$\boxed{\text{問題 1-5}}$ $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $L = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ とおく。

L が $\mathbb{Q}, \alpha$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを示せ。 □

(1) L は $\mathbb{R}$ の部分体であり、$\mathbb{Q}$ と α を含む

(2) M を $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}, \alpha$ を含むものとすると $L \subset M$.

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) L が $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}, \alpha$ を含むことを示そう。

$\mathbb{Q} \subset L$ と $\alpha \in L$ は明らか。

L が $\mathbb{R}$ の部分体であることを示すためには、0 と 1 を含み、$+, -, \times$ で閉じていて、任意の $\beta \in L$ について $\beta \neq 0 \Rightarrow \beta^{-1} \in L$ となることを示せばよい。

$0 \in L$, $1 \in L$ および L が加法と減法で閉じていることは明らか。

L が乗法で閉じていることを示そう。$\beta, \gamma \in L$ を任意にとる。このとき、

$$\beta = a + b\alpha + c\alpha^2, \quad \gamma = a' + b'\alpha + c'\alpha^2 \quad (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q})$$

と書ける。そして、

$$\beta\gamma = (aa' + 2bc' + 2cb') + (ab' + ba' + 2cc')\alpha + (ac' + bb' + ca')\alpha^2 \in L.$$

これで L が乗法で閉じていることがわかった。

$\beta \in L$, $\beta \neq 0$ と仮定する. $\beta = a + b\alpha + c\alpha^2$ $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ と書ける.

$\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{a+b\alpha+c\alpha^2} \in L$ となることを示したい.

公式 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ を

$x = a$, $y = b\alpha$, $z = c\alpha^2$ に適用すると,

これを d と書く

$$\beta\underbrace{(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}_{\in L} = \overbrace{a^3+2b^3+4c^3-6abc}^{d} \in \mathbb{Q}.$$

$a'+b'\alpha+c'\alpha^2$ $(a', b', c' \in \mathbb{Q})$ と書ける

もしもこれの右辺が0でなければ両辺を $\beta \times$ (右辺) で割ることによって,

$$\frac{1}{\beta} = \frac{a'+b'\alpha+c'\alpha^2}{d} = \frac{a'}{d} + \frac{b'}{d}\alpha + \frac{c'}{d}\alpha^2 \in L.$$

(右辺) $= d \neq 0$ を示すためには, $\beta \neq 0$ と仮定していたので $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \neq 0$ を示せばよい. $x, y, z \in \mathbb{R}$ で $\beta \neq 0$ より, x, y, z のどれかは0でないので,

$x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$ のどれかは成立しているので,

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right) > 0.$$

示すべきことが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$