# 南开大学物理科学学院 2015-2016 学年第一学期计算物理期末考试
## （颜瑞民整理）

命题人：李宝会 考试时间：2016 年 1 月 11 日

一、（15 分）推导 $f\left(x\right)$ 五点一阶导公式.

二、（13 分）$f\left(-1\right)=6, f\left(0\right)=2, f\left(2\right)=0$ .求 $f\left(x\right)$ 的一阶差分和二阶差分，并用 Newton 插值多项式.

三、（9 分）$x=0.007, \sin x \approx 0.69999\times10^{-2}, \cos x \approx 0.9998$. 较精确地求 $f\left(x\right)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

四、（12 分） $f\left(x\right)=x^3-3x-1, x_0=2$，用 Newton 法求二次迭代.

五、（15 分）分别用中点、梯形、Simpson、Gauss-Legendre 方法求 $\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$，并求精确解.

六、（16 分）用 Jacobi-Seidel 解下列线性方程组，$x_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$,写出前 2 次迭代，并求精确解.

$$\begin{pmatrix}8 & -3 & 2\\ 4 & 11 & -1\\ 6 & 3 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 33\\ 36\end{pmatrix}.$$

七、（20 分）$u'=u/2, u\left(0\right)=1, h=0.2$. 在 $\left[0,4\right]$ 上用 Euler 法和四阶 Runge-Kutta 法求解上述常微分方程.

参考答案：

一、将 $f(x+h), f(x-h), f(x+2h), f(x-2h)$ 分别在 $x$ 处作 Taylor 展开:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots \quad (1)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots \quad (2)$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{4h^2}{2}f''(x)+\frac{8h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{2^n h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots \quad (3)$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+\frac{4h^2}{2}f''(x)-\frac{8h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{2^n h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots (4)$$

(1)-(2)得

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^3}{3}f'''(x)+o(h^5),$$

(3)-(4)得

$$f(x+2h)-f(x-2h)=4hf'(x)+\frac{8h^3}{3}f'''(x)+o(h^5),$$

消去 $f'''(x)$ 有

$$f'(x)=\frac{1}{12}\left[-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)\right]+o(h^4).$$

二、

$$f[-1,0]=\frac{2-6}{0-(-1)}=-4, f[0,2]=\frac{0-2}{2-0}=-1, f[-1,0,2]=\frac{-1-(-4)}{2-(-1)}=1.$$

$$f(x)=f(-1)+(x+1)f[-1,0]+(x+1)xf[-1,0,2]=6-4x-4+x^2+x=x^2-3x+2.$$

三、化简表达式 $f(x)=\tan\frac{x}{2}=\tan 0.0035\approx 0.0035$. 注意由于原表达式 $f(x)$ 在 $x=0.007$ 处分子分母都接近 $0$，最终结果对分子分母的精度会很敏感，不应该使用后两个数据.

四、$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-3x_n-1}{3x_n^2-3}=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2-3}.$

$x_1=\frac{17}{9}$，$x_2=1.879.$

五、

$$f(x)=x^2+1, I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}, f(0)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}, f(1)=2.$$

$$I\approx(1-0)f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}, I\approx\frac{1}{2}(1-0)\big(f(0)+f(1)\big)=\frac{3}{2}, I\approx(1-0)f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4},$$

$$I\approx\frac{1}{6}(1-0)\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=\frac{4}{3}, I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

六、精确解 $x=(3\quad 2\quad 1)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \dfrac{1}{8}\left(20 + 3x_2^{(n)} - 2x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} = \dfrac{1}{11}\left(33 - 4x_1^{(n+1)} + x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} = \dfrac{1}{12}\left(36 - 6x_1^{(n+1)} - 3x_2^{(n+1)}\right) \end{cases}$$

七、

Euler 法： $u_{n+1} = 1.1u_n . u(0) = 1, u(0.2) = 1.1, u(0.4) = 1.21.$

四阶 Runge-Kutta 法： $u_{n+1} = 1.10517u_n . u(0) = 1, u(0.2) = 1.10517, u(0.4) = 1.2214.$

**参考文献：**

[1] 刘金远.计算物理学[M]. 北京：科学出版社，2015.

南开大学 2013 级物理科学学院

颜瑞民

WeChat: yrm314