問題 7-1 $F(x) = x^3 - 3$, $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しく<u>ない</u>。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$ に等しい。

以下，$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}] = 6$ を認めて使ってよい。（問題 3-5, 4-2 の解答例も参照）

(4) $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の体の自己同型 σ, τ を次のように定義できる：

$$\sigma(f(\alpha)) = \omega\alpha \quad (f(x) \in \mathbb{Q}(\omega)[x]), \quad \tau(g(\omega)) = g(\omega^2) \quad (g(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)[x])$$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_3 \cong S_3$ ← 特に(6)をやってほしい

(6) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q}$ の中間体の Galois 対応は以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \{1\} \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \tau \rangle & \langle \sigma\tau \rangle & \langle \sigma^2\tau \rangle & \langle \sigma \rangle \\
 & & \langle \sigma, \tau \rangle \arrow[ull, dash] \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbb{Q}(\alpha,\omega) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\alpha) & \mathbb{Q}(\omega^2\alpha) & \mathbb{Q}(\omega\alpha) & \mathbb{Q}(\omega) \\
 & & \mathbb{Q} \arrow[ull, dash] \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{問題 7-1 解答例}}$ $\left(F(x) = x^3 - 3,\ \alpha = \sqrt[3]{3},\ \omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0.\right)$

(1) $3 \nmid 1,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid (-3),\ 3^2 \nmid (-3)$ と Eisenstein の判定法より $F(x) = x^3 - 3$ は $\mathbb{Q}$ 上で既約である。

$F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で既約で $F(\alpha) = 0$ をみたすので、α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ である。 $\left(\begin{array}{l} \mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(F(x)) \text{ より} \\ f(\alpha) \longleftrightarrow \overline{f(x)} \end{array}\right)$

$F(x) = (x - \alpha)(x - \omega\alpha)(x - \omega^2\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha) \not\subset \mathbb{R}$ である。

ゆえに、$\mathbb{Q}(\alpha)$ は $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体ではない。

(3) $\left.\begin{array}{l} \alpha, \omega \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha) \text{ より } \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha). \\ \alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \text{ より } \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \omega). \end{array}\right\}$ ゆえに $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha)$.

$\left.\begin{array}{l} \alpha, \omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) \text{ より } \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) \\ \alpha, \sqrt{-3} = 2\omega + 1 \in \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \text{ より、} \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \end{array}\right\}$ ゆえに $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$.

(4) $[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]=2$, $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]=6$ より, $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\omega)]=\dfrac{[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]}=3$.

$F(x)=x^3-3\in\mathbb{Q}(\omega)[x]$, $F(\alpha)=0$, $\deg F(x)=3=[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\omega)]$

なので, $F(x)$ は $\mathbb{Q}(\omega)$ 上での α の最小多項式である.

ゆえに, 以下のようにして, $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の $\mathbb{Q}(\omega)$ 上での自己同型 σ を作れる:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\alpha,\omega) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{Q}(\omega)[x]/(F(x)) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{Q}(\omega\alpha,\omega)=\mathbb{Q}(\alpha,\omega) \\
f(\alpha) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\sigma"'] & \overline{f(x)} \arrow[r, leftrightarrow] & f(\omega\alpha)
\end{tikzcd}
$$

$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$, $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]=6$ より, $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]=\dfrac{[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}=2$.

$G(x)=x^2+x+1$ とおくと, $G(x)\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]$, $G(\omega)=0$, $\deg G(x)=2=[\mathbb{Q}(\alpha;\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]$

なので, $G(x)$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上での ω の最小多項式である.

ゆえに, 以下のようにして, $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上での自己同型 τ を作れる:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\alpha,\omega) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{Q}(\alpha)[x]/(G(x)) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{Q}(\alpha,\omega^2)=\mathbb{Q}(\alpha,\omega) \quad (\omega^2=\omega^{-1}) \\
g(\omega) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\tau"'] & \overline{g(x)} \arrow[r, leftrightarrow] & g(\omega^2)
\end{tikzcd}
$$

(5) $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ は $F(x) = x^3 - 3$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体なので，

$\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}$ は有限次Galois拡大である.

ゆえに，$|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}] = 6$.

(4)の記号のもとで，$\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q})$ である. そして，

$$
\left.
\begin{aligned}
&1(\alpha) = \alpha, && 1(\omega) = \omega \\
&\sigma(\alpha) = \omega\alpha, && \sigma(\omega) = \omega \\
&\sigma^2(\alpha) = \omega^2\alpha, && \sigma^2(\omega) = \omega \\
&\sigma^3(\alpha) = \alpha, && \sigma^3(\omega) = \omega \\
&\tau(\alpha) = \alpha, && \tau(\omega) = \omega^2 \\
&\sigma\tau(\alpha) = \omega\alpha, && \sigma\tau(\omega) = \omega^2 \\
&\sigma^2\tau(\alpha) = \omega^2\alpha, && \sigma^2\tau(\omega) = \omega^2 \\
&\tau^2(\alpha) = \alpha, && \tau^2(\omega) = \omega^4 = \omega \\
&\tau\sigma\tau(\alpha) = \omega^2\alpha, && \tau\sigma\tau(\omega) = \omega
\end{aligned}
\right\}
$$

ゆえに，

この 1 は $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}(\alpha, \omega)}$

$$1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2$$

は互いに異なるので，

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}.$$

さらに $\sigma^3 = \tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^2 = \sigma^{-1}$.

$(\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau)$

これより

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}) \cong D_3 \cong S_3.$$

(6) $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \omega)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ $(\sigma^3 = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau)$

の部分群をすべて求めよう。 1 3 3 2 2 2 ← 元の位数

位数6の群G の部分群の位数はその約数 1, 2, 3, 6 のどれかになる。

<u>位数1</u> $\{1\}$ しかない。

<u>位数2</u> 位数2の部分群は位数2の元から生成される巡回群になる。

Gの位数2の部分群全体は $\langle\tau\rangle, \langle\sigma\tau\rangle, \langle\sigma^2\tau\rangle$。

<u>位数3</u> 位数3の部分群は位数3の元から生成される巡回群になる。

Gの位数3の部分群 は $\langle\sigma\rangle = \langle\sigma^2\rangle$ の1つだけ。

<u>位数6</u> Gの位数6の部分群はGそのものになる。

$L=\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ とおく。Gの部分群Hに対応する $L/\mathbb{Q}$ の部分体 L^H を求めよう。

$[L:L^H]=|\mathrm{Gal}(L/L^H)|=|H|$, $[L^H:\mathbb{Q}]=\dfrac{[L:\mathbb{Q}]}{[L:L^H]}=\dfrac{|G|}{|H|}$ に注意せよ。

<u>$L^{\{1\}}$</u> $\quad L^{\{1\}}=\{\beta\in L \mid 1(\beta)=\beta\}=L=\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$.

<u>$L^{\langle\tau\rangle}$</u> $\quad \tau(\alpha)=\alpha$ より $\alpha\in L^{\langle\tau\rangle}$ なので $\mathbb{Q}(\alpha)\subset L^{\langle\tau\rangle}$ であり、

$[L^{\langle\tau\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{|G|}{|\langle\tau\rangle|}=\dfrac{6}{2}=3=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ なので $L^{\langle\tau\rangle}=\mathbb{Q}(\alpha)$.

<u>$L^{\langle\sigma\tau\rangle}$</u> $\quad \sigma\tau(\omega^2\alpha)=\sigma(\omega\alpha)=\omega^2\alpha$ なので $\mathbb{Q}(\omega^2\alpha)\subset L^{\langle\sigma\tau\rangle}$ であり、

$[L^{\langle\sigma\tau\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{|G|}{|\langle\sigma\tau\rangle|}=\dfrac{6}{2}=3=[\mathbb{Q}(\omega^2\alpha):\mathbb{Q}]$ なので $L^{\langle\sigma\tau\rangle}=\mathbb{Q}(\omega^2\alpha)$.

<u>$L^{\langle\sigma^2\tau\rangle}$</u> $\quad \sigma^2\tau(\omega\alpha)=\sigma^2(\omega^2\alpha)=\omega^2\omega^2\alpha=\omega\alpha$ なので $\mathbb{Q}(\omega\alpha)\subset L^{\langle\sigma^2\tau\rangle}$ であり、

$[L^{\langle\sigma^2\tau\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{|G|}{|\langle\sigma^2\tau\rangle|}=\dfrac{6}{2}=3=[\mathbb{Q}(\omega\alpha):\mathbb{Q}]$ なので $L^{\langle\sigma^2\tau\rangle}=\mathbb{Q}(\omega\alpha)$.

<u>$L^{\langle\sigma\rangle}$</u> $\quad \sigma(\omega)=\omega$ より $\mathbb{Q}(\omega)\subset L^{\langle\sigma\rangle}$ であり

$[L^{\langle\sigma\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{|G|}{|\langle\sigma\rangle|}=\dfrac{6}{3}=2=[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]$ なので $L^{\langle\sigma\rangle}=\mathbb{Q}(\omega)$.

<u>L^G</u> $\quad [L^G:\mathbb{Q}]=\dfrac{|G|}{|G|}=1$ なので $L^G=\mathbb{Q}$.

以上を図で描くと

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \{1\} \arrow[dlll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drrr, dash] & & & \\
\langle \tau \rangle \arrow[drrr, dash] & & \langle \sigma\tau \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle \sigma^2\tau \rangle \arrow[dl, dash] & & \langle \sigma \rangle \arrow[dlll, dash] \\
 & & & G & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & L^{\{1\}} = \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \arrow[dlll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drrr, dash] & & & \\
L^{\langle \tau \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha) \arrow[drrr, dash] & & L^{\langle \sigma\tau \rangle} = \mathbb{Q}(\omega^2\alpha) \arrow[dr, dash] & & L^{\langle \sigma^2\tau \rangle} = \mathbb{Q}(\omega\alpha) \arrow[dl, dash] & & L^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q}(\omega) \arrow[dlll, dash] \\
 & & & L^{G} = \mathbb{Q} & & &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\text{問題 7-2}}$ $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である.

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しい.

$F(x)$ のすべての根が $\mathbb{Q}(\alpha)$ に含まれる.

(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ の体の自己同型 σ を $\sigma(f(\alpha)) = f(\sqrt{2-\sqrt{2}})$ $(f(x) \in \mathbb{Q}[x])$ 定義できる.

(4) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体全体の Galois 対応は以下の図のようになっている:

$$
\begin{array}{ccc}
\{1\} & \qquad\qquad & \mathbb{Q}(\alpha) \\
| & & | \\
\langle \sigma^2 \rangle & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
| & & | \\
\langle \sigma \rangle & & \mathbb{Q}
\end{array}
$$

問題7-2の解答例

$F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ とおく。

$\alpha^2 = 2+\sqrt{2}$, $\alpha^4 = 6 + 4\sqrt{2}$ より, $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$, $F(\alpha) = 0$.

(1) $2 \mid 1$, $2 \mid 0$, $2 \mid (-4)$, $2 \mid 0$, $2 \mid 2$, $2^2 \nmid 2$ とEisensteinの判定法より,
$F(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上で既約である。

$F(\alpha) = 0$ でもあるので, $F(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ の他に, $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\gamma = -\alpha$, $\delta = -\beta$ とおく。

$X^2 - 4X + X = 0$ の解は $X = 2 \pm \sqrt{2}$ なので $F(x)$ の根の全体は $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ になる。

ゆえに $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ になる。

$\dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}$, $\alpha^2 - 2 = \sqrt{2}$ より $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 - 2}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

ゆえに, $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

(3) 上と同様にして，$\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\beta} = \dfrac{2-\beta^2}{\beta} \in \mathbb{Q}(\beta)$ なので $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

ゆえに，$\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha)$. $F(x)$ は β の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式でもある.

以下のようにして，体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上での自己同型 σ を作れる：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}(\alpha) & \cong & \mathbb{Q}[x]/(F(x)) & \cong & \mathbb{Q}(\beta) & = & \mathbb{Q}(\alpha) \\ f(\alpha) & \longleftrightarrow & \overline{f(x)} & \longleftrightarrow & f(\beta) & & \end{array}$$

$$f(\alpha) \overset{\sigma}{\longmapsto} f(\beta)$$

(4) $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \deg F(x) = 4$.

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \beta = \frac{\alpha^2-2}{\alpha} \\ \sigma^2(\alpha) &= \sigma(\beta) = \frac{\beta^2-2}{\beta} = \frac{-\sqrt{2}}{\beta} = -\alpha = \gamma \\ \sigma^3(\alpha) &= \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha) = -\beta = \delta \\ \sigma^4(\alpha) &= \sigma(-\beta) = -\sigma(\beta) = -(-\alpha) = \alpha. \end{aligned}\right\}$$

$1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3$ は互いに異なるので

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$.

さらに，$\sigma^4 = 1$ なので

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$.

(5) $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \cong C_4$ とおく。

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 1 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \longleftarrow$ 元の位数.

G の部分群の全体は $\{1\}$, $\langle \sigma^2 \rangle$, $\langle \sigma \rangle = G$ の3つである。

$$\mathbb{Q}(\alpha)^{\{1\}} = \{\eta \in \mathbb{Q}(\alpha) \mid 1(\eta) = \eta\} = \mathbb{Q}(\alpha).$$

$\sigma^2(\sqrt{2}) = \sigma^2(\alpha^2 - 2) = (-\alpha)^2 - 2 = \alpha^2 - 2 = \sqrt{2}$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle \sigma^2 \rangle}$ であり,

$\sigma^2(\alpha) = -\alpha$

$[\mathbb{Q}(\alpha)^{\langle \sigma^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = \dfrac{|G|}{|\langle \sigma^2 \rangle|} = \dfrac{4}{2} = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ なので $\mathbb{Q}(\alpha)^{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$[\mathbb{Q}(\alpha)^G : \mathbb{Q}] = \dfrac{|G|}{|G|} = 1$ より $\mathbb{Q}(\alpha)^G = \mathbb{Q}$.

以上を図で描くと,

$$\begin{array}{ccc}
\{1\} & \quad\quad & \mathbb{Q}(\alpha)^{\{1\}} = \mathbb{Q}(\alpha) \\
| & & | \\
\langle \sigma^2 \rangle & & \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
| & & | \\
G = \langle \sigma \rangle & & \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q}
\end{array}$$