3×3行列の逆行列の計算

2018-06-08 ①

黒木玄

δは行列式とよばれる

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg =: \delta \neq 0$$ と仮定

← 行列式

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & k & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$a \neq 0$, $ae - bd \neq 0$ } と仮定

$$a\delta + (af-cd)(ah-bg)$$
$$= a(aek + \cancel{bfg} + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - ceg) + \cancel{aafh} - \cancel{abfg} - \cancel{acdh} + bcdg$$
$$= aeak - bdak - aecg + bdcg$$
$$= ae(ak-cg) - bd(ak-cg)$$
$$= (ae-bd)(ak-cg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ ad & ae & af & 0 & a & 0 \\ ag & ah & ak & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$ ← aをかけた

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & ah-bg & ak-cg & -g & 0 & a \end{array}\right]$$
← (第1行)×d をひいた
← (第1行)×g をひいた

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & (ae-bd)(ah-bg) & (ae-bd)(ak-cg) & -(ae-bd)g & 0 & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← ae−bd をかけた

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right]$$ ← (第2行)×(ah−bg) をひいた ← (☆)

$$\alpha = (ae-bd)(ak-cg) - (af-cd)(ah-bg)$$
$$= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta$$

$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & c\delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & (ae-bd)\delta & (af-cd)\delta & -d\delta & a\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$
← δをかけた
← aでわった

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & (ae-bd)\delta & 0 & -d\delta - (af-cd)(dh-eg) & a\delta + (af-cd)(ah-bg) & -(af-cd)(ae-bd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$ うまくひいた

$$-d\delta - (af-cd)(dh-eg) = -d(aek + bfg + \cancel{cdh} - \cancel{afh} - bdk - \cancel{ceg}) - \cancel{dafh} + \cancel{dcdh} + aefg - \cancel{dceg}$$
$$= -aedk - bdfg + bddk + aefg = ae(fg-dk) - bd(fg-dk) = (ae-bd)(fg-dk)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta - c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$ ← ae−bd でわった

つづき

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & b\delta & 0 & \delta-c(dh-eg) & c(ah-bg) & -c(ae-bd) \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

(第2行)×bを(第1行)からひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & \delta-c(dh-eg)+b(dk-fg) & c(ah-bg)-b(ak-cg) & -c(ae-bd)+b(af-cd) \\ 0 & \delta & 0 & \multicolumn{3}{c}{\text{上と同じ}} \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} a\delta & 0 & 0 & a(ek-fh) & -a(bk-ch) & a(bf-ce) \\ 0 & \delta & 0 & \multicolumn{3}{c}{\text{上と同じ}} \\ 0 & 0 & \delta & & & \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \delta & 0 & 0 & ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ 0 & \delta & 0 & -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

← aでわった

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \text{上を}\delta\text{でわったもの} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

← 全体をδでわった.

ゆえに,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} ek-fh & -(bk-ch) & bf-ce \\ -(dk-fg) & ak-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{bmatrix}$$

2×2の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

← 転置.

3×3の行列の逆行列のまとめ

$$\begin{bmatrix} a&b&c\\ d&e&f\\ g&h&k\end{bmatrix} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}e&f\\ h&k\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}d&f\\ g&k\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}d&e\\ g&h\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b&c\\ h&k\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a&c\\ g&k\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a&b\\ g&h\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}b&c\\ e&f\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a&c\\ d&f\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a&b\\ d&e\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

この行列の成分を行列の余因子と呼ぶ
minor

$$\delta = \begin{vmatrix} a&b&c\\ d&e&f\\ g&h&k\end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg.$$

これを行列の行列式と呼ぶ
determinant

逆行列を行列式と余因子で表わす公式が存在する！
分母　　分子

2×2行列の行列式の復習

$$\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d&-b\\ -c&a\end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d&-c\\ -b&a\end{bmatrix}^T$$

これの成分は $\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix}$ の余因子

分母は行列式

$$\begin{vmatrix} a&b\\ c&d\end{vmatrix} = ad-bc$$

注意 行列(matrix)と行列式(determinant)は全然異なるものである.

$\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix}$　　$\begin{vmatrix} a&b\\ c&d\end{vmatrix} = ad-bc$ ← スカラーになる

①の途中からのつづき

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & -a(ah-bg) & a(ae-bd) \end{array}\right] \leftarrow (\text{第2行})\times(ah-bg)\text{をひいた} \quad \leftarrow (☆)$$

$$\alpha = (ae-bd)(ak-cg)-(af-cd)(ah-bg)$$
$$= a^2ek - aceg - abdk + \cancel{bcdg} - a^2fh + abfg + acdh - \cancel{bcdg} = a\delta$$

$$\beta = -(ae-bd)g + d(ah-bg) = -aeg + \cancel{bdg} + adh - \cancel{bdg} = a(dh-eg)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ae-bd & af-cd & -d & a & 0 \\ 0 & 0 & \delta & dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{array}\right]$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{array}{l} aek+bfg+cdh \\ -afh-bdk-ceg \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} & -\frac{d}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{ae-bd} & \frac{dh-eg}{ae-bd} & -\frac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{array}\right]$$

これは次が成立していることを意味している。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{a} & 1 & 0 \\ \frac{dh-eg}{ae-bd} & -\frac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{ae-bd} \end{bmatrix}.$$

対角成分がすべて1の下三角行列　　上三角行列

この公式も結構重要である。

時間変数 t に依存する可逆な $n\times n$ 行列 $X(t)$ は線形微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = \Lambda X, \quad \Lambda \text{は } n\times n \text{の定数行列}$$

をみたしていると仮定する。$X(t)$ は次のように表わされていると仮定する。

$X(t) = W(t)^{-1} Z(t)$, $W(t)$ は対角成分がすべて1の下三角行列, $Z(t)$ は上三角行列

$n\times n$ 行列 A は $A = A_+ - A_-$, A_+ は上三角, A_- は対角成分がすべて0の下三角行列と一意に書ける。

$$\Lambda W^{-1} Z = \Lambda X = \frac{dX}{dt} = -W^{-1}\frac{dW}{dt}W^{-1}Z + W^{-1}\frac{dZ}{dt}, \quad \therefore \quad W\Lambda W^{-1} = \frac{dZ}{dt}Z^{-1} - \frac{dW}{dt}W^{-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{dZ}{dt}Z^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_+ =: B, \quad \frac{dW}{dt}W^{-1} = (W\Lambda W^{-1})_- = B - W\Lambda W^{-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{dZ}{dt} = BZ, \quad \frac{dW}{dt} = BW - W\Lambda.$$ ← これを Sato-Wilson 方程式と呼ぶ。

ソリトン方程式の佐藤理論の中核部分!!!

2018-06-14

5

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = ?}$$

行列の基本変形を用いた求め方

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4倍してひく

7倍してひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2倍してひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

← -3 でわる

← -1 をかける

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

2倍してひく

3倍してひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{-13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

2倍してひく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{-13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$ であろう。

$\boxed{\text{検算}}$

$$\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ← 自分で確認せよ。

逆行列の公式を使う方法

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot8 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7$$
$$= 40 + 84 + 96 - 48 - 64 - 105$$
$$= 220 - 217 = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -8, \quad -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 10, \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -13, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -3 \\ 8 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

← これは前ページの結果と同じ

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \text{は存在しない}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 - 3\cdot5\cdot7$$
$$= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105$$
$$= 225 - 225 = 0.$$

$\frac{1}{0}$ は不可.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4倍していく

7倍していく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2倍していく

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

ここはもう $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ にできない