$\boxed{\text{問題13-1}}$ $F(x) = x^3 - 21x + 28$ とおく、以下を示せ、　　$K = \mathbb{Q},\ n = 3$

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

(2) $F(x)$ の3つの根を α, β, γ と書き, $D = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと,

$D = 126^2$ となる.

位数3の巡回群

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を L と書くと, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_3$. □

$C_3 \cong A_3$

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に $x^3 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき,

$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 = -4a^3 - 27b^2$ となることを要領よく示してみよ. □

$\boxed{\text{問題13-2}}$ $F(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ とおく, 以下を示せ、

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

(2) $F(x)$ の3つの根を α, β, γ と書くとき, $D = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと,

$D = 9^2$ となる,

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を L と書くと, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_3$.

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に $x^3 + ax^2 + b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき,

$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 = -b(4a^3 + 27b)$ となることも示せ. □