Galois対応 L/Kは有限次Galois拡大であると仮定する。

このとき、$\mathrm{Gal}(L/K) = \{L$のK上での体の自己同型全体$\}$について、

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| = [L:K]$$

でかつ以下の一対一対応が得られる；

$$\{L/K\text{の中間体全体}\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{\mathrm{Gal}(L/K)\text{の部分群全体}\}$$

$$M \longmapsto \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma(a) = a \ (a \in M)\}$$

$$L^H = \{\beta \in L \mid \sigma(\beta) = \beta \ (\sigma \in H)\} \longleftarrow H$$

さらに、

(1) この対応は包含関係を逆転させる。

(2) L/L^HもGalois拡大になり、$\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$。特に$[L:L^H] = |H|$.

(3) L^H/KがGalois拡大 $\iff$ Hは$\mathrm{Gal}(L/K)$の正規部分群.

(2)より、位数rの$\mathrm{Gal}(L/K)$の部分群Hに対応するL/Kの部分体Mは

$[L:M] = r$でかつ $\sigma(\beta) = \beta$ $(\beta \in M, \sigma \in H)$をみたすものになる。

よく使われる有限群の記号

symmetric group　　alternating group

S_n = (n次の置換群) $\triangleright$ A_n = (n次の交代群) = {n次の偶置換全体},

C_n = (位数nの巡回群) = $\langle \sigma \mid \sigma^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

cyclic group

D_n = (位数$2n$のn次の二面体群) = $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$.

dihedral group

$$D_3 \cong S_3, \quad \sigma \leftrightarrow (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \leftrightarrow (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$S_3 = \{1, (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$= \{1, (1,2,3), (1,2,3)^2, (1,2), (1,2,3)(1,2), (1,2,3)^2(1,2)\}$$

$$C_3 \cong A_3 = \{1, (1,2,3), (1,2,3)^2\}.$$

$\subset S_4$

正規部分群になっていることを $\triangleleft$ と書く.

$$V = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \cong C_2 \times C_2, \quad V \triangleleft S_4$$

Kleinの四元群

問題 7-1 $F(x) = x^3 - 3$, $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しくない。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$ に等しい。 (特に $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ は $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大になる。)

以下，$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}] = 6$ を認めて使ってよい。(問題 3-5, 4-2 の解答例も参照)

(4) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる：

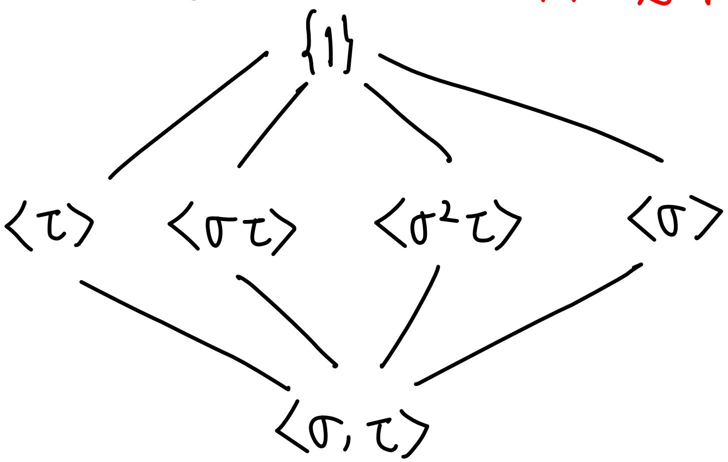
$$\sigma(f(\alpha)) = f(\omega\alpha) \quad (f(x) \in \mathbb{Q}(\omega)[x]), \quad \tau(g(\omega)) = g(\omega^2) \quad (g(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]).$$

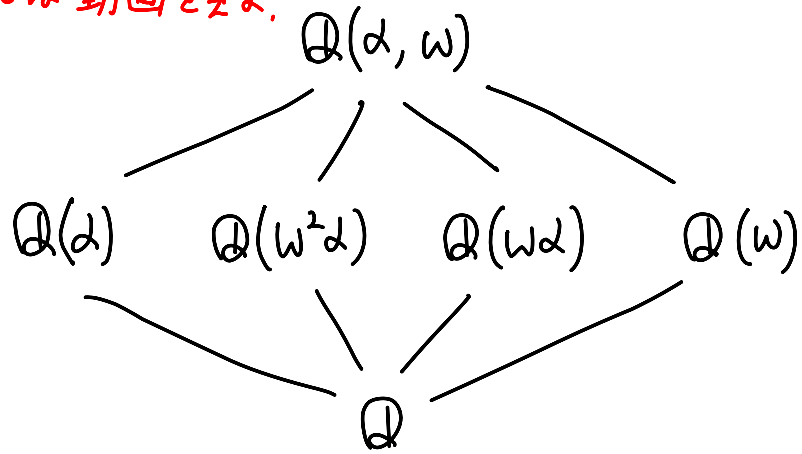
(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_3 \cong S_3$

← 特に (6) をやってほしい。

(6) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}$ の中間体の Galois 対応は以下のようになっている：

図の意味については動画を見よ。





問題7-2 $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である.

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しい.

F(x)のすべての根が $\mathbb{Q}(\alpha)$ に含まれる.

(特に $\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大になる.)

(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ の体の自己同型 σ を $\sigma(f(\alpha)) = f(\sqrt{2-\sqrt{2}})$ $(f(x) \in \mathbb{Q}[x])$ と定義できる.

(4) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体全体の Galois 対応は以下の図のようになっている:

$$
\begin{array}{ccc}
\{1\} & \qquad\qquad & \mathbb{Q}(\alpha) \\
| & & | \\
\langle \sigma^2 \rangle & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
| & & | \\
\langle \sigma \rangle & & \mathbb{Q}
\end{array}
$$

$\square$