問題 5-1 Kは標数0の体であるとし，Lはその任意の拡大体であるとする．
K上の既約多項式がLの中に重根を持たないことを示せ． □

標数 $p>0$ のとき
$(x^p)' = \underbrace{p}_{=0} x^{p-1} = 0$

解答例 $f(x) = \sum_k a_k x^k \in L[x]$, $a_k \in L$ に対して，$f'(x)$ を $f'(x) = \sum_k a_k k x^{k-1}$ と定める．
Lの標数も0になるので，$\deg f(x) \geq 1$ ならば $\deg f'(x) = \deg f(x) - 1$ となる．

準備
今後自由に利用する．

($n = \deg f(x)$ とおくと，$f(x) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ なので，$f'(x) = \underbrace{n a_n}_{\neq 0} x^{n-1} + \cdots + a_1$
なので $\deg f'(x) = n-1$． 注意 $\deg f(x) = 0$ ならば $f(x) = \underset{\neq 0}{a_0}$ の形になり，$f'(x) = 0$ となり
$\deg f'(x) = \deg 0 = -\infty$)

$f(x) \in K[x]$ を任意にとる．

(重根を持つ ⇒ K上既約でないを示す．)

$f(x)$ と $f'(x) \in K[x]$ の最大公約多項式を $d(x) \in K[x]$ と書く．

(最大公約多項式は Euclidの互助法によって K[x]内で計算される．)

$f(x)$ が重根 $\alpha \in L$ を持つとき，$f(x)$ がK上既約でないこと（対偶）を示せばよい．

$f(x)$ の重根 $\alpha \in L$ が存在すると仮定する．

このとき，$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$, $g(x) \in L[x]$ と書ける．

これ自体はL[x]の元でK[x]の元とは限らない．

$f'(x) = 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)$ より，$f(x)$ と $f'(x)$ は共通因子 $x-\alpha$ を持つ．

ゆえに $f(x)$ と $f'(x)$ の最大公約多項式 $d(x) \in K[x]$ の次数は1以上 $\deg f'(x) = \deg f(x) - 1$ 以下になる．$f(x)$ は，そのような $d(x) \in K[x]$ で割り切れるので，K上既約ではない． □

$\boxed{\text{問題 5-2}}$ 正標数の体の標数が常に素数になることを示せ。 □

$\boxed{\text{解答例}}$ Kは正標数の体であると仮定する。(体の定義の中に $1 \neq 0$ が入っている。)

(より一般に整域の定義の中に)

Nは正の整数であり，Kの中でのN個の1の和が0になると仮定する。

もしもNが素数でないならば $N = mn$ (m, n は2以上の整数) と書ける。

そのとき，

$$\underbrace{(\underbrace{1+\cdots+1}_{m}) + \cdots + (\underbrace{1+\cdots+1}_{m})}_{n} = 0.$$

もしも $\overbrace{1+\cdots+1}^{m} \neq 0$ ならば，

両辺を $\underbrace{1+\cdots+1}_{m}$ でわると，$\underbrace{1+\cdots+1}_{n} = 0$ となって，Nより小さな正の整数 n

で，Kの中での n 個の1の和が0になる。($n < mn$ に注意せよ。)

ゆえに，正の整数NでKの中でのN個の1の和が0になるものの中での

最小値 (=Kの標数) は素数でなければいけない。 □

$\boxed{\text{例}}$ 素数 p に対して，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく。$\mathbb{F}_p$ は標数 p で位数 p の体になる。

元の個数

□

問題5-3 p は素数であるとし，$L=\mathbb{F}_p(t)=$ (1変数 t の $\mathbb{F}_p$ 上の有理函数体) とおく．
L の部分体 K と K 上の既約多項式 $F(x)\in K[x]$ の組 $(K, F(x))$ で
$F(x)$ が L の中に重根を持つものの1つを具体的に構成せよ． $\square$

解答例 $\underline{K=\mathbb{F}_p(t^p)}=\left\{\dfrac{f(t^p)}{g(t^p)}\,\middle|\, f(t), g(t)\in\mathbb{F}_p[t],\ g(t)\neq 0\right\}$ と L の部分体 K

↕ 答えの例

を定め，$\underline{F(x)=x^p-t^p}\in K[x]$ とおく．(t∉Kが重要ポイント，$t^p\in K$)

一般に体Kについて，K[x]の中でxは既約元

$K=\mathbb{F}_p(t^p)$ は UFD $\mathbb{F}_p[t^p]$ の商体であり，t^p は $\mathbb{F}_p[t^p]$ の既約元である．
($\mathbb{F}_p[t^p]$ は $t, t^2, \dots, t^{p-1}$ を含まないので，t^p は非自明な約数を持たない．)
ゆえに，$F(x)=x^p-t^p$ に，Eisensteinの判定法を適用すると，

$$t^p \nmid 1,\quad t^p\mid 0,\ \dots,\ t^p\mid 0,\quad t^p\mid(-t^p),\quad (t^p)^2\nmid(-t^p)$$

なので，$F(x)=x^p-t^p$ は $K=\mathbb{F}_p(t^p)$ 上の既約多項式であることがわかる．

L の標数は p なので，$F(x)=(x-t)^p$ なので $F(x)$ は p 重根 $t\in L$ を持つ． $\square$

↑ 次ページで証明

注意 上の $L/K=\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$ は<u>純非分離拡大</u>の例になっている． $\square$

$\boxed{\text{注意}}$ 前ページの $(x-t)^p = x^p - t^p$ を示すためには次を示せば十分. □

標数 $p>0$ を使う.

$\boxed{\text{補題}}$ p は素数であるとし, 可換環 A の中で p 個の 1 の和は 0 であると仮定する.
このとき, 任意の $a, b \in A$ について, $(a+b)^p = a^p + b^p$ かつ $(-a)^p = -a^p$.

$\boxed{\text{証明}}$ $p=2$ のとき, $a+a = a(1+1) = a\cdot 0 = 0$ なので $-a = a$ となるので,
$(-a)^p = -a^p$ が成立する. p が奇素数の場合は $(-a)^p = -a^p$ は自明である.

標数 2 では $-1=1$

以下, A の中での n 個の 1 の和を単に n と書く.

二項定理より,

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k, \quad \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccl}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & p \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \| \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \leftarrow 2 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \leftarrow 3 \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \leftarrow 5 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \leftarrow 7
\end{array}$$

$k = 1, \dots, p-1$ のとき, $\binom{p}{k}$ は p で割り切れるので A の中で 0 になる. ゆえに,

$$(a+b)^p = \binom{p}{0} a^p + \binom{p}{p} b^p = a^p + b^p.$$

□

$\boxed{\text{注意}}$ $a \mapsto a^p$ は A から A 自身への環の準同型になっている. ← $(ab)^p = a^p b^p$ は自明
それを A の <u>Frobenius 準同型</u> と呼ぶ. □

単拡大定理について

問題 5-4 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ をみたす $\theta \in \mathbb{C}$ を具体的に与え，実際にその等号が成立することを証明せよ． □

問題 5-5 次を示せ：　条件を標数0にゆるめられる．

K は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は K 上代数的であると仮定する．このとき，ある $\theta \in \mathbb{C}$ が存在して，$K(\alpha, \beta) = K(\theta)$． □

まず最初に後者について非常に詳しく解説する． → 次ページ

（**方針** 適切に $\theta = \alpha + c\beta$，$c \in K$，$G(x) \in K(\theta)[x]$ を作って，$G(x)$ と β の K 上での最小多項式の共通根が β だけになるようにする．）

そしてその証明の方法を使って前者の問題を解く．

後で前者の問題の例を非常に詳しく取り扱う．

問題5-5の解答例 Kは$\mathbb{C}$の部分体であるとし, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$は$K$上代数的だと仮定する.

αとβのK上での(モニックな)最小多項式をそれぞれ$F_\alpha(x), F_\beta(x)\in K[x]$と書く.

$F_\alpha(x)$の$\alpha=\alpha_1$以外の互いに異なる根全体を$\alpha_2,\dots,\alpha_m$と書く.

$F_\beta(x)$の$\beta=\beta_1$以外の互いに異なる根全体を$\beta_2,\dots,\beta_n$と書く.

$G(t,x)=F_\alpha(\alpha+t\beta-tx)\in K(\alpha,\beta)[t,x]$とおく.

このとき, $G(t,\beta)=F_\alpha(\alpha)=0$ ($K(\alpha,\beta)[t]$の元として0).

$$
\begin{aligned}
& G(\tau,\beta_j)=0 \quad \leftarrow j\neq 1\text{と仮定}\\
\iff & \exists i=1,\dots,m \text{ s.t. } \alpha+(\beta-\beta_j)\tau=\alpha_i\\
\iff & \exists i=1,\dots,m \text{ s.t. } \tau=-\frac{\alpha-\alpha_i}{\beta-\beta_j}
\end{aligned}
$$

$j=2,\dots,n$のとき, $\beta_1-\beta_j\neq 0$より, $G(t,\beta_j)=F_\alpha(\alpha+(\beta_1-\beta_j)t)\in\mathbb{C}[t]$の次数は$F_\alpha(x)$と等しくなり, 特に$G(t,\beta_j)$は$t$の多項式として0ではないので, tの多項式としての根は有限個になる.

Kは標数が0なので無限個の元を含む. ゆえに, 有限集合$\bigcup_{j=2}^{n}\{\tau\in\mathbb{C}\mid G(\tau,\beta_j)=0\}$に含まれない元$c\in K$が存在する.

ここを$K(\theta)$にできることがポイント

$\theta=\alpha+c\beta$, $G(x)=G(c,x)=F_\alpha(\theta-cx)\in K(\theta)[x]$とおく.

このとき, $G(\beta)=G(c,\beta)=0$で, cの取り方より, $j=2,\dots,n$について$G(\beta_j)=G(c,\beta_j)\neq 0$.

Kの標数は0で，$F_\beta(x)$はK上既約なので重根を持たない．

ゆえに，$F_\beta(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j)$ （$\beta_1=\beta$ と $\beta_1,\dots,\beta_n$ が互いに異なることに注意）．

$G(x)$は $G(\beta)=0$ と $j=2,\dots,n$ について $G(\beta_j)\neq 0$ をみたすので，$G(x)$と$F_\beta(x)$の共通根は $\beta=\beta_1$ しか存在しない．

したがって，$G(x)$と$F_\beta(x)$のモニックな最大公約多項式$H(x)$は $H(x)=x-\beta$ になる．

$K\subset K(\theta)$なので $F_\beta(x)$も$G(x)$と同じく$K(\theta)[x]$の元であることに注意せよ．

ゆえに，$G(x)$と$F_\beta(x)$のモニックな最大公約多項式$H(x)$についても $H(x)\in K(\theta)[x]$ となる．（Euclidの互除法より）

これで，$x-\beta = H(x)\in K(\theta)[x]$ が示された．つまり，$\beta\in K(\theta)$．

$\theta=\alpha+c\beta$，$c\in K$ だったので $\alpha=\theta-c\beta\in K(\theta)$．

したがって，$K(\alpha,\beta)\subset K(\theta)$．

$\theta=\alpha+c\beta\in K(\alpha,\beta)$ より，$K(\theta)\subset K(\alpha,\beta)$．

以上によって，$K(\alpha,\beta)=K(\theta)$ が示された． □

$\boxed{\text{注意}}$ $F_\beta(x)$が重根を持たないことを仮定すれば ←（βのK上での分離性）

以上の証明法は正標数の無限体でも使える． □

問題5-4の解答例 $\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ とおくと, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ となる.

証明 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式はそれぞれ $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^3 - 3$.

$h(x) = f(\theta - x) = f(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - x) \underset{\uparrow}{=} (\sqrt[3]{3} - x)(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - x)$ とおく.

$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

$h(x)$ と $g(x)$ の共通根は $\sqrt[3]{3}$ だけであることがわかる.

ここに複雑な計算がつまっている. (→次ページへ)

$h(x)$ と $g(x)$ のモニックな最大公約多項式は $x - \sqrt[3]{3}$ になる.

そして, $h(x)$ も $g(x)$ も $\mathbb{Q}(\theta)[x]$ の元なので Euclidの互除法より, $x - \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)[x]$ となる. ゆえに, $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)$, $\sqrt{2} = \theta - \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)$ なので $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) \subset \mathbb{Q}(\theta)$.

$\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ なので $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

これで, $\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ のとき, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ となることが示された. □

次ページ以降でこの例をさらに詳しく見て行く.

別解 $\theta = \sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}$ とおくと, $\theta^4 = 12\sqrt[3]{3}$ なので $\sqrt[3]{3} = \theta^4/12 \in \mathbb{Q}(\theta)$ かつ $\sqrt{2} = \theta/\sqrt[3]{3} = 12/\theta^3 \in \mathbb{Q}(\theta)$ なので $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$. □

Euclidの互除法 $\alpha=\sqrt{2},\ \beta=\sqrt[3]{3},\ \theta=\alpha+\beta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ とおく。

$f(x)=x^2-2,\quad g(x)=x^3-3,\quad h(x)=f(\theta-x)=(x-\theta)^2-2=x^2-2\theta x+\theta^2-2$ とおく。

$g(x)$ と $h(x)$ のモニックな最大公約多項式は $x-\sqrt[3]{3}$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2\theta \\
\hline
x^2-2\theta x+\theta^2-2 & x^3 \qquad\qquad\qquad -3 \\
 & x^3-2\theta x^2+(\theta^2-2)x \\
\hline
 & 2\theta x^2-(\theta^2-2)x-3 \\
 & 2\theta x^2-4\theta^2 x+2\theta(\theta^2-2) \\
\hline
 & (3\theta^2+2)x-(2\theta(\theta^2-2)+3)
\end{array}
$$

モニックでない最大公約多項式 → $(3\theta^2+2)x-(2\theta(\theta^2-2)+3)$

$$g(x)=(x+2\theta)h(x)+\underbrace{(3\theta^2+2)x-(2\theta(\theta^2-2)+3)}$$

Euclidの互除法より、これが $g(x)$ と $h(x)$ の g.c.d. になる。

これより、$x-\sqrt[3]{3}=x-\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}$.

つまり、$\sqrt[3]{3}=\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}\in\mathbb{Q}(\theta)$

非自明だが手計算で確認可能 → 次ページ

これのコンピュータによる確認

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%282t%28t%5E2-2%29%2B3%29%2F%283t%5E2%2B2%29+where+%7Bt%3D%E2%88%9A2%2B3%5E%281%2F3%29%7D&lang=ja

(2t(t^2-2)+3)/(3t^2+2) where {t=√2+3^(1/3)}

Assuming the principal root | Use the real-valued root instead

Input interpretation

$$\frac{2t(t^2-2)+3}{3t^2+2}\quad \text{where } t=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$$

Result

$$\frac{3+2(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})((\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^2-2)}{2+3(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^2}$$

Alternate forms

$\sqrt[3]{3}$ OK!

$\theta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ のときの $\sqrt[3]{3}=\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}$ の手計算での確認

$\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$ とおく。$\theta=\alpha+\beta$, $\alpha^2=2$, $\beta^3=3$ となる。

$$
\begin{aligned}
2\theta(\theta^2-2)+3 &= 2\theta^3-4\theta+3 \\
&= 2\alpha^3+6\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+2\beta^3-4\alpha-4\beta+3 \\
&= \underbrace{4\alpha}_{} + 12\beta + 6\alpha\beta^2 + 6 \underbrace{-4\alpha}_{\text{キャンセル}} - 4\beta + 3 \\
&= 6\alpha\beta^2 + 8\beta + 9
\end{aligned}
$$

$3\theta^2+2 = 3\alpha^2+6\alpha\beta+3\beta^2+2 = 6+6\alpha\beta+3\beta^2+2 = 6\alpha\beta+8+3\beta^2$ より

$\beta(3\theta^2+2) = 6\alpha\beta^2+8\beta+9 = 2\theta(\theta^2-2)+3.$

ゆえに、$\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}=\beta=\sqrt[3]{3}.$

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の計算では $\alpha^2=2$, $\beta^3=3$, $\theta=\alpha+\beta$ のとき、$\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}=\beta$ となることを示しているので、結論は $\alpha=\pm\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3}$ $(\omega=e^{2\pi i/3})$ の場合も成立している。 ゆえに、例えば $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \omega\sqrt[3]{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\omega\sqrt[3]{3})$.

$\square$

問題5-4の $\theta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ を使う方針の場合の易しい別解

$\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$, $a=2$, $p=3$ とおくと, $\alpha^2-a=0$, $\beta^3-p=0$. $\theta=\alpha+\beta$ とおく.

$\alpha=\theta-\beta$ より, $0=\alpha^2-a=\beta^2-2\theta\beta+\theta^2-a$ なので $\beta^2=2\theta\beta-\theta^2+a$.

ゆえに, $0=\beta^3-p=\beta(2\theta\beta-\theta^2+a)-p=2\theta\beta^2+(-\theta^2+a)\beta-p$

$$=\underbrace{2\theta(2\theta\beta-\theta^2+a)}_{=4\theta^2\beta-2\theta^3+2a\theta}+(-\theta^2+a)\beta-p=(3\theta^2+a)\beta-(2\theta^3-2a\theta+p).$$

したがって, $\beta=\dfrac{2\theta^3-2a\theta+p}{3\theta^2+a}\left(=\dfrac{2\theta(\theta^2-a)+p}{3\theta^2+a}=\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}\right)$.

これは易しい計算

前ページまでに紹介した計算とこれを比較してみよ.

$$\overbrace{g(x)}^{x^3-p}=(x+2\theta)\overbrace{h(x)}^{x^2-2\theta x+\theta^2-a}+\underbrace{(3\theta^2+a)x-(2\theta^3-2a\theta+p)}$$

Euclidの互除法より,
これが $g(x)$ と $h(x)$ の g.c.d. になる.

$\longleftrightarrow$

$\beta^2-2\theta\beta+\theta^2-a=0$ を使った計算

$$0=\beta^3-p$$
$$=(3\theta^2+a)\beta-(2\theta^3-2a\theta+p)$$
$$\therefore\ \beta=\frac{2\theta^3-2a\theta+p}{3\theta^2+a}$$

最小多項式

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%E2%88%9A2%2B3%5E%281%2F3%29

√2+3^(1/3)

Assuming the principal root | Use the real-valued root instead

Input

$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

Decimal approximation

2.8564631326805034311233270349898076669615411288762

More digits

Alternate form

root of $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ near $x = 2.85646$

Minimal polynomial

$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$

$\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ の

$\mathbb{Q}$上での最小多項式は

$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$

$\downarrow$

これの根全体 $\longrightarrow$ 次ページへ

最小多項式の根の全体

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28x-%28a%2Bb%29%29%28x-%28-a%2Bb%29%29%28x-%28a%2Bbc%29%29%28x-%28-a%2Bbc%29%29%28x-%28a%2Bbc%5E2%29%29%28x-%28-a%2Bbc%5E2%29%29+where+%7Ba%3D%E2%88%9A2%2C+b%3D3%5E%281%2F3%29%2C+c%3D%28-1%2B%E2%88%9A%28-3%29%29%2F2%7D&lang=ja

Input interpretation

$$(x-(a+b))\,(x-(-a+b))\,(x-(a+b\,c))\,(x-(-a+b\,c))\left(x-\left(a+b\,c^2\right)\right)\left(x-\left(-a+b\,c^2\right)\right)$$

where $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3},\ c=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)$

Result

$$\left(x-\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2}\right)$$

Expanded form

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$$

$\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$, $\omega=e^{2\pi i/3}=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ のとき,

$\theta=\alpha+\beta$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式 $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ の根の全体は

$$\alpha+\beta,\quad -\alpha+\beta,\quad \alpha+\omega\beta,\quad -\alpha+\omega\beta,\quad \alpha+\omega^2\beta,\quad -\alpha+\omega^2\beta$$

になる. 逆にこのことから, θ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式が決まる.