問題 9-1 （$\mathbb{F}_p$ の代数閉包）

p は素数であるとし，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく．$\mathbb{F}_p$ は位数 p で標数 p の有限体になる．

Ω は代数閉体であるような $\mathbb{F}_p$ の拡大体であるとする． $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ と書く．

（そのような Ω の存在は Steinitz の定理によって保証される．）以下を示せ：

(1) Ω の任意の部分体 K は $\mathbb{F}_p$ を含む．

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ について，$F_n(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ とおき，
Ω における $F_n(x)$ の根全体を $L_n = \{\alpha \in \Omega \mid F_n(\alpha) = 0\}$ と書く．
このとき，L_n は Ω に含まれる唯一つの位数 p^n の有限部分体になる．
以下，$\mathbb{F}_{p^n} = L_n$ とおく．

(3) $m|n$ のとき，$\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$

(4) $L_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ とおく．L_∞ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉包になる．

(5) $e, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $q = p^e$ とし，$\mathbb{F}_{q^n}$ の $\mathbb{F}_q$ 上の Frobenius 自己同型 F を $F(\gamma) = \gamma^q$ $(\gamma \in \mathbb{F}_{q^n})$ と定める．
$\mathbb{F}_{q^n}$ は $\mathbb{F}_q$ の n 次の Galois 拡大で $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) = \langle F \rangle \cong C_n$． □

注意 上の結果は大雑把に言って，標数 p の Ω に含まれるすべての有限体の和集合として，$\mathbb{F}_p$ の代数閉包が得られることを意味している！ $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^n}$．
一般の場合とちがって，$\mathbb{F}_p$ の代数閉包は特別に易しい． □

$\boxed{\text{問題 9-2}}$ Artinの定理（資料08-2を見よ）を認めて以下を示せ．

← $t_1, \dots, t_n$ は文字

k は体であるとし，$L = k(t_1, \dots, t_n)$ は体 k 上の n 変数有理函数体であるとする．$t_1, \dots, t_n$ の基本対称式 $e_1, \dots, e_n$ を次のように定める：

$$e_r = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n} t_{i_1} \cdots t_{i_r}. \quad \leftarrow \binom{n}{r} \text{項の式．}$$

たとえば，$n = 3$ のとき，

$$e_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad e_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad e_3 = t_1 t_2 t_3.$$

L の部分体 K を $K = k(e_1, \dots, e_n)$ と定める．以下を示せ．

(1) L は $F(x) = x^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r e_r x^{n-r} \in K[x]$ の K 上での最小分解体である．

(2) $[L : K] = n!$

(3) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong S_n$. ←（これで S_n をGalois群に持つGalois拡大が作れた） □

$\boxed{\text{ヒント}}$ L への S_n の自然な作用に関する L^{S_n} を K' と書く．

Artinの定理より，$\mathrm{Gal}(L/K') \cong S_n$, $[L : K'] = n!$ となる．

$K \subset K'$ なので $[L : K] \geqq n!$ がわかる．$[L : K] \leqq n!$ を示せば $K = K'$ が得られる．□