Vandermondeの行列式

黒木玄 2018-07-21

ファンデルモンド

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} \text{2 } x_1\text{倍してひく} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

ひく

$x_2 - x_1$でわれる　$x_3 - x_1$でわれる

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{2③ } x_1\text{倍して} \\ \text{2① ひく} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix}$$

ひく

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}}_{\text{上を使える}}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$x_2 - x_1$でわれる　$x_3 - x_1$でわれる　$x_4 - x_1$でわれる

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & x_4^2 - x_1^2 \\ x_1^3 & x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{2③ } x_1\text{倍} \\ \text{2② して} \\ \text{2① ひく} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_4^2 - x_1 x_4 \\ 0 & x_2^3 - x_1 x_2^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix}$$

ひく

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}}_{\text{上を使える.}}$$

以上と同様にして（数学的帰納法によって）次の公式が得られる：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

（左辺をVandermondeの行列式とよび
右辺を差積と呼ぶ）

公式(*)とよぶ

注意 行列式は和で定義されたので，上の公式(*)は「和＝積」の形をしている，すなわち因数分解の形をしている．この手の公式はとても有用である． □

公式(*)の別証明

Vandermondeの行列式を $V(x_1,\dots,x_n)$ と書き，差積を $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ と書こう．

$i<j$ について，$V(x_1,\dots,\underset{i}{x_i},\dots,\underset{j}{x_i},\dots,x_n) \underset{\text{行列式の交代性}}{=} 0$．

すなわち，x_j に x_i を代入するとVandermondeの行列式は0になる．

ゆえに $V(x_1,\dots,x_n)$ は $i<j$ に対するすべての x_j-x_i でわりきれる．

したがって，$V(x_1,\dots,x_n)$ は差積 $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ でわりきれる

どちらも $0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 次式なので $V(x_1,\dots,x_n)=(\text{定数})\times\Delta(x_1,\dots,x_n)$．

行列式の定義より，$V(x_1,\dots,x_n)$ の $1x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数は1である．

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_1,\dots,x_n) = {} & (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\
& \times(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\
& \cdots\cdots \\
& \times(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

の $1x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数も1である．

したがって，$V(x_1,\dots,x_n)=\Delta(x_1,\dots,x_n)$ でなければいけない． $\boxed{\text{q.e.d.}}$

注意 以上によって，Vandermondeの行列式 $V(x_1,\dots,x_n)$ と差積 $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ は以下の条件によってただひとつに決まることもわかる．

(1) $i<j$ のとき，$f(x_1,\dots,\underset{i}{x_i},\dots,\underset{j}{x_i},\dots,x_n)=0$．

(2) $f(x_1,\dots,x_n)$ は $x_1,\dots,x_n$ の $\frac{n(n-1)}{2}$ 次多項式である．

(3) $f(x_1,\dots,x_n)$ における $1x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数は1である $\square$