定義 Kを$\mathbb{C}$の部分体とし，$\alpha \in \mathbb{C}$とする．

αがK上<u>作図可能</u>であるとは，Kの元たちから出発して，加減乗除と平方根を取る操作を有限回くりかえしてαが得られることだと定める． □

例 $\sqrt{2}$や$\pm i = \pm\sqrt{-1}$や$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$は$\mathbb{Q}$上作図可能である．

$\sqrt{\pi}$は$\mathbb{Q}(\pi)$上作図可能である．（πや$\sqrt{\pi}$は$\mathbb{Q}$上作図可能ではない．）

<u>a, b, cがK上作図可能のとき，$ax^2+bx+c=0$の解はK上作図可能である</u> □

正の整数nに対して，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$とおく． ゼータ

1の原始n乗根（の1つ）

問題3-1 ζ_5が$\mathbb{Q}$上作図可能なことを示せ． □

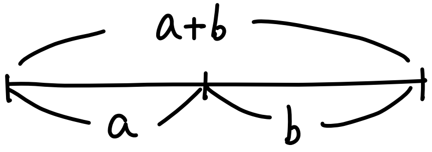
ヒント $w = \zeta_5$とおく．2次方程式の解と係数の関係を使う．

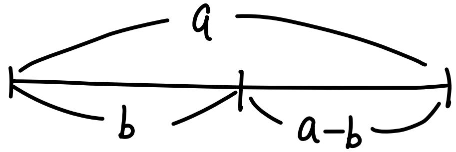
$\alpha = w + w^4$, $\beta = w^2 + w^3$とおくと，$\alpha+\beta = ?$, $\alpha\beta = ?$.

$w + w^4 = \alpha$, $w \cdot w^4 = 1$. □

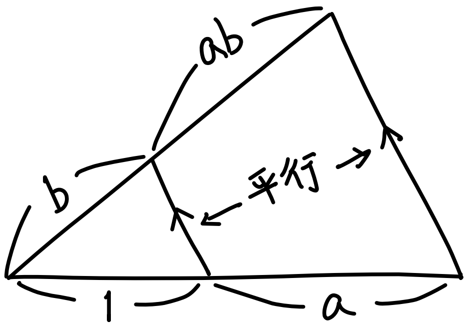
注意 本質的に正五角形の作図可能性！ □

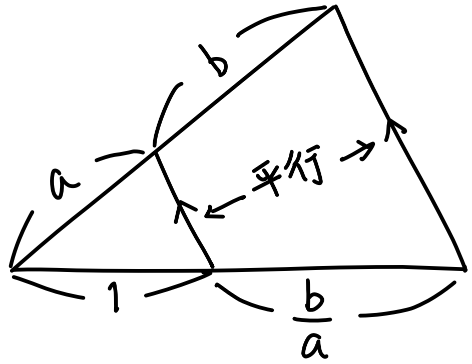
$\boxed{\text{補足}}$ **和と差の作図**





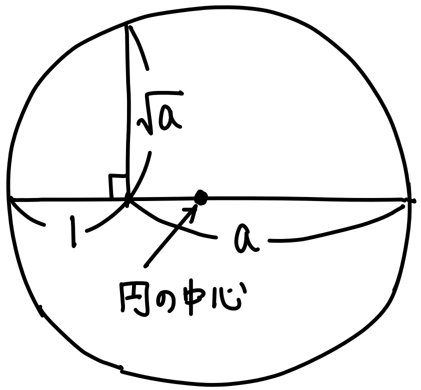
積と商の作図

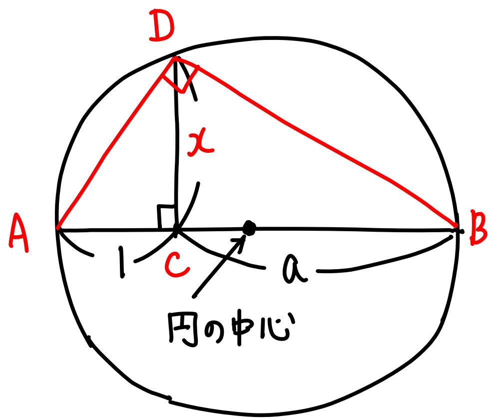




(注 長さ1の作図可能性は仮定しておく，)

平方根の作図





$\triangle ACD \sim \triangle DCB$ より

$1 : x = x : a$.

$\therefore\ x = \sqrt{a}$.

複素数の平方根 $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ のとき，$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ なので，$a, b \in \mathbb{R}$ について，$b \neq 0$ のとき，$z^2 = a + bi$ を解こう．$x^2 - y^2 = a$，$2xy = b$ を解けばよい．後者から得られる $y = \dfrac{b}{2x}$ を前者に代入すると，$x^2 - \dfrac{b^2}{4x^2} = a$，$4(x^2)^2 - 4ax^2 - b^2 = 0$．$x^2 > 0$ なので $x^2 = \dfrac{2a + \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$．
ゆえに $x = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$，$y = \dfrac{b}{2x}$．逆にこのようにおくと $z^2 = a + bi$ となることもわかる．□

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ ζ_{17} が $\mathbb{Q}$ 上作図可能なことを示せ． □ ← かなり非自明．

(これに関連した問題をずっと後にレポート課題に出す予定)

$\boxed{\text{ヒント}}$ $w = \zeta_{17}$, $w_0 = w$, $w_{k+1} = w_k^3$ とおく．
$$\begin{cases} w^{17} = 1, \quad w \neq 1 \\ w^{16} + w^{15} + \cdots + w + 1 = 0 \end{cases}$$

(0) $\{w_0, w_1, \dots, w_{15}\} = \{w, w^2, \dots, w^{16}\}$

(1) $\alpha_0 = w_0 + w_2 + \cdots + w_{14}$, $\alpha_1 = w_1 + w_3 + \cdots + w_{15}$ とおくと，

$\alpha_0 + \alpha_1 = ?$, $\alpha_0\alpha_1 = ?$

(2) $\beta_i = w_i + w_{i+4} + w_{i+8} + w_{i+12}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とおくと，

$\beta_0 + \beta_2 = \alpha_0$, $\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1$, $\beta_0\beta_2 = ?$, $\beta_1\beta_3 = ?$, $(\beta_0 + 1)\beta_1 = \beta_0 - 1$

(3) $\gamma_i = w_i + w_{i+8}$ $(i = 0, 1, \dots, 7)$ とおくと，

$\gamma_0 + \gamma_4 = \beta_0$, $\gamma_0\gamma_4 = ?$

(4) $w_0 + w_8 = \gamma_0$, $w_0 w_8 = ?$ □

2次方程式を解くことのくりかえしで $w = \zeta_{17}$ が得られることを示せという問題．

$\boxed{\text{注意}}$ 本質的に正17角形の作図可能性！ Carl Friedrich Gauss が発見． □

問題 3-3 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ. □

ヒント $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ □

問題 3-4 $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq b$ と仮定する. $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ を示せ.

ここで, $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ は $\mathbb{Q}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体で最小のものを表す. □

問題 3-5 $\alpha = \omega\sqrt[3]{7}$, $\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(1) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}(\alpha)]$ を求めよ.

(3) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(L が体 K の拡大体のとき,

$$[L:K] = [L/K] = \dim_K L$$

と書き, これを L/K の拡大次数と呼ぶ.)

L の K 上のベクトル空間としての次元

□

ヒント α の $\mathbb{Q}$ 上での最小多項式は x^3-7 になる. $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. □