線形代数学演習

黒木玄 2005 年 5 月 30 日

目 次

8 一般の線形空間における部分空間, 一次独立性, 基底

体 K 上の変数 x に関する 1 変数多項式環を $K[x]$ と書くことにする. $K[x]$ は自然に K 上の線形空間とみなされる.

[96] **(5 点)** $V := \{\, f \in \mathbb{C}[x] \mid f(-a) = \overline{f(a)}\ (a \in \mathbb{R}) \,\}$ ($\overline{}$ は複素共役) と置く. $\mathbb{C}[x]$ は自然に $\mathbb{C}$ 上および $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなされる. V は $\mathbb{C}[x]$ の $\mathbb{C}$ 上の部分空間ではないが, $\mathbb{R}$ 上の部分空間になることを示せ. □

[97] **(5 点)** $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ は二元体であるとし, $V := \{\, f \in \mathbb{F}_2[x] \mid f(-x)^2 = f(x)^2 \,\}$ と置く. このとき $V = \mathbb{F}_2[x]$ であることを示せ. □

[98] **(5 点)** $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 函数全体の集合 $C^\infty(\mathbb{R})$ は自然に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなされる. 任意に $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$ を取り, $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合 V を

$$V := \{\, v \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid v'' + av' + bv = 0 \,\}$$

と定める. ここで $v'' + av' + bv = 0$ は $v''(x) + a(x)v'(x) + b(x)v(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ が成立するという意味である. このとき V は $C^\infty(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}$ 上の部分空間である. □

[99] **(二階の線形常微分方程式の解空間, 5 点)** $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 函数全体の集合 $C^\infty(\mathbb{R})$ は自然に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなされる. 任意に $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$ を取り, $V \subset C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$V := \{\, v \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid v'' + av' + bv = 0 \,\}$$

と定める. ここで「$v'' + av' + bv = 0$」は「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $v''(x) + a(x)v'(x) + b(x)v(x) = 0$ が成立する」という意味である. このとき V は $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間である. □

[100] **(Riccati 型微分方程式, 5 点)** 任意に $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$ を取り, $Q \subset C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$Q := \{\, q \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid q' = q^2 - aq + b \,\}$$

と定める. このとき Q は $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間ではない. □

[101] **(10 点)** 問題 [99] の V と問題 [100] の Q の関係について考える. $q \in Q$ を任意に取り, $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合 W を

$$W := \{\, w \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid w' + qw = 0 \,\}$$

と定める. このとき W は V の $\mathbb{C}$ 上の部分空間である. □

ヒント. $\partial = d/dx$ と置き, $\partial^2 + a\partial + b$ を $\partial + q$ で右から割り算してみよ. ここで割り算とは小学校のときに習ったような商と余りを求める割り算のことである. 商は $\partial + a - q$ となり, 余りは $b - q' - (a-q)q$ になる. □

[102] (10 点) K は任意の体であるとし, $a_{ij} \in K$ $(i > j \geq 0)$ を任意に取る. $f_i \in K[x]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ を次のように定義する:

$$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{i,i-1}x^{i-1} + x^i,$$

$(f_0(x) = 1$ であることに注意.) このとき $f_0, f_1, f_2, \ldots$ が $K[x]$ の基底になることを示せ. □

ヒント. $f_0, f_1, f_2, \ldots$ の一次独立性および任意の $f \in K[x]$ が $f_0, f_1, f_2, \ldots$ の K 係数有限一次結合で表わされることを示せばよい. (もしくは任意の $f \in K[x]$ が $f_0, f_1, f_2, \ldots$ の K 係数有限一次結合で一意に表わされることを示せばよい.) □

[103] (10 点) A は $\mathbb{R}$ の任意の無限部分集合であるとする. A 上の実数値函数全体の集合は自然に実ベクトル空間をなす (このことは認めて使ってよい). 0 以上の整数 i に対して A 上の実数値函数 f_i を

$$f_i(x) = x^i \qquad (x \in A)$$

と定める. このとき $f_0, f_1, f_2, \ldots$ が一次独立であることを示せ. □

ヒント. A は無限集合なので任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して互いに異なる元 $a_1, \ldots, a_n \in A$ を取れる. このとき Vandermonde 行列式の公式より, $n \times n$ 行列

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

は可逆になる. このことを使って $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ が一次独立であることを示せ. □

[104] (15 点) p は素数であるとし, $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ は p 元体であるとする. $\mathbb{F}_p$ 上の $\mathbb{F}_p$ 値函数全体の集合は $\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間をなす. $\mathbb{F}_p$ 上の $\mathbb{F}_p$ 値函数 $f_0, f_1, f_2, \ldots$ を次のように定める:

$$f_i(x) = x^i \qquad (x \in \mathbb{F}_p).$$

このとき $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ は一次独立であるが, $f_1, f_2, \ldots, f_p$ は一次従属であることを示せ. □

ヒント. $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ の一次独立性の証明は問題 **[103]** と同じ. 実は任意の $a \in \mathbb{F}_p$ に対して $a^p = a$ となる (この結果の証明は代数学の教科書を参照せよ). 感じがつかめなければ $p = 2, 3, 5$ の場合にどうなっているかをチェックしてみよ. □

注意 8.1 上の問題の結果を見て変数 x に関する $\mathbb{F}_p$ 上の多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ においても $x^p = x$ であると誤解してはいけない. $\mathbb{F}_p$ 係数の多項式とそれを $\mathbb{F}_p$ 上の函数とみなしたものは厳密に区別されなければいけない. K が無限体であれば $K[x]$ の元と K 上の多項式函数を同一視できるのでそのような区別は必要ない. □