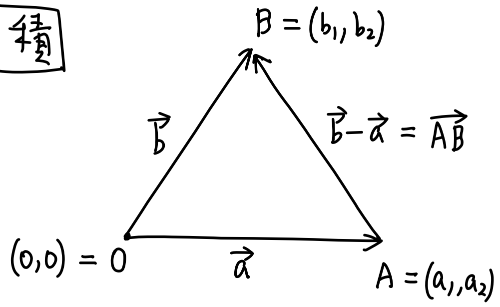
内積

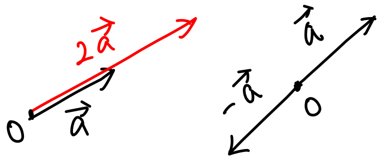


ベクトルの加減算とスカラー倍の定義

$$\begin{cases}(a_1,a_2)\pm(b_1,b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2),\\ \alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,\alpha a_2).\end{cases}$$

ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ とベクトル $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$ を考えると,

$\vec{b}-\vec{a}=(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)=\overrightarrow{AB}$



$\vec{a}=(a_1,a_2)$ と $\vec{b}=(b_1,b_2)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ と定める.

ベクトル $\vec{a}$ の長さを $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ と書く.

補題 ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ と実数 α について,

① $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

② $(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\quad\vec{a}\cdot(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{c}$

③ $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\quad\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

証明 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, $\vec{c}=(c_1,c_2)$ とおく,

① $\vec{b}\cdot\vec{a}=b_1a_1+b_2a_2=a_1b_1+a_2b_2=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

② $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$ より

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1\pm b_1)c_1+(a_2\pm b_2)c_2=a_1c_1\pm b_1c_1+a_2c_2\pm b_2c_2$$
$$=a_1c_1+a_2c_2\pm(b_1c_1+b_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

もう1つの公式も同様.

③ $\alpha\vec{b}=(\alpha b_1,\alpha b_2)$ より, $\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=a_1\alpha b_1+a_2\alpha b_2=\alpha(a_1b_1+a_2b_2)=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

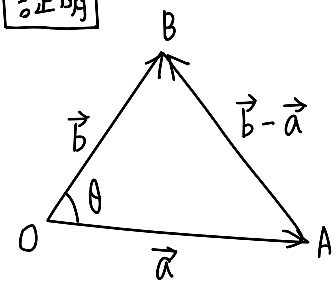
もう1つの公式も同様

q.e.d.

定理 ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)\neq(0,0)$ とベクトル $\vec{b}=(b_1,b_2)\neq(0,0)$ のあいだの角度を θ (シータ) と書くことにする.

このとき, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ が成立する!

証明



第二余弦定理より,

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.\quad\cdots$ ①

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2.\quad\cdots$ ②

①の右辺 = ②の右辺 より $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

q.e.d.

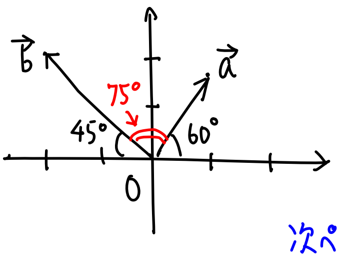
まとめ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. $\quad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ← 右辺は $+,\times,\sqrt{\ },\div$ だけで計算可能!

まとめ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. $\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ← 右辺は $+, \times, \sqrt{\ }, \div$ だけで計算可能!

特に, $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ のとき, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する.

(**注意** $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ のときも, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のあいだの角度を θ と書くと, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ が成立している. □)

計算例 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ $\vec{b} = (-2, 2)$ のとき,



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(-2) + \sqrt{3}\cdot 2 = 2\sqrt{3} - 2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+3} = 2,\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

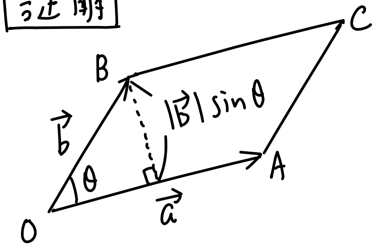
次ページで証明

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$$

一致 OK □

平行四辺形の面積 ベクトル $\vec{a} = (a, c)$, $\vec{b} = (b, d)$ を2つの辺に持つ平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ になる.

証明



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のあいだの角度を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ と書くと,

$$(\text{平行四辺形 OACB の面積}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2 = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}.$$

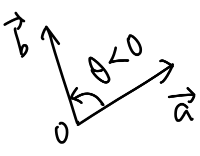
$$1 - \cos^2\theta = \frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2} = \frac{(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2},$$

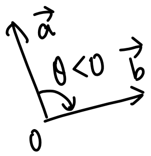
$$(\text{これの分子}) = \underline{a^2b^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \underline{\underline{c^2d^2}} - \underline{a^2b^2} - 2abcd - \underline{\underline{c^2d^2}}$$
$$= a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = (ad - bc)^2.$$

$$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{(ad-bc)^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2},\quad \sin\theta = \frac{|ad-bc|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

したがって, $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |ad - bc|$. q.e.d.

注意 $ad - bc$ は行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の<u>行列式</u> (determinant) とよばれ, よく出て来る.
$ad - bc$ を $\vec{a} \times \vec{b}$ と書いて, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の<u>外積</u>と呼ぶことがある.
θ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ を $\vec{a}$ から $\vec{b}$ の向きの角度 (左回転なら $\theta > 0$, 右回転なら $\theta < 0$) とする.
$\sin\theta > 0$　　$\sin\theta < 0$

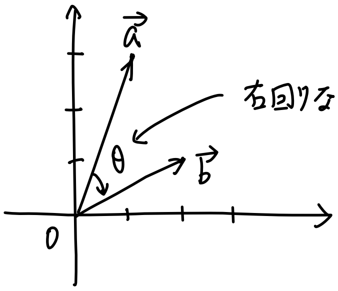




このとき, $\vec{a} \times \vec{b} = ad - bc = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, $\sin\theta = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. □

例 $\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(3,2)$ のとき

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 3\cdot 2 = 9 \\ \vec{a}\times\vec{b} = 1\cdot 2 - 3\cdot 3 = -7 \end{cases}$$

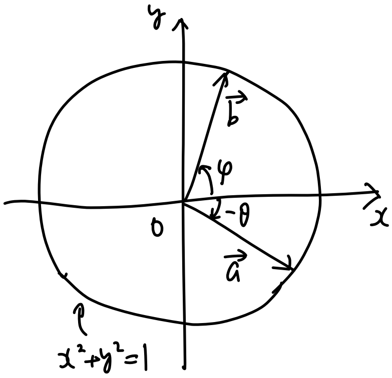


右回りなので $\theta<0$ で $\sin\theta<0$.

□

三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi \end{cases}$$



証明

$\vec{a}=(\cos\theta, -\sin\theta)$, $\vec{b}=(\cos\varphi, \sin\varphi)$ とおく。

このとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は左回りに $\theta+\varphi$ になる.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ なので,

$$\cos(\theta+\varphi) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \vec{a}\times\vec{b} = \cos\theta\sin\varphi - (-\sin\theta)\cos\varphi = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi.$$

q.e.d.

内積, 外積と複素数の積の関係

$\vec{a}=(a,c)$, $\vec{b}=(b,d)$, a,b,c,d は実数とし, $\alpha=a+ci$, $\beta=b+di$ とおく.

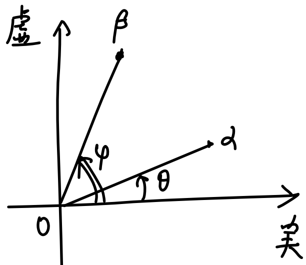
$\bar{\alpha}=\alpha^*=a-ci$ を α の複素共役(きょうやく) と呼ぶ. このとき,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab+cd,\quad \vec{a}\times\vec{b}=ad-bc,$$

$$\bar{\alpha}\beta=(a-ci)(b+di)=ab+adi-bci\overbrace{-cdi^2}^{+cd}=(ab+cd)+(ad-bc)i.$$

$$\therefore\ \bar{\alpha}\beta=\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})i.$$

このように, 平面ベクトルの内積と外積は, ベクトルに対応する複素数 α,β に関する $\bar{\alpha}\beta$ の実部と虚部に一致する.



$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\beta=|\beta|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ と書くと,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\beta &= |\alpha|(\cos\theta - i\sin\theta)\cdot|\beta|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\ &= |\alpha||\beta|\left(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+i(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)\right)\\ &= |\alpha||\beta|\left(\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)\right)\\ &= |\alpha||\beta|\cos(\varphi-\theta)+i|\alpha||\beta|\sin(\varphi-\theta).\end{aligned}$$

$|\alpha|=|\vec{a}|$, $|\beta|=|\vec{b}|$ なので

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\alpha||\beta|\cos(\varphi-\theta),\quad \vec{a}\times\vec{b}=|\alpha||\beta|\sin(\varphi-\theta).$$

□