

1の原始 n 乗根 $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ の \mathbb{Q} 上でのモニックな最小多項式を $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ と書き, (等周)円分多項式と呼ぶ. 次が成立している:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\omega \text{ は } 1 \text{ の原始 } n \text{ 乗根}} (x - \omega).$$

$\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ となることも知られている.

問題 13-1 $\Phi_n(x)$ を $n=1, 2, \dots, 12$ について求めよ. \square

問題 13-2 以下を示せ.

- (1) 素数 p と正の整数 e について, $\Phi_{p^e}(x) = \Phi_p(x^{p^{e-1}})$.
- (2) 正の奇数 n について, $\Phi_{2n}(x) = (-1)^{\varphi(n)} \Phi_n(-x)$. ($\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$)
- (3) $\mathbb{Q}(\zeta_{24}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. \square

問題 13-3 $\Phi_n(x)$ の係数は常に $0, \pm 1$ だけになるか? \square

問題 13-4 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ のとき, $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ となることを示せ. \square