$\boxed{\sqrt{10}\text{ の近似値}}$ $\sqrt{10}$ を小数点以下第2桁まで求めよ.

$f(x)=\sqrt{9+x}$ とおく.

$f(0)=3,\ f'(x)=\frac{1}{2}(9+x)^{-\frac{1}{2}},\ f'(0)=\frac{1}{6},\ f''(x)=-\frac{1}{4}(9+x)^{-\frac{3}{2}}.$

$f'(x_1)=f'(0)+\int_0^{x_1} f''(x_2)\,dx_2.$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x_1)\,dx_1=f(0)+f'(0)x+\int_0^x\left(\int_0^{x_1} f''(x_2)\,dx_2\right)dx_1=3+\frac{1}{6}x+\int_0^x\left(\int_0^{x_1} f''(x_2)\,dx_2\right)dx_1.$

$0\le x_2\le 1$ のとき
$$\begin{cases} f''(x_2)=-\frac{1}{4}(9+x)^{-\frac{3}{2}}\ge -\frac{1}{4}9^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^3}=-\frac{1}{108} \\ f''(x_2)=-\frac{1}{4}(9+x)^{-\frac{3}{2}}\le -\frac{1}{4}10^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{10\sqrt{10}}<-\frac{1}{4}\frac{1}{10\cdot 4}=-\frac{1}{160} \end{cases}$$

$x=1$ のときの $\int_0^x\left(\int_0^{x_1} c\,dx_2\right)dx_1=c\frac{x^2}{2}$ を使うと,
$$\begin{cases} \sqrt{10}=f(1)\ge 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{1}{108}>3.16666666\cdots-0.005=3.16166666\cdots>3.161, \\ \sqrt{10}=f(1)<3+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{1}{160}=3.16666666\cdots-0.003125=3.16354166\cdots<3.164. \end{cases}$$
□

$\boxed{\text{注意}}$ $\sqrt{10}=3.16227766\cdots.$

$\boxed{\text{Newton法}}$

$a>0$ とする. $y=x^2-a$ の $x=x_0$ での接線は $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2-a$ で

その零点は $x=\frac{a-x_0^2}{2x_0}+x_0=\frac{x_0+a/x_0}{2}.$

$x_{n+1}=\frac{x_n+a/x_n}{2}$ とおくと, $x_n\to\sqrt{a}.$

$a=10,\ x_0=3$ のとき,

$x_1=\frac{3+\frac{10}{3}}{2}=\frac{19}{6}=3.1666666\cdots,\quad x_1^2=\frac{361}{36}>10$

偶然ではない. →(☆)

$x_2=\frac{\frac{19}{6}+\frac{10\times 6}{19}}{2}=\frac{721}{288}=3.16228070\cdots,\quad x_2^2=\frac{519841}{51984}>10$

$3.162^2=9.998244<10.$

ゆえに, $3.162<\sqrt{10}<3.1623$

(☆) $x_n=\frac{\ell}{k},\ \ell^2=10k^2+1$ のとき, $x_{n+1}=\frac{\frac{\ell}{k}+\frac{10k}{\ell}}{2}=\frac{\ell^2+10k^2}{2k\ell}$ でかつ

$(\ell^2+10k^2)=(20k^2+1)^2,\quad 10(2k\ell)^2+1=10(4k^2(10\ell^2+1))+1=400k^2+40k^2+1=(20k+1)^2$

なので $(\ell^2+10k^2)^2=10(2k\ell)^2+1.$