線形代数学演習

黒木玄

2005 年 6 月 6 日 (教師用)

目 次

9 選択公理と Zorn の補題

9.1 選択公理

選択公理 (axiom of choice) とは次の命題のことである:

(AC) 任意の $x \in X$ に対してある $y \in Y$ で条件 $P(x,y)$ を満たすものが存在するならば, ある写像 $f : X \to Y$ が存在して任意の $x \in X$ に対して条件 $P(x, f(x))$ が成立する.

このような写像 f は**選択函数 (choice function)** と呼ばれる. 選択公理を論理式で書くと次のようになる:

$$\forall x \in X\, \exists y \in Y\, P(x,y) \implies \exists f : X \to Y\, \forall x \in X\, P(x, f(x)).$$

形式的に選択公理は $\forall$ と $\exists$ の順序を引っくり返す形をしている.

選択公理の直観的な説明. もしも任意の $x \in X$ に対して条件 $P(x,y)$ を満たす $y \in Y$ が存在するならば各 $x \in X$ ごとにそのような $y \in Y$ を一つずつ選んで $f(x) = y$ と定めることによって選択函数 $f : X \to Y$ を作ることができる. そのとき f の作り方より任意の $x \in X$ に対して条件 $P(x, f(x))$ が成立している.

非常に疑い深い人の考え方. もしも X が無限集合ならば全ての $x \in X$ に対して条件 $P(x,y)$ を満たす $y \in Y$ を一つずつ選び出すことができないかもしれない.

このように疑う自由はあるが, 選択公理は自然であり (実際選択公理を意識せずに使ってしまう人が大部分だろう), 非常に便利なので数学の公理として仮定されることになる.

選択公理は上に述べた形とは異なる形で述べられることも多い. たとえば

(AC') $\{Y_x\}_{x \in X}$ が空でない集合の集合族ならばある写像 $f : X \to \bigcup_{x \in X} Y_x$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in Y_x$ が成立する.

直観的な説明. 各 $x \in X$ ごとに空でない集合 Y_x から一つずつ元を選び, その元を $f(x)$ と定めることによって写像 $f : X \to \bigcup_{x \in X} Y_x$ を作ることができる. このとき f の作り方より任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in Y_x$ が成立している.

[105] (5 点) (AC) と (AC') が同値であることを証明せよ. □

ヒント. (AC) $\Longrightarrow$ (AC'). (AC) を仮定し, $\{Y_x\}_{x \in X}$ は空でない集合で構成された集合族であると仮定する. $Y = \bigcup_{x \in X} Y_x$ と置き, $x \in X$, $y \in Y$ に対して条件 $P(x,y)$ が成立するとは $y \in Y_x$ が成立することであると定める.

(AC') $\Longrightarrow$ (AC). (AC') を仮定し, 任意の $x \in X$ に対してある $y \in Y$ で条件 $P(x,y)$ を満たすものが存在すると仮定する. $x \in X$ に対して $Y_x = \{\, y \in Y \mid P(x,y) \,\}$ と置く. □

9.2 順序集合に関する言葉の準備

定義 9.1 (順序集合) 集合と二項関係の組 $(X, \leqq)$ が**順序集合 (ordered set)** であるとは以下の条件が成立していることである:

- 任意の $x \in X$ に対して $x \leqq x$.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \leqq y$ かつ $y \leqq z$ ならば $x \leqq z$.
- 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ ならば $x = y$.

このとき $\leqq$ は**順序 (order)** と呼ばれる. さらに

- 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leqq y$ または $y \leqq x$ (x と y は比較可能)

が成立しているとき $(X, \leqq)$ は**全順序集合 (totally ordered set)** と呼ばれ, $\leqq$ は**全順序 (total order)** であると言う. $x \leqq y$ を $y \geqq x$ と書くこともある. また $x \leqq y$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書くことにする. □

例 9.2 (順序集合の例) 順序集合には以下のような例がある:

1. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は通常の大小関係に関する全順序集合である.
2. 正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{>0} = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n > 0 \,\}$ と書く. 整数 a が整数 b の約数であるとき $a \mid b$ と書く. このとき $(\mathbb{Z}_{>0}, \mid)$ は順序集合であるが, 全順序集合ではない.
3. 集合の集合は包含関係に関する順序集合とみなされる.
4. 任意の順序集合の部分集合は自然に順序集合とみなされる. □

定義 9.3 (上界, 最小元, 上限, 極大元) $(X, \leqq)$ は順序集合であるとし, $A \subset X$ であるとする.

- $x \in X$ が A の**上界 (upper bound)** であるとは, 任意の $a \in A$ に対して $a \leqq x$ が成立することである. A の上界は存在するとは限らないし, 存在しても唯一とは限らない.
- $a_0 \in A$ が A の**最小元 (minimum)** であるとは, 任意の $a \in A$ に対して $a_0 \leqq a$ が成立することである. A の最小元は存在すれば唯一であり, そのとき $\min A$ と表わされる.
- $s \in X$ が A の**上限 (supremum)** であるとは s が A の**最小上界 (minimum upper bound)** すなわち A の上界全体の集合の最小元であることである. A の上限は存在すれば唯一であり, そのとき $\sup A$ と表わされる.
- $m \in A$ が X の**極大元 (maximal element)** であるとは任意の $x \in A$ に対して $x \geqq m$ ならば $x = m$ となることである. (すなわち $x \in A$ で $x > m$ を満たすものが存在しないことである.) A の極大元は存在するとは限らないし, 存在しても唯一とは限らない.

順序関係を逆転させることによって, **下界 (lower bound)**, **最大元 (maximum)**, $\max A$, **下限 (infimum)**, $\inf A$, **極小元 (mimimal element)** が同様に定義される. □

定義 9.4 (帰納的順序集合) 順序集合 $(X, \leqq)$ が**帰納的 (inductive)** であるとは X の任意の全順序部分集合が上界を持つことである. □

例 9.5 (帰納的順序集合およびそうでない順序集合の例)

- 最大元を持つ順序集合は帰納的順序集合である.
- 有限順序集合は帰納的順序集合である.
- 帰納的順序集合 $(X, \leqq)$ と $x_0 \in X$ に対して, $X_{\geqq x_0} = \{\, x \in X \mid x \geqq x_0 \,\}$ も帰納的順序集合になる.
- $(\mathbb{Z}_{>0}, |\,)$ は順序集合だが, 帰納的ではない.
- $(\mathbb{R}, \leqq)$ は全順序集合だが, 帰納的ではない.
- K は任意の体であるとし, V は K 上の任意のベクトル空間であるとする. V の一次独立な部分集合全体の集合 $\mathcal{L}$ は包含関係に関して帰納的順序集合である. □

[106] (5 点) 順序集合 $(\mathbb{Z}_{>0}, |\,)$, $(\mathbb{R}, \leqq)$ が帰納的でないことを示せ. □

[107] (5 点) 帰納的順序集合 $(X, \leqq)$ と $x_0 \in X$ に対して, $X_{\geqq x_0} = \{\, x \in X \mid x \geqq x_0 \,\}$ も帰納的順序集合になることを示せ. □

[108] (10 点, 任意のベクトル空間の基底の存在定理) K は任意の体であるとし, V は K 上の任意のベクトル空間であるとする. V の一次独立な部分集合全体の集合 $\mathcal{L}$ は包含関係に関する帰納的順序集合であることを示せ. 次節で解説する Zorn の補題を用いて, V の一次独立な任意の部分集合を基底に拡張できることを証明せよ. □

ヒント. $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ は包含関係に関して $\mathcal{L}$ の全順序部分集合であるとする. $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ と置く. そのとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $A \subset B$ である. B も一次独立な V の部分集合になること (すなわち $B \in \mathcal{L}$) を示せ. □

9.3 Zorn の補題

Zorn の補題 (Zorn's lemma) とは次の命題のことである:

(ZL) 空でない任意の帰納的順序集合 $(X, \leqq)$ とその任意の元 $x_0 \in X$ に対して X の極大元 m で $m \geqq x_0$ を満たすもの (x_0 以上の極大元 m) が存在する.

次のように見かけ上弱い形で Zorn の補題が述べられることもある:

(ZL') 空でない任意の帰納的順序集合 $(X, \leqq)$ は極大元を持つ.

これらは同値である.

[109] (5 点) (ZL) と (ZL') の同値性を証明せよ. □

ヒント. 問題 [107] の結果を使えば簡単である. □

さて目標は選択公理 (AC) から Zorn の補題 (ZL) を導くことである.

まず証明の概略を説明しよう.

証明の概略. 選択公理を仮定する. $(X, \leqq)$ は帰納的順序集合であり, $x_0 \in X$ であると仮定する. X には x_0 以上の極大元が存在しないと仮定して矛盾を導けばよい.

x_0 を含む X の全順序部分集合全体の集合を $\mathcal{C}$ と書くことにする. (全順序部分集合は chain と呼ばれることがあるのでその頭文字を取って $\mathcal{C}$ と書くことにした.)

X が帰納的であるという仮定より, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して C の上界 $y \in X$ が存在する. このとき特に $y \geqq x_0$ である.

X には x_0 以上の極大元が存在しないという仮定より, y は X の極大元ではない. よってある $z \in X$ で $z > y$ を満たすものが存在する.

選択公理を仮定したので, 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して上のような $z \in X$ を対応させる選択函数 $f : \mathcal{C} \to X$ が存在して, 任意の $C \in \mathcal{C}$, $x \in C$ に対して $f(C) > x$ が成立する (特に $f(C) \notin C$ である).

$C_0 = \{x_0\} \in \mathcal{C}$, $C_1 = C_0 \cup \{f(C_0)\} \in \mathcal{C}$, $C_2 = C_1 \cup \{f(C_1)\} \in \mathcal{C}, \dots$ が成立する. この構成を **“限りなく最大限続けることによって”** $C_{\max} \in \mathcal{C}$ を構成する. もしも $f(C_{\max}) \notin C_{\max}$ ならばさらに $C_{\max+1} = C_{\max} \cup \{f(C_{\max})\}$ によって次のステップに進むことができるので, **“限りなく最大限続けることによって”** の「最大限」という言葉に矛盾してしまう. よって $f(C_{\max}) \in C_{\max}$ でなければいけない. **(この段落だけは曖昧過ぎるので数学的に不完全である.)**

しかし $C_{\max} \in \mathcal{C}$ より $f(C_{\max}) \notin C_{\max}$ でなければいけない.

これで矛盾が導かれた. □

以上の証明の概略は一つの段落を除けば完全である. 残された問題は「$C_0, C_1, C_2, \dots$ の構成を **“限りなく最大限続けることによって”** $C_{\max}$ を構成する」の部分をどのように数学的に正当化するかである.

注意 9.6 目標である $C_{\max}$ の構成のためには, 自然数 n に対する C_n を構成するだけでは不十分である. なぜならば自然数 n に対して $f(C_n) \notin C_n$ だからである. よってこの証明を完結させるためには数学的帰納法だけでは不十分である. すべての自然数 n に対して C_n が構成された後は $C_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ によって次のステップに進むことになる. しかし, 以下ではこういう方針を取らずに集合の演算を巧妙に使って $C_{\max}$ を構成することにする. □

上の証明の概略の曖昧な部分の数学的正当化.

Step 1. $\mathcal{T}_{\min} \subset \mathcal{C}$ の構成

$\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ が塔 (tower) であるとは次の 3 つの条件を満たすことであると定める:

(a) $\{x_0\} \in \mathcal{T}$.

(b) $T \in \mathcal{T}$ ならば $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}$.

(c) $\mathcal{S}$ が $\mathcal{T}$ の包含関係に関する全順序部分集合になっているならば $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}$.

たとえば $\mathcal{C}$ 自身は塔である (容易なので自分で証明してみよ).

塔全体の共通部分を $\mathcal{T}_{\min} = \bigcap_{\mathcal{T}\text{ は塔}} \mathcal{T}$ と書くことにする. (少なくとも一つ塔が存在するので $\mathcal{T}_{\min}$ は well-defined である.)

(解説: この $\mathcal{T}_{\min}$ は上の証明の概略中で **"限りなく最大限続けることによって"** 構成された $C_0, C_1, C_2, \ldots$ 全体の集合である. 証明の概略中では構成の仕方は非常に曖昧だったが上の構成法は論理的に明確である. $C_{\max}$ は $\mathcal{T}_{\min}$ の包含関係に関する最大元として構成される. アイデアが必要な本質的なステップはこの Step 1 だけであり, $\mathcal{T}_{\min}$ の明確な構成の仕方さえわかっていれば残りの部分は機械的な作業 (routine) に過ぎない. 機械的に論理的な作業をこなす能力が身に付けば直観的で曖昧な議論をどのように論理的に明確にするかに意識を集中できるようになる. 直観的な議論を自由に進めながら, 曖昧な細部を徐々に論理的に明確にして行くのは非常に楽しい.)

Step 2. $\mathcal{T}_{\min}$ が最小の塔になることの証明 (容易)

(a) すべての塔は $\{x_0\}$ を含むので $\{x_0\} \in \mathcal{T}_{\min}$ である.

(b) $T \in \mathcal{T}_{\min}$ ならば任意の塔 $\mathcal{T}$ に対して $T \in \mathcal{T}$ であるから $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}$ である. よって $T \in \mathcal{T}_{\min}$ である.

(c) $\mathcal{S}$ が $\mathcal{T}_{\min}$ の全順序部分集合ならば $\mathcal{S}$ は任意の塔 $\mathcal{T}$ の全順序部分集合でもあるので $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{T}$ である. よって $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{T}_{\min}$ である.

これで $\mathcal{T}_{\min}$ が塔であることがわかった. $\mathcal{T}_{\min}$ は任意の塔に含まれるので最小の塔である.

Step 3. $\mathcal{T}_{\min}$ が包含関係に関する全順序集合であることの証明 (少し面倒)

$\mathcal{T}_{\min}$ の部分集合 $\mathcal{T}_0$ を次のように定める:

$$\mathcal{T}_0 = \{\, S \in \mathcal{T}_{\min} \mid \text{任意の } T \in \mathcal{T}_{\min} \text{ に対して } S \subset T \text{ または } T \subset S \,\}.$$

($\mathcal{T}_0$ は $\mathcal{T}_{\min}$ の任意の元と比較可能な $\mathcal{T}_{\min}$ の元全体のなす集合である.)

$\mathcal{T}_0$ は包含関係に関して全順序集合になる. 実際任意に $S, T \in \mathcal{T}_0$ 取ると $T \in \mathcal{T}_{\min}$ なので $S \subset T$ または $T \subset S$ が成立する.

よって $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{\min}$ を証明すればよい. $\mathcal{T}_{\min}$ が最小の塔であることより, そのためには $\mathcal{T}_0$ も塔であることを示せば十分である.

(a) 任意の $T \in \mathcal{T}_{\min} \subset \mathcal{C}$ に対して $\{x_0\} \subset T$ であるから $\{x_0\} \in \mathcal{T}_0$ である.

(b) $\mathcal{T}_0$ が (b) を満たすことの証明は長くなるので次のステップで証明する.

(c) $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}_0$ の包含関係に関する全順序部分集合であると仮定する. $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}_{\min}$ の包含関係に関する全順序部分集合でもあるので $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{T}_{\min}$ である. 任意に $T \in \mathcal{T}_{\min}$ を取る. 任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して $S \subset T$ または $T \subset S$ である. もしも $T \subset S$ を満たす $S \in \mathcal{S}$ が存在するならば $T \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ となる. もしもそのような S が存在しなければ任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して $S \subset T$ となるので $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \subset T$ となる. したがって $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \subset T$ または $T \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ が成立する. よって $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{T}_0$ である.

Step 4. $\mathcal{T}_0$ が (b) を満たすことの証明 (再度同じ方法を使う)

$C \in \mathcal{T}_0$ を任意に取る. $C \in \mathcal{T}_{\min}$ でもあるので $C \cup \{f(C)\} \in \mathcal{T}_{\min}$ である. $\mathcal{T}_{\min}$ の部分集合 $\mathcal{T}_C$ を次のように定める:

$$\mathcal{T}_C = \{\, T \in \mathcal{T}_{\min} \mid T \subset C \text{ または } C \cup \{f(C)\} \subset T \,\}.$$

$\mathcal{T}_0$ が (b) を満たすことを示すためには $\mathcal{T}_C = \mathcal{T}_{\min}$ であることを示せば十分である．$\mathcal{T}_{\min}$ が最小の塔であることから, そのためには $\mathcal{T}_C$ が塔であることを示せば十分である．

(a) $\{x_0\} \subset C$ なので $\{x_0\} \in \mathcal{T}_C$ である．

(b) $T \in \mathcal{T}_C$ を任意に取る．このとき $T \subset C$ または $C \cup \{f(C)\} \subset T$ である．$C \cup \{f(C)\} \subset T$ のとき $C \cup \{f(C)\} \subset T \cup \{f(T)\}$ であるから $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}_C$ である．そこで $T \subset C$ と仮定する．$C \in \mathcal{T}_0$ より $T \cup \{f(T)\} \subset C$ または $C \subset T \cup \{f(T)\}$ である．$T \cup \{f(T)\} \subset C$ のとき $T \in \mathcal{T}_C$ である．そこで $C \subset T \cup \{f(T)\}$ と仮定する．$T \subset C$ より $C = T$ または $C = T \cup \{f(T)\}$ である．$C = T$ のとき $C \cup \{f(C)\} = T \cup \{f(T)\}$ (特に $C \cup \{f(C)\} \subset T \cup \{f(T)\}$) なので $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}_C$ である．$C = T \cup \{f(T)\}$ のとき特に $T \cup \{f(T)\} \subset C$ なので $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}_C$ である．これで $T \in \mathcal{T}_C$ ならば常に $T \cup \{f(T)\} \in \mathcal{T}_C$ となることがわかった．

(c) $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}_C$ の包含関係に関する全順序部分集合であるとする．$\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}_{\min}$ の包含関係に関する全部分集合でもあるので $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}_{\min}$ である．任意に $S \in \mathcal{S}$ を取る．$S \subset C$ または $C \cup \{f(C)\} \subset S$ である．もしもある $S \in \mathcal{S}$ で $C \cup \{f(C)\} \subset S$ を満たすものが存在するならば $C \cup \{f(C)\} \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ である．もしもそのような S が存在しなければ任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して $S \subset C$ となるので $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subset C$ となる．したがって $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}_C$ である．

Step 5. $\mathcal{T}_{\min}$ の包含関係に関する最大元 $C_{\max}$ の構成 (容易)

$C_{\max} = \bigcup_{C \in \mathcal{T}_{\min}} C$ と置く．任意の $C \in \mathcal{T}_{\min}$ に対して $C \subset C_{\max}$ である．$\mathcal{T}_{\min}$ は塔でかつ包含関係に関する全順序集合なので $\mathcal{T}_{\min}$ に関する条件 (c) より $C_{\max} \in \mathcal{T}_{\min}$ である．これで $C_{\max}$ は $\mathcal{T}_{\min}$ の包含関係に関する最大元であることが示された．

Step 6. $f(C_{\max}) \in C_{\max}$ の証明 (容易)

$C_{\max}$ に関する条件 (b) より $C_{\max} \cup \{f(C_{\max})\} \in \mathcal{T}_{\min}$ である．しかし $C_{\max}$ は包含関係に関する $\mathcal{T}_{\min}$ の最大元なので $C_{\max} \cup \{f(C_{\max})\} = C_{\max}$ でなければいけない．よって $f(C_{\max}) \in C_{\max}$ である．

Step 7. Zorn の補題の証明の完了 (容易)

$f(C_{\max}) \in C_{\max}$ であることが証明されてしまったが, $C_{\max} \in \mathcal{C}$ なので f の定義より $f(C_{\max}) \notin C_{\max}$ である．これは矛盾である．したがって帰納的順序集合 X とその元 x_0 に対して x_0 以上の X の極大元が存在しなければいけない． $\square$

[110] (10 点) Zorn の補題から選択公理を導け． $\square$

ヒント. $\mathcal{F} = \{\, (A, f) \mid A \subset X,\ f : A \to Y,$ 任意の $x \in A$ に対して $P(x, f(x))$ が成立する $\}$ と置く．$(A, f), (B, g) \in \mathcal{F}$ に対して $(A, f) \leqq (B, g)$ であるとは $A \subset B$ かつ g が f の拡張になっていることであると定める．このとき $\mathcal{F}$ は帰納的順序集合である． $\square$