

位数 q の有限体を \mathbb{F}_q と表す. (\mathbb{F}_q を $GF(q)$ と書くこともある.)
↑ Galois field の略

10-3

問題 10-0 問題 5-1 ~ 5-3 および問題 9-1 について復習せよ. \square

問題 5-1 K は標数 0 の体であるとし, L はその任意の拡大体であるとする.
 K 上の既約多項式が L の中に重根を持たないことを示せ. \square

問題 5-2 正標数の体の標数が常に素数になることを示せ. \square

問題 5-3 p は素数であるとし, $L = \mathbb{F}_p(t) = (1 \text{ 変数 } t \text{ の } \mathbb{F}_p \text{ 上の有理関数体})$ とおく,
 L の部分体 K と K 上の既約多項式 $F(x) \in K[x]$ の組 $(K, F(x))$ で
 $F(x)$ が L の中に重根を持つものの 1 つを具体的に構成せよ. \square

$L = \mathbb{F}_p(t), K = \mathbb{F}_p(t^p), F(x) = x^p - t^p \in K[x]$ が例になっている.
(これは純非分離拡大の典型例になっている.)

問題 9-1 については資料 10-1 で解説した: $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ (\mathbb{F}_p の代数閉包).

問題 10-1 $p=17, 23, 41$ について $\mathbb{F}_p^\times = \langle a \rangle$ をみたす $a \in \mathbb{F}_p^\times$ を求めよ. \square

例 $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と書くと, $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{6}$ と書くべきだが, てめえして単に $0, 1, \dots, 6$ と書いん.
 $2 \neq 1, 2^2 = \underline{4} \neq 1, 2^3 = \underline{1}$ なので $\langle 2 \rangle \subsetneq \mathbb{F}_7^\times$. (次に $1, 2, 4$ 以外を調べる.)

$\underline{3} \neq 1, 3^2 = \underline{2} \neq 1, 3^3 = \underline{6} \neq 1, 3^4 = \underline{4} \neq 1, 3^5 = \underline{5} \neq 1, 3^6 = \underline{1}$ なので $\mathbb{F}_7^\times = \langle 3 \rangle$. \square

問題 10-2 K は正標数 p の体で $a, b \in K$ であるとし,

$x^p - a$ と $x^p - x - b$ は K 上既約であると仮定し,

L, M をそれぞれの K 上での最小分解体であるとする.

L と M が体 K 上で同型になることはあるか? \square

問題 10-3 有限体の有限次拡大が単拡大になることを示せ. \square

(有限体 K とその有限次拡大 L に対して, ある $\theta \in L$ が存在して $L = K(\theta)$ となることを示せ.)

問題 10-4 k は正標数 p の体であるとし, $L = k(s, t)$, $K = k(s^p, t^p)$ とおく, s と t は文字

このとき, 拡大 L/K について, $[L:K] = p^2$ で L が K の単拡大にならないことを示せ.

ここで, $k(s, t)$ は体 K 上の 2 変数有理函数体である. (cf. 問題 5-3) \square