5次以下の方程式の Galois 群について

K は体であるとし, $f(x) \in K[x]$ は K 上の(既約な) n 次分離多項式であるとし, L は $f(x)$ の K 上での最小分解体であるとする.

L/K は K 上の有限次 Galois 拡大になる.

問題8-4 (1)

その Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ は $f(x)$ の根全体の集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ に推移的に作用する. (G は $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ の置換群 S_n の推移的部分群とみなされる.)

$\boxed{n=2}$ $n=2$ のとき, $G = \langle \sigma \rangle \cong S_2 \cong C_2$. ($\sigma$ は2つの根の互換) □

$\boxed{n=p\text{ は素数}}$ $K=\mathbb{Q}$ で $n=p$ が素数で $f(x)$ がちょうど $p-2$ 個の実根を持つならば $G \cong S_p$ となる. ← 問題8-4 (2) □

$\boxed{\text{例}}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x) = x^5 - 16x + 2$ のとき, $G \cong S_5$. ← 問題8-4 (3) □

$\boxed{n=3}$ S_3 の推移的部分群は A_3 と S_3 の2つだけである. ← 問題8-2

$G \cong \underset{\cong C_3}{A_3}$, $\underset{\cong D_3}{S_3}$ となる3次の既約多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ の例を作りたくなる □

$\boxed{n=4}$ 以下の5つはS_4の推移的部分群である: ← 問題8-3(3)

$$\begin{cases} \langle(1,2,3,4)\rangle \cong C_4 \\ V=\{1,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}\cong C_2\times C_2 \\ \langle (1,2,3,4),\ (1,3)\rangle \cong D_4 \\ A_4 \\ S_4\end{cases}$$

← Kleinの四元群

$$\begin{tikzcd}
& S_4 \arrow[dl, phantom, "\triangleright"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & & \\
A_4 \arrow[dr, phantom, "\triangleright"] & & D_4 \arrow[dl, phantom, "\triangleleft"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] & \\
& V & & C_4
\end{tikzcd}$$

$G\cong C_4,\ \underset{\cong\, C_2\times C_2}{V},\ D_4,\ A_4,\ S_4$ となる4次の既約多項式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ を作りたくなる. □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-3$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$ $\left(\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \alpha=\sqrt[3]{3}\right)$, $G\cong S_3$ ← 問題7-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-4x^2+2$, $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\alpha)$, $G\cong C_4$. ← 問題7-2. □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-2$, $\omega=\sqrt{-1}$, $\alpha=\sqrt[4]{2}$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$, $G\cong D_4$. → 問題12-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-10x^2+1$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $G\cong C_2\times C_2$. → 問題12-2 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-21x+28$ のとき, $G\cong C_3$. → 問題12-3 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3+3x^2-3$ のとき, $G\cong C_3$. → 問題12-4 □

問題12-1 $F(x)=x^4-2$, $\alpha=\sqrt[4]{2}$, $i=\sqrt{-1}$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ に等しい。

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, i):\mathbb{Q}]=8$。

(4) $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ の体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる:

$$\sigma(f(\alpha))=f(i\alpha) \quad (f(x)\in\mathbb{Q}(i)[x]),\qquad \tau(g(i))=g(-i) \quad (g(x)\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, i)/\mathbb{Q})=\langle\sigma,\tau\rangle\cong D_4$.

(K = $\mathbb{Q}$, $n=4$ で $G\cong D_4$ になる例)

□

問題12-2 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)=x^4-10x^2+1$ は $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ は $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体である。

(3) $L/\mathbb{Q}$ は4次のGalois拡大である。

(K = $\mathbb{Q}$, $n=4$ で $G\cong C_2\times C_2$ となる例)

(4) L の $\mathbb{Q}$ 上での自己同型 σ, τ を次のように定めることができる:

$$\sigma(f(\sqrt{2}))=f(-\sqrt{2}) \quad (f(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]),\qquad \tau(g(\sqrt{3}))=g(-\sqrt{3}) \quad (g(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})=\langle\sigma,\tau\rangle\cong C_2\times C_2$ (C_n は位数 n の巡回群).

□

$F(x)$ の根全体の集合の置換群の中の Klein の四元群に一致。

$\boxed{\text{問題12-3}}$ $F(x) = x^3 - 21x + 28$ とおく、以下を示せ、 $K = \mathbb{Q}, n = 3$

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

(2) $F(x)$ の3つの根を α, β, γ と書き、$D = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと、
$D = 126^2$ となる。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を L と書くと、$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_3$. 位数3の巡回群 □

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に $x^3 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき、
$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 = -4a^3 - 27b^2$ となることを要領よく示してみよ、 □

$\boxed{\text{問題12-4}}$ $F(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ とおく、以下を示せ、

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

(2) $F(x)$ の3つの根を α, β, γ と書くとき、$D = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと、
$D = 9^2$ となる。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を L と書くと、$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_3$.

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に $x^3 + ax^2 + b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき、
$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 = -b(4a^3 + 27b)$ となることも示せ。 □