資料04-1

定義 Kを$\mathbb{C}$の部分体とし，$\alpha\in\mathbb{C}$とする．

αがK上作図可能であるとは，Kの元たちから出発して，加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかえしてαが得られることだと定める．□

例 $\sqrt{2}$や$\pm i=\pm\sqrt{-1}$や$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$は$\mathbb{Q}$上作図可能である．

$\sqrt{\pi}$は$\mathbb{Q}(\pi)$上作図可能である．

$a,b,c\in K$のとき，$ax^2+bx+c=0$の解はK上作図可能である．□

正の整数nに対して，$\zeta_n=e^{2\pi i/n}$とおく．　1の原始n乗根の1つ

問題3-1 ζ_5が$\mathbb{Q}$上作図可能なことを示せ．□

ヒント $\omega=\zeta_5$とおく．2次方程式の解と係数の関係を使う．

$\alpha=\omega+\omega^4$, $\beta=\omega^2+\omega^3$とおくと，$\alpha+\beta=?$, $\alpha\beta=?$.

$\omega+\omega^4=\alpha$, $\omega\cdot\omega^4=1$. □

注意 本質的に正五角形の作図可能性！□

注意 $\omega=\zeta_5\neq1$かつ$\omega^5-1=(\omega-1)(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$より，$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$.

問題2-2(4)の結果より，$x^4+x^3+x^2+x+1$は$\mathbb{Q}$上既約な多項式である．

問題3-1は本質的に「加減乗除と平方根のみを使って方程式$x^4+x^3+x^2+x+1=0$を解け」という問題とみなされる．□

$\boxed{\text{問題3-1 解答例}}$ $\omega = \zeta_5 = e^{2\pi i/5}$ とおく. $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$ である.

条件 $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 \overset{(*)}{=} 0$, $\operatorname{Re}\omega > 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$ で ω は一意に特徴付けられる.

$\boxed{1}$ $\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$ とおく. このとき, $\alpha + \beta = -1$ でかつ

$$\alpha\beta = (\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) \overset{\omega^5=1}{=\!=\!=} \omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2 \overset{(*)}{=} -1.$$

ゆえに, α と β は方程式 $\lambda^2+\lambda-1=0$ の解である. $\alpha = \omega+\omega^4 = \omega+\overline{\omega} \in \mathbb{R}_{>0}$ なので,

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \quad \text{ゆえに,} \quad \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \qquad \left(\alpha^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \alpha^2-4 = -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\boxed{2}$ $\omega+\omega^4 = \alpha$ と $\omega\cdot\omega^4 \overset{(*)}{=} 1$ より, ω と ω^4 は方程式 $\mu^2-\alpha\mu+1=0$ の解である. $\operatorname{Im}\omega>0$ より,

$$\omega = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2} = \frac{\alpha+\sqrt{4-\alpha^2}\,i}{2}.$$

これで, ω は有理数から出発して, 加減乗除と平方根をとる操作を有限回くりかえすことによって得られることがわかった. つまり, ω は作図可能である. □

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の方法はそのまま ζ_{17} の場合(問題3-2)にも使える. □

2次方程式を4回解いて ζ_{17} を求めることになる.

$\boxed{追記}$ 問題3-1は本質的に

4次方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を2次方程式たちに帰着して解け

という問題に等しい。これを以下のようにして解くこともできる。

「$x^4+x^3+x^2+x+1=0$」は「$x \neq 0$ かつ $x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$」と同値である。

以下, $x \neq 0$ と仮定する。

$y=x+x^{-1}$ とおくと, $y^2=x^2+2+x^{-2}$ なので,

$x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$ は $y^2+y-1=0$ と同値である。

$y=x+x^{-1}$ は $x^2-yx+1=0$ と同値である。

以上より, $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解法は, 連立方程式

$$\begin{cases} y^2+y-1=0 & \cdots ① \\ x^2-yx+1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解法に帰着できることがわかる。

$$y^2+y-1 \;\downarrow\; y^2-4=-(y+3)=-\frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \;\downarrow$$

① の解の全体は, $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

y が与えられたときの ② の解の全体は, $x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$.

□

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ ζ_{17} が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ. □ ← かなり非自明.

(これに関連した問題をずっと後にレポート課題に出す予定)

$\boxed{\text{解答例}}$ $\omega = \zeta_{17} = e^{2\pi i/17}$ とおく. このとき, $\omega^{17} = 1$, $\omega \neq 1$, $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{16} \overset{(*)}{=} 0$.

$\omega_0 = \omega$, $\omega_{k+1} = \omega_k^3$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$ とおく. それらを計算すると,

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ω_k	ω	ω^3	ω^9	ω^{10}	ω^{13}	ω^5	ω^{15}	ω^{11}	ω^{16}	ω^{14}	ω^8	ω^7	ω^4	ω^{12}	ω^2	ω^6	ω

ゆえに, $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{15}\} = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{16}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + z + z^2 + \cdots + z^{16} = 0\}$. ← 1の原始17乗根全体の集合

$\boxed{1}$ $\alpha_0 = \sum_{i=0}^{7} \omega_{2i}$, $\alpha_1 = \sum_{i=0}^{7} \omega_{2i+1}$ とおく. $\alpha_0 + \alpha_1 \overset{(*)}{=} -1$ でかつ

$\alpha_0 \alpha_1 = (8 \times 8 = 64\text{項を整理する}) = 4 \sum_{k=1}^{16} \omega^k \overset{(*)}{=} -4$.

ゆえに, α_0, α_1 は方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ の解になる.

$\boxed{2}$ $\beta_i = \sum_{j=0}^{3} \omega_{4j+i}$ $(i=0,1,2,3)$ とおく。 $\beta_0+\beta_2=\alpha_0$, $\beta_1+\beta_3=\alpha_1$ でかつ

$\beta_0\beta_2 = (4\times4=16\text{項}) = \sum_{k=1}^{16} w^k \overset{(*)}{=} -1$, $\beta_1\beta_3 = (4\times4=16\text{項}) = \sum_{k=1}^{16} w^k = -1$.

ゆえに, β_0, β_2 は $\lambda^2-\alpha_0\lambda-1=0$ の解であり, β_1, β_3 は $\lambda^2-\alpha_1\lambda-1=0$ の解になる。

$\boxed{3}$ $\gamma_i = \omega_i + \omega_{i+8}$ $(i=0,1,\cdots,7)$ とおく。 $\gamma_i+\gamma_{i+4}=\beta_i$ $(i=0,1,2,3)$ でかつ

$\gamma_i\gamma_{i+4} = \beta_{i+1}$ $(i=0,1,2,3,\ \beta_4=\beta_0$ とおく$)$。 たとえば,

$$\gamma_0\gamma_4 = (\omega_0+\omega_8)(\omega_4+\omega_{12}) = (w+w^{16})(w^{13}+w^4) = w^{14}+w^5+w^{12}+w^3$$
$$= \omega_9+\omega_5+\omega_{13}+\omega_1 = \beta_1$$

ゆえに, γ_i, γ_{i+4} は $\mu^2-\beta_i\mu+\beta_{i+1}=0$ の解になる。

$\boxed{4}$ $\omega_i+\omega_{i+8}=\gamma_i$ でかつ $\omega_i\omega_{i+8}=1$ $(i=0,1,\cdots,7)$.

たとえば $\omega_0\omega_8 = w\cdot w^{16} = w^{17} = 1$.

ゆえに, ω_i, ω_{i+8} は $\nu^2-\gamma_i\nu+1=0$ の解になる。

以上によって, $\omega_0=w$ を含む ω_i の全体が有理数から出発して四則演算と二次方程式を解くことの有限回のくりかえしで作られることがわかった。

特に w は作図可能である。 □

$\boxed{\text{注意}}$ $\sigma(\omega)=\omega^3$, $\sigma(a)=a$ $(a\in\mathbb{Q})$ をみたす体 $L=\mathbb{Q}(\omega)$ の自己同型 σ が存在することを示せる. (ヒント: $\mathbb{Q}(\omega^k)\cong\mathbb{Q}[x]/(1+x+\cdots+x^{16})$, $k=1,2,\ldots,16$)

このとき, $\{\sigma^k(\omega)\mid k=0,1,\ldots,15\}=\{\omega^k\mid k=1,2,\ldots,16\}=\{z\in\mathbb{C}\mid 1+z+\cdots+z^{16}=0\}$ でこの集合は $\mathbb{Q}(\omega)$ の $\mathbb{Q}$ 上での基底になる ($1+x+\cdots+x^{16}$ の $\mathbb{Q}$ 上での既約性より).

このことを使うと, 前ページまでの計算を簡略化できる.

たとえば, $\omega_k=\sigma^k(\omega)$, $\alpha_k=\sum_{i=0}^{7}\sigma^{2i+k}(\omega)$, $\sigma(\alpha_k)=\alpha_{k+1}$, $\alpha_{k+2}=\alpha_k$ より, 特に, $\sigma(\alpha_0\alpha_1)=\sigma(\alpha_0)\sigma(\alpha_1)=\alpha_1\alpha_0=\alpha_0\alpha_1$ と σ の作用で $\alpha_0\alpha_1$ は不変になる.

$\alpha_0\alpha_1$ は ω のべきたちの $8^2=64$ 個の和になるので

$$\alpha_0\alpha_1=\sum_{k=0}^{15}c_k\sigma^k(\omega),\quad c_k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0},\quad \sum_{k=0}^{15}c_k=64$$

と表わされる. $\sigma^k(\omega)$ $(k=0,1,\ldots,15)$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立で, $\sigma(\alpha_0\alpha_1)=\alpha_0\alpha_1$ より, c_k たちは互いに等しいことがわかる. したがって, $c_k=4$, すなわち,

$$\alpha_0\alpha_1=4\sum_{k=0}^{15}\sigma^k(\omega)=4\sum_{l=1}^{16}\omega^l=-4.$$

しかし, エレガントでない素朴な方法で $\alpha_0\alpha_1=-4$ を示す経験も重要である. $\square$

$\boxed{追記}$ $\beta_k = \sum_{i=0}^{3} \sigma^{4i+k}(\omega)$, $\sigma(\beta_k) = \beta_{k+1}$, $\beta_{k+4} = \beta_k$ より, $\sigma^2(\beta_k\beta_{k+2}) = \beta_k\beta_{k+2}$.

$\beta_0\beta_2$ は $4^2=16$ 個の $\omega_l = \sigma^l(\omega)$ たちの和になり, σ^2 の作用で不変で,

項として, $\omega_0\omega_2 = \omega_3$ と $\omega_0\omega_6 = \omega_8$ を含むので, $\beta_0\beta_2 = \sum_{l=0}^{15}\omega_l = -1$.

これの両辺に σ^k を作用させると, $\beta_k\beta_{k+2} = -1$.

$\gamma_k = \sum_{i=0}^{1} \sigma^{8i+k}(\omega)$, $\sigma(\gamma_k) = \gamma_{k+1}$, $\gamma_{k+8} = \gamma_k$ より, $\sigma^4(\gamma_k\gamma_{k+4}) = \gamma_k\gamma_{k+4}$.

$$\gamma_0\gamma_4 = (\omega_0+\omega_8)(\omega_4+\omega_{12}) = (\omega+\omega^{16})(\omega^{13}+\omega^4) = \omega^{14}+\omega^5+\omega^{12}+\omega^3$$
$$= \omega_9+\omega_5+\omega_{13}+\omega_1 = \beta_1$$

これに, σ^k を作用させると, $\gamma_k\gamma_{k+4} = \beta_{k+1}$.

$\omega_0\omega_8 = \omega\cdot\omega^{16} = \omega^{17} = 1$. これに σ^k を作用させると, $\omega_k\omega_{k+8} = 1$.

以上によって, 前々ページまでで略した計算がすべて埋まった. □

以上を見すぎてしまう前に自分で計算することを楽しんでほしいです!
特に数学を教える仕事に興味がある人は色々計算しておくとよい!
数学の研究でも素朴な計算が重要である!

$\boxed{\text{問題 3-3}}$ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ. □

$\boxed{\text{解答例}}$ 分子分母に $(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6})$ を
かけて, がんばって計算すると分母が有理化される.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = 376$$

$$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = -4-14\sqrt{2}-16\sqrt{3}+38\sqrt{6}.$$

$$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = \frac{-4-14\sqrt{2}-16\sqrt{3}+38\sqrt{6}}{376} = -\frac{1}{94}-\frac{7}{188}\sqrt{2}-\frac{2}{47}\sqrt{3}+\frac{19}{188}\sqrt{6}. \quad □$$

$\boxed{\text{考え方}}$ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ の $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ を $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ に
おきかえて得られる4つの数をかけあわせると有理数(この場合は整数)
になる. このような観察が Galois 理論に至る道になっている. □

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})\sqrt{2}$ ← これの分の1の分母から$\sqrt{2}$を消すには
分子分母に $(1+\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})\sqrt{2}$ をかければよい, 同様の方法で $\sqrt{3}$ も消せる. } → 上と本質的に同じことになる.

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に

$$(a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{mn})(a-b\sqrt{m}+c\sqrt{n}-d\sqrt{mn})$$
$$=(a+c\sqrt{n})^2-m(b+d\sqrt{n})^2$$
$$=\underbrace{a^2-mb^2+nc^2-mnd^2}_{=:A}+\underbrace{2(ac-mbd)}_{=:B}\sqrt{n}.$$

$$(A+B\sqrt{n})(A-B\sqrt{n})=A^2-nB^2.$$

以上の計算より, $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Q}$ のとき,

$a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{m}\sqrt{n}$ の中の $\sqrt{m}, \sqrt{n}$ をそれぞれ $\pm\sqrt{m}, \pm\sqrt{n}$ でおきかえてできる4つの数をかけあわせると有理数になることがわかる. $\square$

$\boxed{\text{注意}}$ $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ の体の自己同型 σ, τ で

$$\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt{3})=\sqrt{3},\quad \tau(\sqrt{3})=-\sqrt{3},\ \tau(\sqrt{2})=\sqrt{2}$$

をみたすものが一意に存在する. このような σ, τ をうまく利用することがGalois理論になっている. $\square$

問題3-4 $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する。$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示せ。

ここで、$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体で最小のものを表す。□

解答例

$\boxed{1}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示そう。$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を含む。

$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体なので、$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$。

$\boxed{2}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示そう。$a \neq b$ より $\sqrt{a} \neq \pm\sqrt{b}$, 特に $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$ なので、

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ni \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ni \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} = \sqrt{a}, \\
&\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ni \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} = \sqrt{b}.
\end{aligned}\right\} \text{$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む.}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体なので、$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$。

以上によって、$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ が示された。 □

$\boxed{\text{問題 3-5}}$ $\alpha = \omega \sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(L が体 K の拡大体のとき,

$[L:K] = [L/K] = \dim_K L$

と書き, これを L/K の拡大次数と呼ぶ.) □

$\boxed{\text{ヒント}}$ α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式は x^3-7 になる. $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. □

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}$ は $x^3-7=0$ の解でかつ, x^3-7 は $\mathbb{Q}$ 上既約なので, x^3-7 は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式になる (問題 2-4 の解答例を見よ). ゆえに, 体の同型 $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ $(f(\alpha) \leftrightarrow \overline{f(x)} = (f(x) \bmod x^3-7))$ を得る. $\mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間としての基底として, $1, x, x^2$ の像をとれる. 特に, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(x^3-7) = 3$. ゆえに, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha) = 3$.

$\mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ の中で $\bar{x}^3 = 7$ なので $\bar{x}$ の 3 乗以上の項は $\bar{x}$ の 2 乗以下の項の和で書ける.

(2) $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ であることを示そう。(1) と同様にして、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ なので、$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ となる。もしも $\omega \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ならば $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ も1の原始3乗根を含むことになって矛盾する。ゆえに、$\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ である。

(注 $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$)

ゆえに、$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha)(\omega) \supsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$。すなわち $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] > 1$。

ω は $x^2+x+1=0$ の解になっているので、$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$。

したがって、$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$。

$\omega^2 = -\omega - 1$ なので ω の2乗以上の項は ω の1乗以下の項の $\mathbb{Q}$ 上での一次結合で書ける。

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$. $\square$

講義でやるはず

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の議論を見直せば、

$\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上のベクトル空間としての基底として $1, \omega$ がとれ、

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の基底として $1, \alpha, \alpha^2$ がとれ、

$\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の基底として、$1, \alpha, \alpha^2, \omega, \omega\alpha, \omega\alpha^2$ がとれることがわかる。 $\square$