Galois拡大について

$\mathbb{C}$を標数0の代数閉体におきかえても同様

以下, $K, L, M, \dots$ は$\mathbb{C}$の部分体であると仮定する. ← 簡単のための仮定

(注) 以下の内容は標数0の場合にも一般的に通用する.)

L/K は有限次拡大であると仮定する.

$K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$= K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \ni {}^\exists\theta$
$= K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})(\theta)$
$= K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \theta)$ 1個へらせる.

LのK上でのベクトル空間としての基底を$\alpha_1, \dots, \alpha_n$と書くと, 各$\alpha_i$は$K$上代数的でかつ $L = K\alpha_1 \oplus \cdots \oplus K\alpha_n = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が成立しているので, 単拡大定理より, $L = K(\theta)$, $\theta \in L$ と書ける. このとき, 次のように定める.

定義 L/Kが(有限次)Galois拡大であるとは以下の同値な条件のどれかが成立していることだと定める:

(注) φは単射だが全射とは限らない.

(1) LのK上での任意の共役体はLに等しい.

(K上での任意の体の同型 $\varphi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ について $\varphi(L) = L$.) ← $\varphi(L)$をLのK上での共役体と呼ぶ

($\varphi: L \to \mathbb{C}$ は環の準同型(体の準同型, 単射になる)で $\varphi(a) = a$ ($a \in K$)をみたすもの)

← 体の同型 $\varphi: L \hookrightarrow \mathbb{C}$の定義

(2) θのK上での任意の共役元はLに含まれる.

($\underbrace{\theta\text{の}K\text{上での最小多項式のすべての根}}$が$L$に含まれる.)

← θのK上でのすべての共役元の定義

$\square$

さらに次の条件も(1), (2)と同値である:

(3) ある $F(x) \in K[x]$ が存在して，L は $F(x)$ の K 上での最小分解体になる.

（L は $\underbrace{K \text{に} F(x) \text{のすべての根を付け加えてできる体}}$ になる.）

F(x)のK上での最小分解体の定義

以下において，(1), (2), (3) の同値性と次の定理をみとめて使ってよい.

$\boxed{\text{定理}}$ 以上の記号のもとで，L/K は有限次 Galois 拡大であるとし，$\theta \in L$ で $L = K(\theta)$ をみたすものを取るとき，次の写像は全単射になる:

θのK上での最小多項式の根全体の集合

$$\underset{\text{定義}}{\mathrm{Gal}(L/K) =} \{K \text{上での体} L \text{の自己同型全体}\} \longrightarrow \overbrace{\{\theta \text{の} K \text{上での共役元全体}\}}, \quad \sigma \mapsto \sigma(\theta).$$

このことから，$|\mathrm{Gal}(L/K)| = (\theta \text{の} K \text{上での共役元の個数}) = [L:K]$ が得られる. □

← 最小多項式の次数

Galois群　方程式の解　体の拡大

$\boxed{\text{問題6-1}}$ K, L は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，L/K は有限次拡大であるとする.
このとき，L/K が Galois 拡大であることと次の条件 (4) が同値であることを示せ.

(4) 任意の $\alpha \in L$ について，α の K 上での任意の共役元が L に含まれる. □

注 (4) は (2) より強い: (4) ⇒ (2) は自明. (1), (2), (3) ⇒ (4) を示せ.

問題 6-2 M/K は体の拡大であるとし, L_1, L_2 はその中間体であるとする.

このとき, L_1/K, L_2/K が有限次拡大ならば $L_1 \cap L_2/K$ も L_1L_2/K も有限次拡大になり,

$$[L_1 \cap L_2 : K] \leqq \min\{[L_1 : K], [L_2 : K]\}, \quad [L_1L_2 : K] \leqq [L_1 : K][L_2 : K]$$

となることを示せ.

ここで L_1L_2 は L_1 と L_2 の両方を含む M の最小の部分体を表す (L_1L_2 は合成体). $\square$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & M & \\ L_1 \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & L_2 \arrow[ul, phantom, "\supset" sloped] \\ & K \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & \end{tikzcd}$$

$L_1 \cap L_2$ も K の拡大体

$L_1L_2 = \left(\text{$L_1$ と L_2 を含む M の最小の部分体}\right)$

問題 6-3 K, L_1, L_2 は $\mathbb{C}$ の部分体であるとする.

L_1/K と L_2/K が有限次Galois拡大ならば

$L_1 \cap L_2/K$ と L_1L_2/K も有限次Galois拡大になることを示せ.

ここで L_1L_2 は L_1 と L_2 の両方を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体を表す. $\square$

問題 6-4 以下の体の拡大がGalois拡大であるかどうかを判定せよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$, (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})/\mathbb{Q}$,

(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$, (5) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$, (6) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}$,

(7) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, (8) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

これがもっとも易しいはず