位数 q の有限体を $\mathbb{F}_q$ と表す。($\mathbb{F}_q$ を $GF(q)$ と書くこともある。)

$\leftarrow$ Galois field の略

$\boxed{\text{問題 10-0}}$ 問題 5-1 〜 5-3 および問題 9-1 について復習せよ。 □

$\boxed{\text{問題 5-1}}$ K は標数 0 の体であるとし，L はその任意の拡大体であるとする。K 上の既約多項式が L の中に重根を持たないことを示せ。 □

$\boxed{\text{問題 5-2}}$ 正標数の体の標数が常に素数になることを示せ。 □

$\boxed{\text{問題 5-3}}$ p は素数であるとし，$L = \mathbb{F}_p(t) =$ (1 変数 t の $\mathbb{F}_p$ 上の有理函数体) とおく。L の部分体 K と K 上の既約多項式 $F(x) \in K[x]$ の組 $(K, F(x))$ で $F(x)$ が L の中に重根を持つものの 1 つを具体的に構成せよ。 □

$L = \mathbb{F}_p(t)$, $K = \mathbb{F}_p(t^p)$, $F(x) = x^p - t^p \in K[x]$ が例になっている。
(これは純非分離拡大の典型例になっている。)

$\boxed{\text{問題 10-1}}$ $p=17, 23, 41$ について $\mathbb{F}_p^\times = \langle a \rangle$ をみたす $a \in \mathbb{F}_p^\times$ を求めよ。 □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ と書くと、

$\underline{2} \neq 1,\ 2^2 = \underline{4} \neq 1,\ 2^3 = \underline{1}$ なので $\langle 2 \rangle \subsetneq \mathbb{F}_7^\times$. （次に1, 2, 4 以外を調べる。）

$\underline{3} \neq 1,\ 3^2 = \underline{2} \neq 1,\ 3^3 = \underline{6} \neq 1,\ 3^4 = \underline{4} \neq 1,\ 3^5 = \underline{5} \neq 1,\ 3^6 = \underline{1}$ なので $\mathbb{F}_7^\times = \langle 3 \rangle$. □

$\boxed{\text{問題 10-2}}$ K は正標数 p の体で $a, b \in K$ であるとし、

$x^p - a$ と $x^p - x - b$ は K 上既約であると仮定し、

L, M をそれぞれの K 上での最小分解体であるとする。

L と M が体 K 上で同型になることはあるか？ □

$\boxed{\text{問題 10-3}}$ 有限体の有限次拡大が単拡大になることを示せ。 □

$\boxed{\text{問題 10-4}}$ k は正標数 p の体であるとし，$L = k(s,t)$，$K = k(s^p, t^p)$ とおく。

このとき，拡大 L/K について，$[L:K] = p^2$ で L が K の単拡大にならないことを示せ。

ここで，$k(s,t)$ は体 K 上の 2 変数有理函数体である。（cf. 問題 5-3） □