$a_{n+1}=pa_n+q_n$ 型の漸化式の解き方の習得法

(1) $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたす数列 a_n について，a_1 から出発して順番に a_5 を求めよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$
$a_1=a_1$
p倍してq_1をたす
$a_2=pa_1+q_1$
p倍してq_2をたす
$a_3=p^2a_1+pq_1+q_2$
これをつづけよ．

(2) a_5 の式から a_n の式を予想せよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $a_{n+1}=a_n+q_n$ の場合には，
$a_1=a_1$，$a_2=a_1+q_1$，$a_3=a_1+q_1+q_2$，$a_4=a_1+q_1+q_2+q_3$，$a_5=a_1+q_1+q_2+q_3+q_4$．
$a_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}$ だと予想できる．
これと同様．

(3) 上で予想した a_n の式が $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしていることを示せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $a_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}$ は
$a_n+q_n=a_1+q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}+q_n=a_{n+1}$ なので，$a_{n+1}=a_n+q_n$ をみたす．
これと同様

(4) $p\neq 0,1$ と仮定する．$S=p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1$ を $\dfrac{\boxed{}}{p-1}$ の形で表せ．$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-S$．

(5) $p\neq 0,1$ と仮定する．$a_{n+1}=pa_n+c$ をみたす数列 a_n を a_1, p, c, n で簡潔に表せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $q_n=c$ のときの (2), (3) の結果を使ってみよ．

(6) $a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ．

(7) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．
$S=p^3+p^2q+pq^2+q^3$ を $\dfrac{\boxed{}}{p-q}$ の形で表せ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-qS$．

(8) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．
$S=p^{n-2}+p^{n-3}q+p^{n-4}q^2+\cdots+pq^{n-3}+q^{n-2}$ を p, q, n で簡潔に表せ．

(9) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する．
$a_{n+1}=pa_n+cq^{n-1}$ をみたす数列 a_n を a_1, p, q, c, n で簡潔に表せ．

(10) $a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n+4\cdot 5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ．

(11) $p\neq 1$ と仮定する．$S=p^3+2p^2+3p+4$ を $p\dfrac{\boxed{}}{(p-1)^2}-\dfrac{\boxed{}}{p-1}$ の形で表せ．$\boxed{\text{ヒント}}$ $pS-S$．

(12) $p\neq 1$ と仮定する．
$S=p^{n-2}+2p^{n-3}+3p^{n-4}+\cdots+(n-2)p+(n-1)$ を $p\dfrac{\boxed{}}{(p-1)^2}-\dfrac{\boxed{}}{p-1}$ の形で表せ．
さらに S を $\boxed{}\,p^{n-1}-\boxed{}\,n-\boxed{}$ の形で表せ．

(13) $p\neq 1$ と仮定する．$a_{n+1}=pa_n+bn$ をみたす数列 a_n を a_1, p, b, n で簡潔に表せ．

(14) $a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ．

$\boxed{\text{解答例}}$ (1), (2), (3)

(1) $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたす数列 a_n について、a_1 から出発して順番に a_5 を求めよ。

$\boxed{\text{解答例}}$ $a_{n+1}=pa_n+q_n$ より、p倍して q_{n-1} をたすことをくりかえすと、

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
&\quad\downarrow p\text{倍} \\
a_2 &= pa_1+q_1 \\
&\quad\downarrow \quad \downarrow p\text{倍} \\
a_3 &= p^2a_1+pq_1+q_2 \\
&\quad\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow p\text{倍} \\
a_4 &= p^3a_1+p^2q_1+pq_2+q_3 \\
&\quad\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow p\text{倍} \\
a_5 &= p^4a_1+p^3q_1+p^2q_2+pq_3+q_4
\end{aligned}
$$

数列の問題は $a_1, a_2, a_3, \dots$ を書き下してみるとパターンが見えて来ることが多い。
これが基本。

(2) a_5 の式から a_n の式を予想せよ。

$\boxed{\text{解答例}}$

$$a_5 = p^4a_1 + \overbrace{p^3q_1+p^2q_2+pq_3+q_4}^{4\text{項}} \qquad n=5$$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}}_{n-1\text{項}}$$

という形から、

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}}_{n-1\text{項}}$$

だと予想できる。 （特に $n=1$ のとき項無しになる）

(3) 上で予想した a_n の式が $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしていることを示せ。

$\boxed{\text{解答例}}$ $a_n = p^{n-1}a_1+p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}$ のとき、

$$\downarrow p\text{倍}$$

$$pa_n+q_n = p^na_1+p^{n-1}q_1+p^{n-2}q_2+\cdots+p^2q_{n-2}+pq_{n-1}+q_n = a_{n+1}$$

(2) で予想された a_n の式はたしかに $a_{n+1}=pa_n+q_n$ をみたしている。

$\boxed{解答例}$ (4), (5), (6)

(4) $p \neq 0, 1$と仮定する。$S = p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p + 1$ を $\dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ。

$\boxed{解答例}$

$$\begin{array}{rl} pS = & p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p^2 + p \\ -)\quad S = & \qquad\quad\ p^{n-2} + \cdots + p^2 + p + 1 \\ \hline (p-1)S = & p^{n-1} - 1 \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}$.

(5) $p \neq 0, 1$と仮定する。$a_{n+1} = pa_n + c$ をみたす数列 a_n を a_1, p, c, n で簡潔に表せ。

$\boxed{解答例}$ これは上で $q_n = c$ の場合なので

$$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}c + p^{n-3}c + \cdots + pc + c = p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + p^{n-1} + \cdots + p + 1)$$

$$\overset{(4)}{=} p^{n-1}a_1 + \underbrace{c\,\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}_{=\frac{c}{p-1}p^{n-1} - \frac{c}{p-1}} = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}$$

ゆえに、$a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}$.

(6) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{解答例}$ 上の(5)の公式に $a_1 = 2$, $p = 3$, $c = 4$ を代入すると、

$$a_n = \left(a_1 + \frac{c}{p-1}\right)3^{n-1} - \frac{c}{p-1} = \left(5 + \frac{4}{2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{2} = 7 \cdot 3^{n-1} - 2.$$

$\boxed{検算}$ $a_1 = 7 \cdot \underbrace{3^{1-1}}_{=1} - 2 = 5$, $3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1}$ OK

$\boxed{別解}$

$a_1 = 5$ 3倍して4をたす。(以下くりかえす)

$a_2 = 5 \cdot 3 + 4$

$a_3 = 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$

$a_4 = 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$

$a_5 = 5 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4$

$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} + \cdots + 4 \cdot 3 + 4$ と予想できる。

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ を計算し切らずに順番に書いて行けばパターンが見えて来る。

この予想の下で $a_1 = 5$, $4a_n + 4 = 5 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} + \cdots + 4 \cdot 3 + 4 = a_{n+1}$ となり、予想は正しい。

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 4(3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3 + 1) = 5 \cdot 3^{n-1} + 4\,\frac{3^{n-1}-1}{3-1} = 5 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} - 2 = 7 \cdot 3^{n-1} - 2.$$

$\therefore\ a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2$

$\boxed{検算}$ $a_1 = 7 \cdot \underbrace{3^{1-1}}_{=1} - 2 = 5$, $3a_n + 4 = 7 \cdot 3^n - 6 + 4 = 7 \cdot 3^n - 2 = a_{n+1}$ OK

検算は必ず行うべき! 人間はまちがう。

$\boxed{解答例}$ (7), (8), (9), (10)

(7) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$ を $\dfrac{\boxed{}}{p-q}$ の形で表せ。

(7), (8), (9) では実は p または q が $0, 1$ であってもよい。

$\boxed{解答例}$

$$\begin{array}{rl} pS = & p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3 \\ -)\ qS = & \phantom{p^4 +{}} p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4 \\ \hline (p-q)S = & p^4 - q^4 \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^4 - q^4}{p-q}$

(8) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$S = p^{n-2} + p^{n-3}q + p^{n-4}q^2 + \cdots + pq^{n-3} + q^{n-2}$ を p, q, n で簡潔に表せ。

$\boxed{解答例}$

$$\begin{array}{rl} pS = & p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \cdots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} \\ -)\ qS = & \phantom{p^{n-1} +{}} p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \cdots + p^2q^{n-3} + pq^{n-2} + q^{n-1} \\ \hline (p-q)S = & p^{n-1} - q^{n-1} \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}$

(9) $p, q, 0, 1$ は互いに異なると仮定する。

$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ をみたす数列 a_n を a_1, p, q, c, n で簡潔に表せ。

$\boxed{解答例}$ (2), (3) で得た $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}$ に $q_n = cq^{n-1}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1}a_1 + cp^{n-2} + cp^{n-3}q + \cdots + cpq^{n-3} + cq^{n-2} \\ &= p^{n-1}a_1 + c(p^{n-2} + p^{n-3}q + \cdots + pq^{n-3} + q^{n-2}) \\ &\overset{(8)}{=} p^{n-1}a_1 + \underbrace{c\,\frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}}_{= \frac{c}{p-q}p^{n-1} - \frac{c}{p-q}q^{n-1}} = \left(a_1 + \frac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-q}q^{n-1}. \end{aligned}$$

ゆえに、$a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$.

(10) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 4\cdot 5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{解答例}$ 上の公式に $a_1 = 2$, $p = 3$, $c = 4$, $q = 5$ を代入すると、

$$a_n = \left(5 + \frac{4}{-2}\right)3^{n-1} - \frac{4}{-2}5^{n-1} = 3^n + 2\cdot 5^{n-1}.$$

$\boxed{検算}$ $a_1 = 3 + 2 = 5$, $3a_n + 4\cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6\cdot 5^{n-1} + 4\cdot 5^{n-1}}^{= 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5\cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2\cdot 5^n = a_{n+1}$ $\boxed{\text{OK}}$

$\boxed{解答例}$ $a_1 = 5$, $a_2 = 3\cdot 5 + 4$, $a_3 = 3^2\cdot 5 + 4\cdot 3 + 4\cdot 5$, $a_4 = 3^3\cdot 5 + 4\cdot 3^2 + 4\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot 5^2$

$a_5 = 3^4\cdot 5 + 4\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5^3$, …

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1}\cdot 5 + 4\cdot 3^{n-2} + 4\cdot 3^{n-3}\cdot 5 + \cdots + 4\cdot 3\cdot 5^{n-3} + 4\cdot 5^{n-2} \\ &= 3^{n-1}\cdot 5 + 4(3^{n-2} + 3^{n-3}\cdot 5 + \cdots\cdots 3\cdot 5^{n-3} + 5^{n-2}) = 3^{n-1}\cdot 5 + 4\,\frac{3^{n-1} - 5^{n-1}}{3-5} = 3^n + 2\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$a_n = 3^n + 2\cdot 5^{n-1}$

$\boxed{検算}$ $a_1 = 3 + 2 = 5$, $3a_n + 4\cdot 5^{n-1} = 3^{n+1} + \overbrace{6\cdot 5^{n-1} + 4\cdot 5^{n-1}}^{= 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5\cdot 5^{n-1}} = 3^{n+1} + 2\cdot 5^n = a_{n+1}$ $\boxed{\text{OK}}$

解答例 (11), (12), (13), (14)

(11) $p \neq 1$ と仮定する. $S = p^3 + 2p^2 + 3p + 4$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2} - \dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ.

解答例
$$\left.\begin{aligned} pS &= p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p \\ S &= \phantom{p^4 + {}} p^3 + 2p^2 + 3p + 4 \\ (p-1)S &= p^4 + p^3 + p^2 + p - 4 = p(p^3+p^2+p+1) - 4 = p\frac{p^4-1}{p-1} - 4 \end{aligned}\right\} \therefore S = p\frac{p^4-1}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1}$$

(12) $p \neq 1$ と仮定する.
$S = p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \cdots + (n-2)p + (n-1)$ を $p\dfrac{\square}{(p-1)^2} - \dfrac{\square}{p-1}$ の形で表せ.
さらに S を $\square p^{n-1} - \square n - \square$ の形で表せ.

解答例
$$\left.\begin{aligned} pS &= p^{n-1} + 2p^{n-2} + 3p^{n-3} + \cdots + (n-2)p^2 + (n-1)p \\ S &= \phantom{p^{n-1} + {}} p^{n-2} + 2p^{n-3} + \cdots + (n-3)p^2 + (n-2)p + (n-1) \\ (p-1)S &= \underbrace{p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p^2 + p} - (n-1) \\ & = p(p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p + 1) = p\frac{p^{n-1}-1}{p-1} \end{aligned}\right\} \therefore S = p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1}.$$

$$S = p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1} = \frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1} \boxed{-\frac{p}{(p-1)^2}} - \frac{1}{p-1}n \boxed{+\frac{1}{p-1}}$$
$$= \frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1} - \frac{1}{p-1}n - \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$-\frac{p}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1} = \frac{-p+p-1}{(p-1)^2} = \frac{-1}{(p-1)^2}$$

(13) $p \neq 1$ と仮定する. $a_{n+1} = pa_n + bn$ をみたす数列 a_n を a_1, p, b, n で簡潔に表せ

解答例 $a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}$ に $q_n = bn$ を代入すると,

$$a_n = p^{n-1}a_1 + b\left(p^{n-2} + 2p^{n-3} + \cdots + (n-2)p + (n-1)\right)$$
$$\overset{(12)}{=} p^{n-1}a_1 + b\left(\frac{p}{(p-1)^2}p^{n-1} - \frac{1}{p-1}n - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \left(a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \frac{b}{p-1}n - \frac{b}{(p-1)^2}.$$

検算
$$pa_n + bn = \left(a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^n - \frac{bp}{p-1}n - \frac{bp}{(p-1)^2} + bn$$
$$= \left(a_1 + \frac{bp}{(p-1)^2}\right)p^n + \underbrace{\frac{-bp}{p-1}n + \frac{-b(p-1)-b}{(p-1)^2} + \frac{bp-b}{p-1}} = a_{n+1} \quad \text{OK}$$
$$= \frac{-b}{p-1}n + \frac{-b}{p-1} + \frac{-b}{(p-1)^2} = -\frac{b}{p-1}(n+1) - \frac{b}{(p-1)^2}$$

(14) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 4n$ をみたす数列 a_n を求めよ.

解答例 上の公式に $a_1 = 5$, $p = 3$, $b = 4$ を代入すると,　　次ページに別解あり

$$a_n = \left(5 + \frac{12}{4}\right)3^{n-1} - \frac{4}{2}n - \frac{4}{4} = 8 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1.$$

検算 $a_1 = 8 - 2 - 1 = 5$ OK

$3a_n + 4n = 8 \cdot 3^n - 6n - 3 + 4n = 8 \cdot 3^n - 2n - 3$
$a_{n+1} = 8 \cdot 3^{n-1} - 2(n+1) - 1 = 8 \cdot 3^{n-1} - 2n - 3$ 等しい. OK

$\boxed{\text{別解例}}$ (6), (10), (14)

(6) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4$ をみたす $b_n=\alpha$ を求めよう。$\alpha=3\alpha+4$ より $\alpha=-2$。

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} &= 3a_n+4 \\ -) & \alpha &= 3\alpha+4 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha &= 3(a_n-\alpha) \end{array}$$

∴ $a_n-\alpha=3^{n-1}(a_1-\alpha)$,

$a_n=3^{n-1}(\underset{-2}{\underset{\shortparallel}{\underset{5}{\underset{\shortparallel}{a_1}}}}-\alpha)+\alpha$ $=\underline{7\cdot3^{n-1}-2}$.

（$a_1=5$, $\alpha=-2$, $\alpha=-2$）

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=7-2=5$ OK

$3a_n+4=7\cdot3^n-6+4=7\cdot3^n-2=a_{n+1}$ OK

(10) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす $b_n=\alpha\cdot5^{n-1}$ を求めよう。

$\alpha\cdot5^n=3\alpha\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}$. 両辺を 5^{n-1} で割ると、$5\alpha=3\alpha+4$, $\alpha=2$. $b_n=2\cdot5^{n-1}$.

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} &= 3a_n+4\cdot5^{n-1} \\ -) & b_{n+1} &= 3b_n+4\cdot5^{n-1} \\ \hline & a_{n+1}-b_{n+1} &= 3(a_n-b_n) \end{array}$$

∴ $a_n-b_n=3^{n-1}(a_1-b_1)$

$a_n=3^{n-1}(\underbrace{a_1-b_1}_{5-2=3})+\underset{2\cdot5^{n-1}}{\underset{\shortparallel}{b_n}}=\underline{3^n+2\cdot5^{n-1}}$.

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=3+2=5$ OK

$3a_n+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+6\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+10\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+2\cdot5^n=a_{n+1}$ OK

(14) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ。

$\boxed{\text{別解}}$ $b_{n+1}=3b_n+4n$ をみたす $b_n=An+B$ を求めよう。

$0=b_{n+1}-3b_n-4n=\underline{An}+A+B\underline{-3An}-3B\underline{-4n}=(\underbrace{-2A-4}_{=0})n+\underbrace{A-2B}_{=0}$

$-2A-4=0$ より、$A=-2$

$A=-2$ と $A-2B=0$ より $B=-1$

$b_n=-2n-1$.

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} &= 3a_n+4n \\ -) & b_{n+1} &= 3b_n+4n \\ \hline & a_{n+1}-b_{n+1} &= 3(a_n-b_n) \end{array}$$

∴ $a_n-b_n=3^{n-1}(a_1-b_1)$

$a_n=3^{n-1}(\underbrace{a_1-b_1}_{5-(-3)=8})+\underset{-2n-1}{\underset{\shortparallel}{b_n}}=8\cdot3^{n-1}-2n-1$.

$\boxed{\text{検算}}$ $a_1=8-2-1=5$ OK

$3a_n+4n=8\cdot3^n-6n-3+4n=8\cdot3^n-2n-3$

$a_{n+1}=8\cdot3^{n-1}-2(n+1)-1=8\cdot3^{n-1}-2n-3$

等しい OK

別の別解例　(6), (10), (14)

(6) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたす数列 a_n を求めよ。

別々解　$a_n=A3^{n-1}+B$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4=A3^n+B-A3^n-3B-4=-2B-4$ より $B=-2$

$0=a_1-5=A+B-5=A-2-5=A-7$ より $A=7$.

$a_n=7\cdot3^{n-1}-2$.

検算　$a_1=7-2=5$ OK

$3a_n+4=7\cdot3^n-6+4=7\cdot3^n-2=a_{n+1}$ OK

(10) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたす数列 a_n を求めよ。

別々解　$a_n=A3^{n-1}+B5^{n-1}$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot5^{n-1}$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot5^{n-1}=A3^n+\underbrace{B5^n}_{=5B\cdot5^{n-1}}-A3^n-3B5^{n-1}-4\cdot5^{n-1}=(2B-4)5^{n-1}$ より $B=2$

$0=a_1-5=A+B-5=A+2-5=A-3$ より $A=3$.

$a_n=3\cdot3^{n-1}+2\cdot5^{n-1}$　$(=3^n+2\cdot5^{n-1})$

検算　$a_1=3+2=5$ OK

$3a_n+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+6\cdot5^{n-1}+4\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+10\cdot5^{n-1}=3^{n+1}+2\cdot5^n=a_{n+1}$ OK

(14) $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたす数列 a_n を求めよ。

別々解　$a_n=A3^{n-1}+Bn+C$ で $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ をみたすものを求めよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4n=A3^n+Bn+B+C-A3^n-3Bn-3C-4n=\underbrace{(-2B-4)}_{=0}n+\underbrace{B-2C}_{=0}$

$-2B-4=0$ より $B=-2$, $0=B-2C=-2-2C$ より $C=-1$.

$0=a_1-5=A+B+C=A-2-1-5=A-8$ より $A=8$.

$a_n=8\cdot3^{n-1}-2n-1$

検算　$a_1=8-2-1=5$ OK

$3a_n+4n=8\cdot3^n-6n-3+4n=8\cdot3^n-2n-3$

$a_{n+1}=8\cdot3^{n-1}-2(n+1)-1=8\cdot3^{n-1}-2n-3$　等しい OK

別の型の問題

(15) $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot 3^n$ をみたす数列 a_n を求めよ。

解答例

$a_1=6$

$a_2=6\cdot 3+4\cdot 3$

$a_3=6\cdot 3^2+4\cdot 3^2+4\cdot 3^2$

$a_4=6\cdot 3^3+4\cdot 3^3+4\cdot 3^3+4\cdot 3^3$

$a_5=6\cdot 3^4+\underbrace{4\cdot 3^4+4\cdot 3^4+4\cdot 3^4+4\cdot 3^4}_{5-1\text{個},\ n-1}$ ← この4は5−1　n−1

↑ n=5

$a_n=6\cdot 3^{n-1}+4(n-1)3^{n-1}=(4n+2)3^{n-1}$ と予想される。

この予想の下で、

$a_1=4+2=6$,

$a_{n+1}=(4n+6)3^n$

$3a_n+4\cdot 3^n=(4n+2)3^n+4\cdot 3^n=(6n+4)3^n$　∴ $a_{n+1}=3a_n+4\cdot 3^n$

これで $a_n=(4n+2)3^{n-1}$ であることが示された。

検算 $a_n=(4n+2)3^{n-1}$ のとき、

$a_1=4+2=6$ OK

$a_{n+1}=(4n+6)3^n$　等しい OK

$3a_n+4\cdot 3^n=(4n+2)3^n+4\cdot 3^n=(4n+6)3^n$

別解 $a_n=(An+B)3^{n-1}$ で $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot 3^n$ をみたすものを求めてみよう。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot 3^n=(An+A+B)3^n-(An+B)3^n-4\cdot 3^n=(A-4)3^n$.　∴ $A=4$.

$0=a_1-6=A+B-6=4+B-6=B-2$.　∴ $B=2$.

逆をたどると、$a_n=(4n+2)3^{n-1}$ は $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n+4\cdot 3^n$ をみたすことがわかる。

(16) ①$a_1=6$, ②$a_{n+1}=3a_n+4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n-1}+4n+6$ をみたは数列 a_n を求めよ。

どんな方法であっても答えを見付ければ勝ち。

解答例 $a_n=(An+B)3^{n-1}+C2^{n-1}+Dn+E$ で ①,② をみたすものが求まればよい。

$0=a_{n+1}-3a_n-4\cdot 3^n-3\cdot 2^{n-1}-4n-6$

$$=\left\{\begin{array}{l}(An+A+B)3^n+2C2^{n-1}+Dn+D+E\\-(An+B)3^n-3C2^{n-1}-3Dn-3E\\-4\cdot 3^n-3\cdot 2^{n-1}-4n-6\end{array}\right\}=\underbrace{(A-4)}_{=0}3^{n-1}+\underbrace{(-C-3)}_{=0}2^{n-1}+\underbrace{(-2D-4)}_{=0}n+\underbrace{\overset{-2}{D}-2E-6}_{=0}$$

$A=4$　$C=-3$　$D=-2$　$E=-4$

$0=a_1-6=A+B+C+D+E-6$,　$B=6-A-C-D-E=6-4+3+2+4=11$.

$a_n=(4n+11)3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}-2n-4$.

検算 $a_1=4+11-3-2-4=6$ OK

$3a_n+4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n-1}+4n+6$

$=(4n+11)3^n-9\cdot 2^{n-1}-6n-12+4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n-1}+4n+6$

$=(4n+4+11)3^n-3\cdot 2^n-2n-6$

$=(4(n+1)+11)3^n-3\cdot 2^n-2(n+1)-4=a_{n+1}$ OK

Input

$a(1)=6 \mid a(n+1)=3a(n)+4n+3\times 2^{n-1}+4\times 3^n+6$

Alternate form

$\{a(1)=6,\ 6a(n)+8n+3\times 2^n+8\times 3^n+12=2a(n+1)\}$

Recurrence equation solution

$a(n)=\frac{1}{6}(2\times 3^n(4n+11)-3(4n+3\times 2^n+8))$

$a_n=3^{n-1}(4n+11)-3\cdot 2^{n-1}-2n-4$ OK

基本問題 $a_{n+1}=pa_n+q_n$ $(n=1,2,3,\dots)$ をみたす a_n を求めよ. ← 借金の増え方の方程式

$a_1, a_2, a_3, \dots$ を a_1, p, q_n たちで表してみよう

$a_1=a_1$　↷ p倍してq_1をたす

$a_2=pa_1+q_1$　↷ p倍してq_2をたす

$a_3=p^2a_1+pq_1+q_2$　↷ p倍してq_3をたす

$a_4=p^3a_1+p^2q_1+pq_2+q_3$　↷ p倍してq_4をたす

$a_5=p^4a_1+p^3q_1+p^2q_2+pq_3+q_4$

......

$$a_n=p^{n-1}a_1+\underbrace{p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか?

$a_n=$ (第n年目の借金の総額)
$p=1+$(金利)
$q_n=$ (第n+1年目に新たに増やした借金)
のとき,
$a_{n+1}=pa_n+q_n$.
(注) 第n+1年に借金を返した場合に $q_n<0$ となる.

$p=1$の場合 $p^{n-2}q_1+p^{n-3}q_2+\cdots+pq_{n-2}+q_{n-1}=q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}$ ← (金利)$=0$ の場合

① $q_n=1$ (nによらない定数) のとき, $q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1}=n-1$

② $q_n=n$ のとき, $q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

理由
$S=1+2+\cdots+(n-1)$
$S=(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ 順序が逆　タテにたす → $2S=\overbrace{n+n+\cdots+n}^{n-1}=n(n-1)$.
$\therefore S=\frac{n(n-1)}{2}$.

③ $q_n=\frac{n(n+1)}{2}$ のとき, $Q_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ とおくと,

$$Q_n-Q_{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3!}=\frac{(\overbrace{(n+2)-(n-1)}^{=3})n(n+1)}{3!}=\frac{n(n+1)}{2}=q_n.$$

$q_n=-Q_{n-1}+Q_n$, $q_1=-Q_0+Q_1=Q_1$ $(Q_0=0)$ より

$$q_1+q_2+\cdots+q_{n-2}+q_{n-1}=\underbrace{Q_1}\underbrace{-Q_1+Q_2}-\cdots\underbrace{-Q_{n-3}+Q_{n-2}}\underbrace{-Q_{n-2}+Q_{n-1}}=Q_{n-1}$$

④ $q_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ のとき, $Q_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$ とおくと,

$$Q_n-Q_{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}-\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}\underset{n+3-(n-1)=4}{=}\frac{4n(n+1)(n+2)}{4!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=q_n.$$

上と同様にして, $q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}=Q_{n-1}$

⑤ $q_n=n^2=n(n+1)-n=2\frac{n(n+1)}{2}-n$ のとき,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=q_1+q_2+\cdots+q_n=2\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)\left(2(n+2)-3\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

⑥ $q_n=n^3=\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{n^2+3n+2}-3n^2-2n=n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+\underbrace{3n-2n}=3!\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}-6\frac{n(n+1)}{2}+n$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=q_1+q_2+\cdots+q_n=3!\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}-\cancel{6}\frac{n(n+1)(n+2)}{\cancel{3!}}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\Big(\underbrace{(n+2)(n+3)}_{n^2+\underset{n}{\cancel{5n}}+\cancel{6}}\underbrace{-4(n+2)}_{\cancel{-4n}\,\cancel{-8}}\cancel{+2}\Big)=\frac{n(n+1)}{4}\underbrace{(n^2+n)}_{=n(n+1)}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$a_{n+1} = pa_n + q_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ をみたす a_n を求めよ。 ← 借金の増え方の方程式

$a_1 = a_1$ ↷ p倍してq_1をたす

$a_2 = pa_1 + q_1$ ↷ p倍してq_2をたす

$a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2$ ↷ p倍してq_3をたす

$a_4 = p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3$ ↷ p倍してq_4をたす

$a_5 = p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4$

……

$a_n = p^{n-1}a_1 + p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}$

a_n = (第n年目の借金の総額)

p = 1+(金利)

q_n = (第$n+1$年目に新たに増やした借金)

のとき、

$a_{n+1} = pa_n + q_n$.

(注 第$n+1$年に借金を返した場合に $q_n < 0$ となる。)

1年目 $a_1 = a_1$

$\downarrow p$倍

2年目 $a_2 = pa_1 + q_1$

$\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍

3年目 $a_3 = p^2a_1 + pq_1 + q_2$

$\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍

4年目 $a_4 = p^3a_1 + p^2q_1 + pq_2 + q_3$

$\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍 $\downarrow p$倍

5年目 $a_5 = p^4a_1 + p^3q_1 + p^2q_2 + pq_3 + q_4$

n年目 $a_n = \underbrace{p^{n-1}a_1}_{①} + \underbrace{p^{n-2}q_1}_{②} + \underbrace{p^{n-3}q_2}_{③} + \cdots + \underbrace{pq_{n-2}}_{(n-1)} + \underbrace{q_{n-1}}_{(n)}$

① 1年目の借金の総額 a_1 が $n-1$ 年分の金利で $p^{n-1}a_1$ に増えた。

② 2年目に増えた借金の額 q_1 が $n-2$ 年分の金利で $p^{n-2}q_1$ に増えた。

③ 3年目に増えた借金の額 q_2 が $n-3$ 年分の金利で $p^{n-3}q_2$ に増えた。

……

(k) k年目に増えた借金の額 q_{k-1} が $n-k$ 年分の金利で $p^{n-k}q_{k-1}$ に増えた。

……

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p \neq 1 \text{ かつ } q_n = q \text{ (nによらない定数の場合)}}$ $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1$) の場合

$p = 1 + $(金利)で(金利)$\neq 0$ の場合

$a_1 = a_1$ p倍してqをたす

$a_2 = pa_1 + q$ p倍してqをたす

$a_3 = p^2a_1 + pq + q$

$a_4 = p^3a_1 + p^2q + pq + q$

$a_5 = p^4a_1 + p^3q + p^2q + pq + q = p^4a_1 + q(p^3 + p^2 + p + 1) = p^4a_1 + q\dfrac{p^4 - 1}{p - 1}$

$S = p^3 + p^2 + p + 1$ のとき

$pS = p^4 + p^3 + p^2 + p$ なので

$(p-1)S = p^4 - 1$, $S = \dfrac{p^4-1}{p-1}$.

……

$a_n = p^{n-1}a_1 + q(p^{n-2} + p^{n-1} + \cdots + p + 1)$

$S = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2}$ …①

$pS = \quad p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n-1}$ …②

②−①: $(p-1)S = p^{n-1} - 1$, $S = \dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}$.

$1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} = \dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}$.

$$a_n = p^{n-1}a_1 + q\frac{p^{n-1}-1}{p-1} = \left(a_1 + \frac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \frac{q}{p-1}.$$

$\boxed{\text{別解}}$ $p \neq 1$ とする. $a_{n+1} = pa_n + q$ ① の "$+q$" を消せれば $a_n = a_1p^{n-1}$ となりカンタン.

① から $\alpha = p\alpha + q$ ② をひくと, $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ なので, $a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$, $a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$.

② $\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{-q}{p-1}$ なので $a_n = \left(a_1 + \dfrac{q}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{q}{p-1}$. ← 上と同じ!

借金の増え方と減り方

$$\begin{cases} a_n = (\text{第n年目の借金の総額}) \\ p = 1 + (\text{金利}) > 1 \\ -q = (\text{第n+1年目に返す借金の額}) \end{cases}$$

のとき,

$a_{n+1} = pa_n + q$.

$\alpha = p\alpha + q$ をみたす α は ← この α は仮に $a_1 = \alpha$ のとき $a_n = \alpha$ (一定)となる α.

$$\alpha = \frac{-q}{p-1} = \frac{(\text{第n年目に返した借金の額})}{(\text{金利})}.$$

a_n は次のように書ける:

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha.$$

$p = 1 + (\text{金利}) > 1$ より, もしも $a_1 > \alpha$ ならば $n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$ となる.

$a_1 = \alpha$ ならば $a_n = \alpha$ と a_n は一定になる.

$a_1 < \alpha$ ならば n を大きくすると借金の総額 a_n は小さくなって行く.

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p\neq 1,\ q\neq p,\ q_n = cq^{n-1} \text{ の場合}}$　$a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ $(p\neq 1, q\neq 1, p\neq q)$ の場合.

$a_1 = a_1$

$a_2 = pa_1 + c$

$a_3 = p^2a_1 + cp + cq$

$a_4 = p^3a_1 + cp^2 + cpq + cq^2$

$S = p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$

$pS = p^4 + p^3q + p^2q^2 + pq^3$

$qS = \quad\ p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^4$

$(p-q)S = p^4 - q^4$, $S = \dfrac{p^4-q^4}{p-q}$

$a_5 = p^4a_1 + cp^3 + cp^2q + cpq^2 + cq^3 = p^4a_1 + c(p^3+p^2q+pq^2+q^3) = p^4a_1 + c\dfrac{p^4-q^4}{p-q}$

$$a_n = p^{n-1}a_1 + c\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = \left(a_1 + \frac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-q}q^{n-1}.$$

$\boxed{\text{注意}}$ $q_n = c$ $(q=1)$ のとき, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-1}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}$.

この公式は前ページに得た公式の q を c でおきかえたものになっている.

$\boxed{\text{注意}}$ $a_{n+1} = pa_n + cq^{n-1}$ $(1\neq p\neq q)$ をみたす a_n は $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$ と書ける.

$\boxed{\text{別解}}$ $p\neq 1$ とする. $a_{n+1} \overset{①}{=} pa_n + cq^{n-1}$ の "$+cq^{n-1}$" を消せば $a_n = a_1p^{n-1}$ となりカンタン.

$b_n = \alpha q^{n-1}$ が $b_{n+1} = pb_n + cq^{n-1}$ をみたす $\Leftrightarrow$ $\alpha q^n = p\alpha q^{n-1} + cq^{n-1}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha q = p\alpha + c$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \dfrac{-c}{p-q}$.

$\alpha = \dfrac{-c}{p-q}$ のときの $\alpha q^n = p\alpha q^{n-1} + cq^{n-1}$ を①からひくと, $a_{n+1} - \alpha q^n = p(a_n - \alpha q^{n-1})$.

ゆえに, $a_n - \alpha q^{n-1} = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$, $a_n = (a_1-\alpha)p^{n-1} + \alpha q^{n-1} = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$.

$\boxed{\text{別解}}$ $a_n = Ap^{n-1} + Bq^{n-1}$ で $a_{n+1} \overset{(*)}{=} pa_n + cq^{n-1}$ をみたすものを探してみよう.

$0 = a_{n+1} - pa_n - cq^{n-1} = \underline{Ap^n} + Bq^n - \underline{Ap^n} - pBq^{n-1} - cq^{n-1} = (\underbrace{-(p-q)B - c}_{=0})q^{n-1}$, $B = \dfrac{-c}{p-q}$.

$a_1 = A + B$ より, $A = a_1 - B = a_1 + \dfrac{c}{p-q}$.

これで, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{c}{p-q}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-q}q^{n-1}$ は $(*)$ をみたすことがわかった.

$$a_n = p^{n-1}a_1 + \underbrace{p^{n-2}q_1 + p^{n-3}q_2 + \cdots + pq_{n-2} + q_{n-1}}$$

ここを楽に計算できるのはどういう場合だろうか？

$\boxed{p \neq 1,\ q_n = cn \text{ の場合}}$　$a_{n+1} = pa_n + cn$　$(p \neq 1)$ の場合

$$\begin{cases} pS = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p \\ S = p^3 + 2p^2 + 3p + 4 \\ (p-1)S = p^4 + p^3 + p^2 + p - 4 = p\dfrac{p^4-1}{p-1} - 4, \quad \therefore\ S = p\dfrac{p^4-1}{(p-1)^2} - \dfrac{4}{p-1} \end{cases}$$

$a_1 = a_1$

$a_2 = pa_1 + c$

$a_3 = p^2a_1 + pc + 2c$

$a_4 = p^3a_1 + p^2c + 2pc + 3c$

$$a_5 = p^4a_1 + p^3c + 2p^2c + 3pc + 4c = p^4a_1 + c\overbrace{(p^3 + 2p^2 + 3p + 4)}^{=S\text{ とおく.}} = p^4a_1 + c\left(p\frac{p^4-1}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1}\right)$$

$\cdots\cdots$

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1}a_1 + c\left(p^{n-2} + 2p^{n-3} + 3p^{n-4} + \cdots + (n-2)p + (n-1)\right) \\ &= p^{n-1}a_1 + c\left(p\frac{p^{n-1}-1}{(p-1)^2} - \frac{n-1}{p-1}\right) \\ &= \left(a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

$$c\left(-\frac{p}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1}\right) = c\frac{-p+p-1}{(p-1)^2} = \frac{-c}{(p-1)^2}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$a_n = Ap^{n-1} + Bn + C$ で $a_{n+1} = pa_n + cn$ をみたすものを探してみる.

$$0 = a_{n+1} - pa_n - cn = Ap^n + Bn + B + C - Ap^n - pBn - pC - cn = \underbrace{((1-p)B - c)}_{=0\ \cdots①}n + \underbrace{B + (1-p)C}_{=0\ \cdots②},$$

①より, $B = \dfrac{c}{1-p} = -\dfrac{c}{p-1}$,　②より, $C = \dfrac{B}{p-1} = -\dfrac{c}{(p-1)^2}$.

$a_1 = A + B + C$ より, $A = a_1 - (B+C)$,　$-(B+C) = \dfrac{c}{p-1} + \dfrac{c}{(p-1)^2} = \dfrac{cp - c + c}{(p-1)^2} = \dfrac{cp}{(p-1)^2}$.

ゆえに, $a_n = \left(a_1 + \dfrac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \dfrac{c}{p-1}n - \dfrac{c}{(p-1)^2}$ は $a_{n+1} = pa_n + cn$ をみたす. □

a(n+1) = p a(n) + c n, a(1)=b

Input

$a(n+1) = p\,a(n) + c\,n \quad | \quad a(1) = b$

Alternate form

$\{p\,a(n) + c\,n = a(n+1),\ b = a(1)\}$

Recurrence equation solution

$$a(n) = b\,p^{n-1} + \frac{c\,(p^n - n\,p + n - 1)}{(p-1)^2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1p^{n-1} + \frac{c\left(-(p-1)n + p^n - 1\right)}{(p-1)^2} \\ &= \left(a_1 + \frac{cp}{(p-1)^2}\right)p^{n-1} - \frac{c}{p-1}n - \frac{c}{(p-1)^2} \quad \boxed{\text{OK}} \end{aligned}$$

理論的根拠

$Ta_n = a_{n+1}$ とおく。 $T^2a_n = TTa_n = Ta_{n+1} = a_{n+2}$, $T^3a_n = TT^2a_n = Ta_{n+2} = a_{n+3}$, …

一般に $T^k a_n = a_{n+k}$.

$(T-\alpha)a_n = Ta_n - \alpha a_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ のようにも計算できる。

$(T-\alpha)a_n = 0$ と $a_{n+1} - \alpha a_n = 0$ と $a_{n+1} = \alpha a_n$ は同値。

$(T-\alpha)a_n = 0$ の解き方

$a_n = \alpha^{n-1}$ のとき, $(T-\alpha)a_n = a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^n - \alpha\alpha^{n-1} = 0$.

$a_n = \alpha^{n-1}$ は $(T-\alpha)a_n = 0$ をみたす。 (注意: $a_n = A\alpha^{n-1}$ も $(T-\alpha)a_n = 0$ をみたす。)

$(T-\alpha)a_n = q$ の解き方1

$a_n = b$ について, $(T-\alpha)a_n = a_{n+1} - \alpha a_n = b - \alpha b = (1-\alpha)b$ なので,

$b = \frac{q}{1-\alpha}$ のとき, $(T-\alpha)b = q$.

$(T-\alpha)a_n = q$ から $(T-\alpha)b = q$ をひくと, $(T-\alpha)(a_n - b) = 0$, ∴ $a_n - b = A\alpha^{n-1}$, $a_n = A\alpha^{n-1} + b$.

$(T-\alpha)a_n = q$ の解き方2

もしも a_n が $(T-\alpha)a_n = q$ をみたしているならば, 両辺に $T-1$ を作用させると,

$$(T-1)(T-\alpha)a_n = (T-1)q = q - q = 0.$$

$a_n = A\alpha^n$ は $(T-\alpha)a_n = 0$ をみたすので $(T-1)(T-\alpha)a_n = 0$ もみたす。

$a_n = b$ は $(T-1)a_n = 0$ をみたすので $(T-1)(T-\alpha)a_n = (T-\alpha)(T-1)a_n = 0$ もみたす。

ゆえに, $a_n = A\alpha^n + b$ は $(T-1)(T-\alpha)a_n = 0$ をみたす。

実は $(T-1)(T-\alpha)a_n = 0$ をみたす a_n は $a_n = A\alpha^n + b$ と書けることを別に示せる。

$a_n = A\alpha^n + b$ で $(T-\alpha)a_n = q$ をみたすものを探せばよい。

$a_n = A\alpha^n + b$ のとき, $(T-\alpha)a_n = A\underbrace{(T-\alpha)\alpha^n}_{=0} + (T-\alpha)b = b - \alpha b = (1-\alpha)b$.

ゆえに $b = \frac{q}{1-\alpha}$ とおくと, $(T-\alpha)a_n = q$.

$(T-\alpha)a_n = b\beta^n$ $(\alpha \neq \beta)$ の解き方

a_n が $(T-\alpha)a_n = b\beta^n$ をみたしているならば, $(T-\beta)\beta^n = 0$ なので

$(T-\beta)(T-\alpha)a_n = b(T-\beta)\beta^n = 0$ となり, a_n は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n = 0$ をみたす。

$a_n = \alpha^n$ と $a_n = \beta^n$ は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n = 0$ をみたすので,

$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ も $(T-\alpha)(T-\beta)a_n = 0$ をみたす。

実は $(T-\alpha)(T-\beta)a_n = 0$ をみたす a_n は $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ と書ける。

例 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n \overset{(*)}{=} 0$ $(D = p^2 - 4q \neq 0)$ をみたす a_n の求め方

(*) は $(T^2 + pT + q)a_n = 0$ と書き直される。 $T^2 + pT + q = (T-\alpha)(T-\beta)$, $\alpha \neq \beta$ と書ける。

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ をみたす a_n は $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ と書ける。

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ すなわち $(T^2 - 5T + 6)a_n = 0$ をみたす a_n は, $T^2 - 5T + 6 = (T-2)(T-3)$ なので

$a_n = A2^n + B3^n$ と書ける。