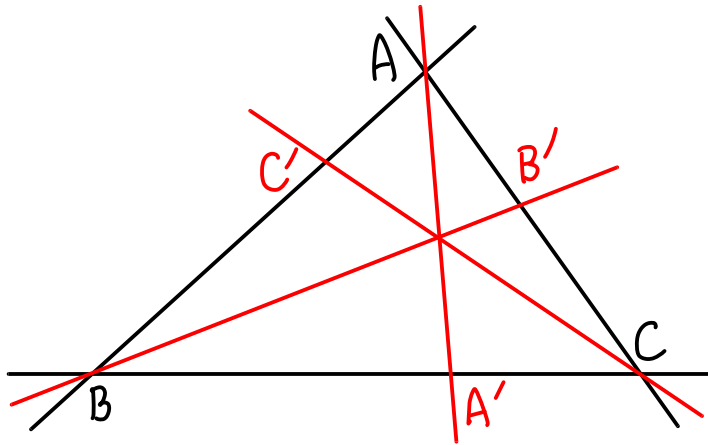


チェバの定理とメネラウスの定理について

黒木 玄

2023-08-27 作製

チェバの定理



$$\frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

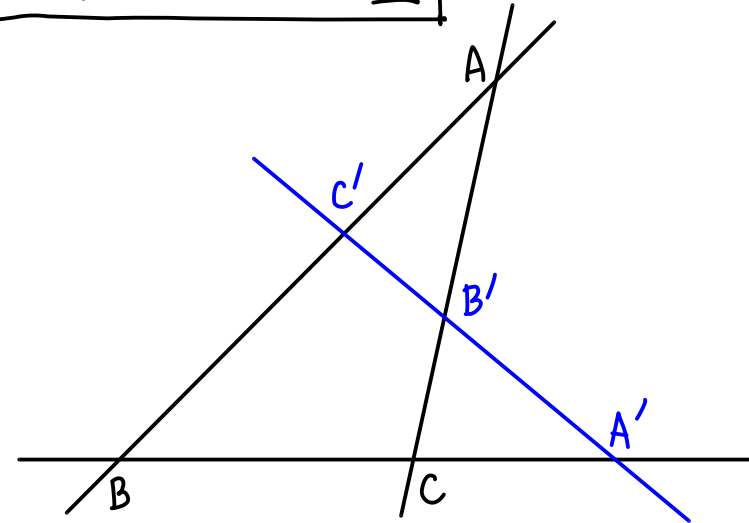
↑ $\vec{BA'} = k \vec{A'C}$ と書ける.

$\frac{BA'}{A'C} = k$ と定めた.

↑ $\frac{\vec{BA'}}{\vec{A'C}}$

と書くべきかもしれないが記号の簡略化のためにこう書く.

メネラウスの定理



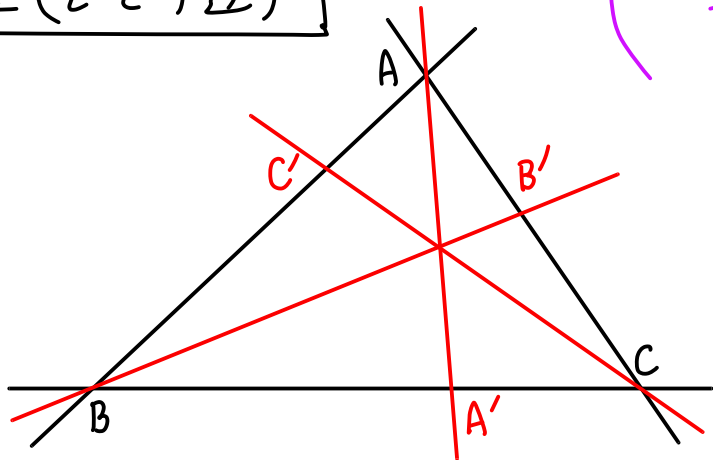
$$\frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = -1,$$

この定義のおかげでこうなる.

A, B, C は平面上の一般の位置にある3点であるとし,

A', B', C' はそれぞれ直線 BC, CA, AB 上の A, B, C とは異なる点であるとする.

Cevaの定理(とその逆)



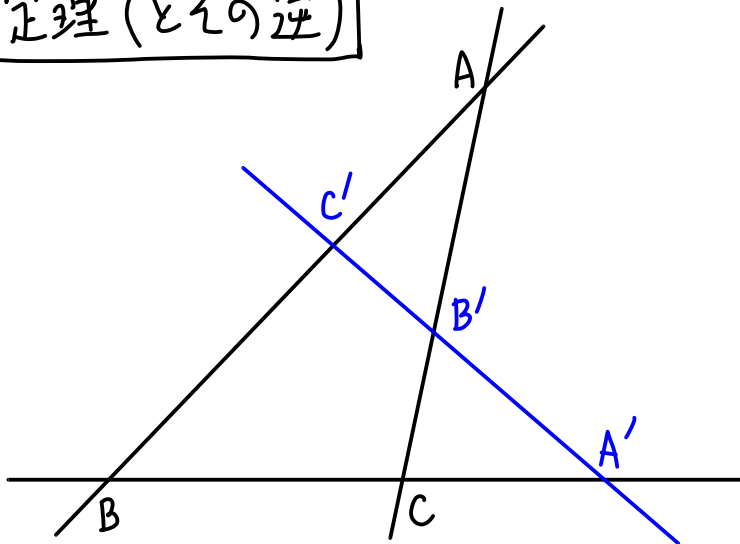
(注) 射影幾何的に

平行な直線達は無限遠で1点で交わる考える

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ 直線 } AA', BB', CC' \text{ が } 1 \text{ 点で交わる} \\ \Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = 1. \end{array} \right.$$

左図の場合にはすべて正

Menelausの定理(とその逆)

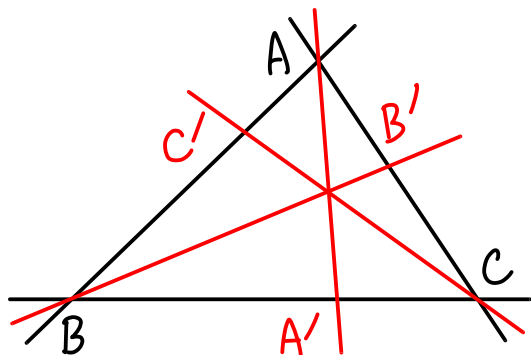


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ 点 } A', B', C' \text{ が同一直線上にある} \\ \Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = -1. \end{array} \right.$$

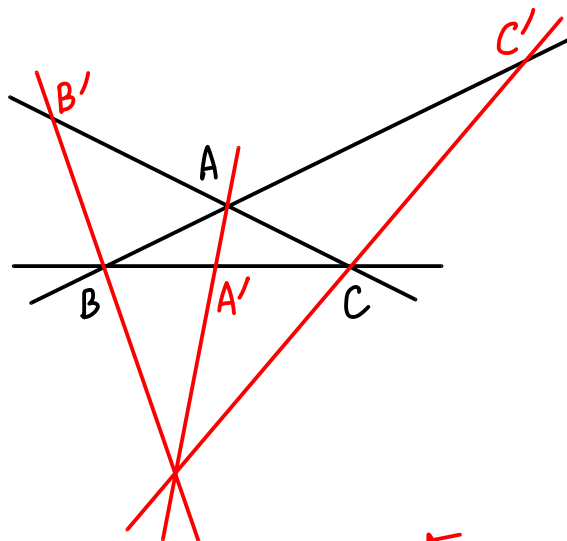
$\underbrace{\begin{matrix} <0 & >0 & >0 \end{matrix}}_{\text{左図の場合}}$

左図の場合

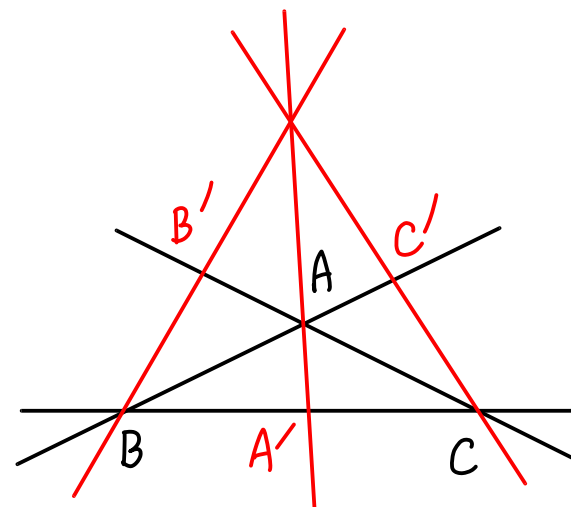
Cevaの定理の3パターン



$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0} \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0} \underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0} = 1.$$

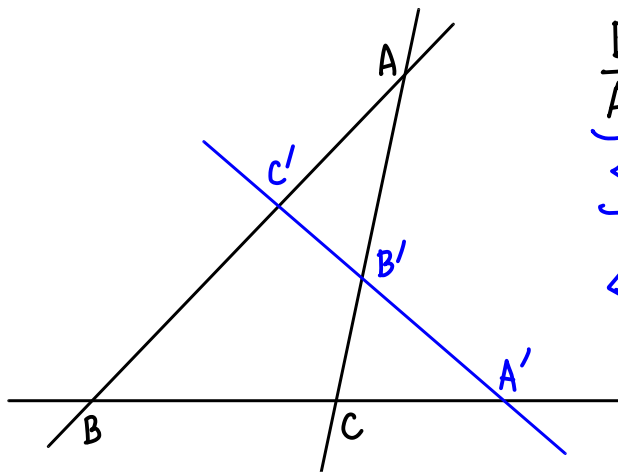


$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0} \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0} \underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = 1.$$



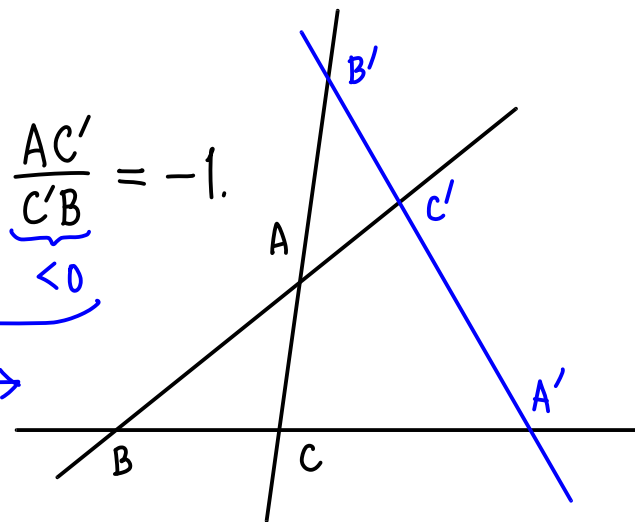
$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{>0} \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0} \underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = 1.$$

Menelausの定理の2パターン



$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0} \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{>0} \underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{>0} = -1.$$

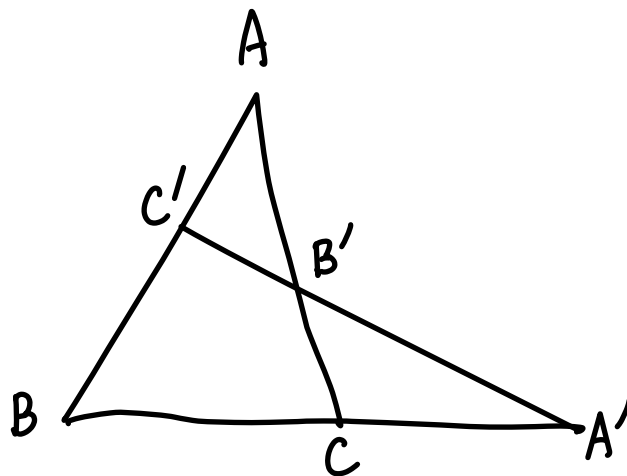
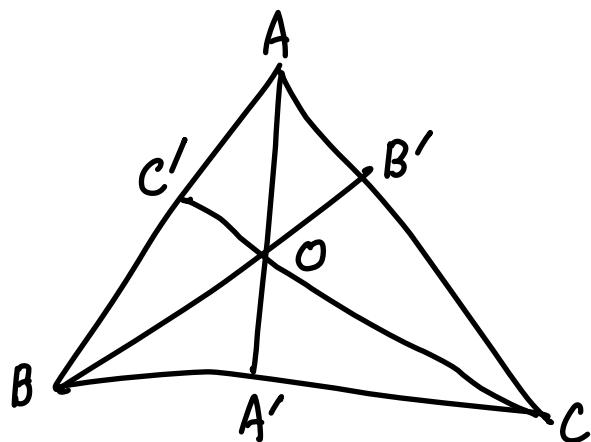
$$\underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{<0} \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{<0} \underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{<0} = -1.$$



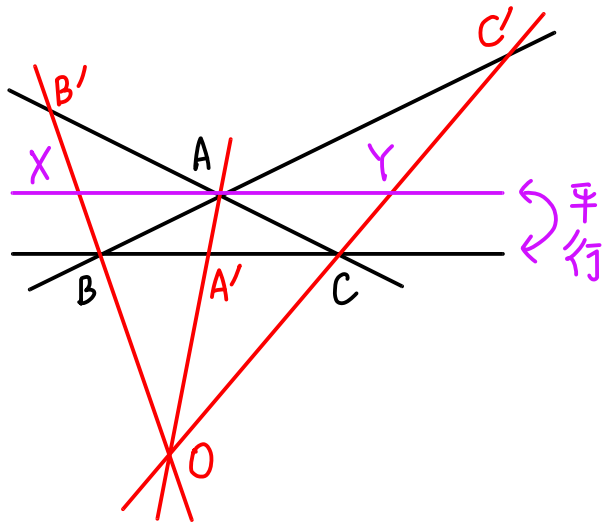
問題 次ページ以降を見る前に Cevaの定理と Menelausの定理
(前々ページの2つの定理の \Rightarrow の向き) を複数通りの方法で証明せよ.

ヒント: ・前ページより符号は忘れて長さの比を考えれば十分である,

- ・補助線を引き相似な三角形達を作る方法だけで複数ある
- ・三角形の面積比を使う方法もある,
- ・他にも多数ある.



Ceva 2



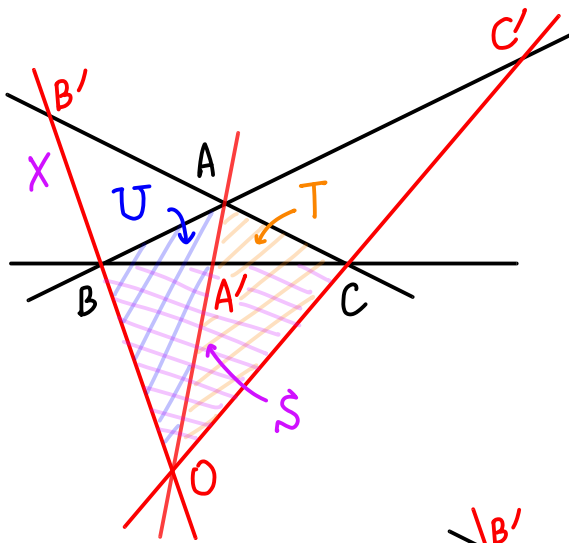
三角形達の相似より,

$$BA':A'C = XA:AY,$$

$$CB':B'A = BC:XA,$$

$$AC':C'B = AY:BC.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY} \frac{BC}{XA} \frac{AY}{BC} = 1.$$



底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

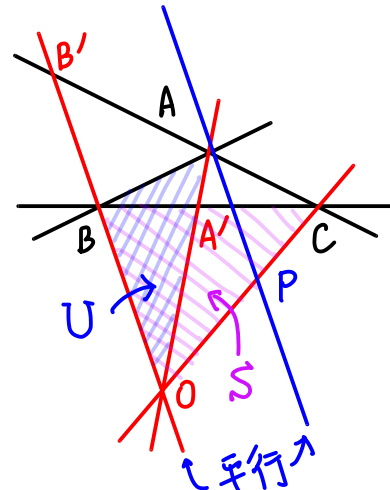
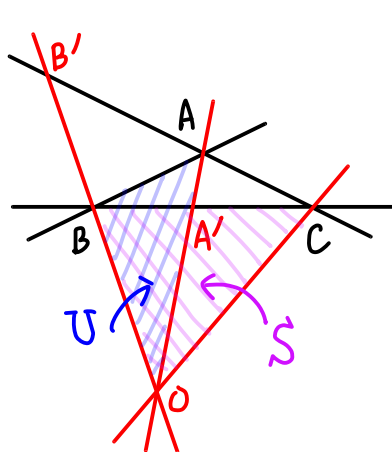
$$BA':A'C = U:T,$$

$$CB':B'A = S:U,$$

$$AC':C'B = T:S.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T} \frac{S}{U} \frac{T}{S} = 1.$$

$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$



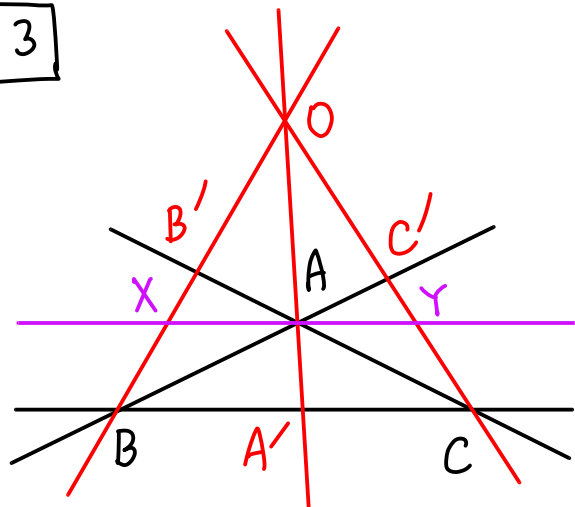
$$S:U$$

$$= \triangle CBO \text{ の高さ} : \triangle ABO \text{ の高さ}$$

$$= CO:OP$$

$$= CB':B'A$$

Ceva 3



三角形達の相似より,

$$BA':A'C = XA:AY,$$

$$CB':B'A = BC:XA,$$

$$AC':C'B = AY:BC.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{XA}{AY} \frac{BC}{XA} \frac{AY}{BC} = 1.$$

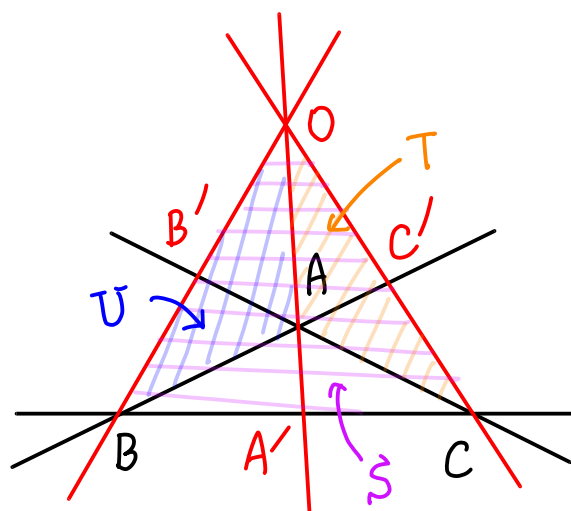
底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので

$$BA':A'C = U:T,$$

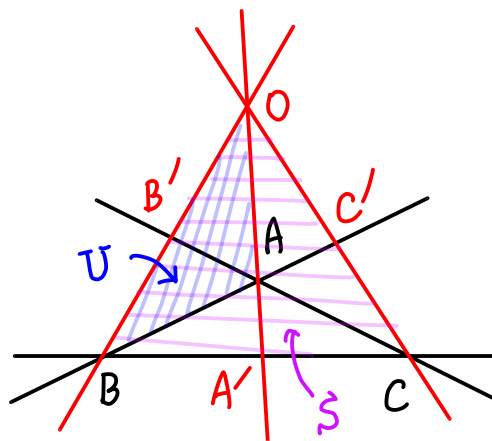
$$CB':B'A = S:U,$$

$$AC':C'B = T:S.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{U}{T} \frac{S}{U} \frac{T}{S} = 1.$$



$$\begin{cases} \triangle OBC = S \\ \triangle OCA = T \\ \triangle OAB = U \end{cases}$$

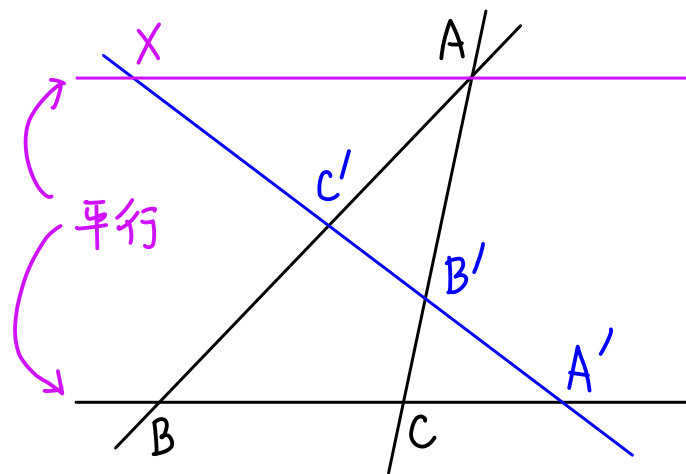


$$S:U$$

$$= \triangle CBO \text{ の高さ} : \triangle ABO \text{ の高さ}$$

$$= CB':B'A$$

Mene|aus 1

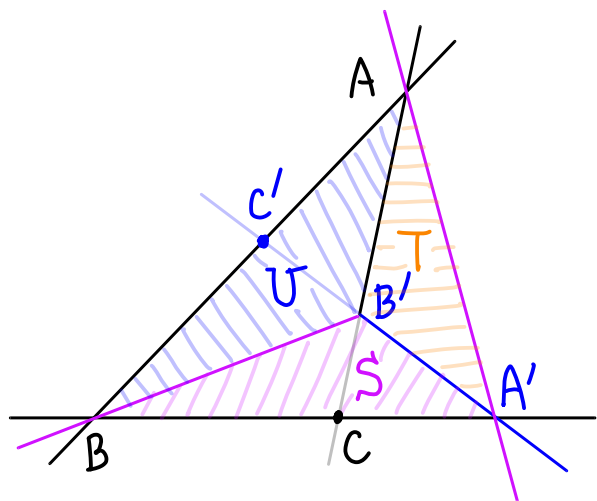


三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$

$$AC' : C'B = XA : BA',$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} \frac{A'C}{AX} \frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \Delta B'BA' = S \\ \Delta B'A'A = T \\ \Delta B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので、長さの比が以下のようになる:

$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$

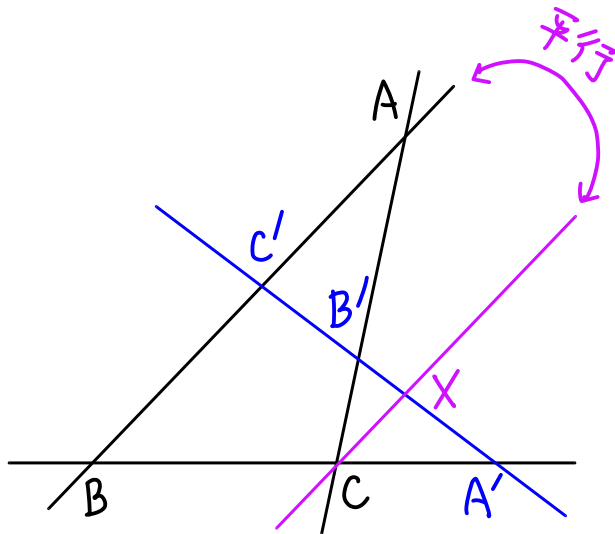
$$CB' : B'A = S : (U+T),$$

$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入れると,

$$\frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = - \frac{U+T}{T} \frac{S}{U+T} \frac{T}{S} = -1.$$

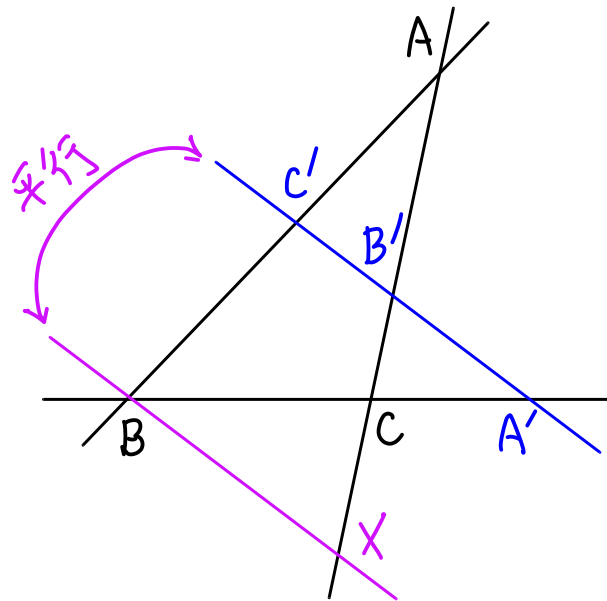
Menelaus 1 別解 (三角形の相似を使う別の方法達)



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C'B}{CX},$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CX}{C'A}.$$

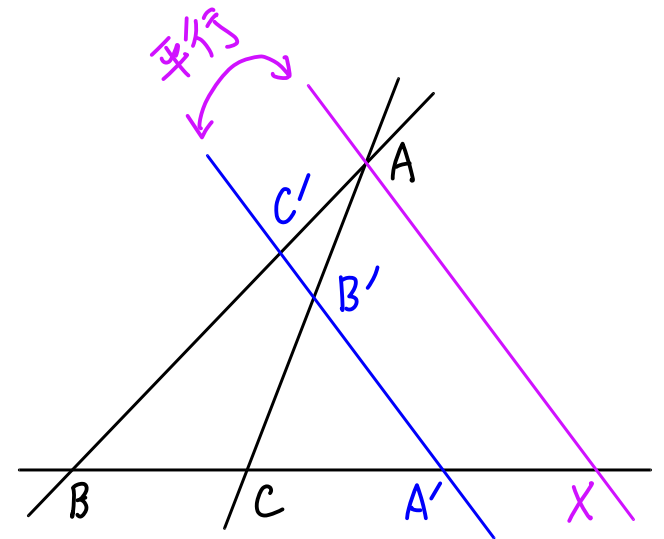
$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{C'B}{CX} \frac{CX}{C'A} \frac{AC'}{C'B} = -1$$



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{B'X}{CB'},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'X}.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{B'X}{CB'} \frac{CB'}{B'A} \frac{AB'}{C'B} = -1.$$

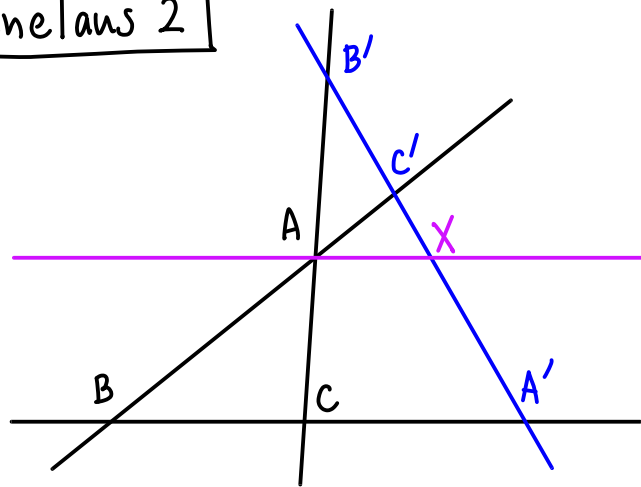


$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'X},$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{A'X}{BA'}.$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} \frac{CA'}{A'X} \frac{A'X}{BA'} = -1.$$

Menelaus 2

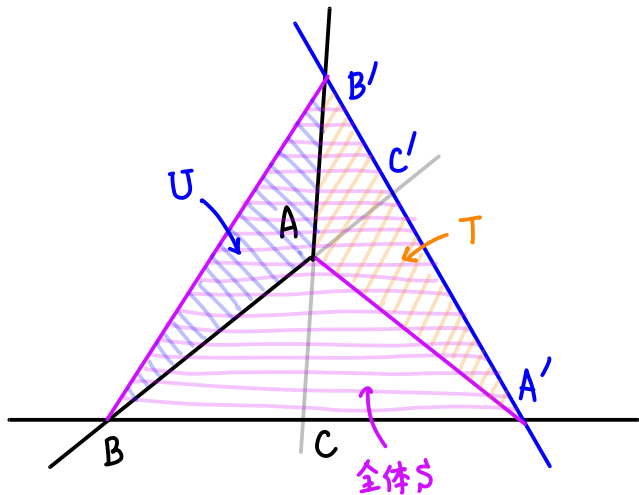


三角形達の相似より,

$$CB' : B'A = A'C : AX,$$

$$AC' : C'B = XA : BA',$$

$$\therefore \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} \frac{A'C}{AX} \frac{XA}{BA'} = -1$$



$$\begin{cases} \Delta B'BA' = S \\ \Delta B'A'A = T \\ \Delta B'AB = U \end{cases}$$

底辺を共有する三角形の面積の比は高さの比に等しいので、長さの比が以下ようになる:

$$BA' : A'C = (U+T) : T,$$

$$CB' : B'A = S : (U+T),$$

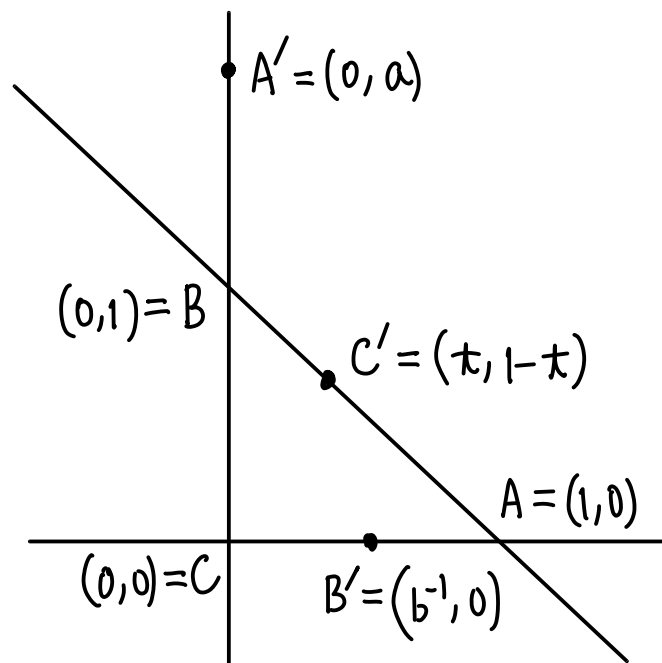
$$AC' : C'B = T : S.$$

ゆえに符号も考慮に入ると,

$$\frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = - \frac{U+T}{T} \frac{S}{U+T} \frac{T}{S} = -1.$$

座標を使う方法

点Cを原点とし、 $x\vec{CA} + y\vec{CB}$ で平面上に座標 (x, y) を入れる,



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{a-1}{-a}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{b^{-1}}{1-b^{-1}} = \frac{1}{b-1}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{t-1}{-t} = \frac{1-t}{t}.$$

Ceva 直線 AA' : $y = -a(x-1)$

直線 BB' : $y = -bx + 1$

直線 CC' : $y = \frac{1-t}{t}x$

AA' と BB' の交点は $\left(\frac{a-1}{a-b}, -a\frac{b-1}{a-b}\right)$ なのて、

$$AA', BB', CC' \text{ が 1 点 で 交わる } \Leftrightarrow -a\frac{b-1}{a-b} = \frac{1-t}{t} \frac{a-1}{a-b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{-a} \frac{1}{b-1} \frac{1-t}{t} = 1 \Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

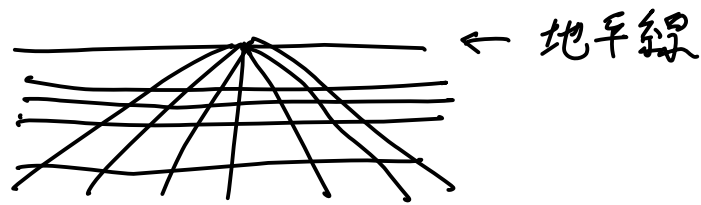
Menelaus

直線 $A'B'$: $y = -abx + a$ と 直線 AB : $y = 1-x$ の交点は $\left(\frac{a-1}{ab-1}, a\frac{b-1}{ab-1}\right)$ なのて、

$$A', B', C' \text{ が 同一直線上にある } \Leftrightarrow a\frac{b-1}{ab-1} = \frac{1-t}{t} \frac{a-1}{ab-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{-a} \frac{1}{b-1} \frac{1-t}{t} = -1 \Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = -1.$$

射影幾何との関係



射影変換たち:

- 直線上の点 x の変換 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0 \right).$

- 平面上の点 (x, y) の変換 $(x, y) \mapsto \left(\frac{ax+a'y+a''}{cx+c'y+c''}, \frac{bx+b'y+b''}{cx+c'y+c''} \right) \quad \left(\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0 \right).$

射影変換で不変な性質を調べる幾何を射影幾何と呼ぶ,

より正確には射影直線と射影平面を定義した方がよいが略す,

直線の射影変換の全体は $x \mapsto x + \beta$ $x \mapsto \alpha x$ ($\alpha \neq 0$), $x \mapsto \frac{1}{x}$ で生成される. $\leftarrow (*)$

直線上の点 a, b, c, d に対する $cr(a, b; c, d) = \frac{c-a}{b-c} \frac{d-b}{a-d}$ を cross ratio (複比) と呼ぶ,

cross ratio は射影変換で不変である. $\leftarrow (*)$ から容易に出る.

平面上の同一直線上の点 A, B, C, D に対しても cross ratio が

$$cr(A, B; C, D) = \frac{AC}{CB} \frac{BD}{DA}$$

と定義され, 平面の射影変換で不変である

Cevaの定理(とその逆)の射影幾何版

平面上の直線 l_1, l_2, l_3, m はお互いに平行でなく、そのうちのどの3つも1点で交わらないと仮定する。 $A = l_2 \cap l_3$, $B = l_3 \cap l_1$, $C = l_1 \cap l_2$, $P = l_1 \cap m$, $Q = l_2 \cap m$, $R = l_3 \cap m$ とおく、 A', B', C' はそれぞれ l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であるとする。このとき、

直線 AA', BB', CC' は1点で交わる $\leftarrow m$ によらない条件、射影変換で不変の条件

$$\Leftrightarrow cr(B, C; A', P) cr(C, A; B', Q) cr(A, B; C', R) = -1 \quad \leftarrow \text{左辺は射影変換で不変}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CP}{PB} \times \frac{CB'}{B'A} \frac{AQ}{QC} \times \frac{AC'}{C'B} \frac{BR}{RA} = -1.$$

点 P, Q, R が乗っている直線 m を無限遠に移動すると、 $\frac{CP}{PB}, \frac{AQ}{QC}, \frac{BR}{RA}$ はどれも -1 に収束するので

$$\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

射影変換によって易しい場合に交換して証明できる。

Cevaの場合の双対 (点と直線の立場の交換) として以下が得られる.

Menelausの定理(とその逆)の射影幾何版

平面上の点 A, B, C, M は互いに異なるとし, そのうちのどの3つも同一直線上にないと仮定する.

$l_1 = (\text{直線 } BC), l_2 = (\text{直線 } CA), l_3 = (\text{直線 } AB), m_1 = (\text{直線 } AM), m_2 = (\text{直線 } BM), m_3 = (\text{直線 } CM),$

$P = l_1 \cap m_1, Q = l_2 \cap m_2, R = l_3 \cap m_3$ とおく.

A', B', C' はそれぞれ直線 l_1, l_2, l_3 上の A, B, C とは異なる点であると仮定する. このとき,

A', B', C' が同一直線上にある $\leftarrow M$ によらない条件, 射影変換で不変の条件

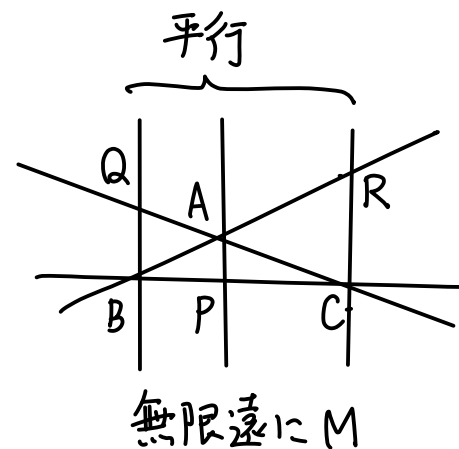
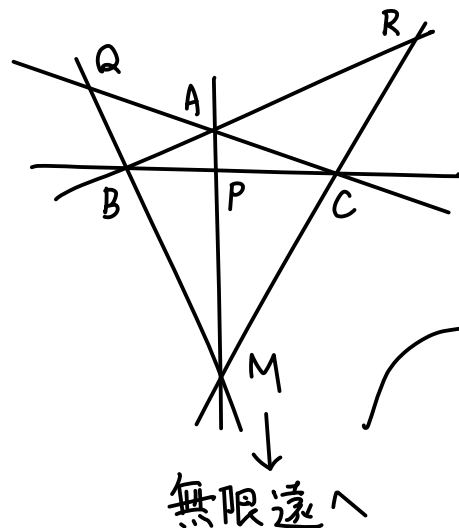
$\Leftrightarrow cr(B, C; A', P) cr(C, A; B', Q) cr(A, B; C', R) = -1 \leftarrow$ 左辺は射影変換で不変

$$\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CP}{PB} \times \frac{CB'}{B'A} \frac{AQ}{QC} \times \frac{AC'}{C'B} \frac{BR}{RA} = -1$$

M を無限遠に移動すると,

$$\frac{CP}{PB} \frac{AQ}{QC} \frac{BR}{RA} \rightarrow 1 \text{ となるので}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} \frac{AC'}{C'B} = -1.$$



$$\frac{CP}{PB} \frac{AQ}{QC} \frac{BR}{RA} = \frac{CP}{PB} \frac{PB}{BC} \frac{BC}{CP} = 1$$

文献

- ・ 西山享、『射影幾何学の考え方』、数学のかんどころ19、共立出版2013
- ・ Julio Benitez, A Unified Proof of Ceva and Menelaus' Theorems Using Projective Geometry, Journal for Geometry and Graphics Volume 11 (2007), No. 1, 39-44.

<https://scholar.google.co.jp/scholar?cluster=2104876940749426999>