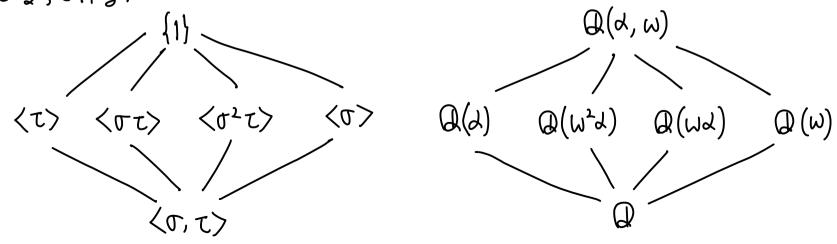
問題7-1] F(x) = $\chi^3 - 3$, $d = \sqrt[3]{3}$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とかく、以下を示せ、

- (1) F(x) は dの Q上での最小多項式である。
- (2) F(x)の Q上での最小分解体は Q(x) に等しくない。

- Q上の才程式 x3-3=0の Galois 対応の言述
- (3) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x,ω)=Q(σ,√-3)に等Lい、 以下, [Q(d,ω):Q]=6を認めて使ってよい、(問題3-5,4-2の解答例も参照)
- (4) $Q(\alpha, \omega)$ の体の自己同型 T, T を 次のように定義できるこ $T(f(\lambda)) = f(\omega\lambda)$ $(f(\lambda) \in Q(\omega)[\lambda])$, $T(g(\omega)) = g(\omega^2)$ $(g(\lambda) \in Q(\alpha)[\lambda])$.
- (5) $God(Q(A, W)/Q) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_3 \cong S_3$ \checkmark 特に(b)をやってほしい。
- (b) Gal(Q(d,w)/Q)の部分群全体とQ(d,w)/Qの中間体のGalois対応は以下のようになっている:



問題7-1解答例 $(F(x) = x^3 - 3, \alpha = \sqrt{3}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \omega^3 = 1, \omega^3 + \omega + 1 = 0.)$

- (1) 3+1, 3 0, 3 0, 3 (-3), 3 (-3) と Eisensteinの判定法より F(x)=x3-3 は
- Q上で既約である、 (x^3-3) が Qに根を持たないことからも Q上での既約性かわかる、) \leftarrow $^{(x)}$ $^{$
- (3) $d, \omega = \frac{\omega d}{d} \in \mathbb{Q}(d, \omega d, \omega^2 d) \pm 1$ $\mathbb{Q}(d, \omega) \subset \mathbb{Q}(d, \omega d, \omega^2 d)$ $\mathbb{Q}(d, \omega) = \mathbb{Q}(d, \omega)$

(4)
$$[Q(\omega):Q]=2$$
, $[Q(a,\omega):Q]=b$ ± 1), $[Q(a,\omega):Q(\omega)]=\frac{[Q(a,\omega):Q]}{[Q(\omega):Q]}=3$. $G_{a(a)}(RQ(\omega)\pm 0)$ $G_{a($

(4)の記号のもとで、の、て $\in Gal(Q(a,\omega)/Q)$ である、そんて,

$$(1) \quad 1(A) = A, \quad 1(W) = W$$

$$\Omega_3(\alpha) = \gamma \quad \Omega_3(\alpha) = \alpha$$

$$\Omega_3(\alpha) = \gamma \quad \Omega_3(\alpha) = \alpha$$

$$\mathcal{G}$$
 $\tau(\lambda) = \lambda$, $\tau(\omega) = \omega^2$

(5)
$$\sigma \tau(\lambda) = \omega \lambda$$
, $\sigma \tau(\omega) = \omega^2$

(b)
$$T^2T(A) = W^2A$$
, $T^2T(W) = W^2$

$$T^2(A) = A$$
, $T^2(W) = W^4 = W$

$$TOT(A) = W^2A$$
, $TOT(W) = W$

(d, ω)/ ω) である、んして,
ゆえた, この 1 は id Q(d, ω)
1, σ, σ², τ, στ, σ²
は 互いに 異なるので,
Gal(Q(d, ω)/Q) = {1, σ, σ², τ, στ, σ²τ⟩,
さらに
$$\sigma^3 = \tau^2 = 1$$
, $\tau = \tau^2 = \sigma^{-1}$,
これより $\tau = \tau^{-1}$
 $\tau = \tau = \tau^{-1}$

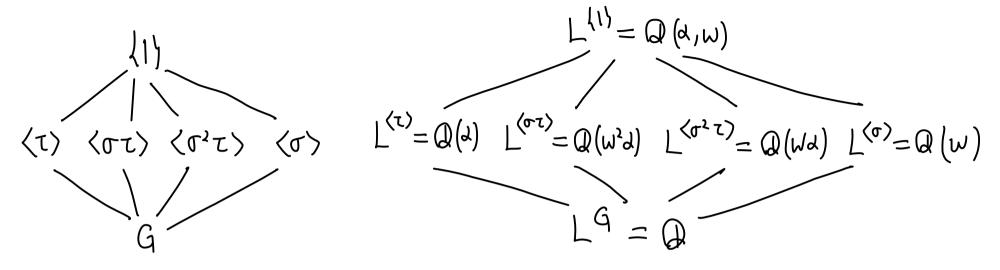
(6) $G = Gal(Q(d,W)/Q) = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ ($\sigma^3 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$) の部分群をすべて求めよう、 $1 3 3 2 2 2 \leftarrow 元の位数$ 位数6の群 G の部分群の位数はその約数 1, 2, 3, 6 のどれかになる、 (Lagrange の定理より)人

位数2 位数2の部分群は位数2の元から生成される巡回群になる、 Gの位数2の部分群全体はくひ,くので)、〈でで〉、

位数3 位数3の部分群は位数3の元から生成される巡回群になる。 Gの位数3の部分群はくの>=くの2>の1ったけ、

位数6 Gの位数6の部分群はG=〈のなうそのものになる

以上を図で描くら



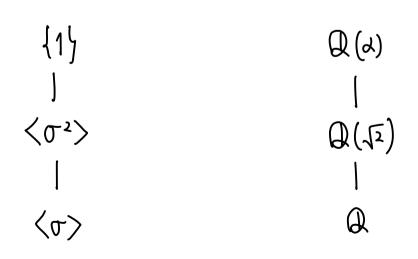
上の図はQ上での方程式ガー3=0がどのように解けて行くか正記述しているとみなせる。

(1) F(x)はdのQ上での最小多項式である。

F(x)のすべての根か。 Q(d)に含まれる。

- (2) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x)に等しい、 Q(d)にきまれる。
- (3) Q(d)の体の自己同型 σ を $\sigma(f(d)) = f(\sqrt{2-12})$ $(f(a) \in Q(x))$ と定義できる、
- (4) $Gal(Q(A)/Q) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$
- (5) Gal(Q(d)/Q)の部分群全体とQ(d)/Qの中間体全体の

Galois村応は以下の図のようになっている:



Q上の才程式 X⁴-4X²+2=0 に関する Galo i 対応と 求める問題

問題7-2の解答例 $\chi^2 = 2\pm \sqrt{2}$, $\chi = \sqrt{2\pm \sqrt{2}}$, $-\sqrt{2\pm \sqrt{2}}$ と解ける.

 $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\forall x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

 $d^2 = 2 + \sqrt{2}$, $d^4 = 6 + 4\sqrt{2}$ &1), $d^4 - 4d^2 + 2 = 0$, F(a) = 0.

(1) 2×1,2 10,2 (-4),2 |0,2 |2,2×2 と Eisensteinの判定法より, F(x)はQ上で既約である

F(x)=0でもあるので、F(x)はよのQ上での最小多項式である。

(2) $d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ of the $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\delta = -d$, $\delta = -\beta$ \tag{2} \tag{5} X²-4X+2=0の解はX=2±豆なので F(x)の根の全体は{d,B,X,8}になる、 ゆえに F(a)の Q土での最小分解体はQ(d,β,8,8)=Q(a,β)になる。

 $\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\beta}{\sqrt{5}}, d^2 - 2 = \sqrt{2} |x| \beta = \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{d^2 - 2}{d} \in Q(a).$ ゆえた, $Q(\alpha) = Q(\alpha, \beta)$.

(3) 上で同様にして、
$$d = \frac{\Gamma}{\beta} = \frac{2-\beta^2}{\beta} \in Q(\beta)$$
 なので $Q(\beta) = Q(d,\beta)$. ゆえに、 $Q(\beta) = Q(d)$. $F(X)$ は β の Q 上での最小多項式でもある、 以下のようにして、体 $Q(d)$ の Q 上での自己同型 の $E(\lambda)$ に $Q(d) \xrightarrow{\sim} Q(X)/(F(A)) \xrightarrow{\sim} Q(\beta) = Q(d)$ $f(A) \xrightarrow{\sim} f(\beta)$

(4)
$$|\operatorname{Gal}(Q(\lambda)/Q)| = [Q(\lambda):Q] = \operatorname{deg} F(\lambda) = 4.$$

$$T(\lambda) = \beta = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}$$

$$T^2(\lambda) = T(\beta) = \frac{\beta^2 - 2}{\beta} = -\lambda = 1$$

$$T^3(\lambda) = T(-\lambda) = -T(\lambda) = -\beta = \delta$$

$$T^4(\lambda) = T(-\beta) = -T(\beta) = -(-\lambda) = \lambda$$

$$T^4(\lambda) = T(-\beta) = -T(\beta) = -(-\lambda) = \lambda$$

1, σ , σ^{2} , σ^{3} は互いに異なるので、 Gal(Q(a)/Q) = $\{1, \sigma, \sigma^{2}, \sigma^{3}\}$, さらた, $\sigma^{4} = 1$ なので Gal(Q(a)/Q) = $\langle \sigma \rangle \cong C_{4}$.

(5)
$$G = Gal(Q(d)/Q) = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \cong C_4 \times 3/\zeta$$
, $1 + 2 + \leftarrow \rightarrow \lambda$ の部分群の全体は $\{1\}, \langle \sigma^2 \rangle, \langle \sigma \rangle = G の 3つである。$

(i)
$$Q(a)^{\{1\}} = \{ \eta \in Q(a) \mid 1(\eta) = \eta \} = Q(a),$$

$$(\overline{\lambda} = a^2 - 2 \cdot \overline{\tau}, \quad \sigma^2(a) = -a \cdot \overline{\tau}, \quad \sigma^2(a) =$$

(ii)
$$\sigma^2(\sqrt{2}) = \sigma^2(d^2-2) = (-d)^2-2 = d^2-2 = \sqrt{2} + 1$$
 $\sigma^2(d) = -d$ $\sigma^2(d) = -d$

$$\left[Q(\lambda)^{\langle\sigma^2\rangle}:Q\right] = \frac{|G|}{|\langle\sigma^2\rangle|} = \frac{4}{2} = 2 = \left[Q(\sqrt{2}):Q\right] \not = 0 \cdot \sqrt{2} = Q(\sqrt{2}),$$

(iii)
$$[Q(a)^G: Q] = \frac{|G|}{|G|} = | \pm | Q(a)^G = Q$$

以土を図で描くと、
$$Q(d)^{\{1\}} = Q(d) \qquad \chi^2 = 2 \pm \sqrt{2} \text{ $2 \text{ k}} \langle z \rangle$$

$$| \qquad \qquad | \qquad \qquad |$$

$$Q(d)^{\{0^2\}} = Q(\sqrt{2}) \qquad \qquad |$$

$$Q(d)^{$$