3次方程式 (の解法に向けて)

問題 1-4　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ を x, y, z の1次式の積で表せ。

ヒント　$\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を使ってよい。

実際には $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ のみを使う。 $\Box$

問題 1-5　$\alpha = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $L = \{a+b\alpha+c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ とおく。

L が $\mathbb{Q}, \alpha$ を含む $\mathbb{R}$ の最小の部分体になっていることを示せ。 $\Box$

問題1-5の解答例は来週。

ここで動画をストップして，資料もこの先を見ずに問題を解いてみよ。

問題 1-4 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ を x, y, z の1次式の積で表せ.

ヒント $w = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を使ってよい.

実際には $w^2+w+1=0$, $w^3=1$ のみを使う. □

解答例 次を地道な計算で示せる:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

さらに,

$$\begin{aligned}
&(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz) \\
&= \left\{\begin{array}{cccccc} x^2 & + & w^2xy & + & wxz \\ +wxy & + & y^2 & + & w^2yz \\ +w^2xz & + & wyz & + & z^2 \end{array}\right. \\
&= x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz.
\end{aligned}$$

$w^3=1$ を使う

$w^2+w+1=0$ より
$w^2+w=-1$ を使う

したがって,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz).$$ □

$\boxed{\text{余談}}$ ($x^3+y^3+z^3-3xyz$ の行列式表示)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} & & x & y & z & & \\ & y & z & x & y & z & \\ z & x & y & z & x & y & z \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} xxx + yyy + zzz \\ -xyz - yzx - zxy \end{array} \right\} = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

以上のように見れば 3×3 を $n\times n$ に一般化できる。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ とおくと、$$xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}.$$

$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λ の対角化：$U = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$ とおくと、$\Lambda U = UD$

でかつ $U^* = U^{-1}$ となることを示せる。(練習：示してみよ!)

ゆえに $\Lambda = UDU^{-1}$. したがって、$xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = U(xE + yD + zD^2)U^{-1}$.

$\therefore\ |xE + y\Lambda + z\Lambda^2| = |xE + yD + zD^2| = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$.

もう少し見易く書くと,

$$xE + y\Lambda + z\Lambda^2 = U(xE + yD + zD^2)U^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix}1&&\\&\omega&\\&&\omega^2\end{bmatrix}, \quad D^2\begin{bmatrix}1&&\\&\omega^2&\\&&\omega\end{bmatrix}$$

$$= U\left(\begin{bmatrix}x&&\\&x&\\&&x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y&&\\&\omega y&\\&&\omega^2 y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}z&&\\&\omega^2 z&\\&&\omega z\end{bmatrix}\right)U^{-1}$$

$$= U\begin{bmatrix}x+y+z&&\\&x+\omega y+\omega^2 z&\\&&x+\omega^2 y+\omega z\end{bmatrix}U^{-1}.$$

$$\therefore \left|xE + y\Lambda + z\Lambda^2\right| = \begin{vmatrix}x+y+z&&\\&x+\omega y+\omega^2 z&\\&&x+\omega^2 y+\omega z\end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z).$$

$\boxed{\text{練習}}$ 以上の計算を 2×2, 4×4, $n\times n$ に一般化せよ. □