昨日のチェバの定理の説明の訂正と補足

昨日の説明

A, B, C は平面上の一般の位置にある（1直線にない）3点であるとする。

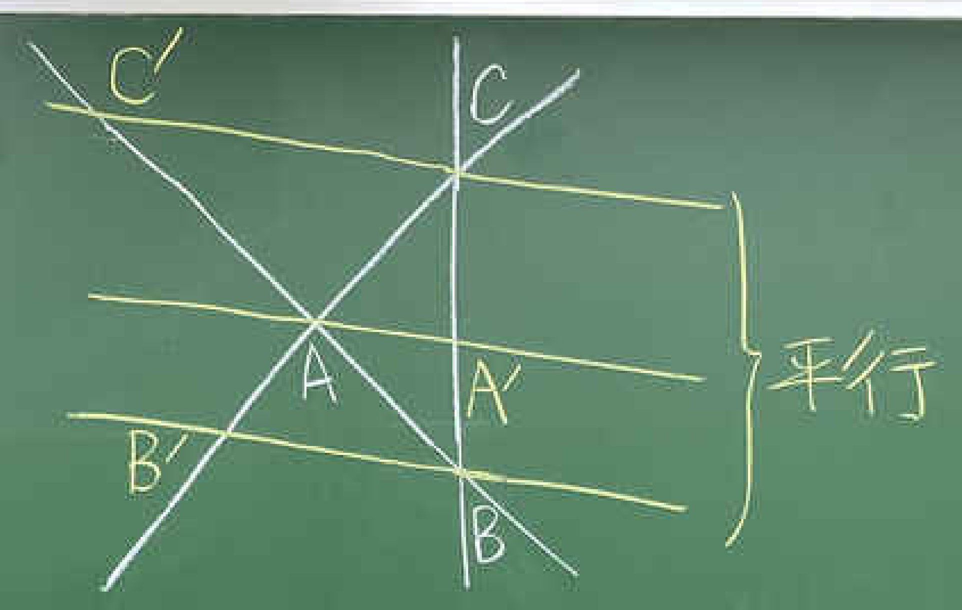
A', B', C' はそれぞれ直線 BC, CA, AB 上の点で A, B, C とは異なるものとする。

Cevaの定理とその逆

3直線 AA', BB', CC' は1点で交わる。

$$\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=1.$$

訂正　上の主張は文字通りには正しくない。しかし、「平面」を「射影平面」と解釈すれば正しい。



このような場合にも

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=1$$

は成立している。

3本の直線 AA', BB', CC' が平行なときは、射影平面上では、

無限遠で1点で交わる

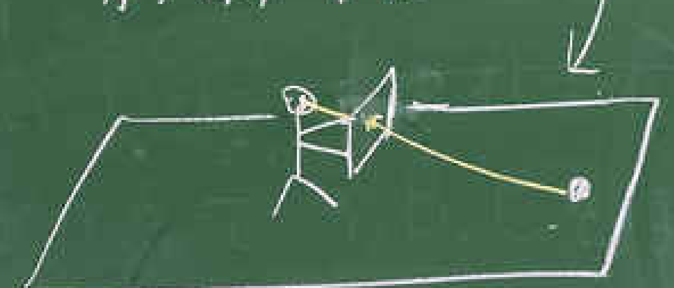
ことになる。

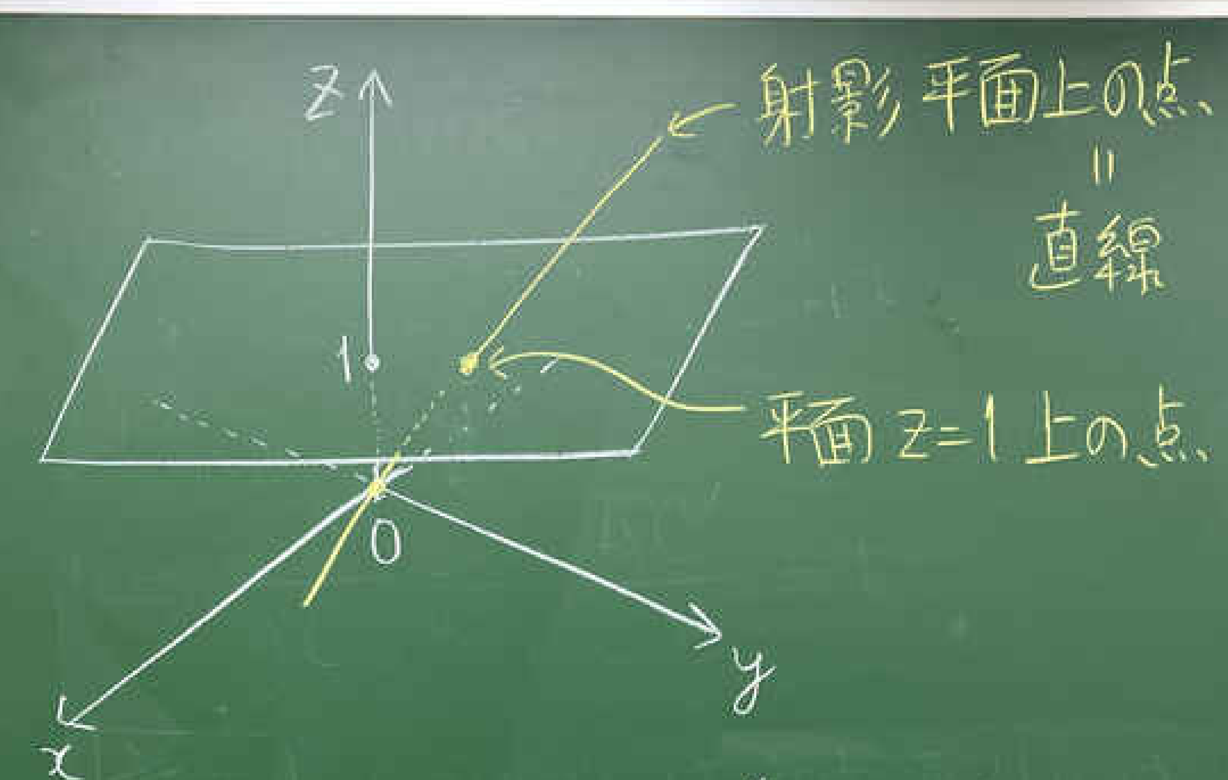
（実）射影平面の定義

$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線全体の集合を射影平面と呼び、

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $P\mathbb{R}^2$ と書いたりする。

射影平面は こういう話の数学化。

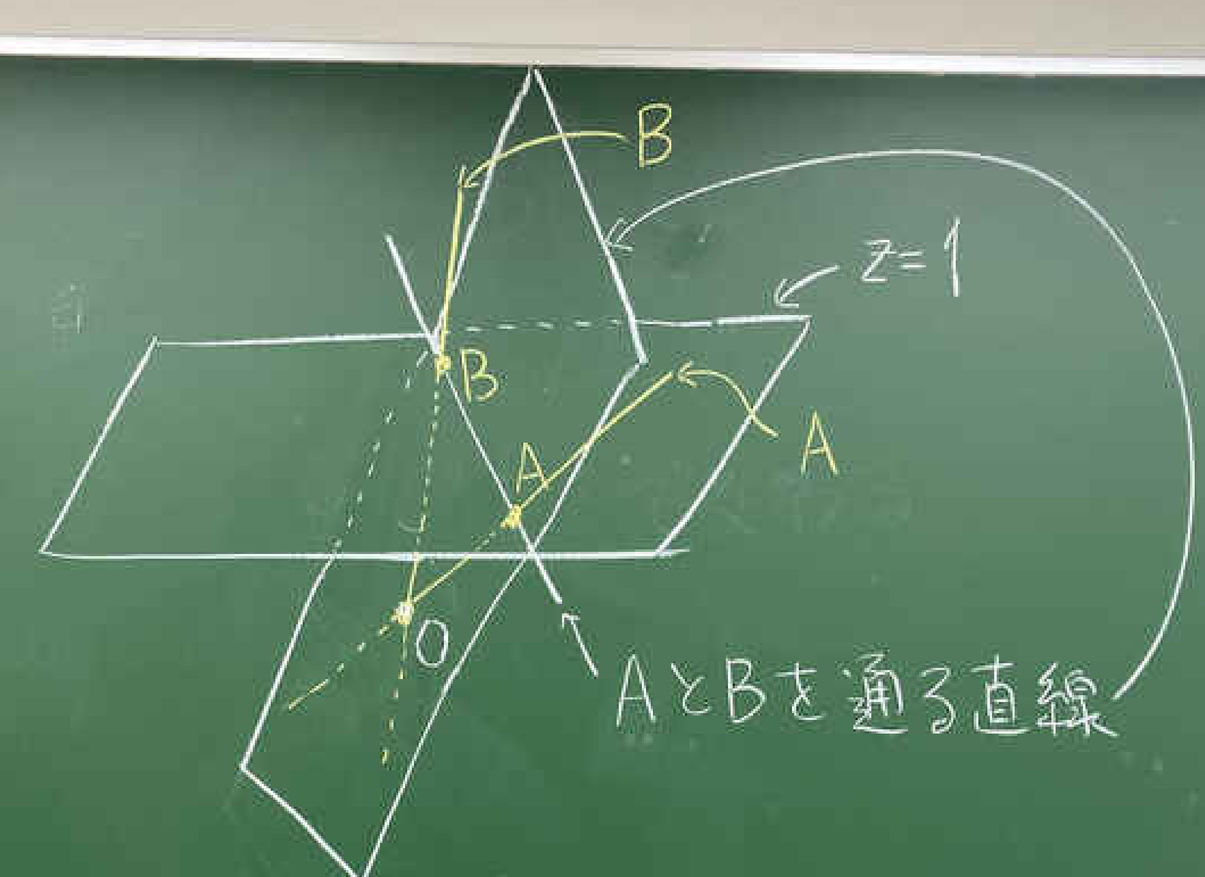




このようにして、平面 $z=0$（xy平面）に含まれない原点を通る直線と平面 $z=1$ 上の点を上のように同一視する。

平面 $z=0$（xy平面）に含まれる原点を通る直線を無限遠点と呼ぶ。

原点を通る互いに異なる2つの直線（点A, Bと呼ぶ）を含む平面を点A, Bを通る（射影平面上の）直線と呼ぶ。



（射影平面内の直線）

$=$（$\mathbb{R}^3$ 内の原点を含む平面）

地平線の近くの絵を描くとき

平面 $z=1$ を傾けた別の平面におきかえればよい。

数学的には、$\mathbb{R}^3$ を可逆な一次変換で変換することで表現される。

可逆な一次変換は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と書ける。ただし、$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$.

これが平面 $z=1$ 上のどのような変換になっているかを見てみよう。

ゼロでないベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を含む直線と平面 $z=1$ の交点は $\begin{bmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{bmatrix}$ になる。そのような射影平面上の点を $\underbrace{[x:y:z]}$ と書く。

これはいつもの比と本質的に同じ。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} ax+a'y+a''z \\ bx+b'y+b''z \\ cx+c'y+c''z \end{bmatrix}$$ によって、

$$[x:y:z] \longmapsto [ax+a'y+a''z : bx+b'y+b''z : cx+c'y+c''z],$$

$$[x:y:1] \longmapsto \left[\frac{ax+a'y+a''}{cx+c'y+c''} : \frac{bx+b'y+b''}{cx+c'y+c''} : 1\right].$$

これを<u>射影変換</u>と呼ぶ。

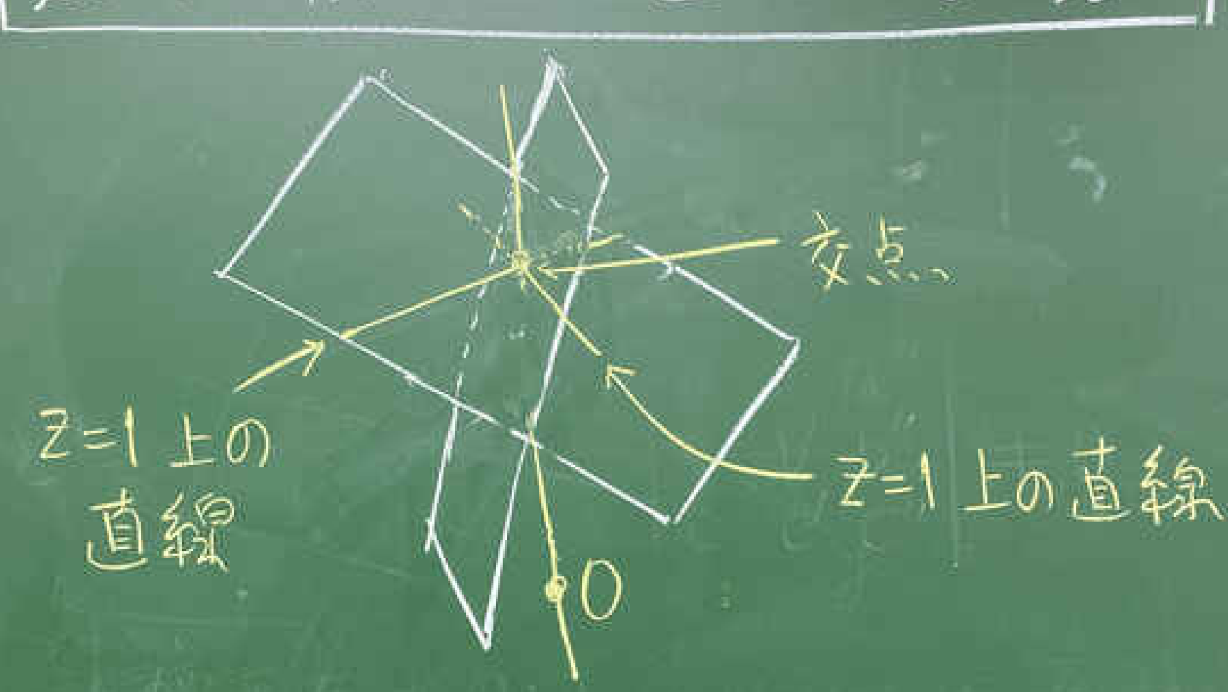
平面上の平行な直線たちは無限遠で1点で交わる。

射影平面上の2つの直線の交点

$\updownarrow$

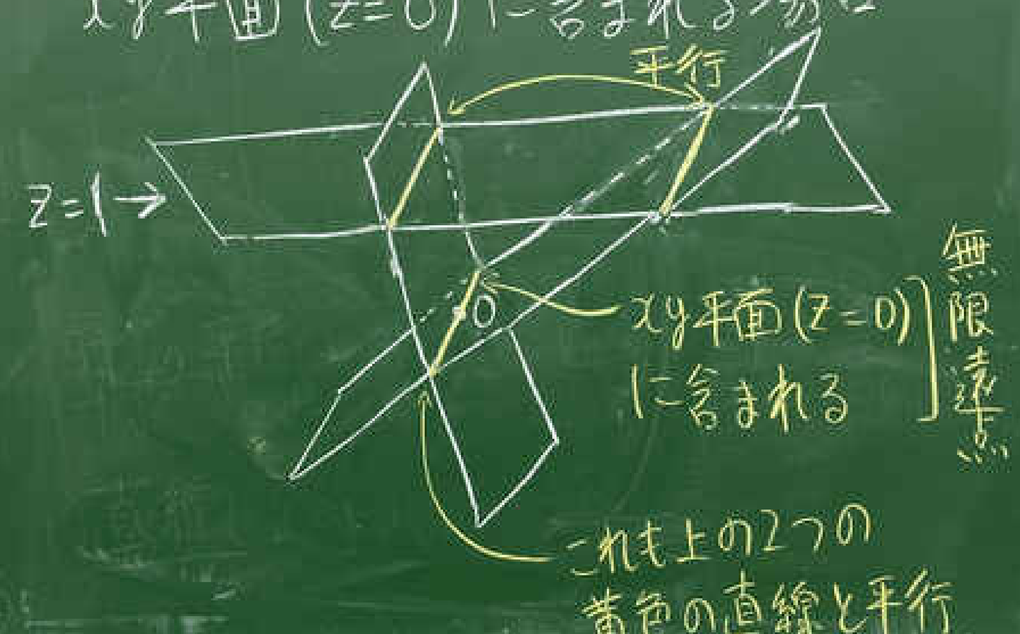
$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る2つの平面の交わりでできる直線

交点が有限の位置にある場合

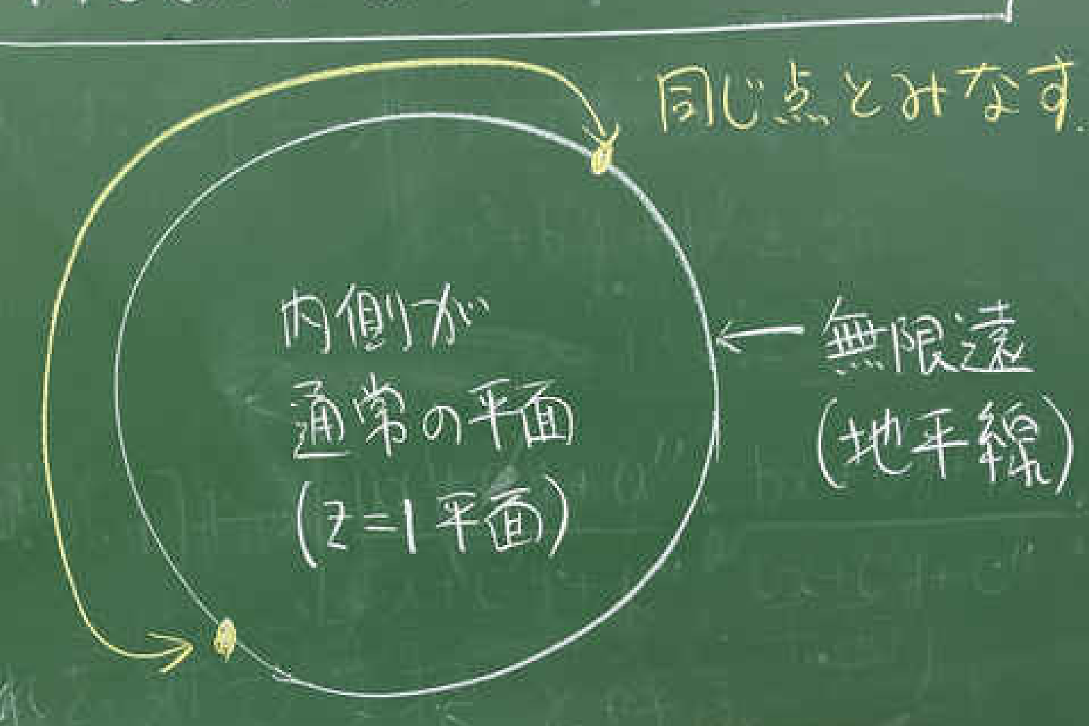


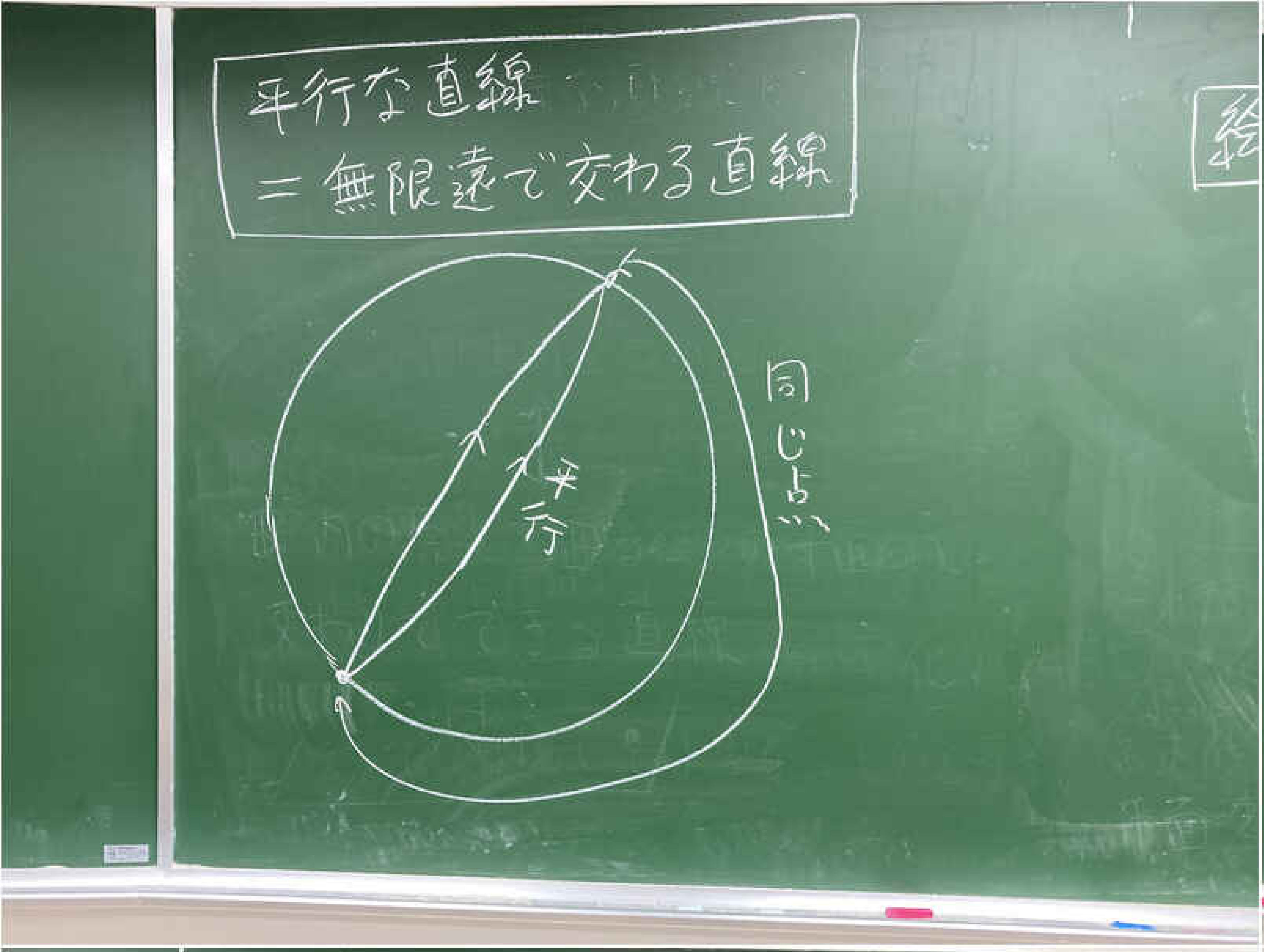
交点が無限遠点になる場合

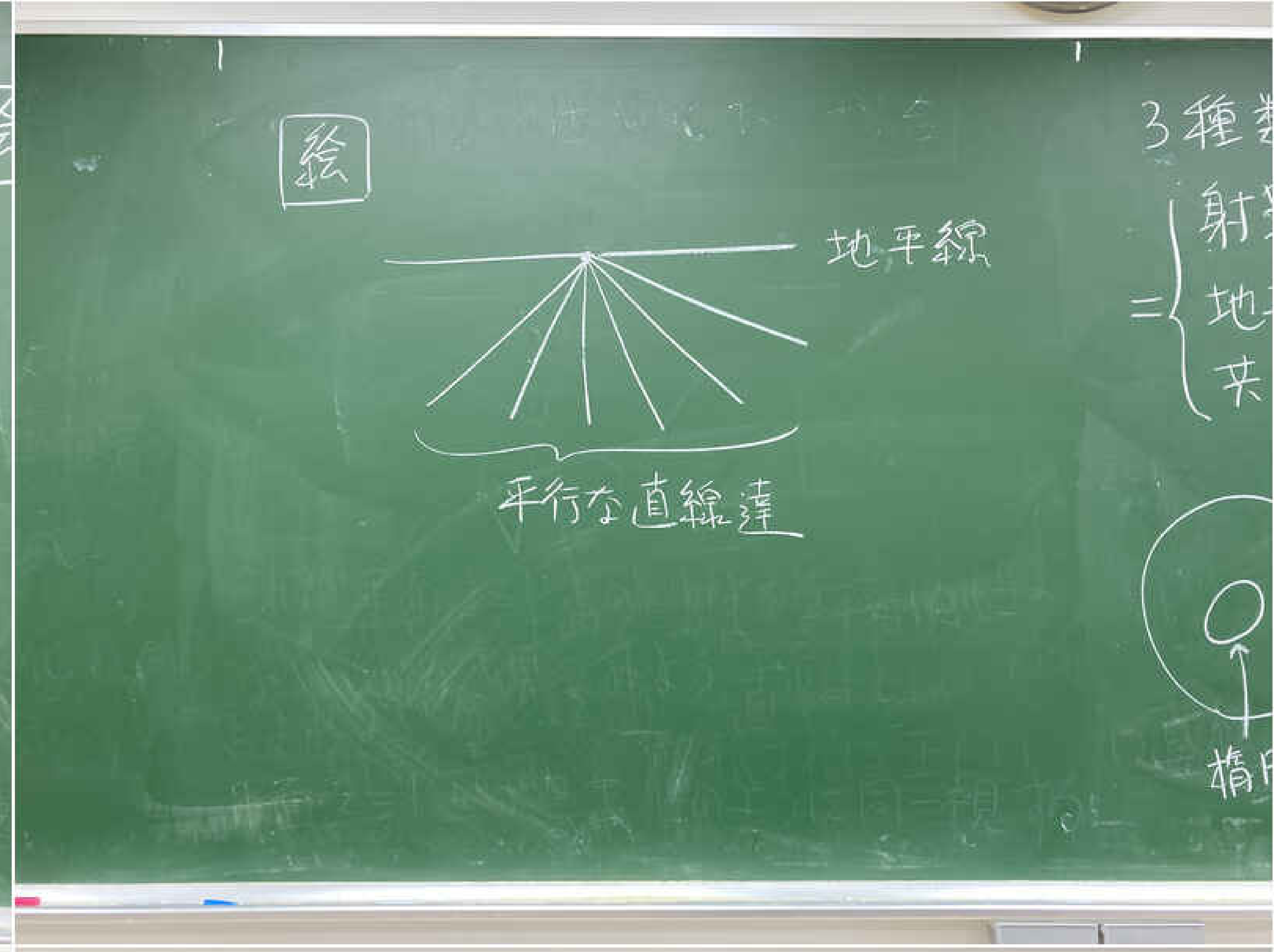
2つの平面の共通部分が、xy平面 ($z=0$) に含まれる場合

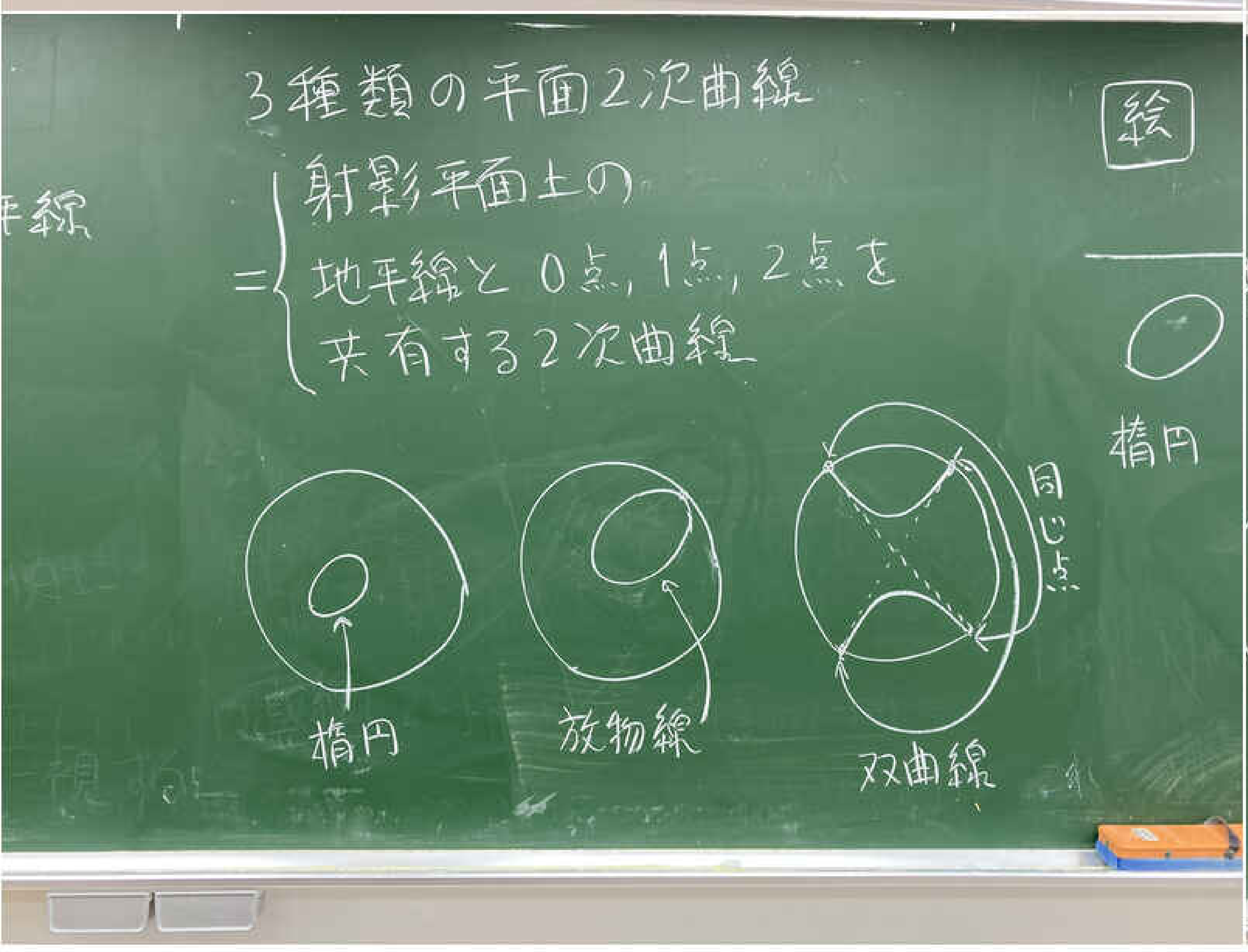


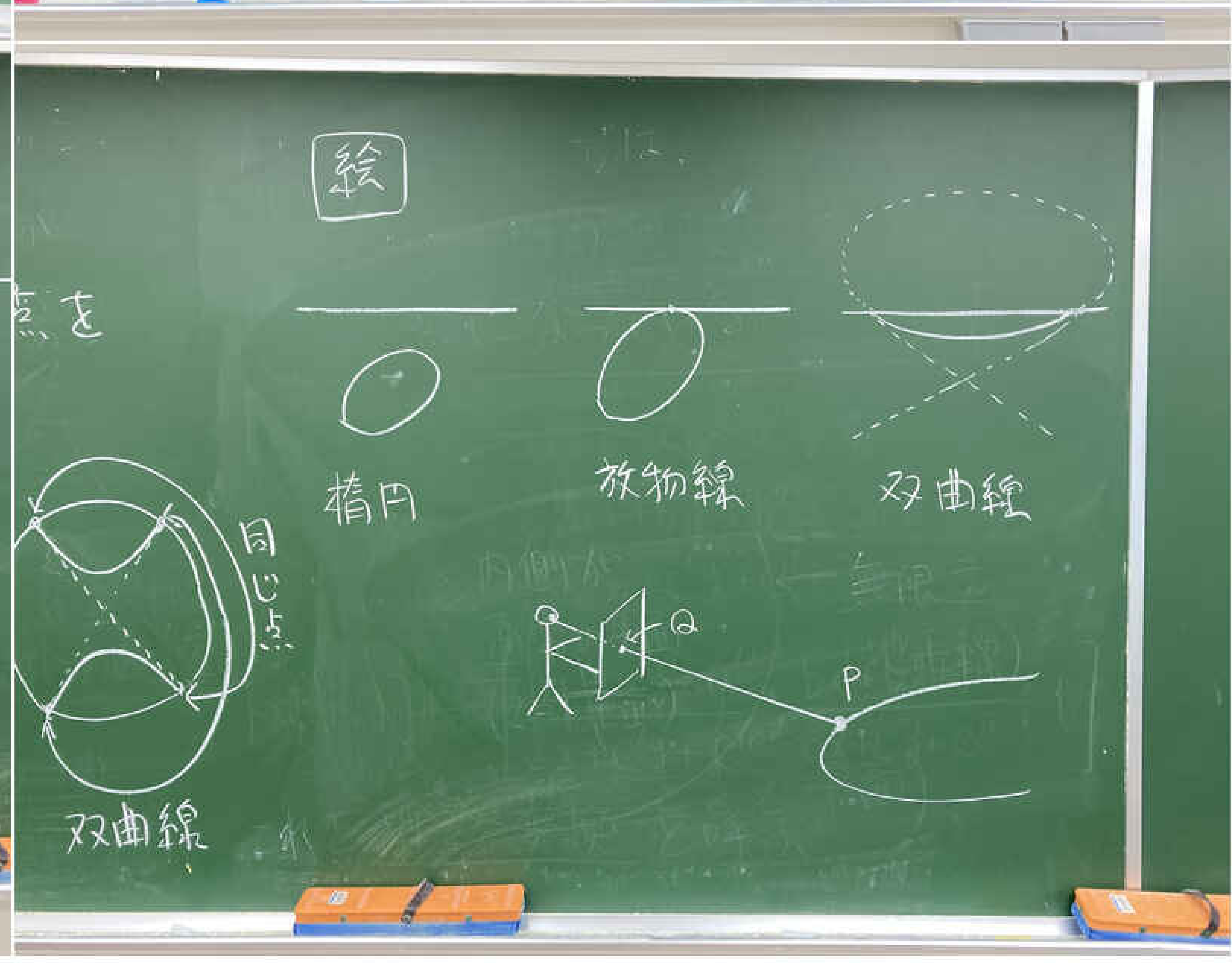
射影平面上では、180°反対側の無限遠点は同じ点になっている。




平行な直線
＝無限遠で交わる直線
絵
平行
同じ点


絵
地平線
平行な直線達


3種類の平面2次曲線
射影平面上の
＝ 地平線と 0点, 1点, 2点を
共有する2次曲線
絵
楕円
放物線
同じ点
双曲線
楕円


絵
楕円
放物線
双曲線
同じ点
双曲線
Q
P