解析学演習

黒木 玄　(東北大学理学部数学教室)

1995 年 11 月 6 日 (日)

0　演習の進め方

この時間は, 微分積分学の演習を行なう. ただし, 講義の内容がそのまま演習に反映されるとは限らないことを注意しておく. また, 以下のような思い込みはすべて間違いである可能性が大きいので注意して欲しい:

1. 授業は教科書に沿って進められるのが当然であり, 教科書に書いてあることはすべて正しいと思っている.

2. 数学の演習とは, 練習問題を解きその答合わせをすることだと思っている. 答合わせをしないと心配で問題を解いた気にならない.

3. 大学で習う数学は高校までに習った数学とスタイルが全然違うので, 自分は大学の数学に向いてないと思ってしまいやる気を無くしてしまった.

演習は以下のような方針て行なう:

- 問題が解けた人もしくは指名された人は黒板に解答を書きそれを発表すること. (発表の順番は私が黒板を見て決めます.) そのとき, 問題の番号と自分の氏名・学籍番号を書くのを忘れないこと.

- 数式だけの説明不足の解答は, 正式な解答とは認めない. 言葉を正確に用いて内容を詳しく説明した解答を書くこと.

- 問題が解けたと思って発表しても解答が完全でない場合は次の時間に再発表すること. (すぐに修正できた場合はその時間中に再発表してもよい.)

- すでに解かれてしまった問題でも, 別の方法で解けた場合はそれを発表してもよい.

- 演習問題を改良してから解いても良い. その改良が非常に良いものの場合は高く評価されるであろう.

- なお, 演習問題自体が間違っている場合が多々あると思う. その場合は, 問題を適切に修正してから解くこと. 適切に訂正不可能な場合は, 反例などを挙げ, その理由を説明すること.

(参考書 1) 高木貞治著, 『解析概論』, 改訂第三版, 岩波書店.

この演習における問題の大部分は『解析概論』から切り出したものである.

(参考書 2) 寺沢寛一著, 『自然科学者のための数学概論』(増訂版, 応用編の 2 冊がある), 岩波書店. この 2 冊は一般に『寺寛』という呼び名で親しまれている.

数学科の学生は数学的な厳密な推論の仕方を入学時から叩き込まれることが多い. そのため, 計算練習がおろそかになり, 大学の 3 年生頃には, 情けない状態になっている人も出てくることが多い. そうならないためには, 機会あるごとに面倒な計算にも挑戦しておくことが望ましい. しかし, 意味のない計算問題を計算練習のためだけのために解くのは精神的に大きな苦痛が伴なう. 精神的な苦痛を減らすための一つの方法は, 計算結果に何らかの別の価値が伴なうような計算をするよう心掛けることである. 例えば, 一般的な理論や定理における基本的な例や反例について計算してみたり, 自然科学など現実を扱う分野に現われる数学的なモデルに関する計算を実行してみたりするのである. この後者のためには, 上記の寺沢寛一著の 2 冊が非常に役に立つ.

以上に挙げた, 高木貞治の『解析概論』や『寺寛』はいわゆる名著である. 時がたっても数学の内容自身は本質的に変化しないので, 名著と呼ばれる数学の本は時代を越えて役に立つ. 『解析概論』や『寺寛』は少なくとも孫子の代までは役に立つ. このような本に自分のお金を投資しても決して無駄にはならないと思う. どうせ買うなら投資価値の高い本を選ぶべきであろう.

(記号法) 高校までの数学の教科書は文部省検定があるので記号法は統一されているが, 今後はそのようなことはないので柔軟に対処して欲しい. 例えば, $\leqq$ のことを $\le$ と書いたり $\leqslant$ と書いたりする. 特別な使いわけの規則などなく, 皆イーカゲンに使っている.

1 数列の極限

定義 1.1 (数列の極限) 数列 a_n が α に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな N を取って, $n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立するようにできることである. このような α は, (存在するとすれば) 数列 a_n から一意的に定まり, 数列 a_n の極限と呼ばれ, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表わされる.

[1] 上の数列の極限の定義の条件における $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を以下のように置き換えても, もとの条件と同値であることを示せ:

1. $|a_n - \alpha| \le \varepsilon$,
2. $|a_n - \alpha| \le 3\varepsilon$. □

数列の極限の定義において, ε の前の不等号は $<$ および $\le$ のどちらでもよい. さらに, ε の前に 3 のような任意の正の定数が挿入されてもよい. ちなみに, $<$ と $\le$ のどちらをでもよい場合は, $\le$ の方を使った方が便利なことが多い. なぜなら, 収束する数列 a_n が $a_n < A$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たしていても, $\lim a_n < A$ が成立するとは限らないからである. ($a_n \le A$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ならば $\lim a_n \le A$ が成立する.) 始めに $<$ を使って出発しても, 極限操作をすることによって結局 $\le$ が出てくることを避けられない場合が多いのである.

[2] 0 以外の実数からなる数列 a_n が 0 でない実数に収束していると仮定する．このとき，数列 $\dfrac{1}{a_n}$ も収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n}$ が成立することを示せ． □

[3] $a>0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$． □

[4] $a>1$, $k>0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$． □

[5] $a>0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$． □

[6] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$． □

注意: 逆は成立しない．例えば，$a_n=(-1)^{n-1}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$ だが，もとの a_n 自身は収束しない．

2 実数の連続性

定理 2.1 (実数の連続性) 互いに同値な以下の条件のどれかによって，実数の連続性が特徴付けられる:

1. 実数の切断は，下組と上組との境界として，一つの実数を確定する (Dedekind の定理)[1]．

2. 数の集合 S が上方 [または下方] に有界ならば S の上限 [または下限] が存在する (Weierstrass の定理)[2]．

3. 有界なる単調数列は収束する[3]．

4. 閉区間 $I_n=[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\ldots)$ において，各区間 I_n がその前の区間 I_{n-1} に含まれ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|b_n-a_n|=0$ が成立するとき，これらの各区間には共通なる唯一の点が存在する (区間縮小法)[4]．

5. 実数列 a_n が収束するためには次の条件が成立すれば十分である (Cauchy 列の収束，実数全体の集合の距離空間としての完備性)[5]:

   (∗) 任意の $\varepsilon>0$ に対して番号 N をうまく定めると，$m\geq N$ かつ $n\geq N$ のとき $|a_n-a_m|<\varepsilon$ が成立する．

   (この条件を満たす数列を Cauchy 列もしくは基本列と呼ぶ.)

---

1 『解析概論』定理 1 (p.3)
2 『解析概論』定理 2 (p.5)
3 『解析概論』定理 6 (p.8)
4 『解析概論』定理 7 (p.10)
5 『解析概論』定理 8 (p.11)

初学者はたくさんの同値な条件を挙げられて困惑をおぼえるであろう. 特に大学に入ったばかりの学生の方々は, その論理的な複雑さについてゆけないものを感じ, 自信を失なってしまうかもしれない. しかし, そのような心配は無用である. なぜなら, 実数の連続性の概念が上のような形で確定するまでには, 多くの偉人達が膨大な時間をかけることが必要だったのである. その大変な努力の結果だけを示され, すぐに理解しろと言われても, 困ってしまうのは当然のことである. すぐに理解する必要はない. すぐに理解しようと無理をし, 理解ができるまで先には絶対に進まないという精神で数学の勉強を続けることはおそらく不可能であろうし, 可能であったとしても大変効率の悪いものになるであろう. 「数学の本は後から読め!」という先人の言葉もあるように, 前から順番に直線的に論理を追うだけの勉強法は止めた方が良い. 先に進みながら, 何度でも基本的なところに立ち戻って考えることが肝腎である.

さて, 実数の連続性の話に戻ろう. 同値な条件をいくつか挙げたが, それらは前半の 3 つ (Dedekind の定理, Weierstrass の定理, 単調な実数列の収束) と後半の 2 つ (区間縮小法, Cauchy 列の収束) に分類される. 前者の条件 3 つは主に不等号 $<$ に関して実数全体の集合がどのような性質を持っているかに関係している. 一方, 後者の 2 つは主に実数 a, b の間の距離 $|b-a|$ に関して実数全体の集合がどのような性質を持っているかに関係している. 前者は「全順序集合」としての「完備性」の条件であり, 後者は「距離空間」としての「完備性」を表現している. (ここで「」内に出た言葉の定義は未来の勉強によって学んで欲しい.)

[**7**] Dedekind の定理から Weierstrass の定理を導け. □

[**8**] Weierstrass の定理から有界で単調な実数列の収束を導け. □

[**9**] 有界で単調な実数列の収束から区間縮小法を導け. □

[**10**] 区間縮小法から Dedekind の定理を導け. □

[**11**] 区間縮小法から Cauchy 列の収束を導け. □

[**12**] Cauchy 列の収束から区間縮小法を導け. □

ヒント: 『解析概論』の第 1 章を見よ.

以下においては, 実数の連続性に関する結果は自由に用いて良い.

[**13**] 実数列 a_n に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が有限な値に収束しているならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束すると言う. □

ヒント: 『解析概論』の第 42 節 (p.144). Cauchy 列が収束することを使う.

3 連続函数

[14] f, g は $\mathbb{R}$ 上の実数値連続函数であるとする．このとき, $\mathbb{R}$ 上の函数 h を $h(x) = g(f(x))$ によって定めると, h も連続函数である． $\square$

[15] $\mathbb{R}$ 上の函数 f を, $x \neq 0$ のとき $f(x) = x\sin(1/x)$, $f(0) = 0$ によって定める．このとき, f は $\mathbb{R}$ 上の連続函数である．($\sin x$ が $\mathbb{R}$ 上の連続函数であることを使って良い.) $\square$

[16] $\mathbb{R}^2$ 上の函数 f を, $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ によって定める．このとき, x もしくは y の片方のみを固定し, $f(x, y)$ を y もしくは x の片方のみの函数であるとみなすとき, それは $\mathbb{R}$ 上の連続函数である．しかし, $k \neq 0$ に対して, t の函数 $f(t, kt)$ を考えると, $t = 0$ で連続ではない． $\square$

ヒント: 『解析概論』の p.26 を見よ.

[17] 閉区間 $I = [0, 1]$ を考える．f は I から I への連続函数であると仮定する．このとき, 閉区間 I 上の点 x で $f(x) = x$ を満たすものが存在する． $\square$

ヒント: 中間値の定理を $F(x) = f(x) - x$ に適用する.
参考: 一般に集合 X から X への写像 f に対して, $f(x) = x$ を満たす $x \in X$ を f の不動点と呼ぶ．上の問題のように, ある条件のもとで不動点の存在を保証する結果は不動点定理と呼ばれている．上の問題は高次元でも成立している Brouwer の不動点定理の最も簡単な場合 (1 次元の場合) である.

4 閉区間上の連続函数の基本性質

この節の前半の目的は次の 2 つの定理を証明することである．(しかし, この節の前半は, 厳密な解析学を学び始めたばかりの初学者にとっては結構難しいと思われるので, 始めは結果だけを認めて先に進んでも良い.)

定理 4.1 閉区間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ.

定理 4.2 閉区間上の連続函数は一様連続である.

微分学の基本定理である Roll の定理 (平均値の定理の特別な場合) を証明するために定理 4.1 が使われる．また, 定理 4.2 は, 閉区間上の連続函数が Riemann の意味で積分可能であることを示すために役に立つ.

定理 4.1 を示すためには, 補題として次を示しておくと便利である.

定理 4.3 (Bolzano-Weierstrass) 有界な実数列は収束する部分列を持つ.

[18] 定理 4.3 を証明せよ． $\square$

ヒント: 『解析概論』の定理 9 (p.14) の証明を 1 次元の場合に焼き直せば良い.

[19] 定理 4.3 が正しいことを認めた上で, 定理 4.1 を証明せよ． $\square$

ヒント: 『解析概論』の定理 13 (p.27) の証明を集積点という言葉を使わない形に書き直せば良い. なお, この問題は Bolzano-Weierstrass の定理 4.3 の証明を完成する前に解いて良いものとする.

定理 4.2 を示すためには, 補題として次を示しておくと便利である.

定理 4.4 (Heine-Borel) 閉区間 $K = [a, b]$ が開区間の族 $U_i = (a_i, b_i)$ $(i \in I)$ によって覆われていると仮定する: $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. このとき, K はすでに有限個の開区間で覆われている. すなわち, 有限個の $i_1, \ldots, i_n \in I$ を取って, $K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ が成り立つようにできる.

[**20**] 定理 4.4 を証明せよ. □

ヒント: 『解析概論』の定理 11 (p.16) の証明を今の場合に焼き直せば良い. (もちろん, 他にも色々な証明の仕方がある.)

[**21**] 定理 4.4 が正しいことを認めた上で, 定理 4.2 を証明せよ. □

ヒント: 『解析概論』の定理 14 (p.27) の証明よりも, 以下の証明の方が標準的である. まず, f は閉区間 K 上の連続函数であると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. 連続函数の定義より, 任意の $x \in K$ に対して, ある $\delta(x) > 0$ を取って, 任意の $y \in K$ に対して, $|y - x| < \delta(x)$ ならば $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ となるようにできる. $U_x = (x - \delta(x)/2, x + \delta(x)/2)$ と置くと, 開区間の族 $\{U_x\}_{x \in K}$ は K を覆っている. よって Heine-Borel の定理より, 有限個の $x_1, \ldots, x_n \in K$ を取って, $K \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ が成り立つようにできる. $\delta = \max\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\}/2$ と置き, $|y - x| < \delta$ を満たす任意の $x, y \in K$ を固定する. このとき, x はある U_{x_i} に含まれるので, $|x - x_i| < \delta(x_i)/2 < \delta(x_i)$ であり, $|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \delta(x_i)/2 \leq \delta(x_i)$ も成立する. よって, $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < 2\varepsilon$. 以上によって, f の一様連続性が示された. (これは, ヒントと言いながら, ほとんど完全な解答になってしまっている. この問題の解答者になった人は, 図を描いたり, 言葉を付け加えて説明を詳しくするなどの工夫をして欲しい.)

注意: 以上においては, 閉集合や開集合という言葉を避けるために, 代わりに, 閉区間と開区間の場合に関する結果を述べた.

以上の問題は, 厳密な解析学を習い始めたばかりの初学者にとっては, かなり難解であると思われる. 『解析概論』における解説も結構繁雑でわかり難い. 以上に挙げた定理をすっきり理解するためには, 位相空間および距離空間の一般論を展開し, コンパクトという概念を抽象的に扱わなければいけない. 実際, 閉区間はコンパクト空間の最も基本的な例であり, コンパクトという性質の定義は, Heine-Borel の定理で示された閉区間の持つ性質を抽象化することによってなされる. 例えば, 定理 4.1 は, 以下の一般的な結果の簡単な応用の一つになってしまうのである[6]:

- コンパクト空間の連続写像による像もまたコンパクトである.
- 距離空間がコンパクトであるための必要十分条件は全有界かつ完備なことである.

この 2 つの結果から, ユークリッド空間の部分集合がコンパクトであることと有界閉集合であることが同値なことが導かれるのである. 最初に「始めは結果だけを認めて先に進んでも良い」と述べたのは, このような事情を考えてのことである.

[6] しかし, 特別な場合に特別な証明を考えておくことは無駄なことではないことを注意しておく.

以上でこの節の前半を終え, 後半においては, 前半で述べた定理に関係する例をいくつか挙げよう. 一つの定理を理解するためには, 定理の正しさを証明するだけでは不十分であり, それが成り立つ典型的な例にはどのようなものがあるか, 仮定の一部を落としたらどうなるかなど, 色々なことを考えておく必要がある.

[22] 空でない開区間 $U = (a, b)$ の上には, 上にも下にも非有界な実数値連続函数が存在することを示せ. $\square$

[23] 空でない開区間 $U = (a, b)$ の上には, (上にも下にも) 有界だが, 最大値も最小値も持たない実数値連続函数が存在することを示せ. $\square$

[24] 開区間 $U = (a, b)$ 上の連続函数 f を考える. $x \in U$ が両端の a, b に近付くとき, $f(x)$ はある有限な値に収束していると仮定する. このとき, f は U 上有界であることを示せ. $\square$

[25] 空でない開区間 $U = (a, b)$ の上には, 連続だが一様連続でない連続函数が存在することを示せ.

ヒント: 非有界な連続函数を考えれば簡単に構成できる. しかし, できることなら, (上にも下にも) 有界な連続函数でそのような例を作り, 非有界な例と共に 2 つの例を示して欲しい. 有界な例を作るためには, 端の方で無限に振動する連続函数の例を考えれば良い.

5 微分と導函数

[26] f は開区間 $U = (a, b)$ 上の函数であるとし, $x \in U$ を任意に固定する. 以下の条件は互いに同値であることを示せ:

1. 極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が存在する.
2. ある A が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $x + h \in U$ かつ $|h| < \delta$ ならば, $|f(x+h) - f(x) - Ah| \le \varepsilon |h|$ が成立する.

このとき, f の点 x における微係数は A に等しい. $\square$

この同値な 2 つの条件の後者の方は次のように見ることができる. f が x で微分可能なとき, $R(x, h) = f(x+h) - f(x) - Ah$ と置くと,

$$f(x+h) = f(x) + Ah + R(x, h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{|R(x, h)|}{|h|} = 0$$

が成立する. これは $f(x+h)$ を h の一次函数 $f(x) + Ah$ で近似する式であると見ることができる. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{|R(x, h)|}{|h|} = 0$ は誤差項 $R(x, h)$ が h よりも高位の微小量であることを意味している. このような見方を ε-δ 論法で表現したのが後者の条件 (2) である. 条件 (2) の方を考えることには二つの利点がある. 一つは h が 0 であるかどうか気にする必要がないことである. このことは, 合成函数の微分法則を証明するとき, 役に立つ. もう一つの利点は, x が多変数になり h がベクトルになった場合でも, 条件 (2) は A を h に作用する線型写像とみなすことによって一般化可能なことである.

[27] (Leibniz 則) $(fg)' = f'g + fg'$ を用い, 自然数 n に関する帰納法によって次を示せ:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

ここで, $f^{(k)}$ は f の k 階の導函数を表わし, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ である. □

ヒント: 二項係数の漸化式 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ を使う.

[28] 微分可能函数の導函数が連続とは限らないことを示せ

ヒント: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$.
このような病的な函数を除外するために, 函数の微分可能性と共に導函数の連続性も仮定することが多い. そこで, 次のような言葉を定義する.

定義 5.1 微分可能函数は, その導函数が連続函数であるとき, C^1 級函数と呼ばれる. より一般に, n 回微分可能な函数は, その高階の導函数の全てが連続であるとき, C^n 級函数と呼ばれる. 何回でも好きなだけ微分可能な函数は C^∞ 級函数と呼ばれる.

[29] $a < b < c < d$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級函数 ψ で,

$$0 \le \psi \le 1, \quad b < x < c \text{ のとき } \psi(x) = 1, \quad x < a \text{ または } d < x \text{ のとき } \psi(x) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ. □

ヒント: $\mathbb{R}$ 上の函数 f を $t > 0$ のとき $f(t) = e^{-1/t^2}$, $t \le 0$ のとき $f(t) = 0$ と定めると, f は C^∞ 級函数である. $g(t) = f(t)/(f(t) + f(1-t))$ と置くと, g も C^∞ 級で, $0 \le g \le 1$, $t < 0$ のとき $g(t) = 0$, $t > 1$ のとき $g(t) = 1$ をみたす. この g を利用して ψ を作ることを考えよ.

定義 5.2 (線型常微分作用素) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ は開区間 U 上の函数であるとする. U 上の n 回微分可能函数 f を U 上の函数 $a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$ に対応させる写像を U 上の高々 n 階の線型常微分作用素と呼び,

$$P = a_n(x)\frac{d}{d^n}x^n + a_{n-1}(x)\frac{d}{d^{n-1}}x^{n-1} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{d}x + a_0(x), \qquad Pf = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}$$

のように書く. このように函数を函数に移す写像も我々は考えるのである.

[30] 上の定義の記号のもとで, 常微分作用素 P が全ての多項式函数を 0 に移すならば, 全ての $a_0, a_1, \ldots, a_n$ は恒等的に 0 である. □

ヒント: 順次 $1, x, x^2, X^3, \ldots$ に P を作用させてみよ.
上の定義の記号のもとで, 全ての a_k が C^∞ 級であれば, P は C^∞ 級函数を C^∞ 級函数に移す. このような線型常微分作用素が二つ (例えば P, Q) あるとき, それらの写像の合成として, C^∞ 級函数を C^∞ 級函数に移す写像が得られ, その写像もまた線型常微分作用素になる. この写像の合成によって, 作用素の積が定義される: $(PQ)f := P(Qf)$. また, 作用素の和も自然に定義される: $(P+Q)f := Pf + Qf$.

[31] (正準交換関係) 函数 $f(x)$ を $f'(x)$ に移す作用素を $P = \frac{d}{d}x$ と表わし, 函数 $f(x)$ を $xf(x)$ に移す作用素を $Q = x$ と表わす. このとき, 作用素の積と和に関して, $PQ - QP = 1$ が成立する. 特に, $PQ = QP$ は成立しない. □

ヒント: $(PQ - QP)f = P(Qf) - Q(Pf) = (xf)' - xf'$.

[32] (Hermite 多項式の定義) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の函数 $H_n(x)$ を

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{d}x \right)^n e^{-x^2}$$

によって定める. このとき, $H_n(x)$ は n 次の多項式である. また, $H_n(x)$ を次のように表わすこともできる:

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(-\frac{d}{d}x + x \right)^n e^{-x^2/2}$$

$H_n(x)$ は Hermite 多項式[7] と呼ばれている. □

ヒント: n に関する帰納法. 後半を示すためには次の式を使えば良い:

$$e^{x^2/2} \left(-\frac{d}{d}x \right) (e^{-x^2/2} f(x)) = \left(-\frac{d}{d}x + x \right) f(x), \qquad H_{n+1}(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{d}x \right) (e^{-x^2} H_n(x)).$$

[33] Hermite の多項式 $H_n(x)$ を用い, 函数 f_n を $f_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ と定め, 作用素 H を $H = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{d}x \right)^2 + \frac{1}{2} x^2$ と定める[8]. このとき, $Hf_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) f_n$ が成立する[9]. □

ヒント: $A = \frac{1}{\sqrt{-2}} \left(\frac{d}{d}x + x \right)$, $B = \frac{1}{\sqrt{-2}} \left(\frac{d}{d}x - x \right)$, $N = BA$, $\varphi_n = B^n f_0$ と置くと, $H = N + \frac{1}{2}$, $f_n = (-2)^{n/2} \varphi_n$, $AB = BA + 1$, $N\varphi_0 = BA\varphi_0 = 0$. 帰納法によって, $NB^n = B^n(N+n)$ を示すことができる. $N\varphi_n = NB^n\varphi_0 = B^n(N+n)\varphi_0 = B^n n\varphi_0 = n\varphi_n$.

6 平均値の定理

[34] 開区間上の函数 f が $f(x) = A + Bx$ (A, B は定数) の形をしているための必要十分条件は, f が微分可能でかつ f の導函数が定数函数になることである. □

ヒント: 平均値の定理を使えば良い.
注意: もしも, 微分積分法の基本公式[10]を使うことが許されるなら, 十分性の方を次のように簡単に証明することができる. $f'(x) = B = $ (定数) のとき,

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(x)\,dx = f(c) + \int_c^x B\,dx = f(c) + B(x - c) = A + Bx.$$

ここで, $A = f(c) - Bc$ と置いた. このように, 平均値の定理を使って証明される結果は, 微分積分法の基本公式を使って証明できる場合が多い.

---

[7] Hermite 多項式は量子力学の調和振動子などの登場する有名な直交多項式である.

[8] この H が量子力学における調和振動子の Hamiltonian である. $p = -i\frac{d}{d}x$ と置くと, $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$. 量子力学については, P.A.M. Dirac 著の邦訳『ディラック 量子力学 原書第 4 版』(岩波書店) を見よ. 調和振動子はその第 VI 章第 34 節で解説されている.

[9] 量子力学的には状態 f_n のエネルギーが $n + \frac{1}{2}$ であるということ.

[10]『解析概論』p.101 の (1) 式: $F'(x) = f(x)$ で f が連続なとき $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

[35] f は開区間 U 上の微分可能函数であるとし, U 上で $f' > 0$ であると仮定する. このとき, f は U 上狭義単調増大[11]する. $\square$

[36] f は開区間 U 上の 2 回微分可能函数であり, U 上 $f'' \geq 0$ であると仮定する. このとき, f は U において下に凸である. $\square$

ヒント: 『解析概論』の定理 25 (p.53) の (1).

[37] (Roll の定理の拡張) f は開区間 (a,b) 上の微分可能函数であるとする. ただし, a として $-\infty$, b として ∞ も許す. $x \to a$ および $x \to b$ のとき, $f(x) \to 0$ となると仮定する. このとき, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ が成立することを示せ. $\square$

ヒント: 変数変換によって a, b が共に有限な場合に帰着できる. a, b が共に有限なとき, f は $f(a) = f(b) = 0$ と定義することによって, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数に拡張される.

[38] f は開区間 (a,b) 上の C^∞ 級函数であるとする. ただし, a として $-\infty$, b として ∞ も許す. $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $x \to a$ および $x \to b$ のとき $f^{(n)} \to 0$ であり, 各 $f^{(n)}$ は高々 n 個の零点[12]しか持たないと仮定する. このとき, 以下が成立する:

1. $f^{(n)}$ はちょうど n 個の相異なる零点を持つ.
2. $f^{(n)}$ の n 個の相異なる零点を $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \cdots < \xi_{n,n}$ と表わすと, $f^{(n-1)}$ と $f^{(n)}$ の零点の間には $\xi_{n,k} < \xi_{n-1,k} < \xi_{n,k+1}$ という関係がある. $\square$

ヒント: Roll の定理およびその拡張を使うことを考えよ. n に関する帰納法を使う.

[39] (Hermite 多項式の零点の分布) 非負の整数 n に対して, x の函数 $H_n(x)$ を次の式によって定義する:

$$\left(-\frac{d}{d}x\right)^n e^{-x^2} = H_n(x)e^{-x^2}$$

このとき, $H_n(x)$ は n 次の多項式となり, n 個の相異なる実根を持ち, それらは $H_{n-1}(x)$ の実根によって隔離される. $\square$

ヒント: すぐ上の問題の結果を用いて良い. (『解析概論』の第 2 章の練習問題の (1),(2),(3) (p.84) も参照せよ.)

[40] (Newton の近似法) f は閉区間 $[a,b]$ 上の 2 回微分可能な函数であり, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ であり, $a \leq x \leq b$ において $f''(x) > 0$ を満たしていると仮定する. このとき $[a,b]$ 内の数列 a_n を帰納的に次のように定めることができる. まず $a_1 = a$ と置き, a_n が定まったとき f の $x = a_n$ における接線の零点を a_{n+1} と置く: $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$. このとき, 数列 a_n は $[a,b]$ における方程式 $f(x) = 0$ の唯一の解に単調に収束する. $\square$

ヒント: 『解析概論』の第 2 章の練習問題 (8) (p.85). グラフを描いてみると納得し易い. 注意: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ の場合は, a_1 として a の代わりに b を使えば良い. $f''(x) < 0$ の場合は f の代わりに $-f$ を考えれば良い.

[41] Newton の近似法を認め, $\sqrt{2}$ の近似値を次のようにして数値計算せよ. まず, $f(x) = x^2 - 2$, $a = 0$, $b = 2$ と置く. $a_1 = b$ から出発し, a_2, a_3, a_4 を計算し, a_4 が $\sqrt{2}$ と小数点以下 5 桁まで一致していることを示せ. $\square$

---

[11] 函数 f が狭義単調増大するとは, $a < b$ ならば $f(a) < f(b)$ となるという意味である.

[12] 函数 f の零点とは $f(x) = 0$ を満たす x のことである.

7　Taylorの定理

この節では平均値の定理の拡張である Taylor の定理 (公式) を扱う．以下において, n は自然数であるとし, f は開区間 U 上の n 回微分可能な函数であるとする．$x, x+h \in U$ と $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して, x, h の函数 $R_k = R_k(x,h)$ を以下の式によって定義する:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)h^{k-1} + R_k(x,h).$$

Tayor の定理とは剰余項 $R_k(x,h)$ に関する結果である．

定理 7.1 (Taylor の定理) 以上の記号のもとで, x, h に対して, $0 < \theta < 1$ なるある実数 θ が存在して, $R_n(x,h)$ は次のように表わされる:

$$R_n(x,h) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n.$$

さらに, R_{n+1} は次を満たす:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|R_{n+1}(x,h)|}{|h|^n} = 0 \qquad (\text{すなわち}\quad R_{n+1} = o(|h|^n)).$$

[**42**] 定理 7.1 を証明せよ．□

ヒント: 『解析概論』の第 25 節 (p.61).

平均値の定理を使うと f の導函数の値の正負によって, f の増減の様子が判定できるのであった．その拡張である Taylor の定理を使うと高階の微係数から, 函数の局所的な様子に関する情報を引き出すことができる．例えば, 次が成立する．

[**43**] n は正の偶数であるとし, f は開区間 U 上の n 回微分可能函数であるとする．ある $a \in U$ において, $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ であると仮定する．このとき, $f^{(n)}(a) > 0$ ならば f は a で極小値を取り, $f^{(n)}(a) < 0$ ならば f は a で極大値を取る．□

ヒント: Taylor の定理の R_{n+1} に関する結果を使う．(極大・極小の定義については『解析概論』の第 26 節 (p.67) を参照せよ.)

毛色の変わった応用として次のような問題も考えられる．

[**44**] e が無理数であることを証明せよ．□

ヒント: 『解析概論』の p.66.

8　積分の基本的性質

積分を定義する方法には色々な流儀がある．完璧を期すならば, Lebesgue 積分論を展開しなければいけない．しかし, Lebesgue 積分論の展開のためには, 測度論を前もって展開しておく必要があり, 一変数の初等微分積分学を展開する上では大袈裟に過ぎるような感じがする．一方, Riemann 積分の方はある程度初等的に理論を展開できるが, Lebesgue 積

分論によって得られるようなすっきりした結果を得ることはできない. 他にも, S. Lang の本 “Real Analysis”[13]の第 5 章の第 1 節のように, 閉区間上の階段函数の一様収束極限で書けるような函数のクラスに制限し, 簡明に積分を定義してしまうという流儀もある.

このように, 積分論の展開の流儀は色々あるのだが, 通常現われるような「良い函数」に対しては, 積分をどの流儀で計算してもその値はもちろん一致している. だから, 積分が現われる問題を解くときには, 流儀によらない積分の基本的性質のみを使うように努力した方が良い. 積分の基本的性質とは例えば以下のような結果のことである:

- $\int_a^b 1\,dx = b - a$.
- 線型性: 定数 α, β に対して, $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$.
- 区間に関する加法性: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.
- 単調性: $a \le b$ かつ $f \le g$ ならば, $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
- $a \le b$ ならば $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- 連続函数は閉区間上で積分可能である.

もちろん, これらの結果は積分の定義の流儀によらずに成立している.

[45] 上記の積分の基本的性質のみを用いて次を示せ. f は開区間 U 上の連続函数であるとし, $x, c \in U$ に対して, $F(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi$ と置く. このとき, F は微分可能であり, $F' = f$ が成立する. また, $a, b \in U$ に対して, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ も成立している. □

ヒント: 『解析概論』の第 32 節 (p.101).

[46] 上記の積分の基本性質のみを用いて次を示せ. f が閉区間 $[a, b]$ 上の連続函数であるとき,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le |b - a| \sup_{a \le x \le b} |f(x)| < \infty. \quad \square$$

ある区間上の複素数値函数 $h(x) = f(x) + ig(x)$ (f, g は実数値函数) の微分と積分を

$$h'(x) = f'(x) + ig'(x), \qquad \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + i\int_a^b g(x)\,dx$$

と定義しておく. 実際には複素数値函数 (より一般にはベクトル値函数) の微分と積分を実数値函数を経由せずに直接定義した方が奇麗なのだが, ここでは, ひとまずこのように定義しておく.

[47] この問題を解くために, 複素数 $z = x + yi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ が成立するという事実を用いて良い. 複素数 c に対して, $\mathbb{R}$ 上の複素数値函数 f を $f(x) = e^{cx}$ によって定めると, $f'(x) = ce^{cx}$ が成り立つ. よって, $c \ne 0$ のとき,

$$\int e^{cx}\,dx = \frac{e^{cx}}{c}.$$

[13] その日本語訳が共立出版から出ている. 書名は『現代の解析学』.

この公式の実部と虚部を分離して書くと, 次が成立することもわかる. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $(a, b) \neq (0, 0)$ ならば,

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}, \qquad \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\frac{a\cos(bx)-b\sin(bx)}{a^2+b^2}. \quad \square$$

参考: 『解析概論』の第 35 節の例 3 (p.115) に, 部分積分を用いた別の導出の仕方が書いてある. しかし, その計算はかなり技巧的でわかり難い.

9 広義積分

前節では閉区間上の連続な (したがって有界な) 函数の積分を扱った. この節では区間の境界の近くで有界でない函数および無限に長い区間上での積分を扱う.

定義 9.1 f は区間 $[a, b)$ (b として ∞ も許す) 上の連続函数であり, 極限 $\lim_{\beta \nearrow b}\int_a^\beta f(x)\,dx$ が存在するとき, その値を f の広義積分 (improper integral) と呼び, $\int_a^b f(x)\,dx$ と略記する. 区間 $[a, b)$ の代わりに $(a, b]$ を取る場合も同様に広義積分が定義される. 区間 (a, b) 上の広義積分は $c \in (a, b)$ を任意にとって, $(a, c]$ と $[c, b)$ の上の広義積分に分けて考え, それらの和を取ることによって定義される.

例 9.2 広義積分の簡単な例:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \nearrow 1}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \nearrow 1}\,[\arcsin x]_0^a = \lim_{a \nearrow 1}\arcsin a = \frac{\pi}{2}.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \to \infty}\int_0^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \to \infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R \to \infty}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1.$

[48] **(Cauchy の収束判定法の連続変数版)** f が区間 (a, b) 上の実数値函数であるとき, 極限 $\lim_{x \nearrow b} f(x)$ が存在するための必要十分条件は, 次が成立することである:

(∗) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $c \in (a, b)$ が存在して, $x, y \geq c$ なる任意の $x, y \in (a, b)$ に対して, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ が成立する. □

ヒント: 必要性の方は簡単. 十分性の方は背理法を使って示せる. つまり, (∗) および極限 $\lim_{x \nearrow b} f(x)$ が存在しないことを仮定すると, b に単調に収束する (a, b) 内の点列 x_n で, $f(x_n)$ が Cauchy 列になるにもかかわらず収束しないものが取れることを示す.

[49] **(広義積分の絶対収束の定義)** f は区間 $[a, b)$ (b として ∞ も許す) 上の連続函数であるとする. $|f|$ の $[a, b)$ における広義積分が存在すれば, f 自身の広義積分も存在することを示せ. このとき, f の $[a, b)$ における広義積分は絶対収束すると言う. また, 絶対収束しない広義積分は条件収束すると言う. □

ヒント: 数列の収束の Cauchy の判定法の連続変数版を使えば良い.
参考: Lebesgue 積分論を展開すれば, 被積分函数もしくは積分範囲が有界でない積分を広義積分として特別扱いする必要はなくなる. さらに, 絶対収束する広義積分の値と Lebesgue 式の積分による値は等しくなる. したがって, 絶対収束する広義積分の理論は Lebesgue 積分論に含まれてしまうと考えて良い. しかし, 絶対収束しない広義積分は Lebesgue 積分論を展開した後でも特別扱いする必要がある.

[50] 広義積分が絶対収束するための十分条件として以下のような判定法がある:

1. f が有限区間 $[a, b)$ 上の連続函数であるとする．$0 < \alpha < 1$ なるある α に関して $|x-b|^\alpha |f(x)|$ が有界ならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は絶対収束する.

2. f が半無限区間 $[a, \infty)$ 上の連続函数であるとする．ある $\alpha > 1$ に関して $|x|^\alpha |f(x)|$ が有界ならば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する．□

ヒント: 『解析概論』の定理 36 (p.106). (この結果は以下では自由に用いて良い.)

[51] **(ガンマ函数)** $s > 0$ のとき, 次の広義積分は絶対収束する:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

この式によって定義される函数 $\Gamma(s)$ は Euler のガンマ函数と呼ばれる．□

[52] **(ベータ函数)** $p > 0$, $q > 0$ のとき, 次の広義積分は絶対収束する:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

この式によって定義される函数 $B(p, q)$ は Euler のベータ函数と呼ばれる．□

参考: ベータ函数はガンマ函数によって, $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ と表わされる．しかし, これを証明するためには二重積分の積分変数の変換公式が必要になる.

[53] 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束するが絶対収束しない．□

ヒント: 『解析概論』の p.106 の例.

[54] **(超幾何積分)** $\alpha > 0$, $\gamma - \alpha > 0$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, $x < 1$ のとき[14], 次の式の右辺の広義積分は絶対収束する:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^\beta\,dt.$$

これを, 超幾何積分もしくは超幾何函数[15]の Euler 型積分表示式と呼ぶ．□

参考: 実はこの積分の値は $|x| < 1$ において問題 **[99]** で定義される超幾何級数に等しい

[14]実際には, α, β, γ, x は複素数でも良い．ただし, その場合は, 広義積分を絶対収束させるための条件は, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, $x \notin [1, \infty)$ になる.

[15]超幾何函数 (hypergeometric function) については, 青本和彦・喜多通武共著の『超幾何関数論』(シュプリンガー・フェアラーク東京) を参照せよ．超幾何函数の積分表示については, その本の p.11 に解説がある．超幾何函数の性質がよくわかるのは Euler 型の積分表示式を持つからであり, これは超幾何函数の最も重要な性質である.

10 部分積分

数学解析の三種の神器は, Taylor 展開, 部分積分, Fourier 変換であるとされている (らしい (?)). この節では, 二番目の部分積分を扱うことにしよう.

[55] (integration by parts) f, g は開区間 U 上の微分可能函数であり, それらの導函数 f', g' は連続であると仮定する. このとき, $a, b \in U$ に対して以下の公式が成立することを証明せよ:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

特に, $f(a)g(a) = f(b)g(b)$ のとき,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \quad \square$$

参考: 部分積分はこの問題の最後の形で使われることが多い. 後で触れる超函数の意味での導函数はこの形での部分積分の公式を先取りすることによって定義される.

[56] (ガンマ函数の函数等式) 部分積分を用いて, ガンマ函数の函数等式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を証明せよ. この結果と $\Gamma(1) = 1$ を合わせると, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, $\Gamma(n+1) = n!$ が成立することがわかる. $\square$

ヒント: 『解析概論』の第 35 節の例 4 (p.115).
参考: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が成立している[16]. この結果を認めると, 函数等式によって, $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ が成立することがわかる.

[57] (Wallis の公式 1) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して, $S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta$ と置くと, 部分積分によって, $S_n = \dfrac{n-1}{n} S_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を示すことができる. 簡単な計算で, $S_0 = \pi/2$, $S_1 = 1$ となることがわかるので, 帰納法によって次が成立することが示される:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}, \\ S_{2n+1} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}. \end{aligned}$$

これを Wallis の公式と呼ぶ. $\square$

[58] (Wallis の公式 2) 上の問題の記号のもとで, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ となることを証明せよ. この結果を変形して, 以下の公式を導け:

1. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}.$

これらの公式も Wallis の公式と呼ばれる. $\square$

[16] 公式 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ (問題 **[64]**) において, $t = x^2$ と変数変換すればこの式が得られる.

ヒント: 以上の 2 問は『解析概論』の第 35 節の例 5 (p.116) の内容である.

定義 10.1 (超函数の意味での導函数) U は任意の開区間とし, $\mathscr{D}(U)$ によって U 上の C^∞ 級函数で U 内のある閉区間の外で恒等的に 0 になるもの全体の集合を表わすことにする[17]. f, T が U 上の函数であるとき, T が f の超函数の意味での導函数であるとは, 任意の $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ に対して,

$$\int_U T(x)\varphi(x)\,dx = -\int_U f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

が成立することであると定義する. ただし, ここで, 積分は φ が零にならない点の全体を含む任意の閉区間上の定積分を意味するものとする. (そのような閉区間の取り方に積分の値はよらない.)

このように, 超函数の意味での導函数は部分積分の公式の一般化として定義される.

[**59**] $\mathbb{R}$ 上の函数 $H(x)$ を, $x < 0$ のとき $H(x) = 0$, $x > 0$ のとき $H(x) = 1$, $H(0) =$ (任意の数) と定義する. さらに, $f(x)$ を, $x < 0$ のとき $f(x) = 0$, $x \geq 0$ のとき $f(x) = x$ と定義する. このとき, $H(x)$ は $f(x)$ の超函数の意味での導函数である. 一般に, $H(x)$ は Heaviside 函数と呼ばれている. □

参考: さらに Heaviside 函数を超函数の意味で微分するとどうなるのであろうか? もはや, Heaviside 函数の超函数の意味での導函数は普通の函数では表現できず, Schwartz の超函数 (distribution) を導入しなければいけない. なお, Heaviside 函数の導超函数は, Dirac のデルタ (超) 函数というものになる. Dirac のデルタ函数 $\delta(x)$ の基本性質は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

である. (Heaviside 函数の導函数が形式的にこのデルタ函数の性質を満たしていることを示してみよ.) 実は, Schwartz 流の超函数論ではこの式をもってデルタ函数の定義とするのである. なお, Schwartz の流儀とは全く異なる方法で超函数を定義する佐藤の超函数 (hyperfunction) の理論もあることを注意しておく.

[**60**] **(変分法の基本補題)** 任意の開区間 U に対して, U 上の C^∞ 級函数で U 内のある閉区間の外で恒等的に 0 になるもの全体の集合を $C_0^\infty(U)$ と表わすことにする[18]. f は開区間 $U = (a, b)$ 上の連続函数であるとする. このとき, 全ての $\varphi \in C_0^\infty(U)$ に対して $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ が成立するならば, f は U 上恒等的に 0 である. □

ヒント: $f(x) \neq 0$ となる $x \in U$ が存在するとき, x のある近傍の外で 0 となるような $\varphi \in C_0^\infty(U)$ をうまくとって, $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0$ が成り立つようにできることを示す. 問題 [**29**] の結果を利用せよ.

---

[17] すなわち, $\mathscr{D}(U)$ の元はコンパクトな台を持つ U 上の C^∞ 級函数である. 例えば, 問題 [**29**] における函数 ψ は $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ の元である. また, その ψ の開区間 $U = (a, d)$ への制限は $\mathscr{D}(U)$ の元である.

[18] もちろん, $\mathscr{D}(U) = C_0^\infty(U)$ である. 記号 $\mathscr{D}$ の方は主に Schwartz の超函数の試験函数の空間を意味する場合に使われる. コンパクト台を持つ C^∞ 級函数の空間を表わす記号として, C_0^∞ の方がより広く使われている.

11 積分変数の変換

[61] **(不定積分の計算)** 以下 $a \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ とする.

1. $I_n := \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ と置く. このとき, $I_1 = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ および次が成立する:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

(ヒント: 被積分函数に $1 = x'$ が隠れているとみなし部分積分する.)

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2})$. (ヒント: $t - x = \sqrt{x^2+a^2}$.)

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right|$. (ヒント: $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.)

4. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$. (ヒント: $I := \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ と置く. $1 = x'$ が隠れているとみなし部分積分することによって,

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad)$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$. (ヒント: 上と同様に部分積分を行ない, 残った不定積分は $t - x = \sqrt{x^2-a^2}$ なる変数変換によって処理する.) □

[62] $a < b$ のとき, 変数変換 $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ を通して, 次が示される:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+t^2} = 2\left[\arctan t\right]_0^\infty = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi. \quad \square$$

[63] $p > -1/2$, $q > -1/2$ に対して,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right). \quad \square$$

ヒント: $x^2 = \sin^2\theta$ と変数変換せよ. (この公式の右辺の B はベータ函数である.)
参考: この問題の結果を $q = 0$, $p = n = 0, 1, 2, \ldots$ と特殊化し, 前節の問題および参考で触れたガンマ函数とベータ函数の公式を使って, Wallis の公式の別証明を与えることができる[19].

[64] Wallis の公式を利用して, 公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を証明せよ. □

---

[19] 例えば, 寺沢寛一著の『自然科学者のための数学概論 [増訂版]』(岩波書店) の第 5 章第 21 節 [1] ではそのような取り扱い方をしている.

ヒント: 『解析概論』の第 35 節例 6 (p.117).
参考: この問題の結果は, 2 変数函数の積分論を使うことが許されれるならば, Wallis の公式を経由せずに直接証明される[20].

[65] (Hermite 多項式の直交関係式) Hermite 多項式 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(-\frac{d}{d}x\right)^n e^{-x^2}$ に関して, 次の直交関係式が成立する:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \delta_{m,n}2^n n!\sqrt{\pi}.$$

ここで, $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタ[21]である. □

ヒント: 『解析概論』の第 3 章の練習問題 (13) (p.141). 公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を自由に用いて良い.

12 Taylor の定理の積分版

微分のみを使った Taylor の定理の証明はかなり技巧的であった. $f^{(n)}$ 連続性を仮定すると, 積分を用いて剰余項を表示する公式を証明できる. その公式には, 部分積分を繰り返して帰納的に剰余項の形を決定してゆくという簡明な証明が存在する.

n は自然数であるとし, f は開区間 U 上の C^n 級函数であるとする. $x, x+h \in U$ と $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して, x, h の函数 $R_k = R_k(x,h)$ を以下の式によって定義する:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)h^{k-1} + R_k(x,h).$$

定理 12.1 (剰余項の積分表示) 以上の状況のもとで, 剰余項 $R_n(x,h)$ は次のように表示される:

$$R_n(x,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+th)h^n\,dt = \int_x^{x+h} \frac{x+h-\xi}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)\,d\xi.$$

[66] 定理 12.1 を証明せよ. □

ヒント: n に関する帰納法で証明する. 高階も含めて導函数の連続性を仮定したので, 導函数 (に多項式をかけたもの) の積分を自由に行なえる. $\xi = x+th$ なる積分の変数変換によって, 中の式が右の式に変形できることがわかるので, 中の式を示せば良い. $u(t) = f(x+th)$ に対する微分積分法の基本公式より, $n = 1$ の場合が成立することがわかる:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+th)h\,dt.$$

n まで成立したと仮定して $n+1$ の場合を示したい. そのためには, t の函数 u, v に関する部分積分の公式

$$\int_a^b u'v\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dt$$

を $u(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!}$, $v(t) = f^{(n)}(x+th)h^n$ に対して適用すれば良い.

[20]『解析概論』の第 94 節の例 2 (p.344).
[21] $\delta_{m,m} = 1$, $m \neq n$ のとき $\delta_{m,n} = 0$.

[67] 剰余項の積分表示式を用いて $\lim_{h\to 0} \dfrac{|R_{n+1}(x,h)|}{|h|^n} = 0$ を証明せよ. □

ヒント: $R_{n+1} = R_n - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n$ の絶対値を上から評価せよ. そのとき, $\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{n!}$ が成立することに注意せよ. 評価の途中で, 不等式 $|\int_a^b g(t)\,dt| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$ を用いよ.

13 無限級数

数列 a_n に対してその無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を無限級数もしくは単に級数と呼ぶ. 級数の値は極限 $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ が存在するとき, その値によって与えられる.

全ての a_n が非負の実数のとき, その級数は正項級数と呼ばれる. 正項級数の極限値として ∞ を許す場合がよくあるが, 実数の中に ∞ のような数があるわけではないことには注意しなければいけない.

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が有限な値に収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. (このことは, 実数全体の集合の完備性 (任意の Cauchy 列が収束すること) より出る.) このとき, この級数は絶対収束すると言う. 絶対収束しないが, 収束する級数は条件収束級数と呼ばれる. 各 a_n が実数の範囲を越えて複素数であったとしても, 同様に絶対収束級数が定義される.

正項級数と絶対収束級数の最も大事な性質は, その足し上げ方をどのように変えても同一の極限値が得られることである. 例えば, 項を並べる順番を変えたり, 部分級数の和に分割したり, $\cdots$. また, 正項級数もしくは絶対収束級数が 2 つあるとき, それらの積は有限級数と同じように分配律を用いて展開される.

以上で述べたことは, 『解析概論』の第 43 節 (p.144) で詳しく解説されている. 以下において, これらのことは自由に使ってよい.

[68] (Dirichlet) a_n は実数列であるとし, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は条件収束級数であると仮定する. このとき, 無限和における項の順序を並び変えることによって, 任意の値に収束させたり, ∞ や $-\infty$ に発散させたり, 収束性を失わせたりできることを示せ. □

ヒント: 『解析概論』の第 43 節 (p.145).

『解析概論』の第 44 節 (pp.148–152) では級数の絶対収束性の判定法がいくつか解説されている. 基本的には, 有限な値に収束することがわかっている正項級数で, 絶対値の和が上から押さえられることを示すという方針で, 判定法を作成するのである.

[69] (Riemann のゼータ函数) $s > 1$ のとき次の級数は収束し, $s \le 1$ のとき発散する:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

この $\zeta(s)$ は Riemann のゼータ函数と呼ばれている. □

参考: Riemann のゼータ函数の詳しい性質を知りたければ, それを実変数の函数ではなく, s として複素数も許し複素函数とみなければいけない[22]. Riemann のゼータ函数の性質は, 素数の世界がどのようになっているかに密接に関係している. 数論においてはこの他にも色々なゼータ函数が定義されていて, 大変興味深い世界を形作っている[23].

[70] (Euler の定数) 次の極限が収束することを示せ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

この定数 γ は Euler 定数と呼ばれている. □

[71] (Cauchy の凝集判定法) a_n は非負実数からなる単調減少数列であるとする. このとき, 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ と同時に収束または発散する. □

『解析概論』の第 45 節 (pp.152–154) では絶対収束するとは限らない級数の収束性の判定法がいくつか解説されてある. 条件収束する級数の収束の判定は, 絶対収束する場合に比べて面倒である.

[72] (交代級数) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ かつ $a_n \to 0$ のとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する. □

[73] 次が成立している:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2.$$

これらの公式の左辺の級数は条件収束している. □

14 Abel の級数変形法

絶対収束するとは限らない級数の収束の判定には, Abel の判定法が便利である.

[74] (Abel の判定法) 任意の数列 v_n および非負の実数列 α_n を考え[24], $s_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ と置き, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots$ と仮定する. このとき, 以下が成立する:

1. 数列 s_n が有界でかつ $\alpha_n \to 0$ ならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ は収束する.

2. 数列 s_n が収束するならば, ($\alpha_n \to 0$ でなくても) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ は収束する. □

---

[22] $\zeta(s)$ は複素平面全体の上の有理型函数に解析接続される (極は $s=1$ のみ). 例えば, $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ のような式が成立している. すなわち, 形式的には $1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$ が成立している!!

[23] Fermat 予想解決の最終ステップは, A. Wiles による $\mathbb{Q}$ 上の半安定楕円曲線に関する谷山予想の解決であった. 谷山予想には同値な表現がいくつかあるが, そのうちの一つは, 「$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線のゼータ函数は函数等式をみたす」という形の命題である.

[24] v_n は複素数列でも良い. より一般には有限次元の実 (もしくは複素) ベクトル空間内の点列でもよく, さらには Banach 空間内の点列であってもよい. 要点は完備性である.

ヒント: 次の Abel の級数変形を用いる. 簡単のために $s_0 = 0$ と置くと, $1 \le m \le n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
S_{m,n} &:= \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n \\
&= \alpha_m(s_m - s_{m-1}) + \alpha_{m-1}(s_{m-1} - s_{m-2}) + \cdots + \alpha_n(s_n - s_{n-1}) \\
&= -\alpha_m s_{m-1} + (\alpha_m - \alpha_{m+1}) s_m + (\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}) s_{m+1} + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) s_{n-1} + \alpha_n s_n.
\end{aligned}
$$

より詳しい内容については, 『解析概論』の第 45 節の (VIII) (p.154) を見よ. Abel の級数変形法は Abel の定理 (問題 [**106**]) の証明で使われる.
注意: Abel の判定法において $v_n = (-1)^{n-1}$ と置けば, 交代級数の収束判定法が導かれる.

[**75**] Abel の判定法を用いて次を示せ. ω は複素数であり, $|\omega| = 1$, $\omega \ne 1$ を満たしているする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\omega^{n-1}}{n}$ は条件収束する. □

Abel の級数変形の積分の場合における類似を考えると, 実はそれは部分積分に他ならないことがわかる. 部分積分は不等式を出すための最も基本的な道具であり, Abel の級数変形法にもその一端が現われているのである.

[**76**] **(Abel の判定法の広義積分版)** v は区間 $U = [a, b)$ 上の連続函数であり[25], α は U 上の C^1 級の実数値函数であるとする. $s(x) = \int_a^x v(t)\,dt$ と置き, U 上で $\alpha \ge 0$, $\alpha' \le 0$ が成立していると仮定する. このとき, 以下が成立する.

1. $s(x)$ が U 上で有界でかつ $x \nearrow b$ のとき $\alpha(x) \to 0$ ならば, 広義積分 $\int_a^b \alpha(t) v(t)\,dt$ は収束する.

2. $x \nearrow b$ で $s(x)$ がある値に収束するならば, ($\alpha(x) \to 0$ でなくても) 広義積分 $\int_a^b \alpha(t) v(t)\,dt$ は収束する. □

ヒント: $s(x) = \int_a^x \alpha(t) v(t)\,dt$ と置く. このとき, $a \le x \le y$ に対して,

$$
S(y) - S(x) = \int_x^y \alpha(t) v(t)\,dt = \int_x^y \alpha(t) s'(t)\,dt = [\alpha(t) v(t)]_x^y - \int_x^y \alpha'(t) s(t)\,dt.
$$

よって, U 上で $|s(x)| \le R$ ならば,

$$
\begin{aligned}
|S(y) - S(x)| &\le |\alpha(y) s(y)| + |\alpha(x) s(x)| + \int_x^y |\alpha'(t)||s(t)|\,dt \\
&\le R\alpha(y) + R\alpha(x) + \int_x^y (-\alpha'(t)) R\,dt \\
&= R\alpha(y) + R\alpha(x) - R(\alpha(y) - \alpha(x)) = 2R\alpha(x).
\end{aligned}
$$

(このように, 三角不等式や積分の中に絶対値を入れると大きくなるなどの基本的な不等式を使って上からの評価を得るという計算方法は, 今までも何度も出て来た手法である.)
上の問題の結果を使って以下を示せ.

[**77**] 広義積分 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{e^{ix}}{\log x}\,dx$ は条件収束する. □

[25] 上と同様に v は複素数値函数であっても良い.

[78] f は正値微分可能函数であり, $x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to 0$ であるとし, ある $R \geq 0$ が存在して, $x \leq -R$ ならば $f'(x) \geq 0$ であり, $x \geq R$ ならば $f'(x) \leq 0$ であると仮定する. このとき, $p \neq 0$ なる任意の $p \in \mathbb{R}$ に対して, 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx}\,dx$ は収束する. □

[79] 広義積分 $\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx$ は条件収束する. □

ヒント: $t = x^2$ と積分変数を置換し, Abel の判定法の広義積分版を使う.

このように, 条件収束する級数や広義積分を見付けたければ, 級数の項もしくは被積分函数が (単調に減少しながら 0 に近付く因子) × (よく振動する因子) の形のものを探せば良い.

15 一様収束

[80] 区間 $K = [0,1]$ 上の函数列 f_n を $f_n(x) = x^n$ と定める. このとき, 各点 $x \in K$ において $f_n(x)$ は収束するが, f_n は一様収束しないことを直接の計算によって示せ. (連続函数列の一様収束極限で得られる函数が連続函数であることを使ってはいけない.) □

[81] 級数 $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ を考える. このとき, 級数 $s(x)$ は各点 $x \in \mathbb{R}$ において収束するが, $x = 0$ を含む任意の区間上で一様収束していない. □

連続函数列が連続函数に各点収束しても, 一様収束するとは限らないことは次の例よりわかる.

[82] 区間 $I = [0,\infty)$ 上の滑らかで有界な函数の列 f_n を $\varphi(x) = xe^{-x}$, $f_n(x) = n\varphi(nx)$ と定める. このとき, 各点 $x \in I$ において $f_n(x)$ は 0 に収束するが, 函数列 f_n は 0 に一様収束しない. □

ヒント: 以上の 3 問は『解析概論』の第 46 節の例 1 (p.155), 例 2 (p.156), 例 3 (p.157) にある.

級数の一様絶対収束性の判定のためには, 通常まず次の結果を使うことを考える.

[83] (一様絶対収束の判定法) f_n は区間 U 上の函数列であるとし, a_n は非負の実数列であるとする. U 上で $|f_n(x)| \leq a_n$ であり, 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が有限な値に収束するならば, 函数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様に絶対収束する. □

注意: 広義積分でも同様な結果が成立する (問題 [**111**]).

[84] 任意の $a > 1$ に対して, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s \in [a,\infty)$ に関して一様に絶対収束する. このことより, $\zeta(s)$ は $s > 1$ で連続であることがわかる. □

以下, 閉区間 $K = [a, b]$ 上の連続函数 f に対して,

$$||f|| := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

と置く. $|f|$ は K 上の連続函数なので K 上最大値を持つ. よって, $||f||$ は well-defined である. $||\cdot||$ は sup norm (スープ・ノルム) と呼ばれる.

[85] f および $f_1, f_2, f_3, \ldots$ が閉区間 $K = [a, b]$ 上の連続函数であるとき, 函数列 f_n が f に K 上一様収束するための必要十分条件は, $||f_n - f|| \to 0$ が成立することである. □

[86] f, g が閉区間 $K = [a, b]$ 上の連続函数であり, $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, 以下が成立する:

1. $||f|| = 0$ ならば f は恒等的に 0.
2. $||\alpha f|| = |\alpha|\,||f||$.
3. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$. □

このように, $||\cdot||$ は「絶対値もどき」の性質を有している.

[87] 閉区間 $K = [a, b]$ 上の連続函数列 f_n に対して, f_n が K 上のある連続函数に一様収束するための必要十分条件は次が成立することである:

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $||f_n - f_m|| \leq \varepsilon$ が成立する. □

ヒント: 必要性は簡単に示せる. 十分性は以下のようにして示せば良い. 任意の $\varepsilon > 0$ を固定する. $(*)$ を仮定すると, ある N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $||f_n - f_m|| \leq \varepsilon$. よって, そのとき, 任意の $x \in K$ に対して, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. これで, 各 $x \in K$ に対して, 数列 $f_n(x)$ は Cauchy 列であることがわかった. よって, 数列 $f_n(x)$ は収束する. その収束先を $f(x)$ と書くことにする. $m \to \infty$ とすることによって, $n \geq N$ ならば, 任意の $x \in K$ に対して, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ となることがわかる. これで, f_n が f に K 上一様に収束することがわかった. 以下, $n \geq N$, $x \in K$ とする. 各 f_n は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $y \in K$ かつ $|y - x| < \delta$ ならば $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ が成立する. このとき,

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

これで, f の連続性も示せた. (この論法を 3ε 論法と呼ぶこともある.)
注意: 上の証明をよく読めば, 連続函数の列 f_n が函数 f に一様収束するとき, f もまた連続函数になることもわかる.

参考: $C(K) = \{$ 閉区間 K 上の実数値連続函数全体 $\}$ と置く. 上の問題の結果は, $C(K)$ における sup norm $||\cdot||$ に関する Cauchy 列が常に (強) 収束することを意味している. 一般に, ノルム $||\cdot||$ に関する Cauchy 列が常に収束するような空間は完備であると言い, そのような空間は Banach 空間と呼ばれる. すなわち, 上の問題によって, $(C(K), ||\cdot||)$ は Banach 空間であることがわかった. このように函数の空間を系統的に扱うための一般論として, 函数解析学が整備されている.

[88] (Weierstrass の多項式近似定理) 閉区間 $K = [a, b]$ 上の任意の連続函数 f に対して, f に K 上一様収束するような多項式函数の列が存在する. □

ヒント: 『解析概論』の第 78 節 (p.284) に初等的な証明が書いてある.

16 函数列の積分

[89] 開区間 U 上の連続函数の列 f_n が函数 f に一様収束していると仮定する．このとき，$x, c \in U$ に対して，$F_n(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt$, $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ と置くと，U 上の函数列 F_n は F に一様収束する．□

参考: Lebesgue 式積分論ではもっと強力で使い易い結果を示すことができる．Lebesgue 式積分論では測度空間 X 上の可測函数[26] f が $\int_X |f(x)|\,dx < \infty$ をみたすとき，f は可積分もしくは積分可能 (integrable) であると言われ，積分 $\int_X f(x)\,dx$ が定義される．以下 f_n が X 上の可積分函数の列であり，ある函数にほとんどいたるところ[27]収束していると仮定する．このとき，以下が成立する．

定理 16.1 (単調収束定理) 各 f_n が実数値函数であり，$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ をみたしているならば，両辺の値として ∞ も許せば，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ が常に成立する．

定理 16.2 (Lebesgue の収束定理) n によらない可積分実数値函数 g が存在して，$|f_n| \leq g$ をみたしているならば，$\lim f_n$ も可積分であり，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ が成立する．

要するに，単調に収束する函数列や，収束する函数列で積分が絶対収束する函数で一様に押さえられているようなものに関しては，積分と lim の交換を自由に行なってよいのである．これらの定理を使うと，一様収束の判定という，少々面倒な手続きを回避できる[28].

[90] 問題 **[82]** に現われた区間 $I = [0, \infty)$ 上の函数列 $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ を考える．このとき，各点 $x \in I$ で $f_n(x)$ は 0 に収束し，各 f_n の I 上での広義積分は絶対収束するにもかかわらず，$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx \neq 0$ が成立することを示せ．□

この問題の函数列は，単調収束定理も Lebesgue の収束定理も適用することができない例にもなっている．

17 函数列の微分

微分可能函数の列の極限によって得られる函数の微分可能性については，次の結果が基本的である．

[91] f_n が区間 U 上の微分可能函数の列であり，U 上のある函数 f に収束しているとする．このとき，導函数の列 f_n' が U 上のある連続函数 g に一様収束しているならば，f は微分可能であり，$f' = g$ が成立する．

ヒント: 『解析概論』の第 47 節の ($\mathbf{C}'$) の級数に対する証明 (p.160) を，函数列の場合に焼き直せば良い．

---

[26] ここで，測度空間やその上の可測空間の定義はできない．しかし，もちろん，$\mathbb{R}^n$ は Lebesgue 測度とともに測度空間であり，その上の連続函数および連続函数から各点収束極限を何度か取って得られる函数はすべて可測函数である．

[27]「ほとんどいたるところ」と数学らしくない表現が使われているが，Lebesgue 式積分論において，それは「測度零のある可測集合の外では」という意味であると厳密に定義される．

[28] ただし，これらの便利な定理をこの演習の解答において用いてはいけない．しかし，この演習のように，初等微分積分学の基礎を修得するというような特別な目的がない限り，このように便利な定理は証明抜きで認めて自由に使って良い．

問題 **[87]** の類似の結果を C^1 級函数に対して与えよう. 閉区間 $K=[a,b]$ に対して,

$$C^1(K)=\{\, f:K\to\mathbb{R} \mid f \text{ は } C^1 \text{ 級である}\,\}$$

と置き, $f\in C^1(K)$ に対して,

$$||f||_1=\max\{\sup_{x\in K}|f(x)|,\ \sup_{x\in K}|f'(x)|\,\}$$

と置く. この $||\cdot||_1$ を C^1-norm と呼ぶことにする.

[92] $f,g\in C^1(K)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して以下が成立する:

1. $||f||_1=0$ ならば f は恒等的に 0.
2. $||\alpha f||_1=|\alpha|\,||f||_1$.
3. $||f+g||_1\le ||f||_1+||g||_1$. □

[93] K 上の C^1 級函数の列 f_n が次の条件を満たしていると仮定する:

$(*)$ 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある N が存在して, $m,n\ge N$ ならば $||f_n-f_m||_1\le\varepsilon$ が成立する.

このとき, $||f_n-f||_1\to 0$ を満たすような $f\in C^1(K)$ が唯一存在する. □

ヒント: 問題 **[87]** の結果より, f_n, f'_n はそれぞれ K 上のある連続函数 f, g に一様収束することがわかる. あとは, f が微分可能で $f'=g$ となることを示せば十分である. $\varepsilon>0$ と $x\in K$ を任意に固定する. h は $x+h\in K$ を満たす範囲を動くことにし, $R=|f(x+h)-f(x)-g(x)h|$, $A=|f(x+h)-f(x)-(f_n(x+h)-f_n(x))|$, $B=|-g(x)+f_n(x)|\,|h|$, $C=|f_n(x+h)-f_n(x)-f'_n(x)h|$ と置くと, 三角不等式より, $R\le A+B+C$. f'_n は g に一様収束するので, ある N が存在して, $n\ge N$ ならば $|f'_n-g|\le\varepsilon$. そのとき, $B\le\varepsilon|h|$. f_n は微分可能なので, ある $\delta>0$ が存在して, $|h|\le\delta$ ならば $C\le\varepsilon|h|$. 問題は A の評価である. f_m-f_n に平均値の定理を用いることによって, $m,n\ge N$ に対して, ある $0<\theta<1$ なる θ が存在して, $\xi=x+\theta h$ と置くと,

$$\begin{aligned}&|f_m(x+h)-f_m(x)-(f_n(x+h)-f_n(x))|=|(f'_m(\xi)-f'_n(\xi))h|\\&\le(|f'_m(\xi)-g(\xi)|+|g(\xi)-f'_n(\xi)|)|h|\le 2\varepsilon|h|.\end{aligned}$$

よって, $m\to\infty$ として, $n\ge N$ ならば $A\le 2\varepsilon|h|$ が成立することがわかる. 以上をまとめると, $|h|\le\delta$, $n\ge N$ ならば $R\le 4\varepsilon|h|$ が成立することがわかる.

参考: 上の結果は $C^1(K)$ が C^1-norm に関して完備であることを意味している. すなわち, $(C^1(K),||\cdot||_1)$ は Banach 空間である.

18 巾級数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形の級数を x の巾級数と呼ぶ. 以下, a_n は複素数でも良いことにするが, 特別に断らない限り x として実数のみを考える. (しかし, 全ての結果は x として複素数を考えても成立している.)

[94] 巾級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ がある $x = x_0$ において絶対収束しているならば, $|x| \le |x_0|$ において一様絶対収束している. よって, $f(x)$ は $|x| \le |x_0|$ における連続函数を与える. □

ヒント: 前半は『解析概論』の定理 47 (p.181) よりも少し弱い形であり, 問題 [**83**] の結果を使えば簡単に証明できる.

[95] (Cauchy-Hadamard) 巾級数の収束半径の定義を説明し, 巾級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径 r が次のような表示を持つことを証明せよ:

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad \square$$

ヒント: 『解析概論』の定理 48 (p.182).

[96] 巾級数 $\sum \frac{n!}{(2n)!} x^n$ の収束半径は ∞ である. □

[97] 巾級数 $\sum n! x^n$ の収束半径は 0 である. □

[98] 0 でない多項式函数 $p(x)$ に対して, 巾級数 $\sum p(n) x^n$ の収束半径は 1 である. □

[99] (超幾何級数) 超幾何級数と呼ばれる級数とは次の巾級数のことである:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\cdot n!} x^n.$$

超幾何級数が well-defined でかつ無限級数になるような α, β, γ に対して, 超幾何級数の収束半径は 1 に等しい. □

ヒント: 『解析概論』の第 52 節の例 2 (p.188).
参考: 実はこの級数の値は, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Im}(\gamma - \alpha) > 0$, $\gamma \ne 0, -1, -2, \dots$, $|x| < 1$ のとき, 問題 [**54**] で定義された超幾何積分に等しい.

[100] $|x| < 1$ において, $xF(1,1,2;x) = -\log(1-x)$. □

[101] $|x| < 1$ において, $F(\alpha,\gamma,\gamma;x) = (1-x)^{-\alpha}$. □

[102] $|x| < 1$ において, $\lim_{\beta\to\infty} F(1,\beta,1;x/\beta) = e^x$. □

[103] (超幾何微分方程式) 超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ は次の線型常微分方程式を満たしている:

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx}-\alpha\beta\right]F(\alpha,\beta,\gamma;x)=0.$$

この微分方程式を (Gauss の) 超幾何微分方程式[29]と呼ぶ. □

[104] 巾級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径は r であるとし, $p(x)$ は 0 でない任意の多項式函数であるとする. このとき, 巾級数 $\sum p(n)a_n x^n$ の収束半径は r である. □

[105] 巾級数 $f(x)=\sum a_n x^n$ の収束半径は r であるとする. このとき, $f(x)$ は $|x|<r$ における微分可能函数を与え, 次を満たしている:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}. \quad \square$$

ヒント: 一つ上の問題の結果を $p(n)=n$ の場合に用い, 函数列の微分に関する基本的な結果 (問題 [**91**]) を使う. 『解析概論』の定理 49 (p.183) の解説の中で別の直接的な証明が紹介されている.

[106] (Abel の定理) 巾級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径は 1 であり, 級数 $a_0+a_1+a_2+\cdots$ は収束していると仮定する. このとき, 巾級数 $f(x)=\sum a_n x^n$ は閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束している. よって, $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の連続函数を与える. 特に, 次が成立する:

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1+a_2+\cdots. \quad \square$$

ヒント: 『解析概論』の定理 50 (p.184). Abel の級数変形法を用いる. Abel の級数変形法の節 14 の記号を使えば, $\alpha_n=x^n$ $(x\in[0,1])$, $v_n=a_n$ に Abel の級数変形法を用いるということになる. $s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ と置く. このとき, s_n は収束するので, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある N があって, $m,n\geq N$ ならば, $|s_n-s_m|\leq\varepsilon$ が成立する. $n\geq N$ に対して, $\sigma_n=s_n-s_N$ と置くと, $|\sigma_n|\leq\varepsilon$ である. $x\in[0,1]$ に対して, $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ と置く. このとき, $N\leq m\leq n$ ならば, 任意の $x\in[0,1]$ に対して,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f_m(x)| &= |a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_n x^n| \\
&= |(\sigma_{m+2}-\sigma_{m+1})x^{m+1}+\cdots+(\sigma_n-\sigma_{n-1})x^n| \\
&= |-\sigma_{m+1}x^{m+1}+\sigma_{m+1}(x^{m+1}-x^{m+2})+\cdots+\sigma_{n-1}(x^{n-1}-x^n)+\sigma_n x^n| \\
&\leq \varepsilon x^{m+1}+\varepsilon(x^{m+1}-x^{m+2})+\cdots+\varepsilon(x^{n-1}-x^n)+\varepsilon x^n \\
&= 2\varepsilon x^{m+1}\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

これで, f_n が閉区間 $[0,1]$ 上で一様収束することがわかった.

---

[29]Gauss の超幾何微分方程式は, 自明でない確定特異点型線型微分方程式系の中で最も簡単な例である. 現在においては, 偏微分方程式の場合も含めて, 確定特異点型線型微分方程式系の一般的理論は, D 加群の理論として, 代数幾何的な言葉によって整理されている.

[107] $a>0$, $b>0$ のとき,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \cdots .$$

例えば,

$$\begin{aligned} a=1, b=1 \quad &\text{とすれば,} \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2, \\ a=1, b=2 \quad &\text{とすれば,} \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

ヒント: これは『解析概論』の第 4 章の練習問題 (12) (p.200) とその注意そのものである. これを示すためには, $0 \le x \le 1$ で成立する式

$$\frac{x^{a-1}}{1+x^b} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{a+nb-1}$$

を項別積分できることを示せば良い. そのとき, Abel の定理を使うと簡単である.

19 積分によって表示された函数

この節では二変数函数 $f(x,y)$ を y に関して積分して得られる x の函数 $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$ を扱う. まず, 二変数函数に関する基本的な結果をまとめておこう.

定義 19.1 (連続性) f は開区間の直積 $U=(a,b)\times(c,d)$ 上の函数であるとする. f が点 $(x_0,y_0)\in U$ において連続であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $(x,y)\in U$ かつ $|x-x_0|, |y-y_0| \le \delta$ ならば $|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le \varepsilon$ が成立することである. U の任意の点で f が連続なとき, f は U 上の連続函数であると言う.

定理 19.2 (Bolzano-Weierstrass) $\mathbb{R}^2$ 内の任意の有界点列は収束する部分列を持つ.

定理 19.3 (Heine-Borel) 閉区間の直積 $K=[a,b]\times[c,d]$ が開区間の直積の族 $U_i = (a_i,b_i)\times(c_i,d_i)$ $(i\in I)$ で覆われていると仮定する:$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. このとき, 有限個の $i_1,\dots,i_n$ が存在して, $K \subseteq U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ が成立する.

これらの定理を使うと, 一変数の場合と全く同様にして以下の結果を示すことができる.

定理 19.4 閉区間の直積 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上の任意の実数値連続函数は, K において最大値と最小値を取る.

定理 19.5 閉区間の直積 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上の任意の連続函数は K 上一様連続である. すなわち, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in U$ かつ $|x_2-x_1|, |y_2-y_1| \le \delta$ ならば $|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| \le \varepsilon$ が成立する.

注意: ここでは, 2 次元の場合について述べたが, 一般の高次元の場合でも全く同様のことが成立している. また, 閉集合や開集合などの言葉を避けるために, 閉区間や開集合の直積に関する結果について述べた. それでも定理の本質的な部分は失われないのだが, すっきりした理解をするためには, やはり位相空間の言葉を用いるべきであろう.

[108] (積分表示された函数の連続性) $f(x,y)$ が開区間 U と閉区間 $K=[a,b]$ の直積 $U\times K$ の上の連続函数であるとき, $F(x)=\int_a^b f(x,y)\,dy$ によって定義される U 上の函数 F は連続である.

ヒント: U に含まれる任意の閉区間 J の上で連続であることを示せば良い. $x,x_0\in J$ に対して,

$$|F(x)-F(x_0)|\le\int_a^b|f(x,y)-f(x_0,y)|\,dy.$$

$f(x,y)$ は $J\times K$ の上で一様連続であるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $|x-x_0|\le\delta$, $y\in K$ ならば $|f(x,y)-f(x_0,y)|\le\varepsilon$ が成立する. そのとき, $|F(x)-F(x_0)|\le|b-a|\varepsilon$.

定義 19.6 (偏導函数) $f(x,y)$ は開区間の直積 $U=(a,b)\times(c,d)$ 上の函数であるとする. 点 $(x,y)\in U$ において, f が x に関して偏微分可能であるとは, 次の極限が存在することである:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial f}x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

f が U 上の任意の点において x に関して偏微分可能であるとき, f は x に関して U 上偏微分可能であると言い, 上の式で定義される U 上の函数 f_x を f の x に関する偏導函数と呼ぶ. (y に関する偏微分可能性と偏導函数も同様に定義される.)

[109] (積分と微分の交換) $f(x,y)$ は開区間 U と閉区間 $K=[a,b]$ の直積 $U\times K$ 上の連続函数であり, f は x に関して偏微分可能であり, x に関する偏導函数 f_x は $U\times K$ 上連続であると仮定する. このとき, U 上の函数 F を $F(x)=\int_a^b f(x,y)\,dy$ によって定義すると, F は微分可能であり, $F'(x)=\int_a^b f_x(x,y)\,dy$ が成立している.

ヒント: 平均値の定理より, $0<\theta(x,y)<1$ をみたす $U\times K$ 上の函数 θ が存在して, $f(x+h,y)-f(x,y)=f(x+\theta(x,y)h,y)h$ が成立する. よって,

$$R:=F(x+h)-F(x)-\int_a^b f_x(x,y)\,dy\cdot h=\int_a^b(f_x(x+\theta(x,y)h,y)-f_x(x,y))\,dy\cdot h.$$

ここで, f_x が U に含まれる任意の閉区間と K の直積上で一様連続であることを使うと, 任意の $\varepsilon>0$ と $x\in U$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $|h|\le\delta$, $y\in K$ ならば $|f_x(x+\theta(x,y)h,y)-f_x(x,y)|\le\varepsilon$ が成立することがわかる. このとき, $|R|\le(b-a)\varepsilon|h|$.

[110] (二重積分の順序の交換) $f(x,y)$ は閉区間の直積 $J\times K=[a,b]\times[c,d]$ 上の連続函数であるとする. $n=1,2,3,\dots$, $i=1,2,\dots,n$ に対して, $y_{n,i}$ を $y_{n,i}\in[c+\frac{d-c}{n}(i-1),c+\frac{d-c}{n}i]$ をみたすように選んでおく. このとき, $J=[a,b]$ 上の函数列 F_n を $F_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x,y_{n,i})\frac{d-c}{n}$ と定めると, 各 F_n は連続であり, J 上 $F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ に一様収束する. よって, 次が成立することがわかる:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.\quad\square$$

ヒント: 『解析概論』の定理 41 (p.162 の定理) の (B).
参考: Lebesgue 積分論における Fubini の定理はこの問題の結果のすっきりしたわかりやすい一般化を与えている. それによると, f の連続であることや積分の範囲が閉区間であることは本質的ではないことがわかる. Fubini の定理が成立するためには, 積分の範囲はどのようなものでも良く, f が可積分であれば十分なのである.

20 広義積分によって表示された函数

さて, 前節においては閉区間の上の積分によって表示された函数の連続性や微分可能性について調べた. しかし, 例えば, 重要な例であるガンマ函数は広義積分によって定義されている. したがって, 広義積分によって表示された函数の性質を調べる方法も知っておく必要がある.

$f(x,y)$ は開区間 U と区間 $I=[a,b)$ (b の値として ∞ も許す) の直積 $U\times I$ 上の連続函数であるとする. U 上の函数 F を

$$F(x)=\int_a^b f(x,y)\,dy=\lim_{\beta\nearrow b}\int_a^\beta f(x,y)\,dy$$

によって定義する. ただし, 右辺の広義積分は常に収束しているものと仮定する. このように表示された函数 F の連続性や微分可能性はどのようにして調べたら良いのであろうか? 今まで得られた結果を使って調べるためには, 二段階に分けて考えなければいけない.

1. $\beta\in[a,b)$ なる β に対して, 次の函数を調べる:
$$F(\beta,x)=\int_a^\beta f(x,y)\,dy.$$
2. 次に, $\beta\nearrow b$ における $F(\beta,x)$ の $F(x)$ への収束の仕方を調べる. 例えば, x に関して一様に $F(\beta,x)$ が $F(x)$ に収束してないか, もしくは, x に関する偏導函数 $F_x(\beta,x)$ が一様収束してないかなどについて調べる.

絶対収束の範囲では次の結果が便利である.

[111] **(一様絶対収束の判定法)** $f(x,y)$ は開区間 U と区間 $I=[a,b)$ (b の値として ∞ も許す) の直積 $U\times I$ 上の連続函数であるとする. x によらない I 上の実数値連続函数 $g(y)$ で, $g\geq 0$ でかつ広義積分 $\int_a^b g(y)\,dy$ が絶対収束し, $U\times I$ 上で $|f(x,y)|\leq g(y)$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき, 広義積分 $F(x)=\int_a^b f(x,y)\,dy$ は x に関して一様に絶対収束し, U 上の連続函数を与える. □

ヒント: 『解析概論』の p.167 の注意.
注意: この問題と問題 **[83]** を比べて見よ. どちらも, 絶対値を上から一様に押さえるという形の一様絶対収束判定法になっている. このような考え方は絶対収束の判定において基本的である.
注意: 一様絶対収束性の証明において, f や g が連続函数であるという仮定は必要ではない. Lebesgue 積分論を知らない人のために, 余計な仮定を付けておいたのである. (もちろん, $F(x)$ の連続性を示すためには, 連続性の条件を仮定に入れておかねばならない.)

この結果を利用して, 以下を示せ.

[112] **(Fourier 変換の定義)** f は $\mathbb{R}$ 上の連続函数であり, 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ は絶対収束していると仮定する. このとき, $p \in \mathbb{R}$ に関して, 次の広義積分は一様に絶対収束する:

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx}\,dx.$$

($\hat{f}$ は f の Fourier 変換と呼ばれる.) さらに, $\hat{f}(p)$ は p の連続函数になる. $\square$

[113] f は $\mathbb{R}$ 上の連続函数であり, $f(x)$ と $xf(x)$ の $(-\infty, \infty)$ における広義積分はともに絶対収束していると仮定する. このとき, f の Fourier 変換 $\hat{f}$ は微分可能であり, しかも,

$$i\frac{d}{d}p\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-ipx}\,dx.$$

が成立している. $\square$

[114] f は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級函数であり, $f(x)$ と $f'(x)$ の $(-\infty, \infty)$ における広義積分はともに絶対収束していると仮定する. このとき, f の Fourier 変換 $\hat{f}$ に関して,

$$p\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\frac{d}{d}xf(x)\right) e^{-ipx}\,dx \quad \square$$

および, $\lim_{|p|\to\infty} \hat{f}(p) = 0$ が成立している. $\square$

ヒント: 部分積分を使う.
参考: このように, Fourier 変換は x に関する微分作用素を p に関する微分作用素に次の規則によって変換する: $x \mapsto i\frac{d}{d}p, -i\frac{d}{d}x \mapsto p$. また, $f(x)$ が $|x| \to \infty$ で 0 に近付く速さが大きくなればなるほど $\hat{f}(p)$ は滑らかになり, $f(x)$ が滑らかであればあるほど $\hat{f}(p)$ が $|p| \to \infty$ で 0 に近付く速さは大きくなる.

[115] ガンマ函数 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は $s > 0$ における C^{∞} 級函数であることを示せ. $\square$

ヒント: 『解析概論』の pp.167–168.

[116] この問題を解くために, 公式 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて良い. 積分変数 x を $\sqrt{\alpha}x$ $(\alpha > 0)$ で置換することによって, $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. この式を α で微分し, $\alpha = 1$ と置くことによって, 次が成立することがわかる:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

さらに, 積分変数を $t = x^2$ と変換することによって, ガンマ函数に関する次の公式を導くことができる:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{n-1/2}\,dt = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \quad \square$$

ヒント: 『解析概論』の第 48 節の例 5 (p.169).

[117] この問題を解くために, 公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を用いて良い. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成立することを示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2\alpha x}\,dx = e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}.$$

両辺を α で微分して, $\alpha = 0$ と置くことによって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

が成立することがわかる. □

[118] 次の公式が成立することを示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}|x|^{2n+1}\,dx = n! \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad \square$$

[119] $p \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos px\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-p^2/4}$. □

ヒント: 『解析概論』の第 48 節の例 6 (p.170). 左辺を $F(p)$ と置く. 積分記号下での微分と部分積分によって, F は微分方程式 $F'(p) = -\frac{p}{2}F(p)$ を満たしていることがわかる. この方程式を解くと, $F(p) = ce^{-p^2/4}$. 定数 c は $F(0)$ を計算すれば求められる.

[120] 公式 $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$ を使うと, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$ となることがわかる. 積分変数 x を $x/\sqrt{\alpha}$ で置換し, α に関する積分記号下の微分を使って, 次が成立することを示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\pi \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad \square$$

ヒント: 『解析概論』の第 4 章の練習問題 (8) (p.199).