$\boxed{\text{問題 8-1}}$ K, L は $\mathbb{C}$ の部分体であるとする。　標数0を使う。

(1) L/K が2次拡大ならば L/K は Galois 拡大であることを示せ。

(2) 2次以上の有限次拡大 L/K で L の K 上での体の自己同型が id_L しか存在しないものの例を具体的に1つ挙げよ。

LからLへの写像

$\boxed{\text{解答例}}$ K, L は $\mathbb{C}$ の部分体であると仮定する。

(1) L/K は2次拡大であると仮定し，
L の K 上のベクトル空間としての基底 $1, \theta$ をとる。
このとき，$L = K(\theta)$ でかつ $\theta^2 \in L$ は $\theta^2 = a1 + b\theta$，$a, b \in K$ と表わされる。
θ は $F(x) = x^2 - ax - b \in K[x]$ の根になり，
もう1つの根は解と係数の関係より $-\frac{b}{\theta} \in L$ と表わされる。← ポイント!
ゆえに，L は $F(x)$ の2つの根を含み，K 上での $F(x)$ の最小分解体になり，
L/K は2次の Galois 拡大になる。

$\boxed{\text{注意}}$ $\alpha = \theta - \frac{b}{2}$ とおくと $\alpha^2 = \theta^2 - b\theta + \frac{b^2}{4} = a + b\theta - b\theta + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2+4a}{4} \in K$。
$L = K(\alpha)$ となり，$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$，$\sigma(f(\alpha)) = f(-\alpha)$ $(f(x) \in K[x])$ となる。

つづき

(2) $K=\mathbb{Q}$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とおくと, $[L:K]=3$ で,

$L \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$

$$\mathrm{Aut}_K L := \{\sigma : L \to L \mid \sigma \text{ は } K \text{ 上での体の自己同型}\} = \{\mathrm{id}_L\}.$$

$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおくと, $\sqrt[3]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上での共役元の全体は $\sqrt[3]{2}$, $\omega\sqrt[3]{2}$, $\omega^2\sqrt[3]{2}$ の3つになるが, $\omega\sqrt[3]{2}$, $\omega^2\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ なので, $\sigma \in \mathrm{Aut}_K L$ について, $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$ が成立しており, $\sigma = \mathrm{id}_L$ となる. $\square$

Lの元を
そのK上での共役元にうつす.

Galois 拡大になっている拡大とそうでない拡大をノータイムで
挙げられるようになっておいてください!

定義 n 次の置換群 S_n の部分群 G が <u>推移的</u> (<u>可移的</u>, <u>transitive</u>) であるとは、任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について ある $\sigma \in G$ で $\sigma(i) = j$ をみたすものが存在することだと定める。

問題 8-2 S_3 の推移的部分群をすべて挙げよ。 $\square$

解答例 以前やったように S_3 のすべての部分群は

$$\{1\},\quad \{1, (1,2)\},\quad \{1, (1,3)\},\quad \{1, (2,3)\},\quad A_3 = \{1, (1,2,3), (1,3,2)\},\quad S_3$$

の6個である。この中で推移的なのは、A_3 と S_3 の2つだけである。

推移的であるかどうかはその部分群の作用で1を2, 3に移せるかどうかを確認すればよい。

$\{1\}$ は1を2にも3にも移せない。

$\{1, (1,2)\}$ は1を3に移せず, $\{1, (1,3)\}$ は1を2に移せず,

$\{1, (2,3)\}$ は1を2にも3にも移せない。

$\{1, (1,2,3), (1,3,2)\}$ の $(1,2,3)$ によって1を2に移せ, $(1,3,2)$ によって1を3に移せる。$\{1, (1,2,3), (1,3,2)\} \subset S_3$ なので S_3 についても同様である。 $\square$

$\boxed{\text{問題 8-3}}$ S_4の以下の11個の部分群を考える:

$H_1=\{1\}$, $H_2=\langle(1,2)\rangle$, $H_3=\langle(1,2)(3,4)\rangle$, $H_4=\langle(1,2,3)\rangle$,

$H_5=\langle(1,2,3,4)\rangle$, $H_6=\langle(1,2),(3,4)\rangle$, $H_7=\{1,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$,

$H_8=\langle(1,2),(2,3)\rangle\cong S_3$, $\underset{\cong D_4}{H_9}=\langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle$, $H_{10}=A_4$, $H_{11}=S_4$.

(1) 各々の位数を求めよ.

(2) 各々についてS_4の正規部分群かどうか判定せよ.

(3) 各々について推移的であるかどうか判定せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $|H_1|=1$, $|H_2|=|H_3|=2$, $|H_4|=3$, $\overset{C_4 \cong}{|H_5|}=\overset{C_2\times C_2 \cong}{|H_6|}=\overset{C_2\times C_2 \cong}{|H_7|}=4$,

$|H_8|=6$, $|H_9|=8$, $|H_{10}|=12$, $|H_{11}|=24$.

(2) 以前S_4の正規部分群は $H_1=\{1\}$, $H_7=$(Kleinの四元群), $H_{10}=A_4$, $H_{11}=S_4$ の4つしかないことを示した.

(3) 推移的かどうかは1を2,3,4に移せることを確認すればよい.
推移的なのは, $H_5\cong C_4$, $H_7=$(Kleinの四元群)$\cong C_2\times C_2$, $H_9\cong D_4$, $H_{10}=A_4$, $H_{11}=S_4$ の5つ. (既約な4次式の最小分解体のGalois群はこれら5つのどれかになる.) $\square$

定理 p は素数であるとする. このとき, S_p の推移的な部分群 G で互換を1つ以上含むものは S_p 全体に一致する. $\square$

← 08-3で証明した.

問題 8-4 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ は $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式であるとし, L は f の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体であるとし, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とおく. 以下を示せ.

(1) $f(x)$ の互いに異なる根全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ と書くと, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用する.

(任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ について ある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$.)

← f の $\mathbb{Q}$ 上での既約性を使う.

(2) $n = \deg f$ が素数でかつ $f(x)$ がちょうど $n-2$ 個の実根を持つならば $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_n$ となる.

(3) $f(x) = x^5 - 16x + 2$ が $\mathbb{Q}$ 上既約で, f の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体 L について, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_5$. $\square$

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないならば $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約にならなことを示せば十分である. ($f(x)$の既約性に反する.)

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないと仮定する.

$A = \{\sigma(\alpha_1) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\}$ とおく. A は $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の作用で閉じている.

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないとすると, $|A| < n$ となる.

$g(x) = \prod_{\beta \in A} (x - \beta) = \sum_k c_k x^k$, $c_k \in L$ とおくと,

$\left(\begin{array}{c} \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \\ \sigma(c_k) = c_k \end{array} \right)$

$\Updownarrow$

任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ について $\sum_k \sigma(c_k) x^k = \prod_{\beta \in A} (x - \sigma(\beta)) = \prod_{\gamma \in A} (x - \gamma) = g(x)$

なので, $c_k \in L^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})} = \mathbb{Q}$, $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

n 次の $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ はより低次の $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ でわりきれるので, $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約ではない.

(2) $\boxed{1}$ $\mathbb{Q}$上既約な$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$の次数nは素数であり,
$f(x)$はちょうど$n-2$個の実根$\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}$を持つと仮定する.
このとき, $f(x)$はちょうど2つの虚根$\beta,\overline{\beta}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$を持つ.

$\boxed{2}$ $f(x)$の$\mathbb{Q}$上での最小分解体$L=\mathbb{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2},\beta,\overline{\beta})$には
複素共役を取る操作τが$\mathbb{Q}$上での自己同型として作用する.
ゆえに, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$は$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2},\beta,\overline{\beta}\}$の$\beta$と$\overline{\beta}$の互換$\tau$を含む.

$\boxed{3}$ $f(x)$は$\mathbb{Q}$上既約なので, (1)より, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$は$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2},\beta,\overline{\beta}\}$
に推移的に作用する.

$\boxed{4}$ nは素数なので定理を適用でき, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$が$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2},\beta,\overline{\beta}\}$
の置換全体に一致することがわかる: $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong S_n$.

(3) $f(x) = x^5 - 16x + 2$ とおく。 (Eisenstein の判定法で既約性を示せる場合はまれである。わざわざ そのように問題を作っている。)

$2 \nmid 1,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid -16,\ 2 \mid 2,\ 2^2 \nmid 2$ と Eisenstein の判定法より,

$f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である. 実関数としての $f(x)$ のグラフの形を調べよう.

$$f'(x) = 5x^4 - 16 = 5\left(x^4 - \frac{16}{5}\right) = 5\left(x + \frac{2}{5^{1/4}}\right)\left(x - \frac{2}{5^{1/4}}\right)\left(x^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

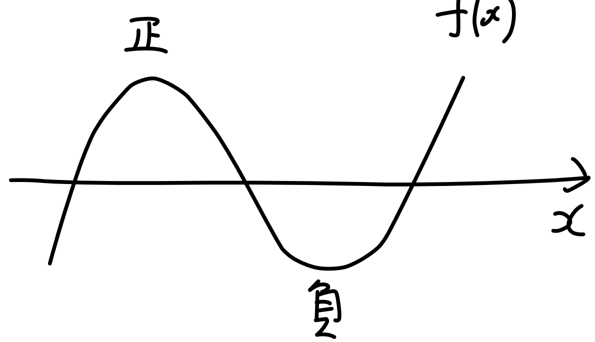
$$f\left(-\frac{2}{5^{1/4}}\right) = -\frac{32}{5 \cdot 5^{1/4}} + \frac{32}{5^{1/4}} + 2 = 2 + \frac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} > 0$$

注 $\dfrac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} = 17.11975\cdots$

$$f\left(\frac{2}{5^{1/4}}\right) = \frac{32}{5 \cdot 5^{1/4}} - \frac{32}{5^{1/4}} + 2 = 2 - \frac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} < 2 - \frac{128}{5 \cdot 2} < 0$$

$5^{1/4} < 2$ より

x	$-\infty$		$-2/5^{1/4}$		$2/5^{1/4}$		∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	正	↘	負	↗	∞
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	∞



これより, $f(x)$ はちょうど 3つの実根根を持つ.

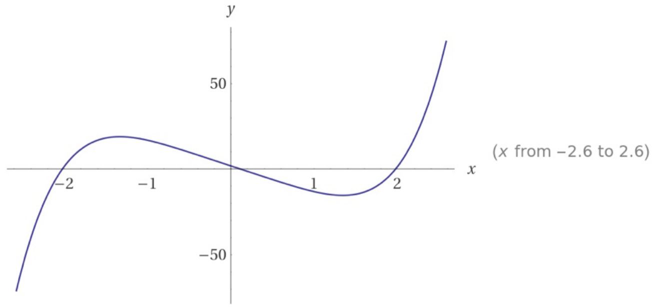
ゆえに, (2) より, このとき $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_5$ となる. □

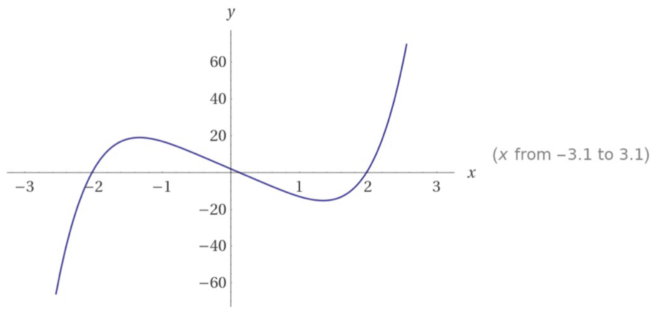
https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E5%20-%2016x%20%2B%202

Input

$x^5 - 16\,x + 2$

Plots





Local maximum

$\max\{x^5 - 16\,x + 2\} = 2 + \dfrac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ at $x = -\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$

Approximate form | Step-by-step solution

Local minimum

$\min\{x^5 - 16\,x + 2\} = 2 - \dfrac{128}{5\sqrt[4]{5}}$ at $x = \dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$

Approximate form | Step-by-step solution

Real roots

$x \approx 0.125002$

$x \approx 1.96745$

$x \approx -2.0301$

Exact forms | More digits

Complex roots

$x = -0.0311742 - 2.00122\,i$

$x = -0.0311742 + 2.00122\,i$

Exact forms

Roots in the complex plane