$a_{n+1}=pa_n+q_n$ 型の漸化式の解き方の習得法

(1) $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたす数列 a_n について，a_1 から出発して順番に a_5 を求めよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$

$a_1=a_1$ 　　p倍して q_1 をたす

$a_2=pa_1+q_1$ 　　p倍して q_2 をたす

$a_3=p^2a_1+pq_1+q_2$

これをつづけよ．

(2) a_5 の式から a_n の式を予想せよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $a_{n+1}=a_n+q_n$ の場合には，

$a_1=a_1$, $a_2=a_1+q_1$, $a_3=a_1+q_1+q_2$, $a_4=a_1+q_1+q_2+q_3$, $a_5=a_1+q_1+q_2+q_3+q_4$.

$a_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}$ だと予想できる．

これと同様．

(3) 上で予想した a_n の式が $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしていることを示せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $a_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}$ は

$a_n+q_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}+q_n=a_{n+1}$ なので，$a_{n+1}=a_n+q_n$ をみたす．

これと同様

(4) $p\neq 0,1$ と仮定する．$S=p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1$ を $\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ．$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-S$．

(5) $p\neq 0,1$ と仮定する．$a_{n+1}=pa_n+c$ をみたす数列 a_n を a_1, p, c, n で簡潔に表せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $q_n=c$ のときの (2), (3) の結果を使ってみよ．

(6) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ．

(7) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．

$S=p^3+p^2q+pq^2+q^3$ を $\dfrac{\square}{p-q}$ の形で表せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-qS$．

(8) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．

$S=p^{n-2}+p^{n-3}q+p^{n-4}q^2+\cdots+pq^{n-3}+q^{n-2}$ を p, q, n で簡潔に表せ．

(9) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．

$a_{n+1}=pa_n+cq^{n-1}$ をみたす数列 a_n を a_1, p, q, c, n で簡潔に表せ．

(10) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot 5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ．

(11) $p\neq 1$ と仮定する．$S=p^3+2p^2+3p+4$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2}-\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ．$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-S$．

(12) $p\neq 1$ と仮定する．

$S=p^{n-2}+2p^{n-3}+3p^{n-4}+\cdots+(n-2)p+(n-1)$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2}-\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ．

さらに S を $\square\, p^{n-1}-\square\, n-\square$ の形で表せ．

(13) $p\neq 1$ と仮定する $a_{n+1}=pa_n+bn$ をみたす数列 a_n を a_1, p, b, n で簡潔に表せ．

(14) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ (1), (2), (3)

(1) $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたす数列 a_n について，a_1 から出発して順番に a_5 を求めよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $a_{n+1}=pa_n+q_n$ より，p倍して q_{n-1} をたすことをくりかえすと，

$a_1=a_1$

↓p倍

$a_2=pa_1+q_1$

↓　↓p倍

$a_3=p^2a_1+pq_1+q_2$

↓　↓　↓p倍

$a_4=p^3a_1+p^2q_1+pq_2+q_3$

↓　↓　↓　↓p倍

$a_5=p^4a_1+p^3q_1+p^2q_2+pq_3+q_4$

数列の問題は $a_1, a_2, a_3, \dots$ を書き下してみるとパターンが見えて来ることが多い.
これが基本.

(2) a_5 の式から a_n の式を予想せよ.

$\boxed{\text{解答例}}$

$$a_5=p^4a_1+\overbrace{p^3q_1+p^2q_2+pq_3+q_4}^{4\text{項}} \qquad n=5$$

$$a_n=p^{n-1}a_1+\underbrace{p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}}_{n-1\text{項}}$$

という形から，

$$a_n=p^{n-1}a_1+\underbrace{p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}}_{n-1\text{項}}$$

だと予想できる.　(特に $n=1$ のとき項無しになる)

(3) 上で予想した a_n の式が $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしていることを示せ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $a_n=p^{n-1}a_1+p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}$ のとき，

↓　↓　↓　↓　↓p倍

$pa_n+q_n=p^na_1+p^{n-1}q_1+p^{n-2}q_2+\cdots+p^2q_{n-2}+pq_{n-1}+q_n=a_{n+1}$

(2) で予想された a_n の式はたしかに $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしている.

$\boxed{\text{解答例}}$ (4), (5), (6)

(4) $p \neq 0, 1$と仮定する。$S = p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p + 1$ を $\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ。

$\boxed{\text{解答例}}$

$$
\begin{array}{rrl}
 & pS = & p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p^2 + p \\
-) & S = & \qquad\quad p^{n-2} + \cdots + p^2 + p + 1 \\ \hline
 & (p-1)S = & p^{n-1} - 1
\end{array}
$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}$.

(5) $p \neq 0, 1$と仮定する。$a_{n+1} = pa_n + c$ をみたす数列 a_n を a_1, p, c, n で簡潔に表せ。

$\boxed{\text{解答例}}$ これは上で $q_n = c$ の場合なので

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}c + p^{n-3}c + \cdots + pc + c = p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + p^{n-1} + \cdots + p + 1)$$

$$\overset{(4)}{=} p^{n-1}a_1 + \underbrace{c\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}_{= \frac{c}{p-1}p^{n-1} - \frac{c}{p-1}} = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}$$

ゆえに、$a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}$.

(6) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{解答例}}$ 上の(5)の公式に $a_1 = 2$, $p = 3$, $c = 4$ を代入すると、

$$a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)3^{n-1} - \frac{c}{p-1} = \left(5 + \frac{4}{2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{2} = 7\cdot 3^{n-1} - 2.$$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1 = 7\cdot\underbrace{3^{1-1}}_{=1} - 2 = 5$, $3a_n + 4 = 7\cdot 3^n - 6 + 4 = 7\cdot 3^n - 2 = a_{n+1}$ OK

$\boxed{\text{別解}}$

$a_1 = 5$ 　3倍して4をたす。(以下くりかえす)

$a_2 = 5\cdot 3 + 4$

$a_3 = 5\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 4$

$a_4 = 5\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 4$

$a_5 = 5\cdot 3^4 + 4\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 4$

$a_n = 5\cdot 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-2} + 4\cdot 3^{n-3} + \cdots + 4\cdot 3 + 4$ と予想できる。

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ を計算し切らずに順番に書いて行けばパターンが見えて来る。

この予想の下で $a_1 = 5$, $3a_n + 4 = 5\cdot 3^n + 4\cdot 3^{n-1} + \cdots + 4\cdot 3 + 4 = a_{n+1}$ となり、予想は正しい。

$$a_n = 5\cdot 3^{n-1} + 4(3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3 + 1) = 5\cdot 3^{n-1} + 4\frac{3^{n-1}-1}{3-1} = 5\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} - 2 = 7\cdot 3^{n-1} - 2.$$

$\therefore\ a_n = 7\cdot 3^{n-1} - 2$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1 = 7\cdot\underbrace{3^{1-1}}_{=1} - 2 = 5$, $3a_n + 4 = 7\cdot 3^n - 6 + 4 = 7\cdot 3^n - 2 = a_{n+1}$ OK

検算は必ず行うべき！ 人間はまちがう。

$\boxed{\text{解答例}}$ (7), (8), (9), (10)

(7) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$ を $\dfrac{\boxed{}}{p-q}$ の形で表せ。

(7), (8), (9) では実は p または q が $0, 1$ であってもよい。

$\boxed{\text{解答例}}$

$$\begin{array}{rrl} & pS = & p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3 \\ -) & qS = & \phantom{p^4 +{}} p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4 \\ \hline & (p-q)S = & p^4 - q^4 \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^4 - q^4}{p-q}$

(8) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$S = p^{n-2} + p^{n-3}q + p^{n-4}q^2 + \cdots + pq^{n-3} + q^{n-2}$ を p, q, n で簡潔に表せ。

$\boxed{\text{解答例}}$

$$\begin{array}{rrl} & pS = & p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \cdots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} \\ -) & qS = & \phantom{p^{n-1} +{}} p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \cdots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} + q^{n-1} \\ \hline & (p-q)S = & p^{n-1} - q^{n-1} \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}$.

(9) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ をみたす数列 a_n を a_1, p, q, c, n で簡潔に表せ。

$\boxed{\text{解答例}}$ (2), (3) で得た $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}$ に $q_n = cq^{n-1}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1}a_1 + cp^{n-2} + cp^{n-3}q + \cdots + cpq^{n-3} + cq^{n-2} \\ &= p^{n-1}a_1 + c\left(p^{n-2} + p^{n-3}q + \cdots + pq^{n-3} + q^{n-2}\right) \\ &\overset{(8)}{=} p^{n-1}a_1 + \underbrace{c\,\frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}}_{= \frac{c}{p-q}p^{n-1} - \frac{c}{p-q}q^{n-1}} = \left(a_1 + \frac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-q}q^{n-1}. \end{aligned}$$

ゆえに、$a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$.

(10) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 4\cdot 5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{解答例}}$ 上の公式に $a_1 = 2$, $p = 3$, $c = 4$, $q = 5$ を代入すると、

$$a_n = \left(5 + \frac{4}{-2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{-2}5^{n-1} = 3^n + 2\cdot 5^{n-1}.$$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1 = 3 + 2 = 5$, $3a_n + 4\cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6\cdot 5^{n-1} + 4\cdot 5^{n-1}}^{= 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5\cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2\cdot 5^n = a_{n+1}$ $\boxed{\text{OK}}$

$\boxed{\text{解答例}}$ $a_1 = 5$, $a_2 = 3\cdot 5 + 4$, $a_3 = 3^2\cdot 5 + 4\cdot 3 + 4\cdot 5$, $a_4 = 3^3\cdot 5 + 4\cdot 3^2 + 4\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot 5^2$

$a_5 = 3^4\cdot 5 + 4\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3$, ...

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1}\cdot 5 + 4\cdot 3^{n-2} + 4\cdot 3^{n-3}\cdot 5 + \cdots + 4\cdot 3\cdot 5^{n-3} + 4\cdot 5^{n-2} \\ &= 3^{n-1}\cdot 5 + 4\left(3^{n-2} + 3^{n-3}\cdot 5 + \cdots + 3\cdot 5^{n-3} + 5^{n-2}\right) = 3^{n-1}\cdot 5 + 4\,\frac{3^{n-1} - 5^{n-1}}{3-5} = 3^n + 2\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$a_n = 3^n + 2\cdot 5^{n-1}$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1 = 3 + 2 = 5$, $3a_n + 4\cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6\cdot 5^{n-1} + 4\cdot 5^{n-1}}^{= 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5\cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2\cdot 5^n = a_{n+1}$ $\boxed{\text{OK}}$

解答例 (11), (12), (13), (14)

(11) $p\neq 1$と仮定する．$S=p^3+2p^2+3p+4$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2}-\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ．

解答例

$$pS = p^4+2p^3+3p^2+4p$$
$$S = \quad p^3+2p^2+3p+4$$
$$(p-1)S = p^4+p^3+p^2+p-4 = p(p^3+p^2+p+1)-4 = p\frac{p^4-1}{p-1}-4$$

$$\therefore S = p\frac{p^4-1}{(p-1)^2}-\frac{4}{p-1}$$

(12) $p\neq 1$と仮定する．

$S=p^{n-2}+2p^{n-3}+3p^{n-4}+\cdots+(n-2)p+(n-1)$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2}-\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ．

さらに S を $\square\, p^{n-1}-\square\, n-\square$ の形で表せ．

解答例

$$pS = p^{n-1}+2p^{n-2}+3p^{n-3}+\cdots+(n-2)p^2+(n-1)p$$
$$S = \quad p^{n-2}+2p^{n-3}+\cdots+(n-3)p^2+(n-2)p+(n-1)$$
$$(p-1)S = \underbrace{p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p^2+p}-(n-1)$$
$$= p(p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1) = p\frac{p^{n-1}-1}{p-1}$$

$$\therefore S = p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2}-\frac{n-1}{p-1}.$$

$$S = p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2}-\frac{n-1}{p-1} = \frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1}\boxed{-\frac{p}{(p-1)^2}}-\frac{1}{p-1}n\boxed{+\frac{1}{p-1}}$$
$$= \frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1}-\frac{1}{p-1}n-\frac{1}{(p-1)^2}$$

$$-\frac{p}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}$$
$$= \frac{-p+p-1}{(p-1)^2} = \frac{-1}{(p-1)^2}$$

(13) $p\neq 1$と仮定する $a_{n+1}=pa_n+bn$ をみたす数列 a_n を a_1, p, b, n で簡潔に表せ

解答例 $a_n = p^{n-1}a_1+p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}$ に $q_n=bn$ を代入すると，

$$a_n = p^{n-1}a_1+b\left(p^{n-2}+2p^{n-3}+\cdots+(n-2)p+(n-1)\right)$$
$$\overset{(12)}{=} p^{n-1}a_1+b\left(\frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1}-\frac{1}{p-1}n-\frac{1}{(p-1)^2}\right) = \left(a_1+\frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1}-\frac{b}{p-1}n-\frac{b}{(p-1)^2}.$$

検算

$$pa_n+bn = \left(a_1+\frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^n-\frac{bp}{p-1}n-\frac{bp}{(p-1)^2}+bn$$
$$= \left(a_1+\frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^n+\underbrace{\frac{-bp}{p-1}n+\frac{-b(p-1)-b}{(p-1)^2}+\frac{bp-b}{p-1}} = a_{n+1} \quad \text{OK}$$
$$= \frac{-b}{p-1}n+\frac{-b}{p-1}+\frac{-b}{(p-1)^2} = -\frac{b}{p-1}(n+1)-\frac{b}{(p-1)^2}$$

(14) $a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ．

解答例 上の公式に $a_1=5,\ p=3,\ b=4$ を代入すると，

次ページに別解あり

$$a_n = \left(5+\frac{12}{4}\right)3^{n-1}-\frac{4}{2}n-\frac{4}{4} = 8\cdot 3^{n-1}-2n-1.$$

検算 $a_1 = 8-2-1=5$ OK

$$3a_n+4n = 8\cdot 3^n-6n-3+4n = 8\cdot 3^n-2n-3$$
$$a_{n+1} = 8\cdot 3^{n-1}-2(n+1)-1 = 8\cdot 3^{n-1}-2n-3$$

等しい．OK

$\boxed{\text{別解例}}$ (6), (10), (14)

(6) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ.

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4$ をみたす $b_n=\alpha$ を求めよう. $\alpha=3\alpha+4$ より $\alpha=-2$.

$$\left.\begin{array}{rl} a_{n+1} &= 3a_n+4 \\ -)\quad \alpha &= 3\alpha+4 \\ \hline a_{n+1}-\alpha &= 3(a_n-\alpha) \end{array}\right\} \nearrow \therefore\ a_n-\alpha=3^{n-1}(a_1-\alpha),$$

$$a_n=3^{n-1}(\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{a_1}-\underset{\underset{-2}{\shortparallel}}{\alpha})+\underset{\underset{-2}{\shortparallel}}{\alpha}=\underline{7\cdot3^{n-1}-2}.$$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=7-2=5$ OK

$3a_n+4=7\cdot3^n-6+4=7\cdot3^n-2=a_{n+1}$ OK

(10) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ.

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす $b_n=\alpha\cdot5^{n-1}$ を求めよう.

$\alpha\cdot5^n=3\alpha\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}$. 両辺を 5^{n-1} でわると, $5\alpha=3\alpha+4$, $\alpha=2$. $b_n=2\cdot5^{n-1}$.

$$\left.\begin{array}{rl} a_{n+1} &= 3a_n+4\cdot5^{n-1} \\ -)\quad b_{n+1} &= 3b_n+4\cdot5^{n-1} \\ \hline a_{n+1}-b_{n+1} &= 3(a_n-b_n) \end{array}\right\} \nearrow \therefore\ a_n-b_n=3^{n-1}(a_1-b_1)$$

$$a_n=3^{n-1}\underbrace{(\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{a_1}-\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{b_1})}_{=3}+\underset{\underset{2\cdot5^{n-1}}{\shortparallel}}{b_n}=\underline{3^n+2\cdot5^{n-1}}.$$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=3+2=5$ OK

$3a_n+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+6\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+10\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+2\cdot5^n=a_{n+1}$ OK

(14) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ.

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4n$ をみたす $b_n=An+B$ を求めよう.

$0=b_{n+1}-3b_n-4n=\underline{An}+A+B\,\underline{-3An}-3B\,\underline{-4n}=\underbrace{(-2A-4)}_{=0}n+\underbrace{A-2B}_{=0}$

$$\left.\begin{array}{l} -2A-4=0 \text{ より}, \ A=-2 \\ A=-2 \text{ と } A-2B=0 \text{ より } B=-1 \end{array}\right\} b_n=-2n-1.$$

$$\begin{array}{rl} a_{n+1} &= 3a_n+4n \\ -)\quad b_{n+1} &= 3b_n+4n \\ \hline a_{n+1}-b_{n+1} &= 3(a_n-b_n) \end{array} \qquad \therefore\ a_n-b_n=3^{n-1}(a_1-b_1)$$

$$a_n=3^{n-1}\underbrace{(\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{a_1}-\underset{\underset{(-3)}{\shortparallel}}{b_1})}_{=8}+\underset{\underset{-2n-1}{\shortparallel}}{b_n}=8\cdot3^{n-1}-2n-1.$$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=8-2-1=5$ OK

$3a_n+4n=8\cdot3^n-6n-3+4n=8\cdot3^n-2n-3$

$a_{n+1}=8\cdot3^{n-1}-2(n+1)-1=8\cdot3^{n-1}-2n-3$ 等しい OK

$\boxed{\text{別の別解例}}$ (6), (10), (14)

(6) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別々解}}$ $a_n=A3^{n-1}+B$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4=A3^n+B-A3^n-3B-4=-2B-4$ より $B=-2$

$0=a_1-5=A+B-5=A-2-5=A-7$ より $A=7$、

$a_n=7\cdot3^{n-1}-2$。

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=7-2=5$ OK

$3a_n+4=7\cdot3^n-6+4=7\cdot3^n-2=a_{n+1}$ OK

(10) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別々解}}$ $a_n=A3^{n-1}+B5^{n-1}$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot5^{n-1}=A3^n+\underbrace{B5^n}_{=5B\cdot5^{n-1}}-A3^n-3B5^{n-1}-4\cdot5^{n-1}=(2B-4)5^{n-1}$ より $B=2$

$0=a_1-5=A+B-5=A+2-5=A-3$ より $A=3$。

$a_n=3\cdot3^{n-1}+2\cdot5^{n-1}$ $(=3^n+2\cdot5^{n-1})$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=3+2=5$ OK

$3a_n+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+6\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+10\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+2\cdot5^n=a_{n+1}$ OK

(14) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別々解}}$ $a_n=A3^{n-1}+Bn+C$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4n=A3^n+\underline{Bn}+\underline{B+C}-A3^n\underline{-3Bn}\underline{-3C}\underline{-4n}=\underbrace{(-2B-4)}_{=0}n+\underbrace{B-2C}_{=0}$

$-2B-4=0$ より $B=-2$, $0=B-2C=-2-2C$ より $C=-1$,

$0=a_1-5=A+B+C=A-2-1-5=A-8$ より $A=8$,

$a_n=8\cdot3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=8-2-1=5$ OK

$3a_n+4n=8\cdot3^n-6n-3+4n=8\cdot3^n-2n-3$

$a_{n+1}=8\cdot3^{n-1}-2(n+1)-1=8\cdot3^{n-1}-2n-3$ 等しい OK

別の型の問題

(15) $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot3^n$ をみたす数列 a_n を求めよ。

解答例

$a_1=6$

$a_2=6\cdot3+4\cdot3$

$a_3=6\cdot3^2+4\cdot3^2+4\cdot3^2$

$a_4=6\cdot3^3+4\cdot3^3+4\cdot3^3+4\cdot3^3$

$a_5=6\cdot3^4+\underbrace{4\cdot3^4+4\cdot3^4+4\cdot3^4+4\cdot3^4}_{5-1\text{個},\ n-1}$ ← この4は5−1 $n-1$

↑ $n=5$

$a_n=6\cdot3^{n-1}+4(n-1)3^{n-1}=(4n+2)3^{n-1}$ と予想される。

この予想の下で、

$a_1=4+2=6$、

$a_{n+1}=(4n+6)3^n$

$3a_n+4\cdot3^n=(4n+2)3^n+4\cdot3^n=(6n+4)3^n$ ∴ $a_{n+1}=3a_n+4\cdot3^n$.

これで $a_n=(4n+2)3^{n-1}$ であることが示された。

検算 $a_n=(4n+2)3^{n-1}$ のとき、

$a_1=4+2=6$ OK

$a_{n+1}=(4n+6)3^n$ 等しい OK

$3a_n+4\cdot3^n=(4n+2)3^n+4\cdot3^n=(4n+6)3^n$

別解 $a_n=(An+B)3^{n-1}$ で $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot3^n$ をみたすものを求めてみよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot3^n=(An+A+B)3^n-(An+B)3^n-4\cdot3^n=(A-4)3^n$. ∴ $A=4$.

$0=a_1-6=A+B-6=4+B-6=B-2$. ∴ $B=2$.

逆をたどると、$a_n=(4n+2)3^{n-1}$ は $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot3^n$ をみたすことがわかる。

(16) $a_1=6$ ①, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot3^n+3\cdot2^{n-1}+4n+6$ ② をみたす数列 a_n を求めよ。

どんな方法であっても答えを見付ければ勝ち。

解答例 $a_n=(An+B)3^{n-1}+C2^{n-1}+Dn+E$ で ①,② をみたすものが求まればよい。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot3^n-3\cdot2^{n-1}-4n-6$

$$=\left\{\begin{array}{l}(An+A+B)3^n+2C2^{n-1}+Dn+D+E\\-(An+B)3^n-3C2^{n-1}-3Dn-3E\\-4\cdot3^n-3\cdot2^{n-1}-4n-6\end{array}\right\}=\underbrace{(A-4)}_{=0}3^{n-1}+\underbrace{(-C-3)}_{=0}2^{n-1}+\underbrace{(-2D-4)}_{=0}n+\underbrace{D-2E-6}_{=0}$$

$D=-2$

$A=4$, $C=-3$, $D=-2$, $E=-4$

$0=a_1-6=A+B+C+D+E-6$, $B=6-A-C-D-E=6-4+3+2+4=11$.

$a_n=(4n+11)3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}-2n-4$.

検算 $a_1=4+11-3-2-4=6$ OK

$3a_n+4\cdot3^n+3\cdot2^{n-1}+4n+6$

$=(4n+11)3^n-9\cdot2^{n-1}-6n-12+4\cdot3^n+3\cdot2^{n-1}+4n+6$

$=(4n+4+11)3^n-3\cdot2^n-2n-6$

$=(4(n+1)+11)3^n-3\cdot2^n-2(n+1)-4=a_{n+1}$ OK

Input

$a(1)=6$ | $a(n+1)=3\,a(n)+4n+3\times2^{n-1}+4\times3^n+6$

Alternate form

$\{a(1)=6,\ 6\,a(n)+8n+3\times2^n+8\times3^n+12=2\,a(n+1)\}$

Recurrence equation solution

$a(n)=\frac{1}{6}(2\times3^n(4n+11)-3(4n+3\times2^n+8))$

$a_n=3^{n-1}(4n+11)-3\cdot2^{n-1}-2n-4$ OK

$\boxed{\text{基本問題}}$ $a_{n+1} = pa_n + q_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ をみたす a_n を求めよ。 ← 借金の増え方の方程式

$\left\{\begin{array}{l} a_n = (\text{第}n\text{年目の借金の総額}) \\ p = 1 + (\text{金利}) \\ q_n = (\text{第}n+1\text{年目に新たに増やした借金}) \\ \text{のとき、} \\ a_{n+1} = pa_n + q_n. \end{array}\right.$

（注 第$n+1$年に借金を返した場合に $q_n < 0$ となる。）

$\boxed{a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ を } a_1, p, q_n \text{ たちで表してみよう}}$

$a_1 = a_1$ ↷ p倍してq_1をたす

$a_2 = pa_1 + q_1$ ↷ p倍してq_2をたす

$a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2$ ↷ p倍してq_3をたす

$a_4 = p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3$ ↷ p倍してq_4をたす

$a_5 = p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4$

$\cdots\cdots$

$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p=1\text{の場合}}$ $p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1} = q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}$ ← (金利) $=0$ の場合

① $q_n = 1$ (nによらない定数) のとき、 $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1} = n-1$

② $q_n = n$ のとき、 $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\boxed{\text{理由}}$ $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$, $S = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$ 順序が逆 $\xrightarrow{\text{タテにたす}}$ $2S = \overbrace{n + n + \cdots + n}^{n-1} = n(n-1)$.

$\therefore S = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

③ $q_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ のとき、 $Q_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ とおくと、

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} = \frac{(\overbrace{(n+2)-(n-1)}^{=3})n(n+1)}{3!} = \frac{n(n+1)}{2} = q_n.$$

$q_n = -Q_{n-1} + Q_n$, $q_1 = -Q_0 + Q_1 = Q_1$ $(Q_0 = 0)$ より

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-2} + q_{n-1} = \underbrace{Q_1} \underbrace{-Q_1 + Q_2} - \cdots \underbrace{-Q_{n-3} + Q_{n-2}} \underbrace{-Q_{n-2} + Q_{n-1}} = Q_{n-1}$$

④ $q_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ のとき、 $Q_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$ とおくと、

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!} \underset{n+3-(n-1)=4}{=} \frac{4n(n+1)(n+2)}{4!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = q_n.$$

上と同様にして、 $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} = Q_{n-1}$

⑤ $q_n = n^2 = n(n+1) - n = 2\dfrac{n(n+1)}{2} - n$ のとき、

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 2\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)\left(2(n+2) - 3\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

⑥ $q_n = n^3 = \underbrace{n(n+1)(n+2)}_{n^2+3n+2} - 3n^2 - 2n = n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + \underbrace{3n - 2n} = 3!\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!} - 6\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 3!\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} - \cancel{6}\frac{n(n+1)(n+2)}{\cancel{3!}} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\Big(\underbrace{(n+2)(n+3)}_{n^2+\cancel{5n}+\cancel{6}} \underbrace{- 4(n+2)}_{\cancel{-4n}\cancel{-8}} \cancel{+2}\Big) = \frac{n(n+1)}{4}\underbrace{(n^2+n)}_{=n(n+1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$a_{n+1} = pa_n + q_n$ $(n=1,2,3,\dots)$ をみたす a_n を求めよ。　← 借金の増え方の方程式

$a_1 = a_1$　　p倍してq_1をたす

$a_2 = pa_1 + q_1$　　p倍してq_2をたす

$a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2$　　p倍してq_3をたす

$a_4 = p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3$　　p倍してq_4をたす

$a_5 = p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4$

・・・・・・

$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}$

a_n = (第n年目の借金の総額)
p = 1+(金利)
q_n = (第$n+1$年目に新たに増やした借金)
のとき、
$a_{n+1} = pa_n + q_n$.
(注 第$n+1$年に借金を返した場合に $q_n<0$ となる。)

1年目　$a_1 = a_1$

$\downarrow p$倍

2年目　$a_2 = pa_1 + q_1$

$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍

3年目　$a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2$

$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍

4年目　$a_4 = p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3$

$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍　$\downarrow p$倍

5年目　$a_5 = p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4$

n年目　$a_n = \underbrace{p^{n-1}a_1}_{①} + \underbrace{p^{n-2}q_1}_{②} + \underbrace{p^{n-3}q_2}_{③} + \cdots + \underbrace{pq_{n-2}}_{(n-1)} + \underbrace{q_{n-1}}_{(n)}$

① 1年目の借金の総額 a_1 が $n-1$ 年分の金利で $p^{n-1}a_1$ に増えた。

② 2年目に増えた借金の額 q_1 が $n-2$ 年分の金利で $p^{n-2}q_1$ に増えた。

③ 3年目に増えた借金の額 q_2 が $n-3$ 年分の金利で $p^{n-3}q_2$ に増えた。

・・・・・・

(k) k年目に増えた借金の額 q_{k-1} が $n-k$ 年分の金利で $p^{n-k}q_{k-1}$ に増えた。

・・・・・・

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p \neq 1 \text{ かつ } q_n = q \ (n\text{によらない定数の場合})}$　$a_{n+1} = pa_n + q \ (p \neq 1)$ の場合

$p = 1 + (\text{金利})$ で $(\text{金利}) \neq 0$ の場合

$a_1 = a_1$　p倍してqをたす

$a_2 = pa_1 + q$　p倍してqをたす

$a_3 = p^2a_1 + pq + q$

$a_4 = p^3a_1 + p^2q + pq + q$

$a_5 = p^4a_1 + p^3q + p^2q + pq + q = p^4a_1 + q(p^3 + p^2 + p + 1) = p^4a_1 + q\dfrac{p^4 - 1}{p - 1}$

$S = p^3 + p^2 + p + 1$ のとき，

$pS = p^4 + p^3 + p^2 + p$ なので

$(p-1)S = p^4 - 1$，$S = \dfrac{p^4 - 1}{p - 1}$.

……

$a_n = p^{n-1}a_1 + q(p^{n-2} + p^{n-1} + \cdots + p + 1)$

$1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} = \dfrac{p^{n-1} - 1}{p - 1}$.

$S = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2}$ …①

$pS = \quad p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n-1}$ …②

②－①：$(p-1)S = p^{n-1} - 1$，$S = \dfrac{p^{n-1} - 1}{p - 1}$.

$a_n = p^{n-1}a_1 + q\dfrac{p^{n-1} - 1}{p - 1} = \left(a_1 + \dfrac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{q}{p-1}$.

$\boxed{\text{別解}}$ $p \neq 1$ とする．$a_{n+1} \overset{①}{=} pa_n + q$ の"$+q$"を消せれば $a_n = a_1p^{n-1}$ となりカンタン．

① から $\alpha \overset{②}{=} p\alpha + q$ をひくと，$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ なので，$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$，$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$.

② $\iff \alpha = \dfrac{-q}{p-1}$ なので $a_n = \left(a_1 + \dfrac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{q}{p-1}$.　← 上と同じ！

借金の増え方と減り方

$$\begin{cases} a_n = (\text{第}n\text{年目の借金の総額}) \\ p = 1 + (\text{金利}) > 1 \\ -q = (\text{第}n+1\text{年目に返す借金の額}) \end{cases}$$

のとき，

$a_{n+1} = pa_n + q$.

$\alpha = p\alpha + q$ をみたす α は　← この α は仮に $a_1 = \alpha$ のとき $a_n = \alpha$（一定）となる α.

$$\alpha = \frac{-q}{p-1} = \frac{(\text{第}n\text{年目に返した借金の額})}{(\text{金利})}.$$

a_n は次のように書ける：

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha.$$

$p = 1 + (\text{金利}) > 1$ より，もしも $a_1 > \alpha$ ならば $n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$ となる．

$a_1 = \alpha$ ならば $a_n = \alpha$ と a_n は一定になる．

$a_1 < \alpha$ ならば n を大きくすると借金の総額 a_n は小さくなって行く．

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}_{}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p \neq 1,\ q \neq p,\ q_n = cq^{n-1} \text{ の場合}}$　$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ $(p\neq 1, q\neq 1, p\neq q)$ の場合.

$a_1 = a_1$

$a_2 = pa_1 + c$

$a_3 = p^2a_1 + cp + cq$

$a_4 = p^3a_1 + cp^2 + cpq + cq^2$

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$

$pS = p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3$

$qS = \quad p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^3$

$(p-q)S = p^4 - q^4$, $S = \dfrac{p^4-q^4}{p-q}$

$a_5 = p^4a_1 + cp^3 + cp^2q + cpq^2 + cq^3 = p^4a_1 + c(p^3+p^2q+pq^2+q^3) = p^4a_1 + c\dfrac{p^4-q^4}{p-q}$

$a_n = p^{n-1}a_1 + c\dfrac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$.

$\boxed{\text{注意}}$ $q_n = c$ $(q=1)$ のとき, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}$.

この公式は前ページに得た公式の q を c でおきかえたものになっている.

$\boxed{\text{注意}}$ $a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ $(1\neq p\neq q)$ をみたす a_n は $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$ と書ける.

$\boxed{\text{別解}}$ $p\neq 1$ とする. $a_{n+1} \overset{①}{=} pa_n + cq^{n-1}$ の "$+cq^{n-1}$" を消せれば $a_n = a_1p^{n-1}$ となりカンタン.

$b_n = \alpha q^{n-1}$ が $b_{n+1} = pb_n + cq^{n-1}$ をみたす $\Leftrightarrow$ $\alpha q^n = p\alpha q^{n-1} + cq^{n-1}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha q = p\alpha + c$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \dfrac{-c}{p-q}$.

$\alpha = \dfrac{-c}{p-q}$ のときの $\alpha q^n = p\alpha q^{n-1} + cq^{n-1}$ を ① からひくと, $a_{n+1} - \alpha q^n = p(a_n - \alpha q^{n-1})$.

ゆえに, $a_n - \alpha q^{n-1} = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$, $a_n = (a_1-\alpha)p^{n-1} + \alpha q^{n-1} = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$.

$\boxed{\text{別解}}$ $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$ で $a_{n+1} \overset{(*)}{=} pa_n + cq^{n-1}$ をみたすものを探してみよう.

$0 = a_{n+1} - pa_n - cq^{n-1} = \underline{Ap^n} + \underline{Bq^n} - \underline{Ap^n} - \underline{pBq^{n-1}} - \underline{cq^{n-1}} = \underbrace{\left(-(p-q)B - c\right)}_{=0}q^{n-1}$, $B = \dfrac{-c}{p-q}$.

$a_1 = A + B$ より, $A = a_1 - B = a_1 + \dfrac{c}{p-q}$.

これで, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$ は (*) をみたすことがわかった.

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p \neq 1,\ q_n = cn \text{ の場合}}$ $a_{n+1} = pa_n + cn$ $(p \neq 1)$ の場合

$$\begin{cases} pS = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p \\ S = p^3 + 2p^2 + 3p + 4 \\ (p-1)S = p^4 + p^3 + p^2 + p - 4 = p\dfrac{p^4-1}{p-1} - 4, \quad \therefore S = p\dfrac{p^4-1}{(p-1)^2} - \dfrac{4}{p-1} \end{cases}$$

$a_1 = a_1$

$a_2 = pa_1 + c$

$a_3 = p^2a_1 + pc + 2c$

$a_4 = p^3a_1 + p^2c + 2pc + 3c$

$$a_5 = p^4a_1 + p^3c + 2p^2c + 3pc + 4c = p^4a_1 + c(\overbrace{p^3 + 2p^2 + 3p + 4}^{=S\text{とおく.}}) = p^4a_1 + c\left(p\frac{p^4-1}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1}\right)$$

$\cdots\cdots$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + c\left(p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \cdots + (n-2)p + (n-1)\right)$$

$$= p^{n-1}a_1 + c\left(p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1}\right)$$

$$= \left(a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2}$$

$$c\left(-\frac{p}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1}\right) = c\frac{-p+p-1}{(p-1)^2} = \frac{-c}{(p-1)^2}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $a_n = Ap^{n-1} + Bn + C$ で $a_{n+1} = pa_n + cn$ をみたすものを探してみる.

$$0 = a_{n+1} - pa_n - cn = Ap^n + Bn + B + C - Ap^n - pBn - pC - cn = \underbrace{((1-p)B - c)}_{=0\ \cdots①}n + \underbrace{B + (1-p)C}_{=0\ \cdots②},$$

①より, $B = \dfrac{c}{1-p} = -\dfrac{c}{p-1}$, ②より, $C = \dfrac{B}{p-1} = -\dfrac{c}{(p-1)^2}$.

$a_1 = A + B + C$ より, $A = a_1 - (B+C)$, $-(B+C) = \dfrac{c}{p-1} + \dfrac{c}{(p-1)^2} = \dfrac{cp - c + c}{(p-1)^2} = \dfrac{cp}{(p-1)^2}$.

ゆえに, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}n - \dfrac{c}{(p-1)^2}$ は $a_{n+1} = pa_n + cn$ をみたす. □

a(n+1) = p a(n) + c n, a(1)=b

Input

$a(n+1) = p\,a(n) + c\,n \quad | \quad a(1) = b$

Alternate form

$\{p\,a(n) + c\,n = a(n+1),\ b = a(1)\}$

Recurrence equation solution

$$a(n) = b\,p^{n-1} + \frac{c\,(p^n - n\,p + n - 1)}{(p-1)^2}$$

$$a_n = a_1p^{n-1} + \frac{c\left(-(p-1)n + p^n - 1\right)}{(p-1)^2}$$

$$= \left(a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2} \quad \boxed{\text{OK}}$$

理論的根拠

$Ta_n=a_{n+1}$ とおく。$T^2a_n=TTa_n=Ta_{n+1}=a_{n+2}$, $T^3a_n=TT^2a_n=Ta_{n+2}=a_{n+3}$, …

一般に $T^ka_n=a_{n+k}$.

$(T-\alpha)a_n=Ta_n-\alpha a_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ のようにも計算できる。

$(T-\alpha)a_n=0$ と $a_{n+1}-\alpha a_n=0$ と $a_{n+1}=\alpha a_n$ は同値。

$(T-\alpha)a_n=0$ の解き方

$a_n=\alpha^{n-1}$ のとき, $(T-\alpha)a_n=a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha^n-\alpha\alpha^{n-1}=0$.

$a_n=\alpha^{n-1}$ は $(T-\alpha)a_n=0$ をみたす。　(注意: $a_n=A\alpha^{n-1}$ も $(T-\alpha)a_n=0$ をみたす。)

$(T-\alpha)a_n=q$ の解き方1

$a_n=b$ について, $(T-\alpha)a_n=a_{n+1}-\alpha a_n=b-\alpha b=(1-\alpha)b$ なので,

$b=\dfrac{q}{1-\alpha}$ のとき, $(T-\alpha)b=q$.

$(T-\alpha)a_n=q$ から $(T-\alpha)b=q$ をひくと, $(T-\alpha)(a_n-b)=0$, $\therefore\ a_n-b=A\alpha^{n-1}$, $a_n=A\alpha^{n-1}+b$.

$(T-\alpha)a_n=q$ の解き方2

もしも a_n が $(T-\alpha)a_n=q$ をみたしているならば, 両辺に $T-1$ を作用させると,

$$(T-1)(T-\alpha)a_n=(T-1)q=q-q=0.$$

$a_n=A\alpha^n$ は $(T-\alpha)a_n=0$ をみたすので $(T-1)(T-\alpha)a_n=0$ もみたす。

$a_n=b$ 　は $(T-1)a_n=0$ をみたすので $(T-1)(T-\alpha)a_n=(T-\alpha)(T-1)a_n=0$ もみたす。

ゆえに, $a_n=A\alpha^n+b$ は $(T-1)(T-\alpha)a_n=0$ をみたす。

実は $(T-1)(T-\alpha)a_n=0$ をみたす a_n は $a_n=A\alpha^n+b$ と書けることを別に示せる。

$a_n=A\alpha^n+b$ で $(T-\alpha)a_n=q$ をみたすものを探せばよい。

$a_n=A\alpha^n+b$ のとき, $(T-\alpha)a_n=A\underbrace{(T-\alpha)\alpha^n}_{=0}+(T-\alpha)b=b-\alpha b=(1-\alpha)b$.

ゆえに $b=\dfrac{q}{1-\alpha}$ とおくと, $(T-\alpha)a_n=q$.

$(T-\alpha)a_n=b\beta^n$ $(\alpha\neq\beta)$ の解き方

a_n が $(T-\alpha)a_n=b\beta^n$ をみたしているならば, $(T-\beta)\beta^n=0$ なので

$(T-\beta)(T-\alpha)a_n=b(T-\beta)\beta^n=0$ となり, a_n は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n=0$ をみたす。

$a_n=\alpha^n$ と $a_n=\beta^n$ は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n=0$ をみたすので,

$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ も $(T-\alpha)(T-\beta)a_n=0$ をみたす。

実は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n=0$ をみたす a_n は $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と書ける。

例 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n\overset{(*)}{=}0$ $(D=p^2-4q\neq0)$ をみたす a_n の求め方

$(*)$ は $(T^2+pT+q)a_n=0$ と書き直される。$T^2+pT+q=(T-\alpha)(T-\beta)$, $\alpha\neq\beta$ と書ける。

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ をみたす a_n は $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と書ける。

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ すなわち $(T^2-5T+6)a_n=0$ をみたす a_n は, $T^2-5T+6=(T-2)(T-3)$ なので

$a_n=A2^n+B3^n$ と書ける。