資料06-3

Galois拡大について

$\mathbb{C}$を標数0の代数閉体におきかえても同様

以下, $K, L, M, \ldots$ は$\mathbb{C}$の部分体であると仮定する. ← 簡単のための仮定

(㊟ 以下の内容は標数0の場合にも一般的に通用する.)

L/K は有限次拡大であると仮定する.

LのK上でのベクトル空間としての基底を$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$と書くと,

各α_iはK上代数的でかつ $L = K\alpha_1 \oplus \cdots \oplus K\alpha_n = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ が成立しているので,

$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \ni {}^\exists\theta$
$= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})(\theta)$
$= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \theta)$ 1個へらせる.

単拡大定理より, $L = K(\theta)$, $\theta \in L$と書ける. このとき, 次のように定める.

$\boxed{\text{定義}}$ L/Kが(有限次)Galois拡大であるとは以下の同値な条件のどれかが成立していることだと定める:

(1) LのK上での任意の共役体はLに等しい.

(K上での任意の体の同型 $\varphi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ について $\varphi(L) = L$.) ← $\varphi(L)$をLのK上での共役体と呼ぶ

㊟ φは単射だが全射とは限らない.

($\varphi: L \to \mathbb{C}$ は環の準同型(体の準同型, 単射になる)で $\varphi(a) = a$ ($a \in K$)をみたすもの)

体の同型 $\varphi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ の定義

(2) θのK上での任意の共役元はLに含まれる.

(θのK上での最小多項式のすべての根がLに含まれる.)

θのK上でのすべての共役元の定義

□

さらに次の条件も(1), (2)と同値である:

(3) ある$F(x) \in K[x]$が存在して, Lは$F(x)$のK上での最小分解体になる.

(LはKに$F(x)$のすべての根を付け加えてできる体になる.)

$F(x)$のK上での最小分解体の定義

同値性を証明する.

θのK上での最小多項式を $F_\theta(x)\in K[x]$ と書く.

(1) ⇒ (2)の証明 条件(1)を仮定し, $\eta\in\mathbb{C}$ は θのK上での任意の共役元であるとする ($F_\theta(\eta)=0$).

このとき,
$$\begin{array}{ccccccc} L=K(\theta) & \xrightarrow{\sim} & K[x]/(F_\theta(x)) & \xrightarrow{\sim} & K(\eta) & \hookrightarrow & \mathbb{C} \\ f(\theta) & \longmapsto & \overline{f(x)} & \longmapsto & f(\eta) & \mapsto & f(\eta) \end{array}$$
の合成で体同型 $\varphi: L\hookrightarrow\mathbb{C}$ が定まる.

条件(1)より, $\eta=\varphi(\theta)\in\varphi(L)\overset{(1)}{=}L$ が得られ, 条件(2)が示された.

(2) ⇒ (3)の証明 条件(2)を仮定し, $F_\theta(x)$のK上での最小分解体をMと書く.

$F_\theta(x)$の根全体を $\theta_1,\dots,\theta_n$ と書くと, $M=K(\theta_1,\dots,\theta_n)$.

$L=K(\theta)\subset M$ は自明. 条件(2)より, $\theta_1,\dots,\theta_n\in L$ なので $M=K(\theta_1,\dots,\theta_n)\subset L$.

ゆえに, $L=M$ なので, 条件(3)が示された.

(3) ⇒ (1)の証明 条件(3)を仮定する. すなわち, Lはある $F(x)\in K[x]$ のK上での最小分解体であるとする.

$F(x)$の根全体を $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ と書くと, $L=K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$、K上での体同型 $\varphi: L\hookrightarrow\mathbb{C}$ を任意にとる.

$F(\varphi(\alpha_i))=\varphi(F(\alpha_i))=\varphi(0)=0$ なので $\varphi(\alpha_i)=\alpha_{k_i}$ と書ける.

任意に $\beta\in L$ をとる, $\beta=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $f(x_1,\dots,x_n)\in K(x_1,\dots,x_n)$ と書ける.

このとき, $\varphi(\beta)=f(\varphi(\alpha_1),\dots,\varphi(\alpha_n))=f(\alpha_{k_1},\dots,\alpha_{k_n})\in K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=L$. ゆえに, $\varphi(L)\subset L$.

L/Kは有限次拡大と仮定していたので, LはK上のベクトル空間として有限次元である

K上のベクトル空間として, $\varphi(L)$ とLは同型であり, K上同じ次元になる. ゆえに, $\varphi(L)=L$. □

以下において，(1),(2),(3) の同値性と次の定理をみとめて使ってよい．

$\boxed{\text{定理}}$ 以上の記号のもとで，L/K は有限次 Galois 拡大であるとし，

θ の K 上での最小多項式の根全体の集合

$\theta \in L$ で $L = K(\theta)$ をみたすものを取るとき，次の写像は全単射になる：

$$\mathrm{Gal}(L/K) \underset{\text{定義}}{=} \{K\text{上での体}L\text{の自己同型全体}\} \longrightarrow \{\theta\text{の}K\text{上での共役元全体}\},\quad \sigma \mapsto \sigma(\theta).$$

このことから，$\underbrace{|\mathrm{Gal}(L/K)|}_{\text{Galois群}} = \underbrace{(\theta\text{の}K\text{上での共役元の個数})}_{\text{方程式の解}} = \underbrace{[L:K]}_{\text{体の拡大}}$ が得られる．□

最小多項式の次数

$\boxed{\text{問題6-1}}$ K, L は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，L/K は有限次拡大であるとする．

このとき，L/K が Galois 拡大であることと次の条件 (4) が同値であることを示せ．

(4) 任意の $\alpha \in L$ について，α の K 上での任意の共役元が L に含まれる．□

注 (4) は (2) より強い：(4) ⇨ (2) は自明．(1),(2),(3) ⇨ (4) を示せ．

問題6-2 M/K は体の拡大であるとし，L_1, L_2 はその中間体であるとする.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ L_1 \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & L_2 \arrow[ul, phantom, "\supset" sloped] \\ & K \arrow[ul, phantom, "\supset" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & \end{tikzcd}$$

このとき，L_1/K, L_2/K が有限次拡大ならば $L_1 \cap L_2/K$ も L_1L_2/K も有限次拡大になり，

$$[L_1 \cap L_2 : K] \leqq \min\{[L_1:K], [L_2:K]\}, \quad [L_1L_2 : K] \leqq [L_1:K][L_2:K]$$

となることを示せ.

ここで L_1L_2 は L_1 と L_2 の両方を含む M の最小の部分体を表す(L_1L_2 は合成体). □

$L_1 \cap L_2$ も K の拡大体

$L_1L_2 =$ (L_1 と L_2 を含む M の最小の部分体)

問題6-3 K, L_1, L_2 は $\mathbb{C}$ の部分体であるとする.

L_1/K と L_2/K が有限次Galois拡大ならば

$L_1 \cap L_2/K$ と L_1L_2/K も有限次Galois拡大になることを示せ.

ここで L_1L_2 は L_1 と L_2 の両方を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体を表す. □

問題6-4 以下の体の拡大がGalois拡大であるかどうかを判定せよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$, (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})/\mathbb{Q}$,

(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$, (5) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$, (6) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}$,

(7) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, (8) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

これがもっとも易しいはず