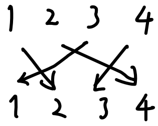
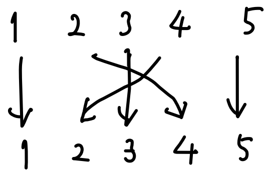
行列式　　黒木玄　2018-07-19

置換の例　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 3$



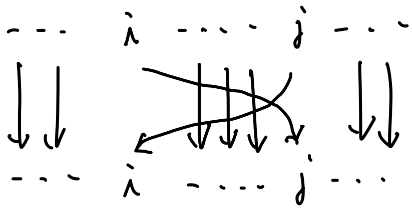
交点が3つなので $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$

互換の例　5次の互換 $(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　2と4だけを交換



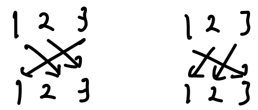
交点は3つなので $\mathrm{sgn}(2,4) = -1$

互換の図の交点はかならず奇数個になる　$\mathrm{sgn}(i,j) = -1$



交点が
← 2×3個$+1$個 ← 奇数個

S_n = (n次の置換全体の集合)



$S_2 = \{1, (1,2)\}$,　$S_3 = \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, (1,2), (1,3), (2,3)\right\}$

sgn　1　-1　　　　1　1　1　-1　-1　-1

$S_4 = \{\ 24個\ \}$

sgn　1が12個，-1が12個

全部自分で書いて確認せよ．

行列式の定義　$n \times n$行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

行列式の基本性質

⓪ $|A^T| = |A|$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 3$ 9から8に訂正

転置は行列の行(ヨコ)と列(タテ)の立場交換するので，行列式の行(ヨコ)についての性質は列(タテ)についても成立し，列(タテ)についての性質は行(ヨコ)でも成立する．

この⓪は $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ と言いかえられる．

① 多重線形性（行列式はその中の列(タテ)ベクトルたち（行(ヨコ)ベクトルたち）のかけ算のようなものである．）

$\mathbb{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ とおくと，$A = [\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n]$．

← 列(タテ)ベクトル

行列 A は列(タテ)ベクトルを並べたものとみなせる．

$\mathbb{a}_j = \beta \mathbb{b} + \gamma \mathbb{c}$ のとき

$$|\mathbb{a}_1, \dots, \underset{\hat{j}}{\beta \mathbb{b} + \gamma \mathbb{c}}, \dots, \mathbb{a}_n| = \beta\, |\mathbb{a}_1, \dots, \underset{\hat{j}}{\mathbb{b}}, \dots, \mathbb{a}_n| + \gamma\, |\mathbb{a}_1, \dots, \underset{\hat{j}}{\mathbb{c}}, \dots, \mathbb{a}_n|$$

（これは $a_1 \cdots (\beta b + \gamma c) \cdots a_n = \beta a_1 \cdots b \cdots a_n + \gamma a_1 \cdots c \cdots a_n$ と似ている．）

以上は列(タテ)についての多重線形性，行(ヨコ)についても成立している．

② 交代性： $j \neq k$ について，

- $|\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_j, \dots, \mathbb{a}_k, \dots, \mathbb{a}_n| = -|\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k, \dots, \mathbb{a}_j, \dots, \mathbb{a}_n|$

  交換すると -1 倍になる

- $\mathbb{a}_j = \mathbb{a}_k$ ならば $|\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_j, \dots, \mathbb{a}_k, \dots, \mathbb{a}_n| = 0$

  同じ

行(ヨコ)についても成立している．

③ 単行列の行列式： $|E| = 1$．

注 一般に

$$|\mathbb{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbb{a}_{\sigma(n)}| = \mathrm{sgn}(\sigma)\, |\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n|$$

④ ある$\overset{タテ}{列}$($\overset{ヨコ}{行}$)のスカラー倍を別の$\overset{タテ}{列}$($\overset{ヨコ}{行}$)に足しても行列式は不変:

$$\left|\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \overset{j \neq k}{\boldsymbol{a}_k + \alpha \boldsymbol{a}_j}, \dots\right| \overset{①}{=} \left|\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots\right| + \alpha \left|\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots\right|$$

同じ

$$\overset{②}{=} \left|\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots\right|$$

⑤ $$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

$\boxed{\text{証明}}$ $i > j$ のとき $a_{ij} = 0$ ならば

σ(1) > 1 だと 0
σ(1) = 1 の項のみが残る

σ(2) > 2 だと 0
σ(2) = 2 の項のみが残る

同様に σ(n) = n の項のみが残る

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \mathrm{sgn}(1)\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$ □

⑥ n次正方行列 A, B に対して, $|AB| = |A||B|$.

$\boxed{\text{証明}}$ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, $AB = [c_{ik}]$ のとき, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$. ゆえに

$$|AB| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{\sigma(1)j_1} b_{j_1 1} \right) \cdots \left(\sum_{j_n=1}^{n} a_{\sigma(n)j_n} b_{j_n n} \right)$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)j_1} \cdots a_{\sigma(n)j_n} \right) b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n}$$

② より
この行列式は $j_1, \dots, j_n$ に重複があると 0,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \tau \in S_n$ のとき,
$\mathrm{sgn}(\tau)|A|$ に等しい

$$= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, |A|\, b_{\tau(1)1} \cdots b_{\tau(n)n} = |A||B|.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

例 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ のとき $AB=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$ なので

$$
\begin{aligned}
|AB| &= (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) \\
&= \cancel{acpq}+adps+bcqr+\cancel{bdrs}-(\cancel{acpq}+adqr+bcps+\cancel{bdsr}) \\
&= (ad-bc)(ps-qr) = |A||B|.
\end{aligned}
$$
□

この例だけは必ず自分で確認しておくこと

行列式の楽な計算の仕方

①,②,④,⑤ の組み合わせを使う。

例

$$
\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix}
\text{ひく} \overset{④}{=}
\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix}
\overset{①}{=} 3
\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix}
\text{交換}
$$

$$
\overset{②}{=} -3
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2011 & 2012 & 2013 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix}
\text{ひく}\ \text{ひく}
\overset{④}{=} -3
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\text{ひく}
\overset{④}{=} -3
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{⑤}{=} -3\times 1\times 1\times(-1) = 3
$$
□

例

$$
\begin{vmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ 2017 & 2018 & 2018 \end{vmatrix}
\overset{④}{=}
\begin{vmatrix} 2011 & 1 & 2 \\ 2014 & 1 & 2 \\ 2017 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\overset{④}{=}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}
\overset{②}{=} -
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}
\overset{⑤}{=} -1\times 3\times(-1) = 3
$$
□

ひく　ひく　　ひく　ひく　　交換

行列の基本性質 ⑦

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \times a_{nn}$$

$\left(A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\right.$ のとき

$\left.\begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = |A'|\alpha \right)$

証明 $a_{n1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$, $a_{1n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$, $a_{nn} = 1$ とすると,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}\, a_{n\sigma(n)}$$

$a_{n1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$ なので $\sigma(n) = n$ の項のみが残る.

$$= \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} \times a_{nn}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \times a_{nn}$$

q.e.d

余因子の定義

注 $(-1)^{n-i} \times (-1)^{n-j} = (-1)^{i+j}$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A\text{から第}i\text{行と} \\ \text{第}j\text{列をとったもの} \end{vmatrix},$$

ひく　ひく

$(-1)^{n-i}$ 移動

j 列目は i 番目が1で他は0

$(-1)^{n-j} \to$ 移動

⑦も使う

同様にして,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A\text{から第}i\text{行と} \\ \text{第}j\text{列をとったもの} \end{vmatrix} = \Delta_{ij}$$ も示せる.

L6

余因子展開①

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\begin{array}{c|ccccc|c} & & & j & & & \\ & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \\ & & & \cdots & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & <k \\ & & & \cdots & & & \\ & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & \end{array} \overset{①}{=} \left|\begin{matrix} \text{A の第 k 行を} \\ \text{A の第 i 行で} \\ \text{おきかえたもの} \end{matrix}\right| = \begin{cases} |A| & (i=k) \\ 0 & (i\neq k) \end{cases} = |A|\delta_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[0,\dots,1,\dots,0] = [a_{i1},\dots,a_{in}]$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ji}a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} j> \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & 1 & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} a_{jk} \overset{①}{=} \left|\begin{matrix} \text{A の第 i 列を} \\ \text{A の第 k 列で} \\ \text{おきかえたもの} \end{matrix}\right| = |A|\delta_{ik}$$

$$\hat{i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} j\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a_{jk} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

行列式の余因子展開②

余因子行列と呼ぶ

(i,j) 成分が Δ_{ij} の行列を Δ と書く。Δ^T の (i,j) 成分は Δ_{ji} であるから，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj} = |A|\delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^{n}\Delta_{ji}a_{jk} = |A|\delta_{ik}$$

は行列を使って次のように書ける：

$$A\Delta^T = |A|E, \qquad \Delta^T A = |A|E.$$

逆行列の公式

$|A|\neq 0$ のとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\Delta^T$.

証明 $\dfrac{1}{|A|}\Delta^T A = \dfrac{1}{|A|}|A|E = E$, $A\left(\dfrac{1}{|A|}\Delta^T\right) = \dfrac{1}{|A|}A\Delta^T = \dfrac{1}{|A|}|A|E = E$. $\boxed{\text{q.e.d}}$

例 $(n=2)$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき，$\begin{cases} \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, & \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c, \\ \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b, & \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = d, \end{cases}$

$\Delta = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ なので，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Delta^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

例 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ のとき,

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}$, $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix}$, $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}$, $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix}$, $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$, $\Delta_{32} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$$|A| = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Delta^T.$$

転置をわすれるな!

← 負号 − は 一松もように出る.

例題 次の行列の余因子 Δ_{ij} と行列式と逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

解答例 $|A| = 3$.

余因子行列を $\Delta = [\Delta_{ij}]$ と書くと, $\Delta = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -3 \\ 8 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

ゆえに $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$. □

自分でも計算してみよ!

$\boxed{\text{Cramér の公式}}$ $\overset{n\times n}{A} = [a_{ij}]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とおくと,

$$Ax = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n . \end{cases}$$

$|A| \neq 0$ と仮定する. このとき, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Delta^T$ なのでこの方程式は

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}\Delta^T b$$

と解ける. これを成分で書くと,

A の第 i 列を b でおきかえたもの

$$x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji} b_j = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} b_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(1 は j 番目, 列は $\hat{i}$)

$a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ と書くと, $A = [a_1, \dots, a_n]$ であって

$$x_j = \frac{|a_1, \dots, \overset{\overset{j}{\vee}}{b}, \dots, a_n|}{|A|}. \quad \leftarrow \underline{\overset{\text{クラメル}}{\text{Cramér}}\text{の公式}}$$

例 $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \neq 0$ のとき, $\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + kz = r \end{cases}$ の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & k \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & k \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{|A|}. \quad \square$$

例題 $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$ をクラメルの公式を使って解け.

解答例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$\begin{cases} x = \frac{16}{-5} \\ y = \frac{-1}{-5} \\ z = \frac{-19}{-5} \end{cases} \quad \square$$