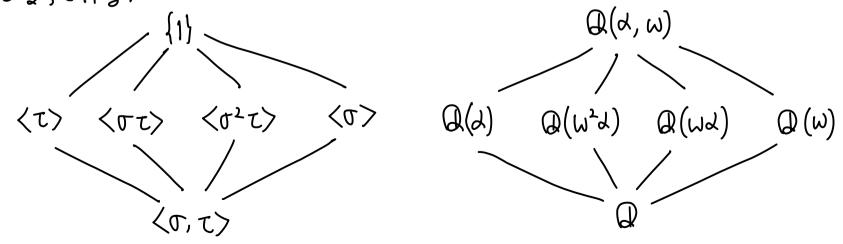
## 問題7-1] $F(x) = x^3 - 3$ , $d = \sqrt[3]{3}$ , $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ とかく、以下を示せ、

- (1) F(x) は dの Q 上での最小多項式である。
- (2) F(x)の Q上での最小分解体は Q(x) に等しくない。
- (3) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x,ω) = Q(d,√-3)に等Lい、以下, [Q(d,ω):Q]=6を認めて使ってよい, (問題3-5,4-2の解答例も参照)
- (4)  $Q(d, \omega)$ の体の自己同型 T, T を 次のように定義できる:  $T(f(d)) = \omega d (f(x) \in Q(\omega)[x]), T(g(\omega)) = g(\omega^2) (g(x) \in Q(\alpha)[x]).$
- (5)  $God(Q(A, W)/Q) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_3 \cong S_3$  と 特に(b)をやってほしい。
- (b) Gal(Q(d,w)/Q)の部分群全体とQ(d,w)/Qの中間体のGalois対応は以下のようになっている:



問題7-1解答例  $(F(x) = x^3 - 3, \alpha = \sqrt{3}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \omega^3 = 1, \omega^3 + \omega + 1 = 0.)$ 

(1) 3+1,3|0,3|0,3|(-3),3<sup>3</sup>(-3)とEisensteinの判定法よりF(x)=x³-3は B上で既約である。

F(x)はQ上で既分でF(d)=Dをみたすので、dのQ上での最小多項式である。

- (2)  $Q(A) = \{\alpha + bd + Cd^2 | \alpha, b, c \in Q\} \subset \mathbb{R}$  である、  $\left(\frac{Q(A) \cong Q[A]}{f(A)} \leftrightarrow \frac{F(A)}{f(A)} \leftrightarrow \frac{F(A)}{f(A)} \right)$   $F(A) = (d-d)(d-wd)(d-w^2d)$  の  $Q \perp \tau'$  の 最小分解体は  $Q(A, wd, w^2d) + \mathbb{R}$  である、 ゆ  $\Delta C$  、  $Q(A) + Cd^2 = Q(A) + Cd^2 = Q(A)$ 
  - (3)  $d, \omega \in \mathbb{Q}(a, \omega d, \omega^{2}d) \pm 1$   $\mathbb{Q}(d, \omega) \subset \mathbb{Q}(d, \omega d, \omega^{2}d)$ .  $d \geq 2$   $d \leq 2$   $d \leq 2$   $d \leq 3$   $d \leq 3$   $d \leq 4$   $d \leq 4$  d

(4) 
$$[Q(\omega):Q]=2$$
,  $[Q(\lambda,\omega):Q]=b$   $\pm 1$ ,  $[Q(\lambda,\omega):Q(\omega)]=\frac{[Q(\lambda,\omega):Q]}{[Q(\omega):Q]}=3$ .

 $F(x) = \chi^3 - 3 \in Q(\omega)[\chi], F(\lambda) = 0, deg F(\lambda) = 3 = [Q(a, u): Q(w)]$  なので、 $F(\lambda)$  は  $Q(\omega)$ 上でのよの最小多項式である。

ゆえた,以下のようにして,Q(d,W)のQ(W)上での自己同型のも作れる:

$$Q(d, w) \cong Q(w)[x]/(f(x)) \cong Q(wd, w) = Q(d, w)$$

$$f(d) \longleftrightarrow f(wd)$$

$$f(wd)$$

$$[Q(\alpha); Q] = 3$$
,  $[Q(\alpha, \omega); Q] = 6$   $\xi'$ ,  $[Q(\alpha, \omega); Q(\alpha)] = \frac{[Q(\alpha, \omega); Q]}{[Q(\alpha); Q]} = 2$ .

 $G(x) = \chi^2 + \chi + 1$  とかくと、 $G(x) \in Q(x)[\chi]$  , G(w) = 0 ,  $\deg G(x) = 2 = [Q(x; w) : Q(w)]$  なので、G(x) は Q(x)上での Wの最小多項式である。

ゆえた,以下のようにして,Q(d,W)のQ(d)上での自己同型ても作れる:

$$Q(\lambda, \omega) \cong Q(\lambda)[\chi]/(G(\chi)) \cong Q(\lambda, \omega^2) = Q(\lambda, \omega) \quad (\omega^2 = \omega^{-1})$$

$$g(\omega) \longleftrightarrow g(\chi) \longleftrightarrow g(\chi)$$

(5) Q(d, W) は F(x)=x3-3の Q上での最小分解体なので、 Q(ペル)/Qは有限次Galois 拡大である、  $\psi \geq r$ ,  $|Gal(Q(A, \omega)/Q)| = [Q(A, \omega): Q] = 6.$ (4)の記号のもとで、の、て $\in Gal(Q(x,\omega)/Q)$ である、そして、 1(d) = d, 1(W) = W $T(\lambda) = \lambda, \quad T(\lambda) = \lambda^2$  $\sigma T(\Delta) = \omega \Delta$ ,  $\sigma T(\omega) = \omega^2$  $\mathcal{T}^2 \mathcal{I}(d) = \mathcal{W}^2 d, \quad \mathcal{T}^2 \mathcal{I}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}^2$  $T^{2}(A) = A$ ,  $T^{2}(\omega) = \omega^{4} = \omega$  $TOT(d) = W^2d$ , TOT(W) = W

ゆえた, 291はid Q(a,w)  $1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2$ は互いに異なるので、  $Gal(Q(\lambda, \omega)/Q) = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}.$  $t \leq c = c^3 = c^2 = c$ ,  $c = c^2 = c^{-1}$ , これより (てで= でって)  $Gal(Q(d, \omega)/Q) \cong D_3 \cong S_3$ 

(b)  $G = Gal(Q(d,W)/Q) = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\} (\sigma^3 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau)$  の部分群をすべて求めよう、 $1 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ \leftarrow 元の位数$ 

位数6の群日の部分群の位数はその約数1,2,3,6のどれかになる、位数1(1)しかない。

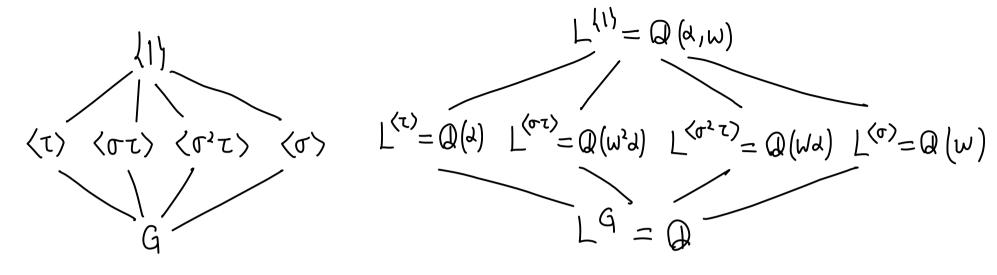
位数2 位数2の部分群は位数2の元から生成される巡回群になる、 Gの位数2の部分群全体はくひ,くので)、〈でで〉、

位数3 位数3の部分群は位数3の元から生成される巡回群になる。 Gの位数3の部分群はくの>=くの2>の1ったけ、

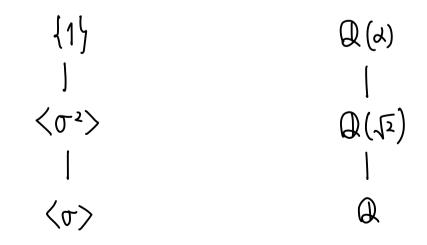
位数b Gの位数bの部分群はGそのものになる

L=Q(d,U)とかく、Gの部分群日に対応するL/Qの部分体LHを求めよう。 [L:LH] = [Gal(L/LH)|=|H|, [LH:Q] =  $\frac{LL:Q}{I_{1:1}H_1} = \frac{|G|}{I_{H_1}}$  に注意せよ、  $\underline{L^{\{1\}}} \qquad L^{\{1\}} = \{\beta \in L \mid 1(\beta) = \beta\} = L = Q(\alpha, \omega).$  $L^{\langle \tau \rangle}$   $T(A) = d + b + d \in L^{\langle \tau \rangle}$   $\zeta \circ \tau' Q(A) \subset L^{\langle \tau \rangle} \tau' = 0$  $[L^{(\tau)};Q] = \frac{|G|}{|(\tau)|} = \frac{b}{2} = 3 = [Q(\lambda);Q] \langle \zeta \rangle \quad L^{(\tau)} = Q(\lambda).$  $L^{\langle \sigma \tau \rangle}$   $\sigma \tau (\omega^2 d) = \sigma(\omega d) = \omega^2 d$   $\zeta \sigma \tau^2 Q(\omega^2 d) \subset L^{\langle \sigma \tau \rangle} \tau^2 d J$  $\left[ L^{\langle \sigma\tau \rangle} : Q \right] = \frac{|G|}{|\langle \sigma\tau \rangle|} = \frac{6}{2} = 3 = \left[ Q(\omega^2 d) : Q \right] \stackrel{\sim}{\sim} 0 \stackrel{\sim}{\sim} L^{\langle \sigma\tau \rangle} = Q(\omega^2 d)$  $\left[ L^{\langle \sigma^2 \tau \rangle} : Q \right] = \frac{|G|}{|\langle \sigma^2 \tau \rangle|} = \frac{6}{2} = 3 = \left[ Q(\omega d) : Q \right] 29 \tau' L^{\langle \sigma^2 \tau \rangle} = Q(\omega d).$  $L^{\langle\sigma\rangle}$   $\sigma(\omega) = \omega \perp U$   $Q(\omega) \subset L^{\langle\sigma\rangle} \ \tau^{\alpha} \pi^{\alpha}$  $[L^{(\sigma)};Q] = \frac{|G|}{|(\sigma)|} = \frac{6}{7} = 2 = [Q(\omega);Q] \cos z \quad L^{(\sigma)} = Q(\omega),$  $\underline{L^{G}} \quad [L^{G}:Q] = \frac{|G|}{|G|} = 1 \text{ $\zeta$ and $\zeta$} \quad L^{G} = Q.$ 

以上を図で描くら



- (1) F(x)はdのQ上での最小多項式である。 F(x)のすべての根かっ
- (2) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x)に等しい、 Q(d)にきまれる、
- (3) Q(d)の体の自己同型 σ を σ(f(d))=f(√2-√2) (f(d)∈Q(X))定義できる、
- (4)  $Gal(Q(A)/Q) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$
- (5) Gal(Q(d)/Q)の部分群全体とQ(d)/Qの中間体全体のGalais村応は以下の図のようになっている:



## 問題7-2の解答例

- $F(x) = x^4 4x^2 + 2$ ,  $d = \sqrt{2+12}$   $\forall x = 0$ ,  $d^4 = 6 + 4\sqrt{2}$   $d^4 = 6 + 4\sqrt{2$
- (1) 2|1, 2|0, 2|(-4), 2|0, 2|2, 242 と Eisensteinの判定法より, F(x)は Q上で既約である。
  - F(以)=0でもあるので、F(以)はよのQ上での最小多項式である。
- (2)  $d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$  の他に、  $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$  、  $\delta = -d$  、  $\delta = -\beta$  とかく、  $\chi^2-4\chi+\chi=0$  解は  $\chi=2\pm\sqrt{2}$  なって F(x) の根の全体は  $\{a,\beta,\gamma,\delta\}$  になる、 ゆえに F(x) の  $Q \pm \tau$  の最小分解体は  $Q(a,\beta,\gamma,\delta)=Q(a,\beta)$  になる、  $\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$  、  $d^2-2=\sqrt{2}$  より  $\beta = \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{d^2-2}{d} \in Q(a)$  、  $d^2$  た、  $Q(a) = Q(a,\beta)$  .

(3) 上で同様にして、 
$$d = \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta} = \frac{2-\beta^2}{\beta} \in Q(\beta)$$
 なので  $Q(\beta) = Q(\lambda, \beta)$ . ゆえに、 $Q(\beta) = Q(\lambda)$ .  $F(\lambda)$  は  $\beta$  の  $Q$ 上での最小多項式でもある、 以下のようにして、体  $Q(\lambda)$  の  $Q$ 上での自己同型 の  $\xi$  作れる:  $Q(\lambda) \cong Q(\lambda)/(F(\lambda)) \cong Q(\beta) = Q(\lambda)$  f( $\lambda$ )  $f(\lambda) \longleftrightarrow f(\beta)$ 

(4) 
$$|Gal(Q(A)/Q)| = [Q(A):Q] = deg F(A) = 4$$
,  
 $\Gamma(A) = \beta = \frac{d^2-2}{d}$   
 $\Gamma^2(A) = \sigma(\beta) = \frac{\beta^2-2}{\beta} = \frac{-\sqrt{2}}{\beta} = -d = 1$   
 $\Gamma^3(A) = \Gamma(-A) = -\sigma(A) = -\beta = \delta$   
 $\Gamma^4(A) = \Gamma(-\beta) = -\sigma(\beta) = -(-d) = d$ ,  
(4)  $|Gal(Q(A)/Q)| = 4$ ,  
 $|Gal(Q(A)/Q)| = |Gal(Q(A)/Q)| = |Gal(Q(A$ 

 $Gal(Q(a)/Q) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$ 

$$Q(a)^{\{1\}} = \{ \eta \in Q(a) \mid 1(\eta) = \eta \} = Q(a),$$

$$\mathcal{T}^{2}(\sqrt{12}) = \mathcal{T}^{2}(d^{2}-2) = (-d)^{2}-2 = d^{2}-2 = \sqrt{2} + 1 \quad Q(\sqrt{2}) \subset Q(d)^{(\sqrt{2})} \quad z^{-} + 1$$

$$\mathcal{T}^{2}(d) = -d$$

$$[Q(a)^G: Q] = \frac{|G|}{|G|} = |L| Q(a)^G = Q,$$