定義 体Kの中で正の整数個の1の和 $1+1+\cdots+1$ が決して0にならないとき，Kの標数は0であるという．

正の整数Nで体Kの中でのN個の1の和が0になるものが存在するとき，Kは正標数であるといい，そのようなNの最小値をKの標数と呼ぶ． □

メインの問題は次ページの問題です．

問題5-1 Kは標数0の体であるとし，Lはその任意の拡大体であるとする．K上の既約多項式がLの中に重根を持たないことを示せ． □

問題5-2 正標数の体の標数が常に素数になることを示せ． □

素数pに対して，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ とおく．
$\mathbb{F}_p$ は位数p(元の個数がp)の体になり，$\mathbb{F}_p$ の標数もpになる．
体Kに対して，$K(x) = \left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f(x), g(x) \in K[x],\ g(x) \neq 0 \right\}$ をK上の(1変数)有理関数体と呼ぶ．
xは文字

問題5-3 pは素数であるとし，$L = \mathbb{F}_p(t) =$ (1変数tの $\mathbb{F}_p$ 上の有理関数体)とおく．
Lの部分体KとK上の既約多項式 $F(x) \in K[x]$ の組 $(K, F(x))$ で
$F(x)$ がLの中に重根を持つものの1つを具体的に構成せよ． □

$\boxed{\mathbb{C}\text{の部分体の単拡大定理}}$ K は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，$\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{C}$ は K 上代数的であると仮定する．このとき，ある $\theta\in\mathbb{C}$ が存在して，$K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=K(\theta)$ □

この定理の証明（講義でやったはず）を読んで以下の問いに答えよ．

$\boxed{\text{問題 5-4}}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3})=\mathbb{Q}(\theta)$ をみたす $\theta\in\mathbb{C}$ を具体的に与え，実際にその等号が成立することを証明せよ． □

$\boxed{\text{問題 5-5}}$ 上の定理の $r=2$ の場合の証明を書け．すなわち，次を示せ：
K は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ は K 上代数的であると仮定する．このとき，ある $\theta\in\mathbb{C}$ が存在して，$K(\alpha,\beta)=K(\theta)$． □

$\boxed{\text{注意}}$ 上の定理は問題5-5の結果を使うと，以下をみたす $\theta_1,\dots,\theta_{n-1}\in\mathbb{C}$ が次々に得られることからしたがう：

$K(\alpha_1,\alpha_2)=K(\theta_1)$，$K(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=K(\theta_1,\alpha_3)=K(\theta_2)$，$K(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=K(\theta_2,\alpha_4)=K(\theta_3)$，…，

$K(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)=K(\theta_{n-2},\alpha_n)=K(\theta_{n-1})$． □