3×3行列の逆行列の計算

2018-06-08 ①

黒木玄

δは行列式とよばれる

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}}_{\text{行列式}} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg =: \delta \neq 0 \text{ と仮定}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 \\ ae - bd \neq 0 \end{array}\right\}$ と仮定

$$\begin{aligned} & a\delta + (af-cd)(ah-bg) \\ &= a(aek + \cancel{bfg} + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - ceg) \\ &\quad + \cancel{aafh} - \cancel{abfg} - \cancel{acdh} + bcdg \\ &= aeak - bdak - aecg + bdcg \\ &= ae(ak-cg) - bd(ak-cg) \\ &= (ae-bd)(ak-cg) \end{aligned}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ ad & ae & af & 0 & a & 0 \\ ag & ah & ak & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$ ← aをかけた

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & ah-bg & ak-cg & -g & 0 & a \end{array}\right]$$

← (第1行)×dをひいた

← (第1行)×gをひいた

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & (ae-bd)(ah-bg) & (ae-bd)(ak-cg) & -(ae-bd)g & 0 & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← $ae-bd$をかけた

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← (第2行)×$(ah-bg)$をひいた ← (☆)

$$\begin{aligned} \alpha &= (ae-bd)(ak-cg) - (af-cd)(ah-bg) \\ &= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta \end{aligned}$$

$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & c\delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & (ae-bd)\delta & (af-cd)\delta & -d\delta & a\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

← δをかけた

← aでわった

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & (ae-bd)\delta & 0 & -d\delta - (af-cd)(dh-eg) & a\delta + (af-cd)(ah-bg) & -(af-cd)(ae-bd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & (ae-bd) \end{array}\right]$$ ← うまくいった

$$\begin{aligned} & -d\delta - (af-cd)(dh-eg) = -d(aek + bfg + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - \cancel{ceg}) - \cancel{dafh} + \cancel{dcdh} + aefg - \cancel{dceg} \\ &= -aedk - bdfg + bddk + aefg = ae(fg-dk) - bd(fg-dk) = (ae-bd)(fg-dk) \end{aligned}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$ ← $ae-bd$でわった

つづき

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta-c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

(第2行)×b を(第1行)からひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & \delta-c(dh-eg)+b(dk-fg) & c(ah-bg)-b(ak-cg) & -c(ae-bd)+b(af-cd) \\ 0 & \delta & 0 & & \text{上と同じ} & \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & a(ek-fh) & -a(bk-ch) & a(bf-ce) \\ 0 & \delta & 0 & & \text{上と同じ} & \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0 & 0 & ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

← aでわった

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \text{上を}\delta\text{でわったもの} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

← 全体をδでわった.

ゆえに,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{bmatrix}$$

2×2の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}$$

← 転置.

3×3の行列の逆行列のまとめ

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}=\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}e&f\\h&k\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}d&f\\g&k\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}b&c\\h&k\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&c\\g&k\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

この行列の成分を行列の余因子と呼ぶ
minor

$$\delta=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{vmatrix}=aek+bfg+cdh-afh-bdk-ceg.$$

これを行列の行列式と呼ぶ
determinant

逆行列を行列式と余因子で表わす公式が存在する！
分母　分子

2×2行列の行列式の復習

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}^T$$

これの成分は $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ の余因子

分母は行列式

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

注意　行列(matrix)と行列式(determinant)は全然異なるものである。

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$　　$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ ← スカラーになる

$\boxed{\text{①の途中からのつづき}}$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right] \longleftarrow \text{(第2行)}\times(ah-bg)\text{をひいた} \leftarrow (☆)$$

$$\alpha = (ae-bd)(ak-cg) - (af-cd)(ah-bg)$$
$$= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta$$
$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{array}{l} aek + bfg + cdh \\ -afh - bdk - ceg \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} & -\dfrac{d}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\delta}{ae-bd} & \dfrac{dh-eg}{ae-bd} & -\dfrac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{array}\right]$$

これは次が成立していることを意味している.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{d}{a} & 1 & 0 \\ \dfrac{dh-eg}{ae-bd} & -\dfrac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{対角成分がすべて1の下三角行列}} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} \\ 0 & 0 & \dfrac{\delta}{ae-bd} \end{bmatrix}}_{\text{上三角行列}}.$$

この公式も結構重要である.

時間変数 t に依存する可逆な $n\times n$ 行列 $X(t)$ は線形微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = \Lambda X, \quad \Lambda \text{ は } n\times n \text{ の定数行列}$$

をみたしていると仮定する. $X(t)$ は次のように表わされていると仮定する.

$$X(t) = W(t)^{-1} Z(t), \quad W(t) \text{ は対角成分がすべて1の下三角行列}, \; Z(t) \text{ は上三角行列}.$$

$n\times n$ 行列 A は $A = A_+ - A_-$, A_+ は上三角, A_- は対角成分がすべて0の下三角行列と一意に書ける.

$$\Lambda W^{-1} Z = \Lambda X = \frac{dX}{dt} = -W^{-1}\frac{dW}{dt}W^{-1}Z + W^{-1}\frac{dZ}{dt}, \quad \therefore\ W\Lambda W^{-1} = \frac{dZ}{dt}Z^{-1} - \frac{dW}{dt}W^{-1}.$$

$$\therefore\ \frac{dZ}{dt}Z^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_+ =: B, \quad \frac{dW}{dt}W^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_- = B - W\Lambda W^{-1}.$$

$$\therefore\ \frac{dZ}{dt} = BZ, \quad \frac{dW}{dt} = BW - W\Lambda.$$ ← これを Sato-Wilson 方程式と呼ぶ.

ソリトン方程式の佐藤理論の中核部分!!!