02-3

問題1-7 $x^3+2x-2=0$ をみたす正の実数 $x=\alpha$ が存在することを示せ。さらに α の具体的な形を求めよ（$\sqrt{\ }$ と $\sqrt[3]{\ }$ を使って表せ）。

$\square$

WolframAlpha

2/(3(√(35/27) - 1)^(1/3)) - (√(35/27) - 1)^(1/3)

Input

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}$$

Result

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}$$

Decimal approximation

0.7709169970592481008251463693070269672550531193633286151005984929767351032820534076249331528876…

More digits

Alternate forms

$$\frac{2\times 3^{2/3} - \sqrt[3]{3}\left(\sqrt{105}-9\right)^{2/3}}{3\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}$$

root of x^3+2x-2 near $x=0.770917$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}{3^{2/3}}$$

More forms | Step-by-step solution

Minimal polynomial

x^3+2x-2

x^3+2x-2

Alternate form

Real root

$$x = \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{3^{2/3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}$$

Approximate form | Step-by-step solution

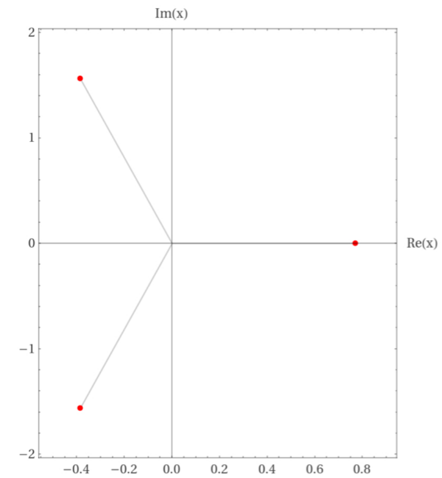
Complex roots

$$x = \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}} - \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

$$x = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}} - \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

Approximate forms | Step-by-step solution

Roots in the complex plane



https://www.wolframalpha.com/input/?i=2%2F%283%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29%29%20-%20%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E3%2B2x-2

$\boxed{\text{解答例}}$ $x^3+2x-2 \overset{(*)}{=} 0$ の正の実数解を求めたい.

$p=-\frac{2}{3}$, $q=-2$ とおくと, (*) は $x^3-3px+q=0$ と書ける.

問題1-6の解法を使おう. $\lambda^2-q\lambda+p^3=\lambda^2+2\lambda-\frac{8}{27}=0$ の正の実数解は

$$Y=-1+\sqrt{1^2+\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{35}{27}}-1>0.$$

$y=\sqrt[3]{Y}>0$, $z=\frac{p}{y}=-\frac{2}{3y}<0$ とおく. 問題1-6の結果より,

$$\alpha=-y-z=\frac{2}{3\sqrt[3]{Y}}-\sqrt[3]{Y}\in\mathbb{R}$$

は (*) の実数解になっている. ($\alpha \fallingdotseq 0.77$ なので $\alpha>0$ だが, 別の方法で $\alpha>0$ であることを示す.)

$f(x)=x^3+2x-2$ とおくと, $f'(x)=3x^2+2>0$ $(x\in\mathbb{R})$ なので, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加し, $f(0)=-2$, $f(1)=1$ なので, $f(x)=0$ は唯一つの実数解を持ち, その実数解は上の α になる. (さらに $0<\alpha<1$ も示せている.) □