

# $a_{n+1} = pa_n + q_n$ 型の漸化式の解き方の習得法

(1)  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  をみたす数列  $a_n$  について,  $a_1$  から出発して順番に  $a_5$  を求めよ.

ヒント  $\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = pa_1 + q_1 \\ a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{p倍して } q_1 \text{ をたす} \\ \text{p倍して } q_2 \text{ をたす} \end{array} \text{これをつづけて.}$

(2)  $a_5$  の式から  $a_n$  の式を予想せよ.

ヒント  $a_{n+1} = a_n + q_n$  の場合には,  $\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1, a_2 = a_1 + q_1, a_3 = a_1 + q_1 + q_2, a_4 = a_1 + q_1 + q_2 + q_3, a_5 = a_1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4. \\ a_n = a_1 + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-2} + q_{n-1} \text{ だと予想できる.} \end{array} \right\} \text{これと同様.}$

(3) 上で予想した  $a_n$  の式が  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  をみたしていることを示せ.

ヒント  $a_n = a_1 + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-2} + q_{n-1}$  は  $\left. \begin{array}{l} a_n + q_n = a_1 + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-2} + q_{n-1} + q_n = a_{n+1} \text{ なのて, } a_{n+1} = a_n + q_n \text{ をみたす.} \end{array} \right\} \text{これと同様}$

(4)  $p \neq 0, 1$  と仮定する.  $S = p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + p + 1$  を  $\frac{\square}{p-1}$  の形で表せ. ヒント  $pS - S$ .

(5)  $p \neq 0, 1$  と仮定する.  $a_{n+1} = pa_n + c$  をみたす数列  $a_n$  を  $a_1, p, c, n$  で簡潔に表せ.

ヒント  $q_n = c$  のときの (2), (3) の結果を使ってめよ.

(6)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 4$  をみたす数列  $a_n$  を求めよ.

(7)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$  を  $\frac{\square}{p-q}$  の形で表せ.

ヒント  $pS - qS$ .

(8)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$S = p^{n-2} + p^{n-3}q + p^{n-4}q^2 + \dots + pq^{n-3} + q^{n-2}$  を  $p, q, n$  で簡潔に表せ.

(9)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$  をみたす数列  $a_n$  を  $a_1, p, q, c, n$  で簡潔に表せ.

(10)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  をみたす数列  $a_n$  を求めよ.

(11)  $p \neq 1$  と仮定する.  $S = p^3 + 2p^2 + 3p + 4$  を  $p \frac{\square}{(p-1)^2} - \frac{\square}{p-1}$  の形で表せ. ヒント  $pS - S$ .

(12)  $p \neq 1$  と仮定する.

$S = p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \dots + (n-2)p + (n-1)$  を  $p \frac{\square}{(p-1)^2} - \frac{\square}{p-1}$  の形で表せ.

さらに  $S$  を  $\square p^{n-1} - \square n - \square$  の形で表せ.

(13)  $p \neq 1$  と仮定する.  $a_{n+1} = pa_n + bn$  をみたす数列  $a_n$  を  $a_1, p, b, n$  で簡潔に表せ.

(14)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 4n$  をみたす数列  $a_n$  を求めよ.

(1)  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  をみたす数列  $a_n$  について,  $a_1$  から出発して順番に  $a_5$  を求めよ.

解答例  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  より,  $p$  倍して  $q_{n-1}$  をたすこととくりかえすと,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ &\downarrow p \text{ 倍} \\ a_2 &= pa_1 + q_1 \\ &\downarrow \quad \downarrow p \text{ 倍} \\ a_3 &= p^2a_1 + pq_1 + q_2 \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow p \text{ 倍} \\ a_4 &= p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3 \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow p \text{ 倍} \\ a_5 &= p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4 \end{aligned}$$

数列の問題は  $a_1, a_2, a_3, \dots$  を書き下してめるとパターンが見えて来ることが多い。これが基本。

(2)  $a_5$  の式から  $a_n$  の式を予想せよ.

解答例

$$\begin{aligned} a_5 &= p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4 \quad n=5 \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_n &= p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1} \end{aligned}$$

4項  
n-1項

という形から,

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}$$

だと予想できる. n-1項 (特に  $n=1$  のとき項無しになる)

(3) 上で予想した  $a_n$  の式が  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  をみたしていることを示せ.

解答例  $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}$  のとき,

$$\begin{aligned} pa_n + q_n &= p \left( p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1} \right) + q_n \\ &= p^n a_1 + p^{n-1}q_1 + p^{n-2}q_2 + \dots + p^2q_{n-2} + pq_{n-1} + q_n = a_{n+1} \end{aligned}$$

(2) で予想された  $a_n$  の式はたしかに  $a_{n+1} = pa_n + q_n$  をみたしている.

(4)  $p \neq 0, 1$  と仮定する.  $S = p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + p + 1$  を  $\frac{\square}{p-1}$  の形で表せ.

解答例

$$pS = p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p^2 + p$$

$$\begin{array}{l} -) \quad S = \frac{p^{n-2} + \dots + p^2 + p + 1}{(p-1)S = p^{n-1} - 1} \quad \therefore S = \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} \end{array}$$

(5)  $p \neq 0, 1$  と仮定する.  $a_{n+1} = pa_n + c$  を満たす数列  $a_n$  を  $a_1, p, c, n$  で簡潔に表せ.

解答例

これは上で  $q_n = c$  の場合なので

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}c + p^{n-3}c + \dots + pc + c = p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + p^{n-1} + \dots + p + 1)$$

$$\stackrel{(4)}{=} p^{n-1}a_1 + c \underbrace{\frac{p^{n-1} - 1}{p-1}}_{= \frac{c}{p-1}p^{n-1} - \frac{c}{p-1}} = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}$$

ゆえに,  $a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}$

(6)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

解答例

上の(5)の公式に  $a_1 = 5$ ,  $p = 3$ ,  $c = 4$  を代入すると,

$$a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)3^{n-1} - \frac{c}{p-1} = \left(5 + \frac{4}{2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{2} = 7 \cdot 3^{n-1} - 2$$

検算

$$a_1 = 7 \cdot 3^{1-1} - 2 = 5, \quad 3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1} \quad (\text{OK})$$

別解

$$a_1 = 5 \quad \rightarrow 3 \text{ 倍して } 4 \text{ を足す. (以下くりかえす)}$$

$$a_2 = 5 \cdot 3 + 4$$

$$a_3 = 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$$

$$a_4 = 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$$

$$a_5 = 5 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$$

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} + \dots + 4 \cdot 3 + 4 \quad \text{と予想できる.}$$

この予想の下で  $a_1 = 5$ ,  $4a_n + 4 = 5 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} + \dots + 4 \cdot 3 + 4 = a_{n+1}$  となり, 予想は正しい.

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 4(3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + 3 + 1) = 5 \cdot 3^{n-1} + 4 \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 5 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} - 2 = 7 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$$\therefore a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2$$

検算

$$a_1 = 7 \cdot 3^{1-1} - 2 = 5, \quad 3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1} \quad (\text{OK})$$

検算は必ず行うべき! 人間はまちがう.

$a_1, a_2, a_3, \dots$  を計算し切らずに  
順番に書いて行けば"パターン"が  
見えて来る.

解答例 (7), (8), (9), (10)

4

(7)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$  を  $\frac{\square}{p-q}$  の形で表せ.

解答例

$$\begin{aligned} pS &= p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3 \\ -) qS &= p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4 \\ \hline (p-q)S &= p^4 - q^4 \end{aligned} \quad \therefore S = \frac{p^4 - q^4}{p - q}$$

(7), (8), (9) では実は  $p$  または  $q$  が  $0, 1$  であってもよい.

(8)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$S = p^{n-2} + p^{n-3}q + p^{n-4}q^2 + \dots + pq^{n-3} + q^{n-2}$  を  $p, q, n$  で簡潔に表せ.

解答例

$$\begin{aligned} pS &= p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} \\ -) qS &= p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} + q^{n-1} \\ \hline (p-q)S &= p^{n-1} - q^{n-1} \end{aligned} \quad \therefore S = \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q}$$

(9)  $p, q, 0, 1$  は互いに異なると仮定する.

$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$  を満たす数列  $a_n$  を  $a_1, p, q, c, n$  で簡潔に表せ.

解答例

(2), (3) で得た  $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1}$  に  $q_n = cq^{n-1}$  を代入すると,

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1}a_1 + cp^{n-2} + cp^{n-3}q + \dots + cpq^{n-3} + cq^{n-2} \\ &= p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + p^{n-3}q + \dots + pq^{n-3} + q^{n-2}) \\ &\stackrel{(8)}{=} p^{n-1}a_1 + c \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q} = \left(a_1 + \frac{c}{p - q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1} \\ &\quad = \frac{c}{p - q}p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1} \end{aligned}$$

ゆえに  $a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p - q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1}$ .

(10)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

解答例

上の公式に  $a_1 = 2, p = 3, c = 4, q = 5$  を代入すると,

$$a_n = \left(5 + \frac{4}{-2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{-2}5^{n-1} = 3^n + 2 \cdot 5^{n-1} = 10 \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5 \cdot 5^{n-1}$$

検算

$$a_1 = 3 + 2 = 5, \quad 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1}}^{10 \cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2 \cdot 5^n = a_{n+1} \quad \text{OK}$$

解答例

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 3 \cdot 5 + 4, \quad a_3 = 3^2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5, \quad a_4 = 3^3 \cdot 5 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2$$

$$a_5 = 3^4 \cdot 5 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3, \dots$$

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 5 + 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} \cdot 5 + \dots + 4 \cdot 3 \cdot 5^{n-3} + 4 \cdot 5^{n-2}$$

$$= 3^{n-1} \cdot 5 + 4(3^{n-2} + 3^{n-3} \cdot 5 + \dots + 3 \cdot 5^{n-3} + 5^{n-2}) = 3^{n-1} \cdot 5 + 4 \frac{3^{n-1} - 5^{n-1}}{3 - 5} = 3^n + 2 \cdot 5^{n-1}$$

$$a_n = 3^n + 2 \cdot 5^{n-1}$$

検算

$$a_1 = 3 + 2 = 5, \quad 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1}}^{10 \cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2 \cdot 5^n = a_{n+1} \quad \text{OK}$$

**解答例** (11), (12), (13), (14)

(11)  $p \neq 1$  と仮定する.  $S = p^3 + 2p^2 + 3p + 4$  を  $p \frac{\square}{(p-1)^2} - \frac{\square}{p-1}$  の形で表せ.

**解答例**

$$\left. \begin{aligned} pS &= p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p \\ S &= p^3 + 2p^2 + 3p + 4 \\ (p-1)S &= p^4 + p^3 + p^2 + p - 4 = p(p^3 + p^2 + p + 1) - 4 = p \frac{p^4 - 1}{p-1} - 4 \end{aligned} \right\} \therefore S = p \frac{p^4 - 1}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1}$$

(12)  $p \neq 1$  と仮定する.

$S = p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \dots + (n-2)p + (n-1)$  を  $p \frac{\square}{(p-1)^2} - \frac{\square}{p-1}$  の形で表せ.  
 さらに  $S$  を  $\square p^{n-1} - \square n - \square$  の形で表せ.

**解答例**

$$\left. \begin{aligned} pS &= p^{n-1} + 2p^{n-2} + 3p^{n-3} + \dots + (n-2)p^2 + (n-1)p \\ S &= p^{n-2} + 2p^{n-3} + \dots + (n-3)p^2 + (n-2)p + (n-1) \\ (n-1)S &= p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + p^2 + p - (n-1) \\ &= p(p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + p + 1) = p \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} \end{aligned} \right\} \therefore S = p \frac{p^{n-1} - 1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1}$$

$$S = p \frac{p^{n-1} - 1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1} = \frac{p}{(p-1)^2} p^{n-1} - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} n + \frac{1}{p-1}$$

$$= \frac{p}{(p-1)^2} p^{n-1} - \frac{1}{p-1} n - \frac{1}{(p-1)^2}$$

(13)  $p \neq 1$  と仮定する.  $a_{n+1} = pa_n + bn$  を満たす数列  $a_n$  を  $a, p, b, n$  で簡潔に表せ

**解答例**  $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}$  に  $q_n = bn$  を代入すると,

$$a_n = p^{n-1}a_1 + b(p^{n-2} + 2p^{n-3} + \dots + (n-2)p + (n-1))$$

$$\stackrel{(12)}{=} p^{n-1}a_1 + b \left( \frac{p}{(p-1)^2} p^{n-1} - \frac{1}{p-1} n - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \left( a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2} \right) p^{n-1} - \frac{b}{p-1} n - \frac{b}{(p-1)^2}$$

**検算**  $pa_n + bn = \left( a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2} \right) p^n - \frac{bp}{p-1} n - \frac{bp}{(p-1)^2} + bn$

$$= \left( a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2} \right) p^n + \underbrace{\frac{-bp}{p-1} n + \frac{-b(p-1)-b}{(p-1)^2} + \frac{bp-b}{p-1}}_{= a_{n+1}} = a_{n+1} \quad (\text{OK})$$

$$= \frac{-b}{p-1} n + \frac{-b}{p-1} + \frac{-b}{(p-1)^2} = -\frac{b}{p-1} (n+1) - \frac{b}{(p-1)^2}$$

(14)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4n$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

**解答例** 上の公式に  $a_1 = 5$ ,  $p = 3$ ,  $b = 4$  を代入すると,

次ページに別解あり

$$a_n = \left( 5 + \frac{12}{4} \right) 3^{n-1} - \frac{4}{2} n - \frac{4}{4} = 8 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1.$$

**検算**  $a_1 = 8 - 2 - 1 = 5 \quad (\text{OK})$

$$3a_n + 4n = 8 \cdot 3^n - 6n - 3 + 4n = 8 \cdot 3^n - 2n - 3$$

$$a_{n+1} = 8 \cdot 3^n - 2(n+1) - 1 = 8 \cdot 3^n - 2n - 3 \quad \text{等しい} \quad (\text{OK})$$

別解例 (6), (10), (14)

6

(6)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

別解  $b_{n+1} = 3b_n + 4$  を満たす  $b_n = d$  を求めよう,  $d = 3d + 4$  より  $d = -2$ .

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ -) \quad d = 3d + 4 \\ \hline a_{n+1} - d = 3(a_n - d) \end{array} \right\} \rightarrow \therefore a_n - d = 3^{n-1}(a_1 - d),$$

$$a_n = \underset{5}{3^{n-1}}(\underset{-2}{a_1} - \underset{-2}{d}) + d = \underset{5}{7} \cdot \underset{-2}{3^{n-1}} - \underset{-2}{2}.$$

検算  $a_1 = 7 - 2 = 5$  (OK)

$3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1}$  (OK)

(10)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

別解  $b_{n+1} = 3b_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  を満たす  $b_n = d \cdot 5^{n-1}$  を求めよう.

$d \cdot 5^n = 3d \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1}$ . 両辺を  $5^{n-1}$  でわると,  $5d = 3d + 4$ ,  $d = 2$ .  $b_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ .

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1} \\ -) \quad b_{n+1} = 3b_n + 4 \cdot 5^{n-1} \\ \hline a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n) \end{array} \right\} \rightarrow \therefore a_n - b_n = 3^{n-1}(a_1 - b_1)$$

$$a_n = \underset{5}{3^{n-1}}(\underset{5}{a_1} - \underset{2}{b_1}) + b_n = \underset{5}{3^n} + \underset{2 \cdot 5^{n-1}}{2 \cdot 5^{n-1}}.$$

検算  $a_1 = 3 + 2 = 5$  (OK)

$3a_n + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 6 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 10 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 2 \cdot 5^n = a_{n+1}$  (OK)

(14)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4n$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

別解  $b_{n+1} = 3b_n + 4n$  を満たす  $b_n = An + B$  を求めよう.

$0 = b_{n+1} - 3b_n - 4n = \underline{An} + A + B - \underline{3An} - \underline{3B} - \underline{4n} = \underbrace{(-2A - 4)}_{=0}n + \underbrace{A - 2B}_{=0}$

$-2A - 4 = 0$  より,  $A = -2$

$A = -2$  と  $A - 2B = 0$  より  $B = -1$  }  $b_n = -2n - 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = 3a_n + 4n \\ -) \quad b_{n+1} = 3b_n + 4n \\ \hline a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n) \end{array} \right\} \therefore a_n - b_n = 3^{n-1}(a_1 - b_1)$$

$$a_n = \underset{5}{3^{n-1}}(\underset{-3}{a_1} - \underset{-1}{b_1}) + b_n = \underset{8}{8 \cdot 3^{n-1}} - \underset{-2n-1}{2n-1}.$$

検算  $a_1 = 8 - 2 - 1 = 5$  (OK)

$3a_n + 4n = 8 \cdot 3^n - 6n - 3 + 4n = 8 \cdot 3^n - 2n - 3$

$a_{n+1} = 8 \cdot 3^{n+1} - 2(n+1) - 1 = 8 \cdot 3^{n+1} - 2n - 3$  ← 等しい (OK)

# 別の別解例 (6), (10), (14)

7

(6)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

**別々解**  $a_n = A3^{n-1} + B$  と  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4$  を満たすものを求めよう.

$$0 = a_{n+1} - 3a_n - 4 = A3^n + B - A3^n - 3B - 4 = -2B - 4 \text{ より } B = -2$$

$$0 = a_1 - 5 = A + B - 5 = A - 2 - 5 = A - 7 \text{ より } A = 7.$$

$$a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2,$$

**検算**  $a_1 = 7 - 2 = 5$  (OK)

$$3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1} \text{ (OK)}$$

(10)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

**別々解**  $a_n = A3^{n-1} + B5^{n-1}$  と  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$  を満たすものを求めよう.

$$0 = a_{n+1} - 3a_n - 4 \cdot 5^{n-1} = A3^n + \underbrace{B5^n}_{=5B \cdot 5^{n-1}} - A3^n - 3B5^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1} = (2B - 4)5^{n-1} \text{ より } B = 2$$

$$0 = a_1 - 5 = A + B - 5 = A + 2 - 5 = A - 3 \text{ より } A = 3.$$

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1} \quad (= 3^n + 2 \cdot 5^{n-1})$$

**検算**  $a_1 = 3 + 2 = 5$  (OK)

$$3a_n + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 6 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 10 \cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + 2 \cdot 5^n = a_{n+1} \text{ (OK)}$$

(14)  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4n$  を満たす数列  $a_n$  を求めよ.

**別々解**  $a_n = A3^{n-1} + Bn + C$  と  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4n$  を満たすものを求めよう.

$$0 = a_{n+1} - 3a_n - 4n = A3^n + \underbrace{Bn + B + C}_{=0} - A3^n - \underbrace{3Bn - 3C - 4n}_{=0} = (-2B - 4)n + \underbrace{B - 2C}_{=0}$$

$$-2B - 4 = 0 \text{ より } \underline{B = -2}, \quad 0 = B - 2C = -2 - 2C \text{ より } \underline{C = -1}.$$

$$0 = a_1 - 5 = A + B + C = A - 2 - 1 - 5 = A - 8 \text{ より } \underline{A = 8}.$$

$$a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$$

**検算**  $a_1 = 8 - 2 - 1 = 5$  (OK)

$$3a_n + 4n = 8 \cdot 3^n - 6n - 3 + 4n = 8 \cdot 3^n - 2n - 3 \leftarrow \text{等しい (OK)}$$

$$a_{n+1} = 8 \cdot 3^n - 2(n+1) - 1 = 8 \cdot 3^n - 2n - 3 \leftarrow$$

(15)  $a_1 = 6$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 3^n$  をみたす数列  $a_n$  を求めよ.

解答例

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3$$

$$a_3 = 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2$$

$$a_4 = 6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^3$$

$$a_5 = 6 \cdot 3^4 + \underbrace{4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4}_{5-1 \text{ 個 } n-1} \leftarrow \text{この4は } 5-1 \text{ } n-1$$

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} + 4(n-1)3^{n-1} = (4n+2)3^{n-1} \text{ と予想される.}$$

この予想の下で,

$$a_1 = 4+2=6,$$

$$a_{n+1} = (4n+6)3^n$$

$$3a_n + 4 \cdot 3^n = (4n+2)3^n + 4 \cdot 3^n = (4n+6)3^n \leftarrow \therefore a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 3^n.$$

これで  $a_n = (4n+2)3^{n-1}$  であることが示された.

検算

$$a_n = (4n+2)3^{n-1} \text{ のとき,}$$

$$a_1 = 4+2=6 \text{ (OK)}$$

$$a_{n+1} = (4n+6)3^n \leftarrow \text{等しい (OK)}$$

$$3a_n + 4 \cdot 3^n = (4n+2)3^n + 4 \cdot 3^n = (4n+6)3^n$$

別解

$a_n = (An+B)3^{n-1}$  と  $a_1=6$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 3^n$  をみたすものを求めよう.

$$0 = a_{n+1} - 3a_n - 4 \cdot 3^n = (An+A+B)3^n - (An+B)3^n - 4 \cdot 3^n = (A-4)3^n \therefore A=4.$$

$$0 = a_1 - 6 = A+B-6 = 4+B-6 = B-2. \therefore B=2.$$

逆をたどると,  $a_n = (4n+2)3^{n-1}$  は  $a_1=6$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 3^n$  をみたすことがわかる.

(16) ①  $a_1 = 6$ , ②  $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 4n+6$  をみたす数列  $a_n$  を求めよ.

解答例

$a_n = (An+B)3^{n-1} + C \cdot 2^{n-1} + Dn+E$  と ①, ② をみたすものが求められればよい.

(どんな方法であっても  
答えを見付けられれば勝つ.)

$$0 = a_{n+1} - 3a_n - 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} - 4n-6$$

$$= \begin{cases} (An+A+B)3^n + 2C \cdot 2^{n-1} + Dn + D+E \\ -(An+B)3^n - 3C \cdot 2^{n-1} - 3Dn - 3E \\ -4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} - 4n - 6 \end{cases} = \underbrace{(A-4)}_{=0} 3^{n-1} + \underbrace{(-C-3)}_{=0} 2^{n-1} + \underbrace{(-2D-4)}_{=0} n + \underbrace{D-2E-6}_{=0}$$

$$A=4$$

$$C=-3$$

$$D=-2$$

$$E=-4$$

$$0 = a_1 - 6 = A+B+C+D+E-6, B=6-A-C-D-E=6-4+3+2+4=11.$$

$$a_n = (4n+11)3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} - 2n-4.$$

検算

$$a_1 = 4+11-3-2-4=6 \text{ (OK)}$$

$$3a_n + 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 4n+6$$

$$= (4n+11)3^n - 9 \cdot 2^{n-1} - 6n-12 + 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 4n+6$$

$$= (4n+4+11)3^n - 3 \cdot 2^n - 2n-6$$

$$= (4(n+1)+11)3^n - 3 \cdot 2^n - 2(n+1)-4 = a_{n+1} \text{ (OK)}$$

Input

$$a(1) = 6 \quad | \quad a(n+1) = 3a(n) + 4n + 3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 3^n + 6$$

Alternate form

$$\{a(1) = 6, 6a(n) + 8n + 3 \cdot 2^n + 8 \cdot 3^n + 12 = 2a(n+1)\}$$

Recurrence equation solution

$$a(n) = \frac{1}{6} (2 \times 3^n (4n+11) - 3(4n+3 \cdot 2^n + 8))$$

$$a_n = 3^{n-1} (4n+11) - 3 \cdot 2^{n-1} - 2n-4 \text{ (OK)}$$



# 基本問題

$a_{n+1} = pa_n + q_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) をみたす  $a_n$  を求めよ、 ← 借金の増え方の方程式

$a_1, a_2, a_3, \dots$  を  $a_1, p, q_n$  を使って表してみよう

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= pa_1 + q_1 \\ a_3 &= p^2a_1 + p^2q_1 + q_2 \\ a_4 &= p^3a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + q_3 \\ a_5 &= p^4a_1 + p^4q_1 + p^3q_2 + p^2q_3 + q_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$a_n$  = (第  $n$  年目の借金の総額)

$p = 1 + (\text{金利})$

$q_n$  = (第  $n+1$  年目に新たに増やした借金)

のとき、

$$a_{n+1} = pa_n + q_n.$$

(注) 第  $n+1$  年に借金を返した場合に  $q_n < 0$  となる。

$p=1$  の場合  $p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1} = q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}$  ← (金利) = 0 の場合

①  $q_n = 1$  ( $n$  によらず  $n$  定数) のとき,  $q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} = \overbrace{1+1+\dots+1}^{n-1} = n-1$

②  $q_n = n$  のとき,  $q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} = 1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

理由  $S = 1 + 2 + \dots + (n-1)$   
 $S = (n-1) + (n-2) + \dots + 1$  順序が逆  $\xrightarrow{\text{ダテにたす}}$   $2S = \overbrace{n+n+\dots+n}^{n-1} = n(n-1)$   
 $\therefore S = \frac{n(n-1)}{2}$

③  $q_n = \frac{n(n+1)}{2}$  のとき,  $Q_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$  とおくと,

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} = \frac{\overbrace{(n+2)-(n-1)}^{=3} n(n+1)}{3!} = \frac{n(n+1)}{2} = q_n.$$

$$q_n = -Q_{n-1} + Q_n, \quad q_1 = -Q_0 + Q_1 = Q_1 \quad (Q_0 = 0 \text{ より})$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_{n-2} + q_{n-1} = \underbrace{Q_1 - Q_1 + Q_2 - \dots - Q_{n-3} + Q_{n-2} - Q_{n-2} + Q_{n-1}}_{= Q_{n-1}} = Q_{n-1}$$

④  $q_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$  のとき,  $Q_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$  とおくと,

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!} = \frac{\overbrace{(n+3)-(n-1)}^{=4} n(n+1)(n+2)}{4!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = q_n.$$

上と同様にし、 $q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} = Q_{n-1}$

⑤  $q_n = n^2 = n(n+1) - n = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n$  のとき,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = q_1 + q_2 + \dots + q_n = 2 \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} n(n+1) (2(n+2) - 3) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

⑥  $q_n = n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{n^2+3n+2} - 3n^2 - 2n = n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + 3n - 2n = 3! \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - 6 \frac{n(n+1)}{2} + n$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= q_1 + q_2 + \dots + q_n = 3! \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} - \cancel{6 \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left( \underbrace{(n+2)(n+3)}_{n^2+5n+6} - \underbrace{4(n+2)}_{=4n+8} \right) = \frac{n(n+1)}{4} (n^2+n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

$a_{n+1} = pa_n + q_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) をみたす  $a_n$  を求めよ、

← 借金の増え方の方程式

$$a_1 = a_1 \quad \downarrow p \text{ 倍して } q_1 \text{ をたす}$$

$$a_2 = pa_1 + q_1 \quad \downarrow p \text{ 倍して } q_2 \text{ をたす}$$

$$a_3 = p^2a_1 + p^2q_1 + q_2 \quad \downarrow p \text{ 倍して } q_3 \text{ をたす}$$

$$a_4 = p^3a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + q_3 \quad \downarrow p \text{ 倍して } q_4 \text{ をたす}$$

$$a_5 = p^4a_1 + p^4q_1 + p^3q_2 + p^2q_3 + q_4$$

.....

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}$$

$a_n$  = (第  $n$  年目の借金の総額)

$p = 1 + (\text{金利})$

$q_n$  = (第  $n+1$  年目に新たに増やした借金)

のとき、

$$a_{n+1} = pa_n + q_n. \leftarrow$$

(注) 第  $n+1$  年に借金を返した場合に  $q_n < 0$  となる、

$$\text{1年目 } a_1 = a_1$$

$\downarrow p \text{ 倍}$

$$\text{2年目 } a_2 = pa_1 + q_1$$

$\downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍}$

$$\text{3年目 } a_3 = p^2a_1 + p^2q_1 + q_2$$

$\downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍}$

$$\text{4年目 } a_4 = p^3a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + q_3$$

$\downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍} \quad \downarrow p \text{ 倍}$

$$\text{5年目 } a_5 = p^4a_1 + p^4q_1 + p^3q_2 + p^2q_3 + q_4$$

$$\text{n年目 } a_n = \underbrace{p^{n-1}a_1}_{\textcircled{1}} + \underbrace{p^{n-2}q_1}_{\textcircled{2}} + \underbrace{p^{n-3}q_2}_{\textcircled{3}} + \dots + \underbrace{pq_{n-2}}_{\textcircled{n-1}} + \underbrace{q_{n-1}}_{\textcircled{n}}$$

① 1年目の借金の総額  $a_1$  が  $n-1$  年分の金利で  $p^{n-1}a_1$  に増えた、

② 2年目に増えた借金の額  $q_1$  が  $n-2$  年分の金利で  $p^{n-2}q_1$  に増えた、

③ 3年目に増えた借金の額  $q_2$  が  $n-3$  年分の金利で  $p^{n-3}q_2$  に増えた、

.....

④  $k$  年目に増えた借金の額  $q_{k-1}$  が  $n-k$  年分の金利で  $p^{n-k}q_{k-1}$  に増えた、

.....

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$p = 1 + (\text{金利})$  で (金利)  $\neq 0$  の場合

$$p \neq 1 \text{ かつ } q_n = q \text{ (} n \text{ に よ る 不 変 の 定 数 の 場 合)}$$

$$a_{n+1} = pa_n + q \text{ (} p \neq 1 \text{) の 場 合}$$

$$a_1 = a_1 \quad \hookrightarrow p \text{ 倍して} q \text{ を 足す}$$

$$a_2 = pa_1 + q \quad \hookrightarrow p \text{ 倍して} q \text{ を 足す}$$

$$a_3 = p^2a_1 + pq + q$$

$$a_4 = p^3a_1 + p^2q + pq + q$$

$$a_5 = p^4a_1 + p^3q + p^2q + pq + q = p^4a_1 + q(p^3 + p^2 + p + 1) = p^4a_1 + q \frac{p^4 - 1}{p - 1}$$

-----

$$a_n = p^{n-1}a_1 + q(p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + p + 1)$$

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{n-2} = \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1}$$

$$\begin{cases} S = p^3 + p^2 + p + 1 \text{ のとき} \\ pS = p^4 + p^3 + p^2 + p \text{ のとき} \\ (p-1)S = p^4 - 1, \quad S = \frac{p^4 - 1}{p - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-2} \quad \dots \textcircled{1} \\ pS = p + p^2 + \dots + p^{n-2} + p^{n-1} \quad \dots \textcircled{2} \\ \textcircled{2} - \textcircled{1}: (p-1)S = p^{n-1} - 1, \quad S = \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} \end{cases}$$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + q \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} = \left(a_1 + \frac{q}{p - 1}\right)p^{n-1} - \frac{q}{p - 1}$$

**別解**  $p \neq 1$  とする.  $a_{n+1} = pa_n + q$  の “+q” を消せれば  $a_n = a_1 p^{n-1}$  となりカンタン.

① かつ  $d = pd + q$  をみたす  $d$ ,  $a_{n+1} - d = p(a_n - d)$  のとき,  $a_n - d = (a_1 - d)p^{n-1}$ ,  $a_n = (a_1 - d)p^{n-1} + d$ .

②  $\Leftrightarrow d = \frac{-q}{p-1}$  のとき  $a_n = \left(a_1 + \frac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{q}{p-1}$ . ← 上と同じ!

### 借金の増え方と減り方

$$\begin{cases} a_n = (\text{第} n \text{ 年目の借金の総額}) \\ p = 1 + (\text{金利}) > 1 \\ -q = (\text{第} n+1 \text{ 年目に返す借金の額}) \end{cases}$$

のとき,

$$a_{n+1} = pa_n + q. \quad \leftarrow \text{この} d \text{ は 仮に } a_1 = d \text{ のとき } a_n = d \text{ (一定) とする } d.$$

$d = pd + q$  をみたす  $d$  は

$$d = \frac{-q}{p-1} = \frac{(\text{第} n \text{ 年目に返した借金の額})}{(\text{金利})}$$

$a_n$  は次のように書ける:

$$a_n = (a_1 - d)p^{n-1} + d.$$

$p = 1 + (\text{金利}) > 1$  より, もしも  $a_1 > d$  ならば  $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n \rightarrow \infty$  となる.

$a_1 = d$  ならば  $a_n = d$  と  $a_n$  は一定になる.

$a_1 < d$  ならば  $n$  を大きくすると借金の総額  $a_n$  は小さくなって行く.

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$$p \neq 1, q \neq p, q_n = cq^{n-1} \text{ の場合} \quad a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1} \quad (p \neq 1, q \neq 1, p \neq q) \text{ の場合.}$$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = pa_1 + c$$

$$a_3 = p^2a_1 + cp + cq$$

$$a_4 = p^3a_1 + cp^2 + cpq + cq^2$$

$$a_5 = p^4a_1 + cp^3 + cp^2q + cpq^2 + cq^3 = p^4a_1 + c(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3) = p^4a_1 + c \frac{p^4 - q^4}{p - q}$$

-----

$$a_n = p^{n-1}a_1 + c \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q} = \left(a_1 + \frac{c}{p - q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1}.$$

$$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$$

$$pS = p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3$$

$$qS = p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4$$

$$(p - q)S = p^4 - q^4, \quad S = \frac{p^4 - q^4}{p - q}$$

**注意**  $q_n = c$  ( $q = 1$ ) のとき,  $a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p - 1}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - 1}.$

この公式は前ページに得た公式の  $q$  を  $c$  で置きかえたものになっている.

**注意**  $a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$  ( $1 \neq p \neq q$ ) を満たす  $a_n$  は  $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$  と書ける.

**別解**  $p \neq 1$  とする.  $a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$  の “ $+cq^{n-1}$ ” を消せば  $a_n = a_1p^{n-1}$  となりカンタン.

$$b_n = dq^{n-1} \text{ かつ } b_{n+1} = pb_n + cq^{n-1} \text{ を満たす} \Leftrightarrow dq^n = pdq^{n-1} + cq^{n-1} \Leftrightarrow dq = pd + c \Leftrightarrow d = \frac{-c}{p - q}.$$

$$d = \frac{-c}{p - q} \text{ のときの } dq^n = pdq^{n-1} + cq^{n-1} \text{ を ① から } d \text{ を } c \text{ として, } a_{n+1} - dq^n = p(a_n - dq^{n-1}).$$

$$\text{ゆえに, } a_n - dq^{n-1} = p^{n-1}(a_1 - d), \quad a_n = (a_1 - d)p^{n-1} + dq^{n-1} = \left(a_1 + \frac{c}{p - q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1}.$$

**別解**  $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$  と  $a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$  を満たすものを探してみよう.

$$0 = a_{n+1} - pa_n - cq^{n-1} = \underbrace{Ap^n + Bq^n - Ap^n - pBq^{n-1} - cq^{n-1}}_{=0} = (- (p - q)B - c)q^{n-1}, \quad B = \frac{-c}{p - q}.$$

$$a_1 = A + B \text{ より, } A = a_1 - B = a_1 + \frac{c}{p - q}.$$

$$\text{これで, } a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p - q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p - q}q^{n-1} \text{ は (*) を満たすことがわかった.}$$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \dots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$$p \neq 1, q_n = cn \text{ の場合} \quad a_{n+1} = pa_n + cn \quad (p \neq 1) \text{ の場合}$$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = pa_1 + c$$

$$a_3 = p^2a_1 + pc + 2c$$

$$a_4 = p^3a_1 + p^2c + 2pc + 3c$$

$$a_5 = p^4a_1 + p^3c + 2p^2c + 3pc + 4c = p^4a_1 + c \underbrace{(p^3 + 2p^2 + 3p + 4)}_{=S \text{ とおく}} = p^4a_1 + c \left( p \frac{p^4-1}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1} \right)$$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \dots + (n-2)p + (n-1))$$

$$= p^{n-1}a_1 + c \left( p \frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1} \right)$$

$$= \left( a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2} \right) p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2}$$

$$c \left( -\frac{p}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1} \right) = c \frac{-p+p-1}{(p-1)^2} = \frac{-c}{(p-1)^2}$$

**別解**  $a_n = Ap^{n-1} + Bn + C$  と  $a_{n+1} = pa_n + cn$  をみたすものを代入してみる。

$$0 = a_{n+1} - pa_n - cn = \underbrace{Ap^n + Bn + B + C}_{=0 \dots \textcircled{1}} - \underbrace{Ap^n - pBn - pC}_{=0 \dots \textcircled{2}} - cn = ((1-p)B - c)n + B + (1-p)C,$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } B = \frac{c}{1-p} = -\frac{c}{p-1}, \quad \textcircled{2} \text{ より, } C = \frac{B}{p-1} = -\frac{c}{(p-1)^2}.$$

$$a_1 = A + B + C \text{ より, } A = a_1 - (B + C), \quad \underline{-(B + C)} = \frac{c}{p-1} + \frac{c}{(p-1)^2} = \frac{cp - c + c}{(p-1)^2} = \frac{cp}{(p-1)^2}.$$

$$\text{ゆえに, } a_n = \left( a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2} \right) p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2} \quad \text{は } a_{n+1} = pa_n + cn \text{ をみたす。} \quad \square$$

$$a(n+1) = pa(n) + cn, a(1)=b$$

Input

$$a(n+1) = pa(n) + cn \quad | \quad a(1) = b$$

Alternate form

$$\{pa(n) + cn = a(n+1), b = a(1)\}$$

Recurrence equation solution

$$a(n) = b p^{n-1} + \frac{c(p^n - np + n - 1)}{(p-1)^2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 p^{n-1} + \frac{c(-(p-1)n + p^n - 1)}{(p-1)^2} \\ &= \left( a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2} \right) p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

## 理論的根拠

$Ta_n = a_{n+1}$  とおく,  $T^2a_n = T(Ta_n) = Ta_{n+1} = a_{n+2}$ ,  $T^3a_n = T(T^2a_n) = Ta_{n+2} = a_{n+3}$ , ...

一般に  $T^ka_n = a_{n+k}$ .

$(T-d)a_n = Ta_n - da_n = a_{n+1} - da_n$  のようにも計算できる.

$(T-d)a_n = 0$  と  $a_{n+1} - da_n = 0$  と  $a_{n+1} = da_n$  は同値.

### $(T-d)a_n = 0$ の解き方

$a_n = d^{n-1}$  のとき,  $(T-d)a_n = a_{n+1} - da_n = d^n - dd^{n-1} = 0$ .

$a_n = d^{n-1}$  は  $(T-d)a_n = 0$  を満たす. (注意:  $a_n = Ad^{n-1}$  も  $(T-d)a_n = 0$  を満たす.)

### $(T-d)a_n = q$ の解き方1

$a_n = b$  について,  $(T-d)a_n = a_{n+1} - da_n = b - db = (1-d)b$  なのを,

$b = \frac{q}{1-d}$  のとき,  $(T-d)b = q$ .

$(T-d)a_n = q$  から  $(T-d)b = q$  を用いて,  $(T-d)(a_n - b) = 0$ ,  $\therefore a_n - b = Ad^{n-1}$ ,  $a_n = Ad^{n-1} + b$ .

### $(T-d)a_n = q$ の解き方2

もしも  $a_n$  が  $(T-d)a_n = q$  を満たしているならば, 両辺に  $T-1$  を作用させると,

$$(T-1)(T-d)a_n = (T-1)q = q - q = 0.$$

$a_n = Ad^n$  は  $(T-d)a_n = 0$  を満たすのと同様に  $(T-1)(T-d)a_n = 0$  も満たす.

$a_n = b$  は  $(T-1)a_n = 0$  を満たすのと同様に  $(T-1)(T-d)a_n = (T-d)(T-1)a_n = 0$  も満たす.

ゆえに,  $a_n = Ad^n + b$  は  $(T-1)(T-d)a_n = 0$  を満たす.

実は  $(T-1)(T-d)a_n = 0$  を満たす  $a_n$  は  $a_n = Ad^n + b$  と書けることを別に示せる.

$a_n = Ad^n + b$  として  $(T-d)a_n = q$  を満たすものを探せばよい.

$$a_n = Ad^n + b \text{ のとき, } (T-d)a_n = A \underbrace{(T-d)d^n}_{=0} + (T-d)b = b - db = (1-d)b.$$

ゆえに  $b = \frac{q}{1-d}$  とおくと,  $(T-d)a_n = q$ .

### $(T-d)a_n = b\beta^n$ ( $d \neq \beta$ ) の解き方

$a_n$  が  $(T-d)a_n = b\beta^n$  を満たしているならば,  $(T-\beta)\beta^n = 0$  なのを

$(T-\beta)(T-d)a_n = b(T-\beta)\beta^n = 0$  となり,  $a_n$  は  $(T-d)(T-\beta)a_n = 0$  を満たす.

$a_n = d^n$  と  $a_n = \beta^n$  は  $(T-d)(T-\beta)a_n = 0$  を満たすのを,

$a_n = Ad^n + B\beta^n$  も  $(T-d)(T-\beta)a_n = 0$  を満たす.

実は  $(T-d)(T-\beta)a_n = 0$  を満たす  $a_n$  は  $a_n = Ad^n + B\beta^n$  と書ける.

例)  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$  ( $D = p^2 - 4q \neq 0$ ) を満たす  $a_n$  の求め方.

(\*) は  $(T^2 + pT + q)a_n = 0$  と書き直される.  $T^2 + pT + q = (T-d)(T-\beta)$ ,  $d \neq \beta$  と書ける.

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$  を満たす  $a_n$  は  $a_n = Ad^n + B\beta^n$  と書ける.

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$  となる  $(T^2 - 5T + 6)a_n = 0$  を満たす  $a_n$  は,  $T^2 - 5T + 6 = (T-2)(T-3)$  なのを

$a_n = A2^n + B3^n$  と書ける.