定義 Kを$\mathbb{C}$の部分体とし，$\alpha \in \mathbb{C}$とする．

αがK上<u>作図可能</u>であるとは，Kの元たちから出発して，加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかえしてαが得られることだと定める．□

例 $\sqrt{2}$や$\pm i = \pm\sqrt{-1}$や$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$は$\mathbb{Q}$上作図可能である．

$\sqrt{\pi}$は$\mathbb{Q}(\pi)$上作図可能である．

<u>$a, b, c \in K$のとき，$ax^2+bx+c=0$の解はK上作図可能である</u>　□

正の整数nに対して，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$とおく．　1の原始n乗根の1つ

問題3-1 ζ_5が$\mathbb{Q}$上作図可能なことを示せ．□

ヒント $\omega = \zeta_5$とおく．2次方程式の解と係数の関係を使う．

$\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$とおくと，$\alpha + \beta = ?$，$\alpha\beta = ?$．

$\omega + \omega^4 = \alpha$，$\omega \cdot \omega^4 = 1$．　□

注意 本質的に正五角形の作図可能性！　□

注意 $\omega = \zeta_5 \neq 1$かつ$\omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$より，$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$．

問題2-2(4)の結果より，$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$は$\mathbb{Q}$上既約な多項式である．

問題3-1は本質的に「加減乗除と平方根のみを使って方程式$x^4+x^3+x^2+x+1=0$を解け」という問題とみなされる．

□

$\boxed{\text{問題 3-1 解答例}}$ $w = \zeta_5 = e^{2\pi i/5}$ とおく。$w^5=1$, $w \neq 1$ である。

条件 $w^4+w^3+w^2+w+1 \overset{(*)}{=} 0$, $\operatorname{Re} w>0$, $\operatorname{Im} w>0$ で w は一意に特徴付けられる。

$\boxed{1}$ $\alpha = w+w^4$, $\beta = w^2+w^3$ とおく。このとき，$\alpha+\beta=-1$ でかつ

$$\alpha\beta = (w+w^4)(w^2+w^3) \overset{w^5=1}{=\!=\!=} w^3+w^4+w+w^2 \overset{(*)}{=} -1.$$

ゆえに，α と β は方程式 $\lambda^2+\lambda-1=0$ の解である。$\alpha = w+w^4 = w+\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$ なので，

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.\quad \text{ゆえに，}\ \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.\qquad \left(\alpha^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \alpha^2-4 = -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\boxed{2}$ $w+w^4=\alpha$ と $w\cdot w^4 \overset{(*)}{=} 1$ より，w と w^4 は方程式 $\mu^2-\alpha\mu+1=0$ の解である。$\operatorname{Im} w>0$ より，

$$w = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2} = \frac{\alpha+\sqrt{4-\alpha^2}\,i}{2}.$$

これで，w は有理数から出発して，加減乗除と平方根をとる操作を有限回くりかえすことによって得られることがわかった。つまり，w は作図可能である。 □

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の方法はそのまま ζ_{17} の場合（問題 3-2）にも使える。 □

$\boxed{\text{追記}}$ 問題3-1は本質的に

4次方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を2次方程式たちに帰着して解け

という問題に等しい。これを以下のようにして解くこともできる。

「$x^4+x^3+x^2+x+1=0$」は「$x \neq 0$ かつ $x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$」と同値である。

以下，$x \neq 0$ と仮定する。

$y=x+x^{-1}$ とおくと，$y^2=x^2+2+x^{-2}$ なので，

$x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$ は $y^2+y-1=0$ と同値である。

$y=x+x^{-1}$ は $x^2-yx+1=0$ と同値である。

以上より，$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解法は，連立方程式

$$\begin{cases} y^2+y-1=0 & \cdots ① \\ x^2-yx+1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解法に帰着できることがわかる。

$$y^2+y-1$$
$$\downarrow$$
$$y^2-4=-(y+3)=-\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$\downarrow$$

① の解の全体は，$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

y が与えられたときの ② の解の全体は，$x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$.

□

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ ζ_{17} が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ。 $\square$ ← かなり非自明、

(これに関連した問題をずっと後にレポート課題に出す予定)

$\boxed{\text{解答例}}$ $\omega = \zeta_{17} = e^{2\pi i/17}$ とおく。このとき、$\omega^{17}=1$, $\omega \neq 1$, $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{16} \overset{(*)}{=} 0$。

$\omega_0 = \omega$, $\omega_{k+1} = \omega_k^3$ $(k=0,1,\ldots,15)$ とおく。それらを計算すると、

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ω_k	ω	ω^3	ω^9	ω^{10}	ω^{13}	ω^5	ω^{15}	ω^{11}	ω^{16}	ω^{14}	ω^8	ω^7	ω^4	ω^{12}	ω^2	ω^6	ω

ゆえに、$\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{15}\} = \{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{16}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1+z+z^2+\cdots+z^{16}=0\}$.

$\boxed{1}$ $\alpha_0 = \sum_{i=0}^{7} \omega_{2i}$, $\alpha_1 = \sum_{i=0}^{7} \omega_{2i+1}$ とおく。 $\alpha_0+\alpha_1 \overset{(*)}{=} -1$ でかつ

$\alpha_0\alpha_1 = (8\times 8 = 64 \text{ 項を整理する}) = 4\sum_{k=1}^{16} \omega^k \overset{(*)}{=} -4$.

ゆえに、α_0, α_1 は方程式 $x^2+x-4=0$ の解になる。

$\boxed{2}$ $\beta_i = \sum_{j=0}^{3} \omega_{4j+i}$ $(i=0,1,2,3)$ とおく。 $\beta_0+\beta_2=\alpha_0$, $\beta_1+\beta_3=\alpha_1$ でかつ

$\beta_0\beta_2 = (4\times 4 = 16\text{項}) = \sum_{k=1}^{16} w^k \overset{*}{=} -1$, $\beta_1\beta_3 = (4\times4=16\text{項}) = \sum_{k=1}^{16} w^k = -1$.

ゆえに, β_0, β_2 は $\lambda^2-\alpha_0\lambda-1=0$ の解であり, β_1, β_3 は $\lambda^2-\alpha_1\lambda-1=0$ の解になる。

$\boxed{3}$ $\gamma_i = \omega_i + \omega_{i+8}$ $(i=0,1,\dots,7)$ とおく。 $\gamma_i+\gamma_{i+4}=\beta_i$ $(i=0,1,2,3)$ でかつ

$\gamma_i\gamma_{i+4} = \beta_{i+1}$ $(i=0,1,2,3$ $\beta_4=\beta_0$ とおく$)$. たとえば,

$$\gamma_0\gamma_4 = (\omega_0+\omega_8)(\omega_4+\omega_{12}) = (w+w^{16})(w^{13}+w^4) = w^{14}+w^5+w^{12}+w^3$$
$$= \omega_9+\omega_5+\omega_{13}+\omega_1 = \beta_1$$

ゆえに, γ_i, γ_{i+4} は $\mu^2-\beta_i\mu+\beta_{i+1}=0$ の解になる。

$\boxed{4}$ $\omega_i+\omega_{i+8}=\gamma_i$ でかつ $\omega_i\omega_{i+8}=1$ $(i=0,1,\dots,7)$.

たとえば $\omega_0\omega_8 = w\cdot w^{16} = w^{17} = 1$.

ゆえに, ω_i, ω_{i+8} は $\nu^2-\gamma_i\nu+1=0$ の解になる。

以上によって, $\omega_0=w$ を含む ω_i の全体が有理数から出発して四則演算と二次方程式を解くことの有限回のくりかえしで作られることがわかった。

特に w は作図可能である。 $\square$

$\boxed{\text{注意}}$ $\sigma(\omega)=\omega^3$, $\sigma(a)=a$ $(a\in\mathbb{Q})$ をみたす体 $L=\mathbb{Q}(\omega)$ の自己同型 σ が存在することを示せる。(ヒント: $\mathbb{Q}(\omega^k)\cong\mathbb{Q}[x]/(1+x+\cdots+x^{16})$, $k=1,2,\ldots,16$)

このとき, $\{\sigma^k(\omega)\mid k=0,1,\ldots,15\}=\{\omega^k\mid k=1,2,\ldots,16\}=\{z\in\mathbb{C}\mid 1+z+\cdots+z^{16}=0\}$ でこの集合は $\mathbb{Q}(\omega)$ の $\mathbb{Q}$ 上での基底になる ($1+x+\cdots+x^{16}$ の $\mathbb{Q}$ 上での既約性より)。

このことを使うと，前ページまでの計算を簡略化できる。

たとえば, $\omega_k=\sigma^k(\omega)$, $\alpha_k=\sum_{i=0}^{7}\sigma^{2i+k}(\omega)$, $\sigma(\alpha_k)=\alpha_{k+1}$, $\alpha_{k+2}=\alpha_k$ より，特に, $\sigma(\alpha_0\alpha_1)=\sigma(\alpha_0)\sigma(\alpha_1)=\alpha_1\alpha_0=\alpha_0\alpha_1$ と σ の作用で $\alpha_0\alpha_1$ は不変になる。

$\alpha_0\alpha_1$ は ω のべきたちの $8^2=64$ 個の和になるので

$$\alpha_0\alpha_1=\sum_{k=0}^{15}c_k\sigma^k(\omega),\quad c_k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0},\quad \sum_{k=0}^{15}c_k=64$$

と表わされる。$\sigma^k(\omega)$ $(k=0,1,\ldots,15)$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立で, $\sigma(\alpha_0\alpha_1)=\alpha_0\alpha_1$ より, c_k たちは互いに等しいことがわかる。したがって, $c_k=4$, すなわち,

$$\alpha_0\alpha_1=4\sum_{k=0}^{15}\sigma^k(\omega)=4\sum_{l=1}^{16}\omega^l=-4.$$

しかし，エレガントでない素朴な方法で $\alpha_0\alpha_1=-4$ を示す経験も重要である。 □

$\boxed{\text{追記}}$ $\beta_k = \sum_{i=0}^{3} \sigma^{4i+k}(\omega)$, $\sigma(\beta_k) = \beta_{k+1}$, $\beta_{k+4} = \beta_k$ より, $\sigma^2(\beta_k \beta_{k+2}) = \beta_k \beta_{k+2}$.

$\beta_0 \beta_2$ は $4^2 = 16$ 個の $\omega_\ell = \sigma^\ell(\omega)$ たちの和になり, σ^2 の作用で不変で,

項として, $\omega_0 \omega_2 = \omega_3$ と $\omega_0 \omega_6 = \omega_8$ を含むので, $\beta_0 \beta_2 = \sum_{\ell=0}^{15} \omega_\ell = -1$.

これの両辺に σ^k を作用させると, $\beta_k \beta_{k+2} = -1$.

$\gamma_k = \sum_{i=0}^{1} \sigma^{8i+k}(\omega)$, $\sigma(\gamma_k) = \gamma_{k+1}$, $\gamma_{k+8} = \gamma_k$ より, $\sigma^4(\gamma_k \gamma_{k+4}) = \gamma_k \gamma_{k+4}$.

$$\gamma_0 \gamma_4 = (\omega_0 + \omega_8)(\omega_4 + \omega_{12}) = (\omega + \omega^{16})(\omega^{13} + \omega^4) = \omega^{14} + \omega^5 + \omega^{12} + \omega^3$$
$$= \omega_9 + \omega_5 + \omega_{13} + \omega_1 = \beta_1$$

これに, σ^k を作用させると, $\gamma_k \gamma_{k+4} = \beta_{k+1}$.

$\omega_0 \omega_8 = \omega \cdot \omega^{16} = \omega^{17} = 1$. これに σ^k を作用させると, $\omega_k \omega_{k+8} = 1$.

以上によって, 前々ページまでで略した計算がすべて埋まった. $\square$

以上を見すぎてしまう前に自分で計算することを楽しんでほしいです!
特に数学を教える仕事に興味がある人は色々計算しておくとよい!
数学の研究でも素朴な計算が重要である!