

問題 8-1 K, L は \mathbb{C} の部分体 であるとする. ← 標数 0 を使う,

- (1) L/K が 2 次拡大 ならば L/K は Galois 拡大 であることを示せ.
- (2) 2 次以上の有限次拡大 L/K で L の K 上での体の自己同型が id_L し
存在しないものの例を 具体的に 1 つ 挙げよ, ← L から L への写像

解答例 K, L は \mathbb{C} の部分体 であると仮定する. 強調
したい

- (1) L/K は 2 次拡大 であると仮定し,
 L の K 上のベクトル空間としての基底 $1, \theta$ をとる.
このとき, $L = K(\theta)$ かつ $\theta^2 \in L$ は $\theta^2 = a1 + b\theta$, $a, b \in K$ と表わされる,
 θ は $F(x) = x^2 - ax - b \in K[x]$ の根になり,
もう 1 つの根は 解と係数の関係より $-\frac{b}{\theta} \in L$ と表わされる, ← ポイント!
ゆえに, L は $F(x)$ の 2 つの根を含み, K 上での $F(x)$ の最小分解体 になり,
 L/K は 2 次の Galois 拡大 になる. ← 標数 0 を使っている.

注意 $\alpha = \theta - \frac{b}{2}$ とおくと $\alpha^2 = \theta^2 - b\theta + \frac{b^2}{4} = a + b\theta - b\theta + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2 + 4a}{4} \in K$.
 $L = K(\alpha)$ となり, $\text{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$, $\sigma(f(\alpha)) = f(-\alpha)$ ($f(x) \in K[x]$) となる.

つぎ

(2) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とおくと, $[L:K] = 3$ で, $L \cong \mathbb{Q}[x]/(\underbrace{x^3-2})$

$\text{Aut}_K L := \{\sigma: L \rightarrow L \mid \sigma \text{ は } K \text{ 上での体の自己同型}\} = \{\text{id}_L\}$, \checkmark 根の全体

$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおくと, $\sqrt[3]{2}$ の \mathbb{Q} 上での共役元の全体は $\sqrt[3]{2}$, $\omega\sqrt[3]{2}$, $\omega^2\sqrt[3]{2}$

の3つになるが, $\omega\sqrt[3]{2}$, $\omega^2\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ なので, $\sigma \in \text{Aut}_K L$ について,

$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$ が成立しており, $\sigma = \text{id}_L$ となる.

L の元を

その K 上での共役元にうつす.

$\sigma \in \text{Aut}_K L$ は x^3-2 の根を x^3-2 の根にうつす.

Galois 拡大になっている拡大とそうでない拡大をノータイムで
挙げられるようになっておいでください!

定義 n 次の置換群 S_n の部分群 G が 推移的 (可移的, transitive) であるとは、
任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ について ある $\sigma \in G$ で " $\sigma(i) = j$ をみたすものか
存在することだ"と定める。

問題 8-2 S_3 の推移的部分群をすべて挙げよ。 \square

解答例 以前やったように S_3 のすべての部分群は

$\{1\}$, $\{1, (1,2)\}$, $\{1, (1,3)\}$, $\{1, (2,3)\}$, $A_3 = \{1, (1,2,3), (1,3,2)\}$, S_3
の6個である。この中で推移的なのは、 A_3 と S_3 の2つだけである。

推移的であるかどうかはその部分群の作用で1を2, 3に移せるかどうかを
確認すればよい。

$\{1\}$ は1を2にも3にも移せない。

$\{1, (1,2)\}$ は1を3に移せず, $\{1, (1,3)\}$ は1を2に移せず,

$\{1, (2,3)\}$ は1を2にも3にも移せない。

$\{1, (1,2,3), (1,3,2)\}$ の $(1,2,3)$ によって1を2に移せ, $(1,3,2)$ によって1を3に
移せる。 $\{1, (1,2,3), (1,3,2)\} \subset S_3$ なので S_3 についても同様である。 \square

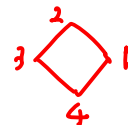
問題 8-3 S_4 の以下の 11 個の部分群を考える:

$$H_1 = \{1\}, H_2 = \langle (1,2) \rangle, H_3 = \langle (1,2)(3,4) \rangle, H_4 = \langle (1,2,3) \rangle,$$

$$H_5 = \langle (1,2,3,4) \rangle, H_6 = \langle (1,2), (3,4) \rangle, H_7 = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\},$$

$$H_8 = \langle (1,2), (2,3) \rangle \cong S_3, H_9 = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle, H_{10} = A_4, H_{11} = S_4.$$

$\cong D_4$



H_7 は Klein の
四元群
と呼ばれている。
← 非常に重要

(1) 各々の位数を求めよ、

(2) 各々について S_4 の正規部分群かどうか判定せよ、

(3) 各々について推移的であるかどうか判定せよ、

C_4
SII

$C_2 \times C_2$
SII

$C_2 \times C_2$
SII

解答例 (1) $|H_1|=1, |H_2|=|H_3|=2, |H_4|=3, |H_5|=|H_6|=|H_7|=4,$

$$|H_8|=6, |H_9|=8, |H_{10}|=12, |H_{11}|=24.$$

(2) 以前 S_4 の正規部分群は $H_1=\{1\}, H_7=(\text{Klein の四元群}), H_{10}=A_4, H_{11}=S_4$

の 4 つしかないことを示した、($n \neq 4$ のとき, S_n の正規部分群は $\{1\}, A_n, S_n$ しかない, $n=4$ は例外的)

(3) 推移的かどうかは 1 を 2, 3, 4 に移せることを確認すればよい、

推移的なのは, $H_5 \cong C_4, H_7 = (\text{Klein の四元群}) \cong C_2 \times C_2, H_9 \cong D_4,$

$H_{10} = A_4, H_{11} = S_4$ の 5 つ、

\cup
 H_7

(既約な 4 次式の最小分解体の Galois 群はこれら 5 つのどれかになる。) ← 後で使いたい、

(1 を λ にうつす σ について σ^{-1} は λ を 1 にうつす、)

□

定理 p は素数であるとする. このとき, S_p の推移的な部分群 G で
互換を1つ以上含むものは S_p 全体に一致する. ← 前回証明した. \square

問題 8-4 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ は \mathbb{Q} 上既約な多項式であるとし,
 L は f の \mathbb{Q} 上での最小分解体であるとし, $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とおく. 以下を示せ.

(1) $f(x)$ の互いに異なる根全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ と書くと, ← f の \mathbb{Q} 上での既約性を使う.
 $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用する.
(任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ についてある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$.)

(2) $n = \deg f$ が素数でかつ $f(x)$ がちょうど $n-2$ 個の実根を持つならば
 $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_n$ となる.

(3) $f(x) = x^5 - 16x + 2$ が \mathbb{Q} 上既約で,
 f の \mathbb{Q} 上での最小分解体 L について, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_5$. \square

解答例 (1) $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないならば " $f(x)$ が \mathbb{Q} 上既約にならないことを示せば十分である. ($f(x)$ の既約性に反する.)

$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないと仮定する.

$A = \{\sigma(\alpha_1) \mid \sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})\}$ とおく, A は $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の作用で閉じている.

$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に推移的に作用していないとすると,
 $|A| < n$ となる.

$$g(x) = \prod_{\beta \in A} (x - \beta) = \sum_k c_k x^k, \quad c_k \in L \text{ とおく,}$$

$$\left(\begin{array}{l} \forall \sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \\ \sigma(c_k) = c_k \end{array} \right)$$

↑

$$\text{任意の } \sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \text{ について } \sum_k \sigma(c_k) x^k = \prod_{\beta \in A} (x - \sigma(\beta)) = \prod_{\gamma \in A} (x - \gamma) = g(x)$$

$$\text{よって, } c_k \in L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})} = \mathbb{Q}, \quad g(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

n 次の $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ はより低次の $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ でわりきれないので,
 $f(x)$ は \mathbb{Q} 上既約ではない,

(2) ① \mathbb{Q} 上既約な $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ の次数 n は素数であり,
 $f(x)$ はちょうど $n-2$ 個の実根 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ を持つと仮定する.
このとき, $f(x)$ はちょうど 2 つの虚根 $\beta, \bar{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を持つ.

② $f(x)$ の \mathbb{Q} 上での最小分解体 $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta, \bar{\beta})$ には
複素共役を取る操作 τ が \mathbb{Q} 上での自己同型として作用する.
ゆえに, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta, \bar{\beta}\}$ の β と $\bar{\beta}$ の互換 τ を含む.

③ $f(x)$ は \mathbb{Q} 上既約なので, (1) より, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta, \bar{\beta}\}$
に推移的に作用する.

④ n は素数なので定理を適用でき, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta, \bar{\beta}\}$
の置換全体に一致することがわかる: $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_n$.

(3) $f(x) = x^5 - 16x + 2$ とおく、
 (Eisensteinの判定法で既約性を示せる場合はまれである、
 わざわざそのように問題を作っている、)

$2 \nmid 1, 2 \mid 0, 2 \mid 0, 2 \mid 0, 2 \mid -16, 2 \nmid 2, 2^2 \nmid 2$ と Eisenstein の判定法より、
 $f(x)$ は \mathbb{Q} 上既約である。 \mathbb{R} 上の函数としての $f(x)$ のグラフの形を調べよう。

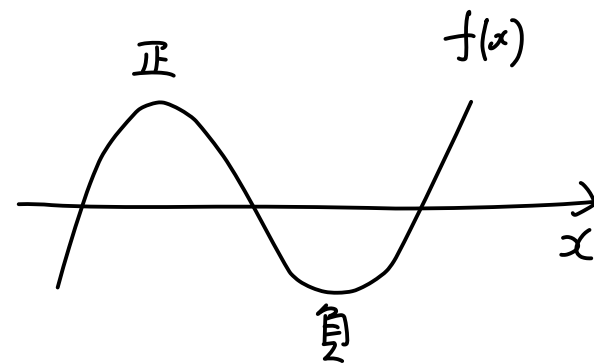
$$f'(x) = 5x^4 - 16 = 5\left(x^4 - \frac{16}{5}\right) = 5\left(x + \frac{2}{5^{1/4}}\right)\left(x - \frac{2}{5^{1/4}}\right)\left(x^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

$$f\left(-\frac{2}{5^{1/4}}\right) = -\frac{32}{5 \cdot 5^{1/4}} + \frac{32}{5^{1/4}} + 2 = 2 + \frac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} > 0 \quad \text{④注} \quad \frac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} = 17.11975 \dots$$

$$f\left(\frac{2}{5^{1/4}}\right) = \frac{32}{5 \cdot 5^{1/4}} - \frac{32}{5^{1/4}} + 2 = 2 - \frac{128}{5 \cdot 5^{1/4}} < 2 - \frac{128}{5 \cdot 2} < 0$$

$5^{1/4} < 2$ より

x	$-\infty$	$-2/5^{1/4}$	$2/5^{1/4}$	∞			
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 正	\searrow 負	$\nearrow \infty$			
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	∞



これより、 $f(x)$ はちょうど 3 つの実根根を持つ。

ゆえに、(2) より、このとき $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_5$ となる。

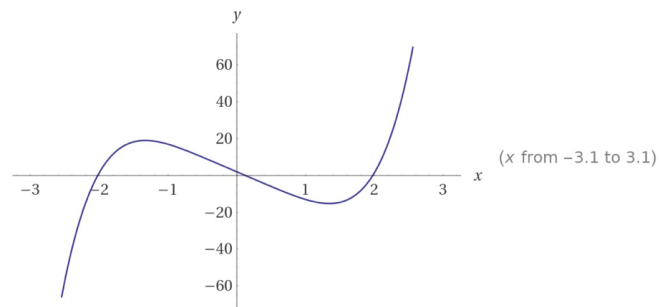
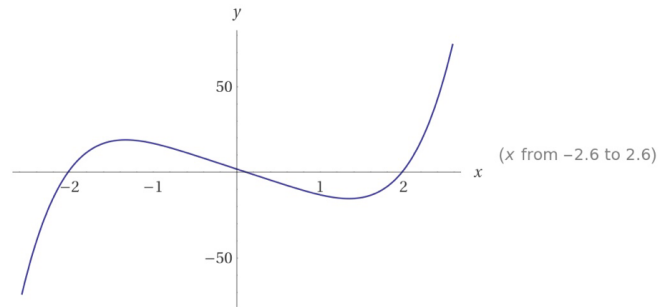
□

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E5-16x+2>

Input

$$x^5 - 16x + 2$$

Plots



Local maximum

$$\max\{x^5 - 16x + 2\} = 2 + \frac{128}{5\sqrt[4]{5}} \text{ at } x = -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$$

[Approximate form](#)

[Step-by-step solution](#)

Local minimum

$$\min\{x^5 - 16x + 2\} = 2 - \frac{128}{5\sqrt[4]{5}} \text{ at } x = \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$$

[Approximate form](#)

[Step-by-step solution](#)

Real roots

$$x \approx 0.125002$$

$$x \approx 1.96745$$

$$x \approx -2.0301$$

[Exact forms](#)

[More digits](#)

Complex roots

$$x = -0.0311742 - 2.00122i$$

$$x = -0.0311742 + 2.00122i$$

[Exact forms](#)

Roots in the complex plane

