

# 解けて欲しい微分方程式達

2019-06-29作成

黒木 玄

2019-06-29 作成.

2019-07-02 完全微分方程式, Riccati, Clairaut.

2020-05-19 強制振動 $\ddot{y}$ の $\alpha \rightarrow \omega$ への極限の計算.

2020-07-01 Hermiteの多項式の解説を追加した.

2020-07-07 ベクトル場の図を追加

2020-07-14 積分因子という用語の紹介を追加した.

定数係数の線形常微分方程式  $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}, u = u(x), p_1, \dots, p_n$  は定数.

$$(4) (\frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{d}{dx} + p_n) u = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

**解き方**  $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = (\lambda - d_1)^{m_1} \cdots (\lambda - d_s)^{m_s}$ ,  $d_i$  は互いに異なるとえよとせ,

方程式 (4) の一般解は

$$(4*) u(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{m_i-1} a_{ik} x^k e^{d_i x}, \quad a_{ik} \text{ は定数}$$

と一意に表わされる. ただし  $m_1 = \dots = m_s = 1$  (重根がない場合) には (4\*) は

$$u(x) = a_1 e^{d_1 x} + \dots + a_n e^{d_n x}, \quad a_i \text{ は定数}$$

の形になる. 定数  $a_{ik}$  ( $i < 1$  は  $a_i$ ) たゞには他の条件によって決定された.  $\square$

**例**  $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2) u = 0, \omega > 0$  の解は  $e^{\pm i \omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$  を使うと,

$$u(x) = a e^{i \omega x} + b e^{-i \omega x} = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

と書ける. ここで  $A = a + b, B = i(a - b)$ . こゝに条件  $u(0) = a, u'(0) = b$  を満足し,

$$u(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x), \quad \square$$

**例**  $(\frac{d^2}{dx^2} + 5\frac{d}{dx} + 6) u = u'' + 5u' + 6u = 0, u(0) = a, u'(0) = b$  の解を求める.

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \text{ の解は } \lambda = -2, -3 \text{ である}, u'' + 5u' + 6u = 0 \text{ の解は}$$

$$u(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$$

と書ける. ここで,  $u'(x) = -2A e^{-2x} - 3B e^{-3x}$  である,

$$u(0) \stackrel{(1)}{=} A + B = a, \quad u'(0) \stackrel{(2)}{=} -2A - 3B = b.$$

これは,

$$3x(1) + (2): A = 3a + b,$$

$$2x(1) + (2): -B = 2a + b, \quad B = -2a - b$$

と解けたので, 解は,

$$u(x) = (3a + b) e^{-2x} + (-2a - b) e^{-3x}. \quad \square$$

**例**  $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)^2 u = 0$  の解は  $e^{\pm i \omega x}, x e^{\pm i \omega x}$  の一次結合で書ける  $e^{\pm i \omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$

を代入すると, 解は

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + c x \cos(\omega x) + d x \sin(\omega x)$$

と表わされることがわかる  $\square$

強制振動付きの調和振動子  $\alpha, \omega > 0$  とする。  $u = u(t)$ ,  $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$  とする。

$$(*) (\partial^2 + \omega^2) u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t).$$

**解法**  $(*)$  の右辺を  $v$  と書く,  $v$  は  $(\partial^2 + \omega^2)v = 0$  の解に満たす。つまり  $(*)$  は

$$(*)' (\partial^2 + \omega^2)(\partial^2 + \alpha^2) u = (\partial^2 + \alpha^2)v = 0$$

と書き直される。 $(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$  が重根を持つ場合 ( $\alpha \neq \omega$ ) や持つ場合 ( $\alpha = \omega$ ) の場合分けを考える。

$\alpha \neq \omega$  のとき,  $(*)'$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書き下す。このとき

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)),$$

$$\therefore (\partial^2 + \omega^2)u = (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)).$$

これと  $(*)$  を比較すると,

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

である。  $u(t)$  は  $(*)$  の解にはならないから、 $(*)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

$\alpha = \omega$  のとき,  $(*)'$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書き下す。このとき,  $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$  で  $f = ct, dt, g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$  を使うと,

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2wc \sin(\omega t) + 2wd \cos(\omega t),$$

$$(\partial^2 + \omega^2)u(t) = -2wc \sin(\omega t) + 2wd \cos(\omega t)$$

两边で  $n$ ,  $c = -\frac{q}{2w}, d = \frac{p}{2w}$  とおくと,  $u(t)$  は  $(*)$  を満たす。 $(*)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2w} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2w} t \sin(\omega t). \quad \square$$

**例** 方程式  $\ddot{u}(t) + u(t) = \sin t$ ,  $u(0) = 1$ ,  $\dot{u}(0) = 0$  の解を求めよ。

$$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2}t \cos t \text{ のとき}, \quad \ddot{u}(t) = -u(t) + \sin t,$$

$$u(0) = a = 1, \quad \dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t, \quad \dot{u}(0) = b - \frac{1}{2} = 0, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2}t \cos t.$$

$$\begin{aligned} & (\cos t)'' \\ &= (-t \sin t + \cos t)' \\ &= -t \cos t - \sin t - \sin t \\ &= -t \cos t - 2 \sin t \end{aligned}$$

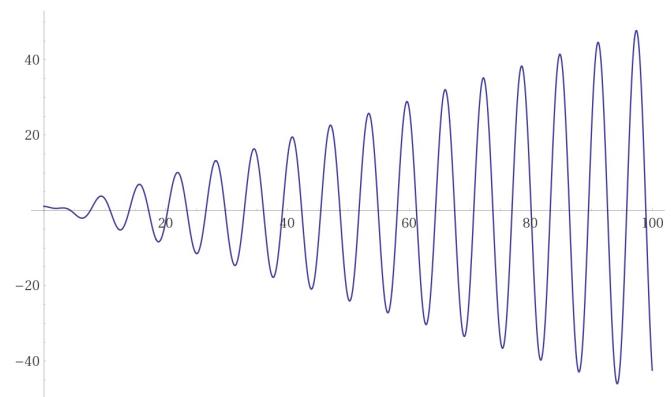
□

In[1]:= lode1 = {u''[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}  
正弦

Out[1]:= {u[t] + u''[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}

In[4]:= DSolve[lode1, u[t], t] // Simplify // Expand  
微分方程式を解く 簡単な形式に 展開

Out[4]:= {{u[t] \rightarrow Cos[t] - 1/2 t Cos[t] + Sin[t]/2}}



$$(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t) \quad (\alpha = d/dt, \omega > 0, \alpha > 0) \text{ の解の } \alpha \rightarrow \omega \text{ の極限}$$

$(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$  の解は  $\alpha \neq \omega$  のとき

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t) \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。この  $\alpha \rightarrow \omega$  の極限を单纯化すると、そしても分母の  $\omega^2 - \alpha^2$  が "0" になるとく行かない。正しい問題設定は初期条件  $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$  を固定して、解の極限を考えることである。

$$(\textcircled{**}) \quad (\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B \quad (\alpha > 0, \omega > 0).$$

(i)  $\alpha \neq \omega$  の場合  $\textcircled{1}$  のとき、 $u(0) = a + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \dot{u}(0) = wb + \alpha \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$  などの初期条件と

$$a = A - \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad b = \frac{1}{\omega} \left( B - \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \right) \text{ と同値である。ゆえに (**) の解は}$$

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) - \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} (\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)) - \frac{q}{\alpha^2 - \omega^2} (\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)).$$

そして、 $\alpha \rightarrow \omega$  のとき、

$$\frac{\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)}{\alpha - \omega} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\omega} \cos(\alpha t) = -t \sin(\omega t),$$

$$\frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} = \frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} - \frac{\frac{d}{d\alpha} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\alpha} \sin(\alpha t)}{\alpha - \omega} \rightarrow t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

$$\begin{aligned} \therefore u(t) &\rightarrow A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} (t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)) \\ &= A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

(ii)  $\alpha = \omega$  の場合  $(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

このとき、 $u(0) = a, \dot{u}(0) = wb - \frac{q}{2\omega}$  などの初期条件  $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$  と  $a = A, b = \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right)$  と同値である。ゆえに (\*\*) の解は、

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t),$$

これは (i) で得た (\*\*) の解の  $\alpha \rightarrow \omega$  の極限に一致する。  $\square$

**解説** (\*\*) と同値な方程式

$$(\textcircled{**})' \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u + p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B$$

は周期  $\frac{2\pi}{\omega}$  の調和振動子に外部から周期  $\frac{2\pi}{\alpha}$  で振動する力を与えた様子を記述している。

$\alpha \neq \omega$  であれば、解は周期  $\frac{2\pi}{\omega}$  の振動と周期  $\frac{2\pi}{\alpha}$  の振動の和になり、

$\alpha = \omega$  ならば、 $t \rightarrow \infty$  で振幅が大きくなる解が得られる。

上の計算は  $\alpha \neq \omega$  の解のとのよう公極限によって  $\alpha = \omega$  の解が得られるかを示している。  $\square$

单独1階の線形常微分方程式

$$u = u(x), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x).$$

**解法**  $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}.$   $\square$

$$\text{例 } u'(x) = -x u(x) \text{ の解は}, \int_0^x (-y)dy = -\frac{x^2}{2} \text{ と}, u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad \square$$

单独1階の非齊次線形常微分方程式

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad \text{定数変化法}$$

**解法**  $u(x) = c(u) e^{\int_0^x a(y)dy}$  の形で解を構成し,  $u(0) = c(0)$ ,  
 $u'(x) = a(x)c(u) e^{\int_0^x a(y)dy} + c'(x) e^{\int_0^x a(y)dy} = a(x)u(x) + c'(x) e^{\int_0^x a(y)dy},$

これと (\*) を比較すると,  $c'(x) = e^{-\int_0^x a(y)dy}f(x)$ ,  $c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y)dy} b(z)dz$  となる,  
 $u(x)$  は (\*) の解に反し, (\*) の解は  $x$  の関数である.

$$u(x) = c(u) e^{\int_0^x a(y)dy} = u(0) e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z) dz.$$

**確認問題**  $u(x) = u(0) e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z) dz$  となる,

$$u'(x) = a(x)u(0)e^{\int_0^x a(y)dy} + a(x)\int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z) dz + e^{\int_x^x a(y)dy} b(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad \square$$

$$\text{例 } u'(x) = -x u(x) + x \text{ の解は},$$

$$\int_z^x (-y)dy = \left[ -\frac{y^2}{2} \right]_{y=z}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

$$\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} z dz = \left[ e^{\frac{z^2}{2}} \right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

"207"

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \right) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**確認問題** そのとき,  $-x u(x) + x = -x(u(x) - 1) = -x u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}},$

$$u'(x) = -x u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{OK.} \quad \square$$

ベルヌイ  
Bernoulli 方程式

$$(*) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\alpha \quad (\alpha \neq 1 \text{ と仮定}).$$

**解法**  $(*) \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x) \text{ となる}, \quad (y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \text{ なので}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

ゆえに,  $u = y^{1-\alpha}$  とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは  $u$  に関する単純1階の非齊次線形常微分方程式なので、その解法で解ける。□

**例**  $y' = -xy + xy^3$  を解こう。  $u = y^{1-3} = y^{-2}$  とおくと,  $u' = 2xu - 2x$ ,

$u' = 2xu$  の解  $e^{x^2}$  を用いて,  $u = e^{x^2}c(x)$  の形で解を構成する。このとき,  $u' = 2xu + e^{x^2}c'(x)$ ,

この  $u$  が解であることは  $c'(x) = -2xe^{-x^2}$  と同値、これを解くと,  $c(x) = e^{-x^2} + C$ .

このとき,  $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$ ,  $y = \pm u^{1/(1-3)} = \pm (1 + Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$ . □

# 連立1階の定数係数線形常微分方程式

$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = [a_{ij}]$  は  $n \times n$  の定数行列 とする.

$$(*) \quad \dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t).$$

**解法**  $\mathbf{U}(t) = e^{tA} \mathbf{U}(0)$ ,  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ .  $\square$

**例**  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $A^2 = -E$ ,  $e^{tA} = E \cos t + A \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  の解は  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t \end{bmatrix}$ .  $\square$

**例**  $\ddot{\mathbf{U}}(t) = -\omega^2 \mathbf{U}(t)$  は  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  を書き直され.

$A^2 = -\omega^2 E$  より,  $A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix}$ ,  $A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k} \\ (-1)^{k+1} \omega^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}$ .

$\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (wt)^k}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \begin{bmatrix} \cos(wt) & \omega^{-1} \sin(wt) \\ -w \sin(wt) & \cos(wt) \end{bmatrix}$ .

解は次のようになります:

$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(wt) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(wt) \\ -w u(0) \sin(wt) + \dot{u}(0) \cos(wt) \end{bmatrix}$ .

すなはち,  $u(t) = u(0) \cos(wt) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(wt)$ .  $\square$

**例**  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$  のときの  $\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  を解こう.

$A$  を対角化しよう.  $| \lambda E - A | = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$  なので  $A$  の固有値は 2 と 3.

$A$  の固有値 2 の固有ベクトルとして,  $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  がいとれる.

$A$  の固有値 3 の固有ベクトルとして,  $q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  がいとれる.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  とおき,  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  で,  $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$ .

$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & -3e^{2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{U}(t) = e^{tA} \mathbf{U}(0) = \begin{bmatrix} (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-3u(0) + 3v(0))e^{3t} \\ (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-4u(0) + 4v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$ . ここで  $\mathbf{U}(t)$  の解は 2 と 3.

**確認**  $\dot{\mathbf{U}}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$ ,  $A \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$  OK.  $\square$

# 連立1階の非齊次定数係数線形常微分方程式

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n \times n \text{ 行列}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$(*) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t).$$

**解法**  $\dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t)$  の解  $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0)$  の定数ベクトル  $\mathbf{u}(0)$  をベクトル値函数  $\mathbf{C}(t)$  として  
書きかえた次の形の解を探す:

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{C}(t), \quad \text{定数変化法}$$

このとき,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{C}(0)$ ,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A e^{\lambda t} \mathbf{C}(t) + e^{\lambda t} \dot{\mathbf{C}}(t) = A \mathbf{u}(t) + e^{\lambda t} \dot{\mathbf{C}}(t)$$

ここで, (\*) とこれで比較すると,

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = e^{-\lambda t} \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{-s\lambda} \mathbf{b}(s) ds$$

ゆえに,  $\mathbf{u}(t)$  は (\*) の解に及ぶ, (\*) の解は

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{C}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(\lambda-t)s} A \mathbf{b}(s) ds.$$

**確認** このとき,  $\dot{\mathbf{u}}(t) = A e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + A \int_0^t e^{(\lambda-s)A} \mathbf{b}(s) ds + e^{(\lambda-t)A} \mathbf{b}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t)$ . OK.  $\square$

**例**  $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{bmatrix}$  なので,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

の解は,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(\lambda-t)s} A \mathbf{b}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(\lambda-t-s) & -\sin(\lambda-t-s) \\ \sin(\lambda-t-s) & \cos(\lambda-t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} u(0) \cos \lambda t - v(0) \sin \lambda t + \int_0^t (f(s) \cos(\lambda-t-s) - g(s) \sin(\lambda-t-s)) ds \\ u(0) \sin \lambda t + v(0) \cos \lambda t + \int_0^t (f(s) \sin(\lambda-t-s) + g(s) \cos(\lambda-t-s)) ds \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで,  $f(t)=0, g(t)=-1$  のとき,  $\int_0^t \sin(\lambda-t-s) ds = \left[ \cos(\lambda-t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos \lambda t$  なので

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \cos \lambda t - v(0) \sin \lambda t + 1 - \cos \lambda t \\ v(t) = u(0) \sin \lambda t + v(0) \cos \lambda t - \sin \lambda t \end{cases}$$

$\left( - \int_0^t \cos(\lambda-t-s) ds = \left[ \sin(\lambda-t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = -\sin \lambda t \right) \square$

(注)  $v(t) = -\dot{u}(t) \quad \forall t < 12 \rightarrow$

## 一般の強制力付きの調和振動子

$$(*) \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t).$$

**解法**  $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$  とおくと、(\*)は次のよう書き直される：

$$(*)' \quad \dot{U}(t) = AU(t) + B(t).$$

この(\*)'は次のように角解するべくして：

$$U(t) = e^{tA} U(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

この場合に、 $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$  とおき、

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds \end{bmatrix},$$

(\*)の角解は次のように表わされる：

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds,$$

□

**例題**  $U(t)$  を次のように定めると  $U(t)$  が(\*)を満たしていることを直接確認せよ。

**解**  $\dot{u}(t) = -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds + \overbrace{\omega^{-1} \sin(\omega(t-t)) f(t)}^{=0}$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(0) \cos(\omega t) - \omega^2 \dot{u}(0) \sin(\omega t) - \omega^2 \int_0^t \sin(\omega(t-s)) f(s) ds + \underbrace{\cos(\omega(t-t)) f(t)}_{=1}$$

$$= -\omega^2 u(t) + f(t),$$

□

連立1階の(非定数係数の)線形常微分方程式

$E$ は $n \times n$ 単位行列であるとする。

$U(t) = [U_{ij}(t)]$ ,  $A(t) = [a_{ij}(t)]$  は $n \times n$ 行列値函数であるとする。

(\*)  $\dot{U}(t) = A(t)U(t)$ ,  $U(0) = E$ .

**解法**  $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)$ .  $\square$

(注)  $U(t)$ の形は一般には具体的にはわからぬ,

連立1階の非齊次の(非定数係数の)線形常微分方程式  $U(t)$ は上の $U(t)$ とする。

(\*)  $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$  定数変化法

**解法**  $u(t) = U(t)C(t)$  の形で解を探す,  $u(0) = C(0)$  かつ

$$\dot{u}(t) = A(t)U(t)C(t) + U(t)\dot{C}(t) = A(t)u(t) + U(t)\dot{C}(t)$$

左の式, (\*) と比較する,

$$\dot{C}(t) = U(t)^{-1}b(t), \quad C(t) = C(0) + \int_0^t U(s)^{-1}b(s) ds$$

のときの

$$u(t) = U(t)C(t) = U(t)u(0) + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}b(s) ds$$

が(\*)の解になる。

$\square$

**注意**  $O = \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(X(t)X(t)^{-1}) = \dot{X}(t)X(t)^{-1} + X(t)\frac{d(X(t)^{-1})}{dt}$  今この式  
 $\frac{d}{dt}(X(t)^{-1}) = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}$

これを使うと, 次を示せる:  $U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$  とおくと,

(1)  $U(t,t) = E$ ,

(2)  $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(s)U(t,s)$ ,

(3)  $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1} = -U(t)U(s)^{-1}A(s) = -U(t,s)A(s)$ ,

この3つの条件のうち (1) と (2) (または (1) と (3)) の2つの条件で  $U(t,s)$  が一意に特徴付けられる。  
 $U(t,s)$  は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} U(t,s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_{s,t_1}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{s,t_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_n \int_{s,t_{n-1}}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{s,t_2}^{t_2} dt_1 A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) \end{aligned}$$

これが (1), (2), (3) を満たすことを確認せよ

単独2階の線形常微分方程式で「0でない解が1つ分かれている場合」

$$j = \frac{\partial}{\partial x}$$

方程式

$$(*) (\partial^2 + p(x)\partial + q(x))u(x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0$$

の0でない解  $f(x)$  加え1つ分かれているとき、 $f(x)$  と一次独立な別の解  $g(x)$  を求めよ。

**解法1**  $g(x) = f(x)c(x)$  ( $c(x)$  は非定数函数) の形で (\*) の解を探してみる。このとき

$$g = fc, \quad g' = f'c + fc', \quad g'' = f''c + 2f'c' + fc''$$

$$g'' + pg' + qg = (f'' + pf' + qf)c + (2f' + pf)c' + fc''.$$

$g$  が (\*) の解であることを、 $(2f' + pf)c' + fc'' = 0$  は同値であり、それをせたす  $c$  は次のように作れる:

$$c'' = -\left(2\frac{f'}{f} + p\right)c', \quad c'(x) = e^{-\int(2\frac{f'}{f} + p)dx} = f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx}.$$

$$c(x) = \int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx} dx.$$

このとき、

$$g(x) = f(x) \int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx} dx.$$

□

**解法2**  $f, g$  が (\*) の一次独立な解のとき、それらのWronskian が  $W(f, g)(x) = e^{-\int p(x)dx}$  となることを使う;

$$f, g の Wronskian は W = W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf' と書くと、$$

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' - qf & -pg' - qg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' & -pg' \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = -pW$$

$$\text{なので}, W = fg' - gf' = e^{-\int p(x)dx}. \quad \text{ゆえに } g' = \frac{f'}{f}g + \frac{1}{f}e^{-\int p(x)dx}. \quad \text{この解を}$$

$$g = c(x)e^{\int \frac{f'}{f}dx} = f(x)c(x) の形で整理してみる。このとき, g' = f'c + fc' = \frac{f'}{f}g + fc' \quad ① \text{と} ② \text{を}$$

$$\text{比較すると}, c' = \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx} \text{なので}, このような } c \text{ の形で } c = \int \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx} dx \text{ と作れる。}$$

このとき、

$$g(x) = fc = f(x) \int \frac{1}{f(x)^2}e^{-\int p(x)dx} dx, \quad (\text{これは上の解法1と同じ結果})$$

□

**例**  $(\partial - x)(\partial + x)u(x) = (\partial^2 - x^2 + 1)u(x) = u''(x) - (x^2 - 1)u(x) = 0$  の解こう。 $(\partial + x)u(x) = 0$  の解はその解

なので  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  は解である。  $f$  と一次独立な解  $g$  は  $g = fc$  ( $c$  は非定数) の形で整理してみる。

ここで、  $g'' - (x^2 - 1)g = (f'' - (x^2 - 1)f)c + 2f'c' + fc'' = 2f'c' + fc''$ .  $g$  が解であるような  $c$  の形で  $2f'c' + fc'' = 0$ ,

$$c'' = -2\frac{f'}{f}c', \quad c' = e^{-\int 2\frac{f'}{f}dx} = f^{-2}, \quad c = \int f^{-2}dx$$

と求めることができる。このとき、

$$g(x) = fc(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx,$$

(\*) の2つの解は  $u(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}} + be^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx$  ( $a, b$  は定数) と表わされる。

□

## Hermite の多項式

$k$  次の Hermite の多項式  $H_k(x)$  を

$e^{2xt-t^2}$  は Hermite の多項式の  
母函数と呼ぶ

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x), \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots$$

と定める。さらに、 $\varphi_k(x)$ ,  $G = G(x, t)$  を次のように定める:

$$\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad G = G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_k(x) = e^{2xt-t^2-\frac{1}{2}x^2}.$$

$\partial = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  とき、微分作用素  $H$  を

$$H = -\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

と定める。この  $H$  を量子調和振動子の Hamiltonian (ハミルトニアン) と呼ぶ。

## 定理

$$H \varphi_k(x) = \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad \leftarrow \varphi_k(x) \text{ は } H \text{ の固有函数である。}$$

## 証明

$G$  に  $\partial_x \pm x$  を作用させると、 $(\partial_x \pm x)G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\partial_x \pm x) \varphi_k(x)$  だから,  
 $\star$  より,

$$(\partial_x + x)G = (2t - x + x)G = 2tG = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2t^{l+1}}{l!} \varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2k \varphi_{k-1}(x),$$

$$(\partial_x - x)G = (2t - 2x)G = -\frac{\partial}{\partial t}G = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-\varphi_{k+1}(x)).$$

ゆえに、

$$(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k\varphi_{k-1}(x), \quad (\partial_x - x)\varphi_k(x) = -\varphi_{k+1}(x). \quad \leftarrow \begin{cases} \partial_x - x \text{ と } \partial_x + x \text{ は} \\ \text{昇降演算子である。} \end{cases}$$

これより、

$$(\partial_x - x)(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k(\partial_x - x)\varphi_{k-1}(x) = -2k\varphi_k(x).$$

したがって、

$$H \varphi_k(x) = \left( -\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2} \right) \varphi_k(x) = \left( -\frac{1}{2}(-2k) + \frac{1}{2} \right) \varphi_k(x) = \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi_k(x). \quad \boxed{\text{q.e.d.}}$$

## 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) H_l(x) e^{-x^2} dx \stackrel{\textcircled{1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx \stackrel{\textcircled{2}}{=} \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}. \quad \leftarrow \text{直交性}$$

## 証明

$\textcircled{1}$  は  $\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$  から出る。 $\textcircled{2}$  を示そう。 $\textcircled{2}$  の計算は母函数で行うと易しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s, x) G(t, x) dx = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{t^l}{l!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx}_{\text{から}} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}, \quad \text{よし}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s, x) G(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 2(s+t)x - (s^2 + t^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(s+t))^2 + 2st} dx \text{ とおなじ},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ より}, \text{ これは次に等しい:}$$

$$\sqrt{\pi} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k s^k t^k}{k!} = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{t^l}{l!} \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}.$$

$$\text{以上を比較すると, } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{kl} 2^k k! \sqrt{\pi}.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

変数分離形

$$y = y(x)$$

$$(*) \frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

**解法**  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$  は ( $y$ の函数)= $(x$ の函数) の形の式になる。これを  $y$ について解くと、 $y = (x\text{の函数})$  が得られる。これが (\*) の解である。□

**例**  $\frac{dv}{dt} = 1+v^2$  を解く。  $\int \frac{dv}{1+v^2} = \int dt + C$ ,  $\arctan v = t+C$ ,  $v = \tan(t+C)$ . □

**補足**  $v = \tan t$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1+v^2$ . □

**例**  $\frac{dv}{dt} = 1-v^2$  を解く。  $\int \frac{dv}{1-v^2} = \int dt + C$ ,  $\operatorname{arctanh} v = t+C$ ,  $v = \tanh(t+C)$ . □

**補足**  $v = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = \frac{\cosh t}{\cosh^2 t} - \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t = 1-v^2$ . □

**例** (-様重力下で落下する物体の速度の慣性抵抗下での時間変化)

$$\frac{dv}{dt} = -1-v|v| = \begin{cases} -1-v^2 & (v \geq 0), \\ -1+v^2 & (v \leq 0). \end{cases}$$

これを解く。

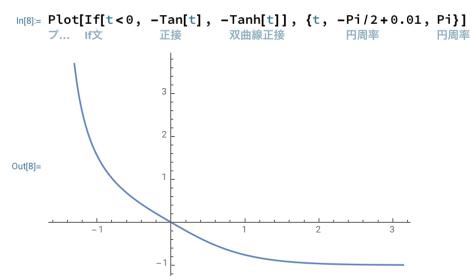
$v \leq 0$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = -1-v^2$ ,  $\int \frac{dv}{1-v^2} = -\int dt + C_1$ ,  $\operatorname{arctanh} v = -t+C_1$ ,  $v = -\tanh(t-C_1)$ ,  
 $t-C_1 \geq 0$

$v \geq 0$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = -1-v^2$ ,  $\int \frac{dv}{1-v^2} = -\int dt + C_2$ ,  $\operatorname{arctan} v = -t+C_2$ ,  $v = -\tan(t-C_2)$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} < t-C_2 \leq 0$

この2つが連続的につながるには  $C=C_1=C_2$  なければならない。

$$v(t) = \begin{cases} -\tan(t-C) & \left(-\frac{\pi}{2}+C < t \leq C\right) \\ -\tanh(t-C) & (C \leq t) \end{cases}$$

$C=0$  の場合 →



**補足** 粘性抵抗の場合の運動方程式は  $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$  の形なので通常に単位系とり直す必要はない。  $\dot{v} = -1-v$  の形になります。これを解くと、

$$\int \frac{dv}{1+v} = -\int dt + C, \quad \log(1+v) = -t+C \quad v = e^{-(t+C)} - 1.$$

$$(確認 \quad \dot{v} = -e^{-(t+C)}, \quad -1-v = -1-e^{-(t+C)}+1 = -e^{-(t+C)} \text{ OK.})$$

慣性抵抗の場合の運動方程式は  $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv|v|$  の形なので通常に単位系とり直す必要はない。  $\dot{v} = -1-v|v|$  の形になります。これを解いたのが上の例である。□

例 (logistic equation)  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  ( $0 < x < 1$ ) を解こう.

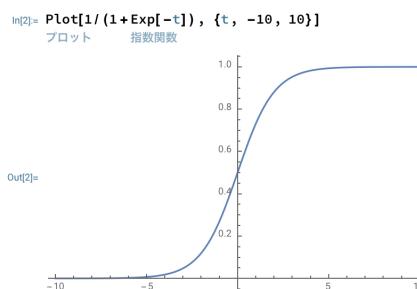
$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + C, \quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + C,$$

$$\log x - \log(1-x) = t + C, \quad \log \frac{x}{1-x} = t + C, \quad \frac{x}{1-x} = e^{t+C}, \quad x = e^{t+C} - e^{t+C} x$$

$$(1 + e^{t+C})x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{1 + e^{t+C}} = \frac{1}{1 + e^{-(t+C)}}.$$

解  $x(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t+C)}}$  が求まる.

$C=0$  の場合  $\rightarrow$



□

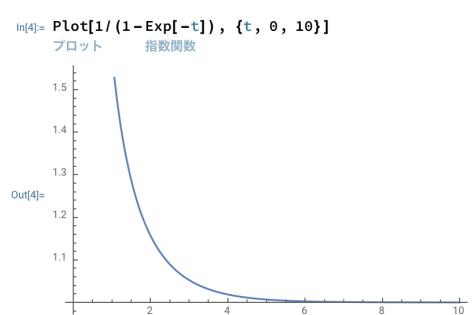
例  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の  $x > 1$  の場合.  $\int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = t + C, \quad \log x - \log(x-1) = t + C,$

$$\log \frac{x}{x-1} = t + C, \quad \frac{x}{x-1} = e^{t+C}, \quad x = e^{t+C} x - e^{t+C},$$

$$(e^{t+C}-1)x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{e^{t+C}-1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}.$$

$C=0$  の場合

解  $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}$  ( $t+C > 0$ ) が求まる.



□

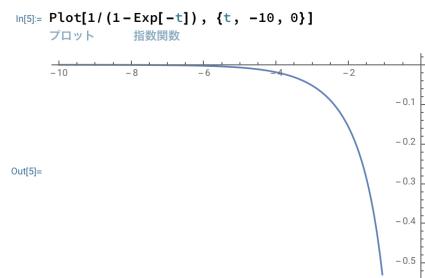
例  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の  $x < 0$  の場合.  $\int \left( -\frac{1}{-x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + C, \quad \log(-x) - \log(1-x) = t + C$

$$\log \frac{-x}{1-x} = t + C, \quad \frac{-x}{1-x} = e^{t+C}, \quad -x = e^{t+C} - e^{t+C} x$$

$$(e^{t+C}-1)x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{e^{t+C}-1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}.$$

$C=0$  の場合

解  $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}$  ( $t+C < 0$ ) が求まる.



□

例  $x(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}$  ( $C$  は定数) が  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の解であることを示し,  $x_0 \neq 0$  のとき,

$$\dot{x}(t) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}, \quad x(t)(1-x(t)) = \frac{1}{1+Ce^{-t}} \left( 1 - \frac{1}{1+Ce^{-t}} \right) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}, \quad \dot{x}(t) = x(t)(1-x(t)),$$

$$x(0) = \frac{1}{1+C} = x_0, \quad 1 = x_0 + x_0 C, \quad C = x_0^{-1} - 1$$

(\*)の  $x(0) = x_0 \neq 0$  を満たす角解は,  $x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-t}}$ .

□

注  $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^{-1} = \infty$  には  $x(t) = 0$  という定数解が対応している. □

## ベクトル場の図

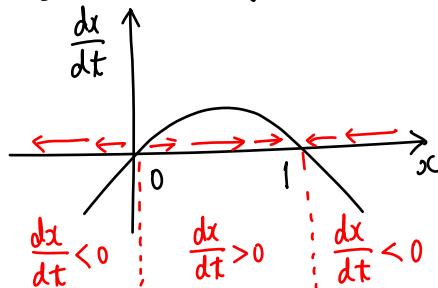
### logistic 方程式

$$(*) \frac{dx}{dt} = x(1-x) \quad (\text{tは時間})$$

$x$  軸上の  $x$  の位置に  $x(1-x)$  が正なら右向きの、負なら左向きの長さかその絶対値のベクトル(矢線)を描く。  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  が正ならば  $x$  は時間とともに増加し、負ならば減少する。

$x(1-x)$  の正負

$x$	0	1
$x(1-x)$	-	0 + 0 -

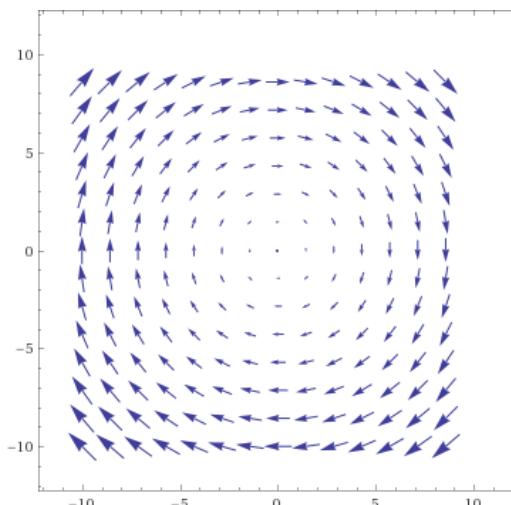
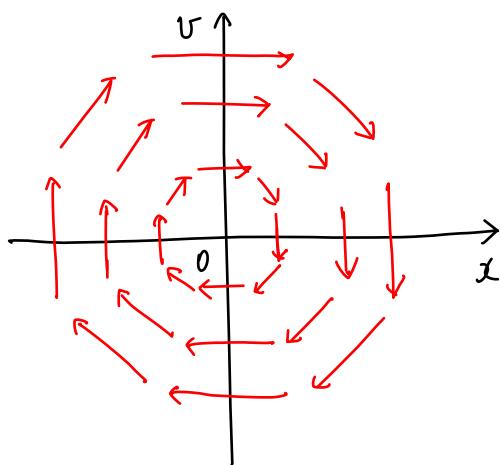


(\*) また  $x=x(t)$  は  $0 < x < 1$  のとき時間とともに増加し、 $x < 0$  または  $1 < x$  で減少する。

### 調和振動子

$$(*) \frac{d^2x}{dt^2} = -x. \text{ これは } V = \frac{dx}{dt} \text{ とおくと, } \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ と書き直される。}$$

$xv$  平面上の点  $(x, v)$  にベクトル  $\begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix}$  を矢線で描く。



plot a vector field in WolframAlpha.com ~

$xv$  平面上で (\*) のとき  $(x, v) = (x(t), \frac{dx(t)}{dt})$  は矢印の向きに矢線に沿って動いて行く。

そういう  $(x, v)$  は原点の回りを時計と同じ向きに回転していることが図よりわかる。  
(実際にそうなる。)

以上のようにベクトル場の図を描けば、微分方程式を解かなくてても、微分方程式の解のたいたいの挙動がわかつてしまう。

同次方程式 (\*)  $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ .

解法  $y = \frac{x}{t}$  に変数変換する。このとき,  $x = ty$  なので

$$(*) \Leftrightarrow f(y) = \frac{dx}{dt} = y + t \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t} \quad \leftarrow \text{これは変数分離形。}$$

(\*\*) は以下のように解く。

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \int \frac{dt}{t} + C = \log|t| + C, \quad t = \pm e^{-C + \int \frac{dy}{f(y) - y}} \quad \leftarrow (\star)$$

(\*) の逆函数を  $y(t)$  と書くとき, (\*) の解は  $x(t) = ty(t)$  と表わされる。  $\square$

例 (\*)  $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t} \quad (t > 0)$  を解こう。  $x = ty$  を代入すると,

$$e^y + y = y + t \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t}, \quad \int e^{-y} dy = \int \frac{dt}{t} + C, \quad -e^{-y} = \log t + C$$

$$e^{-\frac{x}{t}} = -\log t - C, \quad -\frac{x}{t} = \log(-\log t - C), \quad x = -t \log(-\log t - C) \quad (0 < t < e^{-C})$$

これで解  $x(t) = -t \log(-\log t - C)$  が求まる。

確認  $\dot{x}(t) = -\log(-\log t - C) + \frac{-t \cdot (-\frac{1}{t})}{-\log t - C} = -\log(-\log t - C) + \frac{1}{-\log t - C}$

$$e^{\frac{x(t)}{t}} + \frac{x(t)}{t} = \frac{1}{-\log t - C} - \log(-\log t - C) \quad \leftarrow \text{等式OK.} \quad \square$$

同次方程式に変換できる場合 (\*)  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}\right)$ ,  $(c,d) \neq (0,0)$ .

解法 ①  $p=q=0$  のとき

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+bx}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)}\right)$$

この(\*)は同次方程式をなす。

②  $ad-bc=0$  のとき,  $a,b$  で  $a=kc$ ,  $b=kd$  と表わせると “ $u=cx+dy+q$ ” とおく,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(cx+dy)+p}{cx+dy+q}\right) = f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right)$$

とおく

$$\frac{du}{dx} = c+d \frac{dy}{dx} = c+d f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right) \leftarrow \text{これは変数分離形}.$$

③  $ad-bc \neq 0$  のとき.  $\begin{cases} a\zeta + b\eta = p \\ c\zeta + d\eta = q \end{cases}$  を満たす  $\zeta, \eta$  が一意に存在する。そのとき,  $\begin{cases} X=x+\zeta \\ Y=y+\eta \end{cases}$

$$\text{とおくと } \begin{cases} aX+bY = ax+by+p \\ cX+dY = cx+dy+q \end{cases} \text{ とおくと,}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right) = f\left(\frac{a+b(Y/X)}{c+d(Y/X)}\right). \leftarrow \text{同次方程式.}$$

これが重要

分子分母を  $d$  でわれば “ $d=1$ ” にできる

例  $\frac{dy}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$  ( $ad-bc \neq 0$ ,  $c=-b$ ,  $d=1$  と仮定) を解いてみよう.

$$\begin{cases} a\zeta + b\eta = p \\ c\zeta + d\eta = q \end{cases} \text{ を満たす } \zeta, \eta \text{ をと, } \begin{cases} X=x+\zeta \\ Y=y+\eta \end{cases} \text{ とおくと, } (*) \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} \stackrel{(*)}{=} \frac{a+b(Y/X)}{c+b(Y/X)}.$$

$$u = \frac{Y}{X} \text{ とおくと, } Y = uX \text{ とおくと, } X \frac{du}{dX} + u = \frac{a+bu}{c+du}. X \frac{du}{dX} = \frac{a+(b-c)u - du^2}{c+du}.$$

$$\text{ここで } c=-b, d=1 \text{ を使うと, } X \frac{du}{dX} = \frac{a+2bu-u^2}{-b+u} = -2 \frac{a+2bu-u^2}{\partial u (a+2bu-u^2)}. \text{ ここで } c=-b, d=1 \text{ を使うと,}$$

$$\int \frac{\partial u (a+2bu-u^2)}{a+2bu-u^2} du = -2 \int \frac{dX}{X} + \gamma \leftarrow \text{積分定数} \\ = 2b-2u \\ = -2(-b+u)$$

$$\log |a+2bu-u^2| = -2 \log |X| + \gamma = \log |e^\gamma X^{-2}|$$

$$a+2bu-u^2 = \pm e^\gamma X^{-2}, C = \pm e^\gamma \text{ とおく, } (a+2bu-u^2)X^2 = C.$$

$$u = Y/X \text{ を代入すると, } aX^2 + 2bXY - Y^2 = C.$$

$$Y^2 - 2bXY - aX^2 + C = 0, (Y-bX)^2 - (a+b^2)X^2 + C = 0.$$

$$Y = bX \pm \sqrt{(a+b^2)X^2 - C}.$$

$$X = x+\zeta, Y = y+\eta \text{ を代入すると}$$

$$Y = -\eta + b(x+\zeta) \pm \sqrt{(a+b^2)(x+\zeta)^2 - C}.$$

これが解.

$p=q=0$  の場合  $\rightarrow$   $y[x] \rightarrow b x - \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}$ ,  $y[x] \rightarrow b x + \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}$

In[1]:= `ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}`  
Out[1]=  $\{y'[x] == \frac{a x + b y[x]}{-b x + y[x]}\}$

In[2]:= `DSolve[ode3, y[x], x]`  
微分方程式を解く

Out[2]=  $\{y[x] \rightarrow b x - \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}\}, \{y[x] \rightarrow b x + \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}\}$

□

完全微分方程式

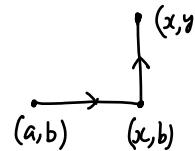
$f_x(x, y) = p_y(x, y)$  のとき, 可積分条件と呼ばれる.

$$(*) \quad df(x, y) = p(x, y) dx + q(x, y) dy \quad (\text{これは } f_x = p, f_y = q \text{ が同値})$$

を満たす函数  $f(x, y)$  を求めよ.

解法例 1

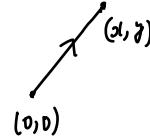
$$f(x, y) = \int_a^x p(s, b) ds + \int_b^y q(x, t) dt.$$



確認  $\begin{cases} f_x(b, y) = p(x, b) + \int_b^y q_x(x, t) dt = p(x, b) + \int_b^y p_y(x, t) dt = p(x, b) + [p(x, t)]_{t=b}^{t=y} = p(x, y), \\ f_y(x, y) = q(x, y). \end{cases}$  OK.  $\square$

解法例 2

$$f(x, y) = \int_0^1 (p(xt, yt) x + q(xt, yt) y) dt$$



確認  $\begin{aligned} f_x(x, y) &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt) xt + q_x(xt, yt) yt) dt \\ &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt) xt + p_y(xt, yt) yt) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (p(xt, yt) t) dt = [p(xt, yt) t]_{t=0}^{t=1} = p(x, y). \end{aligned}$

同様に,  $f_y(x, y) = q(x, y).$

OK.  $\square$

(注)  $p dx + q dy$  が可積分条件を満たしていないとき, うまく  $\lambda = \lambda(x, y)$  をつけないと  $\lambda p dx + \lambda q dy$  が可積分条件を満たすことがある. そのとき,  $\lambda$  を積分因子と呼ぶ. 詳しくは説明しない.

注意  $f_x = p, f_y = q$  のとき,  $p_y = f_{xy} = f_{yx} = q_x$ ,  $df = p dx + q dy$  を満たす  $f$  が存在するとは限らない.  $p_y = q_x$  という可積分条件が必要である. 以上の議論は一般の微分形式に拡張される.  $\square$

例  $df = 2xy dx + (x^2 + \cos y) dy$  を満たす  $f = f(x, y)$  を求めよう.  $p = 2xy, q = x^2 + \cos y$  のとき,

$p_y = 2x = q_x$  で可積分条件を満たしている.

$$f(x, y) = \int_0^x 2s0 ds + \int_0^y (x^2 + \cos t) dt = x^2 y + \sin y.$$

確認  $\begin{cases} f_x = 2xy, \\ f_y = x^2 + \cos y. \end{cases}$  OK.  $\square$

例  $df = (x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy$  を満たす  $f = f(x, y)$  を求めよう.  $(x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x$  ので可積分条件を満たしている.

$$f(x, y) = \int_0^x (s^2 - 0) ds + \int_0^y (t^2 - x) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy$$

確認  $\begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = -x + y^2. \end{cases}$  OK.  $\square$

例  $df = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  を満たす  $f = f(x, y)$  を求めよう. ←これはおもしろい例.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f(x, y) = \int_0^x \frac{-0}{s^2 + 0^2} ds + \int_0^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \int_0^y \frac{du}{1+u^2} = \arctan \frac{y}{x}.$$

確認  $f_x = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$  OK.  $\square$

リッカチ方程式

(\*)  $u'(x) + a(x)u^2 + b(x)u + c(x) = 0$  ( $a(x)$  は 0 でない函数), 以下,  $\partial = \frac{d}{dx}$ .

**解法**  $u(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$  とおくと,  $\psi(x)$  に関する 2 階の線形常微分方程式

$$\left( \partial^2 + \left( b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)} \right) \partial + a(x)c(x) \right) \psi(x) = 0$$

に帰着する. 以下はそのことの確認:  $u = \frac{1}{\alpha} \frac{\psi'}{\psi}$  のとき,

$$u' = -\frac{a'}{a^2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a} \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2, \quad au^2 + bu + c = \frac{1}{a} \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{b}{a} \frac{\psi'}{\psi} + c \text{ となる},$$

$$u' + au^2 + bu + c = \frac{1}{a\psi} \left( \psi'' + \left( b - \frac{a'}{a} \right) \psi' + ac\psi \right).$$

□

**例**  $\alpha \neq \beta$  が定数のときの  $u' + (u-\alpha)(u-\beta) = 0$  を解こう.  $u = \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,

$$\psi'' - (\alpha+\beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial - \alpha)(\partial - \beta)\psi = 0$$

を解けばよい. これの解は  $\psi(x) = a e^{\alpha x} + b e^{\beta x}$  となる,  $u(x) = \frac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{a e^{\alpha x} + b e^{\beta x}}$ .

□

**例**  $\alpha \neq \beta$  が定数のときの  $u' + \frac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta) = 0$  を解こう.  $u = x \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,

$$\psi'' - \frac{\alpha+\beta-1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left( \partial - \frac{\beta-1}{x} \right) \left( \partial - \frac{\alpha}{x} \right) \psi = \left( \partial - \frac{\alpha-1}{x} \right) \left( \partial - \frac{\beta}{x} \right) \psi = 0.$$

これの解は  $\psi(x) = ax^\alpha + bx^\beta$  となる  $u(x) = x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{a\alpha x^\alpha + b\beta x^\beta}{a x^\alpha + b x^\beta}$ .

□

**例**  $u'(x) - 3u(x)^2 + \frac{2}{x^2} = 0$  を解こう.  $u = -\frac{1}{3} \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,  $\psi'' = \frac{b}{x^2}\psi$  となる  $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$ ,

$$u(x) = -\frac{1}{3} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3} \frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}.$$

□

クレーロー

## Clairaut 方程式

$$(*) \quad y = xy' - f(y') \quad (y = y(x))$$

解法

(\*) の両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - f'(y)y''$  すなはち  $y''(x - f'(y')) = 0$ .

$y'' = 0$  のとき  $y'$  は定数となるので、 $y' = p = (\text{定数})$  とおくと、 $y = xp - f(p)$ . これは (\*) の解に含まれる。

$x = f'(y')$  のとき  $f'(y') = x$  を  $y'$  について解いた結果と  $y' = p(x)$  と書くと、 $y = xp(x) - f(p(x))$ .

これも (\*) の解に含まれる。(確認:  $f'(p(x)) = x$ ,  $y = xp(x) - f(p(x))$  のとき,

$$y' = p(x) + x p'(x) - \underbrace{f'(p(x))}_{=x} p'(x) = p(x) \text{ となる}, \quad y = xy' - f(y'). \quad \text{OK.}$$

□

注意

Clairaut 方程式は 解析力学や熱統計力学に出て来る Legendre 変換 と関係がある。

□

注意

$y'' = 0$  のときの解  $y = xa - f(a)$  は  $x = f'(y')$  のときの解  $y = xp(x) - f(p(x))$  ( $f'(p(x)) = x$ ) の

接線にならってなる。 $y = xp(x) - f(p(x))$ ,  $f'(p(x)) = x$  のとき,  $y' = p(x)$  となる,  $p(x_0) = a$  となる  $x_0$  をとると,

$$x = x_0 \text{ の接する接線は } y = a(x - x_0) + x_0 \underbrace{p(x_0)}_{=a} - f(\underbrace{p(x_0)}_{=a}) = ax - f(a) \text{ となる。}$$

□

例  $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - d$  ( $d$  は定数) のとき,  $y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + d$  の解を求めよ。

両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - y'y''$  すなはち,  $y''(x - y') = 0$ .

$y'' = 0$  のとき 定数  $p$  を  $y'$  に代入して  $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + d$  が解になる。

$y' = x$  のとき  $x$  を  $y'$  に代入して  $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + d = \frac{1}{2}x^2 + d$  が解になる。

□

例

$f(p) = p \log p - p - d$  のとき,  $y = xy' - f(y') = xy' - y \log y' + y' + d$  の解を求めよう。

両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - y'' \log y' - y'' + y''$  すなはち  $y''(x - \log y') = 0$ .

$y'' = 0$  のとき  $y = xp - p \log p + p + d$  が解になる。

$y' = \log y'$  のとき  $y' = e^x$  を代入して  $y = xe^x - e^x x + e^x + d = e^x + d$  が解になる。

□