毕奥－萨伐尔定律

- Biot和Savart通过设计实验研究电流对磁极的作用力
- 在数学家Laplace的帮助下，得出B-S定律（早于安培）

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1(d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r^3}$$

与Idl、$\sin\theta$成正比，与r^2成反比

$d\vec{\mathbf{B}} \perp d\vec{l}_1, \vec{r}$构成的平面

磁感应强度B

- 电场E　　定量描述电场分布
- 磁场B　　定量描述磁场分布
- 引入试探电流元

闭合回路L_1上的电流元

$$I_2 d\vec{l}_2 \qquad\qquad I_1 d\vec{l}_1$$

$$d\vec{F}_{12} = k\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r^2_{12}}, \qquad d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r^2_{12}}$$

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \times \oint_{L_1}\frac{I_1(d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r^2_{12}}\right]$$

与试探电流元无关，从中扣除试探电流元

Biot-Savart定律

$$d\overrightarrow{F_2} = I_2 d\overrightarrow{l_2} \times \mathrm{d}\vec{\mathrm{B}}$$

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\vec{r})}{r^3}$$

与Idl、$\sin\theta$成正比，与$\mathbf{r}^2$成反比

$d\vec{\mathbf{B}} \perp d\vec{l}, \vec{r}$构成的平面

$$\vec{\mathbf{B}} = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\vec{r})}{r^3}$$

磁感应强度B取最大值，$\sin\theta=1$

说明

- $I_2 dl_2$在B中的受力取决于$dl_2 \times B$的方向
- B的场源可以是任何产生磁场的场源如磁铁
- 单位：N/A·m；也用特斯拉（T）表示

  1T=1 N/A·m=10^4 Gs (高斯)
- B的叠加原理
  - 磁场同样遵从矢量叠加原理
  - 任何一个闭合回路产生的磁场，可看成回路上各个电流元产生的元磁场强度的矢量和

磁感应线

- *与电场力线相对应理解*
- 大小---力线密度；方向-----每点的切线方向
- *磁棒：闭合曲线；螺线管：外部从N极出发，终止于S极，内部从S极出发，终止于N极，闭合曲线*
- *显示比电场力线容易*

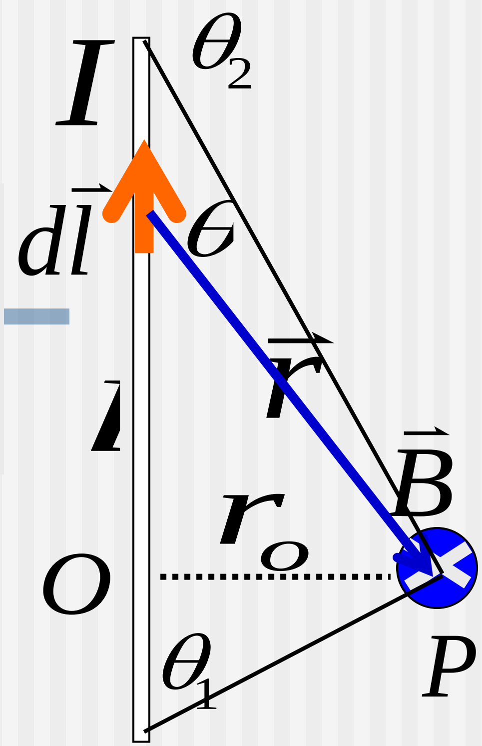
载流回路的磁场

- **Biot-Savart-Laplace定律的应用**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\vec{r})}{r^3} \quad \begin{cases} \text{与}Idl\text{、}\sin\theta\text{成正比，与}r^2\text{成反比} \\ d\vec{B}\perp d\vec{l},\vec{r}\text{构成的平面} \end{cases}$$

- **载流直导线的磁场**
- **载流圆线圈轴线上的磁场**
- **载流螺线管中的磁场**
- **亥姆霍兹线圈**

例题一：直线电流的磁场



各电流元产生的磁场方向相同，均为垂直纸面向里，总磁场方向也是垂直纸面向里。所以只需求标量积分。

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_L \frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$\because \boldsymbol{l} = -\boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{\theta}$ $\quad\therefore\ l = -r_o \mathrm{ctg}\,\theta$

$\because \boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\theta}$ $\quad\therefore\ dl = r_o d\theta / \sin^2\theta$

$$\boldsymbol{B} = \int_L \frac{\boldsymbol{\mu}_o \boldsymbol{I}\cdot \boldsymbol{r}_o \boldsymbol{d\theta}\cdot\sin\boldsymbol{\theta}}{4\boldsymbol{\pi}\sin^2\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{r}_o^2/\sin^2\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\mu}_o\boldsymbol{I}}{4\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{r}_o}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{d\theta}$$

$$B=\int_L \frac{\mu_o I\cdot r_o d\theta\cdot\sin\theta}{4\pi\sin^2\theta\cdot r_o^2/\sin^2\theta}=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

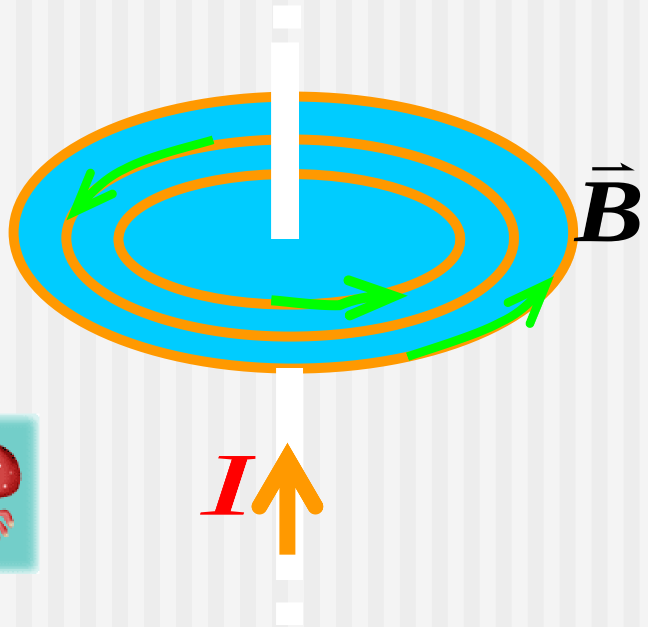
磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向，与电流成右手螺旋关系，拇指表示电流方向，四指给出磁场方向。

当$\theta_1=0,\theta_2=\pi$ 时，

$$B=\frac{\mu_o I}{2\pi r_o}$$

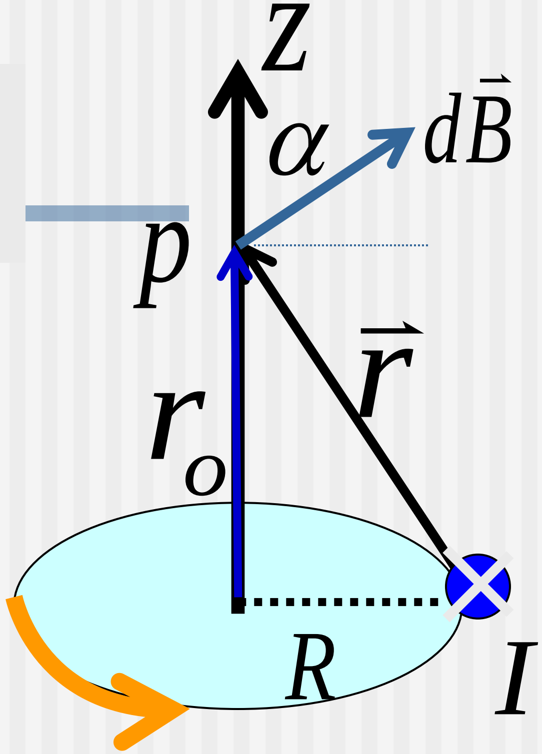
当$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi/2$ 时，

$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}$$



例题二：载流圆线圈轴上的磁场

分析其磁场方向只有沿轴的分量，垂直于轴的分量和为零。



$$B_z = \oint dB\cos\alpha$$

$$\because\ dB = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}dl; \quad \because\ r^2 = r_o^2 + R^2$$

$$\because\ \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r_o^2}}$$

代入以上积分得：
$$B_z = \frac{\mu_o I\cdot\cos\alpha\cdot}{4\pi r^2}\oint dl$$

$$B_z = \frac{\mu_o R^2 I}{2(R^2 + r_o^2)^{3/2}}$$

得出圆电流环，在其轴上一点的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

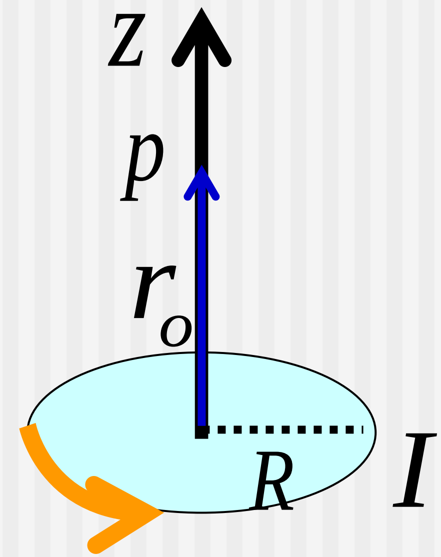
*两种特殊的情况：

$r_o=0$ 圆电流环中心的场强 $B = \dfrac{\mu_o I}{2R}$

$r_o = \infty$ 轴上无穷远的场强为

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \vec{P}_m}{2\pi r_o^3}$$

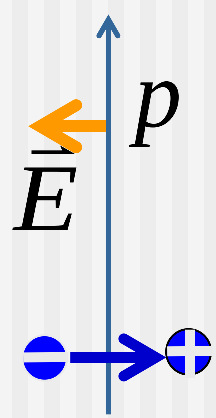
磁矩 $\vec{P}_m = I\pi R^2 \hat{S}$



[附]:电偶极子在中垂线上无穷远处的电场强度：

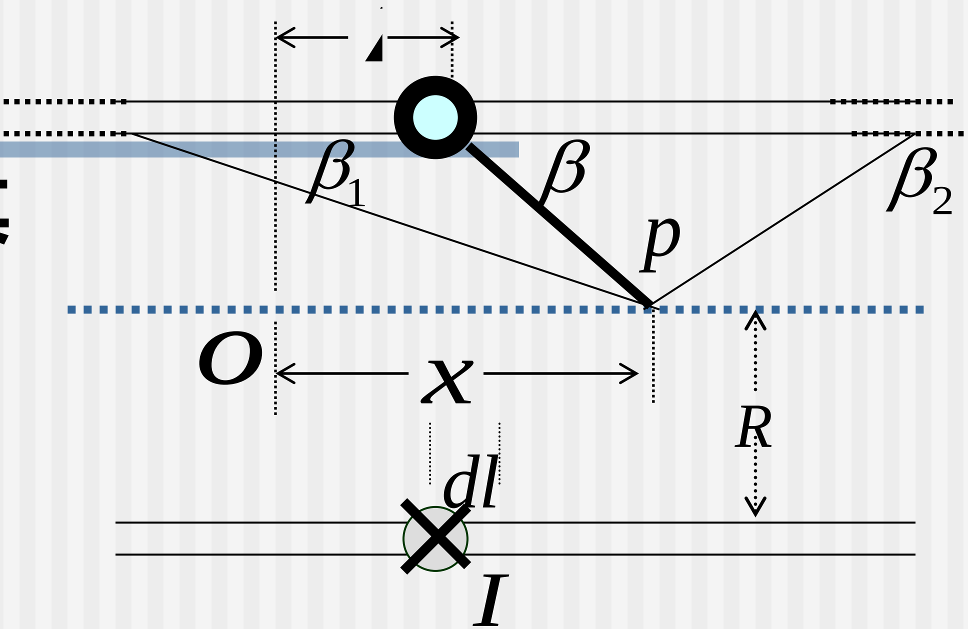
$$\vec{E} = \frac{-\vec{P}_e}{4\pi\varepsilon_0 r_o^3}$$

电偶极矩 $\vec{P}_e = q\vec{l}$



例题三：载流螺线管(*Solenoid*)在其轴上的磁场

求半径为 R，总长度 L，单位长度上的匝数为 n的螺线管在其轴线上一点的磁场？

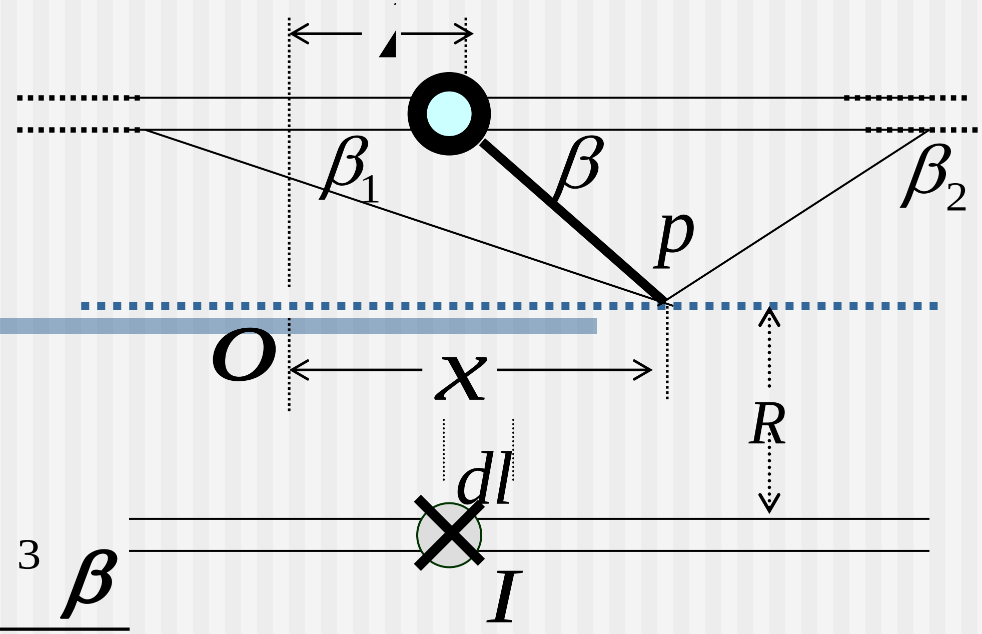


解：长度为 dl 内的各匝圆线圈的总效果，是一匝圆电流线圈的 ndl 倍。

选坐标如图示

$$\therefore dB = \frac{\mu_o}{2} \frac{R^2 In \cdot dl}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}}$$

选坐标如图示



$$x - l = R\,ctg\beta$$

$$dl = \frac{R}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$\frac{R^2}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}} = \frac{\sin^3\beta}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{R}{r}$$

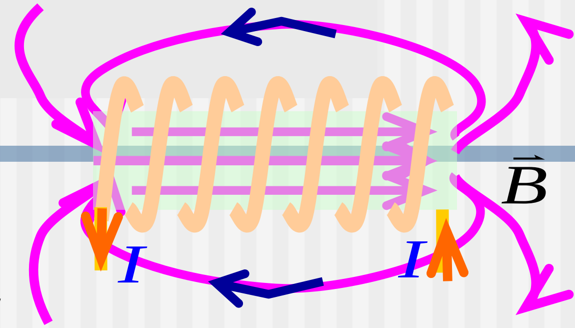
$$\therefore B = \frac{\mu_o}{2}\int_{L_1}^{L_2}\frac{R^2 In\cdot dl}{[R^2 + (x-l)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_o nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\cdot d\beta$$

载流螺线管轴上磁场的方向与电流满足右手螺旋法则。

$$\therefore B=\frac{\mu_o nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\cdot d\beta$$

$$=\frac{\mu_o nI}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$$



$$\beta_1=0,\beta_2=\pi$$

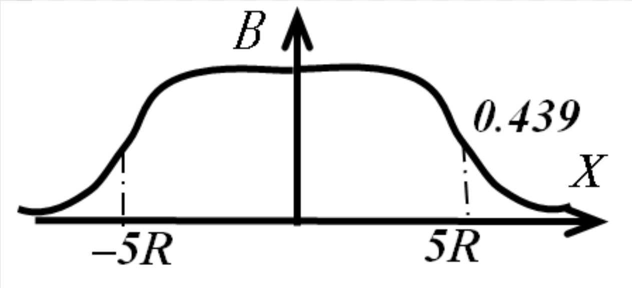
$$\therefore B=\mu_o nI$$

无限长载流螺线管在其轴上是匀强磁场,其方向与电流成右手螺旋关系

$$\beta_1=0,\beta_2=\pi/2$$

$$\therefore B_{管口}=\mu_o nI/2$$

半无限长螺线管的管端口处，磁场等于中心处的一半。



计算一个**10*R***长的螺旋管，结果表明：在距管轴中心约七个管半径处，磁场就几乎等于零了。

载流直导线的磁场

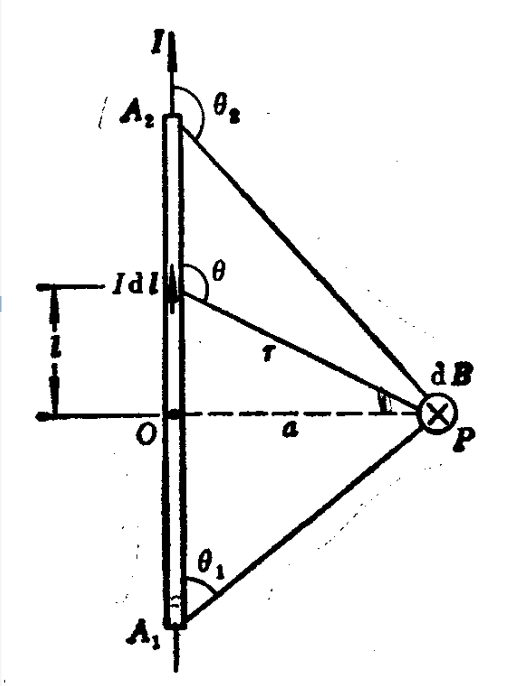


图 4-12 载流直导线的磁场

- 分割，取微元*Idl*，微元在 P 点的磁感应强度

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\vec{r})}{r^3}\left\langle \begin{array}{l} \text{大小}: \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2} \\ \text{方向}: \otimes \end{array}\right.$$

- 叠加

$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$l = -actg\theta;$$

$$dl = \frac{a}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta}$$

计算

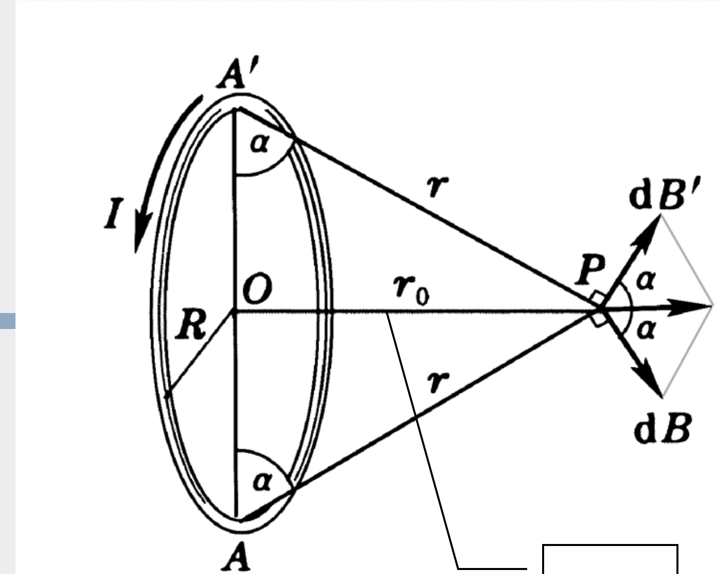
$$B=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta d\theta}{a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(-\cos\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

无限长 $\theta_1=0,\theta_2=\pi,$ $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

半无限长 $\theta_1=0,\theta_2=\frac{\pi}{2}$ $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$

载流圆线圈轴线上的磁场



x

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

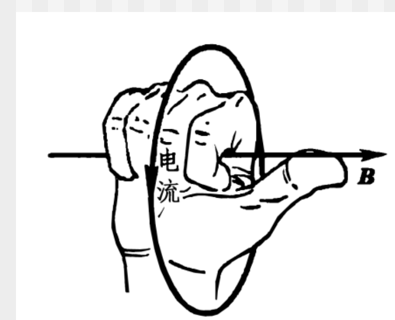
- **由对称性,只有x分量不为零,即**

$$B_x = \int dB_x = \int dB\cos\alpha$$

$$B_x = \int \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}\sin\alpha = \frac{\mu_0 IR\cdot 2\pi R}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \rightarrow$$

$$x \to 0,\ B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

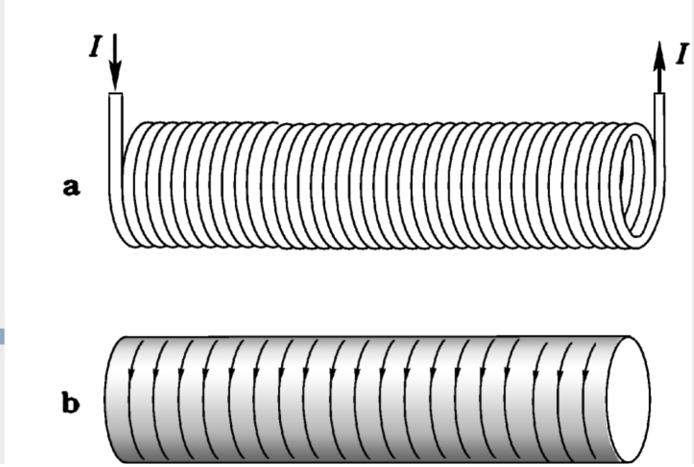
$$x \gg \mathrm{R},\ B_x = \frac{\mu_0 \mathrm{R}^2 I}{2\mathrm{x}^3}$$

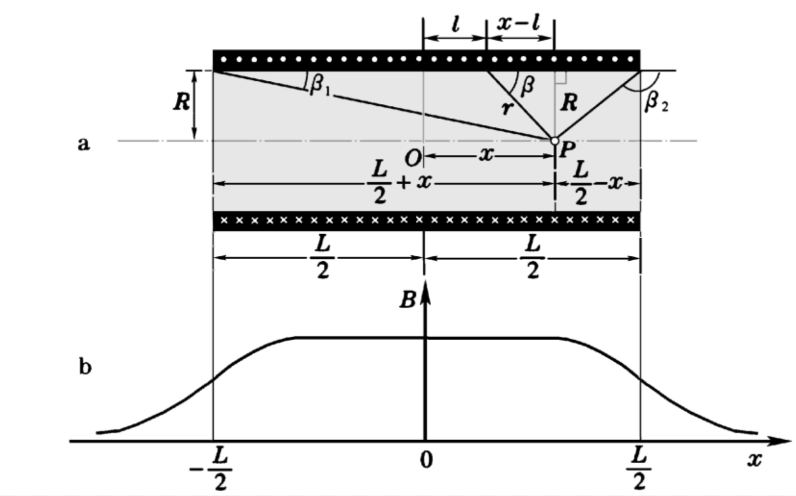


载流螺线管中的磁场

- 长为L，匝数为N密绕螺线管，可忽略螺距，半径为R。（一匝线圈轴线上的场，可用圆电流结果）在螺线管上距 p点处取一小段为（含匝线圈）

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2+(x\text{-}l)^2)^{3/2}}$$





$$B=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dB=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\mu_0 nIR^2 dl}{2(R^2+(x\text{-}l)^2)^{3/2}}$$

$$x\text{-}l=R\cot\beta,\ dl=\frac{R}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$=r,\ x-l=r\cos\beta,\ \frac{R}{r}=\sin\beta$$

$$B=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\mu_0 nIR^2}{2r^3}\left(-\frac{R}{\sin^2\beta}\right)d\beta=\int_{\beta_1}^{\beta_2}-\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

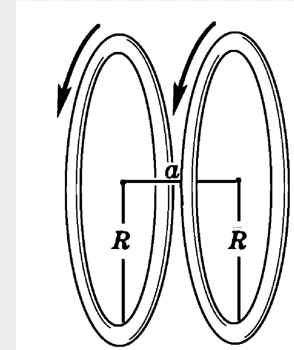
说明轴线上的B处处相同，可以证明，管内B也均匀

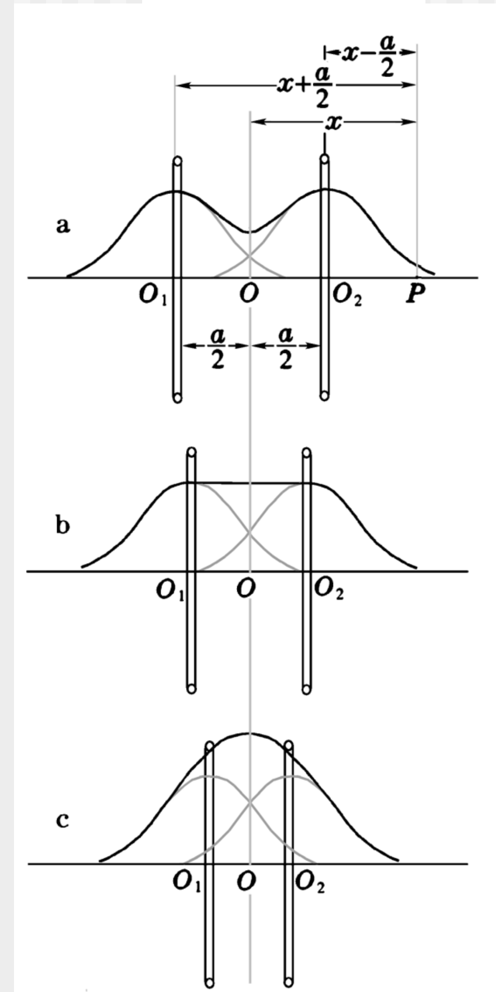
$$L\longrightarrow\infty,\ \beta_1=\pi,\ \beta_2=0\qquad B=\mu_0 nI$$

半无限长 $\beta_1=\pi,\beta_2=\frac{\pi}{2}$ **或**$\beta_1=\frac{\pi}{2},\beta_2=0$ $B=\frac{\mu_0 nI}{2}$

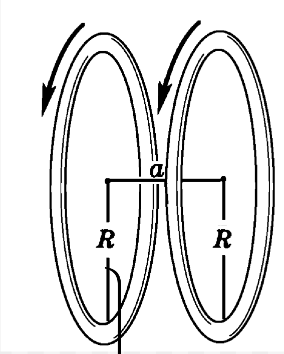
亥姆霍兹线圈

- 结构：一对间距等于半径的同轴载流圆线圈
- 用处：在实验室中，当所需磁场不太强时，常用来产生均匀磁场
- 命题：证明上述线圈在轴线中心附近的磁场最为均匀
  - 将两单匝线圈轴线上磁场叠加
  - 求极值





$$B_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}\qquad B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}$$



$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi R^2 I\left\{\frac{1}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}+\frac{1}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{3/2}}\right\}$$

- 求一阶导数

$$\frac{dB}{dx}=-\frac{\mu_0}{4\pi}6\pi R^2 I\left\{\frac{x+\frac{a}{2}}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{5/2}}+\frac{x-\frac{a}{2}}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{5/2}}\right\}$$

求二阶导数

$$\frac{d^2B}{dx^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}6\pi R^2 I\left\{\frac{4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-R^2}{\left[R^2+(x+\frac{a}{2})^2\right]^{7/2}}+\frac{4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-R^2}{\left[R^2+(x-\frac{a}{2})^2\right]^{7/2}}\right\}$$

令$x=0$**处的**$\frac{d^2B}{dx^2}=0\Rightarrow$**在O点附近磁场最均匀的条件**

$$\left.\frac{d^2B}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{\mu_0}{4\pi}6\pi R^2 I\frac{2a^2-2R^2}{2\left[R^2+\frac{a^2}{4}\right]^{7/2}}=0\Rightarrow a^2=R^2$$

$$a=R$$

小结:

- 原则上，B-S定理加上叠加原理可以求任何载流导线在空间某点的B
- 实际上，只在电流分布具有一定对称性，能够判断其磁场方向，并可简化为标量积分时，才易于求解;
- 为完成积分，需要利用几何关系，统一积分变量;
- 一些重要的结果应牢记备用;
- 如果对称性有所削弱，求解将困难得多
  - 如圆线圈非轴线上一点的磁场，就需要借助特殊函数才能求解
  - 又如在螺距不可忽略时，螺线管的电流既有环向分量又有轴向分量，若除去密绕条件，就更为复杂。