解けて欲しい微分方程式達

2019-06-29作成

黒木 玄

2019-06-29 作成.

2019-07-02 完全微分方程式, Ricatti, Clairaut.

2020-05-19 強制振動での $\alpha \to \omega$ での極限の計算.

2020-07-01 Hermiteの多項式の解説を追加した.

$\boxed{\text{定数係数の線形常微分方程式}}$ $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, $u = u(x)$, $p_1, \dots, p_n$ は定数.

(*) $$(\partial^n + p_1 \partial^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\partial + p_n) u = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

$\boxed{\text{解き方}}$ $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{m_s}$, α_i は互いに異なるとなるとき, 方程式(*)のすべての解は

(**) $$u(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_s - 1} a_{ik} x^k e^{\alpha_i x}, \quad a_{ik} \text{ は定数}$$

と一意に表わされる. 特に $m_1 = \cdots = m_s = 1$ (重根がない場合)には(**)は

$$u(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x}, \quad a_i \text{ は定数}$$

の形になる. 定数 a_{ik} (もしくは a_i) たちは他の条件によって決定される. □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2 + \omega^2) u = 0$, $\omega > 0$ の解は $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$ を使うと,

$$u(x) = a e^{i\omega x} + b e^{-i\omega x} = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

と書ける. ここで $A = a + b$, $B = i(a - b)$. さらに条件 $u(0) = a$, $u'(0) = b$ を課すと,

$$u(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x).$$ □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2 + 5\partial + 6) u = u'' + 5u' + 6u = 0$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$ の解を求めよう.

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ の解は $\lambda = -2, -3$ なので, $u'' + 5u' + 6u = 0$ の解は

$$u(x) = A e^{-2x} + B e^{-3x}$$

と書ける. このとき, $u'(x) = -2A e^{-2x} - 3B e^{-3x}$ なので,

$$u(0) \underset{①}{=} A + B = a, \qquad u'(0) \underset{②}{=} -2A - 3B = b.$$

これは,

$3 \times ① + ②$: $A = 3a + b$,

$2 \times ① + ②$: $-B = 2a + b$, $B = -2a - b$

と解けるので, 解は,

$$u(x) = (3a + b) e^{-2x} + (-2a - b) e^{-3x}.$$ □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2 + \omega^2)^2 u = 0$ の解は $e^{\pm i\omega x}$, $x e^{\pm i\omega x}$ の一次結合で書ける. $e^{\pm i\omega x} = \cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x)$ を代入すると, 解は

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + c x \cos(\omega x) + d x \sin(\omega x)$$

と表わされることがわかる. □

$\boxed{\text{強制振動付きの調和振動子}}$

$\alpha, \omega > 0$ とする. $u = u(t)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ とする.

$$(*) \qquad (\partial^2 + \omega^2) u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t).$$

$\boxed{\text{解法}}$ (*)の右辺を v と書くと, v は $(\partial^2 + \alpha^2) v = 0$ の解になっている. ゆえに (*) は

$$(*)' \qquad (\partial^2 + \alpha^2)(\partial^2 + \omega^2) u = (\partial^2 + \alpha^2) v = 0$$

と書き直される. $(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$ が重根を持たない場合 $(\alpha \neq \omega)$ と持つ場合 $(\alpha = \omega)$ に場合分けして考える.

<u>$\alpha \neq \omega$ のとき,</u> (*)′の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書ける. このとき

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2 (c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)),$$

$$\therefore (\partial^2 + \omega^2) u = (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)).$$

これと (*) を比較すると,

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

のとき, $u(t)$ が (*) の解になることがわかる. (*) の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

<u>$\alpha = \omega$ のとき,</u> (*)′の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書ける. このとき, $(fg)'' = f\ddot{g} + 2\dot{f}\dot{g} + \ddot{f}g$ を $f = ct, dt$, $g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$ に使うと,

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t),$$

$$(\partial^2 + \omega^2) u(t) = -2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t)$$

ゆえ, $c = -\frac{q}{2\omega}$, $p = \frac{p}{2\omega}$ おくと, $u(t)$ は (*) をみたす. (*) の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t). \qquad \square$$

$\boxed{\text{例}}$ 方程式 $\ddot{u}(t) + u(t) = \sin t$, $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$ の解を求めよう.

$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$ のとき, $\ddot{u}(t) = -u(t) + \sin t$,

$u(0) = a = 1$, $\dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t$, $\dot{u}(0) = b - \frac{1}{2} = 0$, $b = \frac{1}{2}$

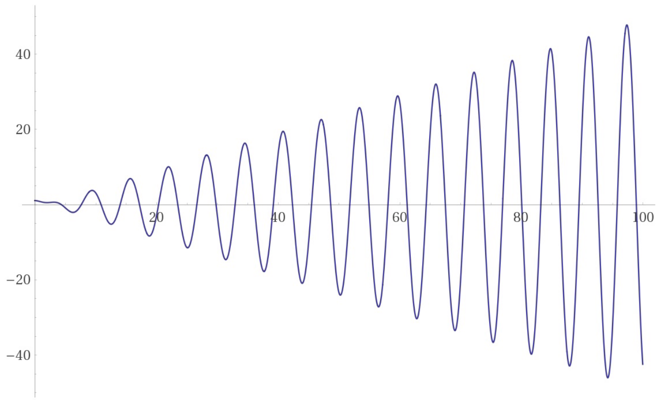
$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \qquad \square$$

$$(t \cos t)'' = (-t \sin t + \cos t)' = -t \cos t - \sin t - \sin t = -t \cos t - 2 \sin t$$

```
In[1]:= lode1 = {u''[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}
                                  正弦
Out[1]= {u[t] + u''[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}

In[4]:= DSolve[lode1, u[t], t] // Simplify // Expand
        微分方程式を解く           簡単な形式に  展開
```

Out[4]= $\left\{\left\{u[t] \to \mathrm{Cos}[t] - \frac{1}{2} t\,\mathrm{Cos}[t] + \frac{\mathrm{Sin}[t]}{2}\right\}\right\}$



$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t)$ $(\partial = d/dt,\ \omega>0, \alpha>0)$ の解の $\alpha\to\omega$ での極限

$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t)$ の解は $\alpha\neq\omega$ のとき

$$u(t) = a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)+\frac{p}{\omega^2-\alpha^2}\cos(\alpha t)+\frac{q}{\omega^2-\alpha^2}\sin(\alpha t) \quad \cdots ①$$

と書ける。これの $\alpha\to\omega$ での極限を単純にとろうとしても分母の $\omega^2-\alpha^2$ が 0 になるのでうまく行かない。正しい問題設定は初期条件 $u(0)=A$, $\dot u(0)=B$ を固定して，解の極限を考えることである。

$$(**)\quad (\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t),\quad u(0)=A,\quad \dot u(0)=B \quad (\alpha>0,\ \omega>0).$$

(i) $\alpha\neq\omega$ の場合　①のとき，$u(0) = a+\dfrac{p}{\omega^2-\alpha^2}$, $\dot u(0) = \omega b+\alpha\dfrac{q}{\omega^2-\alpha^2}$ なので初期条件と $a = A-\dfrac{p}{\omega^2-\alpha^2}$, $b=\dfrac{1}{\omega}\left(B-\dfrac{q}{\omega^2-\alpha^2}\right)$ と同値である。ゆえに $(**)$ の解は

$$u(t) = A\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega}B\sin(\omega t)-\frac{p}{\alpha^2-\omega^2}\bigl(\cos(\alpha t)-\cos(\omega t)\bigr)-\frac{q}{\alpha^2-\omega^2}\left(\sin(\alpha t)-\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right).$$

そして，$\alpha\to\omega$ のとき，

$$\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\omega t)}{\alpha-\omega}\longrightarrow \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\omega}\cos(\alpha t) = -t\sin(\omega t),$$

$$\frac{\sin(\alpha t)-\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)}{\alpha-\omega} = \frac{\sin(\alpha t)-\sin(\omega t)}{\alpha-\omega}-\frac{\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega}\sin(\alpha t)}{\alpha-\omega}\longrightarrow t\cos(\omega t)-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

$$\begin{aligned}\therefore\ u(t) &\longrightarrow A\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega}B\sin(\omega t)+\frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t)-\frac{q}{2\omega}\left(t\cos(\omega t)-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)\\ &= A\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega}\left(B+\frac{q}{2\omega}\right)\sin(\omega t)-\frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t)+\frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t)\end{aligned}$$

(ii) $\alpha=\omega$ の場合　$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\omega t)+q\sin(\omega t)$ の解は

$$u(t) = a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)-\frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t)+\frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t).$$

このとき，$u(0)=a$, $\dot u(0)=\omega b-\dfrac{q}{2\omega}$ なので初期条件 $u(0)=A$, $\dot u(0)=B$ と $a=A$, $b=\dfrac{1}{\omega}\left(B+\dfrac{q}{2\omega}\right)$ と同値である。ゆえに $(**)$ の解は，

$$u(t) = A\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega}\left(B+\frac{q}{2\omega}\right)\sin(\omega t)-\frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t)+\frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t).$$

これは (i) で得た $(**)$ の解の $\alpha\to\omega$ での極限に一致する。 □

解説　$(**)$ と同値な方程式

$$(**)'\quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2u+p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t),\quad u(0)=A,\quad \dot u(0)=B$$

は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の調和振動子に外部から周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ で振動する力を与えた様子を記述している。
$\alpha\neq\omega$ であれば解は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の振動と周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ の振動の和になり，
$\alpha=\omega$ ならば $t\to$ 大で振幅が大きくなる解が得られる。
上の計算は $\alpha\neq\omega$ の解のどのような極限によって $\alpha=\omega$ の解が得られるかを示している。 □

単独1階の線形常微分方程式

$u = u(x)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$

(*) $u'(x) = a(x)\,u(x)$.

解法 $u(x) = u(0)\, e^{\int_0^x a(y)\,dy}$. □

例 $u'(x) = -x\,u(x)$ の解は, $\int_0^x (-y)\,dy = -\frac{x^2}{2}$ より, $u(x) = u(0)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$. □

単独1階の非斉次線形常微分方程式

(*) $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$.

定数変化法

解法 $u(x) = c(x)\, e^{\int_0^x a(y)\,dy}$ の形で解を探す. $u(0) = c(0)$,

$$u'(x) = a(x)\,c(x)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} + c'(x)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} = a(x)u(x) + c'(x)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy}.$$

これと (*) を比較すると, $c'(x) = e^{-\int_0^x a(y)\,dy} f(x)$, $c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y)\,dy}\, b(z)\,dz$ のとき, $u(x)$ は (*) の解になる. (*) の解は次のように書ける:

$$u(x) = c(x)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} = u(0)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)\,dy}\, b(z)\,dz. \quad □$$

確認 $u(x) = u(0)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)\,dy}\, b(z)\,dz$ のとき,

$$u'(x) = a(x)\,u(0)\,e^{\int_0^x a(y)\,dy} + a(x)\int_0^x e^{\int_z^x a(y)\,dy}\, b(z)\,dz + e^{\int_x^x a(y)\,dy}\, b(x) = a(x)u(x) + b(x). \quad □$$

例 $u'(x) = -x\,u(x) + x$ を解くと,

$$\int_z^x (-y)\,dy = \left[-\frac{y^2}{2}\right]_{y=z}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

$$\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}}\, z\,dz = \left[e^{\frac{z^2}{2}}\right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

なので,

$$u(x) = u(0)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) = u(0)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

確認 そのとき, $-x\,u(x) + x = -x\,(u(x) - 1) = -x\,u(0)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$u'(x) = -x\,u(0)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ 等しい. OK. □

ベルヌイ
Bernoulli 方程式　(*) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\alpha}$ ($\alpha \neq 1$と仮定).

解法　(*) $\Leftrightarrow$ $y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ でかつ, $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ なので

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

ゆえに, $u = y^{1-\alpha}$ とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは u に関する単独1階の非斉次線形常微分方程式なのですでに説明した方法で解ける. □

例　$y' = -xy + xy^3$ を解こう. $u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと, $u' = 2xu - 2x$.
$u' = 2xu$ の解 e^{x^2} を用いて, $u = e^{x^2}c(x)$ の形で解を探そう. そのとき, $u' = 2xu + e^{x^2}c'(x)$.
この u が解であることは $c'(x) = -2xe^{-x^2}$ と同値. これを解くと, $c(x) = e^{-x^2} + C$.
そのとき, $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$, $y = \pm u^{1/(1-3)} = \pm(1+Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$. □

連立1階の定数係数線形常微分方程式

$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ \vdots \\ u_n(t)\end{bmatrix}$, $A=[a_{ij}]$ は $n\times n$ の定数行列とする。

$$(*)\quad \dot{\mathbf{u}}(t)=A\mathbf{u}(t).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $\mathbf{u}(t)=e^{tA}\mathbf{u}(0)$, $\quad e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\v(t)\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ のとき, $A^2=-E$, $e^{tA}=E\cos t+A\sin t=\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{bmatrix}$

$\dot{\mathbf{u}}(t)=A\mathbf{u}(t)$ の解は $\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\v(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(0)\\v(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(0)\cos t-v(0)\sin t\\u(0)\sin t+v(0)\cos t\end{bmatrix}$. □

$\boxed{\text{例}}$ $\ddot{u}(t)=-\omega^2u(t)$ は $\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\ \dot{u}(t)\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\-\omega^2&0\end{bmatrix}$ とおくと, $\dot{\mathbf{u}}(t)=A\mathbf{u}(t)$ と書き直される。

$A^2=-\omega^2E$ より, $A^{2k}=(-1)^k\omega^{2k}E=\begin{bmatrix}(-1)^k\omega^{2k}&0\\0&(-1)^k\omega^{2k}\end{bmatrix}$, $A^{2k+1}=(-1)^k\omega^{2k}A=\begin{bmatrix}0&(-1)^k\omega^{2k}\\(-1)^{k+1}\omega^{2k+2}&0\end{bmatrix}$.

ゆえに, $e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}E+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\omega^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}A=\begin{bmatrix}\cos(\omega t)&\omega^{-1}\sin(\omega t)\\-\omega\sin(\omega t)&\cos(\omega t)\end{bmatrix}$.

解は次のように書ける:

$$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\ \dot{u}(t)\end{bmatrix}=e^{tA}\begin{bmatrix}u(0)\\ \dot{u}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(0)\cos(\omega t)+\dot{u}(0)\omega^{-1}\sin(\omega t)\\-\omega u(0)\sin(\omega t)+\dot{u}(0)\cos(\omega t)\end{bmatrix}.$$

特に, $u(t)=u(0)\cos(\omega t)+\dot{u}(0)\omega^{-1}\sin(\omega t)$. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\v(t)\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}-1&3\\-4&6\end{bmatrix}$ のときの $\dot{\mathbf{u}}(t)=A\mathbf{u}(t)$ を解こう。

A を対角化しよう。$|\lambda E-A|=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$ なので A の固有値は2と3.

A の固有値2の固有ベクトルとして, $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ がとれる。

A の固有値3の固有ベクトルとして, $\mathbf{q}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ がとれる。

$P=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix}$ で, $A=P\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}P^{-1}$.

$$e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{3t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&3e^{3t}\\e^{2t}&4e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{2t}-3e^{3t}&-3e^{2t}+3e^{3t}\\4e^{2t}-4e^{3t}&-3e^{2t}+4e^{3t}\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{u}(t)=e^{tA}\mathbf{u}(0)=\begin{bmatrix}(4u(0)-3v(0))e^{2t}+(-3u(0)+3v(0))e^{3t}\\(4u(0)-3v(0))e^{2t}+(-4u(0)+4v(0))e^{3t}\end{bmatrix}$. この $\mathbf{u}(t)$ が解になる。

確認 $\dot{\mathbf{u}}(t)=\begin{bmatrix}(8u(0)-6v(0))e^{2t}+(-9u(0)+9v(0))e^{3t}\\(8u(0)-6v(0))e^{2t}+(-12u(0)+12v(0))e^{3t}\end{bmatrix}$, $A\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}(8u(0)-6v(0))e^{2t}+(-9u(0)+9v(0))e^{3t}\\(8u(0)-6v(0))e^{2t}+(-12u(0)+12v(0))e^{3t}\end{bmatrix}$ OK. □

連立1階の非斉次定数係数線形常微分方程式

$$\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix},\quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n\times n \text{ 行列},\quad \mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$(*)\qquad \dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $\dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t)$ の解 $\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{u}(0)$ の定数ベクトル $\mathbb{u}(0)$ をベクトル値函数 $\mathbb{c}(t)$ でおきかえた次の形の解を探す：

$$\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{c}(t).$$

定数変化法

このとき，$\mathbb{u}(0) = \mathbb{c}(0)$，

$$\dot{\mathbb{u}}(t) = Ae^{tA}\mathbb{c}(t) + e^{tA}\dot{\mathbb{c}}(t) = A\mathbb{u}(t) + e^{tA}\dot{\mathbb{c}}(t)$$

なので，(*)とこれを比較すると，

$$\dot{\mathbb{c}}(t) = e^{-tA}\mathbb{b}(t),\qquad \mathbb{c}(t) = \mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{-sA}\mathbb{b}(s)\,ds$$

のとき，$\mathbb{u}(t)$ は (*) の解になる．(*) の解は

$$\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{c}(t) = e^{tA}\mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds.$$

<u>確認</u> このとき，$\dot{\mathbb{u}}(t) = Ae^{tA}\mathbb{u}(0) + A\int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds + e^{(t-t)A}\mathbb{b}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t)$. <u>OK.</u> □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ なので，

$$\dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t),\qquad \mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

の解は，

$$\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} u(0)\cos t - v(0)\sin t + \int_0^t \big(f(s)\cos(t-s) - g(s)\sin(t-s)\big)ds \\ u(0)\sin t + v(0)\cos t + \int_0^t \big(f(s)\sin(t-s) + g(s)\cos(t-s)\big)ds \end{bmatrix}.$$

(注 $\dot{u}(t) = -v(t) + f(t)$，$\dot{v}(t) = u(t) + g(t)$)

たとえば，$f(t) = 0$，$g(t) = -1$ のとき，$\int_0^t \sin(t-s)\,ds = \Big[\cos(t-s)\Big]_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos t$ なので

$$\begin{cases} u(t) = u(0)\cos t - v(0)\sin t + 1 - \cos t \\ v(t) = u(0)\sin t + v(0)\cos t - \sin t \end{cases}$$

$\left(-\int_0^t \cos(t-s)\,ds = \Big[\sin(t-s)\Big]_{s=0}^{s=t} = -\sin t\right)$ □

注 $v(t) = -\dot{u}(t)$ もしくは

$\boxed{\text{一般の強制力付きの調和振動子}}$

(*) $\quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t).$

$\boxed{\text{解法}}$ $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$ とおくと, (*) は次のように書き直される:

(*)$'$ $\quad \dot{\mathbf{u}}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t).$

この(*)$'$は次のように解けるのであった:

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

この場合には, $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$ なので,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1}\sin(\omega(t-s))\,f(s)\,ds \\ -\omega\, u(0)\sin(\omega t) + \dot{u}(0)\cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s))\,f(s)\,ds \end{bmatrix},$$

(*)の解は次のように表わされる:

$$u(t) = u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1}\sin(\omega(t-s))\,f(s)\,ds. \qquad \square$$

$\boxed{\text{例題}}$ $u(t)$をすぐ上のように定めると $u(t)$が(*)をみたしていることを直接確認せよ.

$\boxed{\text{解}}$

$$\dot{u}(t) = -\omega\, u(0)\sin(\omega t) + \dot{u}(0)\cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s))\,f(s)\,ds + \underbrace{\omega^{-1}\sin(\omega(t-t))f(t)}_{=0}$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(0)\cos(\omega t) - \omega^2\dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) - \omega^2\int_0^t \omega^{-1}\sin(\omega(t-s))\,f(s)\,ds + \underbrace{\cos(\omega(t-t))}_{=1}f(t)$$

$$= -\omega^2 u(t) + f(t). \qquad \square$$

$\boxed{\text{連立1階の(非定数係数の)線形常微分方程式}}$ E は $n\times n$ の単位行列であるとする。

$U(t)=[u_{ij}(t)]$, $A(t)=[a_{ij}(t)]$ は $n\times n$ 行列値函数であるとする。

$$(*)\quad \dot{U}(t)=A(t)U(t),\qquad U(0)=E.$$

$\boxed{\text{解法}}$
$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\,A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n).\qquad\square$$

注 $U(t)$ の形は一般には具体的にはわからない。 $\square$

$\boxed{\text{連立1階の非斉次の(非定数係数の)線形常微分方程式}}$ $U(t)$ は上の $U(t)$ とする。

$$(*)\quad \dot{\mathbb{u}}(t)=A(t)\mathbb{u}(t)+\mathbb{b}(t).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $\mathbb{u}(t)=U(t)\mathbb{c}(t)$ の形で解を探す。 ← 定数変化法 $\mathbb{u}(0)=\mathbb{c}(0)$ でかつ

$$\dot{\mathbb{u}}(t)=A(t)U(t)\mathbb{c}(t)+U(t)\dot{\mathbb{c}}(t)=A(t)\mathbb{u}(t)+U(t)\dot{\mathbb{c}}(t)$$

なので、$(*)$ と比較すると、

$$\dot{\mathbb{c}}(t)=U(t)^{-1}\mathbb{b}(t),\qquad \mathbb{c}(t)=\mathbb{u}(0)+\int_0^t U(s)^{-1}\mathbb{b}(s)\,ds$$

のときの

$$\mathbb{u}(t)=U(t)\mathbb{c}(t)=U(t)\mathbb{u}(0)+\int_0^t U(t)U(s)^{-1}\mathbb{b}(s)\,ds$$

が $(*)$ の解になる。 $\square$

$\boxed{\text{注意}}$
$$0=\frac{d}{dt}E=\frac{d}{dt}\left(X(t)X(t)^{-1}\right)=\dot{X}(t)X(t)^{-1}+X(t)\frac{d(X(t)^{-1})}{dt}$$
なので
$$\frac{d}{dt}\left(X(t)^{-1}\right)=-X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}.$$

これを使うと、次を示せる： $U(t,s)=U(t)U(s)^{-1}$ とおくと、

(1) $U(t,t)=E$,

(2) $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(s)U(t,s)$,

(3) $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)=-U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1}=-U(t)U(s)^{-1}A(s)=-U(t,s)A(s)$,

この3つの条件のうち (1)と(2) (または(1)と(3))の2つの条件で $U(t,s)$ が一意に特徴付けられる。
$U(t,s)$ は次のように表わされる：

$$\begin{aligned}U(t,s)&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_s^t dt_1\int_s^{t_1}dt_2\cdots\int_s^{t_{n-1}}dt_n\,A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_s^t dt_n\int_{t_n}^t dt_{n-1}\cdots\int_{t_2}^t dt_1\,A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\end{aligned}$$

これが (1), (2) (3) をみたすことを確認せよ

単独2階の線形常微分方程式で0でない解が1つ分かっている場合　$\partial=\dfrac{\partial}{\partial x}$

方程式

$$(*)\qquad (\partial^2+p(x)\partial+q(x))u(x) = u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=0$$

の0でない解 $f(x)$ が1つ分かっているとき，$f(x)$ と一次独立な別の解 $g(x)$ を求めよ．

$\boxed{\text{解法1}}$　$g(x)=f(x)c(x)$　($c(x)$ は非定数函数) の形で $(*)$ の解を探してみる．このとき

$$g=fc,\quad g'=f'c+fc',\quad g''=f''c+2f'c'+fc''$$

なので

$$g''+pg'+qg=(f''+pf'+qf)c+(2f'+pf)c'+fc''.$$

g が $(*)$ の解であることと，$(2f'+pf)c'+fc''=0$ は同値であり，それをみたす c は次のように作れる：

$$c''=-\left(2\frac{f'}{f}+p\right)c',\qquad c'(x)=e^{-\int\left(2\frac{f'}{f}+p\right)dx}=f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}.$$

$$c(x)=\int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx.$$

このとき，

$$g(x)=f(x)\int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx.$$

□

$\boxed{\text{解法2}}$　f,g が $(*)$ の一次独立な解のとき，それらのWronskianが $W(f,g)(x)=e^{-\int p(x)\,dx}$ となることを使う．

f,g のWronskianを $W=W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=fg'-gf'$ と書くと，

$$W'=\underbrace{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}}_{=0}+\begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f & g \\ -pf'-qf & -pg'-qg \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f & g \\ -pf' & -pg' \end{vmatrix}=-p\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=-pW$$

なので，$W=fg'-gf'=e^{-\int p(x)\,dx}$．ゆえに $g'\overset{①}{=}\dfrac{f'}{f}g+\dfrac{1}{f}e^{-\int p(x)\,dx}$．これの解を $g=c(x)e^{\int\frac{f'}{f}dx}=f(x)c(x)$ の形で探してみる．そのとき，$g'=f'c+fc'\overset{②}{=}\dfrac{f'}{f}g+fc'$　①と②を比較すると，$c'=\dfrac{1}{f^2}e^{-\int p(x)\,dx}$ なので，そのような c のひとつを $c=\int\dfrac{1}{f^2}e^{-\int p(x)\,dx}dx$ と作れる．

そのとき，

$$g(x)=fc=f(x)\int\frac{1}{f(x)^2}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx.$$

(これは上の解法1と同じ結果)．□

$\boxed{\text{例}}$　$(\partial-x)(\partial+x)u(x)=(\partial^2-x^2+1)u(x)=u''(x)-(x^2-1)u(x)\overset{(*)}{=}0$ を解こう．$(\partial+x)u(x)=0$ の解はその解なので $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ は解である．f と一次独立な解 g を $g=fc$ (c は非定数) の形で探してみる．

そのとき，$g''-(x^2-1)g=(f''-(x^2-1)f)c+2f'c'+fc''=2f'c'+fc''$．$g$ が解であるような c のひとつを

$$2f'c'+fc''=0,\quad c''=-2\frac{f'}{f}c',\quad c'=e^{-\int 2\frac{f'}{f}dx}=f^{-2},\quad c=\int f^{-2}dx$$

と求めることができる．そのとき，

$$g(x)=f(x)c(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{x^2}dx.$$

$(*)$ のすべての解は $u(x)=ae^{-\frac{x^2}{2}}+be^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{x^2}dx$ (a,b は定数) と表わされる．□

Hermiteの多項式　k次のHermiteの多項式 $H_k(x)$ を

e^{2xt-t^2} を Hermite の多項式の母函数と呼ぶ

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x), \quad H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,\ H_3(x)=8x^3-12x, \dots$$

と定める。さらに，$\varphi_k(x)$，$G=G(x,t)$ を次のように定める：

$G=G(x,t)$ を $\varphi_k(x)$ の母函数 (generating function) と呼ぶ

$$\varphi_k(x) = H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad G = G(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\varphi_k(x) = e^{2xt-t^2-\frac{1}{2}x^2}. \quad (☆)$$

$\partial = \partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ とおき，微分作用素 H を

$$H = -\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

と定める。この H を量子調和振動子の Hamiltonian (ハミルトニアン) と呼ぶ。

定理　$H\varphi_k(x) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) \quad (k=0,1,2,\dots)$.　← $\varphi_k(x)$ は H の固有函数である。

証明　G に $\partial_x \pm x$ を作用させると，$(\partial_x \pm x)G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\partial_x \pm x)\varphi_k(x)$ でかつ，☆より，

$$(\partial_x + x)G \overset{☆}{=} (2t - x + x)G = 2tG = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2t^{l+1}}{l!}\varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2k\varphi_{k-1}(x),$$

$$(\partial_x - x)G \overset{☆}{=} (2t-2x)G \overset{☆}{=} -\frac{\partial}{\partial t}G = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-\varphi_{k+1}(x)).$$

ゆえに，

$$(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k\varphi_{k-1}(x), \quad (\partial_x - x)\varphi_k(x) = -\varphi_{k+1}(x).$$

← $\partial_x - x$ と $\partial_x + x$ は昇降演算子である。

これより，

$$(\partial_x - x)(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k(\partial_x - x)\varphi_{k-1}(x) = -2k\varphi_k(x).$$

したがって，

$$H\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(-2k) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_k(x).$$

q.e.d.

定理　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)H_l(x)e^{-x^2}dx \overset{①}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx \overset{②}{=} \delta_{kl}\,2^k k!\sqrt{\pi}$.　← 直交性

証明　① は $\varphi_k(x) = H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ から出る。② を示そう。② の計算は母函数で行うと易しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s,x)G(t,x)dx = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\frac{t^l}{l!}\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx}$$ でかつ $G(t,x) = e^{2xt-t^2-\frac{1}{2}x^2}$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s,x)G(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2(s+t)x-(s^2+t^2)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+s+t)^2+2st}dx$$ となり，

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2}dx = \sqrt{\pi}$ より，これは次に等しい：

$$\sqrt{\pi}e^{2st} = \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k s^k t^k}{k!} = \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\frac{t^l}{l!}\underline{\delta_{k,l}\,2^k k!\sqrt{\pi}}.$$

以上を比較すると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx = \delta_{kl}\,2^k k!\sqrt{\pi}$.

q.e.d.

$\boxed{\text{変数分離形}}$ $y=y(x)$

$$(*)\quad \frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+C$ は (yの関数)$=$(xの関数) の形の式になる。これをyについて解くと，$y=$(xの関数) が得られる。これが$(*)$の解になる $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dv}{dt}=1+v^2$ を解こう。 $\displaystyle\int\frac{dv}{1+v^2}=\int dt+c$, $\arctan v=t+c$, $v=\tan(t+c)$. $\square$

$\boxed{\text{補足}}$ $v=\tan t$ のとき，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\cos t}{\cos t}+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+v^2$. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dv}{dt}=1-v^2$ を解こう。 $\displaystyle\int\frac{dv}{1-v^2}=\int dt+c$, $\operatorname{arctanh} v=t+c$, $v=\tanh(t+c)$. $\square$

$\boxed{\text{補足}}$ $v=\tanh t=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ のとき，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\cosh t}{\cosh t}-\dfrac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}=1-\tanh^2 t=1-v^2$. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ (一様重力下を落下する物体の速度の慣性抵抗下での時間変化)

$$\frac{dv}{dt}=-1-v|v|=\begin{cases}-1-v^2 & (v\geqq 0),\\ -1+v^2 & (v\leqq 0).\end{cases}$$

これを解こう。

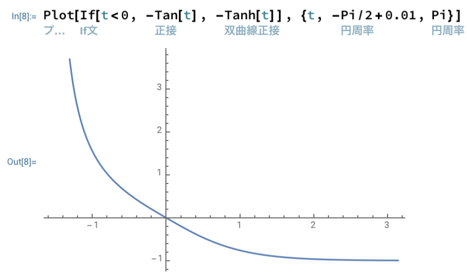
$v\leqq 0$のとき，$\dfrac{dv}{dt}=-1+v^2$, $\displaystyle\int\frac{dv}{1-v^2}=-\int dt+c_1$, $\operatorname{arctanh} v=-t+c_1$, $v=-\tanh(t-c_1)$.
$t-c_1\geqq 0$

$v\geqq 0$のとき，$\dfrac{dv}{dt}=-1-v^2$, $\displaystyle\int\frac{dv}{1+v^2}=-\int dt+c_2$, $\arctan v=-t+c_2$, $v=-\tan(t-c_2)$.
$-\dfrac{\pi}{2}<t-c_2\leqq 0$

この2つが連続的につながるためには $c=c_1=c_2$ でなければいけない。

$$v(t)=\begin{cases}-\tan(t-c) & \left(-\frac{\pi}{2}+c<t\leqq c\right)\\ -\tanh(t-c) & (c\leqq t)\end{cases}$$

$c=0$の場合 $\longrightarrow$



$\square$

$\boxed{\text{補足}}$ 粘性抵抗の場合の運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv$ の形なので適当に単位系をとりなおせば，$\dot{v}=-1-v$ の形にできる。これを解くと，

$$\int\frac{dv}{1+v}=-\int dt+c,\quad \log(1+v)=-t+c\quad v=e^{-(t-c)}-1.$$

(確認 $\dot{v}=-e^{-(t-c)}$, $-1-v=-1-e^{-(t-c)}+1=-e^{-(t-c)}$ ok.)

慣性抵抗の場合の運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv|v|$ の形なので適当に単位系をとりなおせば，$\dot{v}=-1-v|v|$ の形にできる。これを解いたのが上の例である。 $\square$

例 (logistic equation) $\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)$ $(0<x<1)$ を解こう.

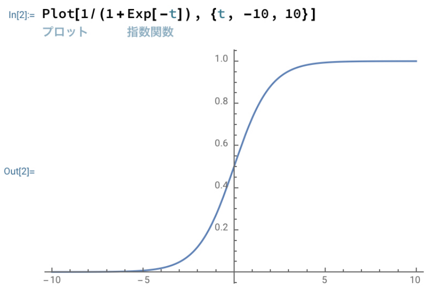
$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + c,\quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},\quad \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = t+c,$$

$$\log x - \log(1-x) = t+c,\quad \log\frac{x}{1-x} = t+c,\quad \frac{x}{1-x} = e^{t+c},\quad x = e^{t+c} - e^{t+c}x$$

$$(1+e^{t+c})x = e^{t+c},\quad x = \frac{e^{t+c}}{1+e^{t+c}} = \frac{1}{1+e^{-(t+c)}}.$$

解 $x(t) = \dfrac{1}{1+e^{-(t+c)}}$ が求まった.

$c=0$ の場合 →



□

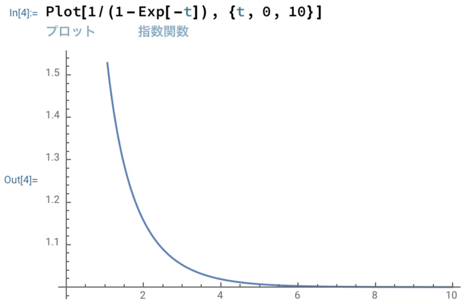
例 $\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x>1$ の場合. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx = t+c$, $\log x - \log(x-1) = t+c$,

$$\log\frac{x}{x-1} = t+c,\quad \frac{x}{x-1} = e^{t+c},\quad x = e^{t+c}x - e^{t+c},$$

$$(e^{t+c}-1)x = e^{t+c},\quad x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c}-1} = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}.$$

解 $x(t) = \dfrac{1}{1-e^{-(t+c)}}$ $(t+c>0)$ が求まった.

$c=0$ の場合 →



□

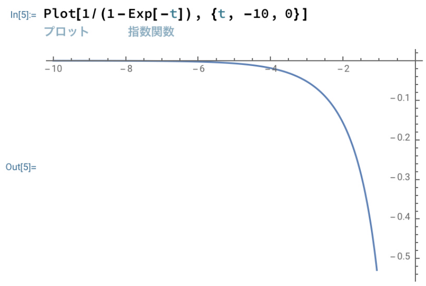
例 $\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x<0$ の場合. $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{-x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = t+c$, $\log(-x) - \log(1-x) = t+c$

$$\log\frac{-x}{1-x} = t+c,\quad \frac{-x}{1-x} = e^{t+c},\quad -x = e^{t+c} - e^{t+c}x$$

$$(e^{t+c}-1)x = e^{t+c},\quad x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c}-1} = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}.$$

解 $x(t) = \dfrac{1}{1-e^{-(t+c)}}$ $(t+c<0)$ が求まった.

$c=0$ の場合 →



□

例 $x(t) \overset{(**)}{=} \dfrac{1}{1+Ce^{-t}}$ (Cは定数) が $\dfrac{dx}{dt} \overset{(*)}{=} x(1-x)$ の解であることを示し, $x_0 \neq 0$ のとき, $x(0) = x_0$ をみたす解を求めよう. $(**)$ のとき,

$$\dot{x}(t) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2},\quad x(t)(1-x(t)) = \frac{1}{1+Ce^{-t}}\left(1-\frac{1}{1+Ce^{-t}}\right) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2},\quad \dot{x}(t) = x(t)(1-x(t)).$$

$$x(0) = \frac{1}{1+C} = x_0,\quad 1 = x_0 + x_0C,\quad C = x_0^{-1} - 1$$

$(*)$ の $x(0) = x_0 \neq 0$ をみたす解は, $x(t) = \dfrac{1}{1+(x_0^{-1}-1)e^{-t}}$. □

(注) $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^{-1} = \infty$ には $x(t) = 0$ という定数解が対応している. □

$\boxed{\text{同次方程式}}$ (*) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

$\boxed{\text{解法}}$ $y = \dfrac{x}{t}$ に変数変換する。そのとき、$x = ty$ なので

$$(*) \Leftrightarrow f(y) = \frac{dx}{dt} = y + t\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} \underset{(**)}{=} \frac{f(y)-y}{t}$$ ← これは変数分離形.

(**) は以下のように解ける;

$$\int \frac{dy}{f(y)-y} = \int \frac{dt}{t} + c = \log|t| + c, \quad t = \pm e^{-c} \int \frac{dy}{f(y)-y}.$$

(☆) の逆函数を $y(t)$ と書くとき、(*) の解は $x(t) = ty(t)$ と表わされる。 □

$\boxed{\text{例}}$ (*) $\dfrac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$ $(t>0)$ を解こう。 $x = ty$ を代入すると、

$$e^y + y = y + t\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t}, \quad \int e^{-y}\,dy = \int \frac{dt}{t} + c, \quad -e^{-y} = \log|t| + c$$

$$e^{-\frac{x}{t}} = \log\frac{1}{|t|} - c, \quad -\frac{x}{t} = \log\left(\log\frac{1}{|t|} - c\right), \quad x = -t\log\left(\log\frac{1}{|t|} - c\right).$$

これで解 $x(t) = -t\log\left(\log\dfrac{1}{|t|} - c\right)$ が求まった。

(<u>確認</u> $\dot{x}(t) = -\log\left(\log\dfrac{1}{|t|} - c\right) - t\dfrac{-\frac{1}{t}}{\log\frac{1}{|t|} - c} = -\log\left(\log\dfrac{1}{|t|} - c\right) + \dfrac{1}{\log\frac{1}{|t|} - c}$.

$e^{\frac{x(t)}{t}} + \dfrac{x(t)}{t} = \dfrac{1}{\log\frac{1}{|t|} - c} - \log\left(\log\dfrac{1}{|t|} - c\right)$. ← 等しい OK.) □

$\boxed{\text{同次方程式に変換できる場合}}$　　(*) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+p}{cx+dy+q}\right)$, $(c,d) \neq (0,0)$.

$\boxed{\text{解法}}$ ① $p=q=0$ ならば

$$(*) \iff \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)}\right)$$

で(*)は同次方程式になる。

② $ad-bc=0$ のとき, a, b を $a=kc$, $b=kd$ と表わせるので $u=cx+dy+q$ とおくと,

$$(*) \iff \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(cx+dy)+p}{cx+dy+q}\right) = f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right)$$

であり

$$\frac{du}{dx} = c + d\frac{dy}{dx} = c + d f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right) \leftarrow \text{これは変数分離形.}$$

③ $ad-bc \neq 0$ のとき. $\begin{cases} a\xi + b\eta = p \\ c\xi + d\eta = q \end{cases}$ をみたす ξ, η が一意に存在する. そのとき, $\begin{cases} X = x+\xi \\ Y = y+\eta \end{cases}$

とおくと, $\begin{cases} aX+bY = ax+by+p \\ cX+dY = cx+dy+q \end{cases}$ となるので,

①の場合

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right) = f\left(\frac{a+b(Y/X)}{c+d(Y/X)}\right). \leftarrow \text{同次方程式.}$$

□

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dy}{dx} \overset{(*)}{=} \dfrac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ $(ad-bc \neq 0,\ c=-b,\ d=1$ と仮定$)$ を解いてみよう.

$\begin{cases} a\xi + b\eta = p \\ c\xi + d\eta = q \end{cases}$ をみたす ξ, η をとり, $\begin{cases} X = x+\xi \\ Y = y+\eta \end{cases}$ とおくと, $(*) \iff \dfrac{dY}{dX} \overset{(**)}{=} \dfrac{a+b(Y/X)}{c+b(Y/X)}$.

$u = \dfrac{Y}{X}$ とおくと, $Y = uX$ なので, $X\dfrac{du}{dX} + u = \dfrac{a+bu}{c+du}$. $X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{a+(b-c)u-du^2}{c+du}$.

ここで $c=-b, d=1$ を使うと, $X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{a-2bu-u^2}{b+u} = -2\dfrac{a-2bu-u^2}{\frac{\partial}{\partial u}(a-2bu-u^2)}$.

$$\int \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a-2bu-u^2)}{a-2bu-u^2}\,du = -2\int\frac{dX}{X} + \gamma$$

$$\log|a-2bu-u^2| = -2\log|X| + c = \log|e^{\gamma}X^{-2}|$$

$a-2bu-u^2 = \pm e^{\gamma}X^{-2}$. $C = \pm e^{\gamma}$ とおくと, $(a-2bu-u^2)X^2 = C$.

$u = Y/X$ を代入すると, $aX^2 - 2bXY - Y^2 = C$.

$Y^2 + 2bXY - aX^2 + C = 0$. $(Y+bX)^2 - (a+b^2)X^2 + C = 0$. $\boxed{Y = -bX \pm \sqrt{(a+b^2)X^2 - C}.}$

$X = x+\xi$, $Y = y+\eta$ を代入すると

$$\boxed{y = -\eta - b(x+\xi) \pm \sqrt{(a+b^2)(x+\xi)^2 - C}.}$$

これが解.

$p=q=0$ の場合 $\to$

```
In[1]:= ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}
Out[1]= {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}

In[2]:= DSolve[ode3, y[x], x]
        微分方程式を解く
Out[2]= {{y[x] -> b x - Sqrt[-E^(2 C[1]) + a x^2 + b^2 x^2]}, {y[x] -> b x + Sqrt[-E^(2 C[1]) + a x^2 + b^2 x^2]}}
```

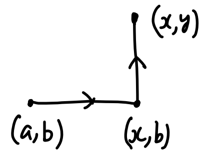
□

完全微分方程式 $q_x(x,y) = p_y(x,y)$ のとき,

$$(*) \qquad df(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy \qquad (\text{これは } f_x = p,\ f_y = q \text{ と同値})$$

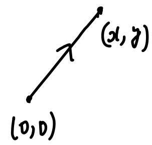
をみたす関数 $f(x,y)$ を求めよ.

解法例1 $f(x,y) = \int_a^x p(s,b)\,ds + \int_b^y q(x,t)\,dt.$



確認 $\begin{cases} f_x(x,y) = p(x,b) + \int_b^y q_x(x,t)\,dt = p(x,b) + \int_b^y p_y(x,t)\,dt = p(x,b) + \big[p(x,t)\big]_{t=b}^{t=y} = p(x,y), \\ f_y(x,y) = q(x,y). \end{cases}$ OK. □

解法例2 $f(x,y) = \int_0^1 \big(p(xt,yt)\,x + q(xt,yt)\,y\big)\,dt$



確認 $f_x(x,y) = \int_0^1 \big(p(xt,yt) + p_x(xt,yt)\,xt + q_x(xt,yt)\,yt\big)\,dt$

$= \int_0^1 \big(p(xt,yt) + p_x(xt,yt)\,xt + p_y(xt,yt)\,yt\big)\,dt$

$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(p(xt,yt)\,t\big)\,dt = \big[p(xt,yt)\,t\big]_{t=0}^{t=1} = p(x,y).$

同様にして, $f_y(x,y) = q(x,y).$ OK. □

注意 $f_x = p,\ f_y = q$ のとき, $p_y = f_{xy} = f_{yx} = q_x$. $df = p\,dx + q\,dy$ をみたす f が存在するためには $p_y = q_x$ という可積分条件が必要である. 以上の議論は一般の微分形式に拡張される. □

例 $df = 2xy\,dx + (x^2 + \cos y)$ をみたす $f = f(x,y)$ を求めよう. $p = 2xy,\ q = x^2 + \cos y$ のとき, $p_y = 2x = q_x$ なので可積分条件をみたしている.

$f(x,y) = \int_0^x 2sy\,ds + \int_0^y (0^2 + \cos t)\,dt = x^2 y + \sin y.$

確認 $\begin{cases} f_x = 2xy, \\ f_y = x^2 + \cos y. \end{cases}$ OK □

例 $df = (x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy$ をみたす $f = f(x,y)$ を求めよう. $(x^2 - y)_y = -1 = (y^2 - x)_x$ なので可積分条件をみたしている.

$f(x,y) = \int_0^x (s^2 - y)\,ds + \int_0^y (t^2 - 0)\,dt = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3}.$

確認 $\begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = -x + y^2. \end{cases}$ OK □

$\boxed{\text{Riccati方程式}}$（リッカティ） (*) $u'(x) + a(x)u^2 + b(x)u + c(x) = 0$ （$a(x)$は0でない函数）、以下，$\partial = \dfrac{\partial}{\partial x}$，

$\boxed{\text{解法}}$ $u(x) = \dfrac{1}{a(x)}\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ とおくと，$\psi(x)$に関する２階の線形常微分方程式

$$\left(\partial^2 + \left(b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)}\right)\partial + a(x)c(x)\right)\psi(x) = 0$$

に帰着する。以下はそのことの確認：$u = \dfrac{1}{a}\dfrac{\psi'}{\psi}$ のとき，

$$u' = -\frac{a'}{a^2}\frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{a}\frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{a}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2, \quad au^2+bu+c = \frac{1}{a}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \frac{b}{a}\frac{\psi'}{\psi} + c \text{ なので，}$$

$$u'+au^2+bu+c = \frac{1}{a\psi}\left(\psi'' + \left(b - \frac{a'}{a}\right)\psi' + ac\psi\right).$$

$\square$

$\boxed{\text{例}}$ $\alpha \neq \beta$ が定数のときの $u' + (u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう。$u = \dfrac{\psi'}{\psi}$ とおいて，

$$\psi'' - (\alpha+\beta)\psi' + \alpha\beta\psi = (\partial-\alpha)(\partial-\beta)\psi = 0$$

を解けばよい。これの解は $\psi(x) = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$ なので，$u(x) = \dfrac{a\alpha e^{\alpha x} + b\beta e^{\beta x}}{ae^{\alpha x} + be^{\beta x}}$。

$\square$

$\boxed{\text{例}}$ $\alpha \neq \beta$ が定数のときの $u' + \dfrac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta) = 0$ を解こう。$u = x\dfrac{\psi'}{\psi}$ とおくと，

$$\psi'' - \frac{\alpha+\beta-1}{x}\psi' + \frac{\alpha\beta}{x^2}\psi = \left(\partial - \frac{\beta-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\alpha}{x}\right)\psi = \left(\partial - \frac{\alpha-1}{x}\right)\left(\partial - \frac{\beta}{x}\right)\psi = 0.$$

これの解は $\psi(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta}$ なので $u(x) = x\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \dfrac{a\alpha x^{\alpha} + b\beta x^{\beta}}{ax^{\alpha} + bx^{\beta}}$。

$\square$

$\boxed{\text{例}}$ $u'(x) - 3u(x)^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$ を解こう。$u = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\psi'}{\psi}$ とおくと，$\psi'' = \dfrac{6}{x^2}\psi$ なので $\psi(x) = ax^3 + bx^{-2}$，

$$u(x) = -\frac{1}{3}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{3}\,\frac{3ax^2 - 2bx^{-3}}{ax^3 + bx^{-2}}.$$

$\square$

Clairaut（クレーロー）方程式 (*) $y = xy' - f(y')$ $\quad (y = y(x))$

解法 (*)の両辺を微分すると、 $y' = y' + xy'' - f'(y')y''$ すなわち $y''(x - f'(y')) = 0$.

$y''=0$のとき y'は定数となるので、$y' = p = (\text{定数})$ とおくと、$y = xp - f(p)$. これは(*)の解になっている。

$x = f'(y')$のとき $f'(y') = x$ を y'について解いた結果を $y' = p(x)$ と書くと、$y = xp(x) - f(p(x))$.
これも(*)の解になっている。(確認：$f'(p(x)) = x$, $y = xp(x) - f(p(x))$ のとき、
$y' = p(x) + xp'(x) - \underbrace{f'(p(x))}_{=x}p'(x) = p(x)$ なので、$y = xy' - f(y')$. OK.) □

注意 Clairaut方程式は解析力学や熱統計力学に出て来るLegendre（ルジャンドル）変換と関係がある。 □

注意 $y''=0$のときの解 $y = xa - f(a)$ は $x = f'(y')$のときの解 $y = xp(x) - f(p(x))$ $(f'(p(x)) = x)$の接線になっている。 $y = xp(x) - f(p(x))$, $f'(p(x)) = x$ のとき、$y' = p(x)$ なので、$p(x_0) = a$ となる x_0 をとると、$x = x_0$で接する接線は $y = a(x - x_0) + x_0\underbrace{p(x_0)}_{=a} - f(\underbrace{p(x_0)}_{a}) = ax - f(a)$ になる。 □

例 $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha$ (αは定数)のとき、$y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + \alpha$ の解を求めよう。
両辺を微分すると、$y' = y' + xy'' - y'y''$ すなわち $y''(x - y') = 0$.
$y''=0$のとき 定数pをy'に代入した $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + \alpha$ が解になる
$y' = x$のとき xをy'に代入した $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \alpha = \frac{1}{2}x^2 + \alpha$ が解になる。 □

例 $f(p) = p\log p - p - \alpha$ のとき、$y = xy' - f(y') = xy' - y'\log y' + y' + \alpha$ の解を求めよう。
両辺を微分すると、$y' = y' + xy'' - y''\log y' - y'' + y''$ すなわち $y''(x - \log y') = 0$.
$y''=0$のとき $y = xp - p\log p + p + \alpha$ が解になる。
$x = \log y'$のとき $y' = e^x$ を代入した $y = xe^x - e^x x + e^x + \alpha = e^x + \alpha$ が解になる。 □