問題 3-3 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ. □

解答例 分子分母に $(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6})$ をかけて, がんばって計算すると分母が有理化される.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = 376$$

$$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = -4-14\sqrt{2}-16\sqrt{3}+38\sqrt{6}.$$

$$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = \frac{-4-14\sqrt{2}-16\sqrt{3}+38\sqrt{6}}{376} = -\frac{1}{94}-\frac{7}{188}\sqrt{2}-\frac{2}{47}\sqrt{3}+\frac{19}{188}\sqrt{6}. \quad □$$

考え方 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ の $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ を $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$ におきかえて得られる4つの数をかけあわせると有理数(この場合は整数)になる. このような観察が Galois 理論に至る道になっている. □

$\boxed{\text{注意}}$ 一般に

$$(a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{mn})(a-b\sqrt{m}+c\sqrt{n}-d\sqrt{mn})$$

$$= (a+c\sqrt{n})^2 - m(b+d\sqrt{n})^2$$

$$= \underbrace{a^2-mb^2+nc^2-mnd^2}_{=:A} + \underbrace{2(ac-mbd)}_{=:B}\sqrt{n}.$$

$$(A+B\sqrt{n})(A-B\sqrt{n}) = A^2-nB^2.$$

以上の計算より, $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Q}$ のとき,

$a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{m}\sqrt{n}$ の中の $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ をそれぞれ $\pm\sqrt{m}$, $\pm\sqrt{n}$ でおきかえてできる4つの数をかけあわせると有理数になることがわかる. $\square$

$\boxed{\text{注意}}$ $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ の体の自己同型 σ, τ で

$$\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt{3})=\sqrt{3},\quad \tau(\sqrt{3})=-\sqrt{3},\ \tau(\sqrt{2})=\sqrt{2}$$

をみたすものが一意に存在する. このような σ, τ をうまく利用することがGalois理論になっている. $\square$