$\boxed{\text{問題 3-5}}$ $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(Lが体Kの拡大体のとき,
$[L:K] = [L/K] = \dim_K L$
と書き, これを L/K の拡大次数と呼ぶ.) □

$\boxed{\text{ヒント}}$ α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式は x^3-7 になる. $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. □

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}$ は $x^3-7=0$ の解でかつ, x^3-7 は $\mathbb{Q}$ 上既約なので, x^3-7 は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式になる (問題 2-4 の解答例を見よ). ゆえに, 体の同型 $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ $(f(\alpha) \leftrightarrow \overline{f(x)} = (f(x) \bmod x^3-7))$ を得る. $\mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間としての基底として, $1, x, x^2$ の像をとれる. 特に, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(x^3-7) = 3$. ゆえに, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = 3$.

$\mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ の中で $\bar{x}^3 = 7$ なので $\bar{x}$ の3乗以上の項は $\bar{x}$ の2乗以下の項の和で書ける.

(2) $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ であることを示そう。(1)と同様にして、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ なので、$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ となる。もしも $\omega \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ならば $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ も1の原始3乗根を含むことになって矛盾する。ゆえに、$\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ である。

(注 $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$)

ゆえに、$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha)(\omega) \supsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$。すなわち $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)] > 1$。

ω は $x^2+x+1=0$ の解になっているので、$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)] \leqq 2$。

したがって、$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)] = 2$。

$\omega^2 = -\omega - 1$ なので ω の2乗以上の項は ω の1乗以下の項の $\mathbb{Q}$ 上での一次結合で書ける。

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2\cdot 3 = 6$。 □

注意 以上の議論を見直せば、

$\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上のベクトル空間としての基底として $1, \omega$ がとれ、

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の基底として $1, \alpha, \alpha^2$ がとれ、

$\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の基底として、$1, \alpha, \alpha^2$, $\omega, \omega\alpha, \omega\alpha^2$ がとれることがわかる。

□