

問題 9-1 (\mathbb{F}_p の代数閉包)

09-2

p は素数であるとし、 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく、 \mathbb{F}_p は位数 p で標数 p の有限体になる。
 Ω は代数閉体であるような \mathbb{F}_p の拡大体であるとする、 $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ と書く、
(そのような Ω の存在は Steinitz の定理によって保証される。) 以下を示せ:

- (1) Ω の任意の部分体 K は \mathbb{F}_p を含む、
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ について、 $F_n(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ とおき、
 Ω における $F_n(x)$ の根全体を $L_n = \{\alpha \in \Omega \mid F_n(\alpha) = 0\}$ と書く、
このとき、 L_n は Ω に含まれる唯一つの位数 p^n の有限部分体になる、
以下、 $\mathbb{F}_{p^n} = L_n$ とおく、
- (3) $m \mid n$ のとき、 $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$
- (4) $L_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ とおく、 L_∞ は \mathbb{F}_p の代数閉包になる。

□

注意 上の結果は大雑把に言って、標数 p のすべての有限体の和集合として、 \mathbb{F}_p の代数閉包が得られることを意味している! $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^n}$ 。
一般の場合とちがって、 \mathbb{F}_p の代数閉包は特別に易しい。

□

問題 9-2 Artinの定理 (08-2でやった) を認めて以下を示せ.

k は体であるとし, $L = k(t_1, \dots, t_n)$ は体 k 上の n 変数有理函数体であるとする. t_1, \dots, t_n の基本対称式 e_1, \dots, e_n を次のように定める:

$$e_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} t_{i_1} \dots t_{i_r}. \quad \leftarrow \binom{n}{r} \text{項の式.}$$

たとえば, $n=3$ のとき,

$$e_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad e_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad e_3 = t_1 t_2 t_3,$$

L の部分体 K を $K = k(e_1, \dots, e_n)$ と定める. 以下を示せ.

(1) L は $F(x) = x^n + \sum_{r=1}^n (-1)^r e_r x^{n-r} \in K[x]$ の K 上での最小分解体である.

(2) $[L:K] = n!$

(3) $\text{Gal}(L/K) \cong S_n.$

□

ヒント L への S_n の自然な作用に関する L^{S_n} を K' と書く.

Artinの定理より, $\text{Gal}(L/K') \cong S_n$, $[L:K'] = n!$ となる.

$K \subset K'$ なので $[L:K] \geq n!$ がわかる. $[L:K] \leq n!$ を示せば $K=K'$ が得られる. □