

定義 K を \mathbb{C} の部分体とし, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする.

α が K 上 作図可能 であるとは, K の元たちから出発して, 加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかして α が得られることと定義する. \square

例 $\sqrt{2}$ や $\pm i = \pm \sqrt{-1}$ や $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ は \mathbb{Q} 上作図可能である.

$\sqrt{\pi}$ は $\mathbb{Q}(\pi)$ 上作図可能である.

$a, b, c \in K$ のとき, $ax^2+bx+c=0$ の解は K 上作図可能である \square

正の整数 n に対して, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ とおく. 1 の原始 n 乗根
の 1 つ

問題 3-1 ζ_5 が \mathbb{Q} 上作図可能なことを示せ. \square

ヒント $\omega = \zeta_5$ とおく. 2 次方程式の解と係数の関係を使う. ←

$\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$ とおくと, $\alpha + \beta = ?$, $\alpha\beta = ?$.

$\omega + \omega^4 = \alpha$, $\omega \cdot \omega^4 = 1$. \square

注意 本質的に正五角形の作図可能性! \square

注意 $\omega = \zeta_5 \neq 1$ かつ $\omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$ より, $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

問題 2-2 (4) の結果より, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は \mathbb{Q} 上既約な多項式である.

問題 3-1 は本質的に「加減乗除と平方根のみを使って方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ を解け」

という問題とみなされる. \square

問題 3-1 解答例 $\omega = \zeta_5 = e^{2\pi i/5}$ とおく. $\omega^5 = 1, \omega \neq 1$ である.

条件 $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \stackrel{(*)}{=} 0, \operatorname{Re} \omega > 0, \operatorname{Im} \omega > 0$ で ω は一意に特徴付けられる.

[1] $\alpha = \omega + \omega^4, \beta = \omega^2 + \omega^3$ とおく. このとき, $\alpha + \beta = -1$ かつ

$$\alpha\beta = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) \stackrel{\omega^5=1}{=} \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 \stackrel{(*)}{=} -1. \text{ ゆえに, } \alpha \text{ と } \beta \text{ は}$$

方程式 $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ の解である. $\alpha = \omega + \omega^4 = \omega + \bar{\omega} \in \mathbb{R}_{>0}$ なので,

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ ゆえに, } \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \quad \left(\alpha^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \alpha^2 - 4 = -\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

[2] $\omega + \omega^4 = \alpha$ と $\omega \cdot \omega^4 \stackrel{(*)}{=} 1$ より, ω と ω^4 は方程式 $\mu^2 - \alpha\mu + 1 = 0$ の解である. $\operatorname{Im} \omega > 0$ より, $\omega = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = \frac{\alpha + \sqrt{4 - \alpha^2}i}{2}.$

これで, ω は有理数から出発して, 加減乗除と平方根をとる操作を有限回くりかえすことにより得られることがわかった. つまり, ω は作図可能である. \square

注意 以上の方法はそのまま ζ_{17} の場合 (問題 3-2) にも使える. \square

↪ 2次方程式を4回解いて ζ_{17} を求めることになる.

追記 問題 3-1 は本質的に

4次方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を 2次方程式たちに帰着して解けるという問題に等しい。これを以下のようにして解くこともできる。

「 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 」は「 $x \neq 0$ かつ $x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$ 」と同値である。
以下、 $x \neq 0$ と仮定する。

$y = x + x^{-1}$ とおくと、 $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$ なので、

$x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=0$ は $y^2+y-1=0$ と同値である。

$y = x + x^{-1}$ は $x^2 - yx + 1 = 0$ と同値である。

以上より、 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解法は、連立方程式

$$\begin{cases} y^2+y-1=0 & \dots \textcircled{1} \\ x^2-yx+1=0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解法に帰着できることがわかる。

①の解の全体は、 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。

y が与えられたときの②の解の全体は、 $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$ 。

$$\begin{array}{c} y^2+y-1 \\ \downarrow \\ y^2-4 = -(y+3) = -\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \downarrow \end{array}$$

□

問題 3-2 ζ_{17} が \mathbb{Q} 上作図可能なことを示せ. $\square \leftarrow$ かなり非自明.

\uparrow (これに関連した問題を3つと後にレポート課題に出す予定)

解答例 $\omega = \zeta_{17} = e^{2\pi i/17}$ とおく. このとき, $\omega^{17} = 1$, $\omega \neq 1$, $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{16} \stackrel{(*)}{=} 0$.

$\omega_0 = \omega$, $\omega_{k+1} = \omega_k^3$ ($k=0, 1, \dots, 15$) とおく. それらを計算すると,

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ω_k	ω	ω^3	ω^9	ω^{10}	ω^{13}	ω^5	ω^{15}	ω^{11}	ω^{16}	ω^{14}	ω^8	ω^7	ω^4	ω^{12}	ω^2	ω^6	ω

ゆえに, $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{15}\} = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{16}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + z + z^2 + \dots + z^{16} = 0\}$. \leftarrow

\square $\alpha_0 = \sum_{i=0}^7 \omega_{2i}$, $\alpha_1 = \sum_{i=0}^7 \omega_{2i+1}$ とおく. $\alpha_0 + \alpha_1 \stackrel{(*)}{=} -1$ であるから

1の原始17乗根
全体の集合

$\alpha_0 \alpha_1 = (8 \times 8 = 64 \text{ 項を整理する}) = 4 \sum_{k=1}^{16} \omega^k \stackrel{(*)}{=} -4$.

ゆえに, α_0, α_1 は方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ の解になる.

$$\boxed{2} \quad \beta_{\bar{\lambda}} = \sum_{j=0}^3 \omega_{4j+\bar{\lambda}} \quad (\bar{\lambda}=0,1,2,3) \text{ とおく,} \quad \beta_0 + \beta_2 = \alpha_0, \quad \beta_1 + \beta_3 = \alpha_1 \text{ かつ}$$

$$\beta_0 \beta_2 = (4 \times 4 = 16 \text{ 項}) = \sum_{k=1}^{16} \omega^k \stackrel{(*)}{=} -1, \quad \beta_1 \beta_3 = (4 \times 4 = 16 \text{ 項}) = \sum_{k=1}^{16} \omega^k = -1.$$

ゆえに, β_0, β_2 は $\lambda^2 - \alpha_0 \lambda - 1 = 0$ の解であり, β_1, β_3 は $\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - 1 = 0$ の解になる.

$$\boxed{3} \quad \gamma_{\bar{\lambda}} = \omega_{\bar{\lambda}} + \omega_{\bar{\lambda}+8} \quad (\bar{\lambda}=0,1,\dots,7) \text{ とおく,} \quad \gamma_{\bar{\lambda}} + \gamma_{\bar{\lambda}+4} = \beta_{\bar{\lambda}} \quad (\bar{\lambda}=0,1,2,3) \text{ かつ}$$

$$\gamma_{\bar{\lambda}} \gamma_{\bar{\lambda}+4} = \beta_{\bar{\lambda}+1} \quad (\bar{\lambda}=0,1,2,3, \beta_4 = \beta_0 \text{ とおく}). \text{ たとえば,}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \gamma_4 &= (\omega_0 + \omega_8)(\omega_4 + \omega_{12}) = (\omega + \omega^{16})(\omega^{13} + \omega^4) = \omega^{14} + \omega^5 + \omega^{12} + \omega^9 \\ &= \omega_9 + \omega_5 + \omega_{13} + \omega_1 = \beta_1 \end{aligned}$$

ゆえに, $\gamma_{\bar{\lambda}}, \gamma_{\bar{\lambda}+4}$ は $\mu^2 - \beta_{\bar{\lambda}} \mu + \beta_{\bar{\lambda}+1} = 0$ の解になる.

$$\boxed{4} \quad \omega_{\bar{\lambda}} + \omega_{\bar{\lambda}+8} = \gamma_{\bar{\lambda}} \text{ かつ } \omega_{\bar{\lambda}} \omega_{\bar{\lambda}+8} = 1 \quad (\bar{\lambda}=0,1,\dots,7).$$

$$\text{たとえば } \omega_0 \omega_8 = \omega \cdot \omega^{16} = \omega^{17} = 1.$$

ゆえに, $\omega_{\bar{\lambda}}, \omega_{\bar{\lambda}+8}$ は $\nu^2 - \gamma_{\bar{\lambda}} \nu + 1 = 0$ の解になる.

以上によつて, $\omega_0 = \omega$ を含む $\omega_{\bar{\lambda}}$ の全体が有理数から出発して四則演算と二次方程式を解くことの有限回のくりかえして作られることがわかった.

特に ω は作図可能である.

□

注意 $\sigma(\omega) = \omega^3$, $\sigma(a) = a$ ($a \in \mathbb{Q}$) をみたす体 $L = \mathbb{Q}(\omega)$ の自己同型 σ が存在することを示せる, (ヒント: $\mathbb{Q}(\omega^k) \cong \mathbb{Q}[x]/(1+x+\dots+x^{16})$, $k=1,2,\dots,16$)
 このとき, $\{\sigma^k(\omega) \mid k=0,1,\dots,15\} = \{\omega^k \mid k=1,2,\dots,16\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1+z+\dots+z^{16}=0\}$ で
 この集合は $\mathbb{Q}(\omega)$ の \mathbb{Q} 上での基底になる ($1+x+\dots+x^{16}$ の \mathbb{Q} 上での既約性より).

このことを使えば, 前ページまでの計算を簡略化できる.

たとえば, $\omega_k = \sigma^k(\omega)$, $\alpha_k = \sum_{\lambda=0}^7 \sigma^{2\lambda+k}(\omega)$, $\sigma(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$, $\alpha_{k+2} = \alpha_k$ より,
 特に, $\sigma(\alpha_0 \alpha_1) = \sigma(\alpha_0) \sigma(\alpha_1) = \alpha_1 \alpha_0 = \alpha_0 \alpha_1$ と σ の作用で $\alpha_0 \alpha_1$ は不変になる.
 $\alpha_0 \alpha_1$ は ω のべきたりの $8^2 = 64$ 個の和になるので

$$\alpha_0 \alpha_1 = \sum_{k=0}^{15} c_k \sigma^k(\omega), \quad c_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_{k=0}^{15} c_k = 64$$

と表わされる. $\sigma^k(\omega)$ ($k=0,1,\dots,15$) は \mathbb{Q} 上-線形独立で, $\sigma(\alpha_0 \alpha_1) = \alpha_0 \alpha_1$ より,
 c_k たちは互いに等しいことがわかる. したがって, $c_k = 4$, すなわち,

$$\alpha_0 \alpha_1 = 4 \sum_{k=0}^{15} \sigma^k(\omega) = 4 \sum_{\ell=1}^{16} \omega^\ell = -4.$$

しかし, エレガントでない素朴な方法で $\alpha_0 \alpha_1 = -4$ を示す経験も重要である. □

追記 $\beta_k = \sum_{\lambda=0}^3 \sigma^{4\lambda+k}(\omega), \quad \sigma(\beta_k) = \beta_{k+1}, \quad \beta_{k+4} = \beta_k \text{ より}, \quad \sigma^2(\beta_k \beta_{k+2}) = \beta_k \beta_{k+2}.$

$\beta_0 \beta_2$ は $4^2 = 16$ 個の $\omega_l = \sigma^l(\omega)$ たちの和になり, σ^2 の作用で不変で,
項として, $\omega_0 \omega_2 = \omega_3$ と $\omega_0 \omega_6 = \omega_8$ を含むので, $\beta_0 \beta_2 = \sum_{l=0}^{15} \omega_l = -1.$

これらの両辺に σ^k を作用させると, $\beta_k \beta_{k+2} = -1.$

$$\gamma_k = \sum_{\lambda=0}^1 \sigma^{8\lambda+k}(\omega), \quad \sigma(\gamma_k) = \gamma_{k+1}, \quad \gamma_{k+8} = \gamma_k \text{ より}, \quad \sigma^4(\gamma_k \gamma_{k+4}) = \gamma_k \gamma_{k+4}.$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \gamma_4 &= (\omega_0 + \omega_8)(\omega_4 + \omega_{12}) = (\omega + \omega^{16})(\omega^{13} + \omega^4) = \omega^{14} + \omega^5 + \omega^{12} + \omega^9 \\ &= \omega_9 + \omega_5 + \omega_{13} + \omega_1 = \beta_1 \end{aligned}$$

これに, σ^k を作用させると, $\gamma_k \gamma_{k+4} = \beta_{k+1}.$

$$\omega_0 \omega_8 = \omega \cdot \omega^{16} = \omega^{17} = 1, \quad \text{これに } \sigma^k \text{ を作用させると, } \omega_k \omega_{k+8} = 1.$$

以上によって, 前々ページまでで略した計算がすべて埋まった. □

以上を見すぎてしまう前に自分で計算することを楽しんでほしいです!

特に数学を教える仕事に興味がある人は色々計算しておくといい!

数学の研究でも素朴な計算が重要である!

問題 3-3 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ. \square

解答例 分子分母に $(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6})$ をかけて, かんばって計算すると分母が有理化される.

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = 376$$

$$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{6}) = -4 - 14\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 38\sqrt{6}.$$

$$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = \frac{-4-14\sqrt{2}-16\sqrt{3}+38\sqrt{6}}{376} = -\frac{1}{94} - \frac{7}{188}\sqrt{2} - \frac{2}{47}\sqrt{3} + \frac{19}{188}\sqrt{6}. \quad \square$$

考え方 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3}$ の $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ を $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ に

おきかえて得られる 4つの数をかけあわせると有理数 (この場合は整数) になる. このような観察が Galois 理論に至る道になっている. \square

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3} = (1+\sqrt{3}) + (1+2\sqrt{3})\sqrt{2}$ ← この分の1の分母が $\sqrt{2}$ を消すには
分子分母に $(1+\sqrt{3}) - (1+2\sqrt{3})\sqrt{2}$ をかければよい, 同様の方法で $\sqrt{3}$ も消せる. } → 上と本質的に
同じことになる.

注意

一般に

$$\begin{aligned} & (a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{mn})(a-b\sqrt{m}+c\sqrt{n}-d\sqrt{mn}) \\ &= (a+c\sqrt{n})^2 - m(b+d\sqrt{n})^2 \\ &= \underbrace{a^2 - mb^2 + nc^2 - mnd^2}_{=: A} + \underbrace{2(ac - mbd)}_{=: B} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

$$(A + B\sqrt{n})(A - B\sqrt{n}) = A^2 - nB^2.$$

以上の計算より, $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Q}$ のとき,

$a+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}+d\sqrt{m}\sqrt{n}$ の中の \sqrt{m}, \sqrt{n} をそれぞれ $\pm\sqrt{m}, \pm\sqrt{n}$ で置きかえて
できる4つの数をかけあわせると有理数になることがわかる, \square

注意

$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ の体の自己同型 σ, τ で

$$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

をみたすものが一意に存在する. このような σ, τ をうまく利用することが Galois 理論になっている. \square

問題 3-4 $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する. $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ を示せ.

ここで, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む \mathbb{C} の部分体で最小のものを表す. \square

解答例

① $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ を示そう. $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は \mathbb{Q} と \sqrt{a}, \sqrt{b} を含む.

$\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ は \mathbb{Q} と $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ を含む \mathbb{C} の最小の部分体なので, $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

② $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ を示そう. $a \neq b$ より $\sqrt{a} \neq \pm \sqrt{b}$, 特に $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$ なので,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \ni \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \ni \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2} = \sqrt{a},$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \ni \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2} = \sqrt{b}.$$

} $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ は \mathbb{Q} と \sqrt{a}, \sqrt{b} を含む.

$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む \mathbb{C} の最小の部分体なので, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

以上により, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ が示された.

\square

問題 3-5 $\alpha = \omega^3 \sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(L が体 K の拡大体のとき,
 $[L : K] = [L/K] = \dim_K L$
と書き, これを L/K の 拡大次数
と呼ぶ.)

□

ヒント α の \mathbb{Q} 上での最小多項式は $x^3 - 7$ になる, $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.

□

解答例 (1) $\alpha = \omega^3 \sqrt[3]{7}$ は $x^3 - 7 = 0$ の解でかつ, $x^3 - 7$ は \mathbb{Q} 上既約なので,
 $x^3 - 7$ は α の \mathbb{Q} 上での最小多項式になる (問題 2-4 の解答例を見よ).
ゆえに, 体の同型 $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7)$ ($f(\alpha) \mapsto \overline{f(x)} = (f(x) \bmod x^3 - 7)$) を得る.

$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7)$ の \mathbb{Q} 上のベクトル空間としての基底として, $1, x, x^2$ の像をとれる.

特に, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7) = 3$. ゆえに, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = 3$.

$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 7)$ の中で $\overline{x^3} = 7$ なので \overline{x} の 3 乗以上の項は
 \overline{x} の 2 乗以下の項の和で書ける.

(2) $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ であることを示そう, (1)と同様にして, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$ なので,
 $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ となる. もしも $\omega \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ならば $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ も 1 の原始 3 乗根を
 含むことになって矛盾する. ゆえに, $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ である. (注 $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$)

ゆえに, $\mathbb{Q}(\alpha, \omega) = \mathbb{Q}(\alpha)(\omega) \neq \mathbb{Q}(\alpha)$, すなわち $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] > 1$.

ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解になっているので, $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$.

したがって, $[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$, $\begin{cases} \omega^2 = -\omega - 1 \text{ なので } \omega \text{ の 2 乗以上の項は} \\ \omega \text{ の 1 乗以下の項の } \mathbb{Q} \text{ 上での一次結合で書ける.} \end{cases}$

$$(3) [\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\alpha)] [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6. \quad \square$$

講義でやるはず

注意 以上の議論を見直せば,

$\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の $\mathbb{Q}(\alpha)$ 上のベクトル空間としての基底として $1, \omega$ がとれ,

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の \mathbb{Q} 上のベクトル空間の基底として $1, \alpha, \alpha^2$ がとれ,

$\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ の \mathbb{Q} 上のベクトル空間の基底として, $1, \alpha, \alpha^2, \omega, \omega\alpha, \omega\alpha^2$ がとれる
 ことがわかる. □