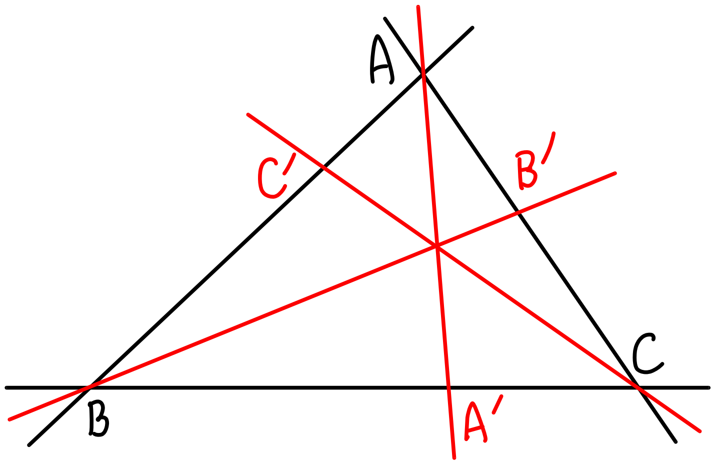
チェバの定理とメネラウスの定理について

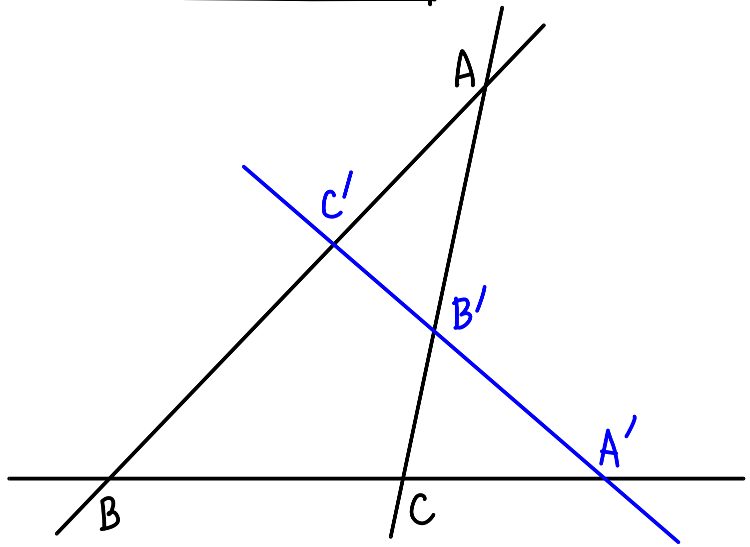
黒木玄　2023-08-27 作製

チェバの定理



$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

メネラウスの定理



$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -1,$$

符号の意味は
次ページで説明する.

$\dfrac{AB}{CD}$ の定義

（$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ と書くべきかもしれない。）

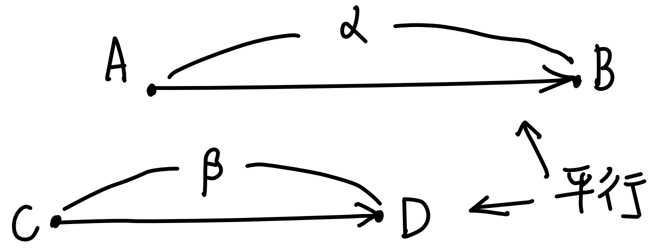
ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{CD}$ が平行なとき，$\dfrac{AB}{CD}$ を以下のように定める。

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の向きが同じ方向ならば $\varepsilon = 1$，反対方向ならば $\varepsilon = -1$ とおく，

$$\frac{AB}{CD} = \varepsilon \frac{\overrightarrow{AB}\text{の長さ}}{\overrightarrow{CD}\text{の長さ}}$$

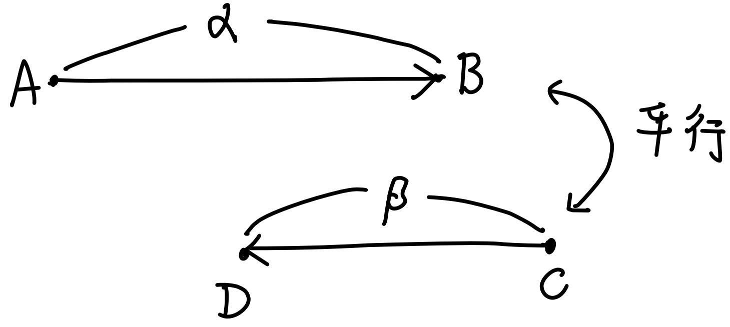
と定める。

例



$$\frac{AB}{CD} = \frac{\alpha}{\beta}$$ （$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は同じ向き），

例



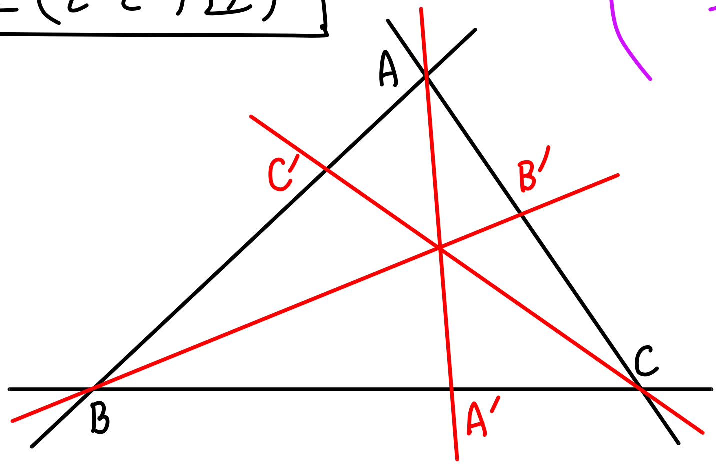
$$\frac{AB}{CD} = -\frac{\alpha}{\beta}$$ （$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は反対向き）.

A, B, C は平面上の一般の位置にある3点であるとし，

A′, B′, C′ はそれぞれ直線 BC, CA, AB 上の A, B, C とは異なる点であるとする．

Ceva の定理（とその逆）

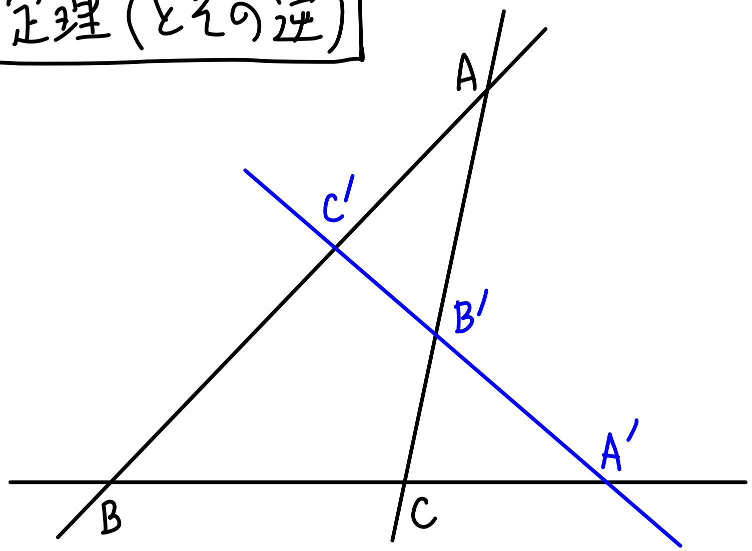
(注) 射影幾何的に
平行な直線達は無限遠で1点で交わると考える



3直線 AA′, BB′, CC′ が1点で交わる

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{BA'}{A'C}\;\frac{CB'}{B'A}\;\frac{AC'}{C'B}}_{\text{左図の場合にはすべて正}} = 1.$$

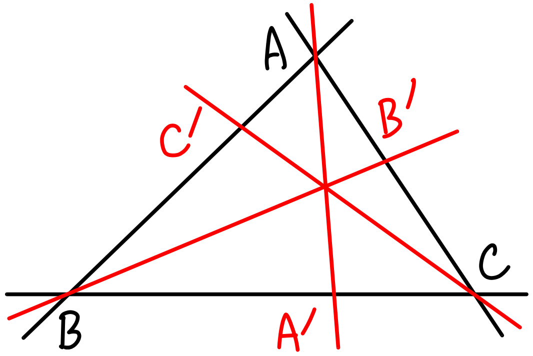
Menelaus の定理（とその逆）

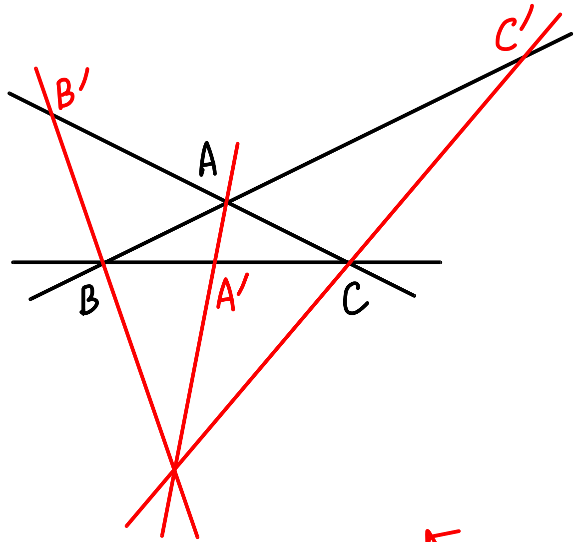


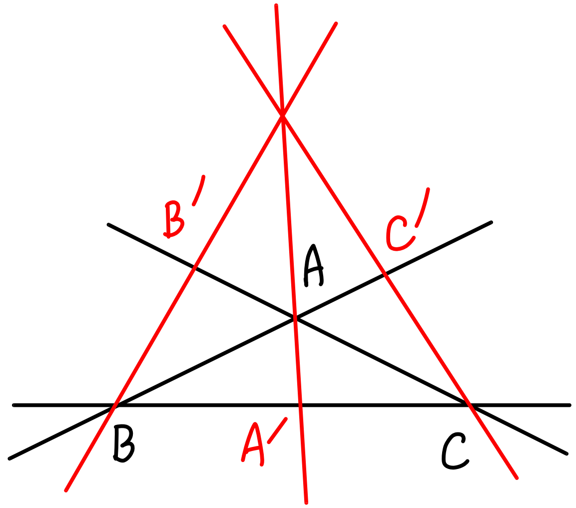
3点 A′, B′, C′ が同一直線上にある

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0}\;\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0}\;\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0}}_{\text{左図の場合}} = -1.$$

Cevaの定理の3パターン





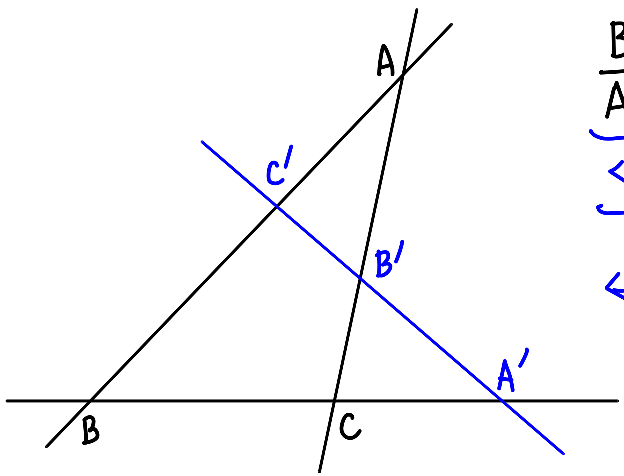


$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\,\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0}\,\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0}=1.$$

$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\,\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\,\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0}=1.$$

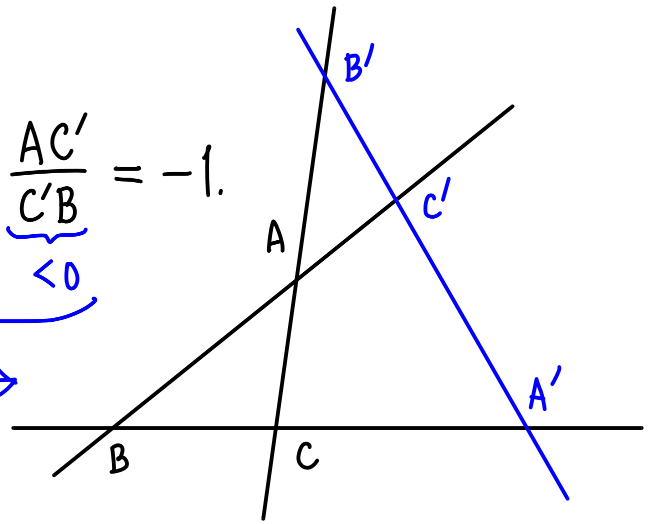
$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0}\,\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\,\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0}=1.$$

Menelausの定理の2パターン



$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0}\,\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0}\,\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0}=-1.$$

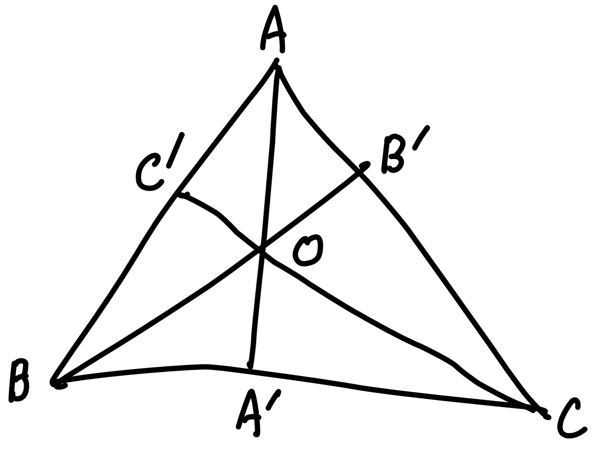
$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0}\,\underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0}\,\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0}=-1.$$

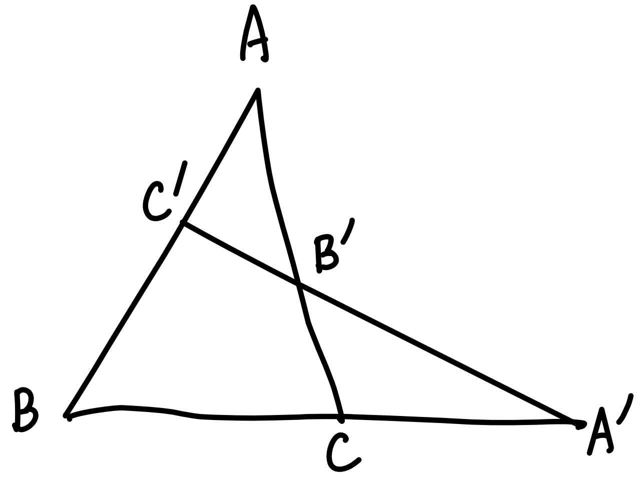


問題 次ページ以降を見る前にCevaの定理とMenelausの定理(前々ページの2つの定理の⇒の向き)を複数通りの方法で証明せよ.

ヒント; ・前ページより符号は忘れて長さの比を考えれば十分である.

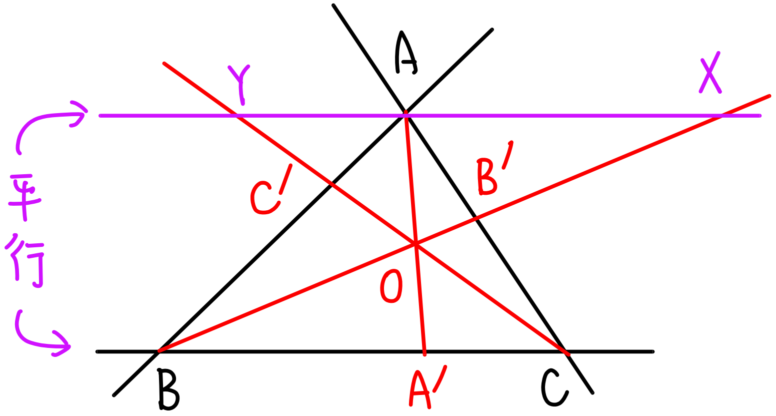
- 補助線を引き相似な三角形達を作る方法だけで複数ある
- 三角形の面積比を使う方法もある.
- 他にも多数ある.





相似を使う方法 と 面積比を使う方法

Ceva 1



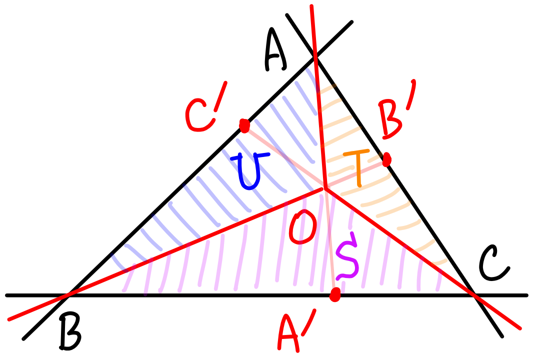
三角形達の相似より,

$BA' : A'C = XA : AY,$

$CB' : B'A = BC : XA,$

$AC' : C'B = AY : BC.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$



$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

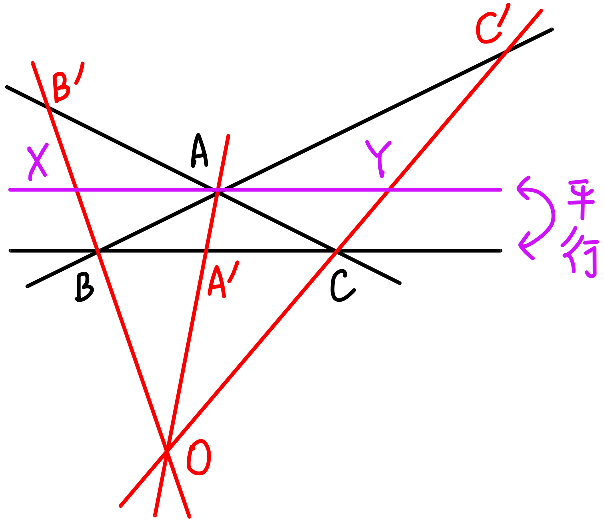
$BA' : A'C = U : T,$

$CB' : B'A = S : U,$

$AC' : C'B = T : S.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

Ceva 2



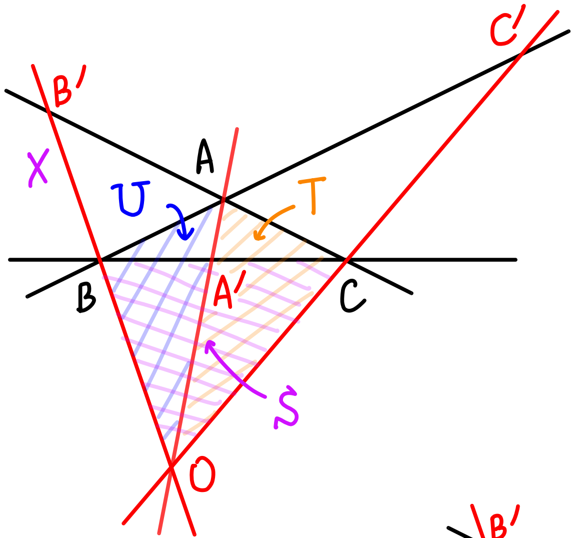
三角形達の相似より,

$BA' : A'C = XA : AY,$

$CB' : B'A = BC : XA,$

$AC' : C'B = AY : BC.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$



底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

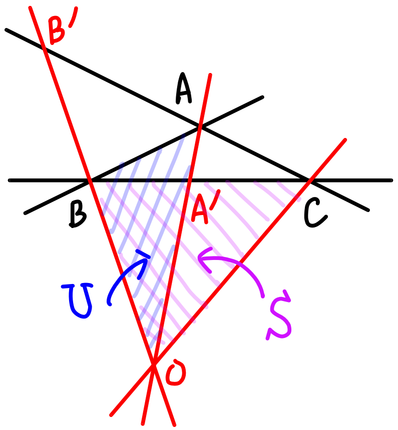
$BA' : A'C = U : T,$

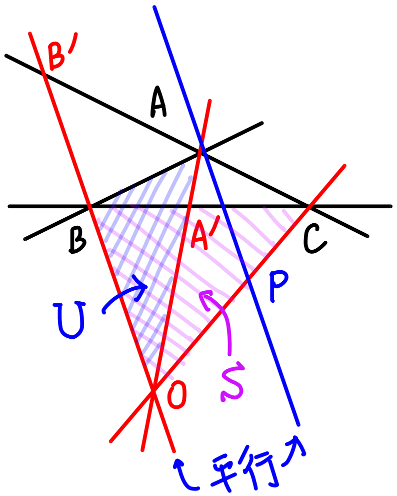
$CB' : B'A = S : U,$

$AC' : C'B = T : S.$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$





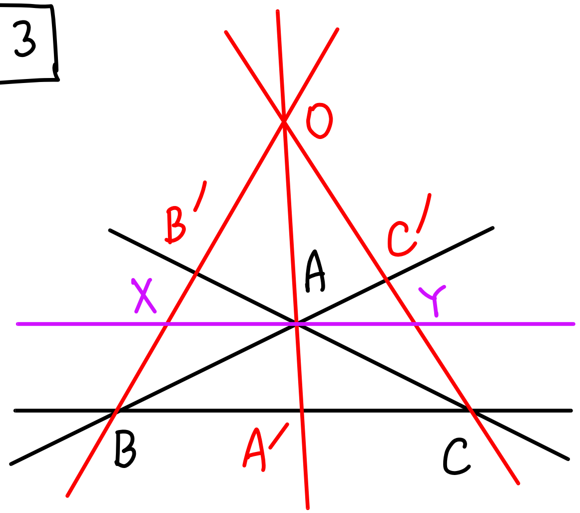
$S : U$

$= \triangle CBO$の高さ$:\triangle ABO$の高さ

$= CO : OP$

$= CB' : B'A$

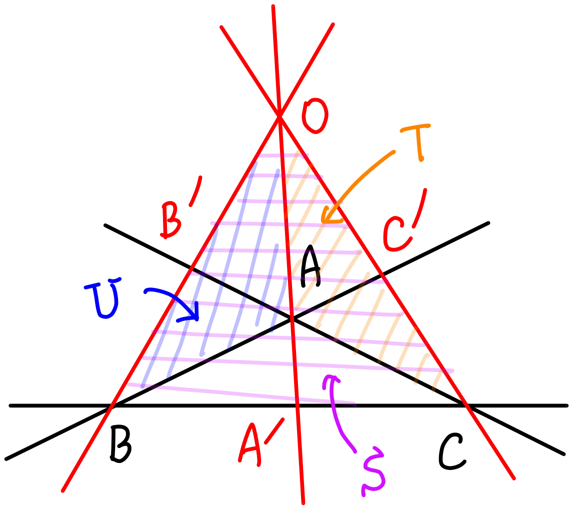
$\boxed{\text{Ceva 3}}$



三角形達の相似より,

$$BA':A'C = XA:AY,$$
$$CB':B'A = BC:XA,$$
$$AC':C'B = AY:BC.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY}\frac{BC}{XA}\frac{AY}{BC} = 1.$$

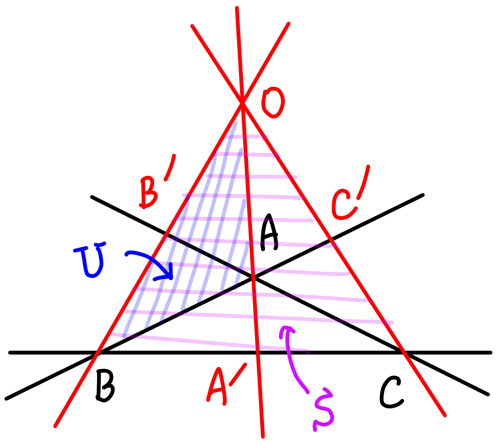


$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

$$BA':A'C = U:T,$$
$$CB':B'A = S:U,$$
$$AC':C'B = T:S.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T}\frac{S}{U}\frac{T}{S} = 1.$$

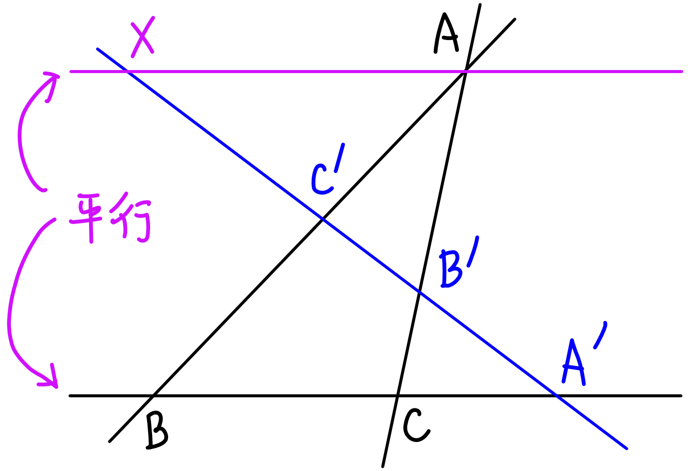


$S:U$

$= \triangle CBO$の高さ$:\triangle ABO$の高さ

$= CB':B'A$

Menelaus 1

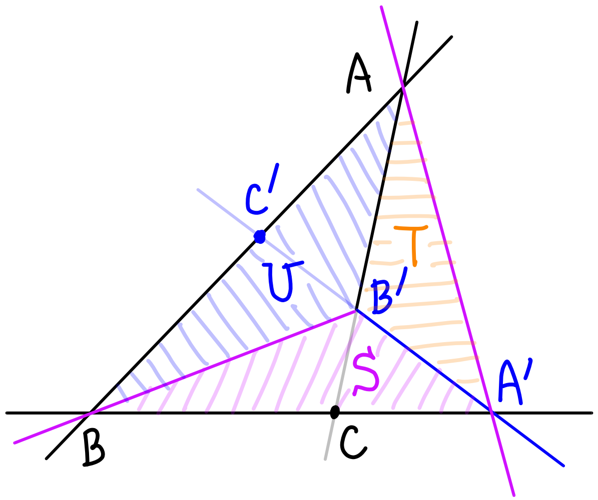


三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$

$$AC' : C'B = XA : BA',$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C}\frac{A'C}{AX}\frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \triangle B'BA' = S \\ \triangle B'A'A = T \\ \triangle B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので,
長さの比が以下のようになる:

$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$

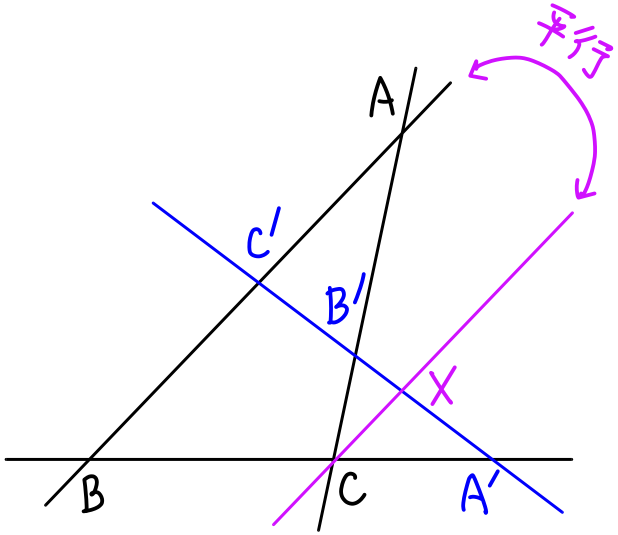
$$CB' : B'A = S : (U+T),$$

$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入れると,

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -\frac{U+T}{T}\frac{S}{U+T}\frac{T}{S} = -1.$$

Menelaus 1 別解 (三角形の相似を使う別の方法達)

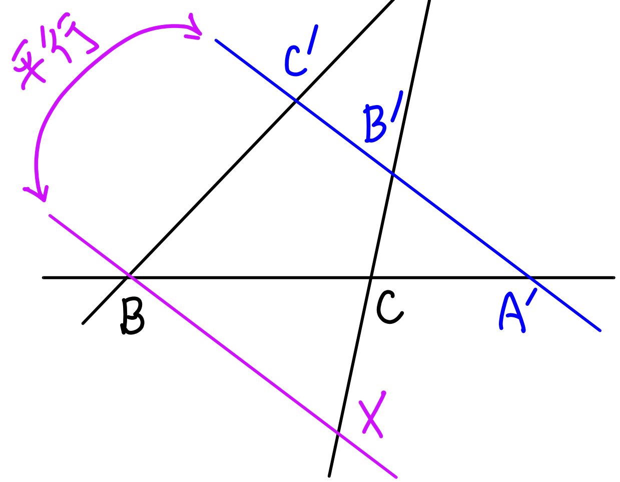


$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C'B}{CX},$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CX}{C'A}.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}$$

$$= \frac{C'B}{CX}\frac{CX}{C'A}\frac{AC'}{C'B} = -1$$

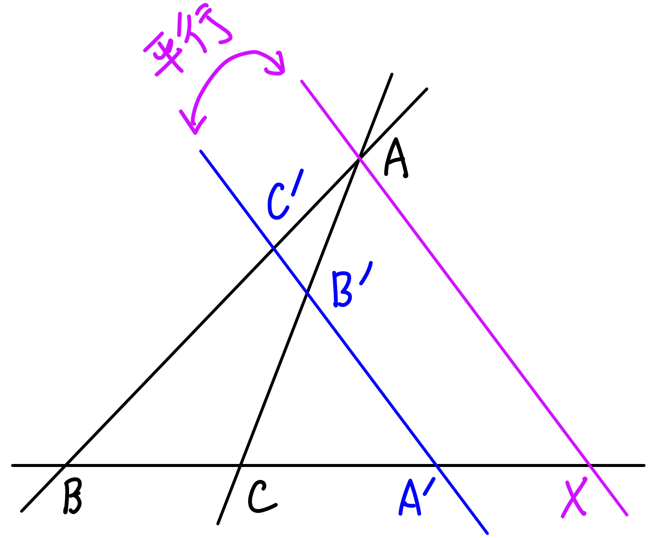


$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{B'X}{CB'},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'X},$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}$$

$$= \frac{B'X}{CB'}\frac{CB'}{B'A}\frac{AB'}{C'B} = -1.$$



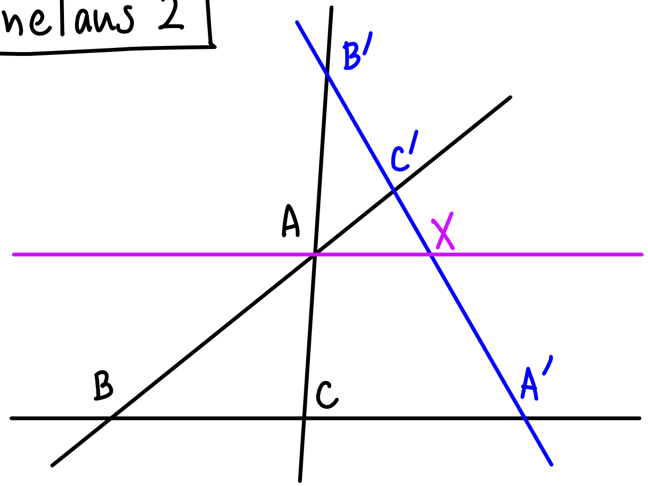
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'X},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{A'X}{BA'},$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}$$

$$= \frac{BA'}{A'C}\frac{CA'}{A'X}\frac{A'X}{BA'} = -1.$$

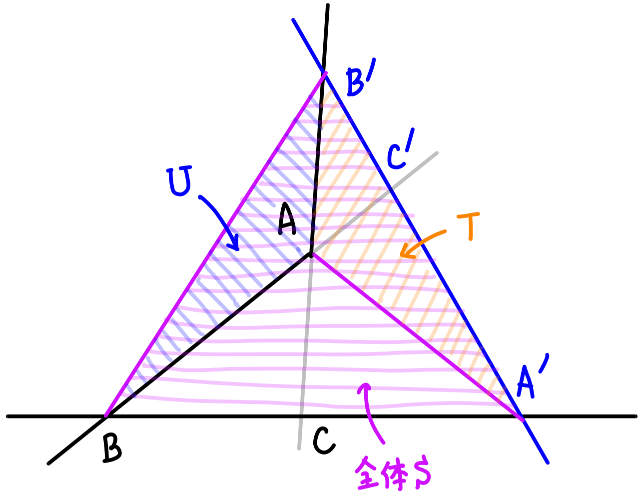
Menelaus 2



三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$
$$AC' : C'B = XA : BA'.$$

$$\therefore\ \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C}\frac{A'C}{AX}\frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \triangle B'BA' = S \\ \triangle B'A'A = T \\ \triangle B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので,
長さの比が以下のようになる:

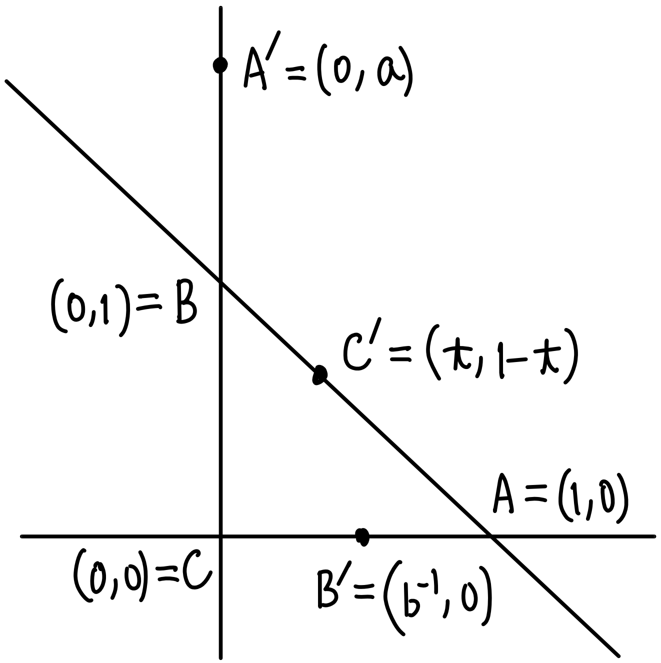
$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$
$$CB' : B'A = S : (U+T),$$
$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入れると,

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -\frac{U+T}{T}\frac{S}{U+T}\frac{T}{S} = -1.$$

$\boxed{\text{座標を使う方法}}$

点Cを原点とし, $x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$ で平面上に座標(x, y)を入れる,



$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{a-1}{-a},\quad \frac{CB'}{B'A}=\frac{b^{-1}}{1-b^{-1}}=\frac{1}{b-1},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{t-1}{-t}=\frac{1-t}{t}.$$

Ceva 直線AA′: $y=-a(x-1)$

直線BB′: $y=-bx+1$

直線CC′: $y=\frac{1-t}{t}x$

AA′とBB′の交点は $\left(\frac{a-1}{a-b},\ -a\frac{b-1}{a-b}\right)$ なので,

AA′, BB′, CC′が1点で交わる $\iff -a\frac{b-1}{a-b}=\frac{1-t}{t}\frac{a-1}{a-b}$

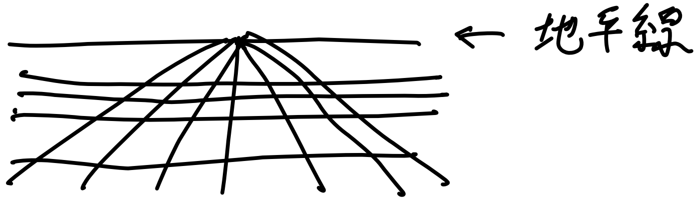
$\iff \frac{a-1}{-a}\frac{1}{b-1}\frac{1-t}{t}=1 \iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=1.$

Menelaus 直線A′B′: $y=-abx+a$ と 直線AB: $y=1-x$ の交点は $\left(\frac{a-1}{ab-1},\ a\frac{b-1}{ab-1}\right)$ なので,

A′, B′, C′が同一直線上にある $\iff a\frac{b-1}{ab-1}=\frac{1-t}{t}\frac{a-1}{ab-1}$

$\iff \frac{a-1}{-a}\frac{1}{b-1}\frac{1-t}{t}=-1 \iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=-1.$

射影幾何との関係



射影変換たち:

- 直線上の点 x の変換 $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0\right)$.
- 平面上の点 (x,y) の変換 $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{ax+a'y+a''}{cx+c'y+c''}, \dfrac{bx+b'y+b''}{cx+c'y+c''}\right)$ $\left(\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0\right)$.

射影変換で不変な性質を調べる幾何を射影幾何と呼ぶ.

より正確には射影直線と射影平面を定義した方がよいが略す.

直線の射影変換の全体は $x \mapsto x+\beta$ $x \mapsto \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ で生成される. ←(*)

直線上の点 a, b, c, d に対する $cr(a,b;c,d) = \dfrac{c-a}{b-c}\,\dfrac{d-b}{a-d}$ を <u>cross ratio</u> (複比) と呼ぶ.

cross ratio は射影変換で不変である. ← (*)から容易に出る.

平面上の同一直線上の点 A, B, C, D に対しても cross ratio が

$$cr(A,B;C,D) = \frac{AC}{CB}\,\frac{BD}{DA}$$

と定義され, 平面の射影変換で不変である.

Cevaの定理(とその逆)の射影幾何版

平面上の直線 l_1, l_2, l_3, m は対ごとに平行でなく，そのうちのどの3つも1点で交わらないと仮定する．$A = l_2 \cap l_3$，$B = l_3 \cap l_1$，$C = l_1 \cap l_2$，$P = l_1 \cap m$，$Q = l_2 \cap m$，$R = l_3 \cap m$ とおく．
A', B', C' はそれぞれ l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であるとする．このとき，

直線 AA', BB', CC' は1点で交わる ← m によらない条件，射影変換で不変の条件

$\iff$ $\mathrm{cr}(B,C;A',P)\,\mathrm{cr}(C,A;B',Q)\,\mathrm{cr}(A,B;C',R) = -1$ ← 左辺は射影変換で不変

$$\iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CP}{PB} \times \frac{CB'}{B'A}\frac{AQ}{QC} \times \frac{AC'}{C'B}\frac{BR}{RA} = -1.$$

点 P, Q, R が乗っている直線 m を無限遠に移動すると，$\dfrac{CP}{PB}, \dfrac{AQ}{QC}, \dfrac{BR}{RA}$ はどれも -1 に収束するので

$$\iff \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

射影変換によって易しい場合に変換して証明できる．

Cevaの場合の双対（点と直線の立場の交換）として以下が得られる.

Menelausの定理（とその逆）の射影幾何版

平面上の点 A, B, C, M は互いに異なるとし, そのうちのどの3つも同一直線上にないと仮定する.

$l_1=$（直線BC）, $l_2=$（直線CA）, $l_3=$（直線AB）, $m_1=$（直線AM）, $m_2=$（直線BM）, $m_3=$（直線CM）,

$P=l_1\cap m_1$, $Q=l_2\cap m_2$, $R=l_3\cap m_3$ とおく.

A', B', C' はそれぞれ直線 l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であると仮定する. このとき,

A', B', C'が同一直線上にある ← Mによらない条件, 射影変換で不変の条件

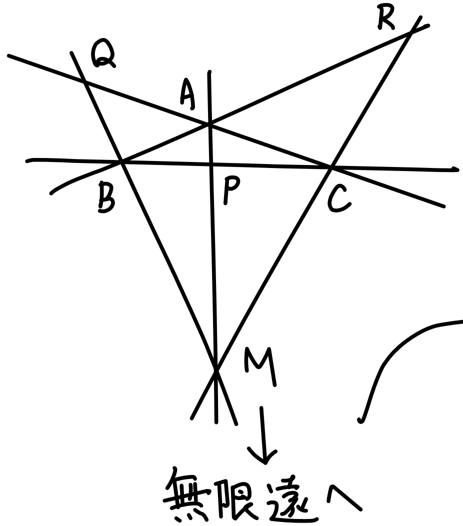
$\iff \mathrm{cr}(B,C;A',P)\,\mathrm{cr}(C,A;B',Q)\,\mathrm{cr}(A,B;C',R)=-1$ ← 左辺は射影変換で不変

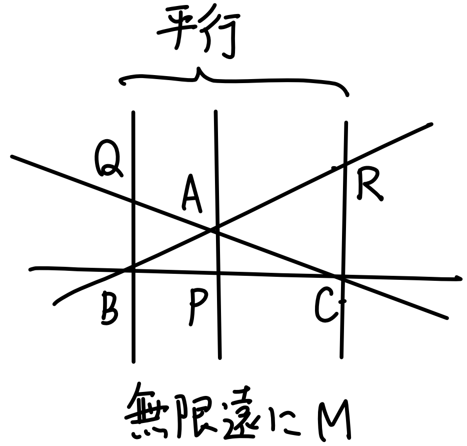
$\iff \dfrac{BA'}{A'C}\dfrac{CP}{PB}\times\dfrac{CB'}{B'A}\dfrac{AQ}{QC}\times\dfrac{AC'}{C'B}\dfrac{BR}{RA}=-1$

Mを無限遠に移動すると,

$\dfrac{CP}{PB}\dfrac{AQ}{QC}\dfrac{BR}{RA}\to 1$ となるので

$\iff \dfrac{BA'}{A'C}\dfrac{CB'}{B'A}\dfrac{AC'}{C'B}=-1.$





$\dfrac{CP}{PB}\dfrac{AQ}{QC}\dfrac{BR}{RA}=\dfrac{CP}{PB}\dfrac{PB}{BC}\dfrac{BC}{CP}=1$

文献

・西山享、『射影幾何学の考え方』、数学のかんどころ19、共立出版2013

・Julio Benitez, A Unified Proof of Ceva and Menelaus' Theorems Using Projective Geometry, Journal for Geometry and Graphics Volume 11 (2007), No. 1, 39–44.

https://scholar.google.co.jp/scholar?cluster=2104876940749426999