問題 9-1 ($\mathbb{F}_p$ の代数閉包)

p は素数であるとし, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく. $\mathbb{F}_p$ は位数 p で標数 p の有限体になる.
Ω は代数閉体であるような $\mathbb{F}_p$ の拡大体であるとする. $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ と書く.
(そのような Ω の存在は Steinitz の定理によって保証される.) 以下を示せ:

(1) Ω の任意の部分体 K は $\mathbb{F}_p$ を含む.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ について, $F_n(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ とおき,
Ω における $F_n(x)$ の根全体を $L_n = \{\alpha \in \Omega \mid F_n(\alpha) = 0\}$ と書く.
このとき, L_n は Ω に含まれる唯一つの位数 p^n の有限部分体になる.
以下, $\mathbb{F}_{p^n} = L_n$ とおく.

(3) $m | n$ のとき, $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$

(4) $L_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^n}$ とおく. L_∞ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉包になる. □

注意 上の結果は大雑把に言って, 標数 p の $\overbrace{\text{すべて}}^{\Omega\text{に含まれる}}$ の有限体の和集合
として, $\mathbb{F}_p$ の代数閉包が得られることを意味している! $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^n}$.
一般の場合とちがって, $\mathbb{F}_p$ の代数閉包は特別に易しい. □

$\boxed{\text{問題 9-2}}$ Artinの定理(前回の08-2でやった)を認めて以下を示せ.

← $t_1, \ldots, t_n$ は文字

k は体であるとし, $L = k(t_1, \ldots, t_n)$ は体 k 上の n 変数有理函数体であるとする. $t_1, \ldots, t_n$ の基本対称式 $e_1, \ldots, e_n$ を次のように定める:

$$e_r = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n} t_{i_1} \cdots t_{i_r}.$$

← $\binom{n}{r}$ 項の式.

たとえば, $n = 3$ のとき,

$$e_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad e_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad e_3 = t_1 t_2 t_3.$$

L の部分体 K を $K = k(e_1, \ldots, e_n)$ と定める. 以下を示せ.

(1) L は $F(x) = x^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r e_r x^{n-r} \in K[x]$ の K 上での最小分解体である.

(2) $[L:K] = n!$

(3) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong S_n$. ←(これで S_n を Galois 群に持つ Galois 拡大が作れた) □

$\boxed{\text{ヒント}}$ L への S_n の自然な作用に関する L^{S_n} を K' と書く.
Artinの定理より, $\mathrm{Gal}(L/K') \cong S_n$, $[L:K'] = n!$ となる.
$K \subset K'$ なので $[L:K] \geqq n!$ がわかる. $[L:K] \leqq n!$ を示せば $K = K'$ が得られる. □