定義 Kを$\mathbb{C}$の部分体とし，$\alpha \in \mathbb{C}$とする.

αがK上<u>作図可能</u>であるとは，Kの元たちから出発して，加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかえしてαが得られることだと定める. $\square$

例 $\sqrt{2}$ や $\pm i = \pm\sqrt{-1}$ や $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ は $\mathbb{Q}$上作図可能である.

$\sqrt{\pi}$ は $\mathbb{Q}(\pi)$上作図可能である. (π や$\sqrt{\pi}$は$\mathbb{Q}$上作図可能ではない.)

a, b, cがK上作図可能のとき，$ax^2+bx+c=0$の解はK上作図可能である $\square$

正の整数nに対して，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ とおく. ゼータ

1の原始n乗根(の1つ)

問題3-1 ζ_5 が $\mathbb{Q}$上作図可能なことを示せ. $\square$

ヒント $\omega = \zeta_5$ とおく. 2次方程式の解と係数の関係を使う.

$\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$ とおくと，$\alpha + \beta = ?$, $\alpha\beta = ?$.

$\omega + \omega^4 = \alpha$, $\omega \cdot \omega^4 = 1$. $\square$

注意 本質的に正五角形の作図可能性! $\square$

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ ζ_{17} が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ. □ ← かなり非自明.

(これに関連した問題をずっと後にレポート課題に出す予定)

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\omega = \zeta_{17}$, $\omega_0 = \omega$, $\omega_{k+1} = \omega_k^3$ とおく. $\begin{cases} \omega^{17} = 1, \quad \omega \neq 1 \\ \omega^{16} + \omega^{15} + \cdots + \omega + 1 = 0 \end{cases}$

(0) $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{15}\} = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{16}\}$

(1) $\alpha_0 = \omega_0 + \omega_2 + \cdots + \omega_{14}$, $\alpha_1 = \omega_1 + \omega_3 + \cdots + \omega_{15}$ とおくと,

$\alpha_0 + \alpha_1 = ?$, $\alpha_0 \alpha_1 = ?$

(2) $\beta_i = \omega_i + \omega_{i+4} + \omega_{i+8} + \omega_{i+12}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とおくと,

$\beta_0 + \beta_2 = \alpha_0$, $\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1$, $\beta_0 \beta_2 = ?$, $\beta_1 \beta_3 = ?$, $(\beta_0 + 1)\beta_1 = \beta_0 - 1$

(3) $\gamma_i = \omega_i + \omega_{i+8}$ $(i = 0, 1, \dots, 7)$ とおくと,

$\gamma_0 + \gamma_4 = \beta_0$, $\gamma_0 \gamma_4 = ?$

(4) $\omega_0 + \omega_8 = \gamma_0$, $\omega_0 \omega_8 = ?$

2次方程式を解くことのくりかえしで $\omega = \zeta_{17}$ が得られることを示せという問題.

□

$\boxed{\text{注意}}$ 本質的に正17角形の作図可能性! Carl Friedrich Gauss が発見. □

問題 3-3 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ． $\square$

ヒント $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ $\square$

問題 3-4 $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する． $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示せ．

ここで, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体で最小のものを表す． $\square$

問題 3-5 $\alpha = \omega \sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ．

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(L が体 K の拡大体のとき,

$$[L:K] = [L/K] = \dim_K L$$

L の K 上のベクトル空間としての次元

と書き, これを L/K の拡大次数と呼ぶ.) $\square$

ヒント α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式は x^3-7 になる． $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. $\square$