資料14-3

1の原始 n 乗根 $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ の $\mathbb{Q}$ 上でのモニックな最小多項式を $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ と書き，(第 n)円分多項式と呼ぶ．次が成立している：

$$\Phi_n(x) = \prod_{\omega \text{は1の原始n乗根}} (x - \omega).$$

$\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ となることも知られている． ← 代数的整数の話をすればわかる．

$\boxed{\text{問題14-1}}$ $\Phi_n(x)$ を $n=1, 2, \dots, 12$ について求めよ． □

$\boxed{\text{問題14-2}}$ 以下を示せ．

(1) 素数 p と正の整数 e について，$\Phi_{p^e}(x) = \Phi_p(x^{p^{e-1}})$．

(2) 正の奇数 n について，$\Phi_{2n}(x) = (-1)^{\varphi(n)}\Phi_n(-x)$．　$\left(\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|\right)$

(3) $\mathbb{Q}(\zeta_{24}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}, \sqrt{3})$． □

$\boxed{\text{問題14-3}}$ $\Phi_n(x)$ の係数は常に $0, \pm 1$ だけになるか？ □

$\boxed{\boxed{\text{問題14-4}}}$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ のとき，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ となることを示せ． □