$\boxed{\text{問題}}$ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2+6x+10}=\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{(x+3)^2+1}$ の最小値を求めよ.

$\boxed{\text{解答例1}}$ $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+c}=\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^2\sqrt{x^2+c}=\frac{1}{x^2+c}-\frac{1}{2}\frac{x\cdot 2x}{(x^2+c)^{3/2}}=\frac{x^2+c-x^2}{(x^2+c)^{3/2}}=\frac{c}{(x^2+c)^{3/2}}$ を使うと,

$f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}+\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+1}}$, $f'(-3)<0$, $f(2)>0$.

$f''(x)=\frac{1}{((x-2)^2+1)^{3/2}}+\frac{1}{((x+3)^2+1)^{3/2}}>0$.

ゆえに $f'(x)$ は狭義単調増加で, $f'(x)=0$ となる唯一つの x で $f(x)$ は最小になる.

$f'(x)=0$ となる x を求めよう. $f'(x)=0$ のとき, $\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+1}=\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2+1}$ であり,

両辺を1からひくと, $\frac{1}{(x-2)^2+1}=\frac{1}{(x+3)^2+1}$, $(x-2)^2+1=(x+3)^2+1$, $10x+5=0$, $x=-\frac{1}{2}$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)+1}}+\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}}=0$. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}=2\times\sqrt{\frac{29}{4}}=\sqrt{29}$.

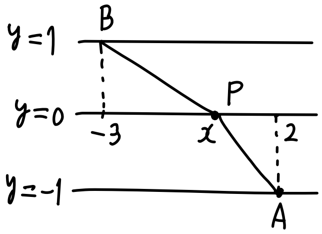
$x=-\frac{1}{2}$ で $f(x)$ は最小値 $\sqrt{29}$ になる. □

$\boxed{\text{解答例2}}$ $P=(x,0)$, $A=(2,-1)$, $B=(-3,1)$ とおくと,

$AP=\sqrt{(x-2)^2+1^2}$, $BP=\sqrt{(x+3)^2+(-1)^2}$ なので, $f(x)=AP+BP$.

ゆえに, A,P,B が一直線上にあるとき, $f(x)$ は最小になる.

すなわち, $x=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は最小になる.



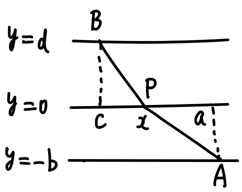
$x=-\frac{1}{2}$ で $f(x)$ は最小値 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}=2\times\sqrt{\frac{29}{4}}=\sqrt{29}$ になる. □

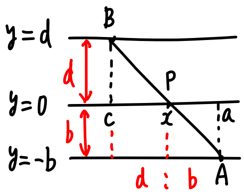
$\boxed{\text{一般化}}$ $f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$, $a\neq c$, $b,d>0$ とおく.

$P=(x,0)$, $A=(a,-b)$, $B=(c,d)$ とおくと, $f(x)=AP+BP$ なので

A,P,B が一直線上にあるとき, $f(x)$ は最小になる.

すなわち, $x=\frac{da+bc}{b+d}$ のとき, $f(x)$ は最小になる.





$\boxed{\text{別証明}}$ $f'(x)=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}=0 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+b^2}=\frac{(x-c)^2}{(x-c)^2+d^2} \Leftrightarrow \frac{b^2}{(x-a)^2+b^2}=\frac{d^2}{(x-c)^2+d^2}$

$\Leftrightarrow d^2(x-a)^2+b^2d^2=b^2(x-c)^2+b^2d^2 \Leftrightarrow (dx-da+bx-bc)(dx-da-bx+bc)=0 \Leftrightarrow x=\frac{da+bc}{b+d}, \frac{da-bc}{d-b}$

$x=\frac{da+bc}{b+d}$ のとき, $x-a=-b\frac{a-c}{b+d}$, $x-c=d\frac{a-c}{b+d}$, $\sqrt{(x-a)^2+b^2}=b\sqrt{\left(\frac{a-c}{b+d}\right)^2+1}$, $\sqrt{(x-c)^2+d^2}=d\sqrt{\left(\frac{a-c}{b+d}\right)^2+1}$

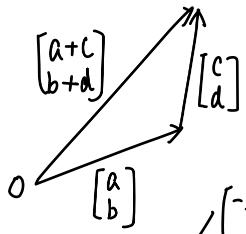
$x=\frac{da-bc}{d-b}$ のとき, $x-a=b\frac{a-c}{d-b}$, $x-c=d\frac{a-c}{d-b}$, $\sqrt{(x-a)^2+b^2}=b\sqrt{\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2+1}$, $\sqrt{(x-c)^2+d^2}=d\sqrt{\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2+1}$

ゆえに, $f'\left(\frac{da+bc}{b+d}\right)=0$, $f'\left(\frac{da-bc}{d-b}\right)\neq 0$. ゆえに, $x=\frac{da+bc}{b+d}$ のとき, $f(x)$ は最小になる.

$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ のとき,

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\quad(\text{三角不等式}).$$

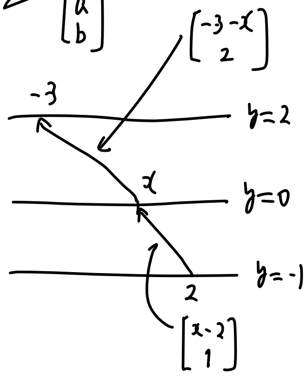
さらに, 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$の片方はもう一方の正の実数倍.



$f(x)=\sqrt{(x-2)^2+1^2}+\sqrt{(x+3)^2+2^2}$ とおく,

$$f(x)=\sqrt{(x-2)^2+1^2}+\sqrt{(-x-3)^2+2^2}\geqq\sqrt{(x-2-x-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}$$

$k\begin{bmatrix}x-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x-3\\2\end{bmatrix}$ を解くと, $k=2>0$, $2x-4=-x-3$, $x=\frac{1}{3}$.



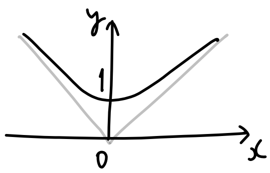
$$f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1^2}}+\frac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2+2^2}}=0\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+1}=\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2+4}\Leftrightarrow\frac{1}{(x-2)^2+1}=\frac{4}{(x+3)^2+4}$$

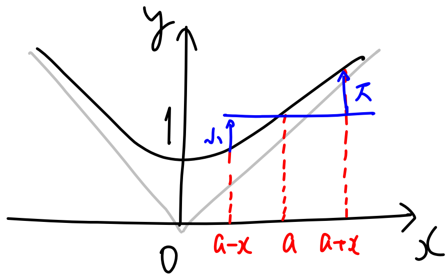
$$\Leftrightarrow (x+3)^2+4=4(x-2)^2+4\Leftrightarrow(x+3+2x-4)(x+3-2x+4)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3},7$$

$$f'(7)=\frac{5}{\sqrt{5^2+1}}+\frac{10}{\sqrt{10^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5^2+1}}>0,\quad f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-\frac{5}{3}}{\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}}+\frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+2^2}}=0.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+2^2}=3\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}=3\sqrt{\frac{34}{3^2}}=\sqrt{34}$$

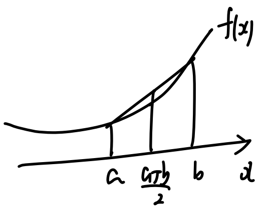
$y=\sqrt{x^2+1}$ のグラフ は





$$\sqrt{(x-a)^2+1}+\sqrt{(x+a)^2+1}\geqq2\sqrt{a^2+1}=$$

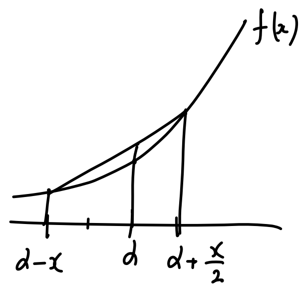
$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ は下に凸であることの証明.



$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ を示せれば,

$\sqrt{a^2+1^2}+\sqrt{b^2+1^2}\geqq2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1}=\sqrt{(a+b)^2+2^2}$ を示せばよい.

しかしこれは ベクトル $\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}b\\1\end{bmatrix}$ に関する三角不等式そのもので明らか..



$$\frac{f(d-x)+2f\left(d+\frac{x}{2}\right)}{3}\geqq f(d)$$

$$\sqrt{(x-d)^2+1^2}+\sqrt{(x+2d)^2+2^2}=\sqrt{(d-x)^2+1^2}+2\sqrt{\left(d+\frac{x}{2}\right)^2+1^2}$$

$$\geqq3\sqrt{d^2+1^2}=\sqrt{d^2+1^2}+2\sqrt{d^2+1^2}$$

OK

$g(x)$は下に凸だとする: $(1-t)g(a)+tg(b) \geqq g((1-t)a+tb)$ if $0 \leqq t \leqq 1$.

$a \neq c$, $b, d > 0$ とし, $f(x) = b\,g\left(\frac{a-x}{b}\right) + d\,g\left(\frac{c+x}{d}\right)$ とおく.

$$\frac{a-x}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{ab}+ad-(b+d)x = \cancel{ab}+cb$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ad-bc}{b+d}$$

$g(x)$は下に凸なので $t = \frac{d}{b+d}$ とおくと, $1-t = \frac{b}{b+d}$ より,

$$f(x) = (b+d)\left((1-t)g\left(\frac{a-x}{b}\right) + t\,g\left(\frac{c+x}{d}\right)\right)$$

$$\geqq (b+d)\,g\left(\frac{b}{b+d}\left(\frac{a-x}{b}\right) + \frac{d}{b+d}\left(\frac{c+x}{d}\right)\right)$$

$$= (b+d)\,g\left(\frac{a+c}{b+a}\right)$$

$x_0 = \frac{ad-bc}{b+a}$ とおく.

$$\frac{\frac{ad-bc}{b+d}+c}{d} = \frac{\frac{ad+cd}{b+d}}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$= b\,g\left(\frac{a-x_0}{b}\right) + d\,g\left(\frac{c+x_0}{d}\right)$$

$$= f(x_0),$$

$$x_0 = \frac{ad-bc}{b+d}$$

$\downarrow$

特に, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ のとき,

$$f(x) = b\sqrt{\left(\frac{a-x}{b}\right)^2+1} + d\sqrt{\left(\frac{c+x}{d}\right)^2+1} = \sqrt{(x-a)^2+b^2} + \sqrt{(x+c)^2+d^2} \geqq f(x_0),$$