問題1-5　$\alpha=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $L=\{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ とおく.

$L$ が $\mathbb{Q}$, $\alpha$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを示せ. □

(1) $L$ は $\mathbb{R}$ の部分体であり, $\mathbb{Q}$ と $\alpha$ を含む.
(2) $M$ を $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}$, $\alpha$ を含むものとすると $L\subset M$.

解答例

(1) $L$ が $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}$, $\alpha$ を含むことを示そう.

$\mathbb{Q}\subset L$ と $\alpha\in L$ は明らか.

$L$ が $\mathbb{R}$ の部分体であることを示すためには, $0$ と $1$ を含み, $+$, $-$, $\times$ で閉じていて, 任意の $\beta\in L$ について $\beta\neq 0 \Rightarrow \beta^{-1}\in L$ となることを示せばよい.

$0\in L$, $1\in L$ および $L$ が加法と減法で閉じていることは明らか.

$L$ が乗法で閉じていることを示そう. $\beta,\gamma\in L$ を任意にとる. このとき,

$$\beta=a+b\alpha+c\alpha^2,\quad \gamma=a'+b'\alpha+c'\alpha^2\quad (a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{Q})$$

と書ける. そして,

$$\beta\gamma=(aa'+2bc'+2cb')+(ab'+ba'+2cc')\alpha+(ac'+bb'+ca')\alpha^2\in L.$$

これで $L$ が乗法で閉じていることがわかった.

$\beta \in L$, $\beta \neq 0$ と仮定する. $\beta = a + b\alpha + c\alpha^2$ $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ と書ける.

$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{a+b\alpha+c\alpha^2} \in L$ となることを示したい.

公式 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ を

$x = a$, $y = b\alpha$, $z = c\alpha^2$ に適用すると,

$$\beta \underbrace{(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}_{\in L} = \overbrace{a^3+2b^3+4c^3-6abc}^{\text{これを } d \text{ と書く}} \in \mathbb{Q}.$$

$a'+b'\alpha+c'\alpha^2$ $(a', b', c' \in \mathbb{Q})$ と書ける

もしもこれの右辺が0でなければ両辺を $\beta \times$(右辺)で割ることによって,

$$\frac{1}{\beta} = \frac{a'+b'\alpha+c'\alpha^2}{d} = \frac{a'}{d} + \frac{b'}{d}\alpha + \frac{c'}{d}\alpha^2 \in L.$$

(右辺) $= d \neq 0$ を示すためには, $\beta \neq 0$ と仮定していたので $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \neq 0$ を示せばよい. $x, y, z \in \mathbb{R}$ で $\beta \neq 0$ より, $x, y, z$ のどれかは0でないので,

$x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$ のどれかは成立しているので,

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right) > 0.$$

示すべきことが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題1-6}}$ $x$に関する3次方程式 $x^3-3px+q=0$ の解法を作れ。 □

$\boxed{\text{解答例}}$ (問題1-4の解答例を見よ。) $\omega^2+\omega+1=0$ と仮定する。

ωは1の原始3乗根と仮定

$p=0$のとき, $x^3+q=0$ は $x=\sqrt[3]{-q},\ \omega\sqrt[3]{-q},\ \omega^2\sqrt[3]{-q}$ と解ける。

以下, $p\neq 0$と仮定する. 問題1-4の結果より,

$$x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z).$$

ゆえに, もしも与えられた $p(\neq 0)$, $q$ に対して, $yz=p$, $y^3+z^3=q$ をみたす $(y,z)$ を作れば, $x^3-3px+q=0$ は $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ と解ける。

$YZ=p^3$, $Y+Z=q$ をみたす $Y,Z$ は2次方程式 $\lambda^2-q\lambda+p^3=0$ の解になる。そのうちの1つを$(Y,Z)$と書く。$y^3=Y$ をみたす $y$ を1つ取る。$z=\dfrac{p}{y}$ とおくと, $yz=p$ となり, $z^3=\dfrac{p^3}{Y}=Z$ となるので, $y^3+z^3=Y+Z=q$。これでほしい $y,z$ を作れた。

解法まとめ ① $\lambda^2-q\lambda+p=0$ の解の1つを$Y$と書く。

② $y^3=Y$ をみたす $y$ を1つ取り, $z=\dfrac{p}{y}$ とおく。

③ $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ $(\omega^2+\omega+1=0)$ □

**問題1-7** $x^3+2x-2=0$ をみたす正の実数 $x=\alpha$ が存在することを示せ。さらに $\alpha$ の具体的な形を求めよ($\sqrt{\ }$ と $\sqrt[3]{\ }$ を使って表せ). □

**WolframAlpha**

2/(3(√(35/27) - 1)^(1/3)) - (√(35/27) - 1)^(1/3)

**Input**

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}$$

**Result**

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}$$

**Decimal approximation**

0.7709169970592481008251463693070269672550531193633286151005984929767351032820534076249331528876…

More digits

**Alternate forms**

$$\frac{2\times 3^{2/3}-\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{105}-9\right)^{2/3}}{3\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}$$

root of $x^3+2x-2$ near $x=0.770917$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}-\frac{\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}{3^{2/3}}$$

More forms | Step-by-step solution

**Minimal polynomial**

$x^3+2x-2$

x^3+2x-2

**Alternate form**

**Real root**

$$x=\frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{3^{2/3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}$$

Approximate form | Step-by-step solution

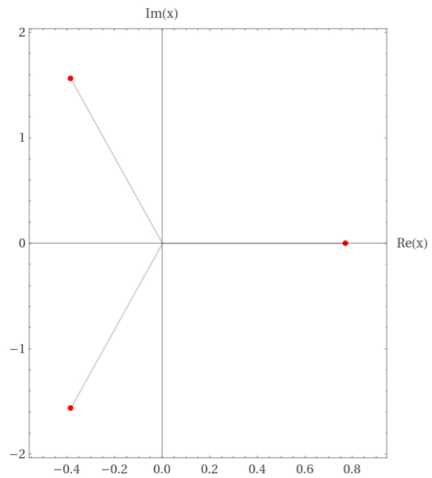
**Complex roots**

$$x=\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

$$x=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}-\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

Approximate forms | Step-by-step solution

**Roots in the complex plane**




https://www.wolframalpha.com/input/?i=2%2F%283%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29%29%20-%20%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E3%2B2x-2

$\boxed{\text{解答例}}$ $x^3+2x-2 \overset{(*)}{=} 0$ の正の実数解を求めたい.

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -2$ とおくと, $(*)$ は $x^3 - 3px + q = 0$ と書ける.

問題1-6の解法を使おう. $\lambda^2 - q\lambda + p^3 = \lambda^2 + 2\lambda - \frac{8}{27} = 0$ の正の実数解は

$$Y = -1 + \sqrt{1^2 + \frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{35}{27}} - 1 > 0.$$

$y = \sqrt[3]{Y} > 0$, $z = \frac{p}{y} = -\frac{2}{3y} < 0$ とおく. 問題1-6の結果より,

$$\alpha = -y - z = \frac{2}{3\sqrt[3]{Y}} - \sqrt[3]{Y} \in \mathbb{R}$$

は $(*)$ の実数解になっている. ($\alpha \fallingdotseq 0.77$ なので $\alpha > 0$ だが, 別の方法で $\alpha > 0$ であることを示す.)

$f(x) = x^3 + 2x - 2$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ なので, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加し, $f(0) = -2$, $f(1) = 1$ なので, $f(x) = 0$ は唯一つの実数解を持ち, その実数解は上の $\alpha$ になる. (さらに $0 < \alpha < 1$ も示せている.) □

$\boxed{\text{問題 2-1}}$ (易) $x^3-15x+4=0$ の3つの解を問題1-6の解答例の方法で作れ。

さらに、$-4$が解の1つになっていることを使って求めた3つの解と一致することを示せ。

次ページを見る前にこの問題を解くこと。動画もここでストップ！

ためしに 4の約数 $\pm1, \pm2, \pm4$ を $x$ に代入すると、$x=-4$ のとき、

$$x^3-15x+4 = -4^3+15\cdot4+4 = -64+60+4=0.$$

$$
\begin{array}{r}
x^2-4x+1 \phantom{)} \\
x+4 \,\big)\, \overline{x^3 \qquad -15x+4} \\
x^3+4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-4x^2-15x \phantom{+4} \\
-4x^2-16x \phantom{+4} \\
\hline
x+4 \\
x+4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$x^3-15x+4 = (x+4)(x^2-4x+1)$$

$$x^2-4x+1=0 \iff x=2\pm\sqrt{3}$$

$x^3-15x+4=0$ の解は

$$x=-4,\ 2\pm\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{解答例}}$ $p=5,\ q=4$ とおく.

$x^3-15x+4=x^3-3px+q=0$ は問題1-6の解答例によれば以下のようにして解ける. $\lambda^2-q\lambda+p^3=\lambda^2-4\lambda+125=0$ を解くと,

$$\lambda = 2\pm\sqrt{4-125} = 2\pm\sqrt{-121} = 2\pm\sqrt{11}\,i \quad (i=\sqrt{-1}).$$

$Y=2+\sqrt{11}\,i$ とおき, $Y$ の立法根の1つを $y=\sqrt[3]{2+11i}$ と書き, $z=\dfrac{p}{y}=\dfrac{5}{y}$ とおく. このとき $x^3-15x+4=0$ は次のように解ける:

$$x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z \qquad (\omega^2+\omega+1=0).$$

$\{-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z\}=\{-4,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}\}$ を示したい.

$Y$の立法根の1つとして、$y=\boxed{2+i}$がとれる。 ← ここが大変。

実際、$(2+i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 = 8+12i-6-i = 2+11i = Y.$

$$z = \frac{5}{y} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{4+1} = \boxed{2-i},$$

このとき、$y=2+i$ と $z=2-i$ より、$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと、$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ で

$$\begin{cases} -y-z = \underline{-2-i}\,\underline{-2+i} = -4 \\ -\omega y-\omega^2 z = \underbrace{-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\underbrace{-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -\cancel{2}\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\cancel{2}}(2+i)\right) = 2+\sqrt{3} \\ -\omega^2 y-\omega z = \underbrace{-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\underbrace{-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)\right) = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

互いに複素共役 $z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

これで示すべきことが示された。 □

ポイント　$2+11i$ の立法根の1つとして $2+i$ がとれること。 □