$\boxed{\text{問題1-6}}$ xに関する3次方程式 $x^3-3px+q=0$ の解法を作れ。□

$\boxed{\text{解答例}}$ (問題1-4の解答例を見よ。) $\omega^2+\omega+1=0$ と仮定する。

ωは1の原始3乗根と仮定

$p=0$のとき、$x^3+q=0$ は $x=\sqrt[3]{-q},\ \omega\sqrt[3]{-q},\ \omega^2\sqrt[3]{-q}$ と解ける。

以下、$p\neq 0$と仮定する。問題1-4の結果より、

$$x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)。$$

ゆえに、もし与えられた $p(\neq 0)$, q に対して、$yz=p$, $y^3+z^3=q$ をみたす (y,z) を作れれば、$x^3-3px+q=0$ は $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ と解ける。

$YZ=p^3$, $Y+Z=q$ をみたす Y,Z は2次方程式 $\lambda^2-q\lambda+p^3=0$ の解になる。そのうちの1つを(Y,Z)と書く。$y^3=Y$ をみたす y を1つ取る。$z=\dfrac{p}{y}$ とおくと、$yz=p$ となり、$z^3=\dfrac{p^3}{Y}=Z$ となるので、$y^3+z^3=Y+Z=q$。これでほしいy,zを作れた。

解法まとめ ① $\lambda^2-q\lambda+p=0$ の解の1つをYと書く。

② $y^3=Y$ をみたすyを1つ取り、$z=\dfrac{p}{y}$ とおく。

③ $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ $(\omega^2+\omega+1=0)$ □