このページは
06-3 Galois拡大に関する
問題6-1～6-4からのコピー

Galois拡大について

ℂを標数0の代数閉体におきかえても同様

以下, $K, L, M, \ldots$ はℂの部分体であると仮定する. ← 簡単のための仮定

(注 以下の内容は標数0の場合にも一般的に通用する.)

L/K は有限次拡大であると仮定する.

L の K 上でのベクトル空間としての基底を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ と書くと,

各 α_i は K 上代数的でかつ $L = K\alpha_1 \oplus \cdots \oplus K\alpha_n = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ が成立しているので,

単拡大定理より, $L = K(\theta)$, $\theta \in L$ と書ける. このとき, 次のように定める.

$$
\begin{aligned}
&K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\
&= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \ni {}^\exists\theta \\
&= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})(\theta) \\
&= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \theta)
\end{aligned}
$$
1個へらせる.

$\boxed{\text{定義}}$ L/K が(有限次)Galois拡大であるとは以下の同値な条件のどれかが成立していることだと定める:

(1) L の K 上での任意の共役体は L に等しい.

(注 φ は単射だが全射とは限らない.)

(K 上での任意の体の同型 $\varphi : L \hookrightarrow ℂ$ について $\varphi(L) = L$.) ← $\varphi(L)$ を L の K 上での共役体と呼ぶ

($\varphi : L \to ℂ$ は環の準同型(体の準同型, 単射になる)で $\varphi(a) = a$ $(a \in K)$ をみたすもの)

体の同型 $\varphi : L \hookrightarrow ℂ$ の定義

(2) θ の K 上での任意の共役元は L に含まれる.

(θ の K 上での最小多項式のすべての根が L に含まれる.) □

θ の K 上でのすべての共役元の定義

さらに次の条件も(1), (2)と同値である:

(3) ある $F(x) \in K[x]$ が存在して, L は $F(x)$ の K 上での最小分解体になる.

(L は K に $F(x)$ のすべての根を付け加えてできる体になる.)

$F(x)$ の K 上での最小分解体の定義

同値性を証明する.

θのK上での最小多項式を $F_\theta(x)\in K[x]$ と書く.

(1) ⇒ (2)の証明 条件(1)を仮定し, $\eta\in\mathbb{C}$ は θ のK上での任意の共役元であるとする ($F_\theta(\eta)=0$).

このとき,

$$\begin{array}{ccccccc} L=K(\theta) & \xrightarrow{\sim} & K[x]/(F_\theta(x)) & \xrightarrow{\sim} & K(\eta) & \hookrightarrow & \mathbb{C} \\ f(\theta) & \longmapsto & \overline{f(x)} & \longmapsto & f(\eta) & \mapsto & f(\eta)\end{array}$$

の合成で体同型 $\varphi: L\hookrightarrow \mathbb{C}$ が定まる.

条件(1)より, $\eta=\varphi(\theta)\in\varphi(L)\overset{(1)}{=}L$ が得られ, 条件(2)が示された.

(2) ⇒ (3)の証明 条件(2)を仮定し, $F_\theta(x)$ のK上での最小分解体をMと書く.

$F_\theta(x)$ の根全体を $\theta_1,\dots,\theta_n$ と書くと, $M=K(\theta_1,\dots,\theta_n)$.

$L=K(\theta)\subset M$ は自明. 条件(2)より, $\theta_1,\dots,\theta_n\in L$ なので $M=K(\theta_1,\dots,\theta_n)\subset L$.

ゆえに, $L=M$ なので, 条件(3)が示された.

(3) ⇒ (1)の証明 条件(3)を仮定する. すなわち, Lはある $F(x)\in K[x]$ のK上での最小分解体であるとする.

$F(x)$ の根全体を $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ と書くと, $L=K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$、K上での体同型 $\varphi:L\hookrightarrow\mathbb{C}$ を任意にとる.

$F(\varphi(\alpha_i))=\varphi(F(\alpha_i))=\varphi(0)=0$ なので $\varphi(\alpha_i)=\alpha_{k_i}$ と書ける.

任意に $\beta\in L$ をとる. $\beta=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $f(x_1,\dots,x_n)\in K(x_1,\dots,x_n)$ と書ける.

このとき, $\varphi(\beta)=f(\varphi(\alpha_1),\dots,\varphi(\alpha_n))=f(\alpha_{k_1},\dots,\alpha_{k_n})\in K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=L$. ゆえに, $\varphi(L)\subset L$.

L/K は有限次拡大と仮定していたので, LはK上のベクトル空間として有限次元である.

K上のベクトル空間として, $\varphi(L)$ とLは同型であり, K上同じ次元になる. ゆえに, $\varphi(L)=L$. □