資料13-2

$K=\mathbb{Q},\ n=3$

**問題13-1** $F(x)=x^3-21x+28$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

(2) $F(x)$ の3つの根を $\alpha, \beta, \gamma$ と書き、$D=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと、

$D=126^2$ となる。

位数3の巡回群

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を $L$ と書くと、$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}\\ A_3}}{C_3}$。 □

**注意** 一般に $x^3+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき、

$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2=-4a^3-27b^2$ となることを要領よく示してみよ。 □

**問題13-2** $F(x)=x^3+3x^2-3$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である。

(2) $F(x)$ の3つの根を $\alpha, \beta, \gamma$ と書くとき、$D=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ とおくと、

$D=9^2$ となる。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を $L$ と書くと、$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong C_3$。

**注意** 一般に $x^3+ax^2+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき、

$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2=-b(4a^3+27b)$ となることも示せ。 □