問題 2-3 R は可換環であるとし，$p \in R$ であるとする．

$a \in R$ の R/pR での像を $\bar{a}$ と書き，写像 $\varphi : R[x] \to (R/pR)[x]$ を

$$\varphi\left(\sum_i a_i x^i\right) = \sum_i \bar{a}_i x^i \quad (a_i \in R)$$

と定める．以下を示せ．

(1) φ は環の準同型写像である．

(2) φ は全射である．

(3) $\mathrm{Ker}\,\varphi = pR[x]$

(4) 環の同型写像 $\bar{\varphi} : R[x]/pR[x] \xrightarrow{\sim} (R/pR)[x]$, $(f \bmod p) \mapsto \varphi(f)$ が得られる．

注意 $pR[x]$ も pR も (p) と書かれることがある．分脈によって区別せよ．

$$R[x]/(p) \xrightarrow{\sim} (R/(p))[x], \quad (f \bmod p) \mapsto \varphi(f).$$

互いに異なることに注意

$\square$

解答例 (1) φ が加法と 1 と乗法を保つことを示せばよい．

任意に $f, g \in R[x]$ をとる．f, g は次のように表される：

$$f = \sum_i a_i x^i, \quad g = \sum_i b_i x^i, \quad a_i, b_i \in R.$$

有限和，有限個を除いて $a_i = b_i = 0$.

つづく

このとき,

$a \mapsto \overline{a}$ は環の準同型より

$$\varphi(f+g) = \varphi\left(\sum_i (a_i+b_i)x^i\right) = \sum_i (\overline{a_i+b_i})x^i = \sum_i (\overline{a_i}+\overline{b_i})x^i$$
$$= \sum_i \overline{a_i}x^i + \sum_i \overline{b_i}x^i = \varphi(f)+\varphi(g).$$

$\varphi(1) = \overline{1} = ((R/pR)[x]$ における乗法の単位元$)$.

$$\varphi(fg) = \varphi\left(\sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)x^k\right) = \sum_k \left(\overline{\sum_{i+j=k} a_i b_j}\right)x^k = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} \overline{a_i}\,\overline{b_j}\right)x^k$$
$$= \left(\sum_i \overline{a_i}x^i\right)\left(\sum_j \overline{b_j}x^j\right) = \varphi(f)\varphi(g).$$

これで $\varphi : R[x] \to (R/pR)[x]$ が環の準同型であることが示された.

(2) φ が全射であることを示そう.

$F \in (R/pR)[x]$ を任意にとる. $F = \sum_i \alpha_i x^i$ (有限和), $\alpha_i \in R/pR$ と書ける.
R/pR の元はすべて $\overline{a}$, $a \in R$ の形をしているので, $\alpha_i = \overline{a_i}$, $a_i \in R$ と書ける.
$\alpha_i = 0$ のとき, $a_i = 0$ とできるのでそうしておく.
そのとき, $f = \sum_i a_i x^i$ によって, $f \in R[x]$ を作れ, $\varphi(f) = \sum_i \overline{a_i}x^i = \sum_i \alpha_i x^i = F$.
これで, φ の全射性を示せた.

(3) $\mathrm{Ker}\,\varphi = pR[x]$ を示そう.

$\mathrm{Ker}\,\varphi \supset pR[x]$ を示そう. 任意に $f \in pR[x]$ をとる. $f = pg$, $g \in R[x]$ と書ける.

ゆえに, $\varphi(f) = \varphi(pg) = \varphi(p)\varphi(g) = \overline{p}\varphi(g) = \overline{0}\varphi(g) = \overline{0}$.

したがって, $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. $\quad \overline{p} = \overline{0}$ in R/pR

これで, $\mathrm{Ker}\,\varphi \supset pR[x]$ が示された.

$\mathrm{Ker}\,\varphi \subset pR[x]$ を示そう. 任意に $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ をとる. $\varphi(f) = \overline{0}$ が成立している.

$f = \sum_i a_i x^i$ と書ける. そのとき, $\varphi(f) = \sum_i \overline{a_i} x^i$.

これが $\overline{0}$ に等しいので, すべての i について, $\overline{a_i} = \overline{0}$ となる.

これは, $a_i \in pR$ と同値なので, $a_i = pb_i$, $b_i \in R$ と書ける.

ゆえに, $f = \sum_i pb_i x^i = p\sum_i b_i x^i \in pR[x]$.

これで, $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset pR[x]$ が示された.

以上によって, $\mathrm{Ker}\,\varphi = pR[x]$ が示された.

(4) 環の同型写像 $\overline{\varphi} : R[x]/pR[x] \xrightarrow{\sim} (R/pR)[x],\ (f \bmod p) \mapsto \varphi(f)$ が得られることを示す。

しかし、これは (1), (2), (3) に環の準同型定理を適用した結果に等しい。

<u>環の準同型定理</u>　環 A, B と環の準同型写像 $\varphi : A \to B$ について、

次の環の同型写像が得られる：

$$\begin{array}{ccc} \overline{\varphi} : A/\mathrm{Ker}\,\varphi & \longrightarrow & \mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in A\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a + \mathrm{Ker}\,\varphi & \longmapsto & \varphi(a). \end{array}$$

これを $A = R[x]$, $B = (R/pR)[x]$, φ を問題のものとすると、ほしい結果が得られる。

$\square$

環の準同型定理の証明をきちんと理解しておくと、

他のことがらも理解しやすくなる。

そこに基本がつまっている！