$\boxed{\text{問題 1-1}}$ 集合 $L=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ が $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを証明せよ.

$\mathbb{R}$ の部分体とは $\mathbb{R}$ の部分環で体になっているもののことである.

証明すべきこと:　　$L\supset\mathbb{Q}$, $L\ni\sqrt{2}$ は自明

(1) L は $\mathbb{R}$ の部分環でかつ体になっている.

(2) M を $\mathbb{R}$ の部分環でかつ $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含むものとするとき, $L\subset M$.

この2つを示せば十分である. □

$\boxed{\text{解答例}}$ $\mathbb{Q}\subset L\subset\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\in L$ は自明なので (1), (2) を示せば十分である.

(1) $\underbrace{0,1\in L \text{ でかつ, } \alpha,\beta\in L \text{ のとき, } \alpha+\beta,\ -\alpha,\ \alpha\beta\in L}_{\text{部分環}}$ でかつ $\underbrace{\alpha\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\in L}_{\text{さらに体}}$

となることを示せばよい.

$\mathbb{Q}\subset L$ より, $0,1\in L$ は自明. $\alpha,\beta\in L$ を任意にとる.

α,β は $\alpha=a+b\sqrt{2}$, $\beta=c+d\sqrt{2}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Q})$ と表わされる.

つづく

$\alpha+\beta=(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in L.$

$-\alpha=-(a+b\sqrt{2})=(-a)+(-b)\sqrt{2}\in L.$

$\alpha\beta=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in L.$

$\alpha=a+b\sqrt{2}\neq 0$ のとき、　分子分母に $a-b\sqrt{2}$ をかける

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in L.$$

余談

($\mathbb{R}$ の部分体は常に $\mathbb{Q}$ を含む　$\mathbb{C}$ の部分体も常に $\mathbb{Q}$ を含む)

(2)　M は $\mathbb{R}$ の部分環でかつ $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{2}$ を含むものであるとする。

任意に $\alpha\in L$ をとる。$\alpha=a+b\sqrt{2}$, $a,b\in\mathbb{Q}$ と書ける。

$a,b,\sqrt{2}\in M$ でかつ M が加法と乗法でとじていることより、

$\alpha=a+b\sqrt{2}\in M$.　これで $L\subset M$ が示された。　$\square$

$\mathbb{Q}[\alpha] =$ ($\mathbb{Q}$とαを含む$\mathbb{R}$の最小の部分環) ← おまけの話

問題 1-2 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$のとき, $\mathbb{Q}(\alpha) =$ ($\mathbb{Q}$とαを含む$\mathbb{R}$の最小の部分体),

ここがちがう

$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) =$ ($\mathbb{Q}$とα, βを含む$\mathbb{R}$の最小の部分体) とおく. このとき,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

となることを示せ.

解答例 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \overset{(1)}{\subset} \mathbb{Q}(-\sqrt{2}) \overset{(2)}{\subset} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \overset{(3)}{\subset} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を示せばよい.

(1) $-1 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$, $-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$が乗法でとじていることより,

$\sqrt{2} = (-1)(-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$は$\mathbb{Q}$と$\sqrt{2}$を含む$\mathbb{R}$の部分体の中で最小であるので $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$は$\mathbb{Q}, \pm\sqrt{2}$を含む$\mathbb{R}$の部分体で,

$\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$が$\mathbb{Q}, -\sqrt{2}$を含む$\mathbb{R}$の部分体の中で最小であることより $\mathbb{Q}(-\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$が$\mathbb{Q}$と$\pm\sqrt{2}$を含む$\mathbb{R}$の部分体で, $-\sqrt{2} = (-1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$が$\mathbb{Q}, \pm\sqrt{2}$を含む$\mathbb{R}$の部分体の中で最小であることより $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. □

$\boxed{\text{問題 1-3}}$ $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ とおき，

写像 $\sigma: L\to L$ を $\sigma(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ と定める．

このとき，以下が成立することを示せ： $a\in\mathbb{Q}$, $\alpha,\beta\in L$ のとき

(0) $\sigma(a)=a$.

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$.

(2) $\sigma(\alpha-\beta)=\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)$.

(3) $\sigma(\alpha\beta)=\sigma(\alpha)\sigma(\beta)$.

(4) $\alpha\neq 0$ のとき，$\sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\sigma(\alpha)}$. □

（σ は L の $\mathbb{Q}$ 上での自己同型になっている．）

$\boxed{\text{解答例}}$

(0) $\sigma(a)=\sigma(a+0\sqrt{2})=a-0\sqrt{2}=a$

$\alpha=a+b\sqrt{2}$, $\beta=c+d\sqrt{2}$, $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ と書ける．（この a は上の a とは別）

(1,2) $\sigma(\alpha\pm\beta)=\sigma((a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2})=(a\pm c)-(b\pm d)\sqrt{2}$

$\sigma(\alpha)\pm\sigma(\beta)=(a-b\sqrt{2})\pm(c-d\sqrt{2})$ //

(3) $\sigma(\alpha\beta)=\sigma((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2})=(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}$

$\sigma(\alpha)\sigma(\beta)=(a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})=(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}$ //

(4) $\alpha=a+b\sqrt{2}\neq 0$ のとき，

$$\sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\sigma\left(\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sigma(\alpha)}=\frac{1}{a-b\sqrt{2}}=\frac{a+b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

$$=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

OK