資料14-2

低次のGalois拡大の具体例を作るときに知っていると便利な判別式の話

黒木玄

判別式 $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ の根の差積を $\Delta(\alpha) = \prod_{1\leqq i<j\leqq n} (\alpha_i - \alpha_j)$（$\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$）と書く。これの2乗 $\Delta(\alpha)^2$ を多項式 $f(x)$ の<u>判別式</u> (discreminant) と呼ぶ。

判別式 $\Delta(\alpha)^2$ は次のような $2n-1$ 次の行列式で表わされる：

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad f'(x) = n x^n + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

のとき、

$$\Delta(\alpha)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{6em}}^{n+1}\overbrace{\hspace{4em}}^{n-2} \\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} \\ \underbrace{\hspace{3em}}_{n-1}\underbrace{\hspace{7em}}_{n} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{array} .$$

□

もしくは
佐武一郎
『線型代数学』
第Ⅱ章§6の1を
参照せよ。

証明を知りたければ Sylvester resultant について検索せよ。

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$ のとき,

$$(-1)^{2\cdot 1/2}\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 2 & p & \\ & 2 & p \end{vmatrix} = -(p^2 + 4q - 2p^2) = p^2 - 4q.$$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q. \qquad \square$$

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^3 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のとき,

$$(-1)^{3\cdot 2/2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & \\ & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & & \\ & 3 & 0 & p & \\ & & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & p & q & \\ & 1 & 0 & p & q \\ \hline 0 & 0 & -2p & -3q & \\ & 0 & 0 & -2p & -3q \\ & & 3 & 0 & p \end{array}\right| = -(4p^3 + 27q^2) = -4p^3 - 27q^2.$$

$$\left(\begin{aligned} &\alpha+\beta+\gamma = 0, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = p, \quad \alpha\beta\gamma = -q \\ &0 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2p \quad \therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -2p \\ &p^2 = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2 = \alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 \end{aligned}\right)$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 &= -f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma) = -(3\alpha^2+p)(3\beta^2+p)(3\gamma^2+p) \\ &= -\left(p^3 + 3(-2p)p^2 + 9p^2p + 27(-q)^2\right) = -(4p^3+27q^2) = -4p^3-27q^2. \qquad \square\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^4 + px + q = \prod_{i=1}^{4}(x-\alpha_i)$ のとき,

1つ前の例と同様

$$\Delta(\alpha)^2 = (-1)^{4\cdot 3/2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p & q & & \\ & 1 & 0 & 0 & p & q & \\ & & 1 & 0 & 0 & p & q \\ 4 & 0 & 0 & p & & & \\ & 4 & 0 & 0 & p & & \\ & & 4 & 0 & 0 & p & \\ & & & 4 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -27p^4 + 256q^3. \qquad \square$$

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^4 + px^2 + q = \prod_{i=1}^{4}(x-\alpha_i)$ のとき,

$$\Delta(\alpha)^2 = (-1)^{4\cdot 3/2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & 0 & q & & \\ & 1 & 0 & p & 0 & q & \\ & & 1 & 0 & p & 0 & q \\ 4 & 0 & 2p & 0 & & & \\ & 4 & 0 & 2p & 0 & & \\ & & 4 & 0 & 2p & 0 & \\ & & & 4 & 0 & 2p & 0 \end{vmatrix} = 16q(p^2 - 4q)^2. \qquad \square$$

これらの公式の応用例については以下の文献を参照せよ.

https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf
https://people.math.carleton.ca/~williams/papers/pdf/232.pdf

佐武一郎著『線型代数学』§6の1の最後の問1の解答例

(x^n+ax+bの判別式)

$$
= (-1)^{n(n-1)/2}
\begin{array}{c}
\overbrace{}^{n+1}\ \overbrace{}^{n-2} \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & a & b & & & \\
 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a & b & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\
n & 0 & \cdots & 0 & a & & & & \\
 & n & 0 & \cdots & 0 & a & & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & & & \\
 & & & n & 0 & \cdots & 0 & a & \\
 & & & & n & 0 & \cdots & 0 & a
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n-1 \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n
\end{array}
\end{array}
$$

第1,...,n-1行目のn倍を第n,...,2n-2行目から引く

$$
= (-1)^{n/(n-1)/2}
\left|\begin{array}{cccc|cccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & a & b & & & & \\
 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a & b & & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & a & b & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1)a & -nb & & & & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1)a & -nb & & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1)a & -nb & \\
 & & & & n & 0 & \cdots & 0 & a &
\end{array}\right|
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n
$$

一般に

$$
\left|\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right| = |A||B|
$$

$$
= (-1)^{n/(n-1)2}
\left|\begin{array}{cccccc}
-(n-1)a & -nb & & & & 0 \\
0 & -(n-1)a & -nb & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & -(n-1)a & -nb & \\
n & 0 & \cdots & & 0 & a
\end{array}\right|
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n
$$

第1列を右端に移動

$$
= (-1)^{n/(n-2)}\left(
\left|\begin{array}{cccccc}
-(n-1)a & -nb & & & & 0 \\
0 & -(n-1)a & -nb & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & -(n-1)a & -nb & \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & a
\end{array}\right|
+
\left|\begin{array}{c|ccccc}
0 & -nb & & & & 0 \\
0 & -(n-1)a & -nb & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & -(n-1)a & -nb & \\
\hline
n & 0 & \cdots & & 0 & a
\end{array}\right|
\right)
$$

$$
= (-1)^{n/(n-2)}\left(
\left|\begin{array}{cccccc}
-(n-1)a & -nb & & & & 0 \\
0 & -(n-1)a & -nb & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & -(n-1)a & -nb & \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & a
\end{array}\right|
+ (-1)^{n-1}
\left|\begin{array}{ccccc|c}
-nb & & & & 0 & 0 \\
-(n-1)a & -nb & & & & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & -(n-1)a & -nb & & \vdots \\
\hline
0 & \cdots & & 0 & a & n
\end{array}\right|
\right)
$$

$$
= (-1)^{n(n-1)/2}\left((-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n + (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}n^n b^{n-1}\right)
$$

$$
= (-1)^{n(n-1)/2}\left((-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n + n^n b^{n-1}\right)
$$

$n=5$の場合

(x^5+ax+bの判別式)

$$
= (-1)^{4\cdot 5/2}
\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & a & b & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b \\
5 & 0 & 0 & 0 & a & & & & \\
 & 5 & 0 & 0 & 0 & a & & & \\
 & & 5 & 0 & 0 & 0 & a & & \\
 & & & 5 & 0 & 0 & 0 & a & \\
 & & & & 5 & 0 & 0 & 0 & a
\end{array}\right|
$$

1,2,3,4行の5倍を5,6,7,8行から引く

$$
=
\left|\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & a & b & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -4a & -5b & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a & -5b & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a & -5b & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a & -5b \\
 & & & & 5 & 0 & 0 & 0 & a
\end{array}\right|
$$

$$
=
\left|\begin{array}{ccccc}
-4a & -5b & & & \\
0 & -4a & -5b & & \\
0 & 0 & -4a & -5b & \\
0 & 0 & 0 & -4a & -5b \\
5 & 0 & 0 & 0 & a
\end{array}\right|
$$

第1列についての行列式の線形性

$$
=
\left|\begin{array}{ccccc}
-4a & -5b & & & \\
0 & -4a & -5b & & \\
0 & 0 & -4a & -5b & \\
0 & 0 & 0 & -4a & -5b \\
0 & 0 & 0 & 0 & a
\end{array}\right|
+
\left|\begin{array}{c|cccc}
0 & -5b & & & \\
0 & -4a & -5b & & \\
0 & 0 & -4a & -5b & \\
0 & 0 & 0 & -4a & -5b \\
\hline
5 & 0 & 0 & 0 & a
\end{array}\right|
$$

$$
= (-4a)^4 a + 5(-5b)^4
$$

$$
= 4^4 a^5 + 5^5 b^4.
$$

$\boxed{\text{定理}}$ 体 K 上既約な分離的 n 次多項式 $f(x) \in K[x]$ の最小分解体を L と書き，$f(x)$ の根の全体の集合を $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ と書き，A の置換と置換群 S_n を同一視しておく．このとき，$\mathrm{Gal}(L/K)$ は A に置換として作用し，それによって，S_n に単射的に埋め込まれる．その像を $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(f/K)$ と書くことにする．このとき，$\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(f/K)$ は S_n の推移的部分群になる．(この結果は演習で説明した．) このとき，

$$\underbrace{\Delta(\alpha) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)}_{\text{差積}} \in K \iff \mathrm{Gal}(f) < A_n.$$

$\boxed{\text{証明}}$ $\Leftarrow$ を示そう．$\mathrm{Gal}(f) < A_n$ ならば任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(f)$ について $\sigma(\Delta(\alpha)) = \Delta(\alpha)$ となるので $\Delta(\alpha) \in K$ となる．

偶置換になる

偶置換 $\Leftrightarrow$ その作用で差積が不変

$\Rightarrow$ の対偶を示そう．$\mathrm{Gal}(f) < A_n$ でないならば奇置換 $\sigma \in \mathrm{Gal}(f)$ が存在し，$\sigma(\Delta(\alpha)) = -\Delta(\alpha) \neq \Delta(\alpha)$ となるので $\Delta(\alpha) \notin K$ となる． $\square$

注 $\forall \beta \in L$ について，$\beta \in K \iff \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K),\ \sigma(\beta) = \beta$.

S_n の推移的部分群の例

S_3 の部分群は S_3, A_3, $\langle(1,2)\rangle$, $\langle(1,3)\rangle$, $\langle(2,3)\rangle$, $\{1\}$ の6つしかない。

$\boxed{S_3 \text{の推移的部分群の全体}}$ S_3, A_3 の2つだけ。 □

ゆえに既約な3次分離多項式 $f(x)\in K[x]$ について、$\mathrm{Gal}(f/K)\cong S_3, A_3$、この2つの可能性しかない。そして、

$$\text{判別式 } \Delta(\alpha)^2 \text{ の平方根が } K \text{ に含まれる} \iff \mathrm{Gal}(f/K)\cong A_3$$

$\Delta(\alpha)^2$ は常に K に含まれる。($\because$ $\forall\sigma\in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\sigma(\Delta(\alpha)^2)=(\pm\Delta(\alpha))^2=\Delta(\alpha)^2$)

$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=x^3-2$ の判別式は $-4\cdot 0^3-27(-2)^2=-3\cdot 6^2$。

$\sqrt{-3\cdot 6^2}=6\sqrt{-3}\notin\mathbb{Q}$ より、$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})\cong S_3$。　　注 $f(x)$ は $\mathbb{Q}(\omega)$ 上既約。

ω を1の原始3乗根とすると、$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ なので、$\mathbb{Q}(\omega)=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ となり、

$\sqrt{-3\cdot 6^2}=6\sqrt{-3}\in\mathbb{Q}(\omega)$ となる。ゆえに、$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}(\omega))\cong A_3$。

□

$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=x^3-3x-1$ の判別式は $-4(-3)^3-27(-1)^2=9^2$ で $\sqrt{9^2}=9\in\mathbb{Q}$。

ゆえに、$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})\cong A_3$。

□

一般に S_n の推移的部分群 G に対して，$X_i = \{\sigma \in G \mid \sigma(1) = i\}$ とおくと，
$G = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$ かつ $\sigma \in X_i$ について $\sigma X_1 = X_i$ より，$|X_1| = \cdots = |X_n|$ が成立するので，
G の位数は n の倍数になる．

$\boxed{S_4 \text{ の部分群の例}}$ (ある $\sigma \in S_4$ による $H \xmapsto{\text{共役}} \sigma H \sigma^{-1}$ のちがいを除いて以下しかない．)

位数	部分群
1	$\{1\}$
2	$\langle (1,2) \rangle$, $\langle (1,2)(3,4) \rangle$
3	$\langle (1,2,3) \rangle$
4	$\langle (1,2,3,4) \rangle \cong C_4$ 巡回群, V_4 Kleinの四元群 $= \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$, $\langle (1,2), (3,4) \rangle \cong C_2 \times C_2$
6	$\langle (1,2,3), (1,2) \rangle$
8	$\langle (1,2,3,4), (2,4) \rangle \cong D_4$ 二面体群
12	A_4 ← 交代群
24	S_4

この中で推移的なのは
$$\begin{cases} \langle (1,2,3,4) \rangle = C_4, \quad V_4, \\ \langle (1,2,3,4), (2,4) \rangle \cong D_4, \quad A_4, \quad S_5 \end{cases}$$
の5種類

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^4 - 2$. 判別式は $256(-2)^3 = -2\cdot 32^2$.

注 x^4-2 は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上既約

$\sqrt{-2\cdot 32^2} \notin \mathbb{Q}$ より, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \not\subset A_4$. 実際, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong D_4 \not\subset A_4$.

$\sqrt{-2\cdot 32^2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ より, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})) \not\subset A_4$. 実際, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})) \cong C_4 \not\subset A_4$

$(1,2,3,4) = (1,2)(2,3)(3,4)$ は奇置換なので $(1,2,3,4) \notin A_4$.

x^4-2 の最小分解体は $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})$ であることより,

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4,\quad \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})) \cong C_4.$$

□

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = (x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(x-(-\sqrt{2}+\sqrt{3}))(x-(\sqrt{2}-\sqrt{3}))(x-(-\sqrt{2}-\sqrt{3}))$.

判別式は $16\cdot 1((-10)^2 - 4\cdot 1)^2 = (4\cdot 96)^2$ でこれの平方根 $\in \mathbb{Q}$ となる.

ゆえに, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \subset A_4$. 実際, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong V_4 \subset A_4$.

注 x^4-10x^2+1 は $\mathbb{Q}$ 上既約

$x^4 - 10x^2 + 1$ の最小分解体は $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ で

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2 \cong V_4.$$

□

$\{\sqrt{2}+\sqrt{3}, -\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}\}$ への作用を見る.

$\mathbb{Q}$上既約になる

$\boxed{例}$ $f(x) = x^4 + 36x + 63 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$,

$$\alpha = \frac{-3+(\sqrt{2}-1)\sqrt{-3}}{\sqrt{2}},\quad \beta = \frac{-3-(\sqrt{2}-1)\sqrt{-3}}{\sqrt{2}},\quad \gamma = \frac{3+(\sqrt{2}+1)\sqrt{-3}}{\sqrt{2}},\quad \delta = \frac{3-(\sqrt{2}+1)\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}.$$

$f(x)$の最小分解体は $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-3})$ で, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2 \cong V_4$.

$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$への作用を見る

Kleinの四元群

$$(f(x)\text{の判別式}) = -27\cdot\overset{3^3\cdot 2^8\cdot 3^8}{36^4} + 256\cdot 63^3 = -2^8\cdot 3^{11} + 2^8\cdot 3^6\cdot 7^3$$

$$= 2^8\cdot 3^6(7^3 - 3^5) = 2^8\cdot 3^6\cdot 100 = 2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^2$$

ゆえに(判別式の平方根)$\in \mathbb{Q}$ となるので, $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \subset A_4$.

実際 $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) = V_4 \subset A_4$.

$\square$

この例は次の文献の p.8 の Table 5 にある:

https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf

$\boxed{\text{定理}}$ (渡辺敬一・草場公邦『代数の世界』 pp. 231−235) 以下, 標数 0 とする.

体 K 上既約な 4 次の多項式 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c \in K[x]$ を考える.

$g(\lambda) = \lambda^3 + 2a\lambda^2 + (a^2 - 4c)\lambda - b^2$ とおき, $g(\lambda)$ の K 上での最小分解体を M と書く.

$f(x)$ の判別式を $D = \Delta(\alpha)^2$ と書く.

証明は略

(1) $g(\lambda)$ が K 上既約なとき,

$$\begin{cases} \sqrt{D} = \Delta(\alpha) \in K \implies \mathrm{Gal}(f/K) = A_4, \\ \sqrt{D} = \Delta(\alpha) \notin K \implies \mathrm{Gal}(f/K) = S_4. \end{cases}$$

(2) $g(\lambda)$ が $K[x]$ 内で既約な 2 次式と 1 次式の積に分解するとき,

$$\begin{cases} f(x) \text{ が } M \text{ 上既約} \implies \mathrm{Gal}(f/K) \cong D_4, \\ f(x) \text{ が } M[x] \text{ 内で 2 つの既約 2 次式に分解} \implies \mathrm{Gal}(f/K) \cong C_4. \end{cases}$$

(3) $g(\lambda)$ が $K[x]$ 内で 3 つの 1 次式の積に分解するとき, $\mathrm{Gal}(f/K) = V_4$.

$\boxed{\text{注意}}$ $f(x)$ と $g(\lambda)$ の判別式は等しい. $\square$

前ページの $f(x)$ と $g(x)$ の関係

4次方程式の解法

仮に $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ が次のように書けたとする:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+p+q+r)(x+p-q-r)(x-p+q-r)(x-p-q+r) \\
&= x^4 - 2(p^2+q^2+r^2)x^2 + 8pqr\,x + p^4+q^4+r^4 - 2(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2) \\
&= x^4 \underbrace{-2(p^2+q^2+r^2)}_{=a} x^2 + \underbrace{8pqr}_{=b}\, x + \underbrace{(p^2+q^2+r^2)^2 - 4(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)}_{=c}
\end{aligned}
$$

$A = 4(p^2+q^2+r^2)$, $B = 16(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)$, $C = 64p^2q^2r^2$ とおくと, A, B, C は $4p^2, 4q^2, 4r^2$ の基本対称式.

$a = -\frac{1}{2}A$, $b^2 = C$, $c = \frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{4}B = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}B$ すなわち $A = -2a$, $B = a^2 - 4c$, $C = b^2$.

ゆえに, $f(x)$ が上のように書けることと, $4p^2, 4q^2, 4r^2$ が 3次方程式

$$g(\lambda) = \lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = \lambda^3 + 2a\lambda^2 + (a^2-4c)\lambda - b^2 = 0$$

の3つの解になることは同値である. そのとき, 4次方程式 $f(x)=0$ の4つの解は次のように書ける.

$$x = -p-q-r,\quad -p+q+r,\quad p-q+r,\quad p+q-r$$

discriminant(x^4+ax^2+bx+c), discriminant(x^3+2ax^2+(a^2-4c)x-b^2)

自然言語　数学入力　拡張キーボード　例を見る　ア

入力

$\{\mathrm{Discriminant}[x^4 + a x^2 + b x + c, x], \mathrm{Discriminant}[x^3 + 2 a x^2 + (a^2 - 4c) x - b^2, x]\}$

結果

$\{16 a^4 c - 4 a^3 b^2 - 128 a^2 c^2 + 144 a b^2 c - 27 b^4 + 256 c^3,$
$16 a^4 c - 4 a^3 b^2 - 128 a^2 c^2 + 144 a b^2 c - 27 b^4 + 256 c^3\}$

一致

WolframAlphaによる $f(x)$ と $g(x)$ の判別式の一致の確認

https://www.wolframalpha.com/input?i=discriminant%28x%5E4%2Bax%5E2%2Bbx%2Bc%29%2C+discriminant%28x%5E3%2B2ax%5E2%2B%28a%5E2-4c%29x-b%5E2%29&lang=ja

$\boxed{例}$ $f(x)=x^4+36x+63$ のとき，$g(\lambda)=\lambda^3-4\cdot 63\lambda+36^2=(\lambda+6)(\lambda+12)(\lambda-18)$

なので，$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})=V_4$ (Kleinの四元群). ← 前々ページの(3)の場合 $\square$

$\boxed{例}$ $f(x)=x^4-2$ のとき，$g(\lambda)=\lambda^3+8\lambda=\lambda(\lambda^2+8)$.

$g(\lambda)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $M=\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.
$f(x)$ は M 上でも既約である．ゆえに，$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})\cong D_4$.

前々ページの(2)上段の場合

$g(\lambda)$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上での最小分解体は $M'=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{2})$.
$f(x)$ は $M'[x]$ の中で $f(x)=(x^2-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$ と分解するので，$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}(\sqrt{-1}))\cong C_4$. $\square$

前々ページの(2)下段の場合

$\boxed{例}$ $f(x)=x^4+8x+12$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で，$g(\lambda)=\lambda^3-48\lambda-64$ も $\mathbb{Q}$ 上既約である.

(fの判別式) $=-3^3\cdot 8^4+2^8\cdot 12^3=-2^{12}\cdot 3^3+2^{14}\cdot 3^3=2^{12}\cdot 3^4$ なので (その平方根) $\in\mathbb{Q}$,

ゆえに $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})=A_4$. 前々ページ(1)上段の場合 $\square$

$\boxed{例}$ $f(x)=x^4+2x+2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で，$g(\lambda)=\lambda^3-8\lambda+4$ も $\mathbb{Q}$ 上既約である.

(fの判別式) $=-3^3\cdot 2^4+2^8\cdot 2^3=1616=2^4\cdot 101$ なので (その平方根) $\notin\mathbb{Q}$.

ゆえに，$\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})=S_4$. 前々ページ(1)下段の場合 $\square$

例 $p, q \in \mathbb{Q}$ でかつ $f(x) = (x^2+p)^2+q = x^4+2px^2+p^2+q$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であると仮定する。
(特に $\sqrt{-q} \notin \mathbb{Q}$)

$f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体を L と書く：

$$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-p+\sqrt{-q}}, \sqrt{-p-\sqrt{-q}}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{p^2+q}, \sqrt{-p+\sqrt{-q}}\right).$$

定理の記号の下で，$a=2p$, $b=0$, $c=p^2+q$ なので，$a^2-4c=-4q$

$$g(\lambda) = \lambda^3+2a\lambda^2+(a^2-4c)\lambda-b^2 = \lambda^3+4p\lambda^2-4q\lambda = \lambda(\lambda^2+4p\lambda-4q).$$

$g(\lambda)=0 \iff \lambda = 0,\ 2(-p\pm\sqrt{p^2+q})$ なので，$g(\lambda)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $M = \mathbb{Q}(\sqrt{p^2+q})$.

定理の(3)より，

- $\Delta := \sqrt{p^2+q} \in \mathbb{Q}$ ならば $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = V_4$, $[L:\mathbb{Q}]=4$.

  このとき，$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-p+\sqrt{-q}}\right)$, $\sqrt{-p+\sqrt{-q}} = \sqrt{\dfrac{-p+\Delta}{2}} + \sqrt{\dfrac{-p-\Delta}{2}}$.

$$\left(\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{-p+\Delta}{2}}+\sqrt{\frac{-p-\Delta}{2}}\right)^2 &= \frac{-p+\Delta}{2}+\frac{-p-\Delta}{2}+2\sqrt{\frac{p^2-\Delta^2}{4}} \\ &= -p+\sqrt{-q}\end{aligned}\right)$$

定理の(2)より，$\Delta \notin \mathbb{Q}$ のとき，

- $f(x)$ が M 上でも既約ならば，$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$, $[L:\mathbb{Q}]=8$.
- $f(x)$ が M 上で2つの2次式の積に分解するならば，$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_4$, $[L:\mathbb{Q}]=4$.

  このとき，$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-p+\sqrt{-q}}\right)$ も成立している。

例えば，$p^2+q=-q$ のとき，$M = \mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ なので，$f(x)$ は $f(x) = (x^2+p-\sqrt{-q})(x^2+p+\sqrt{-q})$

と M 上で2つの2次式の積に分解するので上の後者の場合になる。 $\square$

solve	$x^4+4x^3-2x^2-12x+4=0$

$x=X-1$ とおく.

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+4 = X^4-8X^2+11=0 \Leftrightarrow X^2=4\pm\sqrt{5} \Leftrightarrow X=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{5}}$$

前ページの記号の下で, $2p=-8$, $p^2+q=11$, $\Delta=\sqrt{p^2+q}=\sqrt{11}$ で,

X^4-8X^2+11 は $M=\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ 上でも既約なので $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong D_4$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt{11},\sqrt{4+\sqrt{5}})$.

solve	$x^4+4x^3+2x^2-4x-1=0$

$x=X-1$ とおく.

$$x^4+4x^3+2x^2-4x-1 = X^4-4X^2+2=0 \Leftrightarrow X^2=2\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow X=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$$

前ページの記号の下で, $2p=-4$, $p^2+q=2$, $p=-2$, $q=-2$, $p^2+q=2=-q$ なので,

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong C_4$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$

solve	$x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0$

$x=X+1$ とおく.

$$\begin{aligned} x^4-4x^3-4x^2+16x-8 &= X^4-10X^2+1=(X^2+1)^2-12X^2=(X^2-2\sqrt{3}X+1)(X^2+2\sqrt{3}X+1) \\ &= ((X-\sqrt{3})^2-2)((X+\sqrt{3})^2-2)=(X-\sqrt{2}-\sqrt{3})(X+\sqrt{2}-\sqrt{3})(X-\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

前ページの記号の下で $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\cong C_2\times C_2\cong V_4$.

$2p=-10$, $p^2+q=1$, $\Delta:=\sqrt{p^2+q}=1\in\mathbb{Q}$, $p=-5$, $q=-24$, $\dfrac{-p-\Delta}{2}=2$, $\dfrac{-p+\Delta}{2}=3$ なので

$\sqrt{-p+\sqrt{-q}}=\sqrt{\dfrac{-p-\Delta}{2}}+\sqrt{\dfrac{-p+\Delta}{2}}$ は $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を意味する.

易しく解ける4次方程式の作り方

$a, b, c \in \mathbb{Q}$ と仮定する。

既約でなければ低次の方程式に帰着できる。

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であると仮定する。

$(x+p+q+r)(x+p-q-r)(x-p+q-r)(x-p-q+r)$

$= x^4 - 2(p^2+q^2+r^2)x^2 + 8pqr\,x + (p^2+q^2+r^2)^2 - 4(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2) \overset{(*)}{=} f(x)$ とすると、

$(t-4p^2)(t-4q^2)(t-4r^2) \underset{(**)}{=} t^3 + 2at^2 + (a^2-4c)t - b^2 =: g(t)$ でかつ $(2p)(2q)(2r) \underset{(***)}{=} b$.

逆に $(**)$ かつ $(***)$ のとき $(*)$ が成立する。

$\boxed{b=0\ のとき}$ $g(t) = t(t^2+2at+a^2-4c) = t((t+a)^2-4c)$.

$g(t)=0 \Leftrightarrow t = 0,\ -a \pm 2\sqrt{c}$.

$p=0,\ q = \dfrac{\sqrt{-a+2\sqrt{c}}}{2},\ r = \dfrac{\sqrt{-a-2\sqrt{c}}}{2}$ は $(*)$ をみたす p, q, r になっている。

そのとき、$f(x)=0 \Leftrightarrow x = -q-r,\ q+r,\ -q+r,\ q-r$.

$(q \pm r)^2 = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4c}}{2}$ なので $x = \pm\sqrt{\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4c}}{2}}$ とも書ける。

この形の解の表示は $x^4 + ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4c}}{2}$ からも得られる。

a=0の場合につづく

$$f(x) = x^4 + bx + \frac{m^3 - b^2}{4m}$$

$\boxed{a=0 のとき}$　$g(t) = t^3 - 4ct - b^2$. 以下 $b \neq 0$ と仮定する。

$\Longleftrightarrow$ $b^2 = m^3 - 4cm \Leftrightarrow 4c = m^2 - \frac{b^2}{m}$

これが有理数根 m を持つとき，すなわち，$g(m) = m^3 - 4cm - b^2 = 0$ のとき，

$g(t) = (t-m)\left(t^2 + mt + \frac{b^2}{m}\right)$ なので，$D = m^2 - \frac{4b^2}{m}$，$\kappa_{\pm} = \frac{-m \pm \sqrt{D}}{8}$ とおくと，$g(t) = 0 \Leftrightarrow t = m, 4\kappa_{\pm}$

$\left(\kappa_+ + \kappa_- = -\frac{m}{4},\ \kappa_+\kappa_- = \frac{b^2}{16m}\right)$

$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}\ (x>0)$ と約束し，

$D<0$ のとき ($m>0$ となる)，$\sqrt{\frac{-m+\sqrt{D}}{8}}\sqrt{\frac{-m-\sqrt{D}}{8}} = -\frac{\sqrt{m^2-D}}{8} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{4b^2}{m}}$ となるように $\sqrt{\ }$ の分岐をとると，

$p = -\mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}$，$q = \sqrt{\frac{-m+\sqrt{D}}{8}}$，$r = \sqrt{\frac{-m-\sqrt{D}}{8}}$ は(*)をみたす。

$$\left(q \pm r = \sqrt{-\frac{m}{4} \pm \frac{|b|}{2\sqrt{m}}}\quad \left(\sqrt{A}+\sqrt{B} = \sqrt{A+B+2\sqrt{AB}}\ より\right)\right)$$

$\boxed{証明}$　$8pqr = b$ を示せば十分である。

$D>0$，$m>0$ のとき，$D = m^2 - 4b^2/m$ より $\sqrt{D} < m$ なので

$$8pqr = 8\times\left(-\mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}\right) i\sqrt{\frac{m-\sqrt{D}}{8}}\ i\sqrt{\frac{m+\sqrt{D}}{8}} = \mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}\sqrt{\frac{4b^2}{m}} = \mathrm{sign}(b)|b| = b.$$

$D>0$，$m<0$ のとき，$D = m^2 - 4b^2/m$ より $\sqrt{D} > 0$ なので

$$8pqr = 8\times\left(-\mathrm{sign}(b)\, i\frac{\sqrt{-m}}{2}\right)\sqrt{\frac{-m+\sqrt{D}}{8}}\ i\sqrt{\frac{m+\sqrt{D}}{8}} = \mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{-m}}{2}\sqrt{\frac{4b^2}{-m}} = \mathrm{sign}(b)|b| = b.$$

$D<0$ のとき，$D = m^2 - 4b^2/m$ より $m>0$ なので，

$$8pqr = 8\left(-\mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}\right)\left(-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{4b^2}{m}}\right) = \mathrm{sign}(b)|b| = b.$$

□

WolframAlphaで確認

https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve%20x%5E4%20%2B%20bx%20%2B%20%28m%5E3%20-%20b%5E2%29%2F%284m%29%20%3D%200%20wrt%20x

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28x%2Bp%2Bq%2Br%29%28x%2Bp-q-r%29%28x-p%2Bq-r%29%28x-p-q%2Br%29%20where%20p%3D-%E2%88%9Am%2F2%2C%20q%3D%E2%88%9A%28%28-m%2B%E2%88%9AD%29%2F8%29%2C%20r%3D%E2%88%9A%28%28-m-%E2%88%9AD%29%2F8%29%2C%20D%3Dm%5E2-%284b%5E2%29%2Fm

Input interpretation

$$(x+p+q+r)(x+p-q-r)(x-p+q-r)(x-p-q+r)$$

where $p = -\frac{\sqrt{m}}{2},\ q = \sqrt{\frac{1}{8}\left(-m+\sqrt{D}\right)},\ r = \sqrt{\frac{1}{8}\left(-m-\sqrt{D}\right)},\ D = m^2 - \frac{4b^2}{m}$

Expanded form

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{m}}\, x\, \underbrace{\sqrt{-\sqrt{m^2-\frac{4b^2}{m}}-m}\ \sqrt{\sqrt{m^2-\frac{4b^2}{m}}-m}} - \frac{b^2}{4m} + \frac{m^2}{4} + x^4$$

$b, m \in \mathbb{Q}$ とし, $-\frac{1}{2}\sqrt{m}$ を $-\mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}$ におきかえると,

$$(\text{これ}) = -\mathrm{sign}(b)\frac{\sqrt{m}}{2}\left(-\sqrt{\frac{4b^2}{m}}\right) = b \text{ で } \underline{\text{OK}}$$

前ページより

$$q \pm r = \sqrt{-\frac{m}{4} \pm \frac{|b|}{2\sqrt{m}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{2|b|}{\sqrt{m}} - m}$$

Input interpretation

solve	$x^4 + bx + \frac{m^3-b^2}{4m} = 0$	for	x

Results

$$x = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{m}} - m} - \sqrt{m}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{m}} - m} - \sqrt{m}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{m} - \sqrt{-\frac{2b}{\sqrt{m}} - m}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{2b}{\sqrt{m}} - m} + \sqrt{m}\right)$$

$\boxed{例}$ $b=5$, $m=5$ のとき, $c=\dfrac{m^3-b^2}{4m}=\dfrac{125-25}{20}=5$, $\dfrac{b^2}{m}=5$,

$f(x)=x^4+5x+5$, $g(t)=t^3-20t-25=(t-5)(t^2+5t+5)$.

$g(t)=0 \iff t=5, \dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ なので, $p=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $q=\sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{5}}{8}}$, $r=\sqrt{\dfrac{-5-\sqrt{5}}{8}}$ は (*) をみたしている.

$\left(8pqr=8\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}\,i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{20}=5 \text{ OK}\right)$. (D>0, m>0の例) □

$\boxed{例}$ $b=3$, $m=-3$ のとき, $c=\dfrac{m^3-b^2}{4m}=\dfrac{-36}{-12}=3$, $\dfrac{b^2}{m}=-3$,

$f(x)=x^4+3x+3$, $g(t)=t^3-12t-9=(t+3)(t^2-3t-3)$.

$g(t)=0 \iff t=-3, \dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ なので, $p=-\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$, $q=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}}$, $r=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}}$ は (*) をみたしている.

$\left(8pqr=8\times\left(-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{21}+3}{8}}\,i\sqrt{\dfrac{\sqrt{21}-3}{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12}=3=b, \text{ OK}\right)$ (D>0, m<0の例) □

$\boxed{例}$ $b=4$, $m=2$ のとき, $c=\dfrac{m^3-b^2}{4m}=\dfrac{8-16}{8}=-1$, $\dfrac{b^2}{m}=8$,

$f(x)=x^4+4x-1$, $g(t)=t^3+4t-16=(t-2)(t^2+2t+8)$.

$g(t)=0 \iff t=2, -1\pm\sqrt{-7}$ なので, $p=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $q=\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{-7}}}{2}$, $r=\dfrac{\sqrt{-1-\sqrt{-7}}}{2}$ は (*) をみたしている.

$\left(8pqr=8\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{1-(-7)}}{4}\right)=4=b. \text{ OK}\right)$ (D<0の例) □

$(x+p+q+r)(x+p-q-r)(x-p+q-r)(x-p-q+r)$ の計算例

$$(x+p+q+r)(x+p-q-r) = (x+p)^2-(q+r)^2 = x^2+2px+p^2-q^2-2qr-r^2$$

$$(x-p+q-r)(x-p-q+r) = (x-p)^2-(q-r)^2 = x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2$$

$$(\text{上の2つの積}) = (x^2+p^2-q^2-r^2)^2-(2px-2qr)^2$$

$$= x^4+p^4+q^4+r^4+2p^2x^2-2q^2x^2-2r^2x^2-2p^2q^2-2p^2r^2+2q^2r^2$$
$$-(4p^2x^2-8pqrx+4q^2r^2)$$

$$= x^4-2(p^2+q^2+r^2)x^2-8pqrx+p^4+q^4+r^4-2(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)$$

$$= x^4-2(p^2+q^2+r^2)x^2-8pqrx+(p^2+q^2+r^2)^2-4(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)$$

4次方程式を解くために役に立つ。

$w^2+w+1=0$ のときの $(x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz)$ の計算例

$w^3=1$ より $w^4=w$

$$(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz) = x^2+y^2+z^2+(w^2+w)xy+(w^2+w)xz+(w^2+w^4)yz$$
$$= x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz.$$

$$(x+y+z\text{ と上の積}) = x^3+xy^2+xz^2-x^2y-x^2z-xyz$$
$$+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-xyz-y^2z$$
$$+x^2z+y^2z+z^3-xyz-xz^2-yz^2$$

$$= x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

3次方程式を解くためには役に立つ。

整数係数のモニックな4次多項式が既約であるかどうかの確認方法

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ であるとし，$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく．

$f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約でないことと次のどちらかが成立することは同値である：

(i) $f(x) = (x+p)(x^3 + qx^2 + rx + s)$ をみたす $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ が存在する．

(ii) $f(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ をみたす $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ が存在する．

(i)の確認方法 (i) $\Leftrightarrow$ d のある約数 $m \in \mathbb{Z}$ で $f(m) = 0$ となるものが存在する．((i)の p は $p = -m$ になる．)

(ii)の確認方法 $(x^2+px+q)(x^2+rx+s) = x^4 + (p+r)x^3 + (pr+q+s)x^2 + (ps+qr)x + qs$ より，

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+rx+s) \Rightarrow qs = d,\ \underbrace{p+r = a,\ ps+qr = c}_{q,s\text{ が与えられているとき，}p,r\text{ の連立一次方程式になる．}},\ pr = b-q-s.$$

これを使うと，$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+rx+s)$ をみたす $(p,q,r,s) \in \mathbb{Z}^4$ の可能性を有限個にしぼりこめる．

例 $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ は $\mathbb{Q}$ 上既約だが，$g(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 12$ は $\mathbb{Q}$ 上既約でない．

証明 $f(x)$ の既約性：$f(\pm 1) \neq 0$ より (i) ではないので，(ii) の不成立を確認すればよい．

$q = s = 1$ のとき，$pr = 1$，$p + r = 0$ は不可能．$q = s = -1$ のとき，$pr = 5$，$p + r = 0$ は不可能．(ii) は不成立．

$g(x)$ の非既約性：$m \mid 12$ のとき $f(m) \neq 0$ なので (i) は不成立．(ii) が成立することを示そう．

$qs = 12$ をみたす $q, s \in \mathbb{Z}$ の組み合わせは12個あるが，q, s の交換対称性より半分の6個を考えれば十分．

$q = 3, s = 4$ のとき，$p + r = 0$，$4p + 3r = 2$ より $p = 2$，$r = -2$ となり，$pr = 3 - 3 - 4 = -4$ もみたしている．

$g(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 4)$ である．これで (ii) の成立が示された．$\square$