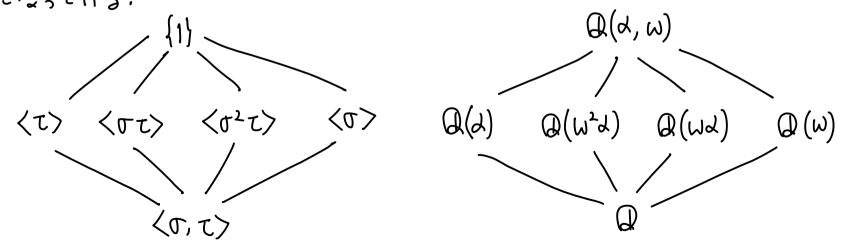
問題7-1] $F(x) = x^3 - 3$, $d = \sqrt[3]{3}$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とかく、以下を示せ、

- (1) F(x) は dの Q 上での最小多項式である。
- (2) F(x)の Q上での最小分解体は Q(x) に等しくない。

- Q上の才程式 x3-3=0の Galois 対応の言述
- (3) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x,w)=Q(x,√3)に等Lい、以下, [Q(x,w):Q]=bを認めて使ってよい, (問題3-5,4-1の解答例も参照)
- (4) $Q(\alpha, \omega)$ の体の自己同型 T, T を 次のように定義できるこ $T(f(\lambda)) = f(\omega\lambda)$ $(f(\lambda) \in Q(\omega)[\lambda])$, $T(g(\omega)) = g(\omega^2)$ $(g(\lambda) \in Q(\alpha)[\lambda])$.
- (5) $God(Q(A, W)/Q) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_3 \cong S_3$ \checkmark 特に(b)をやってほしい。
- (b) Gal(Q(d,w)/Q)の部分群全体とQ(d,w)/Qの中間体のGalois対応は以下のようになっている:



問題7-1解答例 $(F(x) = x^3 - 3, \alpha = \sqrt{3}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0.)$

- (1) 3+1, 3 0, 3 0, 3 (-3), 3 (-3) と Eisensteinの判定法より F(x)=x3-3 は
- Q上で既約である、 (x^3-3) がQに根を持たないことかもそのQ上既約性かれかる、) \leftarrow > 10
- (2) $Q(d) = \{\alpha + bd + Cd^2 | \alpha, b, c \in Q\} \subset \mathbb{R}$ である、 $\left(\frac{Q(d) \cong Q[A]}{f(a)} \leftrightarrow \frac{f(A)}{f(A)}\right)$ $F(A) = (A d)(A Wd)(A W^2d)$ の Q + z' の 最小分解体は $Q(A, Wd, W^2d)$ 中 \mathbb{R} である、 ゆ ΔC 、 Q(d) は F(A) の Q 上 z'' の 最小分解体では $Q(A, Wd, W^2d)$ 中 \mathbb{R} である、
- (3) $d, \omega = \frac{\omega d}{d} \in \mathbb{Q}(d, \omega d, \omega^2 d) \pm 1$ $\mathbb{Q}(d, \omega) \subset \mathbb{Q}(d, \omega d, \omega^2 d)$ $\mathbb{Q}(d, \omega) = \mathbb{Q}(d, \omega$

(4)
$$[Q(\omega):Q]=2$$
, $[Q(\lambda,\omega):Q]=b$ ± 1 , $[Q(\lambda,\omega):Q(\omega)]=\frac{[Q(\lambda,\omega):Q]}{[Q(\omega):Q]}=3$.

 $F(x) = \chi^3 - 3 \in \mathbb{Q}(\omega)[\chi]$, $F(\lambda) = 0$, $\deg F(x) = 3 = [\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}(\omega)]$ なので、F(x) は $\mathbb{Q}(\omega)$ 上でのよの最小多項式である。

ゆえに,以下のようにして,Q(d,W)のQ(W)上での自己同型のも作れる:

$$Q(d, w) \cong Q(w)[x]/(F(x)) \cong Q(wd, w) = Q(d, w) F(x)はQ(w)上既約で
 $f(d) \longleftrightarrow \overline{f(x)} \longleftrightarrow f(wd) \subset F(x)は wd の Q(w)上での
最小多項式にもなっている。$$$

$$[Q(\alpha); Q] = 3$$
, $[Q(\alpha, \omega); Q] = 6$ ξ' , $[Q(\alpha, \omega); Q(\alpha)] = \frac{[Q(\alpha, \omega); Q]}{[Q(\alpha); Q]} = 2$.

 $G(x) = \chi^2 + \chi + 1$ とかくと、 $G(x) \in Q(x)[\chi]$, G(w) = 0 , $\deg G(x) = 2 = [Q(x; w) : Q(w)]$ なので、G(x) は Q(x)上での Wの最小多項式である。

ゆえた,以下のようにして,Q(d,W)のQ(d)上での自己同型てき作れる:

(4)の記号のもとで、の、て $\in Gal(Q(a,\omega)/Q)$ である、そんて,

$$(1) \quad 1(\lambda) = \lambda, \quad 1(\lambda) = \lambda$$

$$\Omega_3(\alpha) = \gamma \quad \Omega_3(\alpha) = \alpha$$

$$\Omega_3(\alpha) = \gamma \quad \Omega_3(\alpha) = \alpha$$

$$f$$
 $\tau(\lambda) = \lambda$, $\tau(\omega) = \omega^2$

(5)
$$\sigma T(\lambda) = \omega \lambda$$
, $\sigma T(\omega) = \omega^2$

(b)
$$T^2T(d) = W^2d$$
, $T^2T(W) = W^2$

$$T^2(d) = d$$
, $T^2(W) = W^4 = W$

$$TOT(d) = W^2d$$
, $TOT(W) = W$

ゆえた、この1はidQ(d,w)
$$1,\sigma,\sigma^{2},\tau,\sigma\tau,\sigma^{2}$$
は互いに異なるので、
$$Gal(Q(d,w)/Q) = \{1,\sigma,\sigma^{2},\tau,\sigma\tau,\sigma^{2}\tau\}.$$
さらた $\sigma^{3} = \tau^{2} = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^{2} = \sigma^{-1}$.
これより $(\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau)$

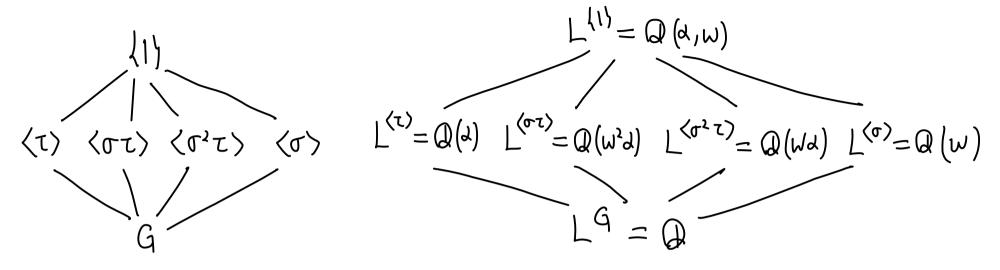
$$Gal(Q(d,w)/Q) \cong D_{3} \cong S_{3}$$
.

位数2 位数2の部分群は位数2の元から主成される巡回群になる、 Gの位数2の部分群全体はくひ,くので)、〈のでて〉、

位数3 位数3の部分群は位数3の元から生成される巡回群になる。 Gの位数3の部分群はくの>=くの2>の1ったけ、

位数b Gの位数bの部分群はGそのものになる

以上を図で描くら



上の図はQ上での方程式ガー3=0がどのように解けて行くか正記述しているとみなせる。

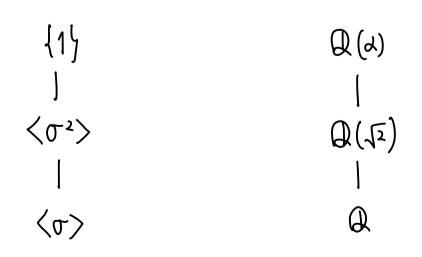
問題7-2 $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $d = \sqrt{2+12}$ とおり、以下を示せ、

(1) F(x)はdのQ上での最小多項式である。

F(x)のすべてのまなか。

- (2) F(x)のQ上での最小分解体はQ(x)に等しい、 Q(x)に等まれる、
- (3) Q(d)の体の自己同型 ひを の(f(d))=f(√2-反) (f(d)∈ Q(以) 定義できる、
- (4) $Gal(Q(A)/Q) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$
- (5) Gal(Q(d)/Q)の部分群全体とQ(d)/Qの中間体全体の

Galois村応は以下の図のようになっている:



Q上の才程式 $\chi^4 - 4\chi^2 + 2 = 0$ に関する Galois対応も 求的る問題

問題7-2の解答例 $\chi^2 = 2\pm \sqrt{2}, \chi = \sqrt{2\pm \sqrt{2}}, -\sqrt{2\pm \sqrt{2}} \times 解ける.$

 $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\forall x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

 $d^2 = 2 + \sqrt{2}$, $d^4 = 6 + 4\sqrt{2}$ &1), $d^4 - 4d^2 + 2 = 0$, F(a) = 0.

(1) 2×1,2 10,2 (-4),2 |0,2 |2,2×2 と Eisensteinの判定法より, F(x)はQ上で既約である

F(x)=0でもあるので、F(x)はよのQ上での最小多項式である。

(2) $d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ of the $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\delta = -d$, $\delta = -\beta$ \tag{2} \tag{5} X²-4X+2=0の解はX=2±豆なので F(x)の根の全体は{d,B,X,8}になる、 ゆえに F(a)の Q土での最小分解体はQ(d,β,8,8)=Q(a,β)になる。

 $\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\beta}{\sqrt{5}}, d^2 - 2 = \sqrt{2} |x| \beta = \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{d^2 - 2}{d} \in Q(a).$ ゆえた, $Q(\alpha) = Q(\alpha, \beta)$.

(3) 上で同様にして、
$$d = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{2-\beta^2}{\beta} \in Q(\beta)$$
 なので $Q(\beta) = Q(d,\beta)$. ゆえに、 $Q(\beta) = Q(d)$. $F(X)$ は β の Q 上での最小多項式でもある、 以下のようにして、体 $Q(d)$ の Q 上での自己同型 O も作れる: $Q(d) \cong Q[X]/(F(X)) \cong Q(\beta) = Q(d)$ $f(d) \longleftrightarrow \overline{f(A)} \longleftrightarrow \overline{f(\beta)}$

(4)
$$|\operatorname{Gal}(Q(\lambda)/Q)| = [Q(\lambda):Q] = \operatorname{deg} F(\lambda) = 4.$$

$$T(\lambda) = \beta = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}$$

$$T^2(\lambda) = T(\beta) = \frac{\beta^2 - 2}{\beta} = -\lambda = 1$$

$$T^3(\lambda) = T(-\lambda) = -T(\lambda) = -\beta = \delta$$

$$T^4(\lambda) = T(-\beta) = -T(\beta) = -(-\lambda) = \lambda$$

$$T^4(\lambda) = T(-\beta) = -T(\beta) = -(-\lambda) = \lambda$$

1, σ , σ^2 , σ^3 は互いに異なるので、 Gal(Q(A)/Q) = $\{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$, せらた, $\sigma^4 = 1$ なので Gal(Q(A)/Q) = $\{\sigma\} \cong C_4$.

(i)
$$Q(a)^{\{1\}} = \{ \eta \in Q(a) \mid 1(\eta) = \eta \} = Q(a),$$

$$(\overline{\lambda} = a^2 - 2 \cdot \overline{\tau}, \quad \sigma^2(a) = -a \cdot \overline{\tau}, \quad \sigma^2(a) = -a \cdot \overline{\tau}, \quad \sigma^2(a) = \overline{\lambda}, \quad \sigma^$$

(ii)
$$\sigma^2(\sqrt{2}) = \sigma^2(d^2-2) = (-d)^2-2 = d^2-2 = \sqrt{2} + 1$$
 $\sigma^2(d) = -d$ $\sigma^2(d) = -d$

$$\left[Q(\lambda)^{\langle\sigma^2\rangle}:Q\right] = \frac{|G|}{|\langle\sigma^2\rangle|} = \frac{4}{2} = 2 = \left[Q(\sqrt{2}):Q\right] \not = 0 \cdot \sqrt{2} = Q(\sqrt{2}),$$

(iii)
$$[Q(a)^G: Q] = \frac{|G|}{|G|} = | \pm | Q(a)^G = Q$$

以土を図で描くと、
$$Q(d)^{\{1\}} = Q(d) \qquad \chi^2 = 2 \pm \sqrt{2} \text{ $2 \text{ k}} \langle z \rangle$$

$$| \qquad \qquad | \qquad \qquad |$$

$$Q(d)^{\{0^2\}} = Q(\sqrt{2}) \qquad |$$

$$Q(d)^{\{0^2\}} = Q(\sqrt{2}) \qquad \qquad |$$

$$Q(d)^{\{0$$