**Galois対応** $L/K$ は有限次Galois拡大であると仮定する。

このとき、$Gal(L/K) = \{L$ の $K$ 上での体の自己同型全体$\}$ について、

$$|Gal(L/K)| = [L:K]$$

でかつ以下の一対一対応が得られる：

$$\{L/K \text{ の中間体全体}\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \{Gal(L/K) \text{ の部分群全体}\}$$

$$M \longmapsto \{\sigma \in Gal(L/K) \mid \sigma(a) = a \ (a \in M)\}$$

$$L^H = \{\beta \in L \mid \sigma(\beta) = \beta \ (\sigma \in H)\} \longleftarrow\!\shortmid \ H$$

さらに、

(1) この対応は包含関係を逆転させる。

(2) $L/L^H$ もGalois拡大になり、$Gal(L/L^H) = H$. 特に $[L:L^H] = |H|$.

(3) $L^H/K$ がGalois拡大 $\iff$ $H$ は $Gal(L/K)$ の正規部分群.

(2)より、位数 $r$ の $Gal(L/K)$ の部分群 $H$ に対応する $L/K$ の部分体 $M$ は

$[L:M] = r$ でかつ $\sigma(\beta) = \beta \ (\beta \in M, \sigma \in H)$ をみたすものになる。

## よく使われる有限群の記号

$S_n = $ (n次の置換群) $\rhd A_n = $ (n次の交代群) $= \{$n次の偶置換全体$\}$,

$C_n = $ (位数nの巡回群) $= \langle \sigma \mid \sigma^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$D_n = $ (位数2nのn次の二面体群) $= \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$.

$$D_3 \cong S_3,\quad \sigma \leftrightarrow (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \tau \leftrightarrow (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \{1,\ (1,2,3),\ (1,3,2),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3)\} \\ &= \{1,\ (1,2,3),\ (1,2,3)^2,\ (1,2),\ (1,2,3)(1,2),\ (1,2,3)^2(1,2)\} \end{aligned}$$

$$C_3 \cong A_3 = \{1,\ (1,2,3),\ (1,2,3)^2\},$$

$$V = \{1,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\} \cong C_2 \times C_2,\quad V \lhd S_4$$

Kleinの四元群

**問題 7-1** $F(x) = x^3 - 3$, $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく。以下を示せ。

(1) $F(x)$ は $\alpha$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である。

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しく<u>ない</u>。

(3) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha,\omega) = \mathbb{Q}(\alpha,\sqrt{-3})$ に等しい。

以下，$[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]=6$ を認めて使ってよい。(問題3-5, 4-2 の解答例も参照)

(4) $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)$ の体の自己同型 $\sigma, \tau$ を次のように定義できる：

$$\sigma(f(\alpha)) = \omega\alpha \quad (f(x)\in\mathbb{Q}(\omega)[x]),\qquad \tau(g(\omega)) = g(\omega^2) \quad (g(x)\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]),$$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q}) = \langle\sigma,\tau\rangle \cong D_3 \cong S_3$ ← 特に(6)をやってほしい

(6) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha,\omega)/\mathbb{Q}$ の中間体の Galois 対応は以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd}
& \{1\} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle\tau\rangle \arrow[dr, dash] & \langle\sigma\tau\rangle \arrow[d, dash] & \langle\sigma^2\tau\rangle \arrow[dl, dash] & \langle\sigma\rangle \arrow[dll, dash] \\
& \langle\sigma,\tau\rangle & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(\alpha,\omega) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}(\alpha) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\omega^2\alpha) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\omega\alpha) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(\omega) \arrow[dll, dash] \\
& \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

**問題7-2** $F(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F(x)$ は $\alpha$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式である.

(2) $F(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha)$ に等しい.

$F(x)$ のすべての根が $\mathbb{Q}(\alpha)$ に含まれる.

(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ の体の自己同型 $\sigma$ を $\sigma(f(\alpha)) = f(\sqrt{2-\sqrt{2}})$ $(f(x) \in \mathbb{Q}[x])$ 定義できる.

(4) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle \cong C_4$

(5) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ の部分群全体と $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体全体の Galois対応は以下の図のようになっている:

$$
\begin{array}{ccc}
\{1\} & \qquad\qquad & \mathbb{Q}(\alpha) \\
| & & | \\
\langle \sigma^2 \rangle & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
| & & | \\
\langle \sigma \rangle & & \mathbb{Q}
\end{array}
$$

$\square$