

問題 6-1 K, L は \mathbb{C} の部分体であるとし, L/K は有限次拡大であるとする.

このとき, L/K が Galois 拡大であることと次の条件 (4) が同値であることを示せ.

(4) 任意の $\alpha \in L$ について, α の K 上でのすべての共役元が L に含まれる.

解答例

① (4) $\Rightarrow L/K$ は Galois 拡大を示そう.

(4) \Rightarrow (2) を示す.

前回やった
単拡大定理より,
このような θ をとれる.

(4) の条件における α として, $L = K(\theta)$ をみたす $\theta \in L$ をとると,

(4) より θ のすべての共役元は L に含まれる. これより, L/K は Galois 拡大である.
(以下の (2) が示された.)

(注) 以下の条件は有限次拡大 (標数 0) L/K が Galois 拡大であることを特徴付ける互いに同値な条件になっている: $L = K(\theta)$ と仮定する.

(1) L の K 上での任意の共役体 は L に等しい.

(K 上での任意の体の同型 $\varphi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ について $\varphi(L) = L$.)

(2) θ の K 上での共役元 はすべて L に含まれる.

(θ の K 上での最小多項式の根 がすべて L に含まれる.)

(3) ある $F(x) \in K[x]$ が存在して, L は $F(x)$ の K 上での最小分解体 になる.

(L は K に $F(x)$ のすべての根を付け加えてできる体 になる.)

「 K 上の」 $\Leftrightarrow \forall a \in K, \varphi(a) = a$
 $\left\{ \begin{array}{l} \omega = e^{2\pi i/3} \text{ とおくと,} \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{C} \\ \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{C} \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{等しい} \\ \text{ない} \\ \text{共役体} \\ \text{の例} \end{array}$

② L/K が Galois 拡大 \Rightarrow (4) を示そう.

L/K は Galois 拡大であるとし, 任意に $\alpha \in L$ をとる.

$\beta \in \mathbb{C}$ は K 上での α の任意の共役元であるとする.

(4) を示すためには $\beta \in L$ を示せばよい.

このとき, K 上の体同型 $\varphi: K(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$, $f(\alpha) \mapsto f(\beta)$ ($f(x) \in K[x]$) が存在する.

もしも $K(\alpha) = L$ ならば L/K が Galois 拡大であることより, $L \stackrel{(1)}{=} \varphi(L) = \varphi(K(\alpha)) = K(\beta) \ni \beta$.

$K(\alpha) \subsetneq L$ と仮定する. 単拡大定理より, $L = K(\alpha)(\eta)$, $\eta \in L$ と書ける.

η の $K(\alpha)$ 上での最小多項式を $F(x) = \sum_i a_i x^i \in K(\alpha)[x]$, $a_i \in K(\alpha)$ と書く.

$G(x) = \sum_i \varphi(a_i) x^i \in \varphi(K(\alpha))[x] = K(\beta)[x]$ とおき, $G(x)$ の根 $\xi \in \mathbb{C}$ を任意にとる.

このとき, K 上の体の同型 $\tilde{\varphi}: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ を $\tilde{\varphi}(\sum_i a_i \eta^i) = \sum_i \varphi(a_i) \xi^i$ ($a_i \in K(\alpha)$) と作れる:

$$L = K(\alpha)(\eta) \simeq K(\alpha)[x]/(F(x)) \simeq K(\beta)[x]/(G(x)) \simeq K(\beta)(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sum a_i \eta^i \mapsto \overline{\sum a_i x^i} \mapsto \overline{\sum \varphi(a_i) x^i} \mapsto \sum \varphi(a_i) \xi^i \mapsto \sum \varphi(a_i) \xi^i$$

L/K が Galois 拡大であることより, $L = \tilde{\varphi}(L) = K(\beta)(\eta) \ni \beta$.

これで (4) が示された.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\mapsto \overline{f(x)} \mapsto f(\beta) \mapsto f(\beta) \\ K(\alpha) &\simeq K[x]/(F_\alpha(x)) \simeq K(\beta) \hookrightarrow \mathbb{C} \\ (F_\alpha(x) \text{ は } \alpha \text{ の } K \text{ 上での最小多項式}) \\ (\beta \text{ は } F_\alpha(x) \text{ の根}) \end{aligned}$$

□

問題 6-2 M/K は体の拡大であるとし, L_1, L_2 はその中間体であるとする.

このとき, $L_1/K, L_2/K$ が有限次拡大ならば $(L_1 \cap L_2)/K$ も $(L_1 L_2)/K$ も有限次拡大になり,

$[L_1 \cap L_2 : K] \leq \min\{[L_1 : K], [L_2 : K]\}$, $[L_1 L_2 : K] \leq [L_1 : K][L_2 : K]$ となることを示せ,

ここで $L_1 L_2$ は L_1 と L_2 の両方を含む M の最小の部分体を表す. \square

解答例 $[L_1 : K] = m < \infty$, $[L_2 : K] = n < \infty$ と仮定する.

① $[L_1 \cap L_2 : K] \leq \min\{m, n\}$ を示そう.

$L_1 \cap L_2 \subset L_1$ より, $[L_1 \cap L_2 : K] = \dim_K L_1 \cap L_2 \leq \dim_K L_1 = m$.

$L_1 \cap L_2 \subset L_2$ より, $[L_1 \cap L_2 : K] = \dim_K L_1 \cap L_2 \leq \dim_K L_2 = n$.

ゆえに, $[L_1 \cap L_2 : K] \leq \min\{m, n\}$,

② $[L_1 L_2 : K] \leq mn$ を示そう.

単拡大定理より, K 上代数的なある $\theta \in L_1$ が存在して, $L_1 = K(\theta)$ となる.

$L_1 L_2$ は L_2 と θ を含むので, $L_2(\theta)$ の最小性より $L_2(\theta) \subset L_1 L_2$.

任意の $\beta \in L_1 = K(\theta)$ はある $f(x) \in K[x]$ によって $\beta = f(\theta)$ と表わされ,
 $f(x) \in L_2[x]$ でもあるので $\beta = f(\theta) \in L_2(\theta)$ となり, $L_2(\theta)$ は L_1 と L_2 の両方を含む.
ゆえに, $L_1 L_2$ の最小性より, $L_1 L_2 \subset L_2(\theta)$.

これで, $L_1 L_2 = L_2(\theta)$ となることが示された.

$F_\theta(x) \in K[x]$ を θ の K 上での最小多項式とすると, $F_\theta(x) \in L_2[x]$ であつ $F_\theta(\theta) = 0$ となるので,

$$[L_1 L_2 : L_2] = [L_2(\theta) : L_2] = (\theta \text{ の } L_2 \text{ 上での最小多項式の次数})$$

$$\leq \deg F_\theta(x) = [K(\theta) : K] = [L_1 : K].$$

ゆえに,

$$[L_1 L_2 : K] = [L_1 L_2 : L_2] [L_2 : K] \leq [L_1 : K] [L_2 : K] = mn.$$

(注) $[L : K]$ は
 $[L/K]$ と
書くこともある.) \square

$f(\theta) \longleftarrow \overline{f(x)}$
 $L_1 = K(\theta) \cong K[x]/(F_\theta(x))$
($F_\theta(x)$ は θ の K 上での
最小多項式)

かりきり
 $G(x) \mid F_\theta(x)$

$L_2(\theta) \cong L_2[x]/(G(x))$
($G(x)$ は L_2 上での
 θ の最小多項式)

問題 6-3 K, L_1, L_2 は \mathbb{C} の部分体であるとする.

L_1/K と L_2/K が有限次 Galois 拡大ならば,

$L_1 \cap L_2/K$ と $L_1 L_2/K$ も有限次 Galois 拡大になることを示せ.

ここで $L_1 L_2$ は L_1 と L_2 の両方を含む \mathbb{C} の最小の部分体を表す.

□

解答例 $L_1 \cap L_2/K$ と $L_1 L_2/K$ が有限次拡大になることは問題 6-2 の解答例で示した.

① $L_1 \cap L_2/K$ が Galois 拡大になることを示そう.

$\alpha \in L_1 \cap L_2$ を任意にとる.

$i=1, 2$ について, L_i/K が Galois 拡大であることと

問題 6-1 の結果と $\alpha \in L_i$ より, α のすべての K 上での共役元は L_i に含まれる.

ゆえに, α のすべての K 上での共役元は $L_1 \cap L_2$ に含まれる.

したがって, 問題 6-1 の結果より, $L_1 \cap L_2/K$ は Galois 拡大である.

② $L_1 L_2 / K$ が Galois 拡大になることを示そう.

$L_1 L_2$ の任意の元 γ は, ある $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L_1$, $\beta_1, \dots, \beta_s \in L_2$ と $f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \in K(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ が存在して,

$\gamma = f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$ と表される.

このとき, K 上の体同型 $\varphi: L_1 L_2 \hookrightarrow \mathbb{C}$ について,

その L_k 上への制限が K 上の体同型になることと, L_k / K が Galois 拡大であることより, $\varphi(\alpha_i) \in L_1$, $\varphi(\beta_j) \in L_2$ となる. ゆえに,

$$\varphi(\gamma) = f(\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_r), \varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_s)) \in L_1 L_2.$$

これで $L_1 L_2 / K$ が Galois 拡大であることがわかった.

□

(注) 上で $\varphi(L_1 L_2) \subset L_1 L_2$ が示せてあり, $L_1 L_2$ と $\varphi(L_1 L_2)$ の K 上でのベクトル空間として
の次元は有限次元で等しいので $\varphi(L_1 L_2) = L_1 L_2$.

問題 6-4 以下の体の拡大が Galois 拡大かどうかを判定せよ.

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$, (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})/\mathbb{Q}$,
 (4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$, (5) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$, (6) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}$,
 (7) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, (8) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

解答例 (1), (4), (5), (6), (7), (8) は Galois 拡大だが, (2), (3) はそうではない.

$$\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad i = \sqrt{-1} \text{ とおく.}$$

↑ 重要

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})$ はそれぞれ
 $x^2 - 2$, $x^4 - 10x^2 + 1$, $x^3 - 3$, $x^4 - 7$ の \mathbb{Q} 上での
 最小分解体なので \mathbb{Q} の Galois 拡大である.

標数 0 の場合には体 K 上の有限次

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega^3\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3})$ は Galois 拡大を $F(x) \in K[x]$ の根をすべて K に
 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\omega)$ 上での $x^3 - 3$ の最小分解体なので $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\omega)$ の Galois 拡大である. 付け加えることによりして作れる.

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, i^4\sqrt[4]{7}, -i^4\sqrt[4]{7}, -i^4\sqrt[4]{7})$ は
 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(i)$ 上での $x^4 - 7$ の最小分解体なので $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(i)$ の Galois 拡大である.

重要 { $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ は \mathbb{Q} 上での $\sqrt[3]{3}$ の共役元 $\omega^3\sqrt[3]{3}$ を含まないので \mathbb{Q} の Galois 拡大ではない,
 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ は \mathbb{Q} 上での $\sqrt[4]{7}$ の共役元 $i^4\sqrt[4]{7}$ を含まないので \mathbb{Q} の Galois 拡大ではない. \square