有名なLeibniz級数（大学1年生向けの微積分では定番のネタ）

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}+\cdots=\frac{\pi}{4}\quad\cdots\text{（Leibniz級数の公式）}$$

おおざっぱな証明

☆ ← 積分と無限和の交換！

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^1\left(1-t^2+t^4-t^6+\cdots\right)dt\overset{☆}{=}\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

注意 ☆の部分をもっと注意深く扱いたい。

大学1年生向けの講義でされがちな証明法 nは正の整数であるとする。

$$1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-t^2)^{n-1}=\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}\text{ より，}$$

$$\frac{1}{1+t^2}-\left(1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-t^2)^{n-1}\right)=\frac{(-t^2)^n}{1+t^2}$$

両辺を$t=0$から$t=1$まで積分すると，

$$\frac{\pi}{4}-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt.$$

そして，$0<\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$ なので

$$\left|\frac{\pi}{4}-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right|<\frac{1}{2n+1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

一橋大学入試 2025 後期 5 [II] これの元ネタはLeibniz級数。

一橋大学入学試験2025年後期数学大問5のII

[II] 以下の問いに答えよ。

(1) nを0以上の整数とし，

$$a_n=\int_0^1\frac{t^{4n}}{t^2+1}dt$$

とする。$a_{n+1}-a_n$をnで表せ。

(2) 正の整数nについて

$$0<\pi-\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(4k-3)(4k-1)}<\frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{1+t^2}-\left(1-t^2+\cdots+(-t^2)^{N-2}+(-t^2)^{N-1}\right)=\frac{(-t^2)^N}{1+t^2}.$$

$N=2n$のとき，

$$\frac{1}{1+t^2}-\left(1-t^2+\cdots+(-t^2)^{2n-2}+(-t^2)^{2n-1}\right)=\frac{t^{4n}}{1+t^2}.$$

両辺を$t=0$から$t=1$まで積分すると，

$$\frac{\pi}{4}-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)=a_n\quad\cdots(*)$$

(1) (*)より，$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}$.

(2) $\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-1}=\frac{2}{(4k-3)(4k-1)}$ と(*)より，$4a_n=\pi-\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(4k-3)(4k-1)}$. ゆえに，

$$0<a_n=\pi-\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(4k-3)(4k-1)}=4\int_0^1\frac{t^{4n}}{1+t^2}dt<4\int_0^1 t^{4n}dt=\frac{4}{4n+1}<\frac{1}{n}.$$