# 単拡大定理について



$\boxed{\text{問題 5-4}}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ をみたす $\theta \in \mathbb{C}$ を具体的に与え、実際にその等号が成立することを証明せよ。 □

$\boxed{\text{問題 5-5}}$ 次を示せ：

$K$ は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は $K$ 上代数的であると仮定する。このとき、ある $\theta \in \mathbb{C}$ が存在して、$K(\alpha, \beta) = K(\theta)$。 □

まず最初に後者について非常に詳しく解説する。→ 次ページ

( $\boxed{\text{方針}}$ 適切に $\theta = \alpha + c\beta$, $c \in K$, $G(x) \in K(\theta)[x]$ を作って、$G(x)$ と $\beta$ の $K$ 上での最小多項式の共通根が $\beta$ だけになるようにする。)

そしてその証明の方法を使って前者の問題を解く。

後で前者の問題の例を非常に詳しく取り扱う。

**問題5-5の解答例** $K$ は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は $K$ 上代数的だと仮定する.

$\alpha$ と $\beta$ の $K$ 上でのモニックな最小多項式をそれぞれ $F_\alpha(x), F_\beta(x) \in K[x]$ と書く.

$F_\alpha(x)$ の $\alpha = \alpha_1$ 以外の互いに異なる根全体を $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ と書く.

$F_\beta(x)$ の $\beta = \beta_1$ 以外の互いに異なる根全体を $\beta_2, \dots, \beta_n$ と書く.

$G(t, x) = F_\alpha(\alpha + t\beta - tx) \in K(\alpha, \beta)[t, x]$ とおく.

このとき, $G(t, \beta) = F_\alpha(\alpha) = 0$ ($K(\alpha,\beta)[t]$ の元として $0$).

$j = 2, \dots, n$ のとき, $\beta_1 - \beta_j \neq 0$ より, $G(t, \beta_j) = F_\alpha(\alpha + (\beta_1 - \beta_j)t) \in \mathbb{C}[t]$ の次数は $F_\alpha(x)$ と等しくなり, 特に $G(t, \beta_j)$ は $t$ の多項式として $0$ ではないので, $t$ の多項式としての根は有限個になる.

$$\left(\begin{aligned} & G(\tau, \beta_j) = 0 \quad \leftarrow j \neq 1 \text{ と仮定} \\ \iff & \exists i = 1, \dots, m \text{ s.t. } \alpha + (\beta - \beta_j)\tau = \alpha_i \\ \iff & \exists i = 1, \dots, m \text{ s.t. } \tau = -\frac{\alpha - \alpha_i}{\beta - \beta_j} \end{aligned}\right)$$

$K$ は標数が $0$ なので無限個の元を含む. ゆえに, 有限集合 $\bigcup_{j=2}^{n} \{\tau \in \mathbb{C} \mid G(\tau, \beta_j) = 0\}$ に含まれない元 $c \in K$ が存在する.

ここを $K(\theta)$ にできることがポイント

$\theta = \alpha + c\beta$, $G(x) = G(c, x) = F_\alpha(\theta - cx) \in K(\theta)[x]$ とおく.

このとき, $G(\beta) = G(c, \beta) = 0$ で, $c$ の取り方より, $j = 2, \dots, n$ について $G(\beta_j) = G(c, \beta_j) \neq 0$.

Kの標数は0で，$F_\beta(x)$はK上既約なので重根を持たない．

ゆえに，$F_\beta(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j)$ （$\beta_1=\beta$ と $\beta_1,\dots,\beta_n$ が互いに異なることに注意）．

$G(x)$は $G(\beta)=0$ と $j=2,\dots,n$ について $G(\beta_j)\neq 0$ をみたすので，$G(x)$と$F_\beta(x)$の共通根は $\beta=\beta_1$ しか存在しない．

したがって，$G(x)$と$F_\beta(x)$のモニックな最大公約多項式$H(x)$は $H(x)=x-\beta$ になる．

$K\subset K(\theta)$なので $F_\beta(x)$も$G(x)$と同じく$K(\theta)[x]$の元であることに注意せよ．

ゆえに，$G(x)$と$F_\beta(x)$のモニックな最大公約多項式$H(x)$についても $H(x)\in K(\theta)[x]$ となる．

これで，$x-\beta=H(x)\in K(\theta)[x]$ が示された．つまり，$\beta\in K(\theta)$． (Euclidの互除法より)

$\theta=\alpha+c\beta$，$c\in K$ だったので $\alpha=\theta-c\beta\in K(\theta)$．

したがって，$K(\alpha,\beta)\subset K(\theta)$．

$\theta=\alpha+c\beta\in K(\alpha,\beta)$ より，$K(\theta)\subset K(\alpha,\beta)$．

以上によって，$K(\alpha,\beta)=K(\theta)$ が示された． □

$\boxed{\text{注意}}$ $F_\beta(x)$が重根を持たないことを仮定すれば ⟵ ($\beta$のK上での分離性)

以上の証明法は正標数の無限体でも使える． □

**問題5-4の解答例** $\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ とおくと，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ となる．

**証明** $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式はそれぞれ $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^3 - 3$.

$h(x) = f(\theta - x) = f(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - x) \underset{\uparrow}{=} (\sqrt[3]{3} - x)(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - x)$ とおく．

$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

ここに複雑な計算がつまっている．（→次ページへ）

$h(x)$ と $g(x)$ の共通根は $\sqrt[3]{3}$ だけであることがわかる．

$h(x)$ と $g(x)$ のモニックな最大公約多項式は $x - \sqrt[3]{3}$ になる．

そして，$h(x)$ も $g(x)$ も $\mathbb{Q}(\theta)[x]$ の元なので Euclidの互除法より，$x - \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)[x]$ となる．ゆえに，$\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)$, $\sqrt{2} = \theta - \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\theta)$ なので $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) \subset \mathbb{Q}(\theta)$.

$\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ なので $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

これで，$\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ のとき，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\theta)$ となることが示された． □

次ページ以降でこの例をさらに詳しく見て行く．

**別解** $\theta = \sqrt{2}\sqrt[3]{3}$ とおくと，$\theta^4 = 12\sqrt[3]{3}$ なので $\sqrt[3]{3} = \theta^4/12 \in \mathbb{Q}(\theta)$ かつ $\sqrt{2} = \theta/\sqrt[3]{3} = 12/\theta^3 \in \mathbb{Q}(\theta)$ なので $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$. □

$\boxed{\text{Euclidの互除法}}$ $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}$, $\theta = \alpha + \beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ とおく.

$f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^3 - 3$, $h(x) = f(\theta - x) = (x-\theta)^2 - 2 = x^2 - 2\theta x + \theta^2 - 2$ とおく.

$g(x)$ と $h(x)$ のモニックな最大公約多項式は $x - \sqrt[3]{3}$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2\theta \\
\hline
x^2 - 2\theta x + \theta^2 - 2 & x^3 \qquad\qquad\qquad - 3 \\
 & x^3 - 2\theta x^2 + (\theta^2-2)x \\
\hline
 & 2\theta x^2 - (\theta^2 - 2)x - 3 \\
 & 2\theta x^2 - 4\theta^2 x + 2\theta(\theta^2-2) \\
\hline
 & (3\theta^2+2)x - (2\theta(\theta^2-2)+3)
\end{array}
$$

$$
g(x) = (x + 2\theta)\,h(x) + \underbrace{(3\theta^2+2)x - (2\theta(\theta^2-2)+3)}
$$

Euclidの互除法より,
これが $g(x)$ と $h(x)$ の g.c.d. になる.

これより, $x - \sqrt[3]{3} = x - \dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}$.

つまり, $\sqrt[3]{3} = \dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2} \in \mathbb{Q}(\theta)$

非自明だが手計算で確認可能 → 次ページ

これのコンピュータによる確認

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%282t%28t%5E2-2%29%2B3%29%2F%283t%5E2%2B2%29+where+%7Bt%3D%E2%88%9A2%2B3%5E%281%2F3%29%7D&lang=ja

(2t(t^2-2)+3)/(3t^2+2) where {t=√2+3^(1/3)}

Assuming the principal root | Use the real-valued root instead

**Input interpretation**

$$\frac{2\,t\,(t^2-2)+3}{3\,t^2+2} \quad \text{where } t = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$$

**Result**

$$\frac{3 + 2\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^2 - 2\right)}{2 + 3\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^2}$$

**Alternate forms**

$\sqrt[3]{3}$ OK!

$\boxed{\theta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \text{ のときの } \sqrt[3]{3} = \dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2} \text{ の手計算での確認}}$

$\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}$ とおく。$\theta = \alpha+\beta$, $\alpha^2 = 2$, $\beta^3 = 3$ となる。

$$
\begin{aligned}
2\theta(\theta^2-2)+3 &= 2\theta^3 - 4\theta + 3 \\
&= 2\alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 2\beta^3 - 4\alpha - 4\beta + 3 \\
&= 4\alpha + 12\beta + 6\alpha\beta^2 + 6 - 4\alpha - 4\beta + 3 \\
&= 6\alpha\beta^2 + 8\beta + 9
\end{aligned}
$$

$3\theta^2+2 = 3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 3\beta^2 + 2 = 6 + 6\alpha\beta + 3\beta^2 + 2 = 6\alpha\beta + 8 + 3\beta^2$ より

$\beta(3\theta^2+2) = 6\alpha\beta^2 + 8\beta + 9 = 2\theta(\theta^2-2)+3$.

ゆえに、$\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2} = \beta = \sqrt[3]{3}$.

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の計算では $\alpha^2 = 2$, $\beta^3 = 3$, $\theta = \alpha+\beta$ のとき、$\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2} = \beta$ となることを示しているので、結論は $\alpha = \pm\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3}$ $(\omega = e^{2\pi i/3})$ の場合も成立している。

$\square$

# 問題5-4の $\theta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ を使う方針の場合の易しい別解

2021-11-12 追記

$\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$, $a=2$, $p=3$ とおくと, $\alpha^2-a=0$, $\beta^3-p=0$. $\theta=\alpha+\beta$ とおく.

$\alpha=\theta-\beta$ より, $0=\alpha^2-a=\beta^2-2\theta\beta+\theta^2-a$ なので $\beta^2=2\theta\beta-\theta^2+a$.

ゆえに, $0=\beta^3-p=\beta(2\theta\beta-\theta^2+a)-p=2\theta\beta^2+(-\theta^2+a)\beta-p$

$$=\underbrace{2\theta(2\theta\beta-\theta^2+a)}_{=4\theta^2\beta-2\theta^3+2a\theta}+(-\theta^2+a)\beta-p=(3\theta^2+a)\beta-(2\theta^3-2a\theta+p).$$

したがって, $\beta=\dfrac{2\theta^3-2a\theta+p}{3\theta^2+a}\left(=\dfrac{2\theta(\theta^2-a)+p}{3\theta^2+a}=\dfrac{2\theta(\theta^2-2)+3}{3\theta^2+2}\right)$.

これは易しい計算

前ページまでに紹介した計算とこれを比較してみよ.

$$\overbrace{g(x)}^{x^3-p}=(x+2\theta)\overbrace{h(x)}^{x^2-2\theta x+\theta^2-a}+\underbrace{(3\theta^2+a)x-(2\theta^3-2a\theta+p)}$$

Euclidの互除法より, これが $g(x)$ と $h(x)$ の g.c.d. になる.

$\longleftrightarrow$

$\beta^2-2\theta\beta+\theta^2-a=0$ を使った計算

$$0=\beta^3-p$$

$$=(3\theta^2+a)\beta-(2\theta^3-2a\theta+p)$$

$$\therefore\ \beta=\frac{2\theta^3-2a\theta+p}{3\theta^2+a}$$

# 最小多項式

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%E2%88%9A2%2B3%5E%281%2F3%29

√2+3^(1/3)

Assuming the principal root | Use the real-valued root instead

**Input**

$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$

**Decimal approximation**

2.85646313268050343112332703498980766696154112887629

More digits

**Alternate form**

root of $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ near $x=2.85646$

**Minimal polynomial**

$\boxed{x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1}$

$\theta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ の

$\mathbb{Q}$上での最小多項式は

$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$

$\downarrow$

これの根全体 $\longrightarrow$ 次ページへ

# 最小多項式の根の全体

https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28x-%28a%2Bb%29%29%28x-%28-a%2Bb%29%29%28x-%28a%2Bbc%29%29%28x-%28-a%2Bbc%29%29%28x-%28a%2Bbc%5E2%29%29%28x-%28-a%2Bbc%5E2%29%29+where+%7Ba%3D%E2%88%9A2%2C+b%3D3%5E%281%2F3%29%2C+c%3D%28-1%2B%E2%88%9A%28-3%29%29%2F2%7D&lang=ja

**Input interpretation**

$$(x-(a+b))(x-(-a+b))(x-(a+b\,c))(x-(-a+b\,c))\left(x-\left(a+b\,c^2\right)\right)\left(x-\left(-a+b\,c^2\right)\right)$$

where $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3},\ c=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)$

**Result**

$$\left(x-\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\right)$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2}\right)$$

**Expanded form**

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$$

$\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt[3]{3}$, $\omega=e^{2\pi i/3}=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ のとき,

$\theta=\alpha+\beta$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式 $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ の根の全体は

$$\alpha+\beta,\quad -\alpha+\beta,\quad \alpha+\omega\beta,\quad -\alpha+\omega\beta,\quad \alpha+\omega^2\beta,\quad -\alpha+\omega^2\beta$$

になる. 逆にこのことから, $\theta$ の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式が決まる.