$\boxed{\text{問題 2-1}}$ (易) $x^3-15x+4=0$ の3つの解を問題1-6の解答例の方法で作り、-4が解の1つになっていることを使って求めた3つの解と一致することを示せ。

次ページを見る前にこの問題を解くこと。動画もここでストップ！

ためしに4の約数 $\pm1, \pm2, \pm4$ を x に代入すると、$x=-4$

$$x^3-15x+4 = -4^3+15\cdot4+4 = -64+60+4=0.$$

$$\begin{array}{r}
x^2-4x+1 \\
x+4 \enclose{longdiv}{x^3 \qquad -15x+4} \\
x^3+4x^2 \\
\hline
-4x^2-15x \\
-4x^2-16x \\
\hline
x+4 \\
x+4 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$x^3-15x+4 = (x+4)(x^2-4x+1)$$

$$x^2-4x+1=0 \iff x=2\pm\sqrt{3}$$

$x^3-15x+4=0$ の解は

$$x=-4,\ 2\pm\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{解答例}}$ $p=5,\ q=4$ とおく.

$x^3-15x+4=x^3-3px+q=0$ は問題1-6の解答例によれば以下のようにして解ける. $\lambda^2-q\lambda+p^3=\lambda^2-4\lambda+125=0$ を解くと,

$$\lambda = 2\pm\sqrt{4-125} = 2\pm\sqrt{-121} = 2\pm\sqrt{11}\,i \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

$Y=2+\sqrt{11}\,i$ とおき, Y の立法根の1つを $y=\sqrt[3]{2+11i}$ と書き, $z=\dfrac{p}{y}=\dfrac{5}{y}$ とおく.
このとき $x^3-15x+4=0$ は次のように解ける:

$$x=-y-z,\ -wy-w^2z,\ -w^2y-wz \qquad (w^2+w+1=0).$$

$\{-y-z,\ -wy-w^2z,\ -w^2y-wz\}=\{-4,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}\}$ を示したい.

Yの立法根の1つとして，$y = \boxed{2+i}^{=y}$ がとれる． ← ここが大変．

実際，$(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i = Y$.

$$z = \frac{5}{y} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{4+1} = \boxed{2-i}^{=z},$$

このとき，$y = 2+i$ と $z = 2-i$ より，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ で

$$\begin{cases} -y - z = \underline{-2-i}\ \underline{-2+i} = -4 \\ -\omega y - \omega^2 z = \underbrace{-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\ \underbrace{-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -\cancel{2}\mathrm{Re}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{\cancel{2}}(2+i)\right) = 2+\sqrt{3} \\ -\omega^2 y - \omega z = \underbrace{-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\ \underbrace{-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -2\mathrm{Re}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)\right) = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

互いに複素共役　$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

これで示すべきことが示された． □

ポイント　$2+11i$ の立法根の1つとして $2+i$ がとれること． □