

# 解けて欲しい微分方程式達

2019-06-29作成

黒木 玄

2019-06-29 作成

2019-07-02 完全微分方程式, Riccati, Clairaut

2020-05-19 強制振動 $\ddot{y}$ の $\alpha \rightarrow \omega$ への極限の計算.

定数係数の線形常微分方程式  $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $u = u(x)$ ,  $p_1, \dots, p_n$  は定数.

$$(4) \quad (\frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{d}{dx} + p_n) u = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

解き方  $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{m_s}$ ,  $\alpha_i$  は互いに異なるとえよとせ,

方程式 (4) の一般解は

$$(4*) \quad u(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{m_i-1} a_{ik} x^k e^{\alpha_i x}, \quad a_{ik} \text{ は定数}$$

と一意に表わされる。ただし  $m_1 = \dots = m_s = 1$  (重根がない場合) には (4\*) は

$$u(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + a_n e^{\alpha_n x}, \quad a_i \text{ は定数}$$

の形になる。定数  $a_{ik}$  ( $i < 1$  は  $a_i$ ) たゞには他の条件によって決定された。

□

例  $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2) u = 0$ ,  $\omega > 0$  の解は  $e^{\pm i \omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$  を使うと,

$$u(x) = a e^{i \omega x} + b e^{-i \omega x} = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

と書ける。ここで  $A = a + b$ ,  $B = i(a - b)$ , こゝに条件  $u(0) = a$ ,  $u'(0) = b$  を満足し,

$$u(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x),$$

□

例  $(\frac{d^2}{dx^2} + 5\frac{d}{dx} + 6) u = u'' + 5u' + 6u = 0$ ,  $u(0) = a$ ,  $u'(0) = b$  の解を求める。

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \text{ の解は } \lambda = -2, -3 \text{ である}, \quad u'' + 5u' + 6u = 0 \text{ の解は}$$

$$u(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$$

と書ける。ここで,  $u'(x) = -2A e^{-2x} - 3B e^{-3x}$  である,

$$u(0) \stackrel{(1)}{=} A + B = a, \quad u'(0) \stackrel{(2)}{=} -2A - 3B = b.$$

これは,

$$3 \times (1) + (2): \quad A = 3a + b,$$

$$2 \times (1) + (2): \quad -B = 2a + b, \quad B = -2a - b$$

と解けたので, 解は,

$$u(x) = (3a + b) e^{-2x} + (-2a - b) e^{-3x}.$$

□

例  $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)^2 u = 0$  の解は  $e^{\pm i \omega x}$ ,  $x e^{\pm i \omega x}$  の一次結合を書けば  $e^{\pm i \omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$

と代入すると, 解は

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + c x \cos(\omega x) + d x \sin(\omega x)$$

と表わされることがわかる

□

強制振動付きの調和振動子  $\alpha, \omega > 0$  とする。  $u = u(t)$ ,  $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$  とする。

$$(*) \quad (\partial^2 + \omega^2) u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t).$$

**解法**  $(*)$  の右辺を  $v$  と書く,  $v$  は  $(\partial^2 + \omega^2)v = 0$  の解に満たす。つまり  $(*)$  は

$$(*)' \quad (\partial^2 + \omega^2)(\partial^2 + \alpha^2)u = (\partial^2 + \alpha^2)v = 0$$

と書き直される。 $(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$  が重根を持たない場合 ( $\alpha \neq \omega$ ) と持つ場合 ( $\alpha = \omega$ ) の場合分けを考える。

$\alpha \neq \omega$  のとき,  $(*)'$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書き下す。このとき

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)),$$

$$\therefore (\partial^2 + \omega^2)u = (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)).$$

これと  $(*)$  を比較すると,

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

である。  $u(t)$  は  $(*)$  の解にはならないとする。  $(*)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

$\alpha = \omega$  のとき,  $(*)'$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書き下す。このとき,  $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$  で  $f = ct, dt, g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$  を使うと,

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2wc \sin(\omega t) + 2wd \cos(\omega t),$$

$$(\partial^2 + \omega^2)u(t) = -2wc \sin(\omega t) + 2wd \cos(\omega t)$$

两边を  $\omega$  で割る,  $c = -\frac{q}{2\omega}, d = \frac{p}{2\omega}$  とすると,  $u(t)$  は  $(*)$  を満たす。  $(*)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t). \quad \square$$

**例** 方程式  $\ddot{u}(t) + u(t) = \sin t$ ,  $u(0) = 1$ ,  $\dot{u}(0) = 0$  の解を求めよ。

$$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2}t \cos t \text{ のとき}, \quad \ddot{u}(t) = -u(t) + \sin t,$$

$$u(0) = a = 1, \quad \dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t, \quad \dot{u}(0) = b - \frac{1}{2} = 0, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2}t \cos t.$$

$$\begin{aligned} & (\cos t)'' \\ &= (-t \sin t + \cos t)' \\ &= -t \cos t - \sin t - \sin t \\ &= -t \cos t - 2 \sin t \end{aligned}$$

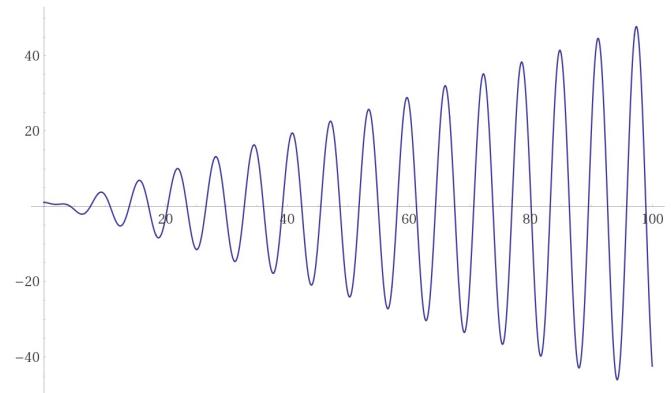
□

In[1]:= lode1 = {u''[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}  
正弦

Out[1]:= {u[t] + u''[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}

In[4]:= DSolve[lode1, u[t], t] // Simplify // Expand  
微分方程式を解く 簡単な形式に 展開

Out[4]:= {{u[t] \rightarrow Cos[t] - 1/2 t Cos[t] + Sin[t]/2}}



$$(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t) \quad (\alpha = d/dt, \omega > 0, \alpha > 0) \text{ の解の } \alpha \rightarrow \omega \text{ の極限}$$

$(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t)$  の解は  $\alpha \neq \omega$  のとき

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t) \quad \dots \textcircled{1}$$

と書ける。この  $\alpha \rightarrow \omega$  の極限を单纯化すると、そしても分母の  $\omega^2 - \alpha^2$  が "0" になるとく行かない。正しい問題設定は初期条件  $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$  を固定して、解の極限を考えることである。

$$(\textcircled{**}) \quad (\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B \quad (\alpha > 0, \omega > 0).$$

(i)  $\alpha \neq \omega$  の場合  $\textcircled{1}$  のとき、 $u(0) = a + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \dot{u}(0) = wb + \alpha \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$  などの初期条件と

$$a = A - \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad b = \frac{1}{\omega} \left( B - \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \right) \text{ と同値である。ゆえに (**) の解は}$$

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) - \frac{p}{\alpha^2 - \omega^2} (\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)) - \frac{q}{\alpha^2 - \omega^2} (\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)).$$

そして、 $\alpha \rightarrow \omega$  のとき、

$$\frac{\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)}{\alpha - \omega} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\omega} \cos(\alpha t) = -t \sin(\omega t),$$

$$\frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} = \frac{\sin(\alpha t) - \sin(\omega t)}{\alpha - \omega} - \frac{\frac{d}{d\alpha} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\alpha} \sin(\alpha t)}{\alpha - \omega} \rightarrow t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

$$\begin{aligned} \therefore u(t) &\rightarrow A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} B \sin(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} (t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)) \\ &= A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t) \end{aligned}$$

(ii)  $\alpha = \omega$  の場合  $(\ddot{u} + \omega^2)u = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$  の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

このとき、 $u(0) = a, \dot{u}(0) = wb - \frac{q}{2\omega}$  などの初期条件  $u(0) = A, \dot{u}(0) = B$  と  $a = A, b = \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right)$  と同値である。ゆえに (\*\*) の解は、

$$u(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( B + \frac{q}{2\omega} \right) \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t),$$

これは (i) で得た (\*\*) の解の  $\alpha \rightarrow \omega$  の極限に一致する。  $\square$

**解説** (\*\*) と同値な方程式

$$(\textcircled{**})' \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u + p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = B$$

は周期  $\frac{2\pi}{\omega}$  の調和振動子に外部から周期  $\frac{2\pi}{\alpha}$  で振動する力を与えた様子を記述している。

$\alpha \neq \omega$  であれば、解は周期  $\frac{2\pi}{\omega}$  の振動と周期  $\frac{2\pi}{\alpha}$  の振動の和になり、

$\alpha = \omega$  ならば、 $t \rightarrow \infty$  で振幅が大きくなる解が得られる。

上の計算は  $\alpha \neq \omega$  の解のとのよう公極限によって  $\alpha = \omega$  の解が得られるかを示している。  $\square$

单独1階の線形常微分方程式

$$u = u(x), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x).$$

**解法**  $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}.$   $\square$

$$\text{例 } u'(x) = -x u(x) \text{ の解は}, \int_0^x (-y)dy = -\frac{x^2}{2} \text{ と}, u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad \square$$

单独1階の非齊次線形常微分方程式

$$(*) \quad u'(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad \text{定数変化法}$$

**解法**  $u(x) = c(u) e^{\int_0^x a(y)dy}$  の形で解を構成し,  $u(0) = c(0)$ ,  
 $u'(x) = a(x)c(u) e^{\int_0^x a(y)dy} + c'(x) e^{\int_0^x a(y)dy} = a(x)u(x) + c'(x) e^{\int_0^x a(y)dy},$

これと (\*) を比較すると,  $c'(x) = e^{-\int_0^x a(y)dy}f(x)$ ,  $c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y)dy} b(z)dz$  となる,  
 $u(x)$  は (\*) の解に反し, (\*) の解は  $x$  の関数である.

$$u(x) = c(u) e^{\int_0^x a(y)dy} = u(0) e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz.$$

**確認問題**  $u(x) = u(0) e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz$  となる,

$$u'(x) = a(x)u(0)e^{\int_0^x a(y)dy} + a(x)\int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)dz + e^{\int_x^x a(y)dy} b(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad \square$$

$$\text{例 } u'(x) = -x u(x) + x \text{ の解は},$$

$$\int_z^x (-y)dy = \left[ -\frac{y^2}{2} \right]_{y=z}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

$$\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} z dz = \left[ e^{\frac{z^2}{2}} \right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

"207"

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \right) = u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**確認問題** そのとき,  $-x u(x) + x = -x(u(x) - 1) = -x u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}},$

$$u'(x) = -x u(0)e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{OK.} \quad \square$$

ベルヌイ  
Bernoulli 方程式

$$(*) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\alpha \quad (\alpha \neq 1 \text{ と仮定}).$$

**解法**  $(*) \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x) \text{ となる}, \quad (y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \text{ なので}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

ゆえに,  $u = y^{1-\alpha}$  とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは  $u$  に関する単純1階の非齊次線形常微分方程式なので、その解法で解ける。□

**例**  $y' = -xy + xy^3$  を解こう。  $u = y^{1-3} = y^{-2}$  とおくと,  $u' = 2xu - 2x$ ,

$u' = 2xu$  の解  $e^{x^2}$  を用いて,  $u = e^{x^2}c(x)$  の形で解を構成する。このとき,  $u' = 2xu + e^{x^2}c'(x)$ ,

この  $u$  が解であることは  $c'(x) = -2xe^{-x^2}$  と同値、これを解くと,  $c(x) = e^{-x^2} + C$ .

このとき,  $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$ ,  $y = \pm u^{1/(1-3)} = \pm (1 + Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$ . □

# 連立1階の定数係数線形常微分方程式

$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = [a_{ij}]$  は  $n \times n$  の定数行列 とする.

$$(*) \quad \dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t).$$

**解法**  $\mathbf{U}(t) = e^{tA} \mathbf{U}(0)$ ,  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ .  $\square$

**例**  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $A^2 = -E$ ,  $e^{tA} = E \cos t + A \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  の解は  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos t - v(0) \sin t \\ u(0) \sin t + v(0) \cos t \end{bmatrix}$ .  $\square$

**例**  $\ddot{\mathbf{U}}(t) = -\omega^2 \mathbf{U}(t)$  は  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  を書き直され.

$A^2 = -\omega^2 E$  より,  $A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix}$ ,  $A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k} \\ (-1)^{k+1} \omega^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}$ .

$\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (wt)^k}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \begin{bmatrix} \cos(wt) & \omega^{-1} \sin(wt) \\ -w \sin(wt) & \cos(wt) \end{bmatrix}$ .

解は次のようになります:

$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(wt) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(wt) \\ -w u(0) \sin(wt) + \dot{u}(0) \cos(wt) \end{bmatrix}$ .

すなはち,  $u(t) = u(0) \cos(wt) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(wt)$ .  $\square$

**例**  $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$  のときの  $\dot{\mathbf{U}}(t) = A \mathbf{U}(t)$  を解こう.

$A$  を対角化しよう.  $| \lambda E - A | = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$  なので  $A$  の固有値は 2 と 3.

$A$  の固有値 2 の固有ベクトルとして,  $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  がいとれる.

$A$  の固有値 3 の固有ベクトルとして,  $q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  がいとれる.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  とおき,  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  で,  $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$ .

$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & -3e^{2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{U}(t) = e^{tA} \mathbf{U}(0) = \begin{bmatrix} (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-3u(0) + 3v(0))e^{3t} \\ (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-4u(0) + 4v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$ . ここで  $\mathbf{U}(t)$  の解は 2 と 3.

**確認**  $\dot{\mathbf{U}}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$ ,  $A \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$  OK.  $\square$

# 連立1階の非齊次定数係数線形常微分方程式

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n \times n \text{ 行列}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$(*) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t).$$

**解法**  $\dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t)$  の解  $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0)$  の定数ベクトル  $\mathbf{u}(0)$  をベクトル値函数  $\mathbf{C}(t)$  として  
書きかえた次の形の解を探す:

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{C}(t), \quad \text{定数変化法}$$

このとき,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{C}(0)$ ,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A e^{\lambda t} \mathbf{C}(t) + e^{\lambda t} \dot{\mathbf{C}}(t) = A \mathbf{u}(t) + e^{\lambda t} \dot{\mathbf{C}}(t)$$

ここで, (\*) とこれで比較すると,

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = e^{-\lambda t} \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{-s\lambda} \mathbf{b}(s) ds$$

ゆえに,  $\mathbf{u}(t)$  は (\*) の解に及ぶ, (\*) の解は

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{C}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(\lambda-t)s} A \mathbf{b}(s) ds.$$

**確認** このとき,  $\dot{\mathbf{u}}(t) = A e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + A \int_0^t e^{(\lambda-s)A} \mathbf{b}(s) ds + e^{(\lambda-t)A} \mathbf{b}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t)$ . OK.  $\square$

**例**  $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  のとき,  $e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{bmatrix}$  なので,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

の解は,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(\lambda-t)s} A \mathbf{b}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(\lambda-t-s) & -\sin(\lambda-t-s) \\ \sin(\lambda-t-s) & \cos(\lambda-t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} u(0) \cos \lambda t - v(0) \sin \lambda t + \int_0^t (f(s) \cos(\lambda-t-s) - g(s) \sin(\lambda-t-s)) ds \\ u(0) \sin \lambda t + v(0) \cos \lambda t + \int_0^t (f(s) \sin(\lambda-t-s) + g(s) \cos(\lambda-t-s)) ds \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで,  $f(t)=0, g(t)=-1$  のとき,  $\int_0^t \sin(\lambda-t-s) ds = \left[ \cos(\lambda-t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos \lambda t$  なので

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \cos \lambda t - v(0) \sin \lambda t + 1 - \cos \lambda t \\ v(t) = u(0) \sin \lambda t + v(0) \cos \lambda t - \sin \lambda t \end{cases}$$

$\left( - \int_0^t \cos(\lambda-t-s) ds = \left[ \sin(\lambda-t-s) \right]_{s=0}^{s=t} = -\sin \lambda t \right) \square$

(注)  $v(t) = -\dot{u}(t) \quad \forall t < 12 \rightarrow$

## 一般の強制力付きの調和振動子

$$(*) \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t).$$

**解法**  $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$  とおくと、(\*)は次のよう書き直される：

$$(*)' \quad \dot{U}(t) = AU(t) + B(t).$$

この(\*)'は次のように角解するべくして：

$$U(t) = e^{tA} U(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

この場合に、 $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$  とおき、

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds \end{bmatrix},$$

(\*)の角解は次のように表わされる：

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \dot{u}(0) \omega^{-1} \sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1} \sin(\omega(t-s)) f(s) ds,$$

□

**例題**  $U(t)$  を次のように定めると  $U(t)$  が(\*)を満たしていることを直接確認せよ。

**解**  $\dot{u}(t) = -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0) \cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) f(s) ds + \overbrace{\omega^{-1} \sin(\omega(t-t)) f(t)}^{=0}$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(0) \cos(\omega t) - \omega^2 \dot{u}(0) \sin(\omega t) - \omega^2 \int_0^t \sin(\omega(t-s)) f(s) ds + \underbrace{\cos(\omega(t-t)) f(t)}_{=1}$$

$$= -\omega^2 u(t) + f(t),$$

□

連立1階の(非定数係数の)線形常微分方程式

$E$ は $n \times n$ 単位行列であるとする。

$U(t) = [U_{ij}(t)]$ ,  $A(t) = [a_{ij}(t)]$  は $n \times n$ 行列値函数であるとする。

$$(*) \quad \dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = E.$$

**解法**  $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n). \quad \square$

(注)  $U(t)$ の形は一般には具体的にはわからぬ,

連立1階の非齊次の(非定数係数の)線形常微分方程式  $U(t)$ は上の $U(t)$ とする。

$$(*) \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{← 定数変化法}$$

**解法**  $u(t) = U(t)C(t)$  の形で解を探す,  $u(0) = C(0)$  かつ

$$\dot{u}(t) = A(t)U(t)C(t) + U(t)\dot{C}(t) = A(t)u(t) + U(t)\dot{C}(t)$$

左の式,  $(*)$ と比較する,

$$\dot{C}(t) = U(t)^{-1}b(t), \quad C(t) = C(0) + \int_0^t U(s)^{-1}b(s) ds$$

のときの

$$u(t) = U(t)C(t) = U(t)u(0) + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}b(s) ds$$

が $(*)$ の解になる。

$\square$

**注意**  $O = \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(X(t)X(t)^{-1}) = \dot{X}(t)X(t)^{-1} + X(t)\frac{d(X(t)^{-1})}{dt}$  今この式  
 $\frac{d}{dt}(X(t)^{-1}) = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}$

これを使うと, 次を示せる:  $U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$  とおくと,

$$(1) \quad U(t,t) = E,$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(s)U(t,s),$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1} = -U(t)U(s)^{-1}A(s) = -U(t,s)A(s),$$

この3つの条件のうち (1) と (2) (または (1) と (3)) の2つの条件で  $U(t,s)$  が一意に特徴付けられる。  
 $U(t,s)$  は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} U(t,s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_{s,t_1}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{s,t_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_n \int_{s,t_{n-1}}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{s,t_2}^{t_2} dt_1 A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n) \end{aligned}$$

これが (1), (2), (3) を満たすことを確認せよ

単独2階の線形常微分方程式で「0でない解が1つ分かれている場合」

$$j = \frac{\partial}{\partial x}$$

方程式

$$(*) (\partial^2 + p(x)\partial + q(x))u(x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0$$

の0でない解  $f(x)$  加え1つ分かれているとき、 $f(x)$  と一次独立な別の解  $g(x)$  を求めよ。

**解法1**  $g(x) = f(x)c(x)$  ( $c(x)$  は非定数函数) の形で (\*) の解を探してみる。このとき

$$g = fc, \quad g' = f'c + fc', \quad g'' = f''c + 2f'c' + fc''$$

$$g'' + pg' + qg = (f'' + pf' + qf)c + (2f' + pf)c' + fc''.$$

$g$  が (\*) の解であることを、 $(2f' + pf)c' + fc'' = 0$  は同値であり、それをせたす  $c$  は次のように作れる:

$$c'' = -\left(2\frac{f'}{f} + p\right)c', \quad c'(x) = e^{-\int(2\frac{f'}{f} + p)dx} = f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx}.$$

$$c(x) = \int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx} dx.$$

このとき、

$$g(x) = f(x) \int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)dx} dx.$$

□

**解法2**  $f, g$  が (\*) の一次独立な解のとき、それらのWronskian が  $W(f, g)(x) = e^{-\int p(x)dx}$  となることを使う;

$$f, g の Wronskian は W = W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf' と書くと、$$

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' - qf & -pg' - qg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' & -pg' \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = -pW$$

$$\text{なので}, W = fg' - gf' = e^{-\int p(x)dx}. \quad \text{ゆえに } g' = \frac{f'}{f}g + \frac{1}{f}e^{-\int p(x)dx}. \quad \text{この解を}$$

$$g = c(x)e^{\int \frac{f'}{f}dx} = f(x)c(x) の形で整理してみる。このとき, g' = f'c + fc' = \frac{f'}{f}g + fc'. \quad ① \text{と} ② \text{を}$$

$$\text{比較すると}, c' = \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx} \text{なので}, このような } c \text{ の形で } c = \int \frac{1}{f^2}e^{-\int p(x)dx} dx \text{ と作れる。}$$

このとき、

$$g(x) = fc = f(x) \int \frac{1}{f(x)^2}e^{-\int p(x)dx} dx, \quad (\text{これは上の解法1と同じ結果})$$

□

**例**  $(\partial - x)(\partial + x)u(x) = (\partial^2 - x^2 + 1)u(x) = u''(x) - (x^2 - 1)u(x) = 0$  の解こう。 $(\partial + x)u(x) = 0$  の解はその解

なので  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  は解である。  $f$  と一次独立な解  $g$  は  $g = fc$  ( $c$  は非定数) の形で整理してみる。

ここで、  $g'' - (x^2 - 1)g = (f'' - (x^2 - 1)f)c + 2f'c' + fc'' = 2f'c' + fc''$ .  $g$  が解であるような  $c$  の形で  $2f'c' + fc'' = 0$ ,

$$c'' = -2\frac{f'}{f}c', \quad c' = e^{-\int 2\frac{f'}{f}dx} = f^{-2}, \quad c = \int f^{-2}dx$$

と求めることができる。このとき、

$$g(x) = fc(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx,$$

$$(*) の 2 つの解は \quad u(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}} + be^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{x^2} dx \quad (a, b \text{ は定数}) と表わされる。$$

□

変数分離形

$$y = y(x)$$

$$(*) \frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

**解法**  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$  は ( $y$ の函数)= $(x$ の函数) の形の式になる。これを  $y$ について解くと、 $y = (x\text{の函数})$  が得られる。これが (\*) の解である。□

**例**  $\frac{dv}{dt} = 1+v^2$  を解く。  $\int \frac{dv}{1+v^2} = \int dt + C$ ,  $\arctan v = t+C$ ,  $v = \tan(t+C)$ . □

**補足**  $v = \tan t$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1+v^2$ . □

**例**  $\frac{dv}{dt} = 1-v^2$  を解く。  $\int \frac{dv}{1-v^2} = \int dt + C$ ,  $\operatorname{arctanh} v = t+C$ ,  $v = \tanh(t+C)$ . □

**補足**  $v = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = \frac{\cosh t}{\cosh^2 t} - \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t = 1-v^2$ . □

**例** (-様重力下で落下する物体の速度の慣性抵抗下での時間変化)

$$\frac{dv}{dt} = -1-v|v| = \begin{cases} -1-v^2 & (v \geq 0), \\ -1+v^2 & (v \leq 0). \end{cases}$$

これを解く。

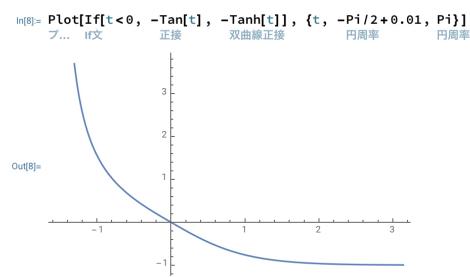
$v \leq 0$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = -1-v^2$ ,  $\int \frac{dv}{1-v^2} = -\int dt + C_1$ ,  $\operatorname{arctanh} v = -t+C_1$ ,  $v = -\tanh(t-C_1)$ ,  
 $t-C_1 \geq 0$

$v \geq 0$  のとき,  $\frac{dv}{dt} = -1-v^2$ ,  $\int \frac{dv}{1-v^2} = -\int dt + C_2$ ,  $\operatorname{arctan} v = -t+C_2$ ,  $v = -\tan(t-C_2)$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} < t-C_2 \leq 0$

この2つが連続的につながるには  $C=C_1=C_2$  なければならない。

$$v(t) = \begin{cases} -\tan(t-C) & \left(-\frac{\pi}{2}+C < t \leq C\right) \\ -\tanh(t-C) & (C \leq t) \end{cases}$$

$C=0$  の場合 →



**補足** 粘性抵抗の場合の運動方程式は  $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$  の形なので通常に単位系とり直す必要はない。  $\dot{v} = -1-v$  の形になります。これを解くと、

$$\int \frac{dv}{1+v} = -\int dt + C, \quad \log(1+v) = -t+C \quad v = e^{-(t+C)} - 1.$$

$$(確認 \quad \dot{v} = -e^{-(t+C)}, \quad -1-v = -1-e^{-(t+C)}+1 = -e^{-(t+C)} \text{ OK.})$$

慣性抵抗の場合の運動方程式は  $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv|v|$  の形なので通常に単位系とり直す必要はない。  $\dot{v} = -1-v|v|$  の形になります。これを解いたのが上の例である。□

例 (logistic equation)  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  ( $0 < x < 1$ ) を解こう.

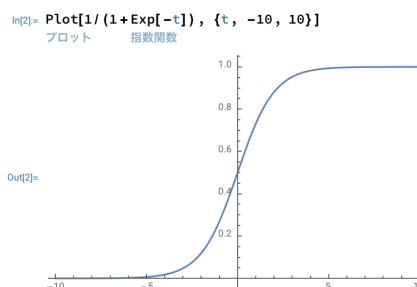
$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + C, \quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + C,$$

$$\log x - \log(1-x) = t + C, \quad \log \frac{x}{1-x} = t + C, \quad \frac{x}{1-x} = e^{t+C}, \quad x = e^{t+C} - e^{t+C} x$$

$$(1 + e^{t+C})x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{1 + e^{t+C}} = \frac{1}{1 + e^{-(t+C)}}.$$

解  $x(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t+C)}}$  が求まる.

$C=0$  の場合  $\rightarrow$



□

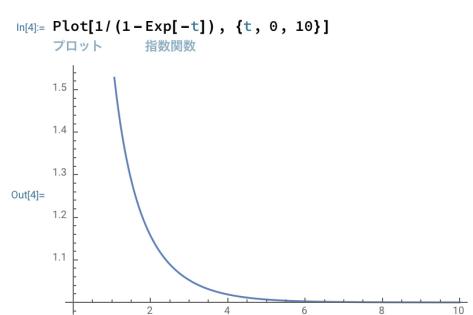
例  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の  $x > 1$  の場合.  $\int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) dx = t + C, \quad \log x - \log(x-1) = t + C,$

$$\log \frac{x}{x-1} = t + C, \quad \frac{x}{x-1} = e^{t+C}, \quad x = e^{t+C} x - e^{t+C},$$

$$(e^{t+C}-1)x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{e^{t+C}-1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}.$$

$C=0$  の場合

解  $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}$  ( $t+C > 0$ ) が求まる.



□

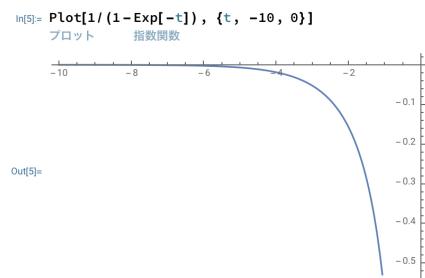
例  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の  $x < 0$  の場合.  $\int \left( -\frac{1}{-x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = t + C, \quad \log(-x) - \log(1-x) = t + C$

$$\log \frac{-x}{1-x} = t + C, \quad \frac{-x}{1-x} = e^{t+C}, \quad -x = e^{t+C} - e^{t+C} x$$

$$(e^{t+C}-1)x = e^{t+C}, \quad x = \frac{e^{t+C}}{e^{t+C}-1} = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}.$$

$C=0$  の場合

解  $x(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+C)}}$  ( $t+C < 0$ ) が求まる.



□

例  $x(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}$  ( $C$  は定数) が  $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$  の解であることを示し,  $x_0 \neq 0$  のとき,

$$\dot{x}(t) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}, \quad x(t)(1-x(t)) = \frac{1}{1+Ce^{-t}} \left( 1 - \frac{1}{1+Ce^{-t}} \right) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}, \quad \dot{x}(t) = x(t)(1-x(t)),$$

$$x(0) = \frac{1}{1+C} = x_0, \quad 1 = x_0 + x_0 C, \quad C = x_0^{-1} - 1$$

(\*)の  $x(0) = x_0 \neq 0$  を満たす角解は,  $x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-t}}$ .

□

注  $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^{-1} = \infty$  には  $x(t) = 0$  という定数解が対応している. □

同次方程式 (\*)  $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ .

解法  $y = \frac{x}{t}$  に変数変換する。このとき,  $x = ty$  なので

$$(*) \Leftrightarrow f(y) = \frac{dx}{dt} = y + t \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t} \quad \leftarrow \text{これは変数分離形。}$$

(\*\*) は以下のように解く：

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \int \frac{dt}{t} + C = \log|t| + C, \quad t = \pm e^{-C} \int \frac{dy}{f(y) - y}.$$

(\*) の逆函数を  $y(t)$  と書くとき, (\*) の解は  $x(t) = ty(t)$  と表わされる。  $\square$

例 (\*)  $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t} \quad (t > 0)$  を解こう。  $x = ty$  を代入すると,

$$e^y + y = y + t \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t}, \quad \int e^{-y} dy = \int \frac{dt}{t} + C, \quad -e^{-y} = \log|t| + C$$

$$e^{-\frac{x}{t}} = \log \frac{1}{|t|} - C, \quad -\frac{x}{t} = \log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right), \quad x = -t \log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right).$$

これで解  $x(t) = -t \log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right)$  が求まる。

確認  $\dot{x}(t) = -\log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right) - t \frac{-\frac{1}{t}}{\log \frac{1}{|t|} - C} = -\log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right) + \frac{1}{\log \frac{1}{|t|} - C}.$

$$e^{\frac{x(t)}{t}} + \frac{x(t)}{t} = \frac{1}{\log \frac{1}{|t|} - C} - \log \left( \log \frac{1}{|t|} - C \right). \quad \text{OK.}$$

$\square$

$\square$

同次方程式に変換できる場合 (\*)  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+p}{cx+dy+q}\right)$ ,  $(c,d) \neq (0,0)$ .

解法 ①  $p=q=0$  のとき

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+bx}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)}\right)$$

この(\*)は同次方程式をなす。

②  $ad-bc=0$  のとき,  $a,b$  で  $a=kc$ ,  $b=kd$  と表わせると  $u=cx+dy+q$  とおく,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(cx+dy)+p}{cx+dy+q}\right) = f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right)$$

このとき

$$\frac{du}{dx} = c + d \frac{dy}{dx} = c + d f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right) \leftarrow \text{これは変数分離形}.$$

③  $ad-bc \neq 0$  のとき.  $\begin{cases} a\zeta + b\eta = p \\ c\zeta + d\eta = q \end{cases}$  を満たす  $\zeta, \eta$  が一意に存在する。このとき,  $\begin{cases} X = x + \zeta \\ Y = y + \eta \end{cases}$

このとき  $\begin{cases} aX+bY = ax+by+p \\ cX+dY = cx+dy+q \end{cases}$  となる。

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right) = f\left(\frac{a+b(Y/X)}{c+d(Y/X)}\right). \leftarrow \text{同次方程式.}$$

□

例  $\frac{dy}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{ax+by+p}{cx+dy+q}$  ( $ad-bc \neq 0$ ,  $c=-b$ ,  $d=1$  と仮定) を解いてみよう.

$$\begin{cases} a\zeta + b\eta = p \\ c\zeta + d\eta = q \end{cases} \text{を満たす } \zeta, \eta \text{ をとる}, \quad \begin{cases} X = x + \zeta \\ Y = y + \eta \end{cases} \text{とおくと} \quad (*) \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} \stackrel{(*)}{=} \frac{a+b(Y/X)}{c+b(Y/X)}.$$

$$u = \frac{Y}{X} \text{とおくと, } Y = uX \text{ となる}, \quad X \frac{du}{dX} + u = \frac{a+bu}{c+du}. \quad X \frac{du}{dX} = \frac{a+(b-c)u - du^2}{c+du}.$$

$$\text{ここで } c=-b, d=1 \text{ を使う}, \quad X \frac{du}{dX} = \frac{a-2bu-u^2}{b+u} = -2 \frac{a-2bu-u^2}{\partial u (a-2bu-u^2)}.$$

$$\int \frac{\partial u (a-2bu-u^2)}{a-2bu-u^2} du = -2 \int \frac{dX}{X} + C$$

$$\log |a-2bu-u^2| = -2 \log |X| + C = \log |e^X X^{-2}|$$

$$a-2bu-u^2 = \pm e^X X^{-2}, \quad C = \pm e^X \text{ とおく}, \quad (a-2bu-u^2)X^2 = C.$$

$$u = Y/X \text{ 代入すると, } aX^2 - 2bXY - Y^2 = C.$$

$$Y^2 + 2bXY - aX^2 + C = 0, \quad (Y+bX)^2 - (a+b^2)X^2 + C = 0.$$

$$Y = -bX \pm \sqrt{(a+b^2)X^2 - C}.$$

$$X = x + \zeta, \quad Y = y + \eta \text{ 代入すると}$$

$$Y = -\eta - b(x+\zeta) \pm \sqrt{(a+b^2)(x+\zeta)^2 - C}.$$

これが解.

$p=q=0$  の場合  $\rightarrow$   $y[x] \rightarrow b x - \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}$ ,  $\{y[x] \rightarrow b x + \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}\}$

In[1]:= `ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}`  
Out[1]=  $\{y[x] == \frac{a x + b y[x]}{-b x + y[x]}\}$

In[2]:= `DSolve[ode3, y[x], x]`  
微分方程式を解く

Out[2]=  $\{y[x] \rightarrow b x - \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}\}, \{y[x] \rightarrow b x + \sqrt{-e^{2c_1} + a x^2 + b^2 x^2}\}$

□

完全微分方程式

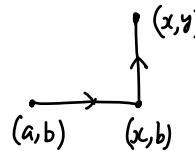
$$q_x(x, y) = p_y(x, y) \text{ のとき},$$

$$(*) \quad df(x, y) = p(x, y) dx + q(x, y) dy \quad (\text{これは } f_x = p, f_y = q \text{ が同値})$$

直角座標系で函数  $f(x, y)$  を求めよ.

解法例 1

$$f(x, y) = \int_a^x p(s, b) ds + \int_b^y q(x, t) dt.$$

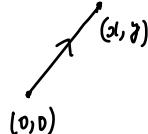


確認  $\begin{cases} f_x(b, y) = p(x, b) + \int_b^y q_x(x, t) dt = p(x, b) + \int_b^y p_y(x, t) dt = p(x, b) + [p(x, t)]_{t=b}^{t=y} = p(x, y), \\ f_y(x, y) = q(x, y). \end{cases}$  OK.

□

解法例 2

$$f(x, y) = \int_0^1 (p(xt, yt) x + q(xt, yt) y) dt$$



確認  $\begin{aligned} f_x(x, y) &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt) xt + q_x(xt, yt) yt) dt \\ &= \int_0^1 (p(xt, yt) + p_x(xt, yt) xt + p_y(xt, yt) yt) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (p(xt, yt) t) dt = [p(xt, yt) t]_{t=0}^{t=1} = p(x, y). \end{aligned}$

$$\text{同様に } f_y(x, y) = q(x, y).$$

OK.

□

注意

$$f_x = p, f_y = q \text{ のとき}, p_y = f_{xy} = f_{yx} = q_x, df = p dx + q dy \text{ が成立する} \Leftrightarrow p_y = q_x \text{ かつ可積分条件が必要である} \Leftrightarrow \text{以上の議論は一般の微分形式に拡張される}.$$

□

例

$$df = 2xy dx + (x^2 + \cos y) dy \text{ を満たす } f = f(x, y) \text{ を求めよ}. \quad p = 2xy, q = x^2 + \cos y \text{ のとき},$$

$$p_y = 2x = q_x \text{ かつ } q_{xx} = 0 \text{ の} \Rightarrow \text{可積分条件を満たす}.$$

$$\text{確認 } \begin{cases} f_x = 2xy, \\ f_y = x^2 + \cos y, \end{cases}$$

$$f(x, y) = \int_0^x 2sy ds + \int_0^y (0^2 + \cos t) dt = x^2 y + \sin y.$$

OK

□

例

$$df = (x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy \text{ を満たす } f = f(x, y) \text{ を求めよ}. \quad (x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x \text{ の} \Rightarrow \text{可積分条件を満たす}.$$

$$f(x, y) = \int_0^x (s^2 - y) ds + \int_0^y (t^2 - 0) dt = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3}.$$

$$\text{確認 } \begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = -x + y^2. \end{cases}$$

□

リッカチ方程式

(\*)  $u'(x) + a(x)u^2 + b(x)u + c(x) = 0$  ( $a(x)$  は 0 でない函数), 以下,  $\partial = \frac{d}{dx}$ .

**解法**  $u(x) = \frac{1}{a(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$  とおくと,  $\psi(x)$  に関する 2 階の線形常微分方程式

$$\left( \partial^2 + \left( b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)} \right) \partial + a(x)c(x) \right) \psi(x) = 0$$

に帰着する. 以下はそのことの確認:  $u = \frac{1}{a} \frac{\psi'}{\psi}$  のとき,

$$u' = -\frac{a'}{a^2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a} \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2, \quad au^2 + bu + c = \frac{1}{a} \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{b}{a} \frac{\psi'}{\psi} + c \text{ となる},$$

$$u' + au^2 + bu + c = \frac{1}{a\psi} \left( \psi'' + \left( b - \frac{a'}{a} \right) \psi' + ac\psi \right).$$

□

**例**  $\alpha \neq \beta$  が定数のときの  $u' + (u-\alpha)(u-\beta) = 0$  を解こう.  $u = \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,

$$\psi'' - (\alpha+\beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial - \alpha)(\partial - \beta)\psi = 0$$

を解けばよい. これの解は  $\psi(x) = a e^{\alpha x} + b e^{\beta x}$  となる,  $u(x) = \frac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{a e^{\alpha x} + b e^{\beta x}}$ .

□

**例**  $\alpha \neq \beta$  が定数のときの  $u' + \frac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta) = 0$  を解こう.  $u = x \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,

$$\psi'' - \frac{\alpha+\beta-1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left( \partial - \frac{\beta-1}{x} \right) \left( \partial - \frac{\alpha}{x} \right) \psi = \left( \partial - \frac{\alpha-1}{x} \right) \left( \partial - \frac{\beta}{x} \right) \psi = 0.$$

これの解は  $\psi(x) = ax^\alpha + bx^\beta$  となる  $u(x) = x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{a\alpha x^\alpha + b\beta x^\beta}{a x^\alpha + b x^\beta}$ .

□

**例**  $u'(x) - 3u(x)^2 + \frac{2}{x^2} = 0$  を解こう.  $u = -\frac{1}{3} \frac{\psi'}{\psi}$  とおく,  $\psi'' = \frac{b}{x^2}\psi$  となる  $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$ ,

$$u(x) = -\frac{1}{3} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3} \frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}.$$

□

クレーロー

## Clairaut 方程式

$$(*) \quad y = xy' - f(y') \quad (y = y(x))$$

解法

(\*) の両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - f'(y)y''$  すなはち  $y''(x - f'(y')) = 0$ .

$y'' = 0$  のとき  $y'$  は定数となるので、 $y' = p = (\text{定数})$  とおくと、 $y = xp - f(p)$ . これは (\*) の解に含まれる。

$x = f'(y')$  のとき  $f'(y') = x$  を  $y'$  について解いた結果と  $y' = p(x)$  と書くと、 $y = xp(x) - f(p(x))$ .

これも (\*) の解に含まれる。(確認:  $f'(p(x)) = x$ ,  $y = xp(x) - f(p(x))$  のとき,

$$y' = p(x) + x p'(x) - \underbrace{f'(p(x))}_{=x} p'(x) = p(x) \text{ となる}, \quad y = xy' - f(y'). \quad \text{OK.}$$

□

注意

Clairaut 方程式は 解析力学や熱統計力学に出て来る Legendre 変換 と関係がある。

□

注意

$y'' = 0$  のときの解  $y = xa - f(a)$  は  $x = f'(y')$  のときの解  $y = xp(x) - f(p(x))$  ( $f'(p(x)) = x$ ) の

接線にならってなる。 $y = xp(x) - f(p(x))$ ,  $f'(p(x)) = x$  のとき,  $y' = p(x)$  となる,  $p(x_0) = a$  となる  $x_0$  をとると,

$$x = x_0 \text{ の接する接線は } y = a(x - x_0) + x_0 \underbrace{p(x_0)}_{=a} - f(\underbrace{p(x_0)}_{=a}) = ax - f(a) \text{ となる。}$$

□

例  $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - d$  ( $d$  は定数) のとき,  $y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + d$  の解を求めよ。

両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - y'y''$  すなはち,  $y''(x - y') = 0$ .

$y'' = 0$  のとき 定数  $p$  を  $y'$  に代入して  $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + d$  が解になる。

$y' = x$  のとき  $x$  を  $y'$  に代入して  $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + d = \frac{1}{2}x^2 + d$  が解になる。

□

例

$f(p) = p \log p - p - d$  のとき,  $y = xy' - f(y') = xy' - y \log y' + y' + d$  の解を求めよう。

両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - y'' \log y' - y'' + y''$  すなはち  $y''(x - \log y') = 0$ .

$y'' = 0$  のとき  $y = xp - p \log p + p + d$  が解になる。

$y' = \log y'$  のとき  $y' = e^x$  を代入して  $y = xe^x - e^x x + e^x + d = e^x + d$  が解になる。

□