$\boxed{\text{問題4-2}}$ $\alpha = \omega^k \sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3}$, $k \in \mathbb{Z}$ とする．以下を示せ．

← $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$ なので ω^k は $1, \omega, \omega^2$ のどれかになる．

(1) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$ $(=(\mathbb{Q}$ に $x^3-7=0$ の3つの解を付け加えた体$))$.

(2) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha)1 \oplus \mathbb{Q}(\alpha)\omega$.

(既出の問題の解答例の結果を自由に使ってよい．)

(3) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の体の自己同型 τ で

$$\tau(a) = a \quad (a \in \mathbb{Q}(\alpha)), \qquad \tau(\omega) = \omega^2$$

をみたすものが唯一つ存在する．

← ($\alpha = \sqrt[3]{7}$ のとき $\tau(\beta) = \bar{\beta}$ $(\beta \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega))$ $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}, \omega^2\sqrt[3]{7}$ の場合はどうなるか？)

(問題4-1 の $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ を $\mathbb{Q}(\omega^k\sqrt[3]{7}, \omega)$ におきかえたのがこの問題)

(4) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\omega)] = 3$, $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\omega)1 \oplus \mathbb{Q}(\omega)\alpha \oplus \mathbb{Q}(\omega)\alpha^2$.

(5) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の体の自己同型 σ で

$$\sigma(a) = a \quad (a \in \mathbb{Q}(\omega)), \qquad \sigma(\alpha) = \omega\alpha$$

をみたすものが唯一つ存在する． □

$\boxed{\text{解答例}}$ (1) $\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ より，$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) \supset \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$.

$\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$ でかつ $\omega = \dfrac{\omega\alpha}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$ より，$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$.

ゆえに，$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\underbrace{\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha}_{\alpha,\ \omega\alpha,\ \omega^2\alpha \text{ は } x^2-7=0 \text{ の解の全体}})$.

(2) (問題3-5(2)と同様)

ωが1の原始3乗根でかつ $\alpha = \omega^k \sqrt[3]{7}$ の $\mathbb{Q}$上での最小多項式が x^3-7 であることより、
$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ となり、もしも $\omega \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ならば虚数である $\underbrace{1の原始3乗根}$
が $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ に含まれることになって矛盾する．ゆえに、$\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ である．

$x^2+x+1=0$ の解

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

これより、$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\omega), \mathbb{Q}(\alpha)] > 1$．

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より、$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\omega), \mathbb{Q}(\alpha)] \leqq 2$．

ゆえに、$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$．

($\alpha = \omega^k \sqrt[3]{7}$
↑
ここに ω があっても
$\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$)

したがって、x^2+x+1 は ω の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上での最小多項式になり、

$$\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha)1 \oplus \mathbb{Q}(\alpha)\omega$$

となることがわかる．

(3) $\alpha, \omega^2 \in \mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ と $\alpha,\ \omega=(\omega^2)^2 \in \mathbb{Q}(\alpha,\omega^2)$ より, $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)=\mathbb{Q}(\alpha,\omega^2)$ である.

ω を ω^2 にうつす同型を作る問題

ω^2 も 1の原始3乗根なので, ω^2 の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式も x^2+x+1 になる.

体の同型写像

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}(\alpha,\omega)=\mathbb{Q}(\alpha)(\omega) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}(\alpha)[x]/(x^2+x+1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}(\alpha)(\omega^2)=\mathbb{Q}(\alpha,\omega) \\ f(\omega) & \longmapsto & \overline{f(x)} & \longmapsto & f(\omega^2) \end{array}$$

の合成を τ と書く. τ も体の自己同型で $\tau(a)=a\ (a\in\mathbb{Q}(\alpha))$, $\tau(\omega)=\omega^2$ をみたす.

これで, ほしい τ の存在は示された.

τ が $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の体の自己同型で $\tau(a)=a\ (a\in\mathbb{Q}(\alpha))$ と $\tau(\omega)=\omega^2$ をみたしているならば,

$\mathbb{Q}(\alpha,\omega)=\{a+b\omega \mid a,b\in\mathbb{Q}(\alpha)\}$ でかつ任意の $a,b\in\mathbb{Q}$ について,

$$\tau(a+b\omega)=\tau(a)+\tau(b)\tau(\omega)=a+b\omega^2=a+b(-1-\omega)=(a-b)-b\omega.$$

これより, ほしい τ の一意性がわかる.

$\boxed{\text{注意}}$ $\alpha=\sqrt[3]{7}$ のとき, $\mathbb{Q}(\alpha)\subset\mathbb{R}$ でかつ $\omega^2=(\omega$ の複素共役$)$ なので

上の τ は複素共役を取る操作に一致する.

しかし, $\alpha=\omega\sqrt[3]{7},\ \omega^2\sqrt[3]{7}$ の場合はそうではない.

(4) α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式 x^7-7 は3次なので，$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$.

上の(2)より，$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]=2$.

ゆえに，$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=2\times 3=6$.

一方，
$$6=[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\omega)]\underbrace{[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]}_{\omega\text{ の }\mathbb{Q}\text{ 上での最小多項式は }x^2+x+1\text{ なので }2\text{ に等しい}}=2[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\omega)].$$

ゆえに，$[\mathbb{Q}(\omega)(\alpha):\mathbb{Q}(\omega)]=[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\omega)]=3$.

したがって，$\mathbb{Q}(\alpha,\omega)=\mathbb{Q}(\omega)(\alpha)=\mathbb{Q}(\omega)1\oplus\mathbb{Q}(\omega)\alpha\oplus\mathbb{Q}(\omega)\alpha^2$.

$\boxed{\text{注意}}$ α, $\omega\alpha$, $\omega^2\alpha$ の $\mathbb{Q}(\omega)$ 上での最小多項式が x^3-7 であることも示された.

(5) α と $\omega\alpha$ の $\mathbb{Q}(\omega)$ 上での最小多項式はどちらも x^3-7 で，

(1) の α が α と $\omega\alpha$ の場合より，$\mathbb{Q}(\alpha,\omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha) = \mathbb{Q}(\omega\alpha, \omega)$.

α を $\omega\alpha$ にうつす自己同型を作る問題

体の同型写像たち

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}(\alpha,\omega) = \mathbb{Q}(\omega)(\alpha) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}(\omega)[x]/(x^3-7) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}(\omega)(\omega\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha,\omega) \\ f(\alpha) & \longmapsto & \overline{f(x)} & \longmapsto & f(\omega\alpha) \end{array}$$

の合成を σ と書く．σ も体の同型で，$\sigma(a) = a \ (a \in \mathbb{Q}(\omega))$，$\sigma(\alpha) = \omega\alpha$ をみたす．

これでほしい σ の存在が示された．

σ は $\mathbb{Q}(\alpha,\omega) = \mathbb{Q}(\omega)(\alpha)$ の体の自己同型で $\sigma(a) = a \ (a \in \mathbb{Q}(\omega))$，$\sigma(\alpha) = \omega\alpha$ をみたしているとする．このとき，任意の $a, b, c \in \mathbb{Q}(\omega)$ について，

$$\sigma(a + b\alpha + c\alpha^2) = \sigma(a) + \sigma(b)\sigma(\alpha) + \sigma(c)\sigma(\alpha)^2 = \underbrace{a} + \underbrace{b\omega}\alpha + \underbrace{c\omega^2}\alpha^2$$

どれも $\in \mathbb{Q}(\omega)$

これでほしい σ の一意性も示された． □

$\boxed{\text{ポイント}}$ ほしい体の同型写像は，最小多項式と準同型定理から得られる体の同型写像の合成として構成可能である． □

$\boxed{\text{注意}}$

(1) 体の同型写像たち $\mathbb{Q}(\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[x]/(x^3-7) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\omega\alpha)$ の合成を $\tilde{\sigma}$ と書くと,

$$f(\alpha) \longmapsto \overline{f(x)} \longmapsto f(\omega\alpha)$$

$\tilde{\sigma} : \mathbb{Q}(\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\omega\alpha)$ と $\tilde{\sigma}$ の定義域 $\mathbb{Q}(\alpha)$ と値域 $\mathbb{Q}(\omega\alpha)$ は異なる.

(2) 体の同型写像たち $\mathbb{Q}(\omega)(\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\omega)[x]/(x^3-7) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\omega)(\omega\alpha)$ の合成 σ の場合には,

$$f(\alpha) \longmapsto \overline{f(x)} \longmapsto f(\omega\alpha)$$

$\mathbb{Q}(\omega)(\alpha) = \mathbb{Q}(\omega, \alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha) = \mathbb{Q}(\omega, \omega\alpha) = \mathbb{Q}(\omega)(\omega\alpha)$ なので,

σ の定義域と値域は等しくなり, σ は $\mathbb{Q}(\omega, \alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$ の自己同型になる.

以上の (1) と (2) のちがいは $\omega\alpha \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ と $\omega\alpha \in \mathbb{Q}(\omega, \alpha)$ のちがいである.
$\mathbb{Q}(\omega, \alpha)$ は ω を含むので, α を $\omega\alpha$ にうつす操作で $\mathbb{Q}(\omega, \alpha)$ が閉じることが可能になる. これらのちがいを認識しておくことは重要である. $\square$