資料 02-1

$\boxed{\text{問題 1-5}}$ $\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $L = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ とおく。

L が $\mathbb{Q}, \alpha$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを示せ。 □

(1) L は $\mathbb{R}$ の部分体であり, $\mathbb{Q}$ と α を含む。
(2) M を $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}, \alpha$ を含むものとすると $L \subset M$。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) L が $\mathbb{R}$ の部分体で $\mathbb{Q}, \alpha$ を含むことを示そう。

$\mathbb{Q} \subset L$ と $\alpha \in L$ は明らか。

L が $\mathbb{R}$ の部分体であることを示すためには, 0 と 1 を含み, $+, -, \times$ で閉じていて, 任意の $\beta \in L$ について $\beta \neq 0 \Rightarrow \beta^{-1} \in L$ となることを示せばよい。

$0 \in L$, $1 \in L$ および L が加法と減法で閉じていることは明らか。

L が乗法で閉じていることを示そう。$\beta, \gamma \in L$ を任意にとる。このとき,

$$\beta = a + b\alpha + c\alpha^2, \quad \gamma = a' + b'\alpha + c'\alpha^2 \quad (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q})$$

と書ける。そして,

$$\beta\gamma = (aa' + 2bc' + 2cb') + (ab' + ba' + 2cc')\alpha + (ac' + bb' + ca')\alpha^2 \in L.$$

これで L が乗法で閉じていることがわかった。

$\beta\in L$, $\beta\neq 0$ と仮定する. $\beta=a+b\alpha+c\alpha^2$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ と書ける.

$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{a+b\alpha+c\alpha^2}\in L$ となることを示したい.

公式 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ を

$x=a$, $y=b\alpha$, $z=c\alpha^2$ に適用すると,

$$\beta\underbrace{(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)}_{\in L}=\overbrace{a^3+2b^3+4c^3-6abc}^{\text{これを } d \text{ と書く}}\in\mathbb{Q}.$$

$a'+b'\alpha+c'\alpha^2$ $(a',b',c'\in\mathbb{Q})$ と書ける

もしもこれの右辺が0でなければ両辺を $\beta\times$(右辺) で割ることによって,

$$\frac{1}{\beta}=\frac{a'+b'\alpha+c'\alpha^2}{d}=\frac{a'}{d}+\frac{b'}{d}\alpha+\frac{c'}{d}\alpha^2\in L.$$

(右辺)$=d\neq 0$ を示すためには, $\beta\neq 0$ と仮定していたので $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\neq 0$ を示せばよい. $x,y,z\in\mathbb{R}$ で $\beta\neq 0$ より, x,y,z のどれかは0でないので, $x\neq y$, $x\neq z$, $y\neq z$ のどれかは成立しているので,

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right)>0.$$

示すべきことが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題1-6}}$ xに関する3次方程式 $x^3-3px+q=0$ の解法を作れ。□

$\boxed{\text{解答例}}$ (問題1-4の解答例を見よ.) $\omega^2+\omega+1=0$ と仮定する.

ω は1の原始3乗根と仮定

$p=0$のとき, $x^3+q=0$ は $x=\sqrt[3]{-q},\ \omega\sqrt[3]{-q},\ \omega^2\sqrt[3]{-q}$ と解ける.

以下, $p\neq 0$と仮定する. 問題1-4の結果より,

$$x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z).$$

ゆえに, もしも与えられた $p(\neq 0)$, q に対して, $yz=p$, $y^3+z^3=q$ をみたす (y,z) を作れば, $x^3-3px+q=0$ は $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ と解ける.

$YZ=p^3$, $Y+Z=q$ をみたす Y, Z は2次方程式 $\lambda^2-q\lambda+p^3=0$ の解になる.

そのうちの1つを(Y, Z)と書く. $y^3=Y$ をみたす y を1つ取る. $z=\dfrac{p}{y}$ とおくと, $yz=p$ となり, $z^3=\dfrac{p^3}{Y}=Z$ となるので, $y^3+z^3=Y+Z=q$. これでほしい y, z を作れた.

解法まとめ ① $\lambda^2-q\lambda+p=0$ の解の1つをYと書く.

② $y^3=Y$ をみたす y を1つ取り, $z=\dfrac{p}{y}$ とおく.

③ $x=-y-z,\ -\omega y-\omega^2 z,\ -\omega^2 y-\omega z$ $(\omega^2+\omega+1=0)$ □

問題1-7 $x^3+2x-2=0$ をみたす正の実数 $x=\alpha$ が存在することを示せ、さらに α の具体的な形を求めよ（$\sqrt{\ }$ と $\sqrt[3]{\ }$ を使って表せ）。 $\square$

WolframAlpha

2/(3(√(35/27) - 1)^(1/3)) - (√(35/27) - 1)^(1/3)

Input

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{35}{27}}-1}$$

Result

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{3}-1}$$

Decimal approximation

0.7709169970592481008251463693070269672550531193633286151005984929767351032820534076249331528876…

More digits

Alternate forms

$$\frac{2\times 3^{2/3}-\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{105}-9\right)^{2/3}}{3\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}$$

root of x^3+2x-2 near $x=0.770917$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}-\frac{\sqrt[3]{\sqrt{105}-9}}{3^{2/3}}$$

More forms Step-by-step solution

Minimal polynomial

x^3+2x-2

x^3+2x-2

Alternate form

Real root

$$x=\frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{3^{2/3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}$$

Approximate form Step-by-step solution

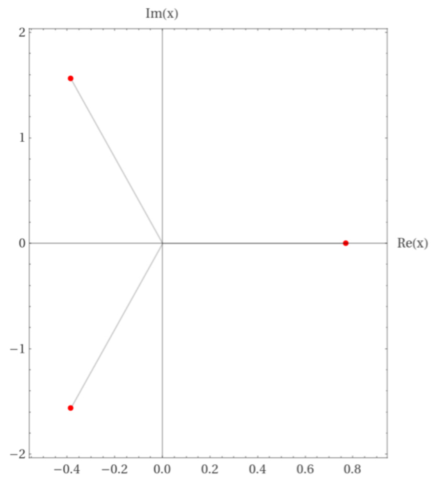
Complex roots

$$x=\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

$$x=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3\left(9+\sqrt{105}\right)}}-\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{9+\sqrt{105}}}{2\times 3^{2/3}}$$

Approximate forms Step-by-step solution

Roots in the complex plane



https://www.wolframalpha.com/input/?i=2%2F%283%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29%29%20-%20%28%E2%88%9A%2835%2F27%29%20-%201%29%5E%281%2F3%29

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E3%2B2x-2

$\boxed{\text{解答例}}$ $x^3+2x-2\overset{(*)}{=}0$ の正の実数解を求めたい。

$p=-\frac{2}{3}$, $q=-2$ とおくと，(*) は $x^3-3px+q=0$ と書ける。

問題1-6の解法を使おう。 $\lambda^2-q\lambda+p^3=\lambda^2+2\lambda-\frac{8}{27}=0$ の正の実数解は

$$Y=-1+\sqrt{1^2+\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{35}{27}}-1>0.$$

$y=\sqrt[3]{Y}>0$, $z=\frac{p}{y}=-\frac{2}{3y}<0$ とおく。問題1-6の結果より，

$$\alpha=-y-z=\frac{2}{3\sqrt[3]{Y}}-\sqrt[3]{Y}\in\mathbb{R}$$

は (*) の実数解になっている。（$\alpha\fallingdotseq 0.77$ なので $\alpha>0$ だが，別の方法で $\alpha>0$ であることを示す。）

$f(x)=x^3+2x-2$ とおくと，$f'(x)=3x^2+2>0$ ($x\in\mathbb{R}$) なので，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加し，$f(0)=-2$, $f(1)=1$ なので，$f(x)=0$ は唯一つの実数解を持ち，その実数解は上の α になる。（さらに $0<\alpha<1$ も示せている。） □

$\boxed{問題2\text{-}1}$ (易) $x^3-15x+4=0$ の3つの解を問題1-6の解答例の方法で作れ。
さらに、-4が解の1つになっていることを使って求めた3つの解と一致することを示せ。

次ページを見る前にこの問題を解くこと。動画もここでストップ！

ためしに4の約数 $\pm1, \pm2, \pm4$ を x に代入すると、$x=-4$ のとき、

$$x^3-15x+4 = -4^3+15\cdot4+4 = -64+60+4=0.$$

$$\begin{array}{r} x^2-4x+1 \\ x+4 \overline{\smash{\big)}\, x^3 \qquad -15x+4} \\ \underline{x^3+4x^2 \qquad\qquad} \\ -4x^2-15x \quad \\ \underline{-4x^2-16x \quad} \\ x+4 \\ \underline{x+4} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3-15x+4 = (x+4)(x^2-4x+1)$$

$$x^2-4x+1=0 \iff x=2\pm\sqrt{3}$$

$x^3-15x+4=0$ の解は

$$x=-4,\ 2\pm\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{解答例}}$ $p=5,\ q=4$ とおく.

$x^3-15x+4 = x^3-3px+q=0$ は問題1-6の解答例によれば以下のようにして解ける. $\lambda^2-q\lambda+p^3=\lambda^2-4\lambda+125=0$ を解くと,

$$\lambda = 2\pm\sqrt{4-125} = 2\pm\sqrt{-121} = 2\pm 11i \quad (i=\sqrt{-1}).$$

$Y=2+\sqrt{11}\,i$ とおき, Y の立法根の1つを $y=\sqrt[3]{2+11i}$ と書き, $z=\dfrac{p}{y}=\dfrac{5}{y}$ とおく. このとき $x^3-15x+4=0$ は次のように解ける:

$$x=-y-z,\ -wy-w^2z,\ -w^2y-wz \qquad (w^2+w+1=0).$$

$\{-y-z,\ -wy-w^2z,\ -w^2y-wz\}=\{-4,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}\}$ を示したい.

Yの立法根の1つとして，$\underline{y=\boxed{2+i}}$がとれる．← ここが大変．

実際，$(2+i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 = 8+12i-6-i = 2+11i = Y$.

$$\underline{z} = \frac{5}{y} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{4+1} = \underline{\boxed{2-i}},$$

このとき，$y=2+i$ と $z=2-i$ より，$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$w^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ で

$$\begin{cases} -y-z = \underline{-2-i}\,\underline{-2+i} = -4 \\ -wy-w^2z = \underbrace{-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\underbrace{-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -\cancel{2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\cancel{2}}(2+i)\right) = 2+\sqrt{3} \\ -w^2y-wz = \underbrace{-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)}\underbrace{-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}(2-i)} = -2\mathrm{Re}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}(2+i)\right) = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

互いに複素共役　$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$

これで示すべきことが示された．　□

ポイント　$2+11i$ の立法根の1つとして $2+i$ がとれること．□

問題2-2 以下の$\mathbb{Z}$係数多項式たちが$\mathbb{Q}$上の既約多項式になることを示せ。

(1) x^3+2x-2.

(2) $x^4+10x^3+15x^2+35x+55$.

(3) 正の整数 n に対する x^n-14.

(4) 素数 p に対する $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$.

ヒント Eisensteinの既約判定法を使ってよい。

例: $x+1$, x^2+x+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$, $x^6+x^5+\cdots+x+1$, …

ヒント (1), (2), (3) は直接Eisensteinの判定法を適用できる:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ と素数 p について,

$$p\nmid a_n,\ p\mid a_{n-1},\ \dots,\ p\mid a_1,\ p\mid a_0,\ p^2\nmid a_0 \Rightarrow f(x) \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上既約}.$$

(4) には直接的にEisensteinの判定法を適用できないので, 少しくふうしてみよ。 $\square$

おまけ $x^3-15x+4$ には, $2^2\mid 4$ なので Eisensteinの判定法を使えない。

$x^3-15x+4=(x+4)(x^2-4x+1)$ なので $x^3-15x+4$ は既約ではない。 $\square$

注意 $$x^{mn-1}+x^{mn-2}+\cdots+x+1=\frac{x^{mn}-1}{x-1}=\frac{x^m-1}{x-1}(x^{m(n-1)}+x^{m(n-2)}+\cdots+x^m+1)$$

$$=(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)(x^{m(n-1)}+x^{m(n-2)}+\cdots+x^m+1)$$ は既約ではない。 $\square$

問題 2-3 R は可換環であるとし, $p \in R$ であるとする.

$a \in R$ の R/pR での像を $\overline{a}$ と書き, 写像 $\varphi : R[x] \to (R/pR)[x]$ を

$$\varphi\left(\sum_i a_i x^i\right) = \sum_i \overline{a_i}\, x^i \quad (a_i \in R)$$

と定める. 以下を示せ.

(1) φ は環の準同型写像である.

(2) φ は全射である.

(3) $\operatorname{Ker} \varphi = pR[x]$

(4) 環の同型写像 $\overline{\varphi} : R[x]/pR[x] \xrightarrow{\sim} (R/pR)[x]$, $(f \bmod p) \mapsto \varphi(f)$ が得られる.

注意 $pR[x]$ も pR も (p) と書かれることがある. 文脈によって区別せよ:

$$R[x]/(p) \xrightarrow{\sim} (R/(p))[x], \quad (f \bmod p) \mapsto \varphi(f).$$

互いに異なることに注意.

$\square$

$\boxed{\text{問題 2-4}}$ $\omega^3=1$ と仮定し, $\alpha=\omega\sqrt[3]{7}$ とおき, 写像 $\varphi:\mathbb{Q}[x]\to\underbrace{\mathbb{Q}[\alpha]}_{\text{Qとαを含むRの最小の部分環}}$ を

$$\varphi(f(x)) = f(\alpha) \qquad (f\in\mathbb{Q}[x])$$

と定める. 以下で $\mathbb{Q}[\alpha]=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]\}$ をみとめて使ってよい. 以下を示せ.

(1) φ は全射環準同型でかつ $a\in\mathbb{Q}$ に対して $\varphi(a)=a$.

(2) $f(x)=x^3-7$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式である

(3) $\mathrm{Ker}\,\varphi=(x^3-7)\mathbb{Q}[x]$. これを (x^3-7) と書く.

(4) 環として, $\mathbb{Q}[x]/(x^3-7)\cong\mathbb{Q}[\alpha]$.

(5) $\mathbb{Q}[\alpha]$ は体になる.

$\boxed{\text{ヒント}}$ ・準同型定理.

・Eisensteinの判定法.

・$\mathbb{Q}[x]$ の既約多項式 $f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ の極大イデアルを生成する. $\square$