体系的电势能为W，当它的位形发生微小变化
- 电势能将相应地改变δW
- 电场力做一定的功δA
- 设系统无能量耗散和补充，能量守恒

$$\delta A = -\delta W$$

- 电场力的功等于电势能的减少
- 利用上述关系可以给出带电体系的静电能与体系受力的关系

平移

- 设想带电体系有一微小位移δl

$$\delta A=\vec{F}\cdot\delta\vec{l}=F_l\delta l=-\delta W$$

电场力在δl方向上的投影

$$\delta l\longrightarrow 0$$

$$F_l=-\frac{\delta W}{\delta l}$$

- 转动
  - 设想带电体系绕某一方向的轴作微小的角位移$\delta\theta$

力矩在转轴方向的投影

$$\delta A=L_\theta\delta\theta=-\delta W$$

$$\delta\theta\longrightarrow 0$$

$$L_\theta=-\frac{\delta W}{\delta\theta}$$

- 用虚功原理：虚设位形变化时，电（或磁）场力做虚功——求力

例题:利用虚功原理证明均匀带电球壳在单位面积上受到的静电排斥力为 $\sigma_e^2/2\varepsilon_0$

- 一个总电量为q，半径为R均匀带电的球壳的自能为

$$W_{自}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

- 设想球面稍有膨胀

$$R\longrightarrow R+\delta R$$

  - 则单位面积所受的斥力

$$f=\frac{F}{4\pi R^2}=-\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial W}{\partial R}=-\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}(\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R})$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2})^2=\frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0}$$

问题：

- 若先将带电球壳自能用电荷面密度表示

$$W_{自} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{4\pi R^3}{2\varepsilon_0}\left(\frac{q}{4\pi R^2}\right)^2 = \frac{4\pi R^3}{2\varepsilon_0}\sigma_e^{\ 2}$$

$$f = \frac{F}{4\pi R^2} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial R}(4\pi R\sigma_e^2) = -\frac{4\pi}{2\varepsilon_0}\sigma_e^2$$

与前面得到的不同，那个对？为什么？

求导过程中认为电荷密度不变，对吗？

5.2 电场的能量和能量密度

两种观点：

电荷是能量的携带着。

电场是能量的携带着—近距观点。

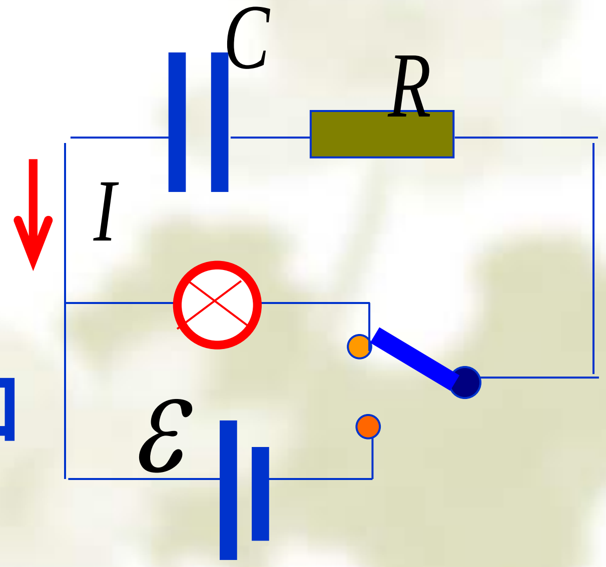
这在静电场中难以有令人信服的理由，在电磁波的传播中，如通讯工程中能充分说明场才是能量的携带者。

以电容器储能为例写出电势能的场量表达式。

一、 电容器储存的能量

充电:电源将电子从电容器左极板搬到右极板。储存能量。

放电：能量从电容器到用电器（如灯炮）从而被消耗。

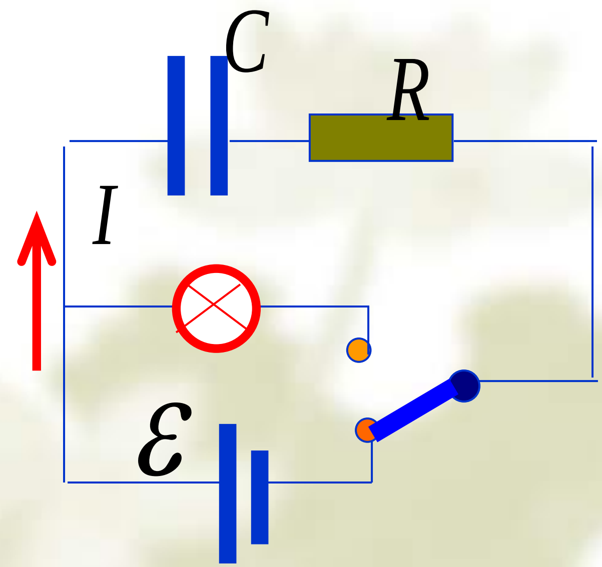


• 电容器储存的能量

电容器充电过程中,电量 dq 在电场力的作用下，从负极板到正极板，这微小过程中克服电场力作功为：

$$dA = dq(u_+ - u_-) = dqu$$

$$A = \int dA = \int udq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



所以储存在电容器中的能量为：

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

- **电容器储存的能量与场量的关系。**

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon_r E)ESd=\frac{1}{2}DESd$$

$$\because C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} \qquad \because U=Ed \qquad \therefore W=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}V$$

结果讨论：

电容器所具有的能量与极板间电场 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 有关，$\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 是极板间表示每一点电场强弱的物理量，所以能量与电场存在的空间有关，说明电场携带了能量。这虽然是从均匀的电容电场推出，但有普遍性。

电容器所具有的能量还与极板间体积成正比，于是可定义能量的体密度。

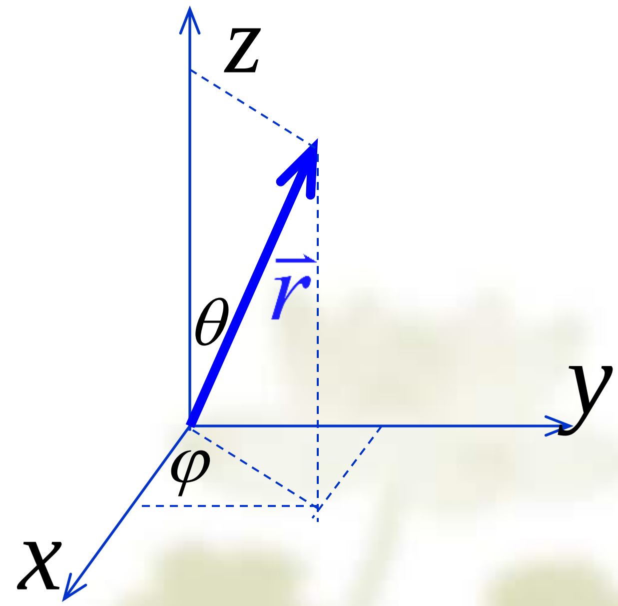
二、电场的能量密度

电场中单位体积内的能量

$$w_e = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

$$W = \int w_e dV = \int \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2} dV$$

对所有电场分布区域进行积分



$$\because dV = dr \cdot r\sin\theta d\varphi \cdot r d\theta$$

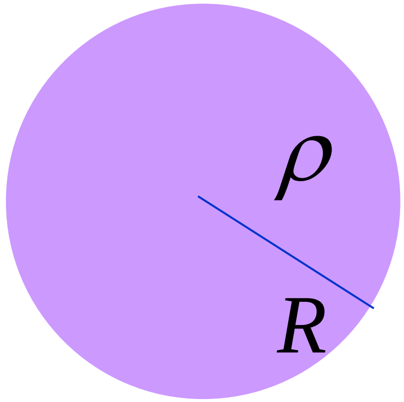
球坐标的体元

$$\therefore \iiint dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

例、真空中一均匀带电球体，半径为R，体电荷密度为ρ,试利用电场能量公式,求此带电球体系统的静电能。

$$\because \vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} \qquad r \le R$$

$$\because \vec{E}_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad r \ge R$$



$$\because W = \int w_e dV = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$$

$$= \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr$$

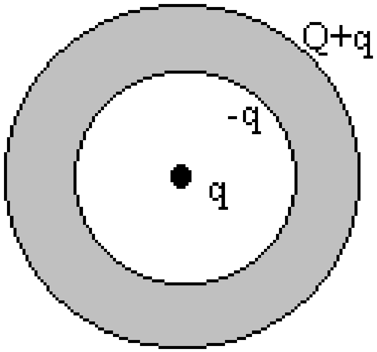
球内

球外空间

$$= \frac{4\pi\rho^2 R^5}{5\times 18\varepsilon_0} + \frac{4\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

与前面求自能结果一致。

静电场边值问题的唯一性定理



- 例题
- 典型的静电问题
  - 给定导体系中各导体的电量或电势以及各导体的形状、相对位置（统称边界条件），求空间电场分布，即在一定边界条件下求解

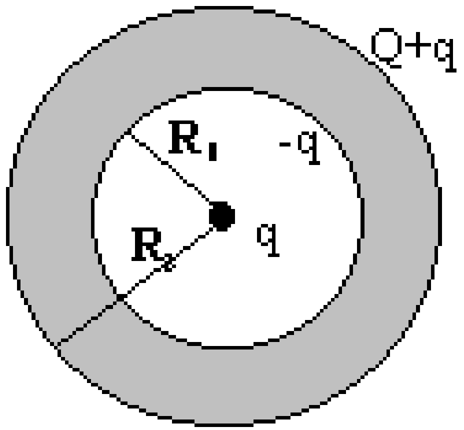
泛定方程

$$\begin{cases} \nabla^2 U = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{泊松方程,} \\ or \quad \nabla^2 U = 0 \rightarrow \text{拉普拉斯方程} \end{cases}$$

＋边界条件 → 静电场的边值问题

例题

- 如图所示，孤立球形导体空腔本身带正电Q，内半径为R_1，外半径为R_2，在其球心处放置一点电荷，带正电q，求空腔内、外表面的电荷分布和和空腔内外各点的电场分布



- 确定电荷分布：
- 空腔内表面一定会感应出与点电荷 q等量的负电荷$-q$，外表面所带总电量为$Q+q$。由于空腔具有球对称性，且点电荷处于球心，因此内、外表面的电荷均匀分布在球面上。

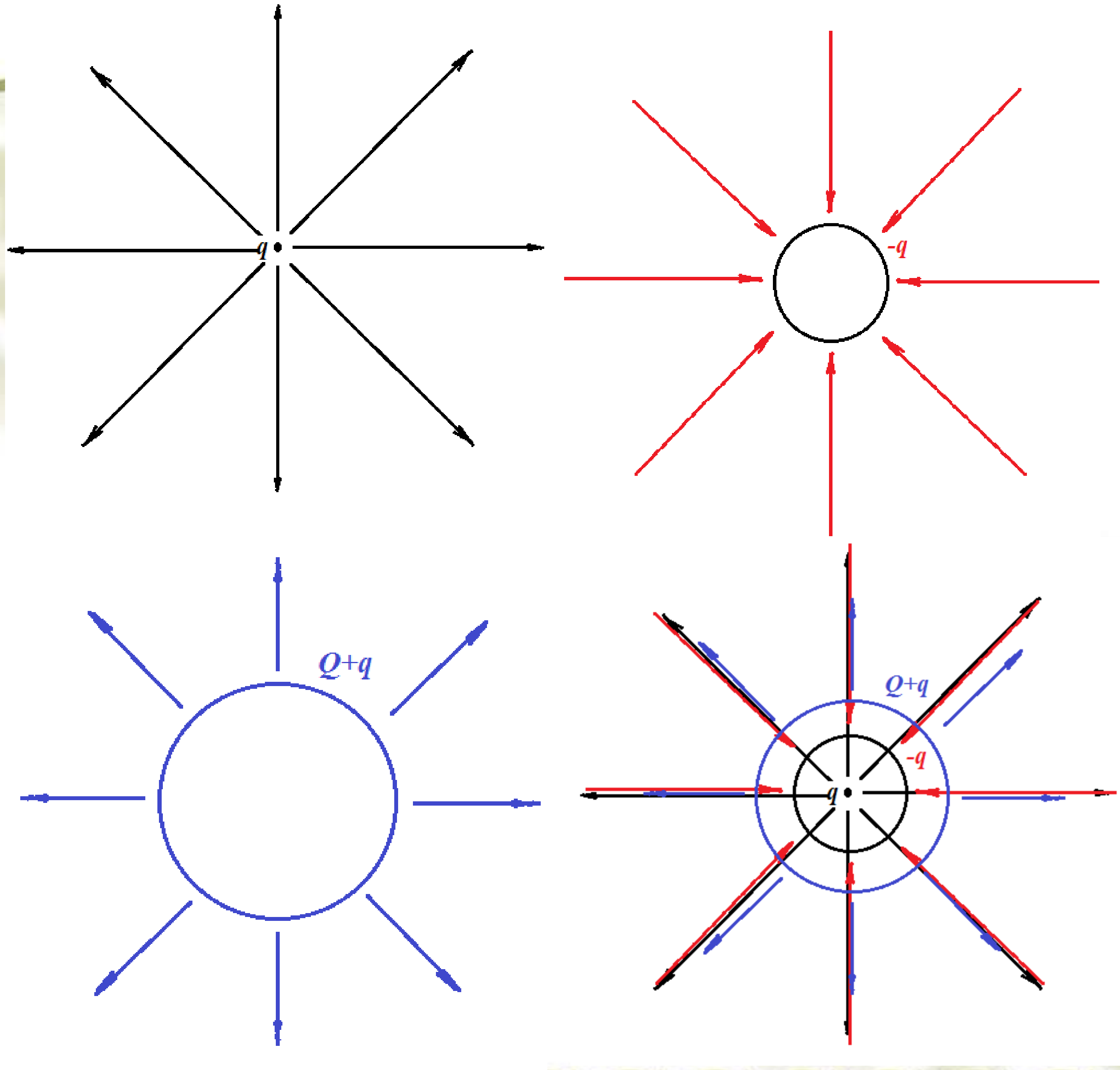
求场强分布

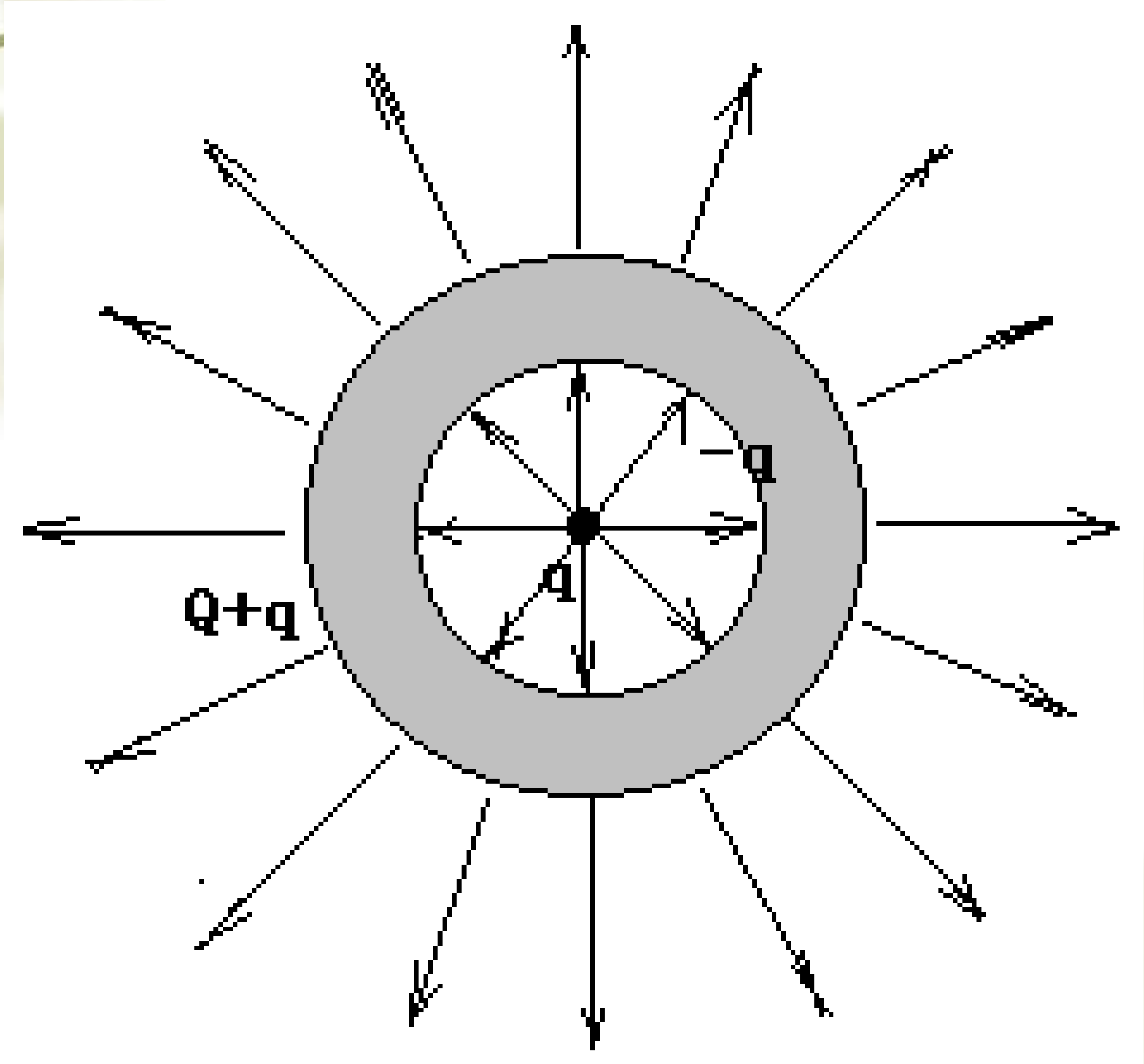
- 电荷分布决定电场分布，那么剩下的问题就是根据已知的电荷分布，用库仑定律和场强叠加原理来求各区域的场强。
- 我们可以先分别求出电荷q 、$-q$及$Q+q$单独存在时在空间各区域产生的场强分布，再利用场强叠加原理，求出空间各区域的场强分布

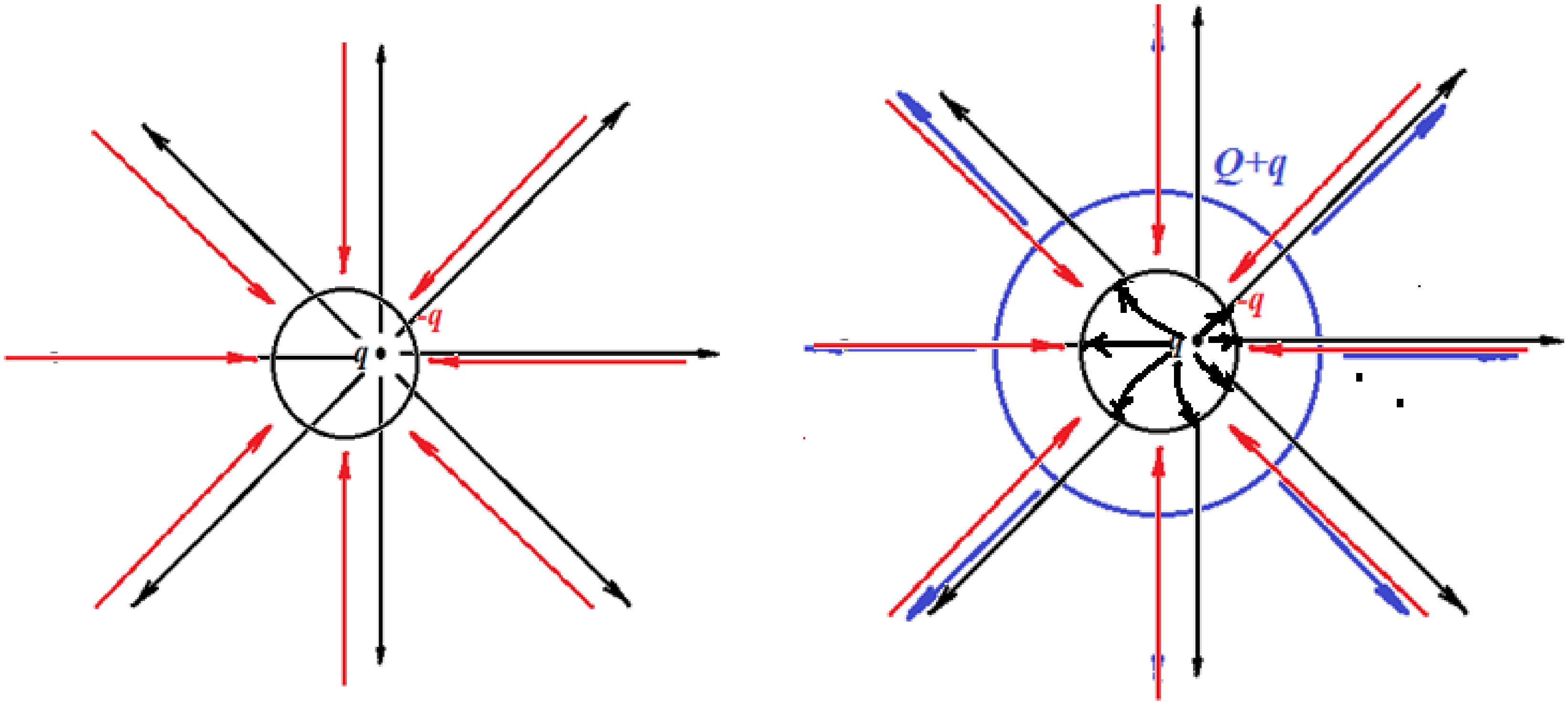
- 设空间某点到球壳中心的距离为*r*，则*q*、-*q*、*Q*+*q*及它们在各区域的叠加结果为：

	点电荷 *q*	内表面-*q*	外表面*Q*+*q*	叠加结果
$r < R_1$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	0	0	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$
$R_1 < r < R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	0	0
$r > R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r^2}$

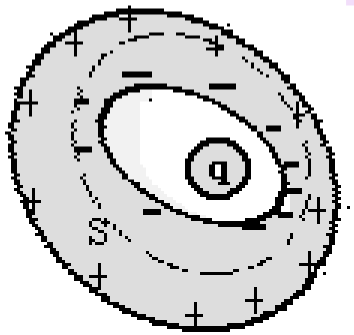
表中列出的叠加结果就是达到静电平衡以后，空腔内外各区域的场强分布。


q
-q
Q+q
Q+q
-q
q


−q
q
Q+q

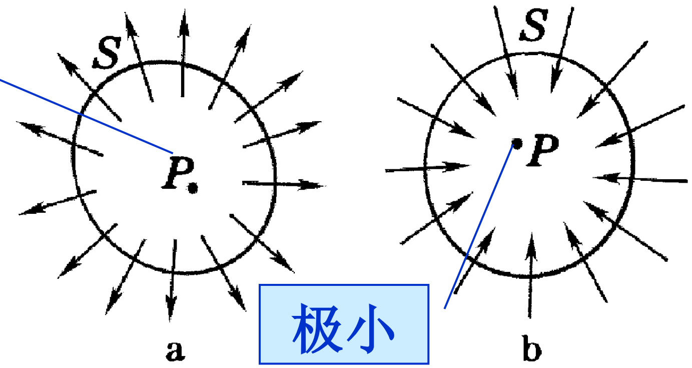


即便是点电荷偏心放置，点电荷和内壳上的负电荷产生的场在内壳外叠加为零，外壳形状决定外壳上的电荷分布



唯一性定理

- 对于静电场，给定一组边界条件，空间能否存在不同的恒定电场分布？——回答：否！
- 边界条件可将空间里电场的分布唯一地确定下来
- 该定理对包括静电屏蔽在内的许多静电问题的正确解释，至关重要
- 理论证明在电动力学中给出，附录B给出普物方式的论证
- 论证分三步：引理——叠加原理——证明



几个引

- 引理一：在无电荷的空间里电势不可能有极大值和极小值
  - 证明（反证）若有极大，则

$$\nabla U\text{指向}P\text{点},\mathbf{E}=-\nabla U\text{背离}P\text{点}$$

$$\Phi_E=\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}>0,\text{但面内无电荷，矛盾}$$

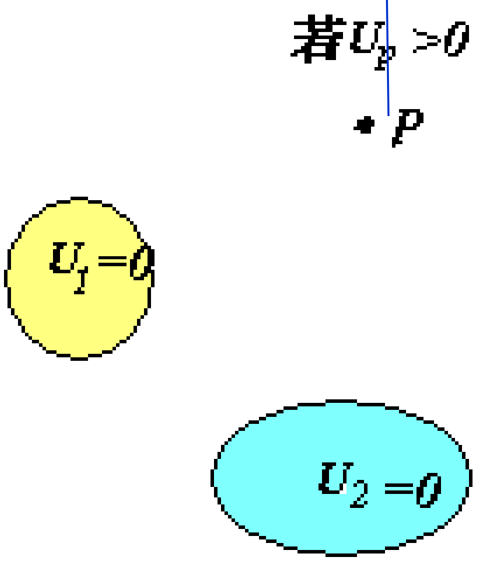
- 若有极小，同样证明

❖ 引理二：若所有导体的电势为0，则导体以外空间的电势处处为0

即意味着空间电势有极大值，违背引理一

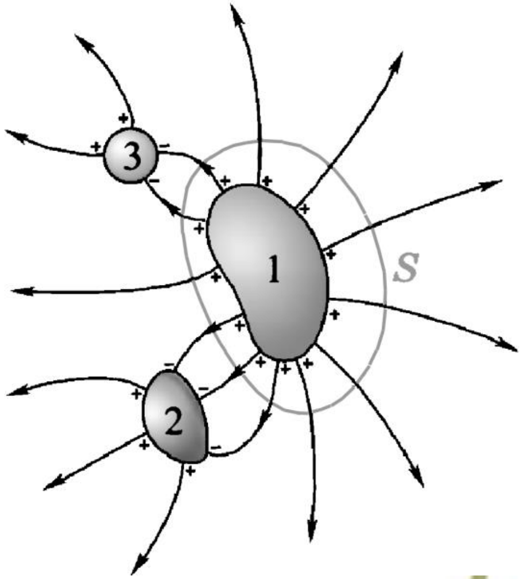
■证明（反证）

在无电荷空间里电势分布连续变化，若空间有电势大于0（或小于0）的点，而边界上电势又处处等于零——必出现极大值或极小值——矛盾



■推广：若完全由导体所包围的空间里各导体的电势都相等（设为U_0），则空间电势等于常量U_0

引理三：若所有导体都不带电，则各导体的电势都相等



- 证明（反证）
  - 若不相等，必有一个最高，如图设$U_1>U_2$、U_3，——导体1是电场线的起点——其表面只有正电荷——但与导体1上的总电量为0矛盾

- 引理二(＋)引理三可推论：所有导体都不带电的情况下空间各处的电势也和导体一样，等于同一常量

叠加原理

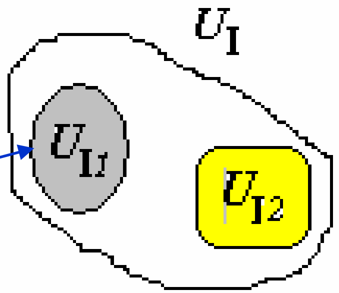
- 在给定各带电导体的几何形状、相对位置后，赋予两组边界条件： U_I、 U_{II}
  - 1：给定每个导体的电势 U_{Ik}（或总电量 Q_{Ik}）
  - 2：给定每个导体的电势 U_{IIk}（或总电量 Q_{IIk}）
  - 设 U_I、 U_{II} 满足上述两条件，则它们的线性组合

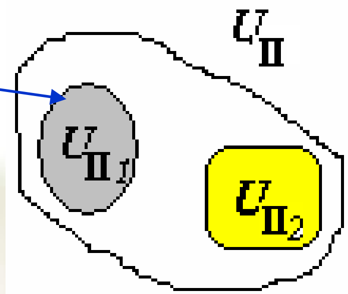
$U=a\,U_I+b\,U_{II}$ 必满足条件3:

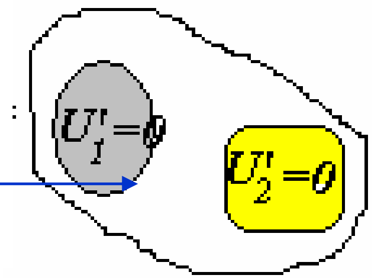
3：给定每个导体的电势 $U_k=a\,U_{Ik}+b\,U_{II\,k}$（或总电量 $Q_k=Q_{Ik}\,a_k+b\,Q_{II\,k}$）

特例： 取 $U_{Ik}=U_{II\,k}$，则 $U=U_I-U_{II}(a=1,b=-1)$ 满足

4：给定每个导体的电势为0







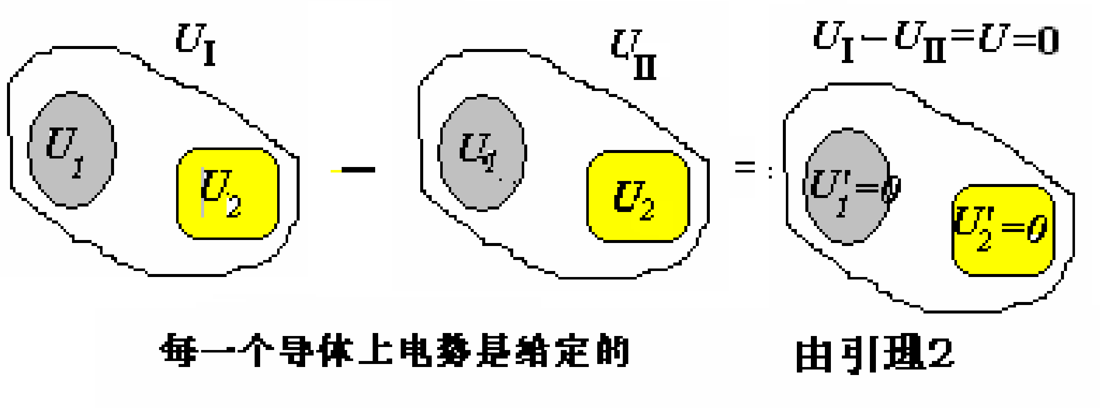
$U_I-U_{II}=U=0$

为什么？引理二

唯一性定理

- 给定每个导体电势的情形
  - 设对应同一组边值 $U_k(k=1,2\cdots)$
    有两种恒定的电势分布U_I和U_{II}

根据引理二
所有导体上电势都为0，导体以外空间电势处处为0



$$U_I = U_{II}$$

$$\Rightarrow E_I = E_{II}$$

说明场分布是唯一的

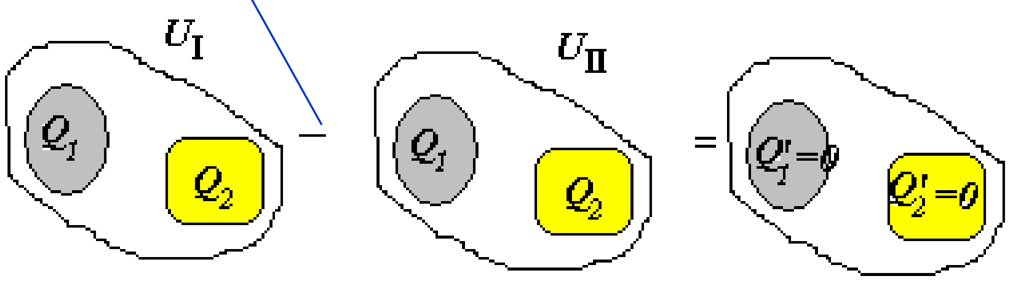
给定每个导体上总电量的情形

第k个导体上的电量

电量与场强、电势的关系

设对应同一组边值有两种恒定电势分布

$$Q_k = \oiint_{S_k} \sigma_e dS = \varepsilon_0 \oiint_{S_k} E_n dS = -\varepsilon_0 \oiint_{S_k} \frac{\partial U}{\partial n} dS$$



相当于所有导体都不带电

$U = U_{\mathrm{I}} - U_{\mathrm{II}}$

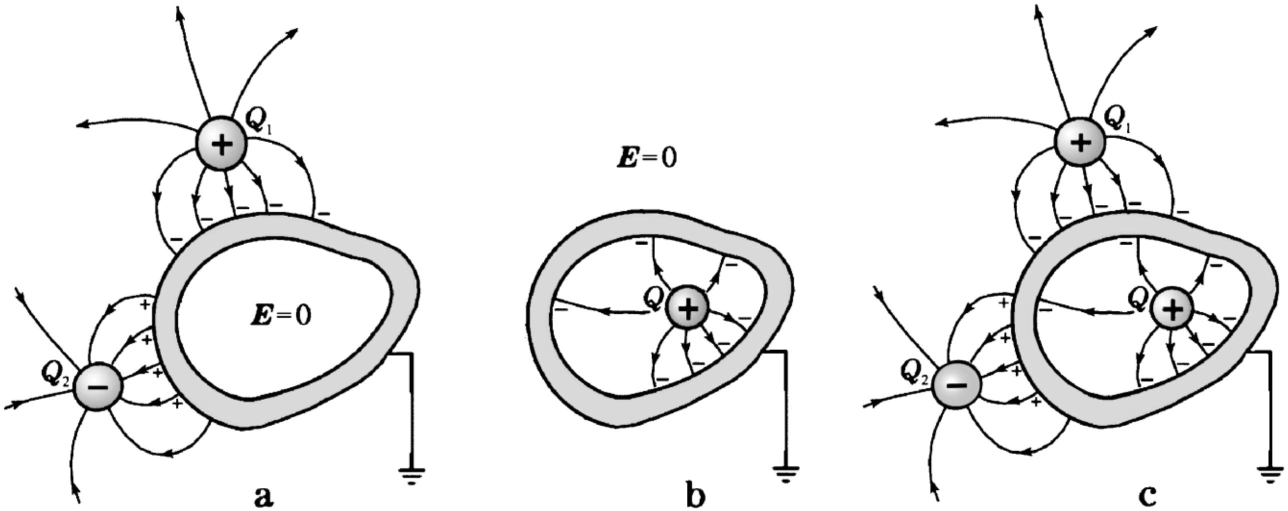
与电势参考点有关，不影响电势梯度

$$-\varepsilon_0 \oiint_{S_k} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow U = U_I - U_{II} = \text{常量} \Rightarrow E_I = E_{II}$$

说明场分布是唯一的

解释静电屏蔽

- 唯一性定理表明：一旦找到某种电荷分布，既不违背导体平衡特性，又是物理实在，则这种电荷分布就是唯一可能的分布。



- 图中是根据导体内场强处处为零判断存在两种实在的电荷分布的迭加就是唯一的分布

电像法——解静电问题的一种特殊方法

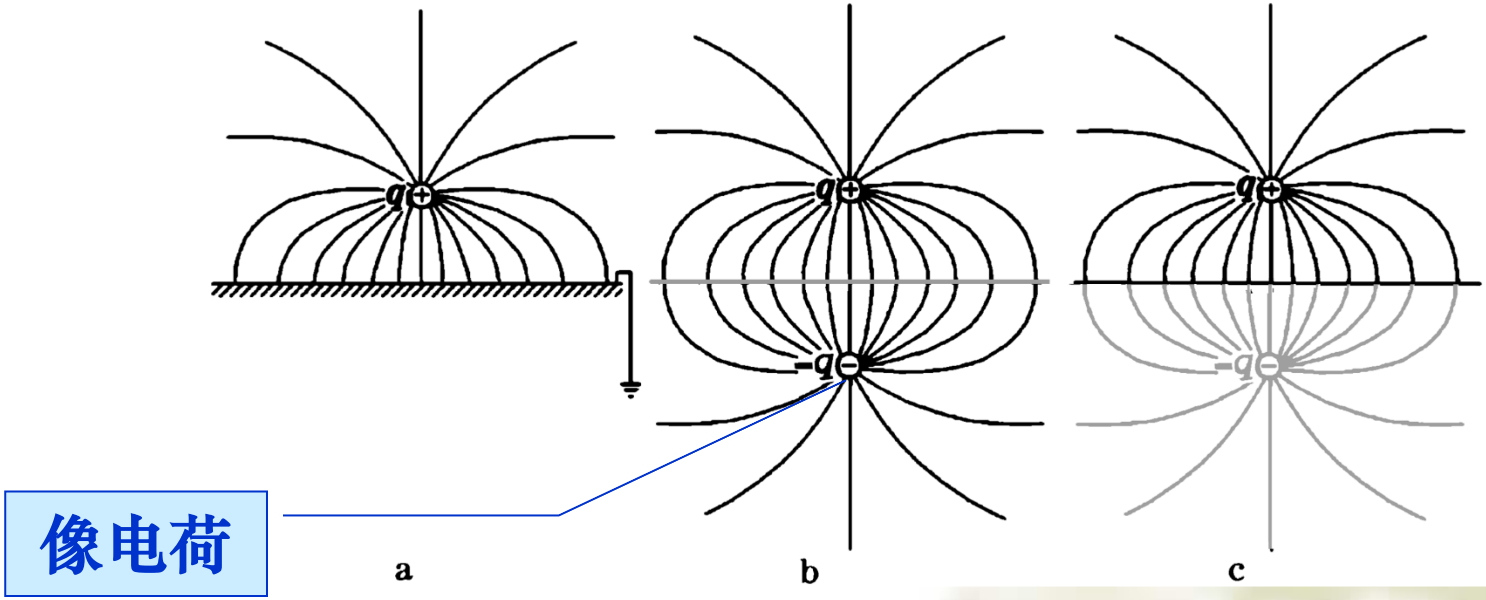
- 实质：用假想的不存在的点电荷，去代替未知的边界面（或介质交界面）上的真实电荷（如感生电荷或极化电荷）
- 代替的条件：不改变所求问题中的方程，边值关系和边界条件
- 假想电荷的个数、电量极位置由方程和边界条件决定

几种常用的导体镜像面

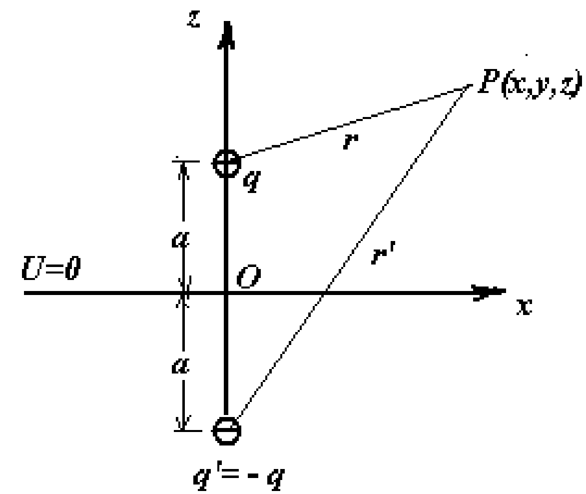
- 平面镜像
  - 无限大平面
  - 两无限大平面相交角形
- 导体球面镜像
- 导体柱面镜像

接地无限大导体板附近的点电荷

- 在一接地的无穷大平面导体前有一点电荷q求空间的电场分布和导体表面上的电荷分布
- 基本思想：利用唯一性定理，边界条件确定了，解是唯一的，可以寻找合理的试探解



解： ❖ **任一P点的电势**



$$U(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)\qquad z\geq 0$$

其中$r'=\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}$;

$$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}$$

$$U(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

- **导体上电荷的面密度** $\sigma_e=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{n}\cdot\varepsilon_0\nabla U$

$$\sigma_e=-\varepsilon_0\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0}==-\frac{q}{2\pi}\frac{\overbrace{a}^{l/2}}{(\underbrace{x^2+y^2}_{\rho}+a^2)^{3/2}}$$