5次以下の方程式の Galois 群について

K は体であるとし, $f(x) \in K[x]$ は K 上の(既約な) n 次分離多項式であるとし,
L は $f(x)$ の K 上での最小分解体であるとする.
L/K は K 上の有限次 Galois 拡大になる.　問題 8-4 (1)
その Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ は $f(x)$ の根全体の集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用する. (G は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ の置換群 S_n の推移的部分群とみなされる.)

$\boxed{n=2}$ $n=2$ のとき, $G = \langle \sigma \rangle \cong S_2 \cong C_2$. ($\sigma$ は2つの根の互換) □

$\boxed{n=p \text{ は素数}}$ $K=\mathbb{Q}$ で $n=p$ が素数で $f(x)$ がちょうど $p-2$ 個の実根を持つならば $G \cong S_p$ となる. ← 問題 8-4 (2) □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x) = x^5 - 16x + 2$ のとき, $G \cong S_5$. ← 問題 8-4 (3) □

$\boxed{n=3}$ S_3 の推移的部分群は A_3 と S_3 の2つだけである. ← 問題 8-2

$G \cong \underset{\cong C_3}{A_3}, \underset{\cong D_3}{S_3}$ となる3次の既約多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ の例を作りたくなる □

$\boxed{n=4}$ 以下の5つは S_4 の推移的部分群である： ← 問題8-3 (3)

$$\begin{cases} \langle (1,2,3,4) \rangle \cong C_4 \\ V = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \cong C_2 \times C_2 \quad \text{← Kleinの四元群} \\ \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \cong D_4 \\ A_4 \\ S_4 \end{cases}$$

$C_2 \times C_2 \cong V$

（S_4 の推移的部分群は共役を除いてこれらしかない）

$$\begin{tikzcd}
& S_4 \arrow[dl, phantom, "\triangleright"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & & \\
A_4 \arrow[dr, phantom, "\triangleright"] & & D_4 \arrow[dl, phantom, "\triangleleft"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & \\
& V & & C_4
\end{tikzcd}$$

$G \cong C_4, V, D_4, A_4, S_4$ となる4次の既約多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を作りたくなる。 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-3$ のとき、$L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$ $\left(\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \alpha=\sqrt[3]{3}\right)$, $G\cong S_3$ ← 問題7-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-4x^2+2$, $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ のとき、$L=\mathbb{Q}(\alpha)$, $G\cong C_4$. ← 問題7-2. □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-2$, $\omega=\sqrt{-1}$, $\alpha=\sqrt[4]{2}$ のとき、$L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$, $G\cong D_4$. → 問題12-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-10x^2+1$ のとき、$L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $G\cong C_2\times C_2$. → 問題12-2 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-21x+28$ のとき、$G\cong C_3$. → 問題13-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3+3x^2-3$ のとき、$G\cong C_3$. → 問題13-2 □

} 次回にヒント付きで出す問題

問題 12-1 $F(x) = x^4 - 2$, $\alpha = \sqrt[4]{2}$, $i = \sqrt{-1}$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である.

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ に等しい.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] = 8$.

(4) $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ の体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる:

$$\sigma(f(\alpha)) = f(i\alpha) \quad (f(x) \in \mathbb{Q}(i)[x]), \quad \tau(g(i)) = g(-i) \quad (g(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, i)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_4$. □

($K = \mathbb{Q}$, $n = 4$ で $G \cong D_4$ になる例)

問題 12-2 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ は $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である.

(2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体である.

(3) $L/\mathbb{Q}$ は4次の Galois 拡大である.

(4) L の $\mathbb{Q}$ 上での自己同型 σ, τ を次のように定めることができる:

$$\sigma(f(\sqrt{2})) = f(-\sqrt{2}) \quad (f(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]), \quad \tau(g(\sqrt{3})) = g(-\sqrt{3}) \quad (g(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong C_2 \times C_2$ (C_n は位数 n の巡回群). □

$F(x)$ の根全体の集合の置換群の中の Klein の四元群に一致.

($K = \mathbb{Q}$, $n = 4$ で $G \cong C_2 \times C_2$ となる例)