

## 解答例の解説を来週やる問題

来週まで楽しんで考えてください。

01-3

**問題 1-5**  $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ,  $L = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  とおく。

$L$  が  $\mathbb{Q}, \alpha$  を含む  $\mathbb{R}$  の最小の部分体になっていることを示せ。  $\square$

**ヒント**  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  の証明は問題 1-1 でやった。

それと同じようにして,  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  を示せばよい。

そのとき,  $\beta = a + b\alpha + c\alpha^2 \neq 0$  に対する  $\frac{1}{\beta}$  の分母の有理化が必要になる。  $\square$

**問題 1-6**  $x$  に関する 3 次方程式  $x^3 - 3px + q = 0$  の解法を作れ。  $\square$

**ヒント**  $p = yz$ ,  $q = y^3 + z^3$  とできたらどうなるか?  $\rightarrow$  問題 1-4。  $\square$

**問題 1-7**  $x^3 + 2x - 2 = 0$  をみたす正の実数  $x = \alpha$  が存在することを示せ。  
さらに  $\alpha$  の具体的な形を求めよ ( $\sqrt{\quad}$  と  $\sqrt[3]{\quad}$  を使って表せ)。  $\square$

来週の資料を見る前に以上の問題を解いておいてください。