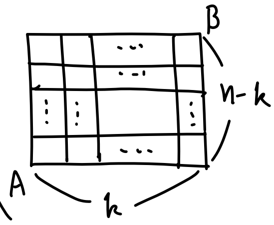
量子二項係数と最短経路

二項係数の場合

$\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ $(n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とおく。

$k<0$ または $n<k$ のとき $\binom{n}{k}=0$ と約束。

$\binom{n}{k}$ は n 個から k 個選ぶときの組み合わせ全体の数になる。ゆえに、

$\binom{n}{k} =$ ( での AからBへの最短経路の個数).

量子二項係数の場合

$$(n)_q = 1+q+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad (n)_q! = (1)_q(2)_q\cdots(n)_q,$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q} = \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+1)_q}{(k)_q!}$$ とおく。

量子Pascalの三角形の公式 $\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k-1}_q + q^k\binom{n}{k}_q$.

証明 $(n+1)_q = 1+q+\cdots+q^{k-1} + q^k(1+q+\cdots+q^{n-k}) = (k)_q + q^k(n-k+1)_q$ より、

$$\binom{n+1}{k}_q = \frac{\left((k)_q+(n-k+1)_q\right)(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+2)_q}{(k)_q!}$$

$$= \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+2)_q}{(k-1)_q!} + \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+1)_q}{(k)_q} = \binom{n}{k-1}_q + q^k\binom{n}{k}_q. \qquad \square$$

結合法則は仮定する

量子二項定理 $yx = qxy$ のとき、$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

証明 n に関する帰納法。$n=0$ の場合は自明。n について成立すると仮定する。このとき、

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\sum_k \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k}_q x^{k+1}y^{n-k} + \sum_k q^k\binom{n}{k}_q x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_k \binom{n}{k-1}_q x^k y^{n+1-k} + \sum_k q^k\binom{n}{k}_q x^k y^{n+1-k}$$

Pascalの三角形

$$= \sum_k\left(\binom{n}{k-1}_q + q^k\binom{n}{k}_q\right)x^k y^{n+1-k} = \sum_k \binom{n+1}{k}_q x^k y^{n+1-k}. \qquad \square$$

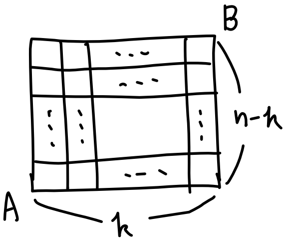
量子二項係数の最短経路に関する和による表示

x と y が非可換のとき(結合法則は仮定する),

$(x+y)^n$ の展開中の x について k 次項の全体は k 個の x と $n-k$ 個の y を並べたもの全体になる.

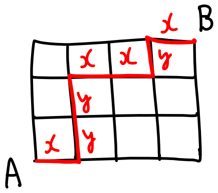
x に対して左から右への移動 $\rightarrow$ を対応させ, y に対して下から上への移動 $\uparrow$ を対応させると,

$(x+y)^n$ の展開中の x について k 次項と



における A から B への最短経路は一対一に対応する.

例えば



と $xyyxxyx$ が対応している.

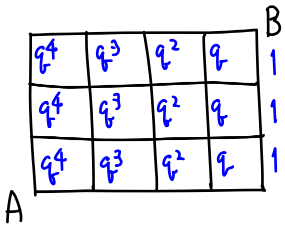
$yx = qxy$ と仮定する. すぐ上の例では,

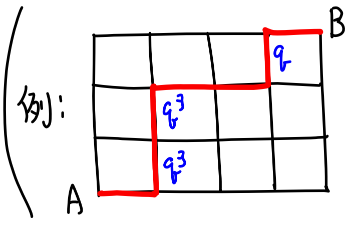
$$xyyxxyx = q\,xyyxxxy = q q^3\,xyxxxyy = q q^3 q^3\,xxxxyyy = q^7 x^4 y^3.$$

$x^k y^{n-k}$ の順序に整理すると, 各 y ごとにその y の右側にある x の個数乗された q が出て来る.

例えば上の例では以下の図中の q のべきを経路に沿ってかけ合わせたものが,

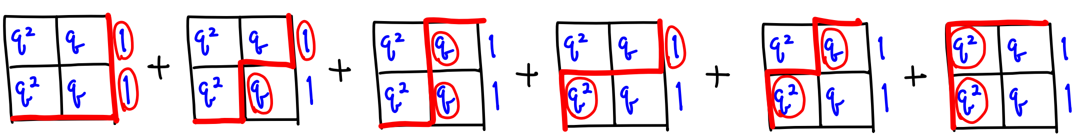
その経路に対応する項を $x^k y^{n-k}$ の順序に整理したときに出て来る係数になる.



(例:  $\longleftrightarrow$ $q q^3 q^3\,xxxxyyy = q^7 x^4 y^3$).

以上の結果を使えば $\binom{n}{k}_q$ を最短経路に沿った q のべきの積達の和で表せる. 例えば,

$$\binom{4}{2}_q = \frac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q^2)(1-q)} = (1+q^2)(1+q+q^2) = 1+q+q^2+q^2+q^3+q^4,$$

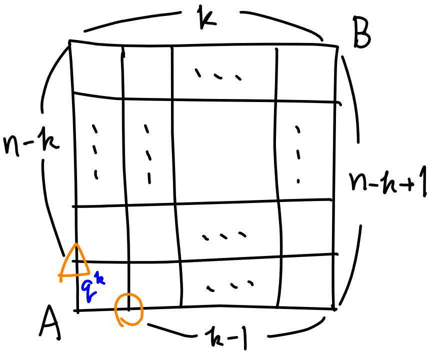


等しい.

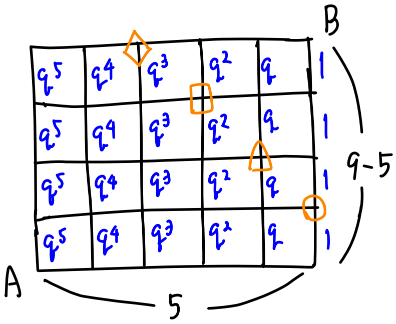
$$= 1 + q + q^2 + q^2 + q^3 + q^4.$$

一般の場合も同様である.

応用 ○,△,… を通る場合ごとの和に分解することによって様々な公式が得られる.

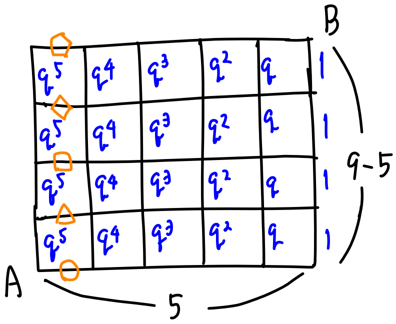


$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k-1}_q + q^k\binom{n}{k}_q \quad \text{(Pascalの三角形)}.$$



$$\binom{9}{5}_q = \binom{6}{5}_q\binom{3}{0}_q + q\binom{6}{4}_q\binom{3}{1}_q + q^2\binom{6}{3}_q\binom{3}{2}_q + q^3\binom{6}{2}_q\binom{3}{3}_q$$

一般に $\displaystyle\binom{m+n}{k}_q = \sum_{i+j=k} q^j\binom{m}{i}_q\binom{n}{j}_q$.

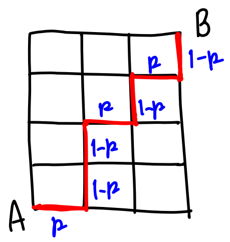


$$\binom{9}{5}_q = \binom{8}{4}_q + q^5\binom{7}{4}_q + q^{2\cdot5}\binom{6}{4}_q + q^{3\cdot5}\binom{5}{4}_q + q^{4\cdot5}\binom{4}{4}_q.$$

一般に $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j(k+1)}\binom{n-j}{k}_q$. □

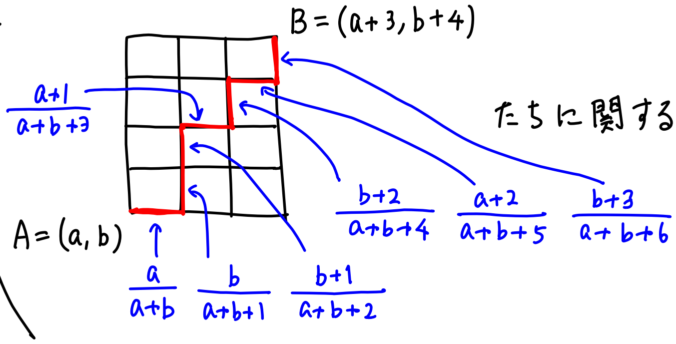
二項分布の場合との類似

左から右に1つ移動するときに p をかけて, 下から上に1つ移動するときに $1-p$ をかけて得られた結果をAからBへのすべての最短経路について足し上げると二項分布の確率が得られる. 例えば



たちに関する和 $= \binom{7}{3}p^3(1-p)^4$. □

Polyaのつぼの場合



たちに関する和 $= \binom{7}{3}\dfrac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)(b+3)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+6)}$. □

おまけ：有限体上のGrassmann多様体の有理点の個数

$|X| = $ (集合 X の元の個数).

$\mathbb{F}_q$ は位数 $q=p^e$ (元の個数が $q=p^e$) の有限体であるとする.

$$
\begin{aligned}
|GL_n(\mathbb{F}_q)| &= (\mathbb{F}_q^n \text{ の基底 } (v_1,\dots,v_n) \text{ の個数}) \\
&= |\{v_1 \text{ の取り方}\}| \times |\{v_1 \text{ が与えられたときの } v_2 \text{ の取り方}\}| \times \cdots \times |\{v_1,\dots,v_{n-1} \text{ が与えられたときの } v_n \text{ の取り方}\}| \\
&= (q^n-1)(q^n-q)\times\cdots\times(q^n-q^{n-1}) = q^{n(n-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)
\end{aligned}
$$

$$
B_{k,n-k}(\mathbb{F}_q) = \left\{ X \in GL_n(\mathbb{F}_q) \;\middle|\; X \text{ は } \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \end{array} \text{ の形} \right\}
$$
とおくと,

$$
\begin{aligned}
&k(k-1)+(n-k)(n-k-1)+2k(n-k) \\
&= k^2-k+(n-k)^2-(n-k)+2k(n-k) \\
&= (k+(n-k))^2-n = n(n-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_{k,n-k}(\mathbb{F}_q)| &= q^{k(n-k)} \times |GL_k(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{n-k}(\mathbb{F}_q)| \\
&= q^{n(n-1)/2} \times (q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1) \times (q^{n-k}-1)(q^{n-k-1}-1)\cdots(q-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\{\mathbb{F}_q^n \text{ の } k \text{ 次元部分空間}\}| &= |GL_n(\mathbb{F}_q)/B_{k,n-k}(\mathbb{F}_q)| \\
&= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)\times(q^{n-k}-1)(q^{n-k-1}-1)\cdots(q-1)} = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!} = \binom{n}{k}_q.
\end{aligned}
$$

もしくはより直接的に,

$$
\begin{aligned}
|\{\mathbb{F}_q^n \text{ の } k \text{ 次元部分空間}\}| &= \left| \{ [v_1,\dots,v_k] \mid v_1,\dots,v_k \in \mathbb{F}_q^n \text{ は一次独立} \} / GL_k(\mathbb{F}_q) \right| \\
&= \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} = \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+1)_q}{(k)_q!} = \binom{n}{k}_q.
\end{aligned}
$$

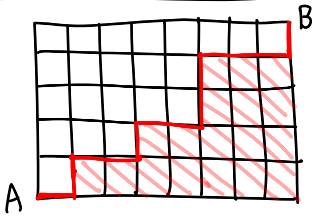
このように,

$$
\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = (\{1,2,\dots,n\} \text{ の元の個数が } k \text{ の部分集合の個数}),
$$

でかつ, $q=p^e$ (p は素数, e は正の整数) のとき,

$$
\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!} = (\mathbb{F}_q^n \text{ の } k \text{ 次元部分空間の個数}),
$$

Young図形の個数とq二項係数の関係 (Mann-WhitneyのU検定との関係)

例えば、

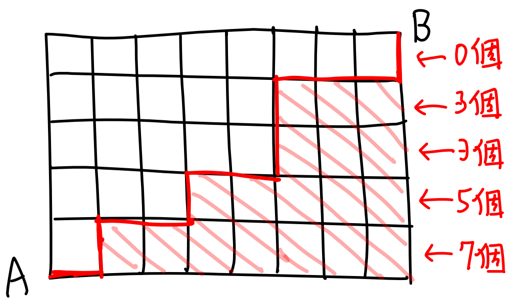
における ////// の部分の形を Young図形 と呼ぶことにする。

Young図形の"面積"(上の場合には下段から $7+5+3+3+0=18$) を Young図形の重さと呼ぶ。

A, B を対角線上の頂点に持つ長方形の内側のYoung図形とAからBへの最短経路は一対一に対応している。

さらに、AからBへの最短経路は→にxを↑にyを対応させて並べたもので表現できる。
上の経路は $xyxxyxxyyxxxy$ と表現される。

$qyx = xy$ という非可換性の下で、AからBへの最短経路を表現したxとyの並びを、
$x^k y^l$ の形に整理したときに出て来るqのべきの指数は、
各yごとに得られるyより後にあるxの個数の和に等しい。
これはその指数が最短経路から得られるYoung図形の重さに等しいことを意味している。
例えば上の例では



$$xyxxyxxyyxxxy = q^{7+5+3+3+0} x^8 y^5.$$

右側にxが0個
右側にxが3個
右側にxが3個
右側にxが5個
右側にxが7個

$qyx = xy$ のとき、$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}$ なので、以上によって、

$$\left(\binom{n}{k}_q \text{における } q^w \text{ の係数}\right) = \left(\overset{ヨコ}{k} \times \overset{タテ}{(n-k)} \text{ の長方形中の重さ } w \text{ のYoung図形の個数}\right),$$

$$\left(\binom{n}{k}_q \text{における } q^w \text{ の係数}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } w > k(n-k), \\ 1 & \text{if } w = 0 \text{ or } w = k(n-k). \end{cases}$$

$$\left(\binom{n}{k}_q \text{における係数の和}\right) = \binom{n}{k}_{q=1} = \binom{n}{k}.$$

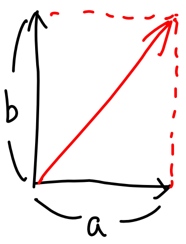
各重さwごとに確率p_wを $p_w = \left(\binom{n}{k}_q \text{における } q^w \text{ の係数}\right) \Big/ \binom{n}{k}$ と定めることによって、
固定された長方形に含まれるYoung図形の重さの確率分布が得られる。
その確率分布は(tieがない場合の) Mann-Whitneyの検定で使われる帰無仮説に対応する確率分布に一致しており、期待値は $\frac{1}{2}k(n-k)$、分散は $\frac{1}{12}k(n-k)(n+1)$ になり、
正規分布で近似される。

□

tieがある場合へのYoung図形の一般化

ルール

a個 $\left\{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}\right.$ b個 $\left\{\begin{matrix} y \\ \vdots \\ y \end{matrix}\right.$ ↑ 同順位 では



と進む。

tieがある例

$x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,\ x_4=5,\ x_5=7,$

$y_1=2,\ y_2=3,\ y_3=5,\ y_4=5$

を大きな順に並べると、

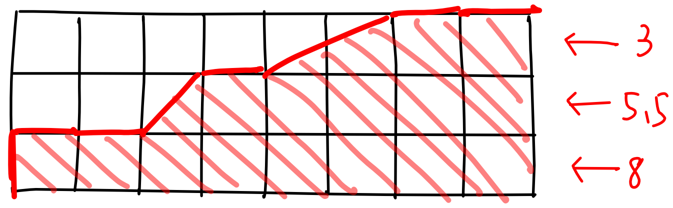
7	5	3	2	1
x_5	x_3	x_2	y_1	x_1
	x_4	y_2		
	y_3			
	y_4			

ここでtieが発生している。

11	10	9	7.5	6	4	2	1
3	8	7	2	5	1	2	1
y	x	x	y	x	y	x	x
			x^6		$\overset{3.5}{x}$		
					$\overset{3.5}{x}$		

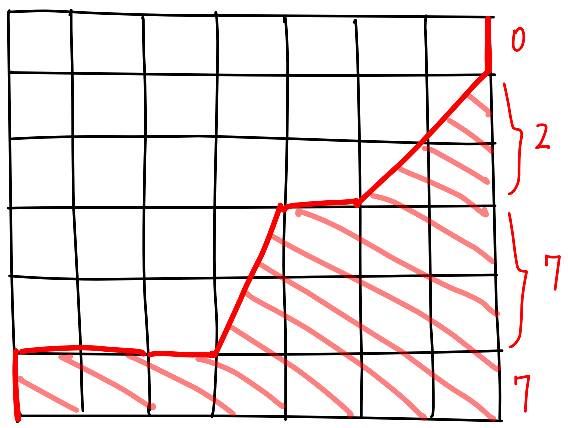
8 5.5 3

OK OK OK



13	11.5	10	8	6	3.5	1
6			4.5		2.5	1
y	x	x	y	x	y	y
	x		y		y	0
			x		x	
					x	

7 $3.5\times2=7$ $1\times2=2$



5	4	2.5	1
3		1.5	1
y	x	y	x
		y	

2 $1\times2=2$