問題3-4 $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する。$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示せ。

ここで，$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体で最小のものを表す。□

解答例

$\boxed{1}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示そう。$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を含む。

$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体なので，$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$。

$\boxed{2}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示そう。$a \neq b$ より $\sqrt{a} \neq \pm\sqrt{b}$，特に $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0$ なので，

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ni \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &\ni \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} = \sqrt{a}, \\ \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &\ni \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} = \sqrt{b}. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \text{ は } \mathbb{Q} \text{ と} \\ \sqrt{a}, \sqrt{b} \text{ を含む。} \end{array}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体なので，$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$。

以上によって，$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ が示された。□