曲線のパラメータ付けの変換と曲線の長さの定義

$\mathbb{R}^n$ 内のなめらかな曲線のパラメータ付けは微分可能で「速さが常に正」という条件をみたすものとする。

このとき，同じ曲線の2つのパラメータ付けのあいだの連続な変数変換が微分可能になることは以下の補題によって示される。
さらにパラメータ付けに C^1 級であるという条件を課すと，
同じ曲線のパラメータ付けのあいだの連続な変数変換も C^1 級になることもわかる。

補題 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は $\alpha\in(a,b)$ で微分可能で $f'(\alpha)\neq 0$ であると仮定する。
$g:(c,d)\to(a,b)$ は $\beta\in(c,d)$ で連続で $g(\beta)=\alpha$ をみたすと仮定する。
$F(t)=f(g(t))$ $(t\in(c,d))$ とおく。$F(t)$ は $t=\beta$ で微分可能だと仮定する
このとき，$g(t)$ は $t=\beta$ で微分可能で $g'(\beta)=\dfrac{F'(\beta)}{f'(\alpha)}$ となる

証明 仮定より，以下のように書ける：

① $f(\alpha+h)-f(\alpha) = f'(\alpha)h+\varepsilon(h)h = (f'(\alpha)+\varepsilon(h))h$，$\varepsilon(h)\to 0$ as $h\to 0$，

② $g(\beta+k)-g(\beta) = g(\beta+k)-\alpha = \eta(k)\longrightarrow 0$ as $k\to 0$，

③ $F(\beta+k)-F(\beta) = f(g(\beta+k))-f(g(\beta)) = F'(\beta)k+\delta(k)k = (F'(\beta)+\delta(k))k$，$\delta(k)\to 0$ as $k\to 0$.

さらに　$\alpha=g(\beta)$，$h=g(\beta+k)-g(\beta)=\eta(k)$ を①に代入すると，$\alpha+h=g(\beta+k)$ なので

④ $F(\beta+k)-F(\beta)=f(g(\beta+k))-f(g(\beta))=(f'(\alpha)+\varepsilon(\eta(k)))(g(\beta+k)-g(\beta))$.

これと③を比較し，②を使うと $f'(\alpha)\neq 0$ より，

$$\frac{g(\beta+k)-g(\beta)}{k}=\frac{F'(\beta)+\delta(k)}{f'(\alpha)+\varepsilon(\eta(k))}\longrightarrow\frac{F'(\beta)}{f'(\alpha)}\quad\text{as } k\to 0.$$

ゆえに，$g(t)$ は $t=\beta$ で微分可能で $g'(\beta)=F'(\beta)/f'(\alpha)$ となることが示された。 □

同じ曲線の2つの C^1 級なパラメータ付け $P(t)$ $(a\leq t\leq b)$ と $Q(s)$ $(c\leq s\leq d)$ を考える。
そのあいだのパラメータの変数変換 $t=t(s)$ も C^1 級になる。このとき，

$$\int_c^d\|Q'(s)\|\,ds=\int_c^d\|P'(t(s))t'(s)\|\,ds=\int_c^d\|P'(t(s))\|\,t'(s)\,ds=\int_a^b\|P'(t)\|\,dt$$

なので，その曲線の長さ L を

$$L=\int_a^b\|P'(t)\|\,dt=\int_c^d\|Q'(s)\|\,ds$$

で定義できる。