解答例の解説を来週やる問題

来週まで楽しんで考えてください。

問題1-5 $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $L = \{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ とおく。
Lが $\mathbb{Q}, \alpha$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを示せ。 □ 既出

ヒント $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ の証明は問題1-1でやった。
それと同じようにして、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ を示せばよい。
そのとき、$\beta = a+b\alpha+c\alpha^2 \neq 0$ に対する $\frac{1}{\beta}$ の分母の有理化が必要になる。 □

問題1-6 xに関する3次方程式 $x^3-3px+q=0$ の解法を作れ。 □

ヒント $p = yz$, $q = y^3+z^3$ とできたらどうなるか? $\longrightarrow$ 問題1-4. □

問題1-7 $x^3+2x-2=0$ をみたす正の実数 $x=\alpha$ が存在することを示せ。
さらにαの具体的な形を求めよ($\sqrt{\ }$ と $\sqrt[3]{\ }$ を使って表せ)。 □