問題2-2 以下の$\mathbb{Z}$係数多項式たちが$\mathbb{Q}$上の既約多項式になることを示せ。

(1) x^3+2x-2.

(2) $x^4+10x^3+15x^2+35x+55$.

(3) 正の整数nに対するx^n-14.

(4) 素数pに対する$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$.

例：$x+1$, x^2+x+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$, $x^6+x^5+\cdots+x+1$, …

ヒント (1), (2), (3) は直接Eisensteinの判定法を適用できる：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ と素数pについて,

$p\nmid a_n$, $p\mid a_{n-1}$, …, $p\mid a_1$, $p\mid a_0$, $p^2\nmid a_0$ $\Rightarrow$ $f(x)$は$\mathbb{Q}$上既約.

(4)には直接的にEisensteinの判定法を適用できないので，少しくふうしてみよ． □

おまけ $x^3-15x+4$には，$2^2\mid 4$なのでEisensteinの判定法を使えない．

$x^3-15x+4=(x+4)(x^2-4x+1)$ なので $x^3-15x+4$ は既約ではない． □

注意 $$x^{mn-1}+x^{mn-2}+\cdots+x+1=\frac{x^{mn}-1}{x-1}=\frac{x^m-1}{x-1}(x^{m(n-1)}+x^{m(n-2)}+\cdots+x^m+1)$$
$$=(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)(x^{m(n-1)}+x^{m(n-2)}+\cdots+x^m+1)$$ は既約ではない． □

$\boxed{\text{問題 2-3}}$ R は可換環であるとし，$p \in R$ であるとする．

$a \in R$ の R/pR での像を $\overline{a}$ と書き，写像 $\varphi : R[x] \to (R/pR)[x]$

$$\varphi\left(\sum_i a_i x^i\right) = \sum_i \overline{a_i}\, x^i \quad (a_i \in R)$$

と定める．以下を示せ．

(1) φ は環の準同型写像である．

(2) φ は全射である．

(3) $\operatorname{Ker}\varphi = pR[x]$

(4) 環の同型写像 $\overline{\varphi} : R[x]/pR[x] \xrightarrow{\sim} (R/pR)[x]$，$(f \bmod p) \mapsto \varphi(f)$ が得られる．

$\boxed{\text{注意}}$ $pR[x]$ も pR も (p) と書かれることがある．分脈によって区別せよ：

$$R[x]/\underbrace{(p)} \xrightarrow{\sim} (R/\underbrace{(p)})[x], \quad (f \bmod p) \mapsto \varphi(f).$$

互いに異なることに注意

$\square$

$\boxed{\text{問題 2-4}}$ $\omega^3 = 1$ と仮定し, $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}$ とおき, 写像 $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[\alpha]$ を

$$\varphi(f(x)) = f(\alpha) \quad (f \in \mathbb{Q}[x])$$

と定める. 以下で $\mathbb{Q}[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$ をみとめて使ってよい. 以下を示せ.

(1) φ は全射環準同型でかつ $a \in \mathbb{Q}$ に対して $\varphi(a) = a$.

(2) $f(x) = x^3 - 7$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式である

(3) $\mathrm{Ker}\,\varphi = (x^3 - 7)\mathbb{Q}[x]$. これを $(x^3 - 7)$ と書く.

(4) 環として, $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7) \cong \mathbb{Q}[\alpha]$.

(5) $\mathbb{Q}[\alpha]$ は体になる.

$\boxed{\text{ヒント}}$ • 準同型定理.

• Eisenstein の判定法.

• $\mathbb{Q}[x]$ の既約多項式 $f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ の極大イデアルを生成する. $\square$