定義 K を $\mathbb{C}$ の部分体とし，$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．

α が K 上作図可能であるとは，K の元たちから出発して，加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかえして α が得られることだと定める．$\square$

例 $\sqrt{2}$ や $\pm i = \pm\sqrt{-1}$ や $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ は $\mathbb{Q}$ 上作図可能である．

$\sqrt{\pi}$ は $\mathbb{Q}(\pi)$ 上作図可能である．

$a, b, c \in K$ のとき，$ax^2+bx+c=0$ の解は K 上作図可能である $\square$

正の整数 n に対して，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ とおく．

問題3-1 ζ_5 が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ．$\square$

ヒント $\omega = \zeta_5$ とおく．2次方程式の解と係数の関係を使う．

$\alpha = \omega+\omega^4$，$\beta = \omega^2+\omega^3$ とおくと，$\alpha+\beta = ?$，$\alpha\beta = ?$．

$\omega+\omega^4 = \alpha$，$\omega \cdot \omega^4 = 1$．$\square$

注意 本質的に正五角形の作図可能性！ $\square$

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ ζ_{17} が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ. $\square$ ← かなり非自明.

(これに関連した問題をずっと後にレポート課題に出す予定)

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\omega = \zeta_{17}$, $\omega_0 = \omega$, $\omega_{k+1} = \omega_k^3$ とおく. $\begin{cases} \omega^{17} = 1, \ \omega \neq 1 \\ \omega^{16} + \omega^{15} + \cdots + \omega + 1 = 0 \end{cases}$

(0) $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{15}\} = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{16}\}$

(1) $\alpha_0 = \omega_0 + \omega_2 + \cdots + \omega_{14}$, $\alpha_1 = \omega_1 + \omega_3 + \cdots + \omega_{15}$ とおくと,

$\alpha_0 + \alpha_1 = ?$, $\alpha_0 \alpha_1 = ?$

(2) $\beta_i = \omega_i + \omega_{i+4} + \omega_{i+8} + \omega_{i+12}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とおくと,

$\beta_0 + \beta_2 = \alpha_0$, $\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1$, $\beta_0 \beta_2 = ?$, $\beta_1 \beta_3 = ?$, $(\beta_0 + 1)\beta_1 = \beta_0 - 1$

(3) $\gamma_i = \omega_i + \omega_{i+8}$ $(i = 0, 1, \ldots, 7)$ とおくと,

$\gamma_0 + \gamma_4 = \beta_0$, $\gamma_0 \gamma_4 = ?$

(4) $\omega_0 + \omega_8 = \gamma_0$, $\omega_0 \omega_8 = ?$

$\square$

$\boxed{\text{注意}}$ 本質的に正17角形の作図可能性! Carl Friedrich Gauss が発見. $\square$

$\boxed{\text{問題 3-3}}$ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ. □

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ □

$\boxed{\text{問題 3-4}}$ $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する. $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示せ.

ここで, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体で最小のものを表す. □

$\boxed{\text{問題 3-5}}$ $\alpha = \omega \sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(L が体 K の拡大体のとき,

$[L : K] = [L/K] = \dim_K L$

と書き, これを L/K の拡大次数と呼ぶ.)

□

$\boxed{\text{ヒント}}$ α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式は $x^3 - 7$ になる. $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. □