コンパクトRiemann面に関する相互法則

黒木玄

2016年2月13日(土)作成*

http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20160213ReciprocitiesForRiemannSurfaces.pdf

目次

---

*2016年2月16日(火) 初公開 Ver.1.0. ／2016年2月19日(金) 第6節を追加 Ver1.1. ／2018年2月3日(日) 微修正.

0 序文

このノートの目標はコンパクト Riemann 面上の tame 記号と Contou-Carrère 記号の相互法則の反復積分を用いた証明を紹介することである.

このノートを書くきっかけは twitter で始めたこの件に関する雑談である. その雑談は次の場所で読める: https://twitter.com/genkuroki/status/694780107794182144

1 Heisenberg 代数と留数定理

1.1 コンパクト Riemann 面と代数函数体

X はコンパクト Riemann 面であるとし, X の代数函数体を $K = \mathbb{C}(X)$ と書くことにする. 各点 $x \in X$ に対して, 代数函数体 K の点 x での完備化を $\widehat{K}_x$ と書く. すなわち, $z(x) = 0$ を満たす点 x における局所座標 z を取ると, 完備化 $\widehat{K}_x$ は形式 Laurent 級数体 $\mathbb{C}((z))$ と同一視される. 点 x における Laurent 展開によって自然に $K \subset \widehat{K}_x$ とみなされる. 部分環 $\mathbb{C}[[z]] \subset K_x$ を $\widehat{\mathcal{O}}_x$ と書く.

無限直積環 $\prod_{x\in X} \widehat{K}_x$ の部分環 $\mathbb{A}_X$ を次のように定める:

$$\mathbb{A}_X = \left\{ (f_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \,\middle|\, \text{高々有限個の } x \text{ を除いて } f_x \in \widehat{\mathcal{O}}_x \right\}.$$

この $\mathbb{A}_X$ を Riemann 面 X のアデール環と呼ぶ. 対角埋め込み $K \to \mathbb{A}_X$, $f \mapsto (f)_{x\in X}$ によって $K \subset \mathbb{A}_X$ とみなす.

1.2 Heisenberg 代数

可換な $\mathbb{C}$ 上の Lie 環とみなされたアデール環 $\mathbb{A}_x$ の $\mathbb{C}$ による Lie 環としての中心拡大 $\mathfrak{h}_X = \mathbb{A}_x \oplus \mathbb{C}$ を次のように定めることができる:

$$[(f_x)_{x\in X}, (g_x)_{x\in X}] = \sum_{x\in X} \mathrm{Res}_x(df_x \cdot g_x) \qquad \bigl((f_x)_{x\in X}, (g_x)_{x\in X} \in \mathbb{A}_X\bigr).$$

ここで Res_x は点 x での留数を取り出す操作である. 高々有限個の x を除いて $f_x, g_x \in \widehat{\mathcal{O}}_x$ なので右辺の和は有限和になる. $\mathfrak{h}_X$ をアデール版の Heisenberg 代数と呼ぶ.

このタイプの Heisenberg 代数が共形場理論の文脈では自由ボソン場の形式で登場する [1].

[1] 共形場理論については, 筆者が知る限りにおいて, 山田泰彦著 [11] が現時点で最も優れた教科書である. この節のタイプの Heisenberg 代数は [11] 第 2.1 節で解説されている. Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}_x = \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}$ の中で $[z^m, z^n] = \mathrm{Res}(mz^{m+n-1}\,dz) = m\delta_{m+n,0}$ が成立しているので [11] 第 2.1 節の a_m とその z^m を同一視

1.3 留数定理

留数定理より,

$$\sum_{x\in X}\mathrm{Res}_x(df\cdot dg)=0 \qquad (f,g\in K=\mathbb{C}(X))$$

なので上の中心拡大を $K=\mathbb{C}(X)$ に制限すると分裂している.

アデール版の Heisenberg $\mathfrak{h}_{\mathbb{A}}$ は可換な Lie 環 $\mathbb{A}_X$ の分裂しない中心拡大になっているが, それを大域体 $K=\mathbb{C}(X)$ に制限すると分裂している. そしてその大域的分裂は留数定理の言い換えになっている.

共形場理論では留数定理そのものだけではなく, その逆も重要になる [2].

2 tame 記号と Weil の相互法則

コンパクト Riemann 面に関する前節の記号をそのまま引き継ぐ.

この節の内容については [4], [7] を参照した.

2.1 tame 記号の定義

点 x における形式 Laurent 級数 $f\in\widehat{K}_x=\mathbb{C}((z))$ の零点の位数を $v_x(f)$ と書くことにする. すなわち $f=a_0z^r+a_1z^{r+1}+a_2z^{r+2}\cdots$, $r\in\mathbb{Z}$, $a_i\in\mathbb{C}$, $a_0\neq0$ のとき $v_x(f)=r$ と定め, $v_x(0)=\infty$ と定める. $f\in\widehat{K}_x$ について $v_x(f)\geqq0$ と $f\in\widehat{\mathcal{O}}_x$ は同値である. $f\in\widehat{\mathcal{O}}_x$ のとき $f=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$, $a_i\in\mathbb{C}$ と書け, f の点 x における値 $f(x)=a_0\in\mathbb{C}$ が定義される ($z(x)=0$ と約束していたことに注意せよ).

$f,g\in\widehat{K}_x^\times$ の tame 記号 $[f,g]_x\in\mathbb{C}^\times$ (tame symbol) を次のように定める:

$$[f,g]_x=(-1)^{v_x(f)v_x(g)}\left[\frac{f^{v_x(g)}}{g^{v_x(f)}}\right](x).$$

ここで, $v_x(f^{v_x(g)}/g^{v_x(f)})=0$ より, $f^{v_x(g)}/g^{v_x(f)}$ の点 x における値 $[f^{v_x(g)}/g^{v_x(f)}](x)$ が定まり, 0 にならないことに注意せよ.

できる. 中心拡大する前の可換な Lie 環 $\mathbb{C}((z))$ は幾何的には直線束 (と点 x におけるその自明化) の無限小変形を記述する Lie 環だとみなせる. $\mathbb{C}[[z]]$ の部分は点 z における自明化の無限小変形を記述し, $z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ の部分は点 x における直線束の貼り合わさり方の無限小変形を記述しているとみなせる. ソリトン方程式の佐藤理論における無限小時間発展は $z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ で記述される. 共形場理論はコンパクト Riemann 面の理論とソリトン方程式の佐藤理論を含んでいると考えられる.

[2] 共形場理論の教科書 [11] pp.210–211 およびそこで紹介されている参考文献を見よ. 留数定理とその逆についてもう少し説明しておく. 有限個の互いに異なる点 $x_i\in X$ における局所座標 z_i で $z_i(x_i)=0$ を満たすものを取る. x_i 達にのみ極を持つ X 上の有理型 1-form ω に対して, その x_i における局所座標表示を $g_i=g_i(z_i)dz_i\in\mathbb{C}((z))dz$ と書くと, 留数定理より, 高々 x_i 達のみを極とする X 上の任意の有理型函数 f に対して, $\sum_i\mathrm{Res}_{z_i=0}(f(z_i)g_i(z_i)dz_i)=\sum_{x\in X}(f\omega)=0$ が成立する. そして逆に, $g_i=g_i((z_i))dz_i\in\mathbb{C}((z_i))dz_i$ 達が高々 x_i 達のみを極とする X 上のある有理型 1-form の局所座標表示になっているためにはその条件が成立すれば十分である. すなわち, 高々 x_i 達のみを極とする X 上の任意の有理型函数 f について $\sum_i\mathrm{Res}_{z_i=0}(f(z_i)g_i(z_i)dz_i)=0$ が成立すれば十分である. 共形場理論における共形ブロック ([11] p.210 の用語では「真空」) は留数定理およびその逆の考え方を用いて定義される. 共形場理論は代数体上の代数群のアデールを用いた保型形式の理論のコンパクト Riemann 面における類似物になっていると考えられる. その類似のもとで, 複素上半平面を $PSL_2(\mathbb{Z})$ で割ってできる楕円曲線のモジュライ空間の共形場理論における類似物はコンパクト Riemann 面上のランク 2 のベクトル束のモジュライ空間だと考えられる. 保型形式の共形場理論における類似物は共形ブロック (幾何的にはベクトル束のモジュライ空間上のある種の直線束の切断) だと考えられる.

この節の目標は Riemann 面上の複素解析を用いて tame 記号の相互法則 (Weil の相互法則) を証明することである [3].

2.2 tame 記号の積分表示

もしも tame 記号を線積分で表示できれば留数定理の場合と同様にして tame 記号に関する相互法則が自然に導かれるはずである.

複素平面上の点 x_0 から出発して原点の周囲を反時計周りに一周して点 x_0 に戻る経路を C と書く. 基本になるのは次の公式である [4]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_C (\log z \cdot d\log z - d\log z \cdot \log x_0) \\
&\quad = \frac{1}{4\pi i}\int_C d\left((\log z)^2\right) - \log x_0 \\
&\quad = \frac{1}{4\pi i}\left((\log x_0 + 2\pi i)^2 - (\log x_0)^2\right) - \log x_0 = \pi i.
\end{aligned}$$

この積分の exponential は -1 になる. このような仕組みで tame 記号の符号因子が線積分から自然に出て来ることになる.

$f, g \in K^\times = \mathbb{C}(X)^\times$ を任意に取って固定する. f, g の零点と極の全体を含む X の有限部分集合 S を任意に取る.

コンパクト Riemann 面 X のジーナスが g だとすると [5], X を切り開いて, X を $4g$ 角形の辺を適切に貼り合わせたものとみなせる [6]. 必要なら切断線をずらして, S のすべての点が $4g$ 角形の内部に入るようにしておく. $4g$ 角形の頂点の一つを x_0 と書き, 点 x_0 から S に含まれる点に向けてカットを入れておく.

点 $x \in S$ に対して, 点 x_0 から出発して点 x のみを反時計周りに一周して点 x_0 に戻る $4g$ 角形内部の経路 C_x でカットと交わらないものを一つ取る. このとき,

$$[f, g]_x = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\left(\log f \cdot d\log g - d\log f \cdot \log g(x_0)\right)\right] \qquad (*)$$

が成立する. 以下でこの公式を証明しよう. そのために 左辺を $\varphi(f, g)$ と書くことにする.

$\log(ab) = \log a + \log b$ より $\varphi(fg, h) = \varphi(f, h)\varphi(g, h)$, $\varphi(f, gh) = \varphi(f, g)\varphi(f, h)$ が成立することがわかる. すなわち φ は bimultiplicative である [7].

---

[3] 純代数的な証明もある. ジーナス 0 の場合は終結式 (resultant) の純代数的な計算に帰着する. ジーナスが高い場合には射影直線の有限被覆とみなすことによってジーナス 0 の場合に帰着できる. たとえば最近の数学セミナー誌の記事 [12] はその方針で Weil の相互法則について解説している. 同誌同号は特集「平方剰余の相互法則」の他の記事もおすすめである.

[4] この公式を筆者は最初 [4] の p.153 で学んだ. 共形場理論に関係がある論文だということでその論文を読むことになった.

[5] ジーナスを表わす記号 g と函数を表わす記号 g が重複してしまった. 読者は混同しないように注意して欲しい. たとえば四角形の対辺を貼り合わせてトーラス (ジーナス 1 の閉曲面) を作れる. $4g$ 角形の辺を時計と反対回りに向きも込めて $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1', \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g', \beta_g'$ と表わすとき, α_i' と α_i^{-1} を, β_i' と β^{-1} を貼り合わせると, 穴が g 個ある浮き環状の閉曲面 (ジーナス g の閉曲面) ができる.

[6] Riemann の写像定理よりその $4g$ 角形は複素上半平面に含まれているとみなしてよい.

[7] G, H, K が演算を乗法的に書く半群であるとき, 写像 $\varphi : G \times H \to K$ が bimultiplicative であるとは $\varphi(gg', h) = \varphi(g, h)\varphi(g', h)$, $\varphi(g, hh') = \varphi(g, h)\varphi(g, h')$ $(g, g' \in G,\ h, h' \in H)$ が成立することである. G, H, K が Abel 群のとき, bimultiplicative 写像 $\varphi : G \times H \to K$ と群の準同型写像 $G \otimes_{\mathbb{Z}} H \to K$, $g \otimes h \mapsto \varphi(g, h)$ は自然に一対一に対応している. ただし $G \otimes_{\mathbb{Z}} H$ は G, H を $\mathbb{Z}$ 加群とみなしたときの $\mathbb{Z}$ 上のテンソル積である.

さらに部分積分によって $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)^{-1}$ が成立することもわかる:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\bigl(\log f\cdot d\log g - d\log f\cdot\log g(x_0)\bigr)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\Bigl((\log f(x_0)+2\pi i\,v_x(f))(\log g(x_0)+2\pi i\,v_x(g))-\log f(x_0)\cdot\log g(x_0)\\
&\qquad\qquad -\int_{C_x} d\log f\cdot\log g - 2\pi i\,v_x(f)\log g(x_0)\Bigr)\\
&=\log f(x_0)\cdot v_x(g)+2\pi i\,v_x(f)v_x(g)-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x} d\log f\cdot\log g\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\bigl(d\log f\cdot\log g-\log f(x_0)\cdot d\log g\bigr)+2\pi i\,v_x(f)v_x(g).
\end{aligned}
$$

この結果の exponential を考えることによって $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)^{-1}$ を得る.

点 x において f,g の両方が正則で 0 にならないとき, Cauchy の積分定理より $\varphi(f,g)=1$ となることがわかる.

f と g を $f=z^{v_x(f)}f_0$, $g=z^{v_x g}g_0$, $v_x(f_0)=0$, $v_x(g_0)=0$ と表わしておく. このとき

$$
\begin{aligned}
&\varphi(z,z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}(\log z\cdot d\log z - d\log z\cdot\log x_0)\right]=\exp[\pi i]=-1,\\
&\varphi(f_0,z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}(\log f_0\cdot d\log z - d\log f_0\cdot\log x_0)\right]=\exp(\log f_0(x))=f_0(x),\\
&\varphi(z,g_0)=\varphi(g_0,z)^{-1}=g_0(x)^{-1},\\
&\varphi(f_0,g_0)=1.
\end{aligned}
$$

以上の結果をすべて合わせると公式 $(*)$ が成立することがわかる.

公式 $(*)$ を反復積分 (iterated integral, [3]) で書き直そう.

1-forms $\omega_1,\dots,\omega_r$ と経路 $\gamma(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ に対して iterated integral $\int_\gamma \omega_r\circ\cdots\circ\omega_1$ を以下のように定める: $\gamma^*\omega_i=f_i(t)\,dt$ のとき,

$$
\int_\gamma \omega_r\circ\cdots\circ\omega_1=\int\cdots\int_{0<t_r<\cdots<t_1<1} f_r(t_r)\cdots f_1(t_1)\,dt_r\cdots dt_1.
$$

すなわち反復積分とは時刻 t_i を右から大きな順序で並べた積分である. たとえば $r=3$ のとき (一般の r でも同様),

$$
\int_\gamma \omega_3\circ\omega_2\circ\omega_1=\int_0^1\left(\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2} f_3(t_3)\,dt_3\right)\cdot f_1(t_2)\,dt_2\right)\cdot f(t_1)\,dt_1.
$$

この公式を見ればどうして「反復積分」と呼ぶかは明らかだろう [8].

以上の定義のもとで

$$
\int_{C_x} d\log f\circ d\log g=\int_{C_x}(\log f-\log f(x_0))\cdot d\log g
$$

[8] たとえば次の公式が成立している: $-\int_0^1 d\log(1-t)\circ\underbrace{d\log t\circ\cdots\circ d\log t}_{r\text{ times}}=\sum_{n=1}^\infty n^{-(r+1)}=\zeta(r+1)$. 数学的帰納法によって, $|z|<1$ のとき, $-\int_0^z d\log(1-t)\circ\underbrace{d\log t\circ\cdots\circ d\log t}_{r\text{ times}}=\sum_{n=1}^\infty z^n/n^{r+1}=\mathrm{Li}_{r+1}(z)$ となることを示せる. 函数 $\mathrm{Li}_{r+1}(z)$ は多重対数 (polylogarithm) と呼ばれている. 第 5 節も参照せよ.

なので, 公式 (∗) は

$$[f,g]_x = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\big(d\log f\circ d\log g + \log f(x_0)\cdot d\log g - d\log f\cdot \log g(x_0)\big)\right] \qquad (**)$$

と書き直される.

2.3 tame 記号に関する Weil の相互法則

定理 2.1 (Weil の相互法則)**.** コンパクト Riemann 面 X とその上の 0 でない代数函数 f, g に対して,

$$\prod_{x\in X}[f,g]_x = 1$$

が成立する. (左辺の積は有限集合 S に含まれる x にに関する有限積になる.)

証明. X を切り開いて作った $4g$ 角形の境界上の経路で x_0 から出発して時計と反対周りに一周して x_0 に戻るものを Γ と書くと, 公式 (∗∗) と Cauchy の積分定理と留数定理より

$$\prod_{x\in X}[f,g]_x = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d\log f\circ d\log g\right].$$

Γ は Riemann 面上の閉曲線達 α_i, β_i によって $\Gamma = \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ と書ける. 定義に基づいた直接的な計算で反復積分達が一般に

$$\int_{\gamma^{-1}}\omega_r\circ\cdots\circ\omega_1 = (-1)^r\int_\gamma \omega_1\circ\cdots\circ\omega_r,$$
$$\int_{\gamma_1\cdots\gamma_r}\omega_2\circ\omega_1 = \sum_{i=1}^r\int_{\gamma_i}\omega_2\circ\omega_1 + \sum_{1\leqq<i<j<\leqq r}\int_{\gamma_j}\omega_2\int_{\gamma_i}\omega_1,$$
$$\int_{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}\omega_2\circ\omega_1 = \int_\beta\omega_2\int_\alpha\omega_1 - \int_\alpha\omega_2\int_\beta\omega_1$$

を満たしていることがわかる. (3 番目の公式は前者の 2 つの公式から導かれる.) そして X 上の閉曲線 γ に対して $\int_\gamma d\log f, \int_\gamma d\log g \in 2\pi i\mathbb{Z}$ となるので、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\log f\circ d\log g \in \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)^2\mathbb{Z} = 2\pi i\mathbb{Z}$$

となることがわかる. ゆえに $\prod_{x\in X}[f,g]_x = 1$. □

2.4 Steinberg 記号の定義と基本性質

一般に, k が体で G が Abel 群であるとき, bimultiplicative な写像 $\varphi : k^\times\times k^\times\to G$ で $f, 1-f\in k^\times$ ならば $\varphi(f, 1-f) = 1$ を満たすものを Steinberg 記号 (Steinberg symbol) と呼ぶ.

一般に体 k に対してその第二 K 群 $K_2(k)$ は $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$ を $\{\, f \otimes (1-f) \mid f, 1-f \in k^\times \,\}$ から生成される部分群で割って得られる剰余群に一致する (松本の定理). ゆえに Steinberg 記号は Abel 群の準同型写像 $K_2(k) \to G$ と自然に一対一対応している.

任意の Steinberg 記号 φ は $\varphi(f,-f)=1$ を満たしている:

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(f,1-f) = \varphi(f,-f)\varphi(f,1-f^{-1}) \\ &= \varphi(f,-f)\varphi(f^{-1},1-f^{-1})^{-1} = \varphi(f,-f). \end{aligned}$$

これより $\varphi(f,g)\varphi(g,f)=1$ が得られる:

$$1 = \varphi(fg,-fg) = \varphi(f,-f)\varphi(f,g)\varphi(g,f)\varphi(g,-g) = \varphi(f,g)\varphi(g,f).$$

その他に $\varphi(f,f)=\varphi(f,-1)$ も得られる:

$$1 = \varphi(f,-f) = \varphi(f,f)\varphi(f,-1)$$

であり, φ が bimultiplicative なので $\varphi(f,-1)^2=1$ となるから, $\varphi(a,a)=\varphi(f,-1)$ を得る. これらより, $\varphi(f,1-f)=1$ $(f,1-f\in k^\times)$ の一般化である $\varphi(f/g,g-f)=\varphi(-f,g)$ $(f,g,g-f\in k^\times)$ が導かれる: $h=g-f$ とおくと $1=(g-f)h^{-1}=(-fh^{-1})+gh^{-1}$ より

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(-fh^{-1},gh^{-1}) = \varphi(-f,g)\varphi(-f,h)^{-1}\varphi(h,g)^{-1}\varphi(h,h) \\ &= \varphi(-f,g)\varphi(-f,h)^{-1}\varphi(h,g)^{-1}\varphi(h,-1) = \varphi(-f,g)\varphi(f/g,h)^{-1}. \end{aligned}$$

ゆえに $\varphi(f/g,g-f)=\varphi(f/g,h)=\varphi(-f,g)$.

2.5　tame 記号の Steinberg 性

tame 記号 $[\ ,\ ]_x : \widehat{K}_x^\times \times \widehat{K}_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ が Steinberg 記号であることを証明しよう. $f,g\in\widehat{K}_x^\times$ かつ $f+g=1$ であるとする. $v_x(f)>0$ のとき $v_x(g)=0$ かつ $g(x)=1$ なので tame 記号の定義より $[f,g]_x = 1/g(x)^{v_x(f)}=1$ となる. $v_x(f)=0$ のとき $v_x(g)\geqq 0$ となる. $v_x(f)=0$ かつ $v_x(g)>0$ ならば上で示したことより $[f,g]_x=[g,f]_x^{-1}=1$. $v_x(f)=v_x(g)=0$ ならば tame 記号の定義より $[f,g]_x=1$ となる. tame 記号の定義から $[h,-h]_x=1$ $(h\in\widehat{K}_x)$ となることを直接かつ容易に確認できる. ゆえに $v_x(f)<0$ のとき, その $h=f^{-1}$ の場合を使って,

$$\begin{aligned} [f,g]_x &= [f,1-f]_x = \left[f^{-1},1-f\right]_x^{-1} \\ &= \left[f^{-1},1-f\right]_x^{-1}\left[f^{-1},-f^{-1}\right]_x^{-1} \\ &= \left[f^{-1},-(1-f)f^{-1}\right]_x^{-1} = \left[f^{-1},1-f^{-1}\right]_x = 1. \end{aligned}$$

最後の等号は上で示したことと $v_x(f^{-1})>0$ から得られる.

公式 $(*)$(または $(**)$) からも, tame 記号が $f,1-f\in K^\times=\mathbb{C}(X)^\times$ のとき, $[f,g]_x=1$ を満たしていることを示せる. 以下でその導出の仕方を説明しよう.

本質的に dilogarithm[9] のモノドロミーの話になる. 複素 w 平面上の点 $y_0\neq 0,1$ を任意に取り, δ_0 (もしくは δ_1) は y_0 から出発して 0 (もしくは 1) を反時計回りで一周して y_0

[9] 二重対数 (dilogarithm) $\mathrm{Li}_2(z)$ は $\mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z d\log w\cdot\log(1-w)$ と定義され, $\mathrm{Li}_2(z)=\sum_{n=1}^\infty z^n/n^2$ $(|z|<1)$ と Taylor 展開される. より一般に polylogarithm $\mathrm{Li}_r(z)$ が $\mathrm{Li}_r(z)=\int_0^z d\log w\cdot\mathrm{Li}_{r-1}(w)$ と定義され, $\mathrm{Li}_r(z)=\sum_{n=1}^\infty z^n/n^r$ $(|z|<1)$ と Taylor 展開される. 第 5 節も参照せよ.

に戻る単純閉曲線であるとする．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0}[\log w \cdot d\log(1-w) - d\log w \cdot \log(1-y_0))\\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\left[(\log y_0 + 2\pi i)\log(1-y_0) - \log y_0 \cdot \log(1-y_0)\right]\\
&\qquad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0} d\log w \cdot \log(1-w) - \log(1-y_0)\\
&\quad = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0} d\log w \cdot \log(1-w) = -\log 1 \in 2\pi i\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1}(\log w \cdot d\log(1-w) - d\log w \cdot \log(1-y_0)) = \log 1 \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

$f, 1-f \in K^\times = \mathbb{C}(X)^\times$ であるとし, γ は Riemann 面 X 上の点 x_0 から出発して x_0 に戻る閉曲線で $f, 1-f$ の零点と極を通らないものであるとする．γ の f による像 $\delta = f \circ \gamma$ は複素平面上の閉曲線で $y_0 = f(x_0)$ から出発して y_0 に戻る $0, 1$ を通らない閉曲線になる．このとき, 上で述べたことより,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\bigl(\log f \cdot d\log(1-f) - d\log f \cdot \log(1-f(x_0))\bigr)\\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta}\bigl(\log w \cdot d\log(1-w) - d\log w \cdot \log(1-y_0)\bigr) \in 2\pi i\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

この結果の $\gamma = C_x$ の場合より $[f, 1-f]_x = 1$ が得られる．

3 Contou-Carrère 記号とその相互法則

コンパクト Riemann 面に関する前節までの記号をそのまま引き継ぐ．例えば, X はコンパクト Riemann 面であり, K はその代数函数体であり, 点 $x \in X$ における K の完備化は $\widehat{K}_x$ と書かれる．$z(x) = 0$ を満たす x における局所座標 z を取ると $\widehat{K}_x = \mathbb{C}((z))$ とみなされる．

この節の内容については [7], [9], [8], [6] を参照した．

簡単のため $A = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ (A の中で $\varepsilon^N \neq 0$, $\varepsilon^{N+1} = 0$), $\mathfrak{m} = \varepsilon A$ とおく [10].

3.1 形式 Laurent 級数の無限積表示

$K_A = K \otimes A = K[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ とおき, 点 $x \in X$ における完備化を $\widehat{K}_{A,x} = A((z)) = \widehat{K}_x[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ と書く．点 x における Laurent 展開によって $\widehat{K}_A \subset \widehat{K}_{A,x}$ とみなせる．

R が環であるとき, $f \in R[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ の $R = R[\varepsilon]/(\varepsilon)$ における像を $f_{\varepsilon=0} = f \bmod \varepsilon$ と書く．このとき $R[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ の乗法群は次のように表わされる:

$$\bigl(R[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})\bigr)^\times = \{\, f \in R[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1}) \mid f_{\varepsilon=0} \in R^\times \,\}.$$

[10] より一般に以下の議論で $(A, \mathfrak{m})$ は $\mathbb{C}$ 上の Artin 局所環でよい．

ゆえに乗法群 $A((z))^\times = \left(\widehat{K}_x[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})\right)^\times$ は以下のような表示を持つ:

$$
\begin{aligned}
&A((z))^\times = \left(\widehat{K}_x[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})\right)^\times \\
&= \{\, f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + \cdots + f_N\varepsilon^N \in \widehat{K}_x[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1}) \mid f_0 \in \widehat{K}_x^\times, f_1, \dots, f_N \in \widehat{K}_x \,\}.
\end{aligned}
$$

以下ではこの群の元の次の形の無限積表示を証明する.

形式 Laurent 級数環の可逆元 $f \in A((z))^\times$ は次のように一意的に表わされる:

$$
f = z^{w_x(f)} a_0 \prod_{0\neq i\in\mathbb{Z}} (1 - a_i z^i).
$$

ただし $w_x(f) \in \mathbb{Z}$, $a_0 \in A^\times$, $a_i \in A$, $a_{-i} \in \mathfrak{m}$ $(i > 0)$ であり, 十分大きな i について $a_{-i} = 0$ であるとする.

この無限積表示を以下で証明しよう.

$A((z))^\times$ の部分群 $z^{\mathbb{Z}}$ と G を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
&z^{\mathbb{Z}} = \{\, z^m \mid a \in m \in \mathbb{Z} \,\}, \\
&G = \{\, g \in A((z))^\times \mid g_{\varepsilon=0} \in \mathbb{C}[[z]]^\times \,\}
\end{aligned}
$$

このとき, $A((z))$ の乗法によって, 群の同型 $z^{\mathbb{Z}} \times H \cong A((z))^\times$ が得られることを示そう. $\phi \in \mathbb{C}((z))^\times$ の z に関する最低次の項の次数を $v_x(\phi)$ と書くのであった. $f \in A((z))^\times$ に対して $m = w_x(f) = v_x(f_{\varepsilon=0})$ とおくと, f はある $g \in G$ によって $f = z^m g$ と表わされる. このことより群の同型 $z^{\mathbb{Z}} \times G \cong A((z))^\times$ が成立していることがわかる.

G の部分群 $G_\pm$ を次のように定める:

$$
G_+ = A[[z]]^\times, \qquad G_- = 1 + \varepsilon z^{-1} A[z^{-1}].
$$

このとき, $A((z))$ の乗法によって, 群の同型 $G_+ \times G_- \cong G$ が得られることを示そう. $g \in G$ と $g_\pm \in G_\pm$ は次のように一意に表される:

$$
\begin{aligned}
&g = a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_N\varepsilon^N, && a_0 \in \mathbb{C}[[z]]^\times,\ a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}((z)), \\
&g_+ = b_0 + b_1\varepsilon + \cdots + b_N\varepsilon^N, && b_0 \in \mathbb{C}[[z]]^\times,\ b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}[[z]], \\
&g_- = 1 + c_1\varepsilon + \cdots + c_N\varepsilon^N, && c_1, \dots, c_N \in \varepsilon z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}].
\end{aligned}
$$

このとき,

$$
g_+ g_- = b_0 + (b_0c_1 + b_1)\varepsilon + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2)\varepsilon + (b_0c_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3) + \cdots
$$

なので b_i, c_i 達に関する方程式 $g_+g_- = g$ が $b_0 = a_0$ から出発して低次の係数から順番に一意的に解けて行くことがわかる. このことより群の同型 $G_+ \times G_- \cong G$ が成立していることがわかる.

以上を合わせると $A((z))$ の乗法によって群の同型

$$
A^\times z^{\mathbb{Z}} \times G_+ \times G_- \cong A((z))^\times = \left(\widehat{K}_x[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})\right)^\times
$$

が得られることがわかる.

$g_+ \in G_+ = A[[z]]^\times$ が次のように一意的に表わされることを示そう:

$$g_+ = a_0 \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i z^i), \qquad a_0 \in A^\times,\ a_1, a_2, \ldots \in A$$

この等式の右辺を展開すると

$$a_0 - a_0 a_1 z - a_0 a_2 z^2 - \cdots - a_0(a_n + (a_1, \ldots, a_{n-1} \text{ の多項式}))z^n - \cdots$$

の形になる. 一方 g_+ は次のように一意的に表わされる:

$$g_+ = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \qquad c_0 \in A^\times,\ c_1, c_2, \ldots \in A.$$

これと上の右辺の展開結果を比較すると, a_i たちに関する方程式 $g_+ = (\text{右辺})$ が一意に解けることがわかる. これで g_+ の上のような表示の一意的存在が示された.

$g_- \in G_- = 1 + \varepsilon z^{-1} A[z^{-1}]$ が次のように一意的に表わされることを示そう:

$$g_- = \prod_{i<0}^{\text{有限積}} (1 - a_i z^i), \qquad a_i \in \varepsilon A = \mathfrak{m}.$$

この等式の右辺を展開すると

$$1 - a_{-1} z^{-1} - a_{-2} z^{-2} - \cdots - (a_{-n} + (a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)} \text{ の多項式}))z^{-n} - \cdots \quad (\text{有限和})$$

の形になる. 一方 g_- は次のように一意的に表わされる:

$$g_- = 1 + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \cdots, \qquad c_i \in \varepsilon A = \mathfrak{m}.$$

これらを比較することによって g_- の上のような表示の一意存在が成立することを確認できる.

以上によって示すべきことがすべて示された.

3.2 Contou-Carrère 記号の定義

任意に $f, g \in A((z))^\times$ を取る. それらは次のように一意に表わされる:

$$f = z^{w_x(f)} a_0 \prod_{0 \neq i \in \mathbb{Z}} (1 - a_i z^i), \qquad g = z^{w_x(g)} b_0 \prod_{0 \neq i \in \mathbb{Z}} (1 - b_i z^i).$$

ただし $w_x(f), w_x(g) \in \mathbb{Z}$, $a_0, b_0 \in A^\times$, $a_i, b_i \in A$, $a_{-i}, b_{-i} \in \mathfrak{m}$ $(i > 0)$ であり, 十分大きな i に対して $a_{-i} = 0$, $b_{-i} = 0$ であるとする. このとき f, g の Contou-Carrère 記号 $\langle f, g \rangle_x$ (Contou-Carrère symbol, 以下 CC 記号) を

$$\langle f, g \rangle_x = (-1)^{w_x(f) w_x(g)} \frac{a_0^{w_x(g)} \prod_{i,j=1}^{\infty} \left(1 - a_i^{j/(i,j)} b_{-j}^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}}{b_0^{w_x(f)} \prod_{i,j=1}^{\infty} \left(1 - a_{-i}^{j/(i,j)} b_j^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}} \in A^\times$$

と定める. ここで (i, j) は i, j の最大公約数を表わす. 十分に大きな i, j に対して $a_{-i} = 0$, $b_{-j} = 0$ であり, $i > 0$ のとき $a_{-i}, b_{-j} \in \mathfrak{m} = \varepsilon A$ なので十分大きな m に対して $a_{-i}^m = 0$, $b_{-j}^m = 0$ となるので, 右辺の積は有限積になることに注意せよ.

この CC 記号の定義の仕方は局所座標 z を使っており, 局所座標の取り方に依存しないことさえ明らかではない. しかし, *CC* 記号は局所座標によらずに定まっており, tame 記号と同様の性質を満たしている. 以下でそのことを証明しよう.

3.3　Contou-Carrère 記号の特別な場合

$A = \mathbb{C}$ $(\varepsilon = 0)$ のとき, CC 記号は tame 記号に一致する. すなわち, CC 記号は特別な場合として tame 記号を含んでいる.

$\varepsilon^2 \neq 0$ の場合. $f, g \in A((z))$ は上のように表示されており, $w_x(f) = w_x(g) = 0$,

$$\begin{aligned} &a_0 \equiv 1 + \varepsilon\alpha_0 \pmod{\varepsilon^2}, \qquad b_0 \equiv 1 + \varepsilon\beta_0 \pmod{\varepsilon^2}, \\ &a_i \equiv -\varepsilon\alpha_i \pmod{\varepsilon^2}, \qquad b_i \equiv -\varepsilon\beta_i \pmod{\varepsilon^2} \qquad (i \neq 0), \\ &\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

となっていると仮定する:

$$\begin{aligned} f &\equiv \prod_{i\in\mathbb{Z}} (1 + \varepsilon\alpha_i z^i) \equiv 1 + \varepsilon\phi \pmod{\varepsilon^2}, \\ g &\equiv \prod_{i\in\mathbb{Z}} (1 + \varepsilon\beta_i z^i) \equiv 1 + \varepsilon\psi \pmod{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

ここで $\phi, \psi \in \mathbb{C}((z))$ を次のように定めておいた:

$$\phi = \sum_i \alpha_i z^i, \qquad \psi = \sum_i \beta_i z^i.$$

$i, j > 0$ のとき modulo ε^3 で $a_i^{j/(i,j)} b_{-j}^{i/(i,j)}$, $a_{-i}^{j/(i,j)} b_j^{i/(i,j)}$ が消えないためには $i = j = (i,j)$ となることが必要なので, mod ε^3 で,

$$\langle f, g\rangle_x \equiv 1 - \sum_{i>0} i a_i b_{-i} + \sum_{j>0} j a_{-j} b_j \equiv 1 - \varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} i\alpha_i\beta_{-i} \equiv 1 + \varepsilon^2 \operatorname{Res}_x(\phi \cdot d\psi)$$

となる. すなわち, CC 記号は (ϕ, ψ) を留数 $\operatorname{Res}_x(\phi \cdot d\psi)$ に対応させる写像を含んでいると考えてよい.

3.4　Contou-Carrère 記号の積分表示と相互法則

定理 3.1 (CC 記号の相互法則)**.** 以上の設定のもとで, $f, g \in K_A^\times$ に対して,

$$\prod_{x\in X} \langle f, g\rangle_x = 1$$

が成立している. 左辺の積は有限積になることに注意せよ. □

上に述べたことにより, この定理は Weil の相互法則と留数定理の両方の一般化になっている. 証明は Weil の相互法則の場合と完全に同様である. 完全に同様の方法で証明できることは次の公式が成立することからわかる: $f, g \in K_A^\times$ について,

$$\begin{aligned} &\langle f, g\rangle_x \\ &= \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x} \bigl(\log f \cdot d\log g - d\log f \cdot \log g(x_0)\bigr)\right] && (\$) \\ &= \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x} \bigl(d\log f \circ d\log g + \log f(x_0) \cdot d\log g - d\log f \cdot \log g(x_0)\bigr)\right] && (\$\$) \end{aligned}$$

公式 ($),($$) はそれぞれ前節の公式 $(*)$,$(**)$ の一般化になっており, 形式的に完全に同じ形をしている. この公式から CC 記号が局所座標の取り方によらずに決まっていることもわかる.

$K_A = K[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ なので $f \in K_A^\times$ は $f = f_0(1-\phi)$, $f_0 \in K^\times$, $\phi \in \varepsilon K_A$ と表わされる. このとき $\phi^{N+1} = 0$ となることに注意せよ. $\log f$ は次のように定義される:

$$\log f = \log f_0 + \log(1-\phi) = \log f_0 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\phi^n}{n}.$$

この定義より, $\log f$ は X から f_0 の零点と極を除いて得られる Riemann 面上の多価函数 $\log f_0$ と $\varepsilon K[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ の元の和になる. 積分は ε のべきの係数ごとに実行することによって定義される.

公式 ($),($$) を証明しよう. 前節と同様の議論によって,

$$f = 1 - az^k, \quad g = 1 - bz^{-l}, \quad a \in A, \quad b \in \mathfrak{m}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$$

の場合に

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_x}\bigl(\log f \cdot d\log g - d\log f \cdot \log g(x_0)\bigr)\right] = \bigl(1 - a^{l/(k,l)} b^{k/(k,l)}\bigr)^{(k,l)}$$

が成立することを示せば十分であることがわかる. この場合には, 左辺の 1 つ目の項の積分は留数の計算になり, 左辺の 2 つ目の項の積分は消えるので次を示せば十分である:

$$\exp\left[\mathrm{Res}_x(\log f \cdot d\log g)\right] = \bigl(1 - a^{l/(k,l)} b^{k/(k,l)}\bigr)^{(k,l)}. \qquad (\$\$\$)$$

この公式を初めて見た人はどのようにして k, l の最大公約数が登場するのか不思議に感じるかもしれない. その疑問は以下の計算によって解消される.

上の公式を証明しよう. Taylor 展開 $\log(1-X) = -\sum_{i=1}^\infty X^i/i$ より,

$$\log f = \log(1 - az^k) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i} z^{ik},$$
$$\log g = \log(1 - bz^{-l}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^j}{j} z^{-jl}, \qquad d\log g = l\sum_{j=1}^{\infty} b^j z^{-jl-1}\, dz$$

なので

$$\log f \cdot d\log g = -l \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{a^i b^j}{i} z^{ik-jl-1}\, dz.$$

これの留数は $ik = jl$ を満たす正の整数 i, j の組全体にわたる $-la^ib^j/i$ の和になる. $ik = jl$ と $ik/(k,l) = jl/(k,l)$ は同値であり, さらにその条件はある正の整数 m で $i = ml/(k,l)$, $j = mk/(k,l)$ を満たすものが存在することと同値である. ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_x(\log f \cdot d\log g) &= -l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{ml/(k,l)} b^{mk/(k,l)}}{ml/(k,l)} \\ &= -(k,l) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bigl(a^{l/(k,l)} b^{k/(k,l)}\bigr)^m}{m} = (k,l) \log\bigl(1 - a^{l/(k,l)} b^{k/(k,l)}\bigr).\end{aligned}$$

ゆえに公式 ($$$) が成立する.

3.5 Contou-Carrère 記号の Steinberg 性

前節の tame 記号の場合と同様にして, $f, 1-f \in K_A^\times$ のとき CC 記号が Steinberg 性 $\langle f, 1-f\rangle_x = 1$ を満たすことを公式 ($$) を用いて証明することができる.

さらに $f, g \in \widehat{K}_{A,x}^\times = A((z))^\times$ に対する $\langle f, g\rangle_x$ の定義式より, $f, 1-f \in K_A^\times$ の場合の CC 記号の Steinberg 性から $f, 1-f \in \widehat{K}_{A,x}^\times$ の場合の Steinberg 性が導かれる.

4 補足

このノートを書くときに, “symbols” に関する Tate の古典的論文 [10] も参照した.

さらに, 各種中心拡大達と各種 “symbols” の関係について, [2], [1] も参照した. tame 記号とその一般化である CC 記号は佐藤 Grassmann 多様体を用いた無限次元 Lie 群 GL_∞ の中心拡大を用いて理解することができる ([1]). 第 1 節の内容はその Lie 環版だとみなされる. 第 6 節も参照せよ.

5 付録 1: 多重対数函数と線形常微分方程式と反復積分

多重対数函数 (polylogarithm) については [5] などを参照した.

$A(t)$ は正方行列値函数であるとし [11], 正方行列値函数 $U(t)$ に関する線形常微分方程式

$$\frac{dU(t)}{dt} = U(t)A(t), \qquad U(t_0) = E = (\text{単位行列})$$

について考える. この微分方程式は

$$U(t) = E + \int_{t_0}^t U(s)A(s)\,ds$$

と同値である. 以下, 簡単のため $t_0 \leqq t$ の場合のみを考える. 右辺全体を右辺の積分の中に代入する操作を繰り返すことによって以下を得る:

$$\begin{aligned} U(t) &= E + \int_{t_0}^t A(t_1)\,dt_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} U(t_2)A(t_2)\,dt_2 \cdot A(t_1)\,dt_1 = \cdots \\ &= E + \int_{t_0}^t A(t_1)\,dt_1 + \cdots + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} U(t_n)A(t_n)\,dt_n \cdots A(t_2)\,dt_2 \cdot A(t_1)\,dt_1. \end{aligned}$$

この操作の極限を取ることによって (Picard の逐次近似法, 逐次代入法), 次が成立していることがわかる:

$$U(t) = \sum_{n=0}^\infty \int \cdots \int_{t_0 < t_n < \cdots < t_1 < t} A(t_n)\,dt_n \cdots A(t_2)\,dt_2 \cdot A(t_1)\,dt_1.$$

時間順序積 $T[A_n(t_n) \cdots A_1(t_1)]$ を次のように定める:

$$T[A_n(t_n) \cdots A_1(t_1)] = A_{\sigma(n)}(t_{\sigma(n)}) \cdots A_{\sigma(1)}(t_{\sigma(1)}), \quad t_{\sigma(n)} < \cdots < t_{\sigma(1)}, \quad \sigma \in S_n.$$

[11] どのクラスの函数なのかが気になる人は, たとえば連続函数であると思っておけばよい.

すなわち, 時間順序積は左から時刻の小さな順番に並ぶように並べ直すことによって定義される. この記号法のもとで,

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} T[A(t_n)\cdots A(t_1)]\,dt_n \cdots dt_1.$$

形式的に時間順序積を積分と無限和の外側に出して書くことを許せば

$$U(t) = T\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)^n\right] = T\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)\right].$$

このような書き方は物理の教科書などでよく見るが, 数学の教科書では珍しいと思う. この表示を時間順序指数函数 (time-ordered exponential) と呼ぶことがある. 時間ではなく, 経路上の前後で並べ直す場合には経路順序積 (path-ordered product) と言ったり, 経路順序指数函数 (path-ordered exponential) と言ったりする [12].

第 2.2 節で導入した反復積分 (iterated integral) の記号法を使えば, 次のように書くこともできる: 行列値 1-form A を $A = A(t)\,dt$ と定めると,

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{n \text{ times}},$$

$$\int_{t_0}^{t} \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{n \text{ times}} = \int \cdots \int_{t_0 < t_n < \cdots < t_1 < t} A(t_n)\cdots A(t_2)A(t_1)\,dt_n \cdots dt_2\,dt_1.$$

以上によって反復積分の記号法と時間順序積の記号法の対応は明らかでだろう [13].

1-forms ω_0, ω_1 を次のように定める:

$$\omega_0 = d\log t = \frac{dt}{t}, \qquad \omega_1 = -d\log(1-t) = \frac{dt}{1-t}$$

多重対数函数 $\mathrm{Li}_r(z)$ は次のように反復積分によって定義される:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_1(z) &= -\log(1-z) = \int_0^z \omega_1, \\
\mathrm{Li}_2(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_1(t)\omega_0 = \int_0^z \omega_1 \circ \omega_0, \\
\mathrm{Li}_3(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_2(t)\omega_0 = \int_0^z \omega_1 \circ \omega_0 \circ \omega_0, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{Li}_r(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_{r-1}(t)\omega_0 = \int_0^z \omega_1 \circ \underbrace{\omega_0 \circ \cdots \circ \omega_0}_{r-1 \text{ times}}.
\end{aligned}$$

[12] 共形場理論では半径順序積 (radial ordered product) も使われている. たとえば, 複素数 z, w について, $|z| > |w|$ ならば $R[A(z)B(w)] = A(z)B(w)$ で, $|w| > |z|$ ならば $R[A(z)B(w)] = B(w)A(z)$ ($A(z)$, $B(w)$ の両方がフェルミオンならば $R[A(z)B(w)] = -B(w)A(z)$) と定める. 共形場理論の場は $|z| > |w|$ のときにのみ積 $A(z)B(w)$ が well-defined になり, 半径順序積 $R[A(z)B(w)]$ に解析接続される. この解析接続を純代数的に定式化し直せば頂点代数 (vertex algebra) の複雑な公理系が得られる. 頂点代数について学ぶ場合には頂点代数の複雑な公理系にいきなり触れるよりも, [11] のような優れた共形場理論の教科書などを読んで知っておくべき計算の具体例に触れてからにした方が良いと思う.

[13] 反復積分について説明する場合には線形常微分方程式の Picard の逐次近似法による解法の話を導入として使うのがよいと思う.

ゆえに $A = A(t)\,dt$ を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & & & & \\ & 0 & \omega_0 & & & \\ & & 0 & \omega_0 & & \\ & & & 0 & \omega_0 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

とおいて, 微分方程式 $dU(t) = U(t)A$, $U(0) = E$ を解くと, 解行列 $U(z)$ の第 $(1, r+1)$ 成分は $\mathrm{Li}_r(z)$ になる. 詳しい解説が [5] にある.

6 付録 2: Contou-Carrère 記号のボソン自由場表示

6.1 ボソンの頂点作用素

以下で説明する計算の仕組みにの詳しい解説は共形場理論の教科書 [11] 第 2 章にある.

生成元 a_m, $e^{\lambda q}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$) と次の基本関係式によって定義される $\mathbb{C}$ 上の代数を $\mathcal{B}$ と書くことにする:

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [a_m, e^{nq}] = \delta_{m0}e^q, \quad e^{\lambda q}e^{\mu q} = e^{(\lambda+\mu)q}, \quad e^{0q} = 1.$$

a_m ($m \geqq 0$) から生成される $\mathcal{B}$ の可換な部分代数を $\mathcal{B}_+$ と書き, a_m ($m < 0$), $e^{\lambda q}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) から生成される $\mathcal{B}$ の可換な部分代数を $\mathcal{B}_-$ と書く. このとき $\mathcal{B}$ の積は次の線形同型を誘導する:

$$\mathbb{C}[\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \{e^{\lambda q}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}] = \mathcal{B}_- \otimes \mathcal{B}_+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}.$$

このようにして得られる可換環と非可換環 $\mathcal{B}$ の線形同型 $\mathbb{C}[\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \{e^{\lambda q}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ を $a \mapsto {:}a{:}$ と書き, 正規積 (normal product) または正規順序積 (normal ordered product) と呼ぶ. 例えば $m > 0$ のとき

$$a_m a_{-m} = a_{-m}a_m + [a_m, a_{-m}] = {:}a_m a_{-m}{:} + m.$$

などが成立している.

不定元 z に関する形式 Laurent 級数についても正規積を係数ごとへの作用によって拡張しておく. 形式的に

$$\varphi(z) = q + a_0 \log z + \sum_{m\neq 0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}, \qquad a(z) = \varphi'(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^{-m-1}$$

とおいて, それぞれをスカラーボソン自由場, カレント場と呼ぶ. このとき $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して ${:}e^{n\varphi(z)}{:}$ が $z^{\lambda a_0}\mathcal{B}$ 係数の形式 Laurent 級数として,

$${:}e^{\lambda\varphi(z)}{:} = \exp\left(\lambda \sum_{m<0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}\right) e^{\lambda q} z^{\lambda a_0} \exp\left(\lambda \sum_{m>0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}\right)$$

と自然に定義される. これはボソンの頂点作用素 (bosonic vertex operator) と呼ばれている.

一般に $[A,B]=C$ で C が A,B と可換なとき,

$$e^A e^B = e^C e^B e^A$$

が成立している. 実際, $l_X Y = XY$, $r_X Y = YX$, $\mathrm{ad}_X Y = [X,Y]$ と書くと,

$$e^{\mathrm{ad}_A} B = e^{r_B - l_A} B = e^{r_A} e^{-l_A} B = e^A B e^{-A}, \qquad e^{\mathrm{ad}_A} B = B + [A,B] = B + C$$

なので $e^A B e^{-A} = B + C$ となる. ゆえに

$$e^A e^B e^{-A} = \exp(e^A B e^{-A}) = e^{B+C} = e^C e^B.$$

これで $e^A e^B = e^C e^B e^A$ となることがわかった.

この一般的な公式を $:e^{\lambda\varphi(z)}::e^{\mu\varphi(w)}:$ の計算に応用するために形式的に

$$\varphi(z)_+ = a_0 \log z + \sum_{m>0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}, \qquad \varphi(z)_- = q + \sum_{m<0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}$$

とおき, $[a_m, q] = \delta_{m0}$ という関係式を仮定しておく. このとき

$$[\varphi_+(z), \varphi_-(w)] = \log z - \sum_{m>0} \frac{(w/z)^m}{m} = \log z + \log(1 - w/z) = \log(z-w).$$

ここで形式的に $|z| > |w|$ の場合に使える対数の Taylor 展開の公式などを形式的に使って整理したことに注意せよ. 形式的に $:e^{\lambda\varphi(z)}: = e^{\lambda\varphi(z)_-} e^{\lambda\varphi(z)_+}$ が成立しており, 正規積は $\varphi(z)_+$ を $\varphi(w)_-$ よりも右に持って行くことだということと, 上の一般的な公式より形式的に次が成立することがわかる:

$$:e^{\lambda\varphi(z)}::e^{\mu\varphi(w)}: = (z-w)^{\lambda\mu} :e^{\lambda\varphi(z)+\mu\varphi(w)}:.$$

ただし, $(z-w)^\nu$ に $|z| > |w|$ で成立している公式

$$(z-w)^\nu = z^\nu \sum_{m \geqq 0}^{\infty} \binom{\nu}{m} \left(\frac{w}{z}\right)^m$$

を適用して, 右辺を z, w の形式 Laurent 級数とみなす.

以上の計算と同様の方法で Contou-Carrère 記号 (CC 記号) から符号部分を除いた式が得られることを次に示したい.

6.2 Contou-Carrère 記号のボソン自由場表示

以下では, $\mathbb{C}$ 上ではなく, $A = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$ 上で考える.

任意に $f, g \in A((z))^\times$ を取る. それらは次のように一意に表わされる:

$$f = z^\lambda b_0 \prod_{0 \neq i \in \mathbb{Z}} (1 - b_i z^i), \qquad g = z^\mu c_0 \prod_{0 \neq i \in \mathbb{Z}} (1 - c_i z^i).$$

ただし $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $b_0, c_0 \in A^\times$, $b_i, c_i \in A$, $b_{-i}, c_{-i} \in \mathfrak{m} = \varepsilon A$ $(i > 0)$ であり, 十分大きな i に対して $b_{-i} = 0$, $c_{-i} = 0$ であるとする. これらは次のように表される:

$$f = \exp\left(\lambda \log z + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m z^m\right), \quad g = \exp\left(\mu \log z + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m z^m\right).$$

すなわち

$$\log f = \lambda \log z + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m z^m, \qquad \log g = \mu \log z + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m z^m.$$

ここで, $\beta_0 = \log b_0$, $\gamma_0 = \log c_0$,

$$\beta_{\pm m} = -\sum_{i>0,\, i|m} \frac{b_{\pm i}^{m/i}}{m/i}, \qquad \gamma_{\pm m} = -\sum_{i>0,\, i|m} \frac{c_{\pm i}^{m/i}}{m/i} \qquad (m > 0).$$

$m > 0$ ならば $\beta_{-m}, \gamma_{-m} \in \mathfrak{m} = \varepsilon A$ であり, 十分大きな m に対してそれらは 0 になることに注意せよ.

上の f, g の表式はボソンの頂点作用素の表式に非常に似ている. そこで $\log z \mapsto -q$, $z^m \mapsto a_m$ という置き換えで頂点作用素と類似の作用素を作ることを考えよう.

天下り的になってしまうが, ϕ, ψ を次のように定める:

$$\phi = \pi i \lambda a_0 - \lambda q + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m a_m, \qquad \psi = \pi i \mu a_0 - \mu q + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m a_m.$$

$\pi i \lambda a_0$ と $\pi i \mu a_0$ の項が入っている理由は次の部分節を見ればわかる. さらに $\phi_\pm$, $\psi_\pm$ を次のように定める:

$$\phi_+ = \pi i \lambda a_0 + \sum_{m \geqq 0} \beta_m a_m, \qquad \phi_- = -\lambda q + \sum_{m<0} \beta_m a_m,$$
$$\psi_+ = \pi i \mu a_0 + \sum_{m \geqq 0} \gamma_m a_m, \qquad \psi_- = -\mu q + \sum_{m<0} \gamma_m a_m.$$

$:e^\phi:$, $:e^\psi:$ を次のように定めることができる:

$$:e^\phi: = e^{\phi_-} e^{\phi_+} = \exp\left(\sum_{m<0} \beta_m a_m\right) e^{\lambda q} \exp\left(\pi i \lambda a_0 + \sum_{m \geqq 0} \beta_m a_m\right),$$
$$:e^\psi: = e^{\psi_-} e^{\psi_+} = \exp\left(\sum_{m<0} \gamma_m a_m\right) e^{\mu q} \exp\left(\pi i \mu a_0 + \sum_{m \geqq 0} \gamma_m a_m\right).$$

補題. このとき次の公式が成立している:

$$:e^\phi::e^\psi: = \exp([\phi_+, \psi_-]) :e^{\phi+\psi}:,$$
$$\exp([\phi_+, \psi_-]) = \left((-1)^{\lambda\mu} b_0^\mu \prod_{i,j=1}^\infty \left(1 - b_i^{j/(i,j)} c_{-j}^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}\right)^{-1}.$$

証明. 後者の等式のみを示せばよい. $[a_m, q] = \delta_{m0}$, $[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}$ より

$$-[\phi_+, \psi_-] = \pi i\lambda\mu + \mu\beta_0 - \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m\gamma_{-m} = \pi i\lambda\mu + \mu\beta_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i,j|m} m\frac{b_i^{m/i}}{m/i}\frac{c_{-j}^{m/j}}{m/j}.$$

$k = m/i$, $l = m/j$ とおくとこの和を $ki = lj$ を満たす正の整数 i, j, k, l に関する和に書き直せる. 条件 $ki = lj$ とある正の整数 n で $k = j/(i,j)\cdot n$, $l = i/(i,j)\cdot n$ を満たすものが存在することは同値なので, この和は結局次のように書き直される:

$$\begin{aligned}
-[\phi_+, \psi_-] &= \pi i\lambda\mu + \mu\beta_0 - \sum_{i,j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ij}{(i,j)}n\frac{b_i^{j/(i,j)\cdot n}}{j/(i,j)\cdot n}\frac{c_{-j}^{i/(i,j)\cdot n}}{i/(i,j)\cdot n} \\
&= \pi i\lambda\mu + \mu\beta_0 - \sum_{i,j=1}^{\infty}(i,j)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(b_i^{j/(i,j)}c_{-j}^{i/(i,j)}\right)^n}{n} \\
&= \pi i\lambda\mu + \mu\beta_0 + \sum_{i,j=1}^{\infty}(i,j)\log\left(1 - b_i^{j/(i,j)}c_{-j}^{i/(i,j)}\right).
\end{aligned}$$

ゆえに $\beta_0 = \log b_0$ より,

$$(\exp([\phi_+, \psi_-]))^{-1} = (-1)^{\lambda\mu}b_0^{\mu}\prod_{i,j=1}^{\infty}\left(1 - b_i^{j/(i,j)}c_{-j}^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}.$$

これは示したい公式と同値である. □

上の補題から次の定理がただちに導かれる.

定理. 以上の設定のもとで次の公式が成立している:

$$(:e^{\phi}::e^{\psi}:)^{-1}:e^{\psi}::e^{\phi}: = \frac{b_0^{\mu}\prod_{i,j=1}^{\infty}\left(1 - b_i^{j/(i,j)}c_{-j}^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}}{c_0^{\lambda}\prod_{i,j=1}^{\infty}\left(1 - b_{-i}^{j/(i,j)}c_j^{i/(i,j)}\right)^{(i,j)}} = (-1)^{\lambda\mu}\langle f, g\rangle.$$

ここで $\langle f, g\rangle$ は Contou-Carrère 記号である. □

このように Contou-Carrère 記号は符号部分を除いてボソンの頂点作用素に類似の表示を持つ作用素の乗法交換子を用いて表わされる.

6.3 $\log f$ のボソン化 ϕ の反復積分表示

$x_0 \neq 0$ から出発して原点の周囲を反時計回りに一周して x_0 に戻る経路を C と書く. $\log f$, $\log g$ は次の形の函数であるとする:

$$\log f = \lambda\log z + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\beta_m z^m, \qquad \log g = \mu\log z + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_m z^m.$$

このとき $c(\log f, \log g)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
c(\log f, \log g) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C(\log f\cdot d\log g - d\log f\cdot\log g(x_0)) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C(\log f\circ d\log g + \log f(x_0)\cdot d\log g - d\log f\cdot\log g(x_0)).
\end{aligned}$$

このとき次の公式が成立している:

$$
\begin{aligned}
&c(\log f, \log g) + c(\log g, \log f) = 2\pi i \lambda \mu, \\
&c(\log z, \log z) = \pi i, \qquad c(z^m, z^n) = -m\delta_{m,n}, \\
&c(z^m, \log z) = \delta_{m0}, \qquad c(\log z, z^n) = -\delta_{0n}.
\end{aligned}
$$

これらの公式を使えば次が成立していることがわかる:

$$
c(\log f, \log g) = \pi i \lambda \mu + \mu \beta_0 - \lambda \gamma_0 - \sum_{m \neq 0} m \beta_m \gamma_{-m}.
$$

これを

$$
\log g = \varphi(z) = q + a_0 \log z + \sum_{m \neq 0} a_m \frac{z^{-m}}{-m}
$$

すなわち $\mu = a_0$, $\gamma_0 = q$, $\gamma_{-m} = -a_m/m$ の場合に形式的に適用すると,

$$
c(\log f, \varphi) = \pi i \lambda a_0 - \lambda q + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m a_m = \phi.
$$

この ϕ は前部分節で定義された $\log f$ のボソン化 ϕ である.

参考文献

[1] Anderson, Greg W. and Pablos Romo, Fernando. Simple proofs of classical explicit reciprocity laws on curves using determinant groupoids over an artinian local ring. http://arxiv.org/abs/math/0207311

[2] Brylinski, Jean-Luc. Central extensions and reciprocity laws. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 1997, Vol. 38, Issue 3, 193–215. https://eudml.org/doc/91592

[3] Chen, Kuo-Tsai. Iterated path integrals. Bull. Amer. Math.— Soc., Vol. 83, no. 5 (1977), pp. 831–879. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183539443

[4] Deligne, Pierre. Le symbole modéré. Publ. math, I.H.É.S., tome 73 (1991), p. 147–181. https://eudml.org/doc/104074

[5] Hain, Richard M. Classical polylogarithm. http://arxiv.org/abs/alg-geom/9202022

[6] Horozov, Ivan and Luo, Zhenbin. On the Contou-Carrere symbol for surfaces. http://arxiv.org/abs/1310.7065

[7] Kerr, Matt. An elementary proof of suslin reciprocity. Canad. Math. Bull., 48 (2005), 221–236. http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2005-020-x

[8] Luo, Zhenbin. Contou-Carrère symbol via iterated integrals and its reciprocity law. http://arxiv.org/abs/1003.1431

[9] Pablos Romo, Fernando. On the Steinberg property of the Contou-Carrère symbol. http://arxiv.org/abs/math/0602374

[10] Tate, John. Symbols in arithmetic. Ates. Conrès intern. math., 1970, Tome 1, pp. 201–211. http://www.mathunion.org/ICM/ICM1970.1/Main/icm1970.1.0201.0212.ocr.pdf

[11] 山田泰彦. 共形場理論入門. 数理物理学シリーズ 1, 培風館, 2006, xii+265 頁.

[12] 山崎隆雄. 平方剰余の相互法則の函数体類似. 数学セミナー, 第 55 巻第 2 号/通巻 652 号, 2016 年 2 月号, 特集：平方剰余の相互法則, pp. 28–32.