Galois対応

L/K は有限次 Galois 拡大であると仮定する。

このとき，$\mathrm{Gal}(L/K) = \{L$ の K 上での体の自己同型全体$\}$ について，

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| = [L:K]$$

でかつ以下の一対一対応が得られる：← Galois対応と呼ぶ

$$\{L/K \text{ の中間体全体}\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{\mathrm{Gal}(L/K) \text{ の部分群全体}\}$$

$$M \longmapsto \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma(a) = a \ (a \in M)\}$$

$$L^H = \{\beta \in L \mid \sigma(\beta) = \beta \ (\sigma \in H)\} \longleftarrow H$$

さらに，

(1) この対応は包含関係を逆転させる。→ 問題11-1 (1)

(2) L/L^H も Galois 拡大になり，$\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$．特に $[L:L^H] = |H|$

(3) L^H/K が Galois 拡大 $\iff$ H は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群．

Galoisの基本定理

(2)より，位数 r の $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対応する L/K の部分体 M は，

$[L:M] = r$ でかつ $\sigma(\beta) = \beta$ $(\beta \in M, \sigma \in H)$ をみたすものになる

$\boxed{\text{問題 11-1}}$ Galoisの基本定理をみとめて，Galoisの基本定理の状況で $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H_1, H_2 と L/K の中間体 M_1, M_2 がGalois対応によって対応しているとき，以下が成立することを示せ：

(1) $H_1 \supset H_2 \iff M_1 \subset M_2$.

(2) Galois対応によって，$H_1 \cap H_2$ と $M_1 M_2$ が対応し，$\langle H_1, H_2 \rangle$ と $M_1 \cap M_2$ が対応する．特に M_1 と M_2 が K のGalois拡大ならば $M_1 M_2$ と $M_1 \cap M_2$ も K のGalois拡大になる．

$\boxed{\text{記号}}$ $M_1 M_2$ は M_1 と M_2 を含む L の最小の部分体であり，$\langle H_1, H_2 \rangle$ は H_1 と H_2 を含む G の最小の部分群である．

□

$\boxed{\text{問題11-2}}$ L_1, L_2 が体 K の有限次Galois拡大であるとき，L_1L_2 と $L_1\cap L_2$ もそうであり，完全列

$$1 \to \mathrm{Gal}(L_1L_2/L_1\cap L_2) \to \mathrm{Gal}(L_1L_2/K) \to \mathrm{Gal}(L_1\cap L_2/K) \to 1$$

と同型

$$\mathrm{Gal}(L_1L_2/L_1\cap L_2) \cong \mathrm{Gal}(L_1/L_1\cap L_2) \times \mathrm{Gal}(L_2/L_1\cap L_2)$$

が得られる．特に

$$L_1\cap L_2 = K \iff [L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$$
$$\iff \mathrm{Gal}(L_1L_2/K) \cong \mathrm{Gal}(L_1/K) \times \mathrm{Gal}(L_2/K).$$

以上を示せ． □

$\boxed{\text{問題11-3}}$ 問題11-2の結果をみとめて，$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ が $K = \mathbb{Q}$ の4次Galois拡大になり，$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となることを示せ．さらに，その場合のGalois対応を図示せよ． □

方程式と有限次Galois拡大の関係 体の拡大 L/K について,

L/K は有限次Galois拡大である

$\Longleftrightarrow$ L は K 係数のある分離的既約多項式の最小分解体である.

$\Longleftrightarrow$ L は K 係数のある分離的多項式の最小分解体である.

ここで, 多項式が分離的とは重根を持たないことである.

この結果もみとめて使ってよい

問題11-4 $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-3})$ が $K=\mathbb{Q}$ の有限次Galois拡大になることを示し, L/K に関するGalois対応を図示せよ. □