円周率πをベータ関数のちょっとした拡張で求める方法

$n\in\mathbb{Z}_{>0}$のとき，modulo $1+x^2$ で $(1-x)^2\equiv -2x$，$(1-x)^4\equiv 4x^2\equiv -4$，$x^2\equiv -1$ なので，

$$x^{4n}(1-x)^{4n}\equiv(-1)^{2n}(-4)^n\equiv(-4)^n \pmod{1+x^2}.$$

ゆえに，ある $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ が存在して，$x^{4n}(1-x)^{4n}=(1+x^2)f(x)+(-4)^n$ となるので，

$$\int_0^1\frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}dx=\int_0^1 f(x)\,dx+(-4)^n\underbrace{\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}}_{=\arctan 1}=\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\in\mathbb{Q}}+(-4)^n\frac{\pi}{4}$$

さらに，

$$\underbrace{\int_0^1\frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{2}dx}_{=\frac{((4n)!)^2}{2(8n+1)!}}<\int_0^1\frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}<\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}dx$$

$$\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}dx = B(4n+1,4n+1)=\frac{\Gamma(4n+1)^2}{\Gamma(8n+2)}=\frac{((4n)!)^2}{(8n+1)!}$$

これは小さい

この絶対値はその内側の$(-1)^n$倍

ゆえに，

$$\frac{1}{4^{n-1}}\frac{(4n!)^2}{2(8n+1)!}<\left|\pi-\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}\int_0^1 f(x)\,dx\right|<\frac{1}{4^{n-1}}\frac{(4n!)^2}{(8n+1)!}.$$

Wallisの公式

$$\binom{2N}{N}=\frac{(2N)!}{(N!)^2}\sim\frac{4^N}{\sqrt{\pi N}}$$

より

$$\frac{(4n!)^2}{(8n+1)!}=\frac{1}{8n+1}\binom{8n}{4n}^{-1}\sim\frac{1}{8n+1}\frac{\sqrt{4\pi n}}{4^{4n}}$$

これは $n\to\infty$ で急激に0に近付く。

$\boxed{n=1}$ $f(x)=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4$. $\left(\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=f(x)-\frac{4}{1+x^2}\right)$

$$-\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx=\pi-\frac{22}{7},\quad \int_0^1 x^4(1-x)^4dx=\frac{(4!)^2}{9!}=\frac{1}{630}.$$

$$\therefore\ \frac{-1}{630}<\pi-\frac{22}{7}<\frac{-1}{1260}\quad\left(\frac{22}{7}=3.1428\cdots\right)$$

$$\therefore\ 3.141269\cdots=\frac{1979}{630}<\pi<\frac{3959}{1260}=3.14206\cdots$$

$\boxed{n=2}$ $f(x)=x^{14}-8x^{13}+27x^{12}-48x^{11}+43x^{10}-8x^9-15x^8+16x^6-16x^4+16x^2-16$ $\left(\frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}=f(x)+\frac{16}{1+x^2}\right)$

$$\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}=\pi-\frac{47171}{15015},\quad \frac{1}{4}\int_0^1 x^8(1-x)^8dx=\frac{(8!)^2}{17!}=\frac{1}{875160}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\times 875160}<\pi-\frac{47171}{15015}<\frac{1}{875160}\quad\left(\frac{47171}{15015}=3.14159174\cdots\right)$$

$$\therefore\ 3.14159231\cdots=\frac{38491543}{12252240}<\pi<\frac{3849155}{1225224}=3.14159288\cdots$$