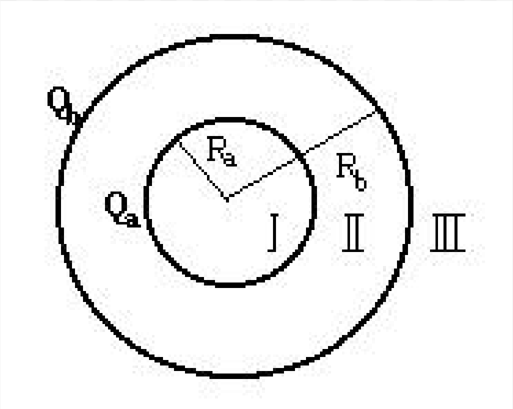
求电势

- 用电势定义求： $U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- 用电势叠加原理求 $U_P = \int dU$

两个均匀带电的同心球面，半径分别为R_a和R_b，带电总量分别为Q_a和Q_b,求图中I、II、III区内的电势分布



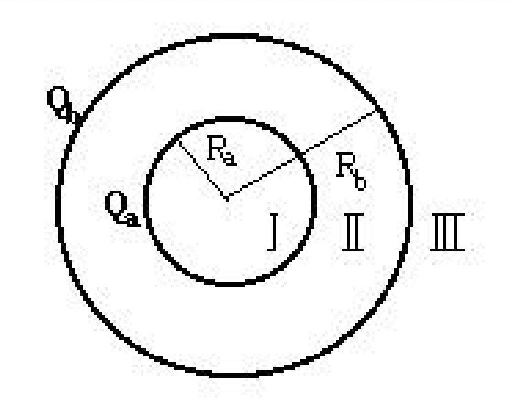
方法一：已知场强求电势

$$E_1 = 0 \qquad 0 < r < R_a$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a}{r^2} \qquad R_a < r < R_b$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_a + Q_b}{r^2} \qquad r > R_b$$

$$III \qquad U_3 = \int_r^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r}$$



$$II \qquad U_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_b} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_b}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\varepsilon_0 R_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{r} + \frac{Q_b}{R_b}\right)$$

$$I \qquad U_1 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_a} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R_a}^{R_b} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_b}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$= 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{R_a} - \frac{Q_b}{R_b}\right) + \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\varepsilon_0 R_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_a}{R_a} + \frac{Q_b}{R_b}\right)$$

方法二：电势叠加

内壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_a & U_{内} = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 R_a} \\ r > R_a & U_{外} = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

外壳单独存在

$$\begin{cases} r < R_b & U_{内} = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 R_b} \\ r > R_b & U_{外} = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

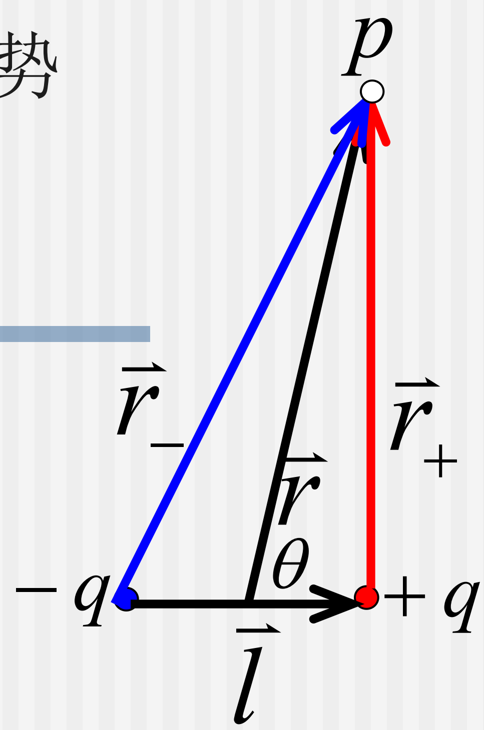
- 各区域的电势分布是内外球壳单独存在时的
- 电势的叠加

I: $U_{1内} + U_{2内}$

II: $U_{1外} + U_{2内}$

III: $U_{1外} + U_{2外}$

例、计算电偶极子场中任一点 p 的电势



$$U_p = \sum_i U_i(p) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

当 $r >> l$ 可做如下近似:

$$r_+ = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_- = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

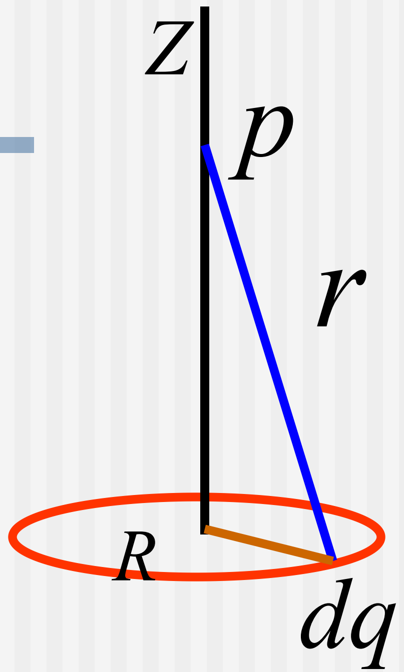
$$U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{(r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta)} \cong \frac{\vec{P}_e \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\because \vec{P}_e \cdot \hat{r} = q\vec{l} \cdot \hat{r} = ql\cos\theta$$

电偶极子远处的性质由它的电偶极距决定

例五、试计算均匀带电圆环轴线上任一点 p 的电势。

设已知带电量为 q $\quad \because \quad dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$



$$\int dU = \int_L \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^{2\pi} \frac{\eta_e R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\therefore U(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

小结：

- 求一点电势要已知这点到无穷远的场强分布；
- 电势叠加要先求各带电体单独存在时的电势，然后再叠加；
- 电势是标量，叠加是标量叠加，比场强叠加容易

电场强度和电势

- 已知场强 → 可求电势
- 已知电势 → 可否求场强?

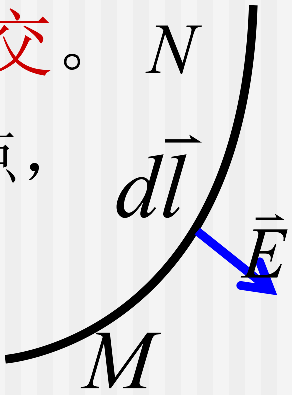
(五) 等势面、*电势梯度　（电场的图示法）

1 等势面：将电场中电势相等的点连接起来组成的面叫做等势面.即 $U(x,y,z)=C$ 的空间曲面称为等势面。

等势面上的任一曲线叫做等势线或等位线。

等势面的性质：

★除电场强度为零处外，电力线与等势面正交。



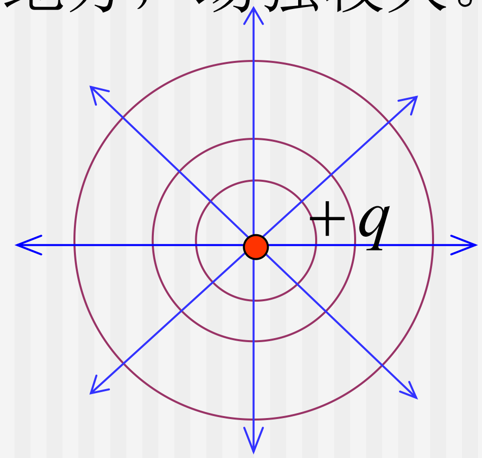
证明：因为将单位正电荷从等势面上M点移到N点，电场力做功为零，而路径不为零 $dl \neq 0$

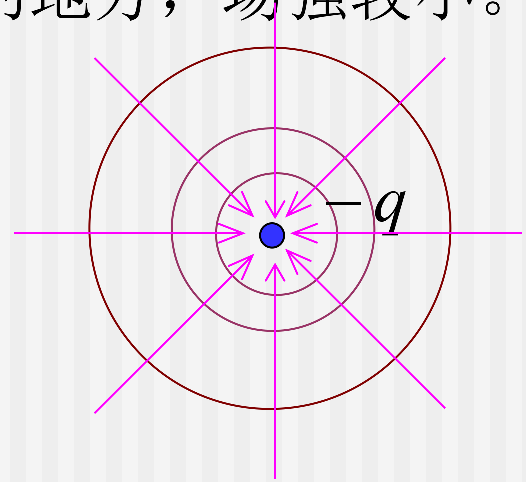
$$\because dA_{MN} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta = 0 \qquad \therefore \theta = \pi/2$$

✸电力线的方向指向电势降低的方向。

因沿电力线方向移动正电荷场力做正功，电势能减少。

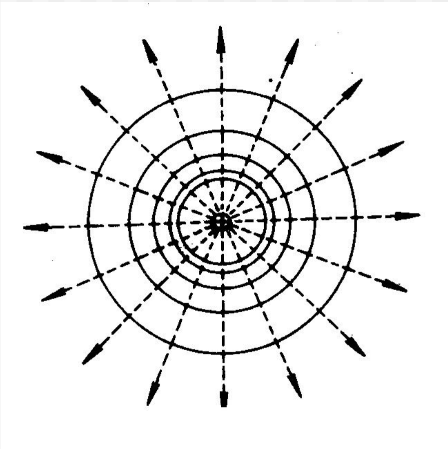
✸规定两个相邻等势面的电势差相等，则等势面较密集的地方，场强较大。等势面较稀疏的地方，场强较小。





- 等势面密集处场强大，稀疏处场强小
- 证明：设：电场中任意两个相邻等势面之间的电势差为一定的值，按这一规定画出等势面图（见图），以点电荷为例，其电势为

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\qquad \text{微分}\Rightarrow dU(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$



因为相邻等势面电势差为一定值，所以有

$$dr\longrightarrow|\Delta r|\qquad ,dU\longrightarrow|\Delta U|$$

定值

$$|\Delta r|=\frac{4\pi\varepsilon_0}{q}r^2|\Delta U|$$

半径之差$\propto$r²

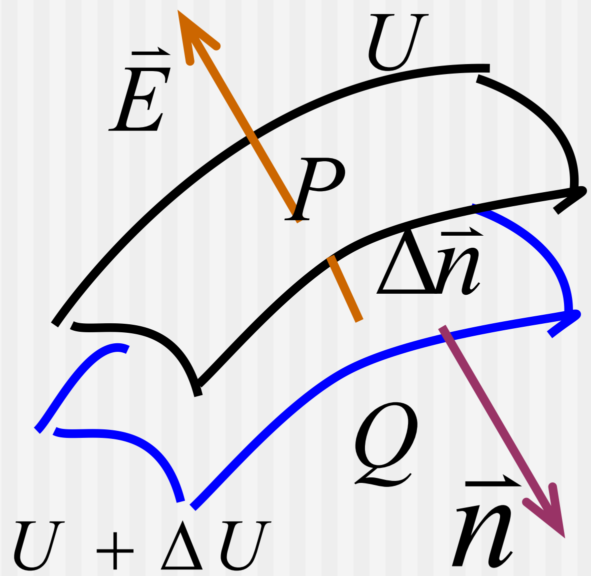
而 $E\propto\frac{1}{r^2}$

$|\Delta r|$越大 $\Rightarrow r^2$越大，等势面间距越大，越稀，E越小

$|\Delta r|$越小 $\Rightarrow r^2$越小，等势面间距越小，越密，E越大

*2 电势梯度

电势分别为U和$U+\Delta U$的邻近等势面，其电力线与二等势面分别相交于P、Q，两点间的垂直距离为$\overline{PQ}=\Delta n$，又等势面法向指向电势升高的方向。



$$\because U_p - U_Q = \int_p^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

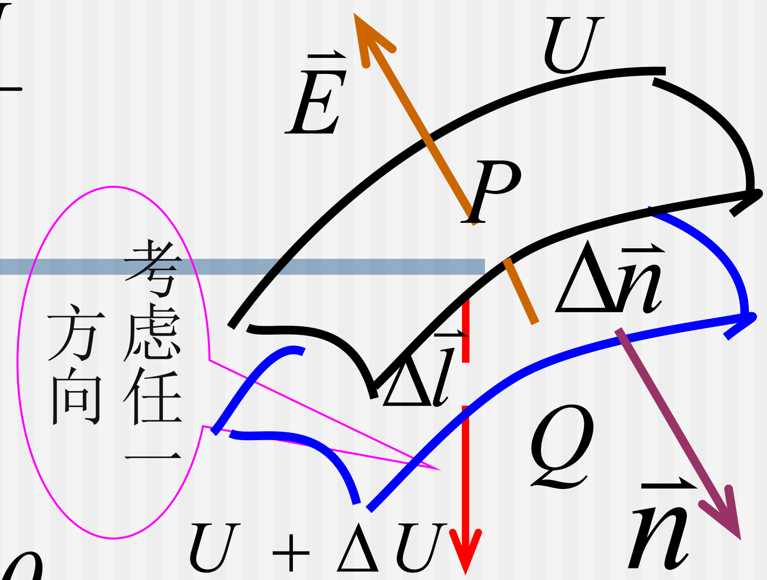
$$= \vec{E}\cdot\Delta\vec{n} = E_n\Delta n = -\Delta U$$

$$(E_n < 0)$$

$$\therefore E_n = -\lim_{\Delta n\to 0}\left|\frac{\Delta U}{\Delta n}\right| = -\frac{\partial U}{\partial n}$$

电场力沿等势面法线方向做负功。

$$\therefore E_n = -\lim_{\Delta n \to 0} \left| \frac{\Delta U}{\Delta n} \right| = -\frac{\partial U}{\partial n}$$



考虑任一 $\vec{l}$ 方向，在两个等势面之间有 $\Delta\vec{l}$ 矢量。

$\Delta\vec{l}$ 与 $\Delta\vec{n}$ 方向之间的夹角是 θ。

$$\therefore \Delta n = \Delta l \cos\theta$$

于是可求出电势在 $\vec{l}$ 方向的变化率：

$$\frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\Delta U}{\Delta n}\frac{\Delta n}{\Delta l}$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n}\cos\theta = -E_n\cos\theta = -E_l$$

结论: ✶ U 沿 $\vec{n}$ 方向的微商最大。

✸ U 沿 $\vec{l}$ 方向的微商等于 $-E_n\cos\theta$

定义: $$\nabla U \overset{def}{\equiv} \frac{\partial U}{\partial n}\hat{n} = gradU$$ del / nabla

称 ∇U 为 U 沿 $\vec{n}$ 方向的梯度(*gradient*)

$$\because E_l = -\frac{\partial U}{\partial l} = E_n \cos\theta$$

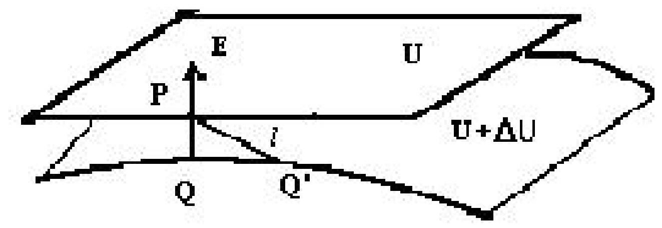
$$\therefore E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \therefore E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad \therefore E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\therefore \vec{E} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

电势梯度 ∇U 是一个矢量,

它的方向是该点附近电势升高最快的方向。

电势梯度



- 场有分布，沿各方向存在不同的方向微商
- 梯度：最大的方向微商
  - 如　速度梯度　温度梯度等
- 沿Δ*l*的方向微商可以表示为 $\dfrac{\partial U}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\longrightarrow o}\dfrac{\Delta U}{\Delta l}$
- 若取垂直方向，即场强方向Δ***n***，则沿该方向的方向微商为 $\dfrac{\partial U}{\partial n}=\lim\limits_{\Delta n\longrightarrow o}\dfrac{\Delta U}{\Delta n}$ 显然 $\Delta n=\Delta l\cos\theta$

有 $\dfrac{\partial U}{\partial n}=\dfrac{\partial U}{\partial l}\dfrac{1}{\cos\theta}$，或 $\dfrac{\partial U}{\partial l}=\dfrac{\partial U}{\partial n}\cos\theta\Rightarrow\dfrac{\partial U}{\partial l}\le\dfrac{\partial U}{\partial n}$

结论：两等势面间U沿Δn 方向的变化率比沿其他任何方向的变化率都大

- 电势梯度
  - 方向： 沿电势变化最快的方向
  - 大小： $\dfrac{\partial U}{\partial n}$
- 在三微空间 $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ ⟹ ∇U或$gradU$
- 电势梯度与场强的关系

$$\Delta U = \left| \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| \approx E\Delta n \quad \Rightarrow E = \left| \lim_{\Delta n \longrightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} \right| = \frac{\partial U}{\partial n}$$

Δn 很小，
场强E变化不大

$$\vec{E} = -\nabla U(gradU) \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

矢量微分算符

直角坐标系表示

- E总是沿着指向电势减少的方向——*E*与*Δn*相反
- 在数学场论中把

$\nabla U:$ 称作梯度

$\nabla \cdot \vec{A}:$ 称作散度

$\nabla \times \vec{A}:$ 称作旋度

静电场的基本方程的微分形式

- 数学场论公式

$$\oiint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V$$ 面积分 → 体积分

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$ 线积分 → 面积分

- 对静电场方程积分形式进行变换可以得到一组静电场的基本微分方程

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

有源

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = 0$$

无旋

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

→ 场方程的微分形式

将 $\vec{E} = -\nabla U$ 代入 $\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot(\nabla U) = -\nabla^2 U = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

得 $\nabla^2 U = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow$ 泊松方程,

若 $\rho=0 \Rightarrow \nabla^2 U=0 \rightarrow$ 拉普拉斯方程

→ 静电场的基本微分方程