解けて欲しい微分方程式達

2019-06-29作成

黒木 玄

2019-06-29 作成.

2019-07-02 完全微分方程式, Ricatti, Clairaut.

2020-05-19 強制振動での $\alpha \to \omega$ での極限の計算.

2020-07-01 Hermiteの多項式の解説を追加した.

2020-07-07 ベクトル場の図を追加

2020-07-14 積分因子という用語の紹介を追加した.

$\boxed{\text{定数係数の線形常微分方程式}}$ $\partial=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $u=u(x)$, $p_1,\dots,p_n$ は定数.

(*) $$(\partial^n+p_1\partial^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\partial+p_n)u = u^{(n)}+p_1u^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}u'+p_nu=0.$$

$\boxed{\text{解き方}}$ $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=(\lambda-\alpha_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\alpha_s)^{m_s}$, α_i は互いに異なるとなるとき,
方程式(*)のすべての解は

(**) $$u(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_s-1}a_{ik}\,x^k e^{\alpha_i x},\quad a_{ik}\text{ は定数}$$

と一意に表わされる. 特に $m_1=\cdots=m_s=1$ (重根がない場合)には(**)は

$$u(x)=a_1e^{\alpha_1x}+\cdots+a_ne^{\alpha_nx},\quad a_i\text{ は定数}$$

の形になる. 定数 a_{ik} (もしくは a_i) たちは他の条件によって決定される. □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2+\omega^2)u=0$, $\omega>0$ の解は $e^{\pm i\omega x}=\cos(\omega x)\pm i\sin(\omega x)$ を使うと,

$$u(x)=a\,e^{i\omega x}+b\,e^{-i\omega x}=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x).$$

と書ける. ここで $A=a+b$, $B=i(a-b)$. さらに条件 $u(0)=a$, $u'(0)=b$ を課すと,

$$u(x)=a\cos(\omega x)+\frac{b}{\omega}\sin(\omega x).$$ □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2+5\partial+6)u=u''+5u'+6u=0$, $u(0)=a$, $u'(0)=b$ の解を求めよう.
$\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0$ の解は $\lambda=-2,-3$ なので, $u''+5u'+6u=0$ の解は

$$u(x)=A\,e^{-2x}+B\,e^{-3x}$$

と書ける. このとき, $u'(x)=-2Ae^{-2x}-3Be^{-3x}$ なので,

$$u(0)\underset{①}{=}A+B=a,\qquad u'(0)\underset{②}{=}-2A-3B=b.$$

これは,

$3\times① + ②$: $A=3a+b$,
$2\times① + ②$: $-B=2a+b$, $B=-2a-b$

と解けるので, 解は,

$$u(x)=(3a+b)e^{-2x}+(-2a-b)e^{-3x}.$$ □

$\boxed{\text{例}}$ $(\partial^2+\omega^2)^2u=0$ の解は $e^{\pm i\omega x}$, $xe^{\pm i\omega x}$ の一次結合で書ける $e^{\pm i\omega x}=\cos(\omega x)\pm i\sin(\omega x)$ を代入すると, 解は

$$u(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)+cx\cos(\omega x)+dx\sin(\omega x)$$

と表わされることがわかる □

$\boxed{\text{強制振動付きの調和振動子}}$　$\alpha, \omega > 0$ とする。　$u = u(t)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ とする。

$$(*) \qquad (\partial^2 + \omega^2) u = p \cos(\alpha t) + q \sin(\alpha t).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $(*)$の右辺をvと書くと, v は $(\partial^2 + \alpha^2) v = 0$ の解になっている。ゆえに $(*)$ は

$$(*)' \qquad (\partial^2 + \alpha^2)(\partial^2 + \omega^2) u = (\partial^2 + \alpha^2) v = 0$$

と書き直される。$(\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 + \omega^2) = (\lambda - i\alpha)(\lambda + i\alpha)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$ が重根を持たない場合 $(\alpha \neq \omega)$ と持つ場合 $(\alpha = \omega)$ に場合分けして考える。

<u>$\alpha \neq \omega$ のとき,</u> $(*)'$の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)$$

と書ける。このとき

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \alpha^2 (c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)),$$

$$\therefore (\partial^2 + \omega^2) u = (\omega^2 - \alpha^2)(c \cos(\alpha t) + d \sin(\alpha t)).$$

これと $(*)$ を比較すると,

$$c = \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2}, \quad d = \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2}$$

のとき, $u(t)$ が $(*)$ の解になることがわかる。$(*)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

<u>$\alpha = \omega$ のとき,</u> $(*)'$の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + ct \cos(\omega t) + dt \sin(\omega t)$$

と書ける。このとき, $(fg)'' = f\ddot{g} + 2\dot{f}\dot{g} + \ddot{f}g$ を $f = ct, dt$, $g = \cos(\omega t), \sin(\omega t)$ に使うと,

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) - 2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t),$$

$$(\partial^2 + \omega^2) u(t) = -2\omega c \sin(\omega t) + 2\omega d \cos(\omega t)$$

ゆえに, $c = -\frac{q}{2\omega}$, $p = \frac{p}{2\omega}$ おくと, $u(t)$ は $(*)$ をみたす。$(*)$ の解は

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega} t \sin(\omega t). \quad \square$$

$\boxed{\text{例}}$ 方程式 $\ddot{u}(t) + u(t) = \sin t$, $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$ の解を求めよう。

$u(t) = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$ のとき, $\ddot{u}(t) = -u(t) + \sin t$,

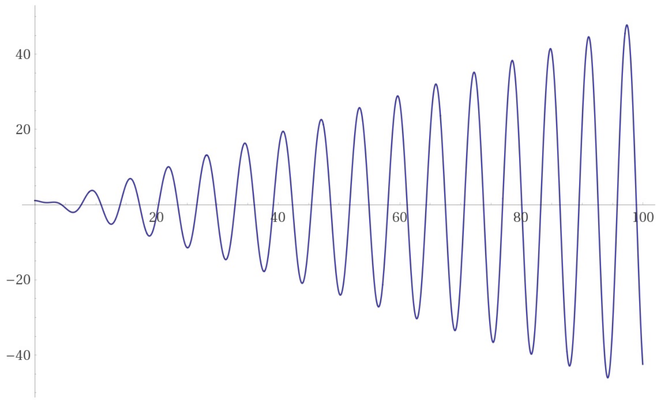
$u(0) = a = 1$, $\dot{u}(t) = -a \sin t + b \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t$, $\dot{u}(0) = b - \frac{1}{2} = 0$, $b = \frac{1}{2}$

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t. \quad \square$$

$(t \cos t)''$
$= (-t \sin t + \cos t)'$
$= -t \cos t - \sin t - \sin t$
$= -t \cos t - 2 \sin t$

```
In[1]:= lode1 = {u''[t] + u[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}
                                   正弦
Out[1]= {u[t] + u''[t] == Sin[t], u[0] == 1, u'[0] == 0}

In[4]:= DSolve[lode1, u[t], t] // Simplify // Expand
        微分方程式を解く              簡単な形式に  展開
Out[4]= {{u[t] → Cos[t] - 1/2 t Cos[t] + Sin[t]/2}}
```



$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t) + q\sin(\alpha t)$ $(\partial = d/dt,\ \omega>0, \alpha>0)$ の解の $\alpha\to\omega$ での極限

$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t)$ の解は $\alpha\neq\omega$ のとき

$$u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + \frac{p}{\omega^2-\alpha^2}\cos(\alpha t) + \frac{q}{\omega^2-\alpha^2}\sin(\alpha t) \quad \cdots ①$$

と書ける。これの $\alpha\to\omega$ での極限を単純にとろうとしても分母の $\omega^2-\alpha^2$ が 0 になるのでうまく行かない。
正しい問題設定は初期条件 $u(0)=A$, $\dot u(0)=B$ を固定して、解の極限を考えることである。

(**) $(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\alpha t)+q\sin(\alpha t)$, $u(0)=A$, $\dot u(0)=B$ $(\alpha>0,\ \omega>0)$.

(i) $\alpha\neq\omega$ の場合　①のとき, $u(0) = a + \frac{p}{\omega^2-\alpha^2}$, $\dot u(0) = \omega b + \alpha\frac{q}{\omega^2-\alpha^2}$ なので初期条件と
$a = A - \frac{p}{\omega^2-\alpha^2}$, $b = \frac{1}{\omega}\left(B - \frac{q}{\omega^2-\alpha^2}\right)$ と同値である。ゆえに(**)の解は

$$u(t) = A\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}B\sin(\omega t) - \frac{p}{\alpha^2-\omega^2}\left(\cos(\alpha t)-\cos(\omega t)\right) - \frac{q}{\alpha^2-\omega^2}\left(\sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right).$$

そして, $\alpha\to\omega$ のとき,

$$\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\omega t)}{\alpha-\omega} \longrightarrow \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\omega}\cos(\alpha t) = -t\sin(\omega t),$$

$$\frac{\sin(\alpha t)-\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)}{\alpha-\omega} = \frac{\sin(\alpha t)-\sin(\omega t)}{\alpha-\omega} - \frac{\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega}\sin(\alpha t)}{\alpha-\omega} \longrightarrow t\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

$$\therefore\ u(t) \longrightarrow A\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}B\sin(\omega t) + \frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega}\left(t\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$
$$= A\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\left(B+\frac{q}{2\omega}\right)\sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t)$$

(ii) $\alpha=\omega$ の場合　$(\partial^2+\omega^2)u = p\cos(\omega t)+q\sin(\omega t)$ の解は

$$u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t).$$

このとき, $u(0)=a$, $\dot u(0) = \omega b - \frac{q}{2\omega}$ なので初期条件 $u(0)=A$, $\dot u(0)=B$ と $a=A$, $b=\frac{1}{\omega}\left(B+\frac{q}{2\omega}\right)$
と同値である。ゆえに(**)の解は,

$$u(t) = A\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\left(B+\frac{q}{2\omega}\right)\sin(\omega t) - \frac{q}{2\omega}t\cos(\omega t) + \frac{p}{2\omega}t\sin(\omega t).$$

これは(i)で得た(**)の解の $\alpha\to\omega$ での極限に一致する。 □

解説　(**)と同値な方程式

(**)′ $$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 u + p\cos(\alpha t) + q\sin(\alpha t),\quad u(0)=A,\quad \dot u(0)=B$$

は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の調和振動子に外部から周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ で振動する力を与えた様子を記述している。
$\alpha\neq\omega$ であれば解は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の振動と周期 $\frac{2\pi}{\alpha}$ の振動の和になり,
$\alpha=\omega$ ならば $t\to$ 大で振幅が大きくなる解が得られる。
上の計算は $\alpha\neq\omega$ の解のどのような極限によって $\alpha=\omega$ の解が得られるかを示している。 □

単独1階の線形常微分方程式

$u = u(x)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$

(*) $u'(x) = a(x)\, u(x)$.

$\boxed{\text{解法}}$ $u(x) = u(0)\, e^{\int_0^x a(y)dy}$. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $u'(x) = -x\, u(x)$ の解は, $\int_0^x (-y)dy = -\frac{x^2}{2}$ より, $u(x) = u(0)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\square$

単独1階の非斉次線形常微分方程式

(*) $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$.

定数変化法

$\boxed{\text{解法}}$ $u(x) = c(x)\, e^{\int_0^x a(y)dy}$ の形で解を探す. $u(0) = c(0)$,

$$u'(x) = a(x)\, c(x)\, e^{\int_0^x a(y)dy} + c'(x)\, e^{\int_0^x a(y)dy} = a(x)u(x) + c'(x)\, e^{\int_0^x a(y)dy}.$$

これと (*) を比較すると, $c'(x) = e^{-\int_0^x a(y)dy} f(x)$, $c(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\int_0^z a(y)dy} b(z)\, dz$ のとき,
$u(x)$ は (*) の解になる. (*) の解は次のように書ける:

$$u(x) = c(x)\, e^{\int_0^x a(y)dy} = u(0)\, e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)\, dz. \quad \square$$

$\boxed{\text{確認}}$ $u(x) = u(0)\, e^{\int_0^x a(y)dy} + \int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)\, dz$ のとき,

$$u'(x) = a(x)\, u(0)\, e^{\int_0^x a(y)dy} + a(x)\int_0^x e^{\int_z^x a(y)dy} b(z)\, dz + e^{\int_x^x a(y)dy} b(x) = a(x)u(x) + b(x). \quad \square$$

$\boxed{\text{例}}$ $u'(x) = -x\, u(x) + x$ を解くと,

$$\int_z^x (-y)dy = \left[-\frac{y^2}{2}\right]_{y=z}^{y=x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

$$\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} z\, dz = \left[e^{\frac{z^2}{2}}\right]_{z=0}^{z=x} = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

なので,

$$u(x) = u(0)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) = u(0)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

確認 そのとき, $-x\, u(x) + x = -x(u(x) - 1) = -x\, u(0)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$u'(x) = -x\, u(0)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}}$ 等しい. OK. $\square$

ベルヌイ
$\boxed{\text{Bernoulli 方程式}}$

(*) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\alpha}$ ($\alpha \neq 1$ と仮定).

$\boxed{\text{解法}}$ (*) $\Leftrightarrow$ $y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ でかつ, $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ なので

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

ゆえに, $u = y^{1-\alpha}$ とおくと,

$$(*) \Leftrightarrow u' = (1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x)$$

これは u に関する単独1階の非斉次線形常微分方程式なのですでに説明した方法で解ける. □

$\boxed{\text{例}}$ $y' = -xy + xy^3$ を解こう. $u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと, $u' = 2xu - 2x$.

$u' = 2xu$ の解 e^{x^2} を用いて, $u = e^{x^2}c(x)$ の形で解を探そう. そのとき, $u' = 2xu + e^{x^2}c'(x)$.

この u が解であることは $c'(x) = -2xe^{-x^2}$ と同値. これを解くと, $c(x) = e^{-x^2} + C$.

そのとき, $u = e^{x^2}c(x) = 1 + Ce^{x^2}$, $y = \pm u^{1/(1-3)} = \pm(1+Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$. □

連立1階の定数係数線形常微分方程式

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$, $A = [a_{ij}]$ は $n \times n$ の定数行列とする。

(＊) $\dot{u}(t) = A u(t)$.

解法 $u(t) = e^{tA} u(0)$, $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$. □

例 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき、$A^2 = -E$, $e^{tA} = E \cos t + A \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\dot{u}(t) = A u(t)$ の解は $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0)\cos t - v(0)\sin t \\ u(0)\sin t + v(0)\cos t \end{bmatrix}$. □

例 $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t)$ は $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと、$\dot{u}(t) = A u(t)$ と書き直される。

$A^2 = -\omega^2 E$ より、$A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} E = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix}$, $A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k} \\ (-1)^{k+1} \omega^{2k+2} & 0 \end{bmatrix}$.

ゆえに、$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$.

解は次のように書ける：

$$u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega u(0) \sin(\omega t) + \dot{u}(0)\cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

特に、$u(t) = u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1} \sin(\omega t)$. □

例 $u(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ のときの $\dot{u}(t) = A u(t)$ を解こう。

A を対角化しよう。$|\lambda E - A| = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$ なので A の固有値は2と3.

A の固有値2の固有ベクトルとして、$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる。

A の固有値3の固有ベクトルとして、$q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ がとれる。

$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ とおくと、$P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ で、$A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$.

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} & -3e^{2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{3t} & -3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}.$$

$u(t) = e^{tA} u(0) = \begin{bmatrix} (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-3u(0) + 3v(0))e^{3t} \\ (4u(0) - 3v(0))e^{2t} + (-4u(0) + 4v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$. この $u(t)$ が解になる。

確認 $\dot{u}(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$, $A u(t) = \begin{bmatrix} (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-9u(0) + 9v(0))e^{3t} \\ (8u(0) - 6v(0))e^{2t} + (-12u(0) + 12v(0))e^{3t} \end{bmatrix}$ OK. □

連立1階の非斉次定数係数線形常微分方程式

$$\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}] \text{ は定数 } n\times n \text{ 行列}, \quad \mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$(*) \quad \dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t).$$

解法 $\dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t)$ の解 $\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{u}(0)$ の定数ベクトル $\mathbb{u}(0)$ をベクトル値函数 $\mathbb{c}(t)$ でおきかえた次の形の解を探す：

$$\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{c}(t).$$ 定数変化法

このとき，$\mathbb{u}(0) = \mathbb{c}(0)$，

$$\dot{\mathbb{u}}(t) = Ae^{tA}\mathbb{c}(t) + e^{tA}\dot{\mathbb{c}}(t) = A\mathbb{u}(t) + e^{tA}\dot{\mathbb{c}}(t)$$

なので，(*) とこれを比較すると，

$$\dot{\mathbb{c}}(t) = e^{-tA}\mathbb{b}(t), \quad \mathbb{c}(t) = \mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{-sA}\mathbb{b}(s)\,ds$$

のとき，$\mathbb{u}(t)$ は (*) の解になる．(*) の解は

$$\mathbb{u}(t) = e^{tA}\mathbb{c}(t) = e^{tA}\mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds.$$

__確認__ このとき，$\dot{\mathbb{u}}(t) = Ae^{tA}\mathbb{u}(0) + A\int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds + e^{(t-t)A}\mathbb{b}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t)$. __OK.__ □

例 $\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ なので，

$$\dot{\mathbb{u}}(t) = A\mathbb{u}(t) + \mathbb{b}(t), \quad \mathbb{b}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

の解は，

$$\mathbb{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\mathbb{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbb{b}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-s) & -\sin(t-s) \\ \sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} u(0)\cos t - v(0)\sin t + \int_0^t \big(f(s)\cos(t-s) - g(s)\sin(t-s)\big)ds \\ u(0)\sin t + v(0)\cos t + \int_0^t \big(f(s)\sin(t-s) + g(s)\cos(t-s)\big)ds \end{bmatrix}.$$

（注 $\dot{u}(t) = -v(t) + f(t)$，$\dot{v}(t) = u(t) + g(t)$）

たとえば，$f(t) = 0$，$g(t) = -1$ のとき，$\int_0^t \sin(t-s)\,ds = \Big[\cos(t-s)\Big]_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos t$ なので

$$\begin{cases} u(t) = u(0)\cos t - v(0)\sin t + 1 - \cos t \\ v(t) = u(0)\sin t + v(0)\cos t - \sin t \end{cases}$$

$$\left(-\int_0^t \cos(t-s)\,ds = \Big[\sin(t-s)\Big]_{s=0}^{s=t} = -\sin t\right)$$ □

注 $v(t) = -\dot{u}(t)$ もしくは

一般の強制力付きの調和振動子

(*) $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t) + f(t).$

解法 $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$ とおくと, (*) は次のように書き直される:

(*)' $\dot{\mathbf{u}}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t).$

この(*)'は次のように解けるのであった:

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

この場合には, $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$ なので,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1}\sin(\omega(t-s))\,f(s)\,ds \\ -\omega\, u(0)\sin(\omega t) + \dot{u}(0)\cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s))\,f(s)\,ds \end{bmatrix},$$

(*)の解は次のように表わされる:

$$u(t) = u(0)\cos(\omega t) + \dot{u}(0)\,\omega^{-1}\sin(\omega t) + \int_0^t \omega^{-1}\sin(\omega(t-s))\,f(s)\,ds. \qquad \square$$

例題 $u(t)$をすぐ上のように定めると$u(t)$が(*)をみたしていることを直接確認せよ.

解 $\dot{u}(t) = -\omega\, u(0)\sin(\omega t) + \dot{u}(0)\cos(\omega t) + \int_0^t \cos(\omega(t-s))\,f(s)\,ds + \overbrace{\omega^{-1}\sin(\omega(t-t))f(t)}^{=0}$

$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(0)\cos(\omega t) - \omega^2 \dot{u}(0)\overbrace{\sin(\omega t)}^{\omega^{-1}} - \omega^2\int_0^t \overbrace{\sin(\omega(t-s))}^{\omega^{-1}}f(s)\,ds + \underbrace{\cos(\omega(t-t))}_{=1}f(t)$

$\quad = -\omega^2 u(t) + f(t). \qquad \square$

連立1階の(非定数係数の)線形常微分方程式

E は $n\times n$ の単位行列であるとする。

$U(t)=[u_{ij}(t)]$, $A(t)=[a_{ij}(t)]$ は $n\times n$ 行列値函数であるとする。

$$(*) \quad \dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad U(0)=E.$$

解法 $\displaystyle U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n).$ □

注 $U(t)$ の形は一般には具体的にはわからない。□

連立1階の非斉次の(非定数係数の)線形常微分方程式

$U(t)$ は上の $U(t)$ とする。

$$(*) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t).$$

定数変化法

解法 $\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{c}(t)$ の形で解を探す。$\mathbf{u}(0)=\mathbf{c}(0)$ でかつ

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A(t)U(t)\mathbf{c}(t) + U(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + U(t)\dot{\mathbf{c}}(t)$$

なので、(*) と比較すると、

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = U(t)^{-1}\mathbf{b}(t), \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t U(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds$$

のときの

$$\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{c}(t) = U(t)\mathbf{u}(0) + \int_0^t U(t)U(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds$$

が (*) の解になる。

□

注意 $\displaystyle 0 = \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(X(t)X(t)^{-1}\right) = \dot{X}(t)X(t)^{-1} + X(t)\frac{d(X(t)^{-1})}{dt}$ なので

$$\frac{d}{dt}\left(X(t)^{-1}\right) = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}.$$

これを使うと、次を示せる：$U(t,s) = U(t)U(s)^{-1}$ とおくと、

(1) $U(t,t) = E$,

(2) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s)$,

(3) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t)U(s)^{-1}A(s)U(s)U(s)^{-1} = -U(t)U(s)^{-1}A(s) = -U(t,s)A(s)$.

この3つの条件のうち (1)と(2) (または(1)と(3))の2つの条件で $U(t,s)$ が一意に特徴付けられる。$U(t,s)$ は次のように表わされる：

$$U(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{n-1}} dt_n\, A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_s^t dt_n \int_{t_n}^t dt_{n-1} \cdots \int_{t_2}^t dt_1\, A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)$$

これが (1), (2) (3) をみたすことを確認せよ

単独2階の線形常微分方程式で0でない解が1つ分かっている場合 $\quad \partial = \dfrac{\partial}{\partial x}$

方程式

(*) $\quad (\partial^2 + p(x)\partial + q(x))u(x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0$

の0でない解 $f(x)$ が1つ分かっているとき, $f(x)$ と一次独立な別の解 $g(x)$ を求めよ.

解法1 $\quad g(x) = f(x)c(x)$ ($c(x)$ は非定数函数)の形で(*)の解を探してみる. このとき

$$g = fc, \quad g' = f'c + fc', \quad g'' = f''c + 2f'c' + fc''$$

なので

$$g'' + pg' + qg = (f'' + pf' + qf)c + (2f' + pf)c' + fc''.$$

g が(*)の解であることと, $(2f' + pf)c' + fc'' = 0$ は同値であり, それをみたす c は次のように作れる:

$$c'' = -\left(2\frac{f'}{f} + p\right)c', \quad c'(x) = e^{-\int\left(2\frac{f'}{f}+p\right)dx} = f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}.$$

$$c(x) = \int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx.$$

このとき,

$$g(x) = f(x)\int f(x)^{-2}e^{-\int p(x)\,dx}\,dx. \qquad \square$$

解法2 $\quad f, g$ が(*)の一次独立な解のとき, それらのWronskianが $W(f,g)(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$ となることを使う.

f, g のWronskianを $W = W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$ と書くと,

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' - qf & -pg' - qg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g \\ -pf' & -pg' \end{vmatrix} = -p\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = -pW$$

なので, $W = fg' - gf' = e^{-\int p(x)\,dx}$. ゆえに $g' \overset{①}{=} \dfrac{f'}{f}g + \dfrac{1}{f}e^{-\int p(x)\,dx}$. これの解を

$g = c(x)e^{\int \frac{f'}{f}dx} = f(x)c(x)$ の形で探してみる. そのとき, $g' = f'c + fc' \overset{②}{=} \dfrac{f'}{f}g + fc'$ ①と②を

比較すると, $c' = \dfrac{1}{f^2}e^{-\int p(x)\,dx}$ なので, そのような c のひとつを $c = \int \dfrac{1}{f^2}e^{-\int p(x)\,dx}dx$ と作れる.

そのとき,

$$g(x) = fc = f(x)\int\frac{1}{f(x)^2}e^{-\int p(x)\,dx}dx. \quad \text{(これは上の解法1と同じ結果).} \qquad \square$$

例 $\quad (\partial - x)(\partial + x)u(x) = (\partial^2 - x^2 + 1)u(x) = u''(x) - (x^2 - 1)u(x) \overset{(*)}{=} 0$ を解こう. $(\partial + x)u(x) = 0$ の解はその解なので $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ は解である. f と一次独立な解 g を $g = fc$ (c は非定数)の形で探してみる

そのとき, $g'' - (x^2-1)g = (f'' - (x^2-1)f)c + 2f'c' + fc'' = 2f'c' + fc''$. g が解であるような c のひとつを

$$2f'c' + fc'' = 0, \quad c'' = -2\frac{f'}{f}c', \quad c' = e^{-\int 2\frac{f'}{f}dx} = f^{-2}, \quad c = \int f^{-2}dx$$

と求めることができる. そのとき,

$$g(x) = f(x)c(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{x^2}dx.$$

(*)のすべての解は $u(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}} + be^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{x^2}dx$ (a, b は定数)と表わされる. $\square$

e^{2xt-t^2} を Hermite の多項式の母函数と呼ぶ

$\boxed{\text{Hermite の多項式}}$ k 次の Hermite の多項式 $H_k(x)$ を

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x), \quad H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,\ H_3(x)=8x^3-12x, \dots$$

と定める。さらに、$\varphi_k(x)$, $G=G(x,t)$ を次のように定める：

$G=G(x,t)$ を $\varphi_k(x)$ の母函数 (generating function) と呼ぶ

$$\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad G = G(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_k(x) = \underbrace{e^{2xt-t^2-\frac{1}{2}x^2}}_{(\star)}.$$

$\partial = \partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ とおき、微分作用素 H を

$$H = -\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

と定める。この H を量子調和振動子の Hamiltonian (ハミルトニアン) と呼ぶ。

$\boxed{\text{定理}}$ $H\varphi_k(x) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) \quad (k=0,1,2,\dots)$. ← $\varphi_k(x)$ は H の固有函数である。

$\boxed{\text{証明}}$ G に $\partial_x \pm x$ を作用させると、$(\partial_x \pm x)G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\partial_x \pm x)\varphi_k(x)$ でかつ、$(\star)$ より、

$$(\partial_x + x)G \overset{(\star)}{=} (2t - x + x)G = 2tG = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2t^{l+1}}{l!}\varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2k\varphi_{k-1}(x),$$

$$(\partial_x - x)G \overset{(\star)}{=} (2t - 2x)G \overset{(\star)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}G = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-\varphi_{k+1}(x)).$$

ゆえに、

$$(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k\varphi_{k-1}(x), \quad (\partial_x - x)\varphi_k(x) = -\varphi_{k+1}(x).$$

← $\left\{ \begin{array}{l} \partial_x - x \text{ と } \partial_x + x \text{ は} \\ \text{昇降演算子である。} \end{array}\right.$

これより、

$$(\partial_x - x)(\partial_x + x)\varphi_k(x) = 2k(\partial_x - x)\varphi_{k-1}(x) = -2k\varphi_k(x).$$

したがって、

$$H\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(\partial_x - x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(-\frac{1}{2}(-2k) + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi_k(x).$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{定理}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)H_l(x)e^{-x^2}dx \overset{①}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx \overset{②}{=} \delta_{kl}\, 2^k k! \sqrt{\pi}$. ← 直交性

$\boxed{\text{証明}}$ ① は $\varphi_k(x) = H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ から出る。② を示そう。② の計算は母函数で行うと易しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s,x)G(t,x)\,dx = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\frac{t^l}{l!} \underline{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx} \text{ でかつ } G(t,x) = e^{2xt - t^2 - \frac{1}{2}x^2} \text{ より}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s,x)G(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 2(s+t)x - (s^2+t^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(s+t))^2 + 2st}\,dx \text{ となり、}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2}dx = \sqrt{\pi}$ より、これは次に等しい：

$$\sqrt{\pi}\, e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k s^k t^k}{k!} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\frac{t^l}{l!} \underline{\delta_{k,l}\, 2^k k! \sqrt{\pi}}.$$

以上を比較すると、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = \delta_{kl}\, 2^k k! \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{変数分離形}}$ $y=y(x)$

$$(*)\quad \frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y).$$

$\boxed{\text{解法}}$ $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+C$ は (yの函数)$=$(xの函数) の形の式になる。これをyについて解くと，$y=$(xの函数) が得られる。これが$(*)$の解になる □

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dv}{dt}=1+v^2$ を解こう。$\displaystyle\int\frac{dv}{1+v^2}=\int dt+c$，$\arctan v=t+c$，$v=\tan(t+c)$. □

$\boxed{\text{補足}}$ $v=\tan t$ のとき，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\cos t}{\cos t}+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+v^2$. □

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dv}{dt}=1-v^2$ を解こう。$\displaystyle\int\frac{dv}{1-v^2}=\int dt+c$，$\operatorname{arctanh} v=t+c$，$v=\tanh(t+c)$. □

$\boxed{\text{補足}}$ $v=\tanh t=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ のとき，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\cosh t}{\cosh t}-\dfrac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}=1-\tanh^2 t=1-v^2$. □

$\boxed{\text{例}}$ (一様重力下を落下する物体の速度の慣性抵抗下での時間変化)

$$\frac{dv}{dt}=-1-v|v|=\begin{cases}-1-v^2 & (v\geqq 0),\\ -1+v^2 & (v\leqq 0).\end{cases}$$

これを解こう。

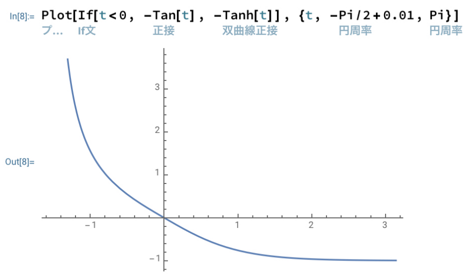
$v\leqq 0$のとき，$\dfrac{dv}{dt}=-1+v^2$，$\displaystyle\int\frac{dv}{1-v^2}=-\int dt+c_1$，$\operatorname{arctanh} v=-t+c_1$，$v=-\tanh(t-c_1)$.
$t-c_1\geqq 0$

$v\geqq 0$のとき，$\dfrac{dv}{dt}=-1-v^2$，$\displaystyle\int\frac{dv}{1+v^2}=-\int dt+c_2$，$\arctan v=-t+c_2$，$v=-\tan(t-c_2)$.
$-\frac{\pi}{2}<t-c_2\leqq 0$

この2つが連続的につながるためには $c=c_1=c_2$ でなければいけない。

$$v(t)=\begin{cases}-\tan(t-c) & (-\frac{\pi}{2}+c<t\leqq c)\\ -\tanh(t-c) & (c\leqq t)\end{cases}$$

$c=0$の場合 $\longrightarrow$



□

$\boxed{\text{補足}}$ 粘性抵抗の場合の運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv$ の形なので適当に単位系をとりなおせば，$\dot{v}=-1-v$ の形にできる。これを解くと，

$$\int\frac{dv}{1+v}=-\int dt+c,\quad \log(1+v)=-t+c\quad v=e^{-(t-c)}-1.$$

($\underline{\text{確認}}$ $\dot{v}=-e^{-(t-c)}$，$-1-v=-1-e^{-(t-c)}+1=-e^{-(t-c)}$ ok.)

慣性抵抗の場合の運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv|v|$ の形なので適当に単位系をとりなおせば，$\dot{v}=-1-v|v|$ の形にできる。これを解いたのが上の例である。 □

例 (logistic equation) $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ $(0<x<1)$ を解こう.

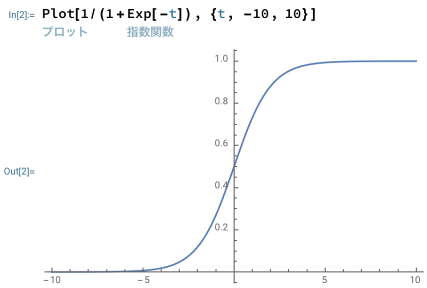
$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int dt + c$, $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = t + c$,

$\log x - \log(1-x) = t + c$, $\log \frac{x}{1-x} = t + c$, $\frac{x}{1-x} = e^{t+c}$, $x = e^{t+c} - e^{t+c} x$

$(1 + e^{t+c}) x = e^{t+c}$, $x = \frac{e^{t+c}}{1+e^{t+c}} = \frac{1}{1+e^{-(t+c)}}$.

解 $x(t) = \frac{1}{1+e^{-(t+c)}}$ が求まった.

$c=0$ の場合 →



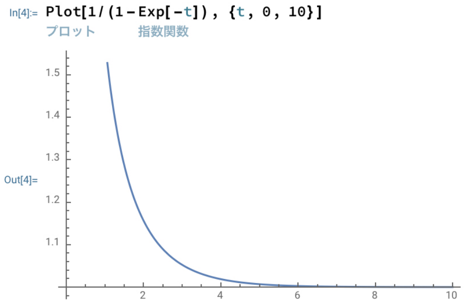
□

例 $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x>1$ の場合, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = t + c$, $\log x - \log(x-1) = t + c$,

$\log \frac{x}{x-1} = t + c$, $\frac{x}{x-1} = e^{t+c}$, $x = e^{t+c} x - e^{t+c}$,

$(e^{t+c} - 1) x = e^{t+c}$, $x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c}-1} = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}$.

$c=0$ の場合 →



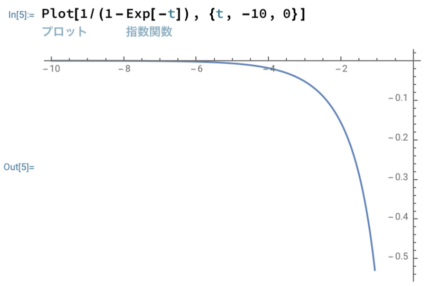
解 $x(t) = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}$ $(t+c>0)$ が求まった. □

例 $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$ の $x<0$ の場合, $\int \left(-\frac{1}{-x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = t + c$, $\log(-x) - \log(1-x) = t + c$

$\log \frac{-x}{1-x} = t + c$, $\frac{-x}{1-x} = e^{t+c}$, $-x = e^{t+c} - e^{t+c} x$

$(e^{t+c} - 1) x = e^{t+c}$, $x = \frac{e^{t+c}}{e^{t+c}-1} = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}$.

$c=0$ の場合 →



解 $x(t) = \frac{1}{1-e^{-(t+c)}}$ $(t+c<0)$ が求まった. □

例 $x(t) \overset{(**)}{=} \frac{1}{1+Ce^{-t}}$ (Cは定数) が $\frac{dx}{dt} \overset{(*)}{=} x(1-x)$ の解であることを示し, $x_0 \neq 0$ のとき, $x(0) = x_0$ をみたす解を求めよう. (**) のとき,

$\dot{x}(t) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}$, $x(t)(1-x(t)) = \frac{1}{1+Ce^{-t}}\left(1 - \frac{1}{1+Ce^{-t}}\right) = \frac{Ce^{-t}}{(1+Ce^{-t})^2}$, $\dot{x}(t) = x(t)(1-x(t))$.

$x(0) = \frac{1}{1+C} = x_0$, $1 = x_0 + x_0 C$, $C = x_0^{-1} - 1$

(*) の $x(0) = x_0 \neq 0$ をみたす解は, $x(t) = \frac{1}{1+(x_0^{-1}-1)e^{-t}}$. □

注 $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^{-1} = \infty$ には $x(t) = 0$ という定数解が対応している. □

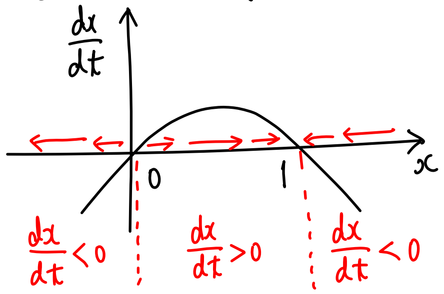
$\boxed{\text{ベクトル場の図}}$

$\boxed{\text{logistic 方程式}}$ (*) $\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)$ (t は時間)

x軸上の x の位置に $x(1-x)$ が正なら右向きの，負なら左向きの長さがその絶対値のベクトル(矢線)を描く，$\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)$ が正ならば x は時間とともに増加し，負ならば減少する。

$x(1-x)$ の正負

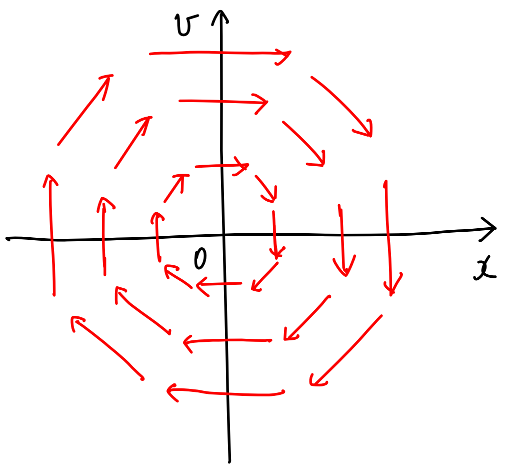
x		0		1	
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

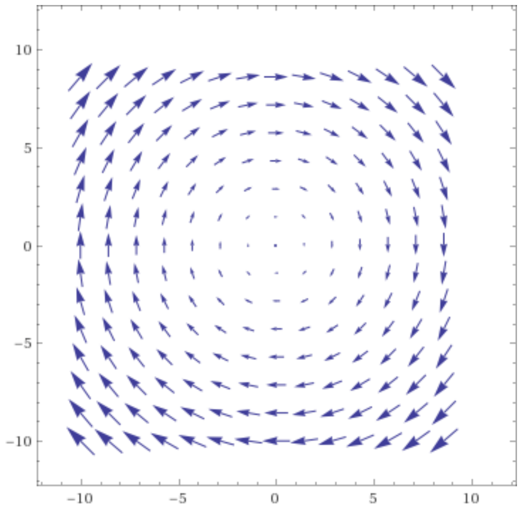


(*) をみたす $x=x(t)$ は $0<x<1$ のとき時間とともに増加し，$x<0$ または $1<x$ で減少する。

$\boxed{\text{調和振動子}}$ (☆) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -x$. これは $v = \dfrac{dx}{dt}$ とおくと，$\dfrac{d}{dx}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix}$ と書き直される。

xv 平面上の点 (x, v) にベクトル $\begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix}$ を矢線で描く。





plot a vector field を WolframAlpha.com で

xv 平面上で (☆) のとき $(x, v) = \left(x(t), \dfrac{dx(t)}{dt}\right)$ は矢印の向きに矢線に沿って動いて行く。

そのような (x, v) は原点の回りを時計と同じ向きに回転しそうなことが図よりわかる。

(実際にそうなる。)

以上のようにベクトル場の図を描けば，微分方程式を解かなくても，微分方程式の解のだいたいの挙動がわかってしまう。

$\boxed{\text{同次方程式}}$ (*) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

$\boxed{\text{解法}}$ $y = \dfrac{x}{t}$ に変数変換する．そのとき，$x = ty$ なので

$$(*) \Longleftrightarrow f(y) = \frac{dx}{dt} = y + t\frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dt} \underset{(**)}{=} \frac{f(y)-y}{t}$$ ← これは変数分離形．

(**) は以下のように解ける；

$$\int \frac{dy}{f(y)-y} = \int \frac{dt}{t} + c = \log|t| + c, \quad t = \pm e^{-c + \int \frac{dy}{f(y)-y}}$$ ← (☆)

(☆) の逆関数を $y(t)$ と書くとき，(*) の解は $x(t) = ty(t)$ と表わされる． □

$\boxed{\text{例}}$ (*) $\dfrac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$ $(t>0)$ を解こう．$x = ty$ を代入すると，

$$e^y + y = y + t\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t}, \quad \int e^{-y}\,dy = \int \frac{dt}{t} + c, \quad -e^{-y} = \log t + c$$

$$e^{-\frac{x}{t}} = -\log t - c, \quad -\frac{x}{t} = \log(-\log t - c), \quad x = -t\log(-\log t - c) \quad (0 < t < e^{-c})$$

これで解 $x(t) = -t\log(-\log t - c)$ が求まった．

(確認 $\dot{x}(t) = -\log(-\log t - c) + \dfrac{-t\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)}{-\log t - c} = -\log(-\log t - c) + \dfrac{1}{-\log t - c}$

$e^{\frac{x(t)}{t}} + \dfrac{x(t)}{t} = \dfrac{1}{-\log t - c} - \log(-\log t - c)$ ← 等しい OK.) □

$\boxed{\text{同次方程式に変換できる場合}}$ (＊) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+p}{cx+dy+q}\right)$, $(c,d) \neq (0,0)$.

$\boxed{\text{解法}}$ ① $p=q=0$ ならば

$$(＊) \iff \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)}\right)$$

で(＊)は同次方程式になる。

② $ad-bc=0$ のとき, a, b を $a=kc$, $b=kd$ と表わせるので $u = cx+dy+q$ とおくと,

$$(＊) \iff \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(cx+dy)+p}{cx+dy+q}\right) = f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right)$$

であり

$$\frac{du}{dx} = c + d\frac{dy}{dx} = c + d f\left(\frac{k(u-q)+p}{u}\right) \quad \leftarrow \text{これは変数分離形.}$$

③ $ad-bc \neq 0$ のとき, $\begin{cases} a\xi + b\eta = p \\ c\xi + d\eta = q \end{cases}$ をみたす ξ, η が一意に存在する. そのとき, $\begin{cases} X = x+\xi \\ Y = y+\eta \end{cases}$

とおくと, $\begin{cases} aX+bY = ax+by+p \\ cX+dY = cx+dy+q \end{cases}$ となるので,

①の場合

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right) = f\left(\frac{a+b(Y/X)}{c+d(Y/X)}\right). \quad \leftarrow \text{同次方程式.}$$

□

これが重要　　分子分母をdでわればd=1にできる

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{dy}{dx} \overset{(＊)}{=} \dfrac{ax+by+p}{cx+dy+q}$ $(ad-bc \neq 0,\ c=-b,\ d=1$ と仮定$)$ を解いてみよう.

$\begin{cases} a\xi + b\eta = p \\ c\xi + d\eta = q \end{cases}$ をみたす ξ, η をとり, $\begin{cases} X = x+\xi \\ Y = y+\eta \end{cases}$ とおくと, $(＊) \iff \dfrac{dY}{dX} \overset{(＊＊)}{=} \dfrac{a+b(Y/X)}{c+b(Y/X)}$.

$u = \dfrac{Y}{X}$ とおくと, $Y = uX$ なので, $X\dfrac{du}{dX} + u = \dfrac{a+bu}{c+du}$. $X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{a+(b-c)u-du^2}{c+du}$.

ここまで $c=-b$, $d=1$ を使っていない.

ここで $c=-b$, $d=1$ を使うと, $X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{a+2bu-u^2}{-b+u} = -2\dfrac{a+2bu-u^2}{\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}(a+2bu-u^2)}_{=2b-2u=-2(-b+u)}}$.

$$\int \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a+2bu-u^2)}{a+2bu-u^2}\,du = -2\int\frac{dX}{X} + \gamma \quad \leftarrow \text{積分定数}$$

$$\log|a+2bu-u^2| = -2\log|X| + \gamma = \log|e^{\gamma}X^{-2}|$$

$a+2bu-u^2 = \pm e^{\gamma}X^{-2}$. $C = \pm e^{\gamma}$ とおくと, $(a-2bu-u^2)X^2 = C$.

$u = Y/X$ を代入すると, $aX^2 + 2bXY - Y^2 = C$.

$Y^2 - 2bXY - aX^2 + C = 0$. $(Y-bX)^2 - (a+b^2)X^2 + C = 0$. $\boxed{Y = bX \pm \sqrt{(a+b^2)X^2 - C}}$.

$X = x+\xi$, $Y = y+\eta$ を代入すると

$$\boxed{y = -\eta + b(x+\xi) \pm \sqrt{(a+b^2)(x+\xi)^2 - C}}.$$

これが解.

$p=q=0$ の場合 $\nearrow$

```
In[1]:= ode3 = {y'[x] == (a x + b y[x]) / (-b x + y[x])}
Out[1]= {y'[x] == (a x + b y[x])/(-b x + y[x])}
In[2]:= DSolve[ode3, y[x], x]
        微分方程式を解く
Out[2]= {{y[x] -> b x - Sqrt[-E^(2 C[1]) + a x^2 + b^2 x^2]}, {y[x] -> b x + Sqrt[-E^(2 C[1]) + a x^2 + b^2 x^2]}}
```

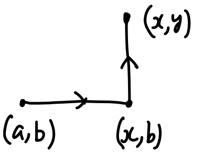
□

完全微分方程式　$q_x(x,y)=p_y(x,y)$ のとき、← 可積分条件と呼ばれる.

(*)　$df(x,y)=p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy$　（これは $f_x=p,\ f_y=q$ と同値）

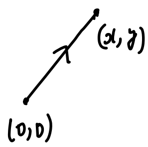
をみたす函数 $f(x,y)$ を求めよ.

解法例1　$f(x,y)=\int_a^x p(s,b)\,ds+\int_b^y q(x,t)\,dt$.



確認
$$\begin{cases} f_x(x,y)=p(x,b)+\int_b^y q_x(x,t)\,dt=p(x,b)+\int_b^y p_y(x,t)\,dt=p(x,b)+\big[p(x,t)\big]_{t=b}^{t=y}=p(x,y), \\ f_y(x,y)=q(x,y). \end{cases}$$
OK. □

解法例2　$f(x,y)=\int_0^1\big(p(xt,yt)\,x+q(xt,yt)\,y\big)\,dt$



確認
$$f_x(x,y)=\int_0^1\big(p(xt,yt)+p_x(xt,yt)\,xt+q_x(xt,yt)\,yt\big)\,dt$$
↓ $q_x=p_y$
$$=\int_0^1\big(p(xt,yt)+p_x(xt,yt)\,xt+p_y(xt,yt)\,yt\big)\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\big(p(xt,yt)\,t\big)\,dt=\big[p(xt,yt)\,t\big]_{t=0}^{t=1}=p(x,y).$$

同様にして, $f_y(x,y)=q(x,y)$.　OK. □

注　$p\,dx+q\,dy$ が可積分条件をみたしていないとき, うまく $\lambda=\lambda(x,y)$ をみつけると $\lambda p\,dx+\lambda q\,dy$ が可積分条件をみたすことがある. そのとき, λ を積分因子と呼ぶ. 詳しくは説明しない.

注意　$f_x=p,\ f_y=q$ のとき, $p_y=f_{xy}=f_{yx}=q_x$.　$df=p\,dx+q\,dy$ をみたす f が存在するためには $p_y=q_x$ という可積分条件が必要である. 以上の議論は一般の微分形式に拡張される. □

例　$df=2xy\,dx+(x^2+\cos y)\,dy$ をみたす $f=f(x,y)$ を求めよう.　$p=2xy,\ q=x^2+\cos y$ のとき, $p_y=2x=q_x$ なので可積分条件をみたしている.

$$f(x,y)=\int_0^x 2s0\,ds+\int_0^y(x^2+\cos t)\,dt=x^2y+\sin y.$$

確認 $\begin{cases} f_x=2xy, \\ f_y=x^2+\cos y. \end{cases}$ OK □

例　$df=(x^2-y)\,dx+(y^2-x)\,dy$ をみたす $f=f(x,y)$ を求めよう.　$(x^2-y)_y=-1=(y^2-x)_x$ なので可積分条件をみたしている.

$$f(x,y)=\int_0^x(s^2-0)\,ds+\int_0^y(t^2-x)\,dt=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-xy$$

確認 $\begin{cases} f_x=x^2-y, \\ f_y=-x+y^2. \end{cases}$ OK □

例　$df=\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ をみたす $f=f(x,y)$ を求めよう. ← これはおもしろい例.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
なので可積分条件をみたす.

$$f(x,y)=\int_0^x\frac{-0}{s^2+0^2}\,ds+\int_0^y\frac{x}{x^2+t^2}\,dt\underset{t=xu}{=}\int_0^{y/x}\frac{du}{1+u^2}=\arctan\frac{y}{x}.$$
← 多価函数とみなされる.

確認　$f_x=\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$,　$f_y=\frac{1/x}{1+(y/x)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$.　OK □

$\boxed{\text{Riccati方程式}}$ (リッカティ) (∗) $u'(x)+a(x)u(x)^2+b(x)u+c(x)=0$ ($a(x)$は0でない函数)、以下, $\partial=\frac{\partial}{\partial x}$.

$\boxed{\text{解法}}$ $u(x)=\frac{1}{a(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ とおくと, $\psi(x)$に関する2階の線形常微分方程式

$$\left(\partial^2+\left(b(x)-\frac{a'(x)}{a(x)}\right)\partial+a(x)c(x)\right)\psi(x)=0$$

に帰着する. 以下はそのことの確認: $u=\frac{1}{a}\frac{\psi'}{\psi}$ のとき,

$u'=-\frac{a'}{a^2}\frac{\psi'}{\psi}+\frac{1}{a}\frac{\psi''}{\psi}-\frac{1}{a}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2$, $au^2+bu+c=\frac{1}{a}\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2+\frac{b}{a}\frac{\psi'}{\psi}+c$ なので,

$$u'+au^2+bu+c=\frac{1}{a\psi}\left(\psi''+\left(b-\frac{a'}{a}\right)\psi'+ac\psi\right).$$

□

$\boxed{\text{例}}$ $\alpha\neq\beta$が定数のときの $u'+(u-\alpha)(u-\beta)=0$ を解こう. $u=\frac{\psi'}{\psi}$ とおいて,

$$\psi''-(\alpha+\beta)\psi'+\alpha\beta\psi=(\partial-\alpha)(\partial-\beta)\psi=0$$

を解けばよい. これの解は $\psi(x)=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}$ なので, $u(x)=\frac{a\alpha e^{\alpha x}+b\beta e^{\beta x}}{ae^{\alpha x}+be^{\beta x}}$.

□

$\boxed{\text{例}}$ $\alpha\neq\beta$が定数のときの $u'+\frac{1}{x}(u-\alpha)(u-\beta)=0$ を解こう. $u=x\frac{\psi'}{\psi}$ とおくと,

$$\psi''-\frac{\alpha+\beta-1}{x}\psi'+\frac{\alpha\beta}{x^2}\psi=\left(\partial-\frac{\beta-1}{x}\right)\left(\partial-\frac{\alpha}{x}\right)\psi=\left(\partial-\frac{\alpha-1}{x}\right)\left(\partial-\frac{\beta}{x}\right)\psi=0.$$

これの解は $\psi(x)=ax^\alpha+bx^\beta$ なので $u(x)=x\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{a\alpha x^\alpha+b\beta x^\beta}{ax^\alpha+bx^\beta}$.

□

$\boxed{\text{例}}$ $u'(x)-3u(x)^2+\frac{2}{x^2}=0$ を解こう. $u=-\frac{1}{3}\frac{\psi'}{\psi}$ とおくと, $\psi''=\frac{6}{x^2}\psi$ なので $\psi(x)=ax^3+bx^{-2}$,

$$u(x)=-\frac{1}{3}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=-\frac{1}{3}\frac{3ax^2-2bx^{-3}}{ax^3+bx^{-2}}.$$

□

$\boxed{\text{Riccati方程式の理論的背景}}$ $u = \dfrac{1}{a}\dfrac{\psi'}{\psi}$ という変換の出所

$$(*) \quad u' + Au^2 + Bu + C = 0. \qquad (u=u(x),\ A=A(x),\ B=B(x),\ C=C(x))$$

$u = \dfrac{1}{A}v$ とおくと、

$$u' + Au^2 + Bu + C = \frac{1}{A}v' - \frac{A'}{A^2}v + \frac{1}{A}v^2 + \frac{B}{A}v + C = \frac{1}{A}\left(v' + v^2 + \left(B - \frac{A'}{A}\right)v + AC\right)$$

なので、$u = \dfrac{1}{A}v$, $b = B - \dfrac{A'}{A}$, $c = AC$ とおくと、(*) は次の (☆) に帰着する：

$$(☆) \quad v' + v^2 + bv + c = 0.$$

ここが"$a=1$"となっている。

さらに、$v = \dfrac{\psi'}{\psi}$ とおくと、

$$v' + v^2 + bv + c = \frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \frac{b\psi'}{\psi} + \frac{c\psi}{\psi} = \frac{1}{\psi}(\psi'' + b\psi' + c\psi).$$

キャンセル

ゆえに、$v = \dfrac{\psi'}{\psi}$ とおくと、(☆) は次の (**) に帰着する：

$$(**) \quad \psi'' + b\psi' + c\psi = (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0.$$

ここまでは本質的に1つ前の資料で説明した。

$\boxed{\text{注意}}$
$$\begin{cases} v = \dfrac{\psi'}{\psi} \iff \psi' - v\psi = (\partial - v)\psi = 0. \\ (**) \quad (\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0. \end{cases}$$

この2つの線形常微分方程式のあいだの関係について考えてみる。

$\boxed{\partial^2 + b\partial + c \text{ を } \partial - v \text{ で右から割ってみる！}}$

$$\begin{array}{rl} \text{右}\backslash\text{左} & \partial + (v+b) \\ \hline \partial - v \,\big) & \partial^2 + b\partial + c \\ & \partial^2 - v\partial - v' \\ \hline & (v+b)\partial + v' + c \\ & (v+b)\partial - v^2 - bv \\ \hline \text{余り} \rightarrow & v' + v^2 + bv + c \end{array}$$

$$\partial \circ (\partial - v) = \partial^2 - \overbrace{\partial \circ v}^{v\partial + v'} = \partial^2 - v\partial - v'$$

$$(v+b)(\partial - v) = (v+b)\partial - v^2 - bv$$

Riccati方程式の形が出て来た！

すなわち、$\partial^2 + b\partial + c \overset{(*)}{=} (\partial + (v+b))(\partial - v) + v' + v^2 + bv + c.$ ← 余り

Ricatti方程式は余りとして出て来る！

$v' + v^2 + bv + c = 0$ ならば $(\partial - v)\psi = 0$ の解 ψ は $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ をみたす。
逆に ψ が $(\partial^2 + b\partial + c)\psi = 0$ の0でない解ならば ψ は $v = \psi'/\psi$ について $(\partial - v)\psi = 0$ をみたすので、(*) の両辺を ψ に作用させることによって、$(v' + v^2 + bv + c)\psi = 0$ すなわち $v' + v^2 + bv + c = 0$ を得る。

$\boxed{\overset{\text{クレーロー}}{\text{Clairaut}}\text{方程式}}$ (*) $y = xy' - f(y')$ $(y = y(x))$

$\boxed{\text{解法}}$ (*)の両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - f'(y')y''$ すなわち $y''(x - f'(y')) = 0$.

<u>$y''=0$のとき</u> y'は定数となるので, $y' = p = $(定数) とおくと, $y = xp - f(p)$. これは(*)の解になっている.

<u>$x = f'(y')$のとき</u> $f'(y') = x$ を y' について解いた結果を $y' = p(x)$ と書くと, $y = xp(x) - f(p(x))$.
これも(*)の解になっている. (確認: $f'(p(x)) = x$, $y = xp(x) - f(p(x))$ のとき,
$y' = p(x) + xp'(x) - \underbrace{f'(p(x))}_{=x}p'(x) = p(x)$ なので, $y = xy' - f(y')$. OK.) □

$\boxed{\text{注意}}$ Clairaut方程式は解析力学や熱統計力学に出て来る<u>$\overset{\text{ルジャンドル}}{\text{Legendre}}$変換</u>と関係がある. □

$\boxed{\text{注意}}$ $y''=0$のときの解 $y = xa - f(a)$ は $x = f'(y')$ のときの解 $y = xp(x) - f(p(x))$ $(f'(p(x)) = x)$ の接線になっている. $y = xp(x) - f(p(x))$, $f'(p(x)) = x$ のとき, $y' = p(x)$ なので, $p(x_0) = a$ となる x_0 をとると, $x = x_0$ で接する接線は $y = a(x - x_0) + x_0\underbrace{p(x_0)}_{=a} - f(\underbrace{p(x_0)}_{a}) = ax - f(a)$ になる. □

$\boxed{\text{例}}$ $f(p) = \frac{1}{2}p^2 - \alpha$ (αは定数)のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - \frac{1}{2}(y')^2 + \alpha$ の解を求めよう.
両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y'y''$ すなわち $y''(x - y') = 0$.
<u>$y''=0$のとき</u> 定数 p を y' に代入した $y = xp - \frac{1}{2}p^2 + \alpha$ が解になる.
<u>$y' = x$のとき</u> x を y' に代入した $y = x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \alpha = \frac{1}{2}x^2 + \alpha$ が解になる. □

$\boxed{\text{例}}$ $f(p) = p\log p - p - \alpha$ のとき, $y = xy' - f(y') = xy' - y'\log y' + y' + \alpha$ の解を求めよう.
両辺を微分すると, $y' = y' + xy'' - y''\log y' - y'' + y''$ すなわち $y''(x - \log y') = 0$.
<u>$y''=0$のとき</u> $y = xp - p\log p + p + \alpha$ が解になる.
<u>$x = \log y'$のとき</u> $y' = e^x$ を代入した $y = xe^x - e^x x + e^x + \alpha = e^x + \alpha$ が解になる. □