

問題 1-4 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ を x, y, z の 1 次式の積で表せ.

ヒント $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ を使ってよい.

実際には $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = 1$ のみを使う.

□

解答例 次を地道な計算で示せる:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

さらに,

$$\begin{aligned} & (x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \\ = & \begin{cases} x^2 + \omega^2 xy + \omega xz \\ + \omega xy + y^2 + \omega^2 yz \\ + \omega^2 xz + \omega yz + z^3 \end{cases} \end{aligned}$$

$\omega^3 = 1$ を使う

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より
 $\omega^2 + \omega = -1$ を使う

$$= x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz.$$

したがって,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z),$$

□

余談 ($x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の行列式表示)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} xxx + yyy + zzz \\ -xyz - yzx - zxy \end{array} \right\} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

以上のように見れば、 3×3 を $n \times n$ に一般化できる。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ とおくと, } xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}.$$

$$\Lambda \text{ の対角化: } U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} \text{ とおくと, } \Lambda U = U D$$

でかつ $U^* = U^{-1}$ となることを示せる。(練習: 示してみよ!)

$$\text{ゆえに } \Lambda = U D U^{-1}, \text{ したがって, } xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = U(xE + yD + zD^2)U^{-1}.$$

$$\therefore |xE + y\Lambda + z\Lambda^2| = |xE + yD + zD^2| = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z),$$

もう少し見易く書くと,

$$xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = U(xE + yD + zD^2)U^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & \omega & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega \end{bmatrix}$$

$$= U \left(\begin{bmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & & \\ & \omega y & \\ & & \omega^2 y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & & \\ & \omega^2 z & \\ & & \omega z \end{bmatrix} \right) U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} x+y+z & & \\ & x+\omega y+\omega^2 z & \\ & & x+\omega^2 y+\omega z \end{bmatrix} U^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore |xE + y\Lambda + z\Lambda^2| &= \begin{vmatrix} x+y+z & & \\ & x+\omega y+\omega^2 z & \\ & & x+\omega^2 y+\omega z \end{vmatrix} \\ &= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z). \end{aligned}$$

練習 以上の計算を 2×2 , 4×4 , $n \times n$ に一般化せよ. \square