3×3行列の逆行列の計算

https://github.com/genkuroki/LinearAlgebra を見よ　2018-06-08 ①

黒木玄

δは行列式とよばれる

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg =: \delta \neq 0 \text{ と仮定}$$

← 行列式

$a \neq 0$, $ae - bd \neq 0$ と仮定

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ ad & ae & af & 0 & a & 0 \\ ag & ah & ak & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$ ← aをかけた

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & ah-bg & ak-cg & -g & 0 & a \end{array}\right]$$ ← (第1行)×dをひいた ← (第1行)×gをひいた

$$\begin{aligned} &a\delta + (af-cd)(ah-bg) \\ &= a(aek + \cancel{bfg} + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - ceg) + \cancel{aafh} - \cancel{abfg} - \cancel{acdh} + bcdg \\ &= aeak - bdak - aecg + bdcg \\ &= ae(ak-cg) - bd(ak-cg) \\ &= (ae-bd)(ak-cg) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & (ae-bd)(ah-bg) & (ae-bd)(ak-cg) & -(ae-bd)g & 0 & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← ae-bdをかけた

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← (第2行)×(ah-bg)をひいた ← (☆)

$$\begin{aligned} \alpha &= (ae-bd)(ak-cg) - (af-cd)(ah-bg) \\ &= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta \end{aligned}$$

$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & c\delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & (ae-bd)\delta & (af-cd)\delta & -d\delta & a\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$ ← δをかけた ← aでわった

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & (ae-bd)\delta & 0 & -d\delta - (af-cd)(dh-eg) & a\delta + (af-cd)(ah-bg) & -(af-cd)(ae-bd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & (ae-bd) \end{array}\right]$$ うまくいった

$$\begin{aligned} &-d\delta - (af-cd)(dh-eg) = -d(aek + bfg + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - \cancel{ceg}) - \cancel{dafh} + \cancel{dcdh} + aefg - \cancel{dceg} \\ &= -aedk - bdfg + bddk + aefg = ae(fg-dk) - bd(fg-dk) = (ae-bd)(fg-dk) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$ ← ae-bdでわった

つづき

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

(第2行)×bを(第1行)からひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & \delta - c(dh-eg)+b(dk-fg) & c(ah-bg)-b(ak-cg) & -c(ae-bd)+b(af-cd) \\ 0 & \delta & 0 & & \text{上と同じ} & \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & a(ek-fh) & -a(bk-ch) & a(bf-ce) \\ 0 & \delta & 0 & & \text{上と同じ} & \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0 & 0 & ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right] \leftarrow a\text{でわった}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \text{上を}\delta\text{でわったもの} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \leftarrow \text{全体を}\delta\text{でわった.}$$

ゆえに,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{bmatrix}$$

2×2の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T} \leftarrow \text{転置.}$$

3×3の行列の逆行列のまとめ

転置に注意

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}$$

この行列の成分を行列の余因子と呼ぶ
minor

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg.$$

これを行列の行列式と呼ぶ
determinant

逆行列を行列式と余因子で表わす公式が存在する！
分母　分子

2×2行列の行列式の復習

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T}$$

これの成分は $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子

分母は行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

注意 行列 (matrix) と行列式 (determinant) は全然異なるものである。

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ← スカラーになる

①の途中からのつづき

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right] \longleftarrow (第2行)\times(ah-bg)をひいた \quad \leftarrow(★)$$

$$\alpha = (ae-bd)(ak-cg) - (af-cd)(ah-bg)$$
$$= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta$$
$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{array}{l} aek+bfg+cdh \\ -afh-bdk-ceg \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} & -\dfrac{d}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\delta}{ae-bd} & \dfrac{dh-eg}{ae-bd} & -\dfrac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{array}\right]$$

これは次が成立していることを意味している.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{d}{a} & 1 & 0 \\ \dfrac{dh-eg}{ae-bd} & -\dfrac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{bmatrix}}_{対角成分がすべて1の下三角行列} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} \\ 0 & 0 & \dfrac{\delta}{ae-bd} \end{bmatrix}}_{上三角行列}.$$

この公式も結構重要である.

時間変数tに依存する可逆な$n\times n$行列 $X(t)$は線形微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = \Lambda X, \quad \Lambda は n\times n の定数行列$$

をみたしていると仮定する. $X(t)$は次のように表わされていると仮定する.

$$X(t) = W(t)^{-1} Z(t), \quad W(t)は対角成分がすべて1の下三角行列, \ Z(t)は上三角行列.$$

$n\times n$行列 A は $A = A_+ - A_-$, A_+は上三角, A_-は対角成分がすべて0の下三角行列と一意に書ける.

$$\Lambda W^{-1} Z = \Lambda X = \frac{dX}{dt} = -W^{-1}\frac{dW}{dt}W^{-1}Z + W^{-1}\frac{dZ}{dt}, \quad \therefore \ W\Lambda W^{-1} = \frac{dZ}{dt}Z^{-1} - \frac{dW}{dt}W^{-1}.$$

$$\therefore \ \frac{dZ}{dt}Z^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_+ =: B, \quad \frac{dW}{dt}W^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_- = B - W\Lambda W^{-1}.$$

$$\therefore \ \frac{dZ}{dt} = BZ, \quad \frac{dW}{dt} = BW - W\Lambda. \quad \longleftarrow これを Sato\text{-}Wilson 方程式と呼ぶ.$$

ソリトン方程式の佐藤理論の中核部分!!!

2018-06-14

5

$$\boxed{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}^{-1}=?}$$

行列の基本変形を用いた求め方

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&8&0&0&1\end{array}\right]$$

4倍してひく

7倍してひく

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-13&-7&0&1\end{array}\right]$$

2倍してひく

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{array}\right]$$

← −3である

← −1をかける

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&\frac{+4}{3}&\frac{-1}{3}&0\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right]$$

2倍してひく

3倍してひく

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&4&-6&3\\0&1&0&\frac{10}{3}&\frac{-13}{3}&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right]$$

2倍してひく

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-8}{3}&\frac{8}{3}&-1\\0&1&0&\frac{10}{3}&\frac{-13}{3}&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-8&8&-3\\10&-13&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}$$ であろう。

$\boxed{\text{検算}}$ $$\begin{bmatrix}-8&8&-3\\10&-13&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$ ← 自分で確認せよ。

逆行列の公式を使う方法

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot8+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-1\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7$$
$$= 40+84+96-48-64-105$$
$$= 220-217=3$$

$$\begin{vmatrix}5&6\\8&8\end{vmatrix}=-8,\quad -\begin{vmatrix}4&6\\7&8\end{vmatrix}=10,\quad \begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-3$$
$$-\begin{vmatrix}2&3\\8&8\end{vmatrix}=8,\quad \begin{vmatrix}1&3\\7&8\end{vmatrix}=-13,\quad -\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=6$$
$$\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=-3,\quad -\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=6,\quad \begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$$

①～③で作った公式を使うための計算

$$\therefore \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-8&10&-3\\8&-13&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-8&8&-3\\10&-13&6\\-3&6&-3\end{bmatrix}$$

← これは前ページの結果と同じ

$\boxed{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}^{-1} \text{は存在しない}}$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-1\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot9-3\cdot5\cdot7$$
$$= 45+84+96-48-72-105$$
$$= 225-225=0.$$

$\frac{1}{0}$ は不可.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&9&0&0&1\end{array}\right]$$

4倍していく

7倍していく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-12&-7&0&1\end{array}\right]$$

2倍していく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\ \underbrace{0\quad 0\quad 0}&&&1&-2&1\end{array}\right]$$

ここはもう $\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$ にできない