

# 行列式

黒本玄 2018-07-19

1

## 置換の例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{cccc} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \quad \text{交点}が3つなので  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$$$

## 互換の例

$$5\text{ 次の互換 } (2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ と } 4 \text{ を } 1 \text{ 回交換}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{array} \quad \text{交点}は3つなので  $\text{sgn}(2,4) = -1$$$

互換の図の交点はいかならず奇数個になる  $\text{sgn}(i,j) = -1$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & i & \dots & j & \dots & & \\ \downarrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \downarrow & \\ \dots & i & \dots & j & \dots & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{交点}が \\ \leftarrow 2 \times 3 \text{ 個} + 1 \text{ 個} \leftarrow \text{奇数個} \end{array}$$

## $S_n = (n\text{ 次の置換全体の集合})$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$S_2 = \{1, (1,2)\}, \quad S_3 = \{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sgn} & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$S_4 = \{24 \text{ 個}\}$$

$$\text{sgn} \quad 1 \text{ が } 12 \text{ 個}, -1 \text{ が } 12 \text{ 個}$$

全部自分で書いて確認せよ

## 行列式の定義

$n \times n$  行列  $A = [a_{ij}]$  に対し,

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

L2

例  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

29 ① は  $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$  と  
 言い換えられる。

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{とよく、} \quad A = [a_1, \dots, a_n].$$

← 各行ベクトル      ↑ 列ベクトル

$$a_j = \beta b + \gamma c \quad \gamma \neq 0$$

$$|a_1, \dots, \underbrace{\beta b + \gamma c}_j, \dots, a_n| = \beta |a_1, \dots, \underbrace{b}_j, \dots, a_n| + \gamma |a_1, \dots, \underbrace{c}_j, \dots, a_n|$$

以上は  $n$  列についての多重線形性,  $m$  行についても成立している.

•  $|a_1, \dots, a_j, \dots, a_k, \dots, a_n| = -|a_1, \dots, a_k, \dots, a_j, \dots, a_n|$  3行について  
成立している

交換すると-1倍になる

- $a_j = a_k$  "2 3 12"  $|a_1, \dots, a_j, \dots, a_k, \dots, a_n| = 0$

③ 单行列的行列式:  $|E| = 1$ .

① - 船に

$$|a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}| = \text{sgn}(\sigma) |a_1, \dots, a_n|$$

④ ある列 (行) のスカラー倍を別の列 (行) に足しても行列式は不変: 3

$$\begin{aligned} |\dots, a_j, \dots, a_k + \alpha a_j, \dots| &\stackrel{(1)}{=} |\dots, a_j, \dots, a_k, \dots| + \alpha |\dots, a_j, \dots, a_j, \dots| \\ &\stackrel{(2)}{=} |\dots, a_j, \dots, a_k, \dots| \end{aligned}$$

同じ

⑤  $\begin{vmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$

証明  $i > j$  のとき  $a_{ij} = 0$  である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$\sigma(1) > 1$  だと 0  
 $\sigma(1) = 1$  の項のみが残る  
 $\sigma(2) > 2$  だと 0  
 $\sigma(2) = 2$  の項のみが残る  
 同様に  $\sigma(n) = n$  の項のみが残る

$$= \text{sgn}(1) a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad \square$$

⑥  $n$  次正方行列  $A, B$  に対し,  $|AB| = |A||B|$ .

証明  $A = [a_{ij}], B = [b_{jk}], AB = [c_{ik}]$  かつ  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ . ゆえに

$$|AB| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left( \sum_{j_1=1}^n a_{\sigma(1)j_1} b_{j_1 1} \right) \cdots \left( \sum_{j_n=1}^n a_{\sigma(n)j_n} b_{j_n n} \right)$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \left( \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)j_1} \cdots a_{\sigma(n)j_n} \right) b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

②より  
 この行列式は  $j_1, \dots, j_n$  に重複があるとき 0.  
 $(1 \ 2 \ \cdots \ n) \rightarrow (j_1 \ j_2 \ \cdots \ j_n) = \tau \in S_n$  かつ,  
 $\text{sgn}(\tau) |A|$  に等しい

$$= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) |A| b_{\tau(1)1} \cdots b_{\tau(n)n} = |A| |B|.$$

q.e.d.

例  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  のとき  $AB = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$  なること

4

$$|AB| = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr)$$

$$= \cancel{acpq} + adps + bcqr + \cancel{bdr} - (\cancel{acpq} + adqr + bcps + \cancel{bdsr})$$

$$= (ad-bc)(ps-qr) = |A||B|.$$

この例だけは必ず  
自分で確認しておくこと

□

行列式の導出計算の仕方

①, ②, ④, ⑤ の組み合わせを使う,

例  $\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④}} \begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{①}} 3 \begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交換}}$

$$\xrightarrow{\text{②}} -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2011 & 2012 & 2013 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④}} -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④}} -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{⑤}} -3 \times 1 \times (-1) = 3$$

□

例  $\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④}} \begin{vmatrix} 2011 & 1 & 2 \\ 2014 & 1 & 2 \\ 2017 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{②}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{⑤}} -1 \times 3 \times (-1) = 3$

# 行列の基本性質 ⑦

5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \times a_{nn}$$

$$\left( A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ のとき} \right)$$

$$\begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = |A'| \alpha$$

証明

$$a_{n1} = \dots = a_{n,n-1} = 0, \quad a_{1n} = \dots = a_{n-1,n} = 0, \quad a_{nn} = 1 \text{ とすると,}$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)} \quad \leftarrow a_{n1} = \dots = a_{n,n-1} = 0 \text{ のため}$$

$\sigma(n) = n$  の場合のみが残る,

$$= \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n-1,\tau(n-1)} \times a_{nn}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \times a_{nn}$$

q.e.d

## 余因子の定義

③  $(-1)^{n-i} \times (-1)^{n-j} = (-1)^{i+j}$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & 1 & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

↑  
j列目はi番目が1で他は0

(-1)<sup>n-i</sup> → 移動      (-1)<sup>n-j</sup> → 移動      ⑦ も使う

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A \text{ から 第 } i \text{ 行と} \\ \text{第 } j \text{ 列をとって} \\ \text{もの} \end{vmatrix},$$

同様に、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A \text{ から 第 } i \text{ 行と} \\ \text{第 } j \text{ 列をとって} \\ \text{もの} \end{vmatrix} = \Delta_{ij} \text{ も示せる.}$$

## 余因子展開①

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{①} \quad \begin{vmatrix} A \text{の第} k \text{行} \\ A \text{の第} i \text{行で} \\ \text{おきかえたもの} \end{vmatrix} = \begin{cases} |A| & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} = |A| \delta_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [0, \dots, 1, \dots, 0] = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$$

$$\sum_{j=1}^n \Delta_{ji} a_{jk} = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{①} \quad \begin{vmatrix} A \text{の第} i \text{列} \\ A \text{の第} k \text{列で} \\ \text{おきかえたもの} \end{vmatrix} = |A| \delta_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^n j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a_{jk} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

## 行列式の余因子展開②

余因子行列と呼ぶ

$(i, j)$ 成分が  $\Delta_{ij}$  の行列を  $\Delta$  と書く、 $\Delta^T$  の  $(i, j)$ 成分は  $\Delta_{ji}$  であるから、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{kj} = |A| \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} a_{jk} = |A| \delta_{ik}$$

は行列を用いて次のように書ける:

$$A \Delta^T = |A| E, \quad \Delta^T A = |A| E.$$

## 逆行列の公式

$$|A| \neq 0 \text{ のとき, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Delta^T.$$

**証明**  $\frac{1}{|A|} \Delta^T A = \frac{1}{|A|} |A| E = E, \quad A \left( \frac{1}{|A|} \Delta^T \right) = \frac{1}{|A|} A \Delta^T = \frac{1}{|A|} |A| E = E, \quad \text{q.e.d.}$

**例** ( $n=2$ )  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  のとき,  $\begin{cases} \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, & \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c, \\ \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b, & \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \end{cases}$

$\Delta = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$  となる、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Delta^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

例  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$  のとき,

7

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}, \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix}, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix}, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$|A| = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Delta^T$$

転置忘れろるな!

負号 - は一松もように出る。

例題 次の行列の余因子  $\Delta_{ij}$  と行列式と逆行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

解答例  $|A| = 3$ .

$$\text{余因子行列 } \Delta = [\Delta_{ij}] \text{ とすると, } \Delta = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -3 \\ 8 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ゆえに } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

□

自分で計算してみよ!

Cramérの公式  $A = [a_{ij}]$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  とおく.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$|A| \neq 0$  と仮定する. このとき,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \Delta^T$  なのでこの方程式は

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \Delta^T b$$

と解ける. これを成分で書くと,

$$x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^n \Delta_{ji} b_j = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} b_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aの第i列をbで置きかえたもの  
↓  
j番目

$$a_{ji} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \text{ と書く, } A = [a_1, \dots, a_n] \text{ とする}$$

$$x_j = \frac{|a_1, \dots, b, \dots, a_n|}{|A|}, \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{クラメル} \\ \text{Cramérの公式} \end{array}$$

例  $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \neq 0$  のとき,  $\begin{cases} ax+by+cz = p \\ dx+ey+fz = q \\ gx+hy+kz = r \end{cases}$  の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & k \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & k \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{|A|}.$$

例題  $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 4x+2y+3z=-1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$  をクラメルの公式を使って解け.

解答例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$\begin{cases} x = \frac{16}{-5} \\ y = \frac{-1}{-5} \\ z = \frac{-19}{-5} \end{cases}$$