5次以下の方程式のGalois群について

Kは体であるとし，$f(x) \in K[x]$ はK上の（既約な）n次分離多項式であるとし，
Lは$f(x)$のK上での最小分解体であるとする．
L/K はK上の有限次Galois拡大になる．
そのGalois群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ は $f(x)$の根全体の集合$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$に推移的に作用する．（Gは$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$の置換群$S_n$の推移的部分群とみなされる．）

問題8-4 (1)

$\boxed{n=2}$ $n=2$のとき，$G = \langle \sigma \rangle \cong S_2 \cong C_2$．（$\sigma$は2つの根の互換） □

$\boxed{n=p\text{は素数}}$ $K=\mathbb{Q}$で$n=p$が素数で$f(x)$がちょうど$p-2$個の実根を持つならば$G \cong S_p$となる．← 問題8-4 (2) □

$\boxed{\text{例}}$ $K=\mathbb{Q}$，$f(x) = x^5 - 16x + 2$のとき，$G \cong S_5$．← 問題8-4 (3) □

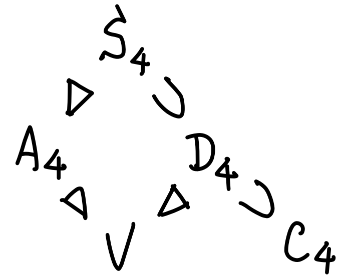
$\boxed{n=3}$ S_3の推移的部分群はA_3とS_3の2つだけである．← 問題8-2

$G \cong \underset{\cong C_3}{A_3}, \underset{\cong D_3}{S_3}$となる3次の既約多項式$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$の例を作りたくなる □

$\boxed{n=4}$ 以下の5つは S_4 の推移的部分群である; ← 問題8-3 (3)

← Kleinの四元群

$$\left\{\begin{array}{l}
\langle(1,2,3,4)\rangle \cong C_4 \\
V=\{1,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\} \cong C_2\times C_2 \\
\langle(1,2,3,4),\ (1,3)\rangle \cong D_4 \\
A_4 \\
S_4
\end{array}\right.$$



(S_4 の推移的部分群は共役を除いてこれらしかない)

$C_2\times C_2$ ≅

$G \cong C_4, V, D_4, A_4, S_4$ となる4次の既約多項式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ を作りたくなる. □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-3$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$ $\left(\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \alpha=\sqrt[3]{3}\right)$, $G\cong S_3$ ← 問題7-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-4x^2+2$, $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\alpha)$, $G\cong C_4$. ← 問題7-2. □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-2$, $\omega=\sqrt{-1}$, $\alpha=\sqrt[4]{2}$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\omega,\alpha)$, $G\cong D_4$. → 問題12-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^4-10x^2+1$ のとき, $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $G\cong C_2\times C_2$. → 問題12-2 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3-21x+28$ のとき, $G\cong C_3$. → 問題13-1 □

$\boxed{例}$ $K=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3+3x^2-3$ のとき, $G\cong C_3$. → 問題13-2 □

次回にヒント付きで出す問題

$\boxed{\text{問題 12-1}}$ $F(x)=x^4-2$, $\alpha=\sqrt[4]{2}$, $i=\sqrt{-1}$ とおく、以下を示せ、

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である、

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ に等しい。

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha,i):\mathbb{Q}]=8$、

(4) $\mathbb{Q}(\alpha,i)$ の $\mathbb{Q}$ 上での体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる：

$$\sigma(f(\alpha))=f(i\alpha)\quad (f(x)\in\mathbb{Q}(i)[x]),\qquad \tau(g(i))=g(-i)\quad (g(x)\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,i)/\mathbb{Q})=\langle\sigma,\tau\rangle\cong D_4$.

$\left(\begin{array}{l}K=\mathbb{Q},\ n=4 \text{ で}\\ G\cong D_4 \text{ になる例}\end{array}\right)$

□

$\boxed{\text{問題 12-2}}$ $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ とおく、以下を示せ、

(1) $F(x)=x^4-10x^2+1$ は $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ は $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体である。

(3) $L/\mathbb{Q}$ は 4 次の Galois 拡大である。

(4) L の $\mathbb{Q}$ 上での自己同型 σ, τ を次のように定めることができる：

$$\sigma(f(\sqrt{2}))=f(-\sqrt{2})\quad (f(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]),\qquad \tau(g(\sqrt{3}))=g(-\sqrt{3})\quad (g(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]).$$

(5) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})=\langle\sigma,\tau\rangle\cong C_2\times C_2$ (C_n は位数 n の巡回群).

$F(x)$ の根全体の集合の置換群の中の Klein の四元群に一致。

$\left(\begin{array}{l}K=\mathbb{Q},\ n=4 \text{ で}\\ G\cong C_2\times C_2 \text{ となる例}\end{array}\right)$

□