例

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 & \cdots ① \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n - 6n = 0 \quad (n=1,2,3,\ldots) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす a_n $(n=1,2,3,\ldots)$ を求めよう。

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ の解は $\lambda = 2, 3$.

$a_n = A\,2^{n-1} + B\,3^{n-1} + pn + q$ とおく. $\cdots$ ③

$Ta_n = a_{n+1}$ とおくと,
$(T-1)n = 1$, $(T-1)^2 n = 0$ なので

② $\Leftrightarrow$ $(T^2 - 5T + 6)a_n = 6n$
$\Leftrightarrow$ $(T-2)(T-3)a_n = 6n$
$\Rightarrow$ $(T-1)^2(T-2)(T-3)a_n = 0$
$\Rightarrow$ a_n は③のように表される.

①, ② をみたす a_n はただ1つに決まるので,
③の形の a_n で ①, ② をみたすものがあればそれが解になる.
③のとき,

② $\Leftrightarrow$ $0 = p(n+2) + q - 5p(n+1) - 5q + 6pn + 6q - 6n = (2p-6)n - 3p + 2q$ $(n=1,2,3,\ldots)$

$\Leftrightarrow$ $2p - 6 = 0$ かつ $-3p + 2q = 0$

$\Leftrightarrow$ $p = 3$ かつ $q = \frac{9}{2}$.

③ かつ $p = 3$ かつ $q = \frac{9}{2}$ のとき,

① $\Leftrightarrow$ $1 = A + B + 3 + \frac{9}{2}$ かつ $1 = 2A + 3B + 6 + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow$ $A = -10$ かつ $B = \frac{7}{2}$.

$$\begin{cases} A + B = -\frac{13}{2} & \cdots ④ \\ 2A + 3B = -\frac{19}{2} & \cdots ⑤ \end{cases}$$

$3 \times ④ - ⑤$: $A = -10$

$⑤ - 2 \times ④$: $B = \frac{7}{2}$

以上より, $a_n = -10 \cdot 2^{n-1} + \frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} + 3n + \frac{9}{2}$ は①, ②をみたすことがわかる.