

提纲 § 1.4 电势及其梯度、环路定理

4.1 静电场的保守性和环路定理

4.2 电势差和电势 等势面、电势梯度

例一 点电荷产生的电场中的电势分布

用场强分布和电势的定义直接积分

例二 求均匀带电球面的电场中的电势分布

例三 求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布

例四 计算电偶极子场中任一点 P 的电势

例五 试计算均匀带电圆环轴线上任一点 P 的电势



静电场力做功与路径无关

- 电荷间的作用力是有心力 —— 环路定理
- 讨论静电场的环流

流速场的环流 $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \text{有旋} \\ = 0 \Rightarrow \text{无旋} \end{cases}$

- 静电场：电力线不闭合
- 可以猜到静电场的环流为零 $\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$



§ 1.4 4.1 静电场的保守性和环路定理

(一) 静电场力做功与路径无关

—静电场力是保守力,用库仑定律和叠加原理证明

* 在点电荷 q 的场中从 P 点到 Q 点移动试探电荷 q_0

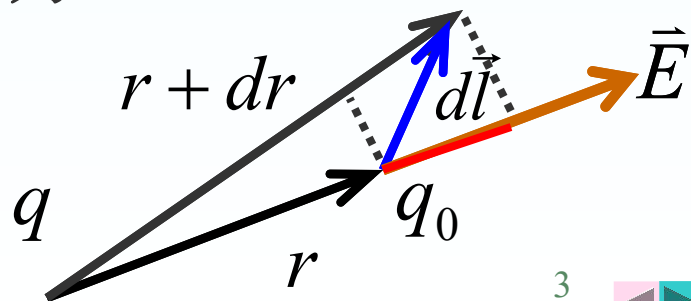
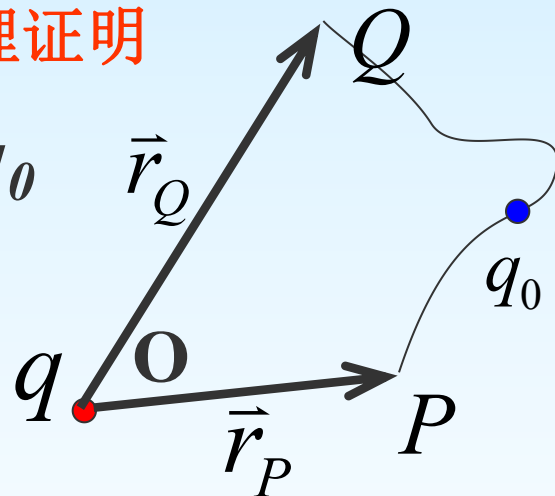
点电荷 q_0 从 \vec{r} 到 $\vec{r} + d\vec{l}$, 电场做的元功:

$$\because \theta = (\vec{E} \wedge d\vec{l})$$

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cdot dl \cdot \cos \theta = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

点电荷 q_0 从 P 到 Q 点, 电场力所做的功为:

$$A = \int_P^Q dA = \int_P^Q \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$



$$A = \int_P^Q dA = \int_P^Q \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right)$$

做功与路径无关

* 对于由多个静止点电荷组成的系统或静止的连续带电体，可看成是由无数电荷元组成，由场强叠加原理可得到电场强度的线积分（移动单位电荷的功）为：

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_P^Q \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^Q \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_P^Q \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = A(P, Q)$$

任何静电场，电场强度的线积分只取决于起始和终止的位置，而与路径无关。这一特性叫做静电场的保守性。



点电荷组产生的场

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

- 在电场中把试探电荷从 P 移至 Q 电场力所做的功

$$\begin{aligned} A_{PQ} &= \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= q_0 \left[\int_P^Q \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^Q \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_P^Q \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \right] \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\frac{q_1}{r_{p1}} - \frac{q_1}{r_{Q1}} \right) + \left(\frac{q_2}{r_{p2}} - \frac{q_2}{r_{Q2}} \right) \right\} + \dots + \left(\frac{q_n}{r_{pn}} - \frac{q_n}{r_{Qn}} \right) \end{aligned}$$

P 到 q_1
的距离

Q 到 q_1 的
距离

每项均与路径无关，只与位置有关



任意有限大的带电体产生的电场

- 可以将带电体无限分割成微元，每一个微元均为一点电荷 —— 点电荷组
- **结论：**在任何电场中移动试探电荷时，电场力所做的功除了与电场本身有关外，只与试探电荷的大小及其起点、终点有关，与移动电荷所走过的路径无关



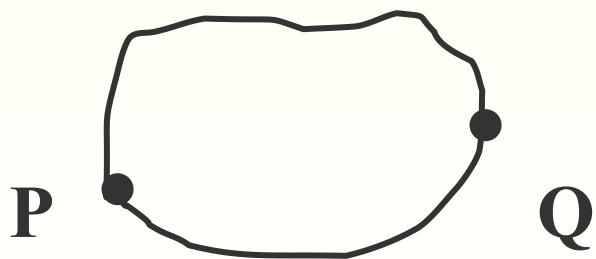
(二) 静电场的环路定理

*(Circuital theorem
of electrostatic field)*

静电场的保守性还可表述为：
在静电场中，场强沿任意闭合
路径的线积分等于零。称为静
电场的环路定理或环流定理。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



运动电荷的场不是保守场，而是
非保守场，将在磁场部分讨论。



讨论

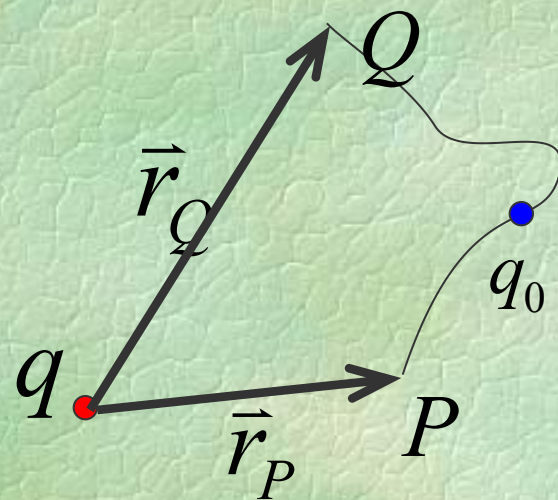
- 在证明Gauss定理中，说电力必须与 r^2 成反比，那么在环路定理的证明中是否也必须要求与 r^2 成反比？
- 答：不一定 如弹性力 $f = kr$ 也有类似性质
- 哪些力具有做功与路径无关这种性质？
 - 引力 \longrightarrow 引入引力势能
 - 重力 \longrightarrow 引入重力势能 \longrightarrow 势函数 (位)
 - 弹性力 \longrightarrow 引入弹性势能
 - 静电力 \longrightarrow 引入静电势能



(三) 电势能、电势差、电势

静电力将电荷 q_0 从电场中 P 点移到 Q 点，静电力做正功时，静电场的电势能减少。

$$q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



定义：在电场中把单位正电荷从 P 点移到 Q 点，
静电力所做的功，为静电场中两点的电势差：

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

显然，场强总是从电势高处指向电势低处

电势：(*electric potential*) 场点 P 的电势定义为：

将单位正电荷从 P 点沿任意路径移到
电势为零的点时，静电力所做的功。

当电荷只分布在有限区域时，零点通常选在无穷远处

$$U_P = U_{P\infty} = U_P - U_\infty = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

在实际问题中，也常常
选地球的电势为零电势

电势差与电势的零点选取无关。

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_Q^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_P - U_Q$$

初-末



电势能、电势差、电势

电场力的功

定义

静电场与 q_0 有能量交换

$$A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_{PQ} = W_P - W_Q = -(\underline{W_Q - W_P})$$

电势能的改变量

q_0 在 P 点的电势能

q_0 在 Q 点的电势能

电势增量

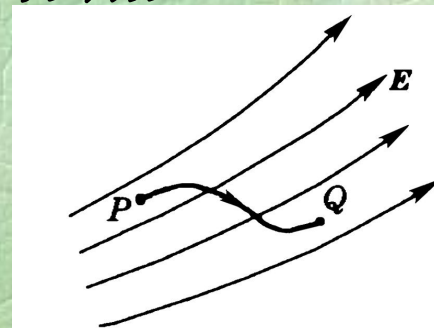
- 可以与重力做功类比
 - 电场力做正功，电势能将减少
 - 电场力做负功，电势能将增加

电势的定义

$$A_{PQ} \begin{cases} > 0 & \text{电场付出能量, 能量减少} \\ = W_{PQ} & \text{(电势能的减少, 与场源和 } q_0 \text{ 均有关)} \\ < 0 & \text{电场吸收能量, 能量增加} \end{cases}$$

- 从中扣除 q_0 , 即引入电势

$$\frac{W_{PQ}}{q_0} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



- P 、 Q 两点之间的电势差定义为

- 从 P 点到 Q 点移动单位正电荷时电场力所作的功
- 单位正电荷的电势能差

空间某点的电势值

- 为了确定某点的值，还需要选择零点
- 一般选择无穷远为势能零点, P 点电势值为

$$U(p) = U_{P\infty} = \frac{A_P}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 两点之间电势差可表为两点电势值之差

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = U(P) - U(Q)$$

- 单位: $1\text{V}(\text{伏特}) = 1\text{J/C}$



电势差和电势的单位相同，在国际单位制中，
电势的单位为：焦耳/库仑（记作 J/C ），也称
为伏特（Volt, V），即 $1V=1J/C$

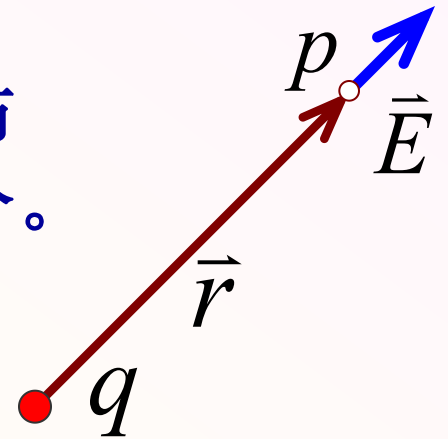
$$U = \frac{A}{q} = Ed$$

因此，当已知电势分布时，可用电势差求出
点电荷在电场中移动时电场力所做的功：

$$A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 (U_P - U_Q)$$

例一、求点电荷产生的电场中的电势分布
用场强分布和电势的定义直接积分。

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{选路径}$$



$$U_P = U_P - U_\infty = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P}$$



$$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p}$$

正点电荷周围的场电势为正
离电荷越远，电势越低。

负点电荷周围的场电势为负
离电荷越远，电势越高。

例二、求均匀带电球面的电场中的电势分布。

设球面半径为 R ，总带电量为 Q

带电球面是个等势体。

$$U(r) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r \geq R$$

$$U(r) = \int_r^R E dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad r \leq R$$

在球面处场强不连续，而电势是连续的。📖16比较

均匀带电球体：

$$U(r) = \int_r^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \quad r \leq R$$



例三、求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布

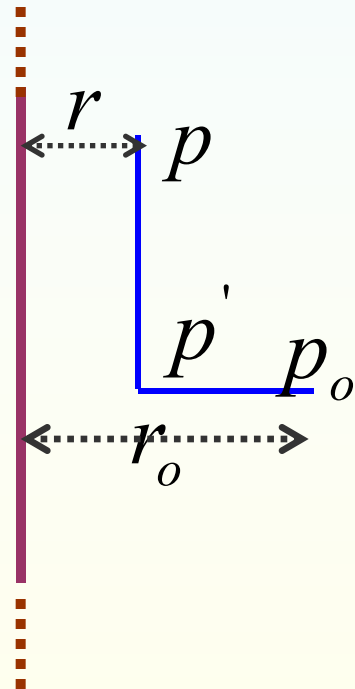
已知场强为： $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ 方向垂直于带电直线。
电荷线密度

若仍然选取无穷远为电势零点，则由积分可知各点电势将为无限大而失去意义。此时，我们可以选取某一距带电直导线为 r_0 的 p_0 点为电势零点，则距带电直线为 r 的 p 点的电势

$$U = \int_p^{p'} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{p'}^{p_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \int_{p'}^{p_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_0 - \ln r) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

由此例看出，当电荷分布扩展到无穷远时，电势零点不能再选在无穷远处。



(四) 电势的叠加原理

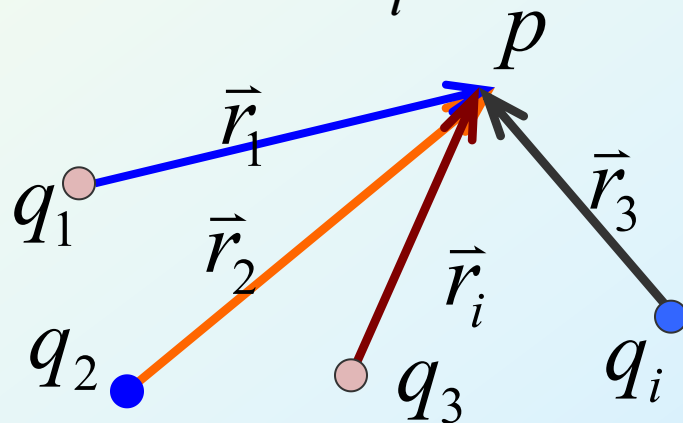
由场强叠加原理和电势的定义，直接得出电势叠加原理

表述：一个点电荷系的电场中,任一点的电势等于每一个带电体单独存在时在该点所产生电势的代数和。

表达式：
$$U(p) = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_p^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots) \cdot d\vec{l} = \sum_i U_i(p)$$

$$U_i(p) = \int_p^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ip}}$$

$$U(p) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$



当电荷连续分布时，可以设想它由许多电荷元组成，将每个电荷元看成点电荷，它产生的电势的叠加就是总的电势。可写为：



电荷体密度为 ρ_e 的带电体产生的电势

$$U(r) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U(r) = \iiint_V \frac{\rho_e dV}{4\pi\epsilon_0 r}$$

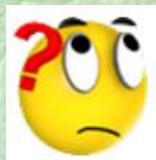
电荷面密度为 σ_e 的带电体产生的电势

$$U(r) = \iint_S \frac{\sigma_e dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

电荷线密度为 η_e 的带电体产生的电势

$$U(r) = \int_L \frac{\eta_e dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

求电势的方法： 1 场强的线积分； 2 电势叠加原理



电荷不均匀分布在球面上，求球心处的电势



讨论

- 电势与场强一样是一个描述场本身性质的物理量，与试探电荷无关，是**标量**。**电势叠加是标量叠加。**
- 电势 U_P ：P与无穷处电势差
- 电势零点 选取
 - 可以任意选取
 - 选择零点原则：场弱、变化不太剧烈
- 问题
 - 选无穷远为零点 \Leftarrow ? \Rightarrow 选地为零点即地和无穷远等电势吗?



地与无穷远的电势差

- 实际地球周围大气中有一个方向向下的静电场是地球所带的负电荷和大气中的等离子体产生的
- 若以无穷远为势能零点，则地球的电势为

$$U_{\text{地}} = -5.4 \times 10^8 V$$

■ 思考：

- 点电荷的势能零点是否可以选在电荷上？
- 无限大平板的势能零点能否选在无穷远？

