1の原始n乗根 $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ の $\mathbb{Q}$ 上でのモニックな最小多項式を $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ と書き、(第n)円分多項式と呼ぶ。次が成立している：

$$\Phi_n(x) = \prod_{\omega\text{は1の原始}n\text{乗根}} (x - \omega).$$

$\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ となることも知られている。 ← 代数的整数の話をすればわかる。

$\boxed{\text{問題 14-1}}$ $\Phi_n(x)$ を $n = 1, 2, \ldots, 12$ について求めよ。 □

$\boxed{\text{問題 14-2}}$ 以下を示せ。

(1) 素数 p と正の整数 e について、$\Phi_{p^e}(x) = \Phi_p(x^{p^{e-1}})$.

(2) 正の奇数 n について、$\Phi_{2n}(x) = (-1)^{\varphi(n)}\Phi_n(-x)$. $\left(\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|\right)$

(3) $\mathbb{Q}(\zeta_{24}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. □

$\boxed{\text{問題 14-3}}$ $\Phi_n(x)$ の係数は常に $0, \pm 1$ だけになるか？ □

$\boxed{\text{問題 14-4}}$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ のとき、$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ となることを示せ。 □