$\boxed{\text{問題 8-1}}$ K, L は $\mathbb{C}$ の部分体であるとする.

(1) L/K が2次拡大ならば L/K は Galois 拡大であることを示せ.

(2) 2次以上の有限次拡大 L/K で L の K 上での体の自己同型が id_L しか存在しないものの例を1つ挙げよ.

$\boxed{\text{ヒント}}$ (1) $L = K(\alpha)$, $\alpha \in L$, $\alpha \notin K$, $\alpha^2 \in K$ の形になる.

(2) $\mathbb{Q}$ の3次拡大でそのような例を作れる.

もしも3次拡大 $L/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大ならば,

$|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})| = [L:\mathbb{Q}] = 3$ なので $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_3 \neq \{\mathrm{id}_L\}$ となる.

$\boxed{\text{問題8-2}}$ $F(x) = (x^2-2)(x^2-3)$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ とおく．以下を示せ．

以下では $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体 $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ が $\mathbb{Q}$ の4次拡大であることを認めて使ってよい．（問題4-1の解答例を参照）

(1) $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ の体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる：

$$\sigma(f(\sqrt{2})) = f(-\sqrt{2}) \quad (f(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]), \qquad \tau(g(\sqrt{3})) = g(-\sqrt{3}) \quad (g(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]).$$

(2) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong C_2 \times C_2$.

(3) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ の中間体の Galois 対応は以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd}
 & \{1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \sigma \rangle \arrow[dr, dash] & \langle \tau \rangle \arrow[d, dash] & \langle \sigma\tau \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \langle \sigma, \tau \rangle &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\beta) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\alpha) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\alpha\beta) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$