イントロダクション（2次方程式の場合）

我々は体のGalois理論についてやる。何をやりたいのか？

2次方程式

$a, b, c \in \mathbb{Q}$ であるとし，$a \neq 0$ と仮定する。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について考えよう。

よりシンプルな方程式に帰着していく。

両辺を a でわると，$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

$p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ とおくと，$x^2 + px + q = 0$

$x = X - \frac{p}{2}$ とおくと，$X^2 \cancel{- pX} + \frac{p^2}{4} \cancel{+ pX} - \frac{p^2}{2} + q = 0$.

$X^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$. $\quad X^2 = \frac{p^2}{4} - q$

$X = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

2次方程式は $X^2 = A$ 型の2次方程式に帰着される。

平方根で2次方程式は解ける。

$\boxed{\text{重要なポイント}}$ 0でない数の平方根のとり方は2通りある。

たとえば、2の平方根のとり方は $\pm\sqrt{2}$ の2つある。

-1 の平方根のとり方は $\pm i$ の2つある。 $(i=\sqrt{-1})$

どちらをえらんでもよい。 ← あいまいな言い方 ← どういう意味か？

$\boxed{\text{どういう意味か}}$ (おおざっぱな説明) 加減乗除 ← 体の演算

$\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ でおきかえても 四則演算がたもたれる。たとえば

これをどう定式化するか

$$\underbrace{(1+\sqrt{2})(2-3\sqrt{2}) = 2-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\cdot 2 = -4-\sqrt{2}}$$

この中の $\sqrt{2}$ をすべて $-\sqrt{2}$ でおきかえても等式が成立

$$\overbrace{(1-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2}) = 2+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-3\cdot 2 = -4+\sqrt{2}}$$

OK

これが体のGalois理論の基本的なアイデア！

体の言葉を使った定式化

体 K を $K=\mathbb{Q}$ と定める。　このLはKの拡大体の例になっている。

体 L を $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=(\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含む最小の $(\mathbb{R}$ の部分$)$体$)$　こうなる。

$$=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

注　$\mathbb{Q}(-\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

このσが $\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ でおきかえる操作になっている。

写像 $\sigma: L\to L$ を $\sigma(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ と定める。

このとき，σ は体 L の(自己)同型写像になっている。

σ は全単射なのでこれを示すためには，σ が四則演算を保つことを示せば十分である。

さらに，σ は $a\in\mathbb{Q}$ について $\sigma(a)=a$ をみたす。

すなわち，σ は $K=\mathbb{Q}$ の元を動かさない。

(σ は体 L の体 K 上での自己同型であるという。)

$\boxed{\text{問題 1-1}}$ 集合 $L=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ が $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを証明せよ.

$\mathbb{R}$ の部分体とは $\mathbb{R}$ の部分環で体になっているもののことである.

証明するべきこと:

$L\supset\mathbb{Q}$, $L\ni\sqrt{2}$ は自明

(1) L は $\mathbb{R}$ の部分環でかつ体になっている.

(2) M を $\mathbb{R}$ の部分環でかつ $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含むものとするとき, $L\subset M$.

この2つを示せば十分である. □

$\mathbb{Q}[\alpha]=(\mathbb{Q}$ と α を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分環$)$

$\boxed{\text{問題 1-2}}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ のとき, $\mathbb{Q}(\alpha)=(\mathbb{Q}$ と α を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体$)$, $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=(\mathbb{Q}$ と α,β を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体$)$ とおく. このとき,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(-\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

となることを示せ.

□

$\boxed{\text{問題 1-3}}$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ とおき,

写像 $\sigma : L \to L$ を $\sigma(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ と定める.

このとき, 以下が成立することを示せ: $a \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \beta \in L$ のとき

(0) $\sigma(a) = a$.

(1) $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$.

(2) $\sigma(\alpha - \beta) = \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$.

(3) $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$.

(4) $\alpha \neq 0$ のとき, $\sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sigma(\alpha)}$.

$\square$