楕円函数論演習

黒木 玄 (東北大学理学研究科)

1996 年 12 月 29 日 (日) 版

目 次

0 この演習の目的

この時間の目的は楕円函数論の周辺における初等的な事柄に関する演習を行うことである[1].

是非とも解いてもらいたい問題には * の印を付けておいた.

1 指数函数と三角函数および対数函数

楕円函数と楕円積分以前に, 指数函数と三角函数および対数函数について理解しているだろうか? 指数函数と三角函数および対数函数の構成方法を複素函数論のみを認めて説明しておくことは, 楕円函数と楕円積分の理解にも役に立つ. なぜなら, 楕円函数に比べて三角函数の方がずっと簡単であり, しかも楕円函数を調べるときに使う考え方の大部分が三角函数を調べる時点ですでに現われているからである.

そこで, この節では, 指数函数 (exp) および対数函数 (log) の基礎に関する問題をまとめておく. exp に関する問題は主に [数] 上巻の第 5 章の線に沿って展開している. この節の問題を解くときには, 循環論法を避けるために, 指数函数および三角函数と対数函数に関する基本的な結果を既知と考えてはいけない.

まず, 準備として以下を示せ. 2 項係数 $\binom{\alpha}{k}$ を次のように定義する:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, 2, \dots).$$

[**1**] 天下りだが, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$h(\alpha, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$$

と置く. 右辺の巾級数の収束半径は 1 以上であり, その収束域における正則函数を定める. 以下が成立することを示せ:

1. $h(\alpha, t) f(\beta, t) = h(\alpha+\beta, t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |t| < 1)$.

2. $h(n, \alpha) = (1+t)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots,\ t \in \mathbb{C})$.

3. $h(1/n, \alpha)^n = 1 + t \quad (n = 1, 2, \dots,\ |t| < 1)$. □

[1] この演習問題集は, 東北大学理学部数学科における 1996 年度の 3 年生前期における演習で出した問題に, 幾つか手を加えることによって作成されたものである. 楕円函数を勉強したいと思う人にはこの問題集を自由に配布しても構わない.

この問題における $h(\alpha, z)$ の定義式は $(1+z)^\alpha$ の $z=0$ における Taylor 展開である. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $(1+z)^\alpha$ は通常 exp と log を用いて定義される ($w^\alpha := e^{\alpha \log w}$). しかし, $h(\alpha, z)$ を考えるだけなら, exp, log は必要ない.

[**2**] $f(z)$ は $z=0$ の近傍における正則函数であり, $f(0)=0$ であると仮定する. 以下を示せ:

(1) $f'(0) \neq 0$ ならば $w=0$ のある近傍における正則函数 $g(w)$ が存在して, $z=0$ のある近傍, $w=0$ のある近傍のそれぞれの上で $g(f(z))=z$, $f(g(w))=w$ が成立する. さらに, この g は $w=0$ のある近傍上で $g'(w)=1/f'(g(w))$ を満たす.

(2) ある $n=1,2,\dots$ と $w=0$ のある近傍における正則函数 $g(w)$ で $g'(0)\neq 0$ をみたすものが存在し, $w=0$ のある近傍上で $f(g(w))=w^n$ が成立する.

(3) ϕ は $\mathbb{C}$ 内の連結開集合 Ω 上の正則函数であるとする. ϕ が定数函数でなければ, ϕ は Ω から $\mathbb{C}$ への開写像であることを示せ. □

ヒント: (1) は多くの複素函数論の教科書に証明が書いてあるはずである (複素正則函数に関する逆写像定理). (2) は (1) とすぐ上の問題から次のようにして示される. $f(z) = az^n(1+\tilde{f}(z))$, $\tilde{f}(0)=0$ と書くことができる. $G(z) = a^{1/n} z h(1/n, \tilde{f}(z))$ に対して, (1) を適用すると, 局所的に G の逆函数 g が存在することがわかる. (3) は $z \mapsto z^n$ ($n=1,2,\dots$) が開写像であることと (1), (2) を使えば簡単に示される.

[**3**] **(exp の加法定理と全射性)** $\mathbb{C}$ 上の正則函数 exp を天下りに

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

と定義することができる. (右辺の級数が $\mathbb{C}$ 上広義一様絶対収束し, $\mathbb{C}$ 上の正則函数を定めることを示せ.) 以下を示せ:

1. exp は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^\times$ へのアーベル群の準同型写像である.
2. exp は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^\times$ への開写像である.
3. exp は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^\times$ への全射である. □

参考 exp が群の準同型であるということは具体的に式で書けば, $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ となる. この公式は exp の加法定理と呼ばれている. 一般に $z+w$ における函数の値と z, w 各々における函数の値の関係式を加法定理と呼ぶ.

ヒント: (1) まず, $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ を示す. よって, $\exp(z)\exp(-z) = 1$ が成立するので $\exp(z) \neq 0$ である. (2) すぐ上の問題を使えば直ちに証明される. 直接証明することも難しくない. 例えば, [数] の上巻の p.156 を見よ. (3) $\exp(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^\times$ の空でない開部分群であることに, 次の問題の結果を適用する.

[**4**] G は連結位相空間でかつ群であり, 群の演算 $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'$ は連続であると仮定する. H が G の空でない開部分群ならば $H = G$ である. □

ヒント: G の連結性と H が G の空でない開集合であることより, H が G の閉集合であることを示せば良い. G の群演算の連続性より, G の任意の開集合 U と $g \in G$ に対して, gU も G の開集合である. H は G の開部分群なので, 特に 1 のある開近傍 U_1 を H は含んでいる. $\overline{H} = H$ を示そう. 任意に $g \in \overline{H}$ を取る. 1 の任意の開近傍 U に対して, $gU \cap H \neq \emptyset$ が成立する. U として U_1 を取ることによって, ある $u_1 \in U_1 \subset H$ が存在して, $gu_1 \in H$ が成立することがわかる. よって, $g \in H$ である. これで, $\overline{H} = H$ が成立することが示された.

参考: G が Hausdorff 位相空間でかつ群であり, 群の演算 $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'$ と逆元を取る操作 $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ が共に連続であるとき, G は位相群であると言う. 例えば, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $GL_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p^\times$, $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ などは位相群である.

[5] f は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり, ある $a, b \in \mathbb{C}$ に対して, $f' = af$, $f(0) = b$ を満たしているとする. このとき, $f(z) = be^{az}$ $(z \in \mathbb{C})$ である. □

ヒント: まず, $(e^{az})' = ae^{az}$ を示す. $g(z) = e^{-az}f(z)$ と置くと, $g' = 0$, $g(0) = b$ が成立する. これより, $g(z) = b$ $(z \in \mathbb{C})$ が出る.

[6] **($\exp$ の性質)** 以下を示せ:

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\exp(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ であり, $\exp(x) > 1$, $\exp(x) = 1$, $\exp(x) < 1$ のそれぞれと $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ は同値である.

(2) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

(3) $|\exp(z)| = 1$ と $z \in i\mathbb{R}$ は同値である.

(4) $y \in \mathbb{R}$, $|y| < \sqrt{6}$ であるとき, $\operatorname{Im}(\exp(iy)) > 0$, $\operatorname{Im}(\exp(iy)) = 0$, $\operatorname{Im}(\exp(iy)) < 0$ のそれぞれと $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$ は同値である. □

ヒント: 以下の方針で証明せよ.

(1) $x > 0$ ならば $\exp$ の巾級数による定義式より $\exp(x) > 1$ であり, さらに $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ より $0 < \exp(-x) < 1$ が出る.

(2) $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2$.

(3) (1), (2) より直ちに導かれる.

(4) 次のような計算による: $y \in \mathbb{R}$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\exp(iy)) &= y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \cdots \\
&= y\left(1 - \frac{1}{2\cdot 3}y^2\right) + \frac{1}{5!}y^5\left(1 - \frac{1}{6\cdot 7}y^2\right) + \cdots .
\end{aligned}
$$

[7] **(π の定義)** 一意的に定まる正の実数 π が存在して, $\operatorname{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$ が成立する. □

ヒント: $K = \mathrm{Ker}(\exp) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1 \,\}$ と置く. 上の問題の (3) より $K \subset i\mathbb{R}$ である. $K \neq \{0\}$ である. なぜなら, もしも $K = \{0\}$ ならば, exp の全射準同型性より exp は群の同型写像になるが, $\mathbb{C}^\times$ は位数 2 の元 -1 を含むが $\mathbb{C}$ は位数 2 の元を含まないので, 矛盾が出るからである. 上の問題の (4) より K は $i\mathbb{R}$ の離散部分群であることがわかる. 以上によって, K は $i\mathbb{R}$ の非自明な離散部分群であることがわかった. 後は次の問題の結果を使えば良い.

[**8**] $\mathbb{R}$ の任意の離散部分群 $G \neq \{0\}$ に対して, 一意的に定まる正の実数 α が存在して, $G = \alpha\mathbb{Z}$ が成立する. □

以下では, $e^z = \exp(z)$ と置き, e^z の方を頻繁に用いる.

[**9**] **(cos と sin の性質)** $\mathbb{C}$ 上の正則函数 cos, sin を天下りに,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

と定義する. 以下を示せ:

(1) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. さらに, $y \in \mathbb{R}$ のとき, $\mathrm{Re}\, e^{iy} = \cos y$, $\mathrm{Im}\, e^{iy} = \sin y$.

(2) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$. 特に, $y \in \mathbb{R}$ に対して, $-1 \leq \cos y \leq 1$, $-1 \leq \sin y \leq 1$.

(3) $\cos(z + w) = \cos z\, \cos w - \sin z\, \sin w, \quad \sin(z + w) = \cos z\, \sin w + \sin z\, \cos w.$

(4) $\cos z \pm \cos w$, $\sin z \pm \sin w$ は $\cos z$, $\cos w$, $\sin z$, $\sin w$ の積の定数倍になる. その公式を求めよ.

(5) $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0 \,\} = \{\, \frac{1}{2}\pi + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \},\quad \{\, z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0 \,\} = \{\, n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \}.$

(6) $\mathbb{C}$ 上の任意の函数 f に対して, f の周期 (period) の全体の集合 $\mathrm{Per}(f)$ を次のように定義する:

$$\mathrm{Per}(f) := \{\, \omega \in \mathbb{C} \mid f(z + \omega) = f(z) \ \text{ for all } z \in \mathbb{C}. \}.$$

このとき, $\mathrm{Per}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$, $\mathrm{Per}(\cos) = \mathrm{Per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}$.

(7) $0 < y < \pi$ に対して $\sin y > 0$.

(8) $e^{\pi i/2} = i, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z.$ □

ヒント: (1), (2), (3), (4) は exp の性質と cos, sin の定義から簡単な計算で導かれる. 他は以下のヒントをもとに証明せよ:

(5) $e^{\pi i} = -1$ より, $2\cos z = e^{iz} - e^{-i(z-\pi)} = e^{-i(z-\pi)}(e^{i(2z-\pi)} - 1)$. $2i \sin z = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$.

(6) (4) を使う.

(7) 問題 [**6**] の (4) より, $0 < y < \sqrt{6}$ のとき $\sin y > 0$ である. (4) より $\pi \geq \sqrt{6}$ であり $\sin y$ は $0 < y < \pi$ で 0 にならない. この 2 つの結果と sin は $\mathbb{R}$ 上実数値連続函数であることより, 中間値の定理を用いて (7) が示される.

(8) $-1 = (e^{\pi i/2})^2 = (i\sin(\pi/2))^2$ より $e^{\pi i/2} = \pm i$, $\sin(\pi/2) = \pm 1$ である. $\pm$ の部分が $+$ でなければいけないことが (7) より示される.

[**10**] $S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ と置く. S^1 は乗法に関してアーベル群をなす. 写像 $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(t) = e^{it}$ と定める. f は連続な群の全射準同型であり, $\operatorname{Ker} f = 2\pi\mathbb{Z}$ である. f は商空間 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ から S^1 への同相写像を誘導する. □

ヒント: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ の全射性と問題 [**6**] (3) より f が全射であることが出る. $\operatorname{Ker} f$ は $\operatorname{Ker}(\exp)$ に関する結果から計算される. f が誘導する写像 $\phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$ は連続な全単射である. この逆写像もまた連続であることが次の問題の結果を使うと導かれる.

[**11**] X はコンパクト位相空間であり, Y は Hausdorff 空間であるとし, $f : X \to Y$ は連続写像であるとする. このとき, f は閉写像である. さらに, f が全射ならば f は開写像である. □

ヒント: コンパクト位相空間 X の閉部分集合はコンパクトであり, Hausdorff 空間 Y のコンパクト部分空間は Y の閉部分集合になる.

[**12**] $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ が誘導する $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}^\times$ への写像を ϵ と書くことにする. $\epsilon : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ は同相写像でかつ群の同型写像である. □

ヒント: 問題 [**10**] と同様にすれば良いのだが, ϵ が開写像であることを直接示さなければいけない.

[**13**] 滑らかな曲線の長さの定義を述べ, 半径 r の円周の長さが $2\pi r$ に等しいことを示せ. さらに, 半径 r の円周で囲まれた領域の面積が πr^2 に等しいことを示せ. □

以上によって, 指数函数, 三角函数, 円周率の理論が厳密に再構成された. もちろん, 出てくる結果はどれも皆よく知っているものばかりであろうが, 上のような議論の展開の仕方を知っておくことは, まだ皆よく知らないであろう楕円函数の理論の構成を理解するために役に立つ. 楕円函数の理論は楕円積分の理論から出発するのが, ある意味で自然である. 楕円積分の指数函数論における類似物は対数函数になる. 以下では対数函数の理論を扱うことにしよう. 注目するべき点は $\mathbb{C}^\times$ 上の正則函数の線積分の理論を整備する過程で自然に対数函数 (指数函数の逆函数) が現われることである. これは, 楕円積分が楕円函数の逆函数であることの, 指数函数の場合における類似である.

以下の問題を解くときには, 指数函数, 三角函数, 円周率に関する基本的な結果を既知と考えて良いが, 対数函数に関する基本的な結果を既知とみなしてはいけない. また, 次の形の Cauchy の積分定理を自由に用いて良い.

定理 1.1 (Cauchy の積分定理) Ω は $\mathbb{C}$ 内の開集合であり, f は Ω 上の正則函数であるとする. $z, w \in \Omega$ であり, C_i $(i = 0, 1)$ は z を始点とし w を終点とする Ω 内の曲線で有限な長さを持つものであるとする. C_0 は始点と終点を固定した Ω 内の連続変形によって C_1 に変形できると仮定する. このとき,

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$$

が成立する. すなわち, 正則函数の線積分は積分曲線のホモトピー類のみによる. □

前と同様に $S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ と置く．S^1 に沿った複素函数の線積分は

$$\int_{S^1} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, de^{it} = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, ie^{it}\, dt$$

によって定義しておく．

[14] $X = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ と置き, X 上の正則函数全体のなす可換環を $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ と表わす．線型写像 $d : \mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \mathcal{O}(\mathcal{X}) \lceil\ddagger$ を $df(z) = f'(z)\, dz$ 定め, d の核と余核をそれぞれ $H^0(X, \mathbb{C})$, $H(X, \mathbb{C})$ と書くことにする．$\theta = f\, dz \in \mathcal{O}(\mathcal{X}) \lceil\ddagger$ の $H^1(X, \mathbb{C})$ における像を $[\theta]$ と書くことにする．このとき, 以下が成立することを示せ:

1. $H^0(X, \mathbb{C}) = \{X$ 上の定数函数全体$\} \simeq \mathbb{C}$.
2. 円周 S^1 に沿った線積分は線型写像 $\int_{S^1} : \mathcal{O}(\mathcal{X}) \lceil\ddagger \to \mathbb{C}$ を定める．$\int_{S^1}$ は同型写像 $H^1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を誘導する．特に, $\omega = dz/z$ と置くと, $H^1(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\omega]$.　□

ヒント: Laurent 展開.

[15] $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}^\times$ であるとし, γ は a から b への $\mathbb{C}^\times$ 内の任意の path であるとする．このとき,

$$\int_\gamma z^{n-1}\, dz = \frac{b^n - a^n}{n}.$$

特に左辺の線積分の値は path γ の取り方によらない．　□

以下では, この問題では除外された $z^{-1}\, dz$ の線積分を扱うことにしよう．

[16] $\Omega = \mathbb{C}^\times - \mathbb{R}_{<0}$ と置く．$1 \in \Omega$ から $z \in \Omega$ への Ω 内の path $\gamma(z)$ を任意に取り,

$$\operatorname{Log} z := \int_{\gamma(z)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

と置く．以下を示せ:

1. Log の定義式の右辺の積分の値は $\gamma(z)$ の取り方によらない．
2. Log は Ω 上の正則函数であり, $(\operatorname{Log} z)' = 1/z$, $\operatorname{Log}(1) = 0$ を満たしている．
3. $-\operatorname{Log}(1-t) = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{k} = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots \quad (|t| < 1)$.
4. $z \in \exp^{-1}(\Omega)$, $w \in \Omega$ に対して, $\operatorname{Log}(\exp z) = z$, $\exp(\operatorname{Log} w) = w$.　□

ヒント: $f(z) = \operatorname{Log}(\exp z)$ と置くと $f'(z) = 1$, $f(0) = 0$ であることが合成函数の微分法則 (chain rule) より導かれるので $f(z) = z$ である．$g(w) = \exp(\operatorname{Log} w)$ も同様にして w に等しいことが証明される．

[17] $1 \in \mathbb{C}^\times$ から $z \in \mathbb{C}^\times$ への $\mathbb{C}^\times$ 内の path $\gamma(z)$ を任意に取り,

$$\log z := \int_{\gamma(z)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

と置く．以下を示せ:

(1) log の定義式の右辺の積分の値は $\gamma(z)$ の取り方によるが, $2\pi i$ の整数倍の差を無視すれば $\gamma(z)$ の取り方によらない. すなわち, log は $\mathbb{C}^\times$ から $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ への写像を誘導する. この写像を λ と書くことにする.

(2) $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}^\times$ に対して, $\exp(\log w) = w$, $\log(\exp z) \in z + 2\pi i\mathbb{Z}$.

(3) $\lambda : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ は同相写像でかつ群の同型写像である. □

ヒント: (3) の証明には問題 **[12]** の結果を用いよ.

[18] **(有理式と三角函数の有理式の不定積分)** 複素係数の 1 変数有理式 $f(z)$ の不定積分は有理式と $\alpha \log(z-\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ の形の多価函数の有限和で表わされることを示せ. さらに, $G(X,Y)$ は複素係数の 2 変数有理式であるとする. このとき, $g(\theta) = G(\cos\theta, \sin\theta)$ (θ は複素変数と考える) と置くと, $g(\theta)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数である. $g(\theta)$ の不定積分を求める計算は, 積分変数の変換 $z = e^{i\theta}$ によって, 原理的には z の有理式の不定積分を求める計算の帰着できることを説明せよ. □

ヒント: まず, 有理式 $f(z)$ は $a(z-b)^n$ $(a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$ の形の函数の有限和で表わされることを示せ. この問題の後半の考え方を利用して定積分を求める問題がすでに出してある. そちらの方も解いてみよ.

楕円積分の理論とは上の問題の結果と類似の結果を楕円函数の不定積分の場合に得ようとする試みである.

2 楕円函数の定義と基本性質

楕円函数をどのように導入するかどうか色々悩んだのであるが, ここでは, 少々天下り的であるが 2 重周期函数として導入することにする. 基本的に [HC] の線に沿って議論を進める.

[19] M は $\mathbb{C}$ の任意の離散部分加群[2]であると仮定する. このとき, 以下のどれかが成立する:

(0) $M = \{0\}$.

(1) ある $\omega_1 \in \mathbb{C}$ で $\omega_1 \neq 0$, $M = \mathbb{Z}\omega_1$ を満たすものが存在する.

(2) $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ で $M = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ を満たすものが存在する. □

上の問題を解いた人はついでにすぐ下の問題も解いてしまうのが良いと思う.

[20] M は $\mathbb{R}^n$ の任意の離散部分加群[3]であると仮定する. このとき, $0 \leq r \leq n$ を満たすある整数 r と $v_1, \dots, v_r \in M$ で以下を満たすものが存在することを示せ:

1. $v_1, \dots, v_r$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である.

[2] $\mathbb{C}$ の離散部分集合で部分加群になっているようなものを, $\mathbb{C}$ の離散部分加群と呼ぶ.
[3] $\mathbb{R}^n$ の離散部分集合で部分加群になっているようなものを, $\mathbb{R}^n$ の離散部分加群と呼ぶ.

2. M は $v_1, \dots, v_r$ から加群として生成される. □

ヒント: n に関する帰納法.

定義 2.1 (複素平面上の有理型函数の周期の定義) $\omega \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f の 1 つの周期であるとは

$$f(z+\omega) = f(z) \qquad (z \text{ は } f \text{ の極以外の任意の複素数})$$

が成立していることであると定義する. f の周期全体の集合を $\mathrm{Per}(f)$ と書くことにする:

$$\mathrm{Per}(f) := \{\, \omega \in \mathbb{C} \mid f(z+\omega) = f(z) \ \ (z \text{ は } f \text{ の極以外の任意の複素数}) \,\} \quad \square$$

[**21**] f は $\mathbb{C}$ 上の定数でない任意の有理型函数であるとする. このとき, f の周期全体の集合 $\mathrm{Per}(f)$ は $\mathbb{C}$ の離散部分群になることを示せ. □

問題 [**19**], [**21**] より, 定数でない有理型函数 f に対して, f の周期全体 $M = \mathrm{Per}(f)$ は問題 [**19**] の (0), (1), (2) のどれかの形になる. (1) が成立するとき f は単周期函数であると言い, (2) が成立するとき f は 2 重周期函数であると言う.

[**22**] $\omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0$ であるとし, f は $\mathbb{C}$ 上の周期 ω を持つ正則函数であるとする. このとき, f は次の形の広義一様収束する級数に一意的に展開されることを示せ:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp\left(\frac{2\pi i n z}{\omega}\right) \qquad (a_n \in \mathbb{C}) \quad \square$$

ヒント: Laurent 展開.

この問題によって単周期正則函数は Fourier 級数で表わされることが示されたことになる.

定義 2.2 (楕円函数の定義) $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であると仮定する. $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f が任意の $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$f(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(u) \qquad (u \text{ は } f \text{ の極以外の任意の複素数})$$

を満たすとき, f は周期 ω_1, ω_2 を持つ楕円函数 (elliptic function) であると言う. □

注意: この天下りの定義の時点では定数以外の楕円函数が存在するかどうかは明らかではない. あとで, $\wp$ 函数を (これもまた天下りに) 定義することよって, 定数以外の楕円函数が存在することを証明する. 周期を固定するとき, その周期を持つ任意の楕円函数は $\wp$ およびその導函数 $\wp'$ の有理式で表わすことができることを示すことができる. (後で問題に出す.)

[**23**] $\mathbb{C}$ 上全体で正則な楕円函数は定数函数に限ることを示せ. □

ヒント: 最大値の原理の応用.

参考: より一般にコンパクト Riemann 面上の正則函数は定数に限られることが同様にして示される. よって, コンパクト Riemann 面上で意味のある正則函数論を展開するためには, 有理型函数を考えたり, 一般の開集合上定義された正則函数も含めて考えたりする必要がある. 後者の任意の開集合上の正則函数を考えるというアイデアを抽象化すると層 (sheaf) という概念が得られる. 層は大変基本的で自然な対象であり, 多くの場面に表われる.

[24] f, g は共に周期 ω_1, ω_2 を持つ 0 でない楕円函数であるとし, f と g の零点集合と極の集合は一致していて, 各点における零点の位数と極の位数が一致していると仮定する. このとき, f/g は定数になる. □

[25] $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であると仮定する. 周期 ω_1, ω_2 を持つ楕円函数全体の集合を K と書くことにする. 以下を示せ:

(1) 自然に $\mathbb{C} \subset K$ とみなせる.

(2) K は自然に体をなす.

(3) 任意の $f \in K$ に対して $f' \in K$. (ここで $f'(u) = \frac{d}{du} f(u)$.)

(4) 任意の $u_0 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\Xi(u_0) = \{\, u_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \le t_i < 1 \ (i = 1, 2) \,\}$$

と置く. $\Xi(u_0)$ を**周期平行四辺形**と呼ぶ. 任意の $f \in K$ に対して $\Xi(u_0)$ に含まれる f の極と零点の個数は有限個である. さらに, $u_0 \in \mathbb{C}$ をうまくとると $\Xi(u_0)$ の境界上に f の極も零点も存在しないようにできる. □

解説: 楕円函数 f に対して, 境界線上に f の極も零点も存在しないような周期平行四辺形は頻繁に使われる. なぜなら, 周期平行四辺形の境界上の周回複素積分を考えることは楕円函数論の最も基本的なテクニックだからである. 次の結果が基本的である.

[26] (留数定理) 任意の楕円函数 f に対して, 周期平行四辺形に属する f の極の留数の総和は零になる. □

ヒント: 周期平行四辺形の周囲に沿って $f(u)\,du$ を線積分してみよ.

参考: より一般に上の問題と同様の結果が任意のコンパクト Riemann 面においても成立する.

定義 2.3 (楕円函数の位数の定義) f が楕円函数であるとき, 周期平行四辺形に属する f の極の位数の総和を f の位数 (order) と呼ぶ. □

[27] 位数 1 の楕円函数が存在しないことを示せ. □

ヒント: 問題 **[26]** を使えば直ちに証明される. (後で位数 2 の楕円函数 $\wp$ を構成する.)

復習: f は $a \in \mathbb{C}$ の近傍上の 0 でない有理型函数であるとする. f が a の近くで

$$f(u) = c_n(u-a)^n + c_{n+1}(u-a)^{n+1} + \cdots, \qquad c_n \ne 0$$

と Laurent 展開されるとき, 以下が成立する:

$$\operatorname*{Res}_{u=a}(d\log f) = \operatorname*{Res}_{u=a} \frac{df}{f} = \operatorname*{Res}_{u=a} \frac{f'(u)\,du}{f(u)} = n,$$
$$\operatorname*{Res}_{u=a}(u\,d\log f) = \operatorname*{Res}_{u=a} \frac{u\,df}{f} = \operatorname*{Res}_{u=a} \frac{u\,f'(u)\,du}{f(u)} = na.$$

この前者の式は f の零点の位数および極の位数が留数で書かることを意味し, 後者の式は (零点の位数) $\times$ (零点の位置) および (極の位数) $\times$ (極の位置) も留数で書けることを意味している. この公式と問題 **[26]** を合わせることによって, 以下の結果が簡単に示される.

[28] f は定数でない位数 r の楕円函数 (elliptic function of order r) であるとし, c は任意の複素数であるとする. このとき, f は周期平行四辺形上で値 c を重複を込めてちょうど r 回とる. □

ヒント: $f(a) = c$ であり $f(u) - c$ の点 $u = a$ における零点の位数が k のとき, f は点 a において値 c の重複度は k であると定義する. $d\log(f(u) - c)$ に問題 **[26]** の結果を適用せよ.

M は $\mathbb{C}$ の部分加群であるとする. $u, v \in \mathbb{C}$ に対して $u \equiv v \mod M$ であるとは, $u - v \in M$ が成立することであると定義する.

[29] f は定数でない周期 ω_1, ω_2 を持つ位数 r の楕円函数であるとし, c は任意の複素数であるとする. 周期平行四辺形上の f が値 c を取る点の全体を重複を込めて $a_1, \dots, a_r$ と書き, 極の全体を重複を込めて $b_1, \dots, b_r$ と書くことにする. このとき, 次が成立する:

$$a_1 + \cdots + a_r \equiv b_1 + \cdots + b_r \mod \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2. \quad \square$$

ヒント: $F(u)\,du := d\log(f(u) - c)$ と置く. $u\,d\log(f(u) - c) = uF(u)\,du$ を周期平行四辺形 $\Xi = \Xi(u_0)$ の周囲に沿って線積分してみる. ただし, Ξ の周囲には $d\log(f(u) - c)$ の零点も極も乗っていないものとする. すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Xi} uF(u)\,du = \sum_{a\in\Xi} \operatorname*{Res}_{u=a}(u\,d\log(f(u) - c)) = (a_1 + \cdots + a_r) - (b_1 + \cdots + b_r).$$

一方, $F(u)$ が楕円函数であることに注意し, 積分を直接計算すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Xi} uF(u)\,du = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{u_0}^{u_0+\omega_2} F(u)\,du\right)\omega_1 - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{u_0}^{u_0+\omega_1} F(u)\,du\right)\omega_2.$$

ところが, $F(u)\,du = d\log(f(u) - c)$ であり, $f(u)$ が楕円函数であることに注意すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{u_0}^{u_0+\omega_k} F(u)\,du \equiv \frac{\log(f(u_0 + \omega_k) - c) - \log(f(u_0) - c)}{2\pi i} \equiv 0 \mod \mathbb{Z}$$

である. 以上をまとめると,

$$(a_1 + \cdots + a_r) - (b_1 + \cdots + b_r) \equiv 0 \mod \Omega$$

であることがわかる.

注意: 以上の 4 つの問題の結果は極めて基本的であり重要である.

[30] (Abel の定理の easy part) $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, それらに関する任意の周期平行四辺形 Ξ を固定する. 周期 ω_1, ω_2 を持つ楕円函数全体のなす体を K と書くことにする. 単なる点集合とみなした Ξ から生成される自由加群を Div と表わし, Div の元を divisor と呼ぶことにする. Div は定義より形式的有限和 $D = \sum n_i p_i$ ($p_i \in \Xi$, $n_i \in \mathbb{Z}$) の全体のなすアーベル群である. $\deg D := \sum n_i \in \mathbb{Z}$ と置き, これを D の degree と呼ぶ. D を実際に $\mathbb{C}$ の中での和とみなしたものを $\int^D \in \mathbb{C}$ と書くことにする. すなわ

ち, $D = \sum n_i p_i \in \mathrm{Div}$ (形式的有限和) に対して, $\int^D := \sum n_i p_i \in \mathbb{C}$ (複素数としての和) と置く. $f \in K^\times$ に対して $\operatorname{div} f \in \mathrm{Div}$ を次のように定める:

$$\operatorname{div} f := \sum_{p \in \Xi} (\operatorname{ord}_p f) p$$

ここで, $\operatorname{ord}_p f$ は f の p における零点の位数である. (p が f の位数 k の極であるとき $\operatorname{ord}_p f = -k$ であると約束する.) このとき, $\deg : \mathrm{Div} \to \mathbb{Z}$, $\operatorname{div} : K^\times \to \mathrm{Div}$ は共に群の準同型写像であり, $\deg : \mathrm{Div} \to \mathbb{Z}$ の kernel を Div_0 と書くとき,

$$\operatorname{div}(K^\times) \subset \{\, D \in \mathrm{Div}_0 \mid \textstyle\int^D \equiv 0 \mod \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \,\}$$

が成立する. □

ヒント: 上の問題の言い変え.

参考: $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ に対して, アーベル群 E を $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ と定義することができる. さらに, E にはコンパクト Riemann 面の構造が入るのだが, Riemann 面の定義は後でやることにし, ここでは説明しない. 楕円函数とは E 上の有理型函数のことであると定義することもできる. なぜなら, 2 重周期函数を考えることと, E 上の函数を考えることは等しいからである. 実は上の問題における Div は E 上の divisor 全体のなす群であるとみなせる. $\operatorname{div}(K^\times)$ の元を principal divisor と呼ぶ. 商アーベル群 $\mathrm{Div}/\operatorname{div}(K^\times)$ は E 上の line bundle の同型類のなすアーベル群に自然に同型であることが知られている. (詳しい内容は [Gun] などを見よ.) 実は上の問題の結果における $\subset$ は実は $=$ に置き換えられる. これを (楕円函数に関する)Abel の定理と言う. より一般に Abel の定理は一般のコンパクト Riemann 面に対して定式化され, Riemann-Roch の定理と共にコンパクト Riemann 面に関する基本定理の 1 つになっている. 言葉の定義もせずに一見難しげなことを述べているようだが, まあ実際にはそんなに難しいことではない. 言葉の定義を知らなくても, この辺のことは (代数) 幾何学的な言葉を使って奇麗に一般化されているということのみを知っておいて欲しいと思い, ごちゃごちゃと書いてみたのである.

3 Weierstrass の $\wp$ 函数

前節では楕円函数を 2 重周期有理型函数と定義したが, 一般的な性質のみを示しただけで, まだ定数でない楕円函数が存在することは証明されてない. 問題 [**23**] の結果により, 位数 0 の楕円函数 (すなわち複素平面全体で正則な楕円函数) は定数しか存在しない. 問題 [**27**] の結果により, 位数 1 の楕円函数は存在しない. この節では位数 2 の楕円函数で最も基本的な $\wp$ 函数を構成し, その性質を調べることにしよう.

この節においては, $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を固定し,

$$\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

と置き, ω_1, ω_2 を周期として持つ楕円函数の全体を K と書くことにする.

[31] **($\wp$ 函数の定義)** 次の無限級数は Ω の外で広義一様収束し, ω_1, ω_2 を周期として持つ位数 2 の楕円函数与える:

$$\wp(u) := \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

この楕円函数を Weierstrass の $\wp$ 函数と呼ぶ. □

[32] **(原点での Laurent 展開)** 原点において, Weierstrass の $\wp$ 函数が以下の形の Laurent 展開を持つことを示せ:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^4 + c_6 u^6 + \cdots .$$

ここで,

$$c_n = (n+1) \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \omega^{-n-2} \quad \square$$

ヒント: $\wp$ 函数は隅函数なので奇数巾の項は消える. 形式的には次の 2 項展開の公式を使えば簡単に示せる:

$$(u-\omega)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} u^n (-\omega)^{-2-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \omega^{-n-2} u^n \qquad (|\omega| > |u|).$$

[33] 任意の $u, v \in \mathbb{C} - \Omega$ に対して, $\wp(u) = \wp(v)$ が成立するための必要十分条件は,

$$u \equiv \pm v \mod \Omega$$

が成立することである. □

ヒント: 十分性は $\wp$ が楕円函数であることと, 隅函数であることより簡単にわかる. 問題は必要性の証明であるが, そのためには問題 **[29]** の結果を $\wp$ 函数に適用すれば良い.

[34] $\Omega \subset \frac{1}{2}\Omega := \{\, \frac{1}{2}\omega \mid \omega \in \Omega \,\}$ である. 以下を示せ:

1. $c \in \mathbb{C} - \Omega$ に対して, $\wp'(c) = 0$ となるための必要十分条件は $c \in \frac{1}{2}\Omega - \Omega$ が成立することである. さらに, $\wp'(u)$ の全ての零点の位数は 1 である.
2. Ω 上で楕円函数 $f(u) = \wp(u)^{-1}$ は正則であり, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $f'(\omega) = 0$. □

ヒント: $c \in \mathbb{C} - \Omega$ とする. $\wp'(c) = 0$ が成立するための必要十分条件は $g(u) := \wp(u) - \wp(c)$ の点 c における零点の位数が 2 以上であることである. ところが, 問題 **[33]** (もしくはより直接的に問題 **[29]**) の結果より, そのための必要十分条件は $2c \in \Omega$ が成立することであることがわかる.

定義 3.1 この演習においては [HC] に従い, e_1, e_2, e_3 を次のように定める:

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right). \quad \square$$

[35] ($\wp$ 函数の満たす微分方程式 1) $\wp$ 函数が次の微分方程式を満足することを示せ:

$$\wp'(u)^2 = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3). \quad \square$$

ヒント: $f(u) = \wp'(u)^2$, $g(u) = (\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3)$ と置くと, 問題 [**34**] の結果より, $f(u)$, $g(u)$ の極と零点は重複度も込めて列挙すると共に

$$\text{極: } 0,0,0,0,0,0 \qquad \text{零点: } \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}.$$

よって, 問題 [**24**] の結果を使うと f/g は定数になることがわかる. 後は原点における Laurent 展開の最初の項の係数を調べれば, $f/g = 4$ であることがわかる.

[36] ($\wp$ 函数の満たす微分方程式 2) $\wp$ 函数が次の微分方程式を満足することを示せ:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

ただし, 問題 [**32**] の記号のもとで,

$$g_2 = 20c_2, \qquad g_3 = 28c_4. \quad \square$$

ヒント: $\wp'^2 - (4\wp^3 - 20c_2\wp - 28c_4)$ の原点における Laurent 展開を調べ, 問題 [**23**] の結果 (正則な楕円函数は定数に限るという結果) を用いよ.

注意: 根と係数の関係より,

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{1}{4}g_2, \qquad e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3$$

が成立することわかる.

定義 3.2 (判別式) 3 次方程式

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 0$$

の判別式 Δ を次の式によって定義する:

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2.$$

上の 3 次方程式が重根を持つことと $\Delta = 0$ が成立することは同値である. $\square$

注意: 簡単な計算で

$$\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2$$

が成立することわかる.

[37] $\wp$ 函数の満たす微分方程式を用いて, $\wp$ 函数の原点における Laurent 展開の係数 c_n (問題 [**32**] におけるもの) は g_2, g_3 の正の有理数を係数にもつ多項式で表わされることを示せ. $\square$

[38] (加法公式 1) $\wp$ 函数とその導函数 $\wp'$ は次の等式を満たす:

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{if } u+v+w \in \Omega. \quad \square$$

ヒント: $u+v+w \in \Omega$ を満たす $u, v, w \in \mathbb{C} - \Omega$ を任意に固定する. 問題 [**33**] の結果より, $\wp(u) = \wp(v)$ が成立することと $u \equiv \pm v \mod \Omega$ が成立することは同値であり, $\wp$ は偶函数なので, 等式 $(*)$ は常に成立することがわかる. そこで, $\wp(u) \neq \wp(v)$ と仮定する. このとき, 複素数 a, b に関する方程式

$$a\wp(u) + b = \wp'(u), \qquad a\wp(v) + b = \wp'(v)$$

の解が一意的に存在する. その解を以下 a, b と書くことにしよう. このとき, z の楕円函数 $f(z)$ を

$$f(z) = \wp'(z) - a\wp(z) - b$$

と定めると, $f(u) = f(v) = 0$ が成立する. $(*)$ を証明するためには, u, v, w が同一の周期平行四辺形 Ξ の上にあると仮定して良いので, 以下ではそう仮定する. f は位数 3 の楕円函数なので周期平行四辺形上の零点は重複を込めてちょうど 3 個ある. すでに, u, v の 2 つの零点が得られているので, 残る 1 つの Ξ 上の零点を w' と書くことにする. ところが, 問題 [**29**] の結果より $u + v + w' \in \Omega$ が成立する. よって, $w = w'$, $f(w) = 0$ である. $f(u) = f(v) = f(w) = 0$ より, 等式 $(*)$ が導かれる.

[39] (加法公式 2) $\wp$ 函数とその導函数 $\wp'$ は次の等式を満たす:

$$(**) \qquad \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2.$$

さらに, $P = \wp(u)$, $Q = \wp(v)$, $R = \wp(u+v)$ と置くと次が成立する:

$$(***) \qquad (P+Q+R)(4PQR - g_3) = \left(PQ + PR + QR + \frac{g_2}{4}\right)^2. \quad \square$$

ヒント: 問題 [**38**] のヒントの続き. $\wp$ は偶函数なので $R = \wp(w)$. a, b の定義より,

$$a = \frac{P' - Q'}{P - Q}, \qquad b = \frac{PQ' - QP'}{P - Q}.$$

$\wp$ の満たす微分方程式に $\wp'(z) = a\wp(z) + b(z)$ $(z = u, v, w)$ を代入することによって, P, Q, R は次の代数方程式の解になることがわかる:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax+b)^2 = 0.$$

よって, 根と係数の関係より,

$$P + Q + R = \frac{a^2}{4}, \qquad PQ + PR + QR = -\frac{ab}{2} - \frac{g_2}{4}, \qquad PQR = \frac{b^2 + g_3}{4}.$$

以上で示された公式を用いると容易に $(**)$, $(***)$ が示される.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置き, $\wp$ は Ω を周期格子とする Weierstrass の $\wp$ 函数であるとする.

[40] (**$\wp$ 函数の周期性と極による特徴付け**) 以下の 3 つの条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f の全体の集合を V と書くことにする:

(∗) f は u の有理型函数として $f(u+\omega) = f(u)$ ($\omega \in \Omega$) を満たし, f の全ての極は Ω に含まれ, f の各極の位数は高々 2 である.

このとき, $V = \mathbb{C}\wp + \mathbb{C}1$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ である. □

ヒント: 問題 [**23**], [**27**] の合わせれば簡単に示される.

参考: 上の問題の結果は, 有理型函数の周期と極に関する条件 (∗) によって, $\wp$ 函数が定数倍と定数差を除いて特徴付けられることを意味している. 周期と極に関する条件によって函数を特徴付けるという考え方は, 一般のコンパクト Riemann 面上の函数にも拡張され, その考え方を抽象化すると, Riemann 面上の line bundle, invertible sheaf, divisor などの話になる. その理論において最も基本的で重要なのが Riemann-Roch の定理である. Riemann 面の定義などもしてないので, 単に keywords だけを出して, 後は逃げることにする. 詳しい話は名著 [岩澤] もしくは特色あるコンパクト Riemann 面の教科書 [Gun] を見て欲しい. 特殊で便利な函数を適当な条件によって有限次元の不定性を除いて特徴付けるというアイデアは非常に頻繁に使われる手法である. 上のように周期性と極に関する条件を使うだけでなく, 微分方程式や函数方程式などもよく使われる.

[41] (**$\wp$ 函数の微分方程式による特徴付け**) $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f が $\wp$ 函数と同じ微分方程式

$$f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3 \tag{∗}$$

を満たしているならば, ある定数 u_0 が存在して, $f(u) = \wp(u - u_0)$ が成立する. □

ヒント: (∗) より f は定数ではないので, $f'(a) \neq 0$ となる点 a が存在する. $\wp(b) = f(a) =: x_0$ を満たす b を 1 つ選んでおく. 必要ならば a の位置を少しずらすことによって, $\wp'(b) \neq 0$ であると仮定して良い. このとき, a のある近傍上への f の制限は x_0 のある近傍上で定義された逆函数 h を持つ. 同様に, b のある近傍上への $\wp$ の制限は x_0 のある近傍上で定義された逆函数 ϕ を持つ. 逆函数の導函数は $h(x) = f'(h(x))^{-1}$ と計算できるので, x_0 の近傍で h は次の微分方程式を満足する:

$$h'(x)^2 = \frac{1}{4x^3 - g_2 x - g_3}.$$

よって, $h(x)$ は x_0 を含む開円板上で次のように表わされる:

$$h(x) = a + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

同様にして, $\phi(x)$ は同じ開円板上で次のように表わされる:

$$\phi(x) = b + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

平方根の取り方は ± 1 倍の不定性があることに注意すると, x_0 を含む開円板上で次が成立していることがわかる:

$$\phi(x) = \pm(h(x) - a) + b = \pm(h(x) - u_0) \qquad (u_0 := a \mp b)$$

よって, a の近傍において,

$$f(u) = \wp(\phi(f(u))) = \wp(\pm(h(f(u)) - u_0)) = \wp(\pm(u - u_0)) = \wp(u - u_0)$$

が成立する. 一致の定理より, この等式は $\mathbb{C}$ 上の等式に拡張される.

参考: 上のヒントはほとんど完全な解答になっている. その途中で微分方程式 $(*)$ を満たす有理型函数は次の型の楕円不定積分の逆函数になっていることも同時に示されている:

$$y = \int^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

(この楕円積分を第 1 種楕円積分の Weierstrass の標準形と呼ぶ.) 歴史的には, むしろ楕円函数よりも先に楕円不定積分の方が先に登場し, その逆函数を考えるというアイデアにより大きく飛躍したのである. この演習では, 証明が短くなることの方を重視し, $\wp$ 函数のようなものがどのような経緯で考えられたかについては全く触れずに, 天下りの定義を与えるところから出発したのである.

参考: 指数函数・対数函数の理論と楕円函数・楕円不定積分の理論を比べると, 次のような類似の関係になっていることがわかる:

リーマン面	$\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$	リーマン面	$E = \mathbb{C}/\Omega$
指数函数	$\exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$	$\wp$ 函数	$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$
対数函数	$\log(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$	楕円不定積分	$y = \int^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$

さて, 以下においては周期格子 Ω に対する楕円函数体を K と書くことにする. 目標は K の構造を $\wp$ 函数を用いて決定することである.

[42] $\wp', 1, \wp, \wp^2, \wp^3, \dots$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である. 特に, 任意の複素係数多項式 $F \in \mathbb{C}[X]$ に対して, $F \neq 0$ ならば $F(\wp) \neq 0$ である. □

ヒント: 原点における☆ー☆☆展☆を調べよ.

よって, $\wp$ と $\mathbb{C}$ から生成される楕円函数体 K の部分体は X に $\wp$ を対応させることによって, 有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ に同型である.

[43] 定数でない任意の楕円函数 $f \in K$ に対して, $f - c$ の全ての零点の位数が 1 になるような $c \in \mathbb{C}$ の全体の集合は $\mathbb{C}$ の空でない開集合になる. □

[44] 楕円函数 $f \in K$ が偶函数ならばある有理式 $F(X) \in \mathbb{C}(X)$ で $f = F(\wp)$ を満たすものが唯一存在する. □

ヒント: 唯一性は問題 **[42]** の結果より簡単に示される. 存在の方は以下のようにして示される. f が定数ならば簡単であるから, f は定数ではないと仮定する. このとき, 問題 **[43]** の結果により, 互いに異なる定数 c, d で $f - c$ と $f - d$ の全ての零点の位数が 1 になるものが存在する. a が $f - c$ の零点であるとき, f は偶関数なので, $-a$ も $f - c$ の零

点であり, $a \not\equiv -a \mod \Omega$ である. なぜなら, $a \equiv -a \mod \Omega$ ならば $f'(a) = 0$ なることがわかり仮定に矛盾するからある. よって, $f - c$ の零点の $\mathrm{mod}\,\Omega$ に関する完全代表系として, $\{u_1, -u_1, \dots, u_k, -u_k\}$ の形の集合が取れる. $2k$ は f の楕円函数としての位数に等しい. 同様にして, $f - d$ の零点の完全代表系として, $v_1, \dots, v_k, -v_1, \dots, -v_k$ の形の集合が取れる. このとき, 次の 2 つの楕円函数は位数も含めて同じ極と零点を持つ:

$$P(u) = \frac{f(u) - c}{f(u) - d}, \qquad Q(u) = \frac{(\wp(u) - \wp(u_1)) \cdots (\wp(u) - \wp(u_k))}{(\wp(u) - \wp(v_1)) \cdots (\wp(u) - \wp(v_k))}.$$

よって, ある定数 C が存在して $P = CQ$. このことより, 求める結果が得られる.

以上によって, 次が成立することがわかった:

$$\{\text{偶楕円函数}\} = \mathbb{C}(\wp) \simeq \mathbb{C}(X) = (\text{有理函数体}).$$

[45] 任意の楕円函数 $f \in K$ に対して, 有理式 $F, G \in \mathbb{C}(X)$ で $f = F(\wp) + G(\wp)\wp'$ を満たすものが唯一存在する. □

ヒント: 奇楕円函数 f に対して $f/\wp'$ は偶楕円函数である. 任意の楕円函数は偶楕円函数と奇楕円函数の和で一意的に表わされる.

参考: 一般に, 体 L' が体 L を含んでいるとき, L' は L の拡大体であると言う. L' が L 上のベクトル空間として有限次元であるとき, L' は L の代数拡大もしくは有限次拡大であると言い,

$$[L' : L] := \dim_L L'$$

と書き, これを拡大 L'/L の次数と呼ぶ. 体 k 上の有理函数体 $k(X)$ の有限次拡大体は k 上の (1 変数) 代数函数体 (algebraic function field) と呼ばれ, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体は代数体 (algebraic number field) と呼ばれている. 以下, 簡単のため L の標数は 0 であると仮定する. L' が L の有限次 Galois 拡大であるとは, ある多項式 $F \in L[Y]$ が存在して L' が L と F の全ての根から生成されることであると定義する. そのとき, F の次数が n であるとき $[L', L] = n$ となる. 問題 **[45]** より, 楕円函数体 K は有理函数体 $\mathbb{C}(\wp) = \mathbb{C}(X)$ (ここで $X = \wp$ と置いた) と $Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3$ の根である $Y = \wp'$ から生成される体になる. よって, 体の Galois 理論の言葉を使うと, 楕円函数体の構造に関する結果は次のようにまとめられる.

定理 3.3 (楕円函数体の構造) 楕円函数体 K は有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ に $Y = \sqrt{4X^3 - g_2 X - g_3}$ を添加することによって得られる $\mathbb{C}(X)$ の 2 次の Galois 拡大である. □

Galois 理論の言葉が登場したことは驚くに当たらない. むしろ, 楕円函数論およびその一般化である Riemann 面の理論は体の Galois 理論を理解する上で大変良いモデルになっていると考えられる. なぜなら, 体の Galois 理論は純代数的過ぎて, 直観的イメージがわき難い話になるのであるが, 楕円函数や Riemann 面はより具体的・幾何的な対象であり, ずっと親しみがわき易い対象だからである.

参考: 有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ の任意の 2 次拡大は $\mathbb{C}(X, \sqrt{F})$ ($F \in \mathbb{C}[X]$, $F \notin \mathbb{C}$, F は平方因子を含まない) の形になる. 特に F の次数が 3 または 4 であるとき, $\mathbb{C}(X, \sqrt{F})$ は楕円函数体 (elliptic function field) に同型になる. F の次数が 5 以上のとき, $\mathbb{C}(X, \sqrt{F})$ は超楕円

函数体 (hyperelliptic function field) と呼ばれ, $Y^2 = F(X)$ で定義される曲線は超楕円曲線 (hyperelliptic curve) と呼ばれ, 有理式 $G(X,Y)$ に対する積分 $u = \displaystyle\int G\left(x, \sqrt{F(x)}\right)\,dx$ は超楕円積分 (hyperelliptic integral) と呼ばれている.

参考: 例の函数と数の類似の話において, 有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ の果たす役目は有理数体 $\mathbb{Q}$ と似ているということを説明したのであった. $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大は $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, 1$, m は平方因子を含まない) の形になる. $m > 0$ のとき $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ は実 2 次体と呼ばれ, $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ は虚 2 次体と呼ばれている. $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大は楕円函数体もしくは超楕円函数体の類似の対象であることは明らかであろう. この類似とは全く別の意味で, 数学的に極めて深い関係が, 虚 2 次体 (の Abel 拡大) と楕円函数 (の特殊値) の間にあることが知られている. それは**虚数乗法論**である. 興味のある人は**「Kronecker の青春の夢」**について調べてみると面白いであろう.

[46] $\wp$ の偶数階の導函数 $\wp^{(2n)}$ は $\wp$ の $n+1$ 次の有理数係数の多項式になり, その多項式の最高次の係数は $(2n+1)!$ であることを示せ. 特に

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2, \qquad \wp^{(4)} = 120\wp^3 - 18g_2\wp - 12g_3.$$

であることを示せ. □

[47] 整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\wp(nu)$ は $\wp(u)$ の有理函数になることを示せ. さらに, $\wp(2u)$ を $\wp(u)$ の有理函数で具体的に表示せよ. □

ヒント: 加法公式

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)$$

において $v \to u$ とすると,

$$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2.$$

4 Weierstrass の ζ 函数と σ 函数

この節においても, 前節と同様に $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置き, 周期格子 Ω に関する楕円函数体を K と書くことにする.

[48] **(部分分数展開と無限乗積展開)** f は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, f の全ての極は 1 位であり, 簡単のため 0 は f の極でないと仮定する. f の極全体を $a_1, a_2, \ldots$ $(0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots)$ と書き, a_n における f の留数を A_n と書くことにする. 以下を満たす閉曲線の列 $C_1, C_2, \ldots$ が存在すると仮定する:

(a) C_n は f の極を通らず, C_n はその内側に $a_1, \ldots, a_n$ を含み, 他の極を含まない.

(b) C_n の原点からの最短距離を R_n, C_n の長さを L_n と書くと, $n \to \infty$ のとき $R_n \to \infty$ であり, $L_n = O(R_n)$.

(c) 非負の整数 p が存在して, $n\to\infty$ のとき $\sup|f(C_n)| = o({R_n}^{p+1})$.

このとき, 以下が成立する:

(1) f は次のような表示を持つ:

$$f(u)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)\,u^k}{k!}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{u-a_n}+\sum_{k=0}^{p}\frac{u^k}{{a_n}^{k+1}}\right).$$

(2) f の全ての極の留数は整数であると仮定する ($A_n\in\mathbb{Z}$). このとき, $\mathbb{C}$ 上の正則函数 g であって, $f=g'/g$ を満たし, 次のような無限積表示を持つものが存在する:

$$g(u)=\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)\,u^{k+1}}{(k+1)!}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)^{A_n}\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{u^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}}\right)\right\}. \quad \square$$

ヒント: (1) 次の積分が $N\to\infty$ のとき, u に関して広義一様に, 0 に収束することを示せば良い:

$$I_N:=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{p+1}(\zeta-u)}=\frac{f(u)}{u^{p+1}}-\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)\,u^{k-p-1}}{k!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{{a_n}^{p+1}(a_n-u)}.$$

(2) f の極を通らないように 0 から u_0 への曲線 Γ_0 と u_0 から u_0 に十分近い点 u を結ぶ線分を繋げてできる曲線を $\Gamma(u)$ と書くことにする. このとき,

$$F(u)=\int_{\Gamma(u)}f(\zeta)\,d\zeta$$

は u_0 の近傍における解析函数であり, f の留数が整数であるという仮定より, $F(u)$ の値は Γ_0 の取り方を変ても $2\pi i\mathbb{Z}$ の分しか変化しない. よって, $g(u):=e^{F(u)}$ と置くと, g は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり, $g'/g=(\log g)'=F'=f$ が成立している. 公式

$$\log\left(1-\frac{u}{a}\right)=\int_0^u\frac{d\zeta}{\zeta-a}.$$

を用い, (1) の結果を $F(u)$ の定義式に代入し, 無限和と積分を交換すると,

$$F(u)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k+1)}(0)\,u^{k+1}}{(k+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)+\sum_{k=0}^{p}\frac{u^{k+1}}{(k+1){a_n}^{k+1}}\right\}.$$

よって,

$$g(u)=e^{F(z)}=\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)\,u^{k+1}}{(k+1)!}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)^{A_n}\exp\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{u^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}}\right)\right\}.$$

注意: 以下においては上の問題の結果を認めて自由に使って良い.

[49] (ζ 函数の定義) 次の無限級数は Ω の外で広義一様収束し, $\mathbb{C}$ 上の有理型函数を与える:

$$\zeta(u):=\frac{1}{u}+\sum_{\omega\in\Omega-\{0\}}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right).$$

この函数を Weierstrass の ζ 函数と呼ぶ. ζ 函数は $-\zeta'(u)=\wp(u)$ を満たしている. $\square$

注意: 言うまでもないことであるが, Euler-Riemann のゼータ函数とは別物である.

Weierstrass の ζ 函数に問題 [48] の結果を適用することを考えよう.

[50] ($\zeta(u)$ の原点での Laurent 展開) $\zeta(u)$ は u の奇函数であり, $\zeta(u)$ は原点において以下の形の Laurent 展開を持つ:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \left(c_2 \frac{u^3}{3} + c_4 \frac{u^5}{5} + c_6 \frac{u^7}{7} + \cdots \right)$$

ただし, c_n は $\wp(u)$ の原点における Laurent 展開の u^n の係数である. □

この問題の結果を用いて Weierstrass の ζ 函数に問題 [48] の結果を適用しよう. それによって, Weierstrass の σ 函数の定義が得られる. $f(u) = \zeta(u) - 1/u$ と置くと, 問題 [48] の記号のもとで, $\{a_1, a_2, \ldots\} = \Omega - \{0\}$, $A_n = 1$, $p = 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ の場合になっているので, $\mathbb{C}$ 上の正則函数 g を $g(u) = \prod_{\omega\in\Omega-\{0\}} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right) \right\}$. なる無限積によって定めることができて, $g'/g = f$ が成立している. Weierstrass の σ 函数は次のように定義される:

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega\in\Omega-\{0\}} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right) \right\}.$$

問題 [48] のヒントの内容より, σ 函数は

$$\sigma(u) = u \exp\left\{ \int_0^u \left(\zeta(v) - \frac{1}{v} \right) dv \right\}, \qquad (\log\sigma)' = \frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta$$

を満たしている. 無限積表示された函数の零点の位置はわかり易い. $\sigma(u)$ の零点の集合は Ω に一致し, 全て 1 位である.

[51] (σ の原点における展開) $\sigma(u)$ の原点における巾級数展開は次の形になる:

$$\sigma(u) = u + k_5 u^5 + k_7 u^7 + k_9 u^9 + \cdots.$$

よって, σ は奇函数になる. □

次に Weierstrass の ζ 函数と σ 函数は u を $u + \omega$ に変えたとき, どのような変換性を持つか調べよう.

[52] ($\zeta(u+\omega)$ の公式) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $\zeta(u+\omega) - \zeta(u)$ は定数である. 定数 η_1, η_2 を

$$\eta_1 := \zeta(u + \omega_1) - \zeta(u), \qquad \eta_2 := \zeta(u + \omega_2) - \zeta(u)$$

と定めると, 次が成立する:

$$\zeta(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \zeta(u) + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 \qquad (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}),$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \omega_1 \\ \eta_2 & \omega_2 \end{vmatrix} = \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

最後の式を Legendre の関係式と呼ぶ. □

ヒント: $\zeta'(u) = -\wp(u)$ は楕円函数なので, $\zeta(u+\omega)-\zeta(u)$ の u による導函数は 0 になる. よって, $\zeta(u+\omega)-\zeta(u)$ は定数になる. Ω に関する周期平行四辺形 $\Xi = \Xi(u_0)$ の内部に $\zeta(u)$ は位数 1 で留数 1 の極をちょうど 1 つ持つ. よって,

$$2\pi i = \int_{\partial\Xi} \zeta(u)\,du = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} (\zeta(u+\omega_1)-\zeta(u))\,du - \int_{u_0}^{u_0+\omega_1} (\zeta(u+\omega_2)-\zeta(u))\,du.$$

この等式の最後の式は $\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2$ に等しい.

[53] ($\sigma(u+\omega)$ の公式) $m_1, m_2 \in \Omega$ に対して,

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \qquad \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

と置くと次が成立する:

$$\sigma(u+\omega) = (-1)^{m_1+m_2+m_1m_2} e^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)} \sigma(u). \quad \square$$

ヒント: $(\log\sigma(u))' = \zeta(u)$ を $\zeta(u+\omega) = \zeta(u) + \eta$ に代入して, 両辺を積分すれば,

$$\log\sigma(u+\omega) = \log\sigma(u) + \eta u + c \qquad (c \text{ はある定数}).$$

よって, $C = e^{c-\frac{\omega\eta}{2}} \neq 0$ と置くと,

$$\sigma(u+\omega) = Ce^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(u).$$

定数 C を決定するためには, $u = -\omega/2$ における両辺を比べてみれば良い. $\sigma(u)$ の零点の集合は Ω と一致している. $\omega/2 \notin \Omega$ であるとき (m_1, m_2 の少なくともどちらかか奇数であるとき), $\sigma(\omega/2) \neq 0$ であり, σ が奇函数であることを使うと,

$$C = \frac{\sigma(u+\omega)}{e^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(u)} = \frac{\sigma(\omega/2)}{\sigma(-\omega/2)} = -1.$$

一方, $\omega/2 \in \Omega$ であるとき (m_1, m_2 が共に偶数であるとき), $\sigma(\omega/2) = 0$ であり, σ' が偶函数であることを使うと,

$$C = \lim_{u\to-\omega/2} \frac{\sigma(u+\omega)}{e^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(u)} = \frac{\sigma'(\omega/2)}{\sigma'(-\omega/2)} = -1.$$

[54] (楕円函数の ζ 函数による表示) 周期格子 Ω に対する周期平行四辺形 Ξ を任意に固定する. f は周期格子 Ω に関する楕円函数であるとし, Ξ に含まれる f の極全体を $a_1, \dots, a_r$ と表わし, 各 a_i における f の Laurent 展開の主要部を

$$\frac{A_{i,1}}{u-a_i} + \frac{A_{i,2}}{(u-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,k_i}}{(u-a_i)^{k_i}}$$

と表わしておく. このとき, ある定数 A が存在して,

$$f(u) = A + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} A_{i,j}\zeta^{(j-1)}(u-a_i). \quad \square$$

ヒント: 有理型函数 g を

$$g(u) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} A_{i,j} \zeta^{(j-1)}(u - a_i).$$

と定めると, g の極の集合は f のそれに等しく, g の各々の極の主要部は f のそれに等しい. よって, もしも g が楕円函数であれば, $f - g$ は極を持たない楕円函数になるので, 定数函数であることがわかる. $\zeta' = -\wp$ であるから, ζ の 1 階以上の導函数は楕円函数である. よって, g の定義における $\zeta(u - a_i)$ の一次結合の部分が楕円函数になるかどうかが問題になる. 留数定理より, $\sum_{i=1}^{r} A_{i,1} = 0$ であるから, $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \Omega$ に対して, $\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$ と置くと,

$$g(u + \omega) = g(u) + \sum_{i=1}^{r} A_{i,1}\eta = g(u).$$

よって, g は楕円函数である.
注意: この問題の結果は, 任意の有理式 $f(X)$ が 多項式と $A_{i,j}(X - a_i)^{-j}$ 一次結合の和で表示できるということの類似になっている.

[55] **(楕円函数の σ 函数による表示)** 周期格子 Ω に対する周期平行四辺形 Ξ を任意に固定する. f が $\mathbb{C}$ 上の 0 でない有理型函数であるとき, f の位数 k の零点 p に対して $\operatorname{ord}_p f := k$ と置き, f の位数 l の極 q に対して $\operatorname{ord}_q f := -l$ と置く. 整数 $k_1 \dots, k_n$ と Ξ 内の互いに異なる有限個の点 $p_1, \dots, p_n$ を任意に取る. このとき, 以下の 2 つの条件は互いに同値である:

(a) 0 でない楕円函数 $f \in K^\times$ で, その Ξ における零点と極の全体の集合が $\{p_1, \dots, p_n\}$ に一致し, $\operatorname{ord}_{p_i} f = k_i$ $(i = 1, \dots, n)$ を満たすものが存在する.

(b) $k_1p_1 + \cdots + k_np_n \equiv 0 \mod \Omega$.

さらに, (a) の条件を満たす $f \in K^\times$ は次のような表示を持つ:

$$f(u) = C\,\sigma(u - p_1)^{k_1} \cdots \sigma(u - p_n)^{k_n}, \qquad (C \in \mathbb{C}^\times). \quad \square$$

ヒント: (a) ならば (b) であることは問題 **[29]** の結果の言い変えに過ぎない. (b) が成立しているとき,

$$\phi(u) = \sigma(u - p_1)^{k_1} \cdots \sigma(u - p_n)^{k_n}$$

と置くと, ϕ は楕円函数である.

注意: この問題の結果は, 任意の有理式 $f(X)$ が $f(X) = C(X - p_1)^{k_1} \cdots (X - p_n)^{k_n}$ という表示を持つことの類似になっている.

参考: 次の問題は現在でも興味深いものだと思われている:

基本問題: 多項式や有理式で成立する結果を楕円函数の場合に拡張せよ!

参考: 上の問題の結果より, 問題 [**29**] の記号のもとで, 次の完全列が得られたことになる:

$$0@ >>> \mathbb{C}^\times @ >>> K^\times @ > \mathrm{div} >> \mathrm{Div}_0 @ > \int >> \mathbb{C}/\Omega @ >>> 0.$$

この列が完全であることは, $\mathrm{div} : K^\times \to \mathrm{Ker}(\int)$ が全射であること以外は容易に示される. ここでは, σ 函数の理論を用いて, その全射性を証明したことになっている. なお, この完全列は, $X = \mathbb{C}/\Omega$ 上の層 (sheaf) の単完全列

$$0@ >>> \mathcal{O}_\mathcal{X}^\times @ >>> \mathcal{K}^\times @ >>> \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}_\mathcal{X}^\times @ >>> \prime$$

から得られる, 次の層のコホモロジーの長完全列の部分列になっているとみなすことができる:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & H^0(\mathcal{O}_\mathcal{X}^\times) & \to & H^0(K_X^\times) & \to & H^0(K_X^\times/\mathcal{O}_\mathcal{X}^\times) & \to & H^1(\mathcal{O}_\mathcal{X}^\times) & \to & H^1(K_X^\times) \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
0 & \to & \mathbb{C}^\times & \to & K^\times & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \mathrm{Div} & \xrightarrow{(\int,\deg)} & (\mathbb{C}/\Omega)\times\mathbb{Z} & \to & 0.
\end{array}$$

ここで, X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して $H^p(\mathcal{F}) = \mathcal{H}\surd(\mathcal{X},\mathcal{F})$ と書いた. この立場では列の完全性は明らかなことである. $H^1(\mathcal{O}_\mathcal{X}^\times)$ は X 上の line bundles の同型類の全体をパラメトライズしているので, この完全列は divisor と line bundle の関係をも記述している. 層の理論の簡単な解説とコンパクト Riemann 面の理論への応用については [Gun] を見よ.

[**56**] 以下の公式を示せ:

1. $\wp'(u) = -\dfrac{2}{\sigma(\frac{\omega_1}{2})\sigma(\frac{\omega_2}{2})\sigma(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})} \cdot \dfrac{\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma(u)^3}.$

2. $\wp(u) - \wp(v) = -\dfrac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}.$

3. $\wp'(u) = -\dfrac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4}.$ $\square$

5 Riemann 面の定義

この節では Riemann 面を定義する. 例えば, $\mathbb{C}$ に無限遠点を付け加えることによって構成される複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ や $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ $(\operatorname{Im}\tau > 0)$ はコンパクト Riemann 面の典型的な例になっている.

定義 5.1 (Riemann 面の定義) X は位相空間であり, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆であるとする[4]. 写像の族 $\{\phi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C}\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられていて, 以下の 2 つの条件が成立するとき, $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の複素構造 (complex structure) であると言う:

(1) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\phi_\lambda(U_\lambda)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であり, ϕ_λ は U_λ から $\phi_\lambda(U_\lambda)$ への同相写像を与える.

[4] 各 U_λ が X の開部分集合であり, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が成立していること.

(2) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, 写像の列

$$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \xrightarrow{\phi_\lambda^{-1}} U_\lambda \cap U_\mu \xrightarrow{\phi_\mu} \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

の合成は双正則[5]である.

空でない Hausdorff 空間 X に複素構造が与えられたとき, X はリーマン面 (Riemann surface) であると言う. □

要するに, $\mathbb{C}$ の開集合の族が双正則写像によって貼り合わさってできる面を Riemann 面と呼ぶのである.

最も簡単な例: $\mathbb{C}$ の空でない開集合 U は $\{U \hookrightarrow \mathbb{C}\}$ を複素構造とする Riemann 面である.

[57] **(複素射影直線)** $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ における同値関係 $\sim$ を次のように定める: $u, v \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ に対して,

$$u \sim v \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \in \mathbb{C}^\times v.$$

商位相空間 $(\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})/\sim$ を複素射影直線と呼び, $\mathbb{C}P^1$ または $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と表わす. $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ が代表する複素射影直線上の点を $(z : w)$ と表わす. このとき, 以下が成立している:

1. 複素射影直線は球面 S^2 と同相である.

2. $X_0 = \{(1:0)\}$, $X_1 = \{\,(z:1) \mid z \in \mathbb{C}\,\}$ と置くと, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は X_0 と X_1 の非連結和になる.

3. $U_0 = \{(1:w) \mid w \in \mathbb{C}\,\}$, $U_1 = X_1$ と置き, $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$ を $\phi_0(1:w) = w$, $\phi(z:1) = z$ と定める. このとき, $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ における複素構造である. これによって, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は Riemann 面である. □

注意: U_1 と $\mathbb{C} = \phi_1(U_1)$ を同一視し, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えたものであるとみなすことが多い.

[58] 連結な Riemann 面は弧状連結であることを示せ. □

ヒント: Riemann 面 X と $x_0 \in X$ に対して,

$$A = \{\, q(1) \mid q \text{ は } [0,1] \text{ から } X \text{ への連続写像であり } q(0) = x_0 \,\}$$

と置く. このとき, $A \neq \emptyset$ かつ A は M の開集合かつ閉集合であることを示せ.

[59] X は複素構造 $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を持つ Riemann 面であるとする. X の任意の空でない開集合 V に対して, $V_\lambda = V \cap U_\lambda$, $\psi_\lambda = (\phi_\lambda$ の V_λ 上への制限$)$ と置くと, $\{(V_\lambda, \psi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ は V の複素構造である. これによって, Riemann 面の任意の空でない開集合は Riemann 面である. □

[5] $\mathbb{C}$ の開集合間の写像が正則 (holomorphic) でかつその逆写像が存在して逆写像も正則のとき, その写像は双正則 (biholomorphic) であると言う.

定義より Riemann 面は Hausdorff 空間であるが, 位相空間 X が Hausdorff でなくても, 複素構造の定義の条件 (1), (2) を満たす $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ が存在する場合がある. そのような例の 1 つを問題に出そう.

[60] $X_0 = \{(z,0) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\}$, $X_1 = \{(z,1) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\}$ と置く. $X_0 \cup X_1$ における同値関係 $\sim$ を次のように定義する: 任意の $(x,y), (x',y') \in X_0 \cup X_1$ に対して,

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (x',y') \text{ または } x = x' \neq 0.$$

商空間 $(X_0 \cup X_1)/\sim$ を X と書き, X_i の X における像を U_i と書く. $p_i : X_i \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x$ が誘導する U_i から $\mathbb{C}$ への写像を ϕ_i と書くことにする. このとき, X は Hausdorff ではないが, $\{(\phi_i, U_i)\}_{i=0,1}$ は複素構造の定義の 2 つの条件を満たしている. □

この問題における X は $\mathbb{C}$ の 2 つのコピーをその原点を除いて貼り合わせることによって得られる空間である.

定義 5.2 (正則座標近傍の定義) X は複素構造 $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ を持つ Riemann 面であるとする. X の開集合 U と写像 $\phi : U \to \mathbb{C}$ の組 (U, ϕ) が正則座標近傍 (holomorphic coordinate neighborhood) であるとは, 以下の条件が成立することである:

1. $\phi(U)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であり, ϕ は U から $\phi(U)$ への同相写像を与える.
2. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 写像の列

$$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \xrightarrow{\phi_\lambda^{-1}} U_\lambda \cap U \xrightarrow{\phi} \phi(U_\lambda \cap U)$$

の合成は双正則である. □

定義 5.3 (Riemann 面の間の正則写像の定義) X, Y は共に Riemann 面であるとする. 写像 $f\colon X \to Y$ が正則 (holomorphic) であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, $f(x)$ を含む Y 上の正則座標近傍 (V, ψ) および x を含み $f^{-1}(V)$ に含まれる X 上の正則座標近傍 (U, ϕ) が存在して,

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

の合成が $\mathbb{C}$ の開集合間の正則写像になることである. 正則写像が正則な逆写像を持つとき, その写像は双正則 (biholomorphic map) であると言う. X と Y が双正則であるとは, X から Y への双正則写像が存在することである. X に 2 つの複素構造が入っているとき, X の恒等写像が双正則ならばその 2 つの複素構造は同値であると言う. X から $\mathbb{C}$ への正則写像を X 上の正則函数と呼ぶ. □

[61] (正則写像の連続性) Riemann 面の間の正則写像は連続写像になることを示せ. □

[62] (正則写像の貼り合わせ) X, Y は Riemann 面であり, $\{U_i\}_{i\in I}$ は X の開被覆であるとする. 各 $i \in I$ に対して f_i は U_i から Y への正則写像であり, 任意の $i, j \in I$ に対して $U_i \cap U_j$ 上で $f_i = f_j$ が成立していると仮定する. このとき, X から Y への正則写像 f で各 U_i 上 f_i と一致するものが唯一存在することを示せ. □

[63] (正則写像の一致の定理) X, Y は Riemann 面であるとし, X は連結であると仮定する. f, g は X から Y への正則写像であるとする. f と g の値が X 内のある集積点を持つ集合上で一致するなるならば, X 全体で一致することを示せ. □

[64] (定数でない正則写像の開写像性) X, Y は Riemann 面であるとし, X は連結であると仮定する. 定数ではない正則写像 $f : X \to Y$ は開写像であることを示せ. □

ヒント: 任意の正則写像は, 正則座標系をうまく取ることによって, 局所的に $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表示されることを示す.

[65] (コンパクト Riemann 面上の正則函数が定数になること) X は連結なコンパクト Riemann 面であるとする. このとき, X 上大域的に定義された正則函数は定数函数に限ることを示せ. 特に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の正則函数は定数函数に限る. □

[66] (Riemann 面上の有理型函数の定義) X は Riemann 面であるとする. f は X からある離散部分集合 S を除いたところで定義された正則函数であるとする. $s \in S$ の正則座標近傍 (U, z) を 1 つ取る. このとき, f は s のある開近傍 V から s を除いたところで,

$$f(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z(p) - z(s))^n \qquad (p \in V - \{s\})$$

と展開されることを示せ. この展開中に 0 でない無限個の負巾の項 $c_n(z(p)-z(s))^n$ $(n < 0)$ が存在するとき, s は f の真性特異点であると言う. そうでないとき, s は f の高々極であると言う, $c_n \neq 0$ となる最低の n に対する $-n$ を極の位数と呼ぶ. 0 でない負巾の項が存在しないとき s は f の除去可能特異点であると言う. これらの定義が s の正則座標近傍によらないことを示せ. 全ての $s \in S$ が f の高々極であるとき f は X 上の有理型であると言う. f, g が X 上の有理型函数であり, それぞれ離散部分集合 S, T の外で定義されているとする. (f, S) と (g, T) が同値であるとは, $X - (S \cup T)$ 上で $f = g$ が成立していることであると定義する. (f, S) の同値類の全体の集合を K_X と書くことにする. K_X の元を X 上の有理型函数と呼ぶことにする. 連結な Riemann 面 X に対して, K_X は自然に体をなすことを説明せよ. 連結なコンパクト Riemann 面 X に対して, K_X を X の代数函数体と呼ぶ. □

参考: 任意のコンパクト Riemann 面上に定数でない有理型函数が存在する. しかし, その証明は non-trivial である. Riemann 自身による原証明は調和函数に関する Dirichret の原理を用いたものであったが, Riemann の死後に Weierstrass が Dirichret の原理の証明の論理的欠陥を指摘し, Riemann 面の理論の論理的基礎に疑問が持たれたのである. (その辺の歴史的事情は例えば [岩澤] の緒言に書いてある.) しかし, 現在では Dirichret の原理自身が厳密に定式化証明されている上に, 他の色々な方法でコンパクト Riemann 面上の定数でない有理型函数の存在を示す方法が知られている. 例えば, [岩澤] 第 3 章 §4 で紹介されている Weyl による直交射影の方法やまたそれとは全く違う [Gun] に書かれている方法などがある. いずれにせよ, 楕円型の線型偏微分方程式に関する基礎的な結果を使わねばならない. これは, 抽象的に定義された任意のコンパクト Riemann 面に関する結果を得ようとするからそうなるのであって, 射影代数曲線として得られたコンパクト Riemann 面上に定数でない有理型函数が存在することは trivial なことである[6]. なぜなら, 射影代

[6]結果的に任意のコンパクト Riemann 面は射影代数曲線と双正則になることが知られている.

数曲線の入れ物である射影空間上の有理型函数を射影代数曲線上に制限したものは射影代数曲線上の有理型函数になるからである.

[67] **(有理型函数と射影直線への正則写像の関係)** $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなし, X は Riemann 面であるとする. f が X の離散部分集合 S の外で正則な X 上の有理型函数であるとき, f は X から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への正則写像に一意的に拡張されることを示せ. 逆に X から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への正則写像 f で $f(X) \neq \{\infty\}$ となるものに対して, $S = f^{-1}(\infty)$ と置くと, S は X の離散部分集合であり, f は S の外で正則な X 上の有理型函数を与えることを示せ. □

ヒント; 任意の $p_0 \in X$ に対して, p_0 の開近傍 U と U 上の正則函数 g, h で, $g(p_0) \neq 0$ または $h(p_0) \neq 0$ であり, U 上で $f = g/h$ を満たすものが存在する. U を十分小さくとれば, U から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への正則写像を $p \mapsto (g(p) : h(p))$ と定義することができる.

[68] X はコンパクトな位相空間であり, Y は連結 Hausdorff 空間であり, $f : X \to Y$ が連続な開写像ならば, f は全射であることを示せ. この純粋に位相空間論的に証明される結果と上の問題の結果を用いて, 代数学の基本定理を証明せよ. □

ヒント: 複素係数の 1 変数多項式 f は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ からそれ自身への正則写像とみなせる. f が定数でないならば f が全射になることを示せば良い.

[69] 複素射影直線 $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して, X の代数函数体 K_X は複素 1 変数有理函数体 $\mathbb{C}(T)$ に同型であることを示せ. □

参考: 連結なコンパクト Riemann 面の圏と $\mathbb{C}$ 上の 1 変数代数函数体[7]の圏は互いに同値になることが知られている. (この辺の話については [岩澤] が名著である.) 連結なコンパクト Riemann 面 X に対して, X 上の有理型函数全体のなす体 $K = \mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}$ 上の 1 変数代数函数体をなし, 対応 $X \mapsto K$ が圏同値を与えるのである. この圏同値を通じて, 1 変数代数函数体に関する体の Galois 理論と連結なコンパクト Riemann 面の (分岐) 被覆の Galois 理論が同一の結果を与えることがわかるのである. 体の Galois 理論は純代数的に展開され, 被覆の Galois 理論[8]は純位相幾何的に展開される. このことは, 体の Galois 理論に位相幾何的な直観が通用する可能性を示唆している. 実際, 代数体[9]は Riemann 面の代数函数体と類似した性質を持つことが知られている. 代数体と Riemann 面の代数函数体の類似をいきなり考えるのではなく, その中間の対象として, 有限体上の曲線と有限体上の 1 変数代数函数体[10]を考えると具合が良いことが知られている[11].

---

[7]有理函数体 $\mathbb{C}(T)$ を含む体で $\mathbb{C}(T)$ 上の有限次元ベクトル空間をなすものを $\mathbb{C}$ 上の 1 変数代数函数体と呼ぶ.

[8]被覆の Galois 理論に関する解説については [久賀 1] を見よ.

[9]$\mathbb{Q}$ を含む体で $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間をなすものを代数体と呼ぶ.

[10]有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の有理函数体 $\mathbb{F}_q(T)$ を含む体で $\mathbb{F}_q(T)$ 上の有限次元ベクトル空間をなすものを有限体上の 1 変数代数函数体と呼ぶ. 有限体上の滑らかな射影曲線 (Riemann 面の有限体上での類似) の圏と有限体上の 1 変数代数函数体の圏は同値である.

[11]特に有限体上の対象に対しては代数体の場合と同様にしてゼータ函数が定義されることが重要である. Euler-Riemann のゼータ函数に対する本来の Riemann 予想はまだ解けてないが, 有限体上の曲線の合同ゼータ函数に関する Riemann 予想の類似の結果は Weil によって証明されている. その結果を高次元の場合に拡張したものを Weil 予想と呼ぶ. Weil 予想もすでに Deligne によって証明されている. Weil 予想の解決に関する読物としては, [久賀 2] の中の解説が読み易いであろう.

[**70**] 任意の Riemann 面は向き付け可能である. □

ヒント: 複素数 z を $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と表わしておく. $\mathbb{C}$ の開集合上の正則函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (u, v は実数値) に対して, Cauchy-Riemann の方程式より,

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}.$$

右辺の行列式は ${u_x}^2 + {v_x}^2 \geq 0$.

参考: よって, 任意のコンパクト Riemann 面は向き付け可能な閉曲面に同相である. (向き付け可能な閉曲面はジーナスによって分類されるのであった.)

6 Riemann 面としての楕円曲線

この節における問題 [**72**], [**75**] における E をどちらも (複素) 楕円曲線 (elliptic curve) と呼ぶ. 2 つの問題における E の定義は一見して全く異なるのだが, 実は同じものを別の視点から眺めたものになっている. そのことが理解するためには, 楕円曲線論 (もしくは楕円函数論) の基礎的な議論を展開しなければいけない.

歴史的には楕円函数論は楕円積分の研究が出発点になっている. 楕円積分は x および x の 3 次式もしくは 4 次式の平方根の有理函数の積分である. 問題 [**72**] は x の 3 次式の平方根が登場する場合を扱っている. x の 3 次式 $f(x) = x^3 - A_2 x - A_3$ の平方根を y と書くと,

$$(*) \qquad y^2 = f(x) = x^3 - A_2 x - A_3$$

が成立する. この式を (x, y) 平面における曲線の定義式とみなす. この式によって定義される曲線を平面楕円曲線と呼ぶことにする. $\sqrt{f(x)}$ と x の有理函数の積分 (楕円積分) に関する研究は曲線 $(*)$ の研究に帰着されるのである. $f(x)$ が x の 4 次式の場合も同様である.

しかし, 曲線 $(*)$ を満足に研究するためには, 曲線 $(*)$ を実数の範囲だけではなく複素数の範囲まで拡張して扱わなければいけない. さらに, 曲線 $(*)$ に無限遠点を 1 つ付け加えて曲線をコンパクト化して扱うことが重要である. この後者のコンパクト化は, 曲線 $(*)$ を複素アフィン平面 $\mathbb{C}^2$ ではなく, 複素射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内で考えることによって自然に実現される. そのことを説明するためには, まず射影平面について説明する必要がある.

まず, 複素射影平面ではなく実射影平面について直観的な説明をしておこう. 実射影平面は直観的には平面に無限遠の縁を付けたものであると思うことができる. つまり, 実際には存在しない地平線上の点が存在すると思うのである. ただし, まっすぐ前を見て見える地平線上の点とその反対側の背中側に見える地平線上の点とは同一視しなければいけない[12]. このことは, 射影平面が円板の縁上の 2 点が円板の中心に関して対象の位置にあるとき同一視することによって得られることを思い出せば納得できるであろう. 我々は円板の内部に住み, 円板の縁は無限遠にあると思うのである. 大事なことは, 射影平面は開いた世界に縁を付けて閉じた世界にしたものなので, 射影平面はコンパクトであることである.

[12] この辺のことは [大森] に詳しく書いてある.

次に, 実射影平面の代数的な構成について説明しよう. 我々が無限に広い平面上に住んでいると考えるとき, その世界の縁をどのように構成したら良いのであろうか? その 1 つの答は地平線を写生する様子を思い描いてみれば得られる. しかも, その答は射影平面の純代数的な構成を与える. 我々の住んでいる平面は上下の区別のある 3 次元空間に含まれていると考える. ただし, 空間の座標を (x,y,z) と書くとき, 我々の済んでいる平面は $z=-1$ と表示されていると考え, 自分の視点は原点 $(0,0,0)$ にあると考える. 原点から地平線をのぞみ, その様子を画用紙に写生することを考える. つまり, 自分の視点から目標物を結ぶ直線と画用紙の交わる点をプロットしてゆくことを考える. 平面上には無限遠点は存在しないのだが, 真っ直視点を平らにすると地平線を見ることはできる. 実際には存在しない地平線上の点と原点を結ぶ直線は平面 $z=0$ 上の直線になるものと考えられる. 以上の話を逆転させて, 空間内の原点を通る直線を点であると思うことにする. 名前を付けよう. 空間内の原点を通る直線全体の集合を射影平面と呼ぶ. 直線は前と後の方向を区別できないので, 前に見える地平線上の点と後に見える地平線上の点は区別できなくなる.

原点を直線全体の集合はどのように記述されるのであろうか? 原点を通る直線はその直線上にあるベクトル $u \neq 0$ を与えれば決定される. ベクトル $u \neq 0$ と数 $\alpha \neq 0$ に対して, u と αu は同じ直線を与え, ベクトル $v \neq 0$ が u と同じ直線を与えるためには v が αu の形になっていることが必要である. このことより, 0 でないベクトル全体を考え, 0 でない定数倍で移るベクトルを互いに同一視すれば直線全体の集合が得られたと考えられるのである. この構成は任意の体上で意味を持つ. 次元も一般で良い. 次の問題において $\mathbb{C}$ 上の n 次元射影空間を定義しておく.

[**71**] (**n 次元複素射影空間**) $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ における同値関係 $\sim$ を次のように定める: 任意の $u,v\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ に対して,

$$u \sim v \iff v \in \mathbb{C}^\times u.$$

商空間 $(\mathbb{C}^n-\{0\})/\sim$ を n 次元[13]複素射影空間と呼び $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ と表わす. $(z_0,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ の $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ における像を $(z_0:\cdots:z_n)$ と表わす. $i=0,1,\dots,n$ に対して,

$$\begin{aligned}
X_i &= \{\,(z_0:\cdots:z_n)\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i\neq 0,\ z_{i+1}=\cdots=z_n=0\,\},\\
U_i &= \{\,(z_0:\cdots:z_n)\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i\neq 0\,\},
\end{aligned}$$

と置く. 以下を示せ:

1. $X_n = U_n$.
2. 各 X_i は $\mathbb{C}^i$ と同相であり, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は X_i 達の直和である.
3. 各 U_i は $\mathbb{C}^n$ と同相であり, $\{U_i\}_{i=0}^n$ は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の開被覆である.
4. $X_0\sqcup X_1\sqcup\cdots\sqcup X_i$ は $\mathbb{P}^i(\mathbb{C})$ と同相である. □

この問題は次の問題の準備のために用意された. $n=2$ の場合が次の問題で使われる. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を複素射影平面と呼ばれている.

参考: 本当は n 次元複素多様体として $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を定義したいのであるが, 多変数の複素函数論の準備が必要なので, 今ここでそうするのは無理である.

[13] 複素数上の次元を数えている. 位相的には $2n$ 次元.

[72] **(平面曲線としての楕円曲線)** $A_2, A_3 \in \mathbb{C}$ であるとし, $f(x) = 4x^3 - A_2 x - A_3$ と置く. $f(x)$ は重根を持たないと仮定し, $f(x)$ の 3 つの根を λ_i $(i = 1, 2, 3)$ と表わす. 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の部分空間 $E = E_{A_2, A_3}$ を次のように定義する:

$$E = \{\, (X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid Y^2 Z = 4X^3 - A_2 X Z^2 - A_3 Z^3 \,\}.$$

$U_0 = \{(1 : Y : Z) \mid Y, Z \in \mathbb{C}\}$, $U_1 = \{(X : 1 : Z) \mid X, Z \in \mathbb{C}\}$, $U_2 = \{(X : Y : 1) \mid X, Y \in \mathbb{C}\}$ と置く. $L = \{\, (X : Y : 0) \mid (x : y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \,\}$ を無限遠直線と呼ぶ. 以下を示せ:

1. E は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の閉部分集合になるのでコンパクトである.

2. E と L は集合として 1 点で交わる. その 1 点を $\infty \in E$ と書くことにする.

3. $a_i = (\lambda_i : 0 : 1)$ と置く. $a_i \in E$ である. 任意の $p \in E - \{a_1, a_2, a_3, \infty\}$ に対して p の E における開近傍 V_p を十分小さく取ると, $V_p \subset U_2$ となり, $\phi_p : V_p \to \mathbb{C}$ を $\phi_p(X : Y : 1) = X$ と定義することができる. $p = a_i \in E$ に対して, p の E における開近傍 V_p を十分小さく取ると, $V_p \subset U_2$ となり, $\phi_p : V_p \to \mathbb{C}$ を $\phi(X : Y : 1) = Y$ と定義することができる. $p = \infty \in E$ の E における開近傍 V_p を十分小さく取ると, $V_p \subset U_1$ となり, $\phi_p : V_p \to \mathbb{C}$ を $\phi_p(X : 1 : Z) = Z$ と定義することができる. 各 V_p を十分小さく取ると, $\{(V_p, \phi_p)\}_{p \in E}$ は E に複素構造を与える.

4. $E - \{\infty\} = E \cap U_2$ から $\mathbb{C}$ への写像 f を $f(X : Y : 1) = X$ によって定義する. f は E 上の有理型函数を与える. また, この f は E から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への正則写像に一意的に拡張される. $\square$

ヒント: 次の問題の結果を認めて使って良い.

[73] $G(z, w)$ は複素係数の任意の 2 変数多項式函数であるとし, G の z, w に関する偏導函数をそれぞれ G_z, G_w と表わす. $(c, d) \in \mathbb{C}^2$ において $G(c, d) = 0$, $G_w(c, d) \neq 0$ が成立していると仮定する. このとき, c の $\mathbb{C}$ における開近傍 U を十分小さく取ると, U 上の正則函数 g で任意の $z \in U$ に対して $G(z, g(z)) = 0$ を満たすものが唯一存在する. さらに, この g は U 上で $g'(z) = -G_z(z, g(z))/G_w(z, g(z))$ を満たしている. $\square$

ヒント: 多変数の複素正則函数論における陰函数定理の特別な場合である. 例えば, 実多変数函数の陰函数定理を用いて, 以下のようにして証明される. $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$ $(x_i, y_i \in \mathbb{R})$ によって, 実座標 x_i, y_i を導入し, $G = F_1 + iF_2$ $(F_i \in \mathbb{R})$ によって, 実数値函数 F_i を定義する. 同様に, $c = a_1 + ia_2$, $d = b_1 + ib_2$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ としておく. $F(c, d) = 0$, $F_w(c, d) \neq 0$ という条件を f_i に関する条件に書き直すことを考える. すると, F_i の y_i に関する Jacobian が $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ で消えないことがわかる. なぜなら, F に関する Cauchy-Riemann の方程式を使うと, Jacobian に関して次の公式が成立することがわかるからである:

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = |F_w|^2.$$

よって, 実多変数函数の陰函数の定理より, (a_1, a_2) の開近傍 U を十分小さく取ると, U 上の微分可能函数 f_1, f_2 で U 上で $F_i(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = 0$ $(i = 1, 2)$ を満たす

ものが唯一存在する. さらに, f_i の偏導函数は次のように表わされる:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

(ただし, 右辺における $\mathbb{F}_i$ の導函数の y_i には $f_i(x_1, x_2)$ を代入する.) U を $\mathbb{C}$ 内の開集合とみなし, $g = f_1 + if_2$ によって U 上の複素数値函数 g を定める. F に関する Cauchy-Riemann の方程式と f_i の偏導函数の公式を用いて, g は正則函数であることが確かめられる.

[**74**] **(平面曲線としての楕円曲線の位相)** 問題 [**72**] における E は向き付け可能なジーナス 1 の閉曲面に同相である. □

[**75**] **($\mathbb{C}/\Omega$ としての楕円曲線)** $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を任意に取り, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置く. $\mathbb{C}$ における同値関係 $\sim$ を次のように定める: $z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$z \sim w \iff z - w \in \Omega$$

$\mathbb{C}$ の $\sim$ による商空間を $E = E_\Omega = \mathbb{Z}/\Omega$ と書くことにする. $\mathbb{C}$ から E_Ω への自然な射影 π が正則写像になるような複素構造が E に入ることを示せ. □

ヒント: 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して, z の開近傍 V_z を十分小さく取ると, V_z から E_Ω への自然な写像は V_z から $U_z := \pi(V_z)$ への同相写像を与える. その逆写像を ϕ_z と書くと, $\{(U_z, \phi_z)\}_{z\in\mathbb{C}}$ は複素構造である.

[**76**] 問題 [**72**] 状況のもとで以下を示せ. 複素平面内の λ_1 と λ_2 を結ぶ線分を I_1, λ_2 と λ_3 を結ぶ線分を I_2 と書くことにする. I_1 のまわりを 1 周し I_2 と 1 点で交わる単純閉曲線を α_1 と書き, I_2 のまわりを 1 周し I_2 および α_1 と 1 点で交わる単純閉曲線を α_2 と書くことにする. ω_i $(i = 1, 2)$ を次の式によって定義する:

$$\omega_i := \int_{\alpha_i} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - A_2 x - A_3}} \qquad (i = 1, 2).$$

このとき, ω_1 と ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立である. □

ヒント: 直接的に証明する方法を私は知らない. 私の知っている証明は, コンパクト Riemann 面上の微分形式の積分論を一般的に展開し, それを用いるというものである. まず, 所謂 Riemann の不等式を証明し (例えば [岩澤], [Gun]), そのジーナス 1 の特別な場合がこの問題の解答を与える. (この問題の結果を認めて, 以下の問題を解いても良い.)

[**77**] 上の問題の状況のもとで, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置き, Ω に対する $\wp$ 函数を考える. $\wp$ は次の微分方程式を満たしている (すなわち, $A_i = g_i$ $(i = 2, 3)$):

$$\wp'^2 = 4\wp - A_2\wp - A_3. \quad \square$$

ヒント: 楕円不定積分

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - A_2 x - A_3}}$$

の逆函数を $x = f(u)$ と書くと, f は微分方程式 $f'^2 = 4f^3 - A_2 f - A_3$ を満たし, 周期 Ω を持つ楕円函数であることがわかる. このことより, f は周期平行四辺形上で 1 点のみに極 u_0 を持ち, その位数は 2 であり, その点における Laurent 展開の $(u - u_0)^{-2}$ の係数は 1 であることがわかる. よって, $f(u + u_0)$ は $\wp(u)$ に等しい.

[78] 上の問題の続き．上の問題の状況のもとで, $u \mapsto (\wp(u), \wp'(u))$ は $\mathbb{C} - \Omega$ から問題 **[72]** における $E = E_{A_2,A_3}$ への写像 π を定めることがわかる．以下を示せ:

1. π は $\mathbb{C}$ から E への正則写像に一意的に拡張される．(その拡張も π と書くことにする.)

2. π は $\mathbb{C}/\Omega$ から E への正則写像 ϕ を誘導する．

3. ϕ は双正則写像である． □

ヒント: 上の 2 つの問題の結果を認めると簡単である．もちろん, $\wp$ 函数に関する色々な結果は自由に用いて良い．

以上によって, $y^2 = 4x^3 - A_2 x - A_3$ で定義される複素曲線 (Riemann 面) と, 複素平面を lattice Ω で割ってできる Riemann 面は本質的に同じものを違う見方で見たものであることがわかった．その 2 つの Riemann 面の間を繋ぐのが, 楕円不定積分

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

および $\wp$ 函数なのである．

まとめ: この節では 2 つの Riemann 面の族を扱った．1 つは周期格子 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を与えるごとに定まる Riemann 面 $\mathbb{C}/\Omega$ であり, もう 1 つは重根を持たない 3 次式 $f(x) = 4x^3 - A_2 x - A_3$ を与えるごとに定まる $y^2 = f(x)$ なる方程式で定義される射影平面上の複素曲線 E である．そして, Weierstrass の $\wp$ 函数の理論によって得られる結論は, その 2 つの Riemann 面の族は本質的に同じものであるというものである．これによって, $y^2 = f(x)$ によって定義される複素射影曲線上の有理型函数の理論と $\mathbb{C}$ 上の 2 重周期を持つ有理型函数の理論は同等であることがわかったのである．(一般にジーナス 1 の任意のコンパクト Riemann 面はある周期格子 $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対する $\mathbb{C}/\Omega$ に双正則になることを示すことができる.)

7 Riemann 面上の微分形式とその積分

前節の最後の部分で重要な役目を果たしたのは次の形の楕円不定積分であった:

$$(*) \qquad u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - A_2 x - A_3}}.$$

この楕円不定積分の話を抽象化し, この不定積分の定義を明確にするのが, この節の目標である．

7.1 楕円積分の合理化の筋道

楕円不定積分 $(*)$ は正確には複素 x 平面における線積分として定義される．そこで, 注意しなければいけないことは, 複素函数としての平方根は一価函数ではないことである．線積分の経路が $f(x) = 4x^3 - A_2 x - A_3$ の根のまわりを 1 周するたびに $\sqrt{f(x)}$ が -1 倍

の変化をすることに注意をして積分を行なわなければいけない．しかし, 被積分函数の多価性に常に気を配り続けるのは大変である．

多価函数の繁雑さを避けるためには, 考えている多価函数の定義域を適切に制限してしまえば簡単である．例えば, $\sqrt{f(x)}$ の場合は次のように考えることができる．$f(x)$ の根を λ_i $(i = 1, 2, 3)$ と書き, λ_1 と λ_2 を線分 I_1 と λ_3 から ∞ への I_1 と交わらない無限半直線 I_2 を $\mathbb{C}$ から取り除いてできる領域上で $\sqrt{f(x)}$ は一価函数になるのである．

しかし, この制限によって, λ_i のまわりを一周するような積分はできなくなってしまう．この不都合を避けるための 1 つの方法は次のように考えることである．上と同様に線分 I_1 と無限半直線 I_2 を考える．しかし, 今度は I_1, I_2 を取り除いて考えるのではなく, 複素平面 $\mathbb{C}$ に I_1, I_2 の cut(切れ目) が入っているものと考え, 同じ cut の入った複素平面をもう一枚用意しておく．そして, cut の入った 2 枚の複素平面を貼り合わせて (この辺の話は講義でやっているはず), Riemann 面を構成するのである．その Riemann 面上で $\sqrt{f(x)}$ は一価函数になる．λ_i のまわりを一周することは, 出発点にいた複素平面から “切れ目” を通って他方の複素平面に移動することであると解釈されるので, $\sqrt{f(x)}$ の -1 倍分の多価性は定義域の拡張の方に吸収されてしまうのである．

ところが, 被積分函数の定義域が Riemann 面であると考えたければ, その Riemann 面上における線積分の理論が必要になるのである．さらに, 上のようにして構成された Riemann 面だけではなく, 一般の抽象 Riemann 面に対する理論を整備しておいた方が便利である．

7.2 複素平面内の開集合上の微分形式とその積分

まず, $\mathbb{C}$ の開集合上の話から始めよう．$\mathbb{C}$ 全体の座標を z と書き, U はその開集合であるとする．

$z \in \mathbb{C}$ に対して $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と書くことにする．U 上の C^∞ 函数のことを U 上の**可微分 0 形式** (differentiable 0-form) と呼ぶ．U 上の C^∞ 函数 $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ に対する形式和 $a\,dx + b\,dy$ のことを U 上の**可微分 1 形式** (differentiable 1-form) と呼ぶ．さらに, U 上の C^∞ 函数 $c = c(x, y)$ に対する $c\,dx \wedge dy$ を U 上の**可微分 2 形式** (differentiable 2-form) と呼ぶ．

U 上の C^∞ 函数 f に対して, その全微分 $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ は可微分 1 形式である．$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ なる計算規則を可微分 1 形式に C^∞ 函数上双線形に拡張しておく．具体的に式を書き下すと

$$(a\,dx + b\,dy) \wedge (c\,dx + d\,dy) = (ad - bc)\,dx \wedge dy.$$

(注意: ここで 2×2 行列の行列式 $ad - bc$ が現われたのは偶然ではない.) これを微分形式の**外積** (exterior product) と呼ぶ．可微分 1 形式 $a\,dx + b\,dy$ の**外微分**を次のように定義する:

$$d(a\,dx + b\,dy) := da \wedge dx + db \wedge dy = (b_x - a_y)\,dx \wedge dy.$$

可微分 2 形式の外微分は常に 0 であると約束しておく．外微分はそれを 2 回ほどこすと 0 になるという性質を持っている．実際, C^∞ 函数 f に対して,

$$ddf = d(f_x\,dx + f_y\,dy) = (f_{yx} - f_{xy})\,dx \wedge dy = 0.$$

U 上の可微分 p 形式全体のなす空間を $A^p(U)$ と書くことにする ($p \neq 0, 1, 2$ に対しては $A^p(U) = \{0\}$ と置く)．外微分 d によって, $A^\bullet(U)$ は余鎖複体 (cochain complex) をなす．

これを U の de Rham 複体と呼び, そのコホモロジー群 $H^p(A^\bullet(U))$ を U の de Rham コホモロジー群と呼び, $H^p_{\mathrm{DR}}(U,\mathbb{C})$ と表わす.

微分形式の積分を定義しよう. U 上の函数 f と U の有限部分集合 S に対して,

$$\int_S f := \sum_{p\in S} f(p).$$

U 上の可微分 1 形式 $a\,dx + b\,dy$ と U 内の区分的に滑らかな曲線 $\gamma : [t_0,t_1] \to U$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ $(x(t),y(t) \in \mathbb{R})$ に対して,

$$\int_\gamma (a\,dx + b\,dy) := \int_{t_0}^{t_1} \left(a(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + b(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} \right) dt.$$

U 上の可微分 2 形式 $c\,dx \wedge dy$ と U 内のコンパクト部分集合 K に対して,

$$\int_K c\,dx \wedge dy := \int_K c(x,y)\,dx\,dy.$$

つまり, U 上の可微分 p 形式は U 内の p 次元部分空間上での積分の “被積分函数” の役目を果たすのである. 上の一連の定義を見ればわかることだが, 微分形式は記号的には単に積分における $\int$ の記号を省略したものとして定義されたのだと考えることもできる.

[**79**] $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ の de Rham コホモロジー群は次のようになる:

$$H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) \simeq H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}, \qquad H^p_{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) = 0 \quad (p \neq 0). \quad \square$$

参考: $\mathbb{C}^\times$ は極座標を考えることによって $S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$ と同相であることがわかる. $\mathbb{R}_{>0}$ は可縮であるので, $\mathbb{C}^\times$ は S^1 とホモトピー同値である. よって, $H_p(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) \simeq H_p(S^1,\mathbb{C})$ であるから,

$$H_0(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) \simeq H_1(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}, \qquad H_p(\mathbb{C}^\times,\mathbb{C}) = 0 \quad (p \neq 0).$$

が成立する (幾何の方の演習を思い出すこと). これより, $\mathbb{C}$ 係数のホモロジー群と de Rham コホモロジー群はベクトル空間として同型になることがわかる. これはもちろん偶然ではない. 一般に可微分多様体 M に対して, de Rham の定理により, de Rham コホモロジー群はホモロジー群の双対ベクトル空間に自然に同型になるのである:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{C}) \simeq H_p(M,\mathbb{C})^*.$$

U 上の正則函数 $h = h(z)$ に対する $h\,dz$ を U 上の**正則 1 形式** (holomorphic 1-form) と呼ぶ. 記号法上自然に $dz = dx + i\,dy$ であると考える. これによって, 正則 1 形式は自然に可微分 1 形式であるとみなせる. よって, 正則 1 形式の線積分が定義されていると考えて良い. h が U 上の有理型函数であるとき, $h\,dz$ は U 上の**有理型 1 形式** (meromorphic 1-form) であると言う.

7.3 微分形式の座標変換

さて, ここからが大事な点である. 今まで U 上の座標系 $z = x + iy$ を 1 つ固定して話を進めて来た. U に別の座標系 $w = u + iv$ が入っていた場合はどうなるのであろうか? U 上の別の (正則) 座標系とは $\mathbb{C}$ の別の開集合 V から U への双正則写像 $\phi : V \xrightarrow{\sim} U$ のことである. (V には座標系 $w = u + iv$ が入っているとする.) このとき, $z = x + iv$ は $z = \phi(w)$ によって V 上の函数であるとみなせる. この変数変換によって形式的には以下が成立するものと考えられる:

$$
\begin{aligned}
&a\,dx + b\,dy = a\,(x_u\,du + x_v\,dv) + b\,(y_u\,du + y_v\,dv) = (ax_u + by_u)\,du + (ax_v + by_v)\,dv,\\
&c\,dx \wedge dy = c\,(x_u\,du + x_v\,dv) \wedge (y_u\,du + y_v\,dv) = c \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv,\\
&h\,dz = h\,\frac{dz}{dw}\,dw.
\end{aligned}
$$

形式的に得られたこの公式は微分形式の積分の定義とコンパチブルになっている. この公式によって, U 上の可微分 p 形式と V 上の可微分 p 形式を同一視すると, U 上の p 形式としての積分と V 上の p 形式としての積分の値が一致するのである. ϕ を通して U と V を同一視すると, U の有限部分集合 S, U 内の曲線 γ, U のコンパクト部分集合 K のそれぞれと V の有限部分集合 $T = \phi^{-1}(S)$, V 内の曲線 $\eta = \phi^{-1} \circ \gamma$, V のコンパクト部分集合 $L = \phi^{-1}(K)$ が同一視される. $\eta(t) = u(t) + iv(t)$ と表わしておく. このとき, 以下が成立する:

$$
\begin{aligned}
\int_S f &= \sum_{q \in \phi^{-1}(S)} f(\phi(q)) = \int_T (f \circ \phi),\\
\int_\gamma (a\,dx + b\,dy) &= \int_{t_0}^{t_1} (a\,\dot{x} + b\,\dot{y})\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [a\,(x_u\dot{u} + x_v\dot{v}) + b\,(y_u\dot{u} + y_v\dot{v})]\,dt\\
&= \int_\eta [(ax_u + by_u)\,du + (ax_v + by_v)\,dv],\\
\int_K c\,dx \wedge dy &= \int_K c\,dx\,dy = \int_L c \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du\,dv = \int_L c \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv.
\end{aligned}
$$

7.4 Riemann 面上の微分形式

さて, 以上の準備のもとで, Riemann 面上の微分形式を定義しよう. X 上の正則座標近傍 $(U_\lambda, \phi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C})$ に対して, $\mathbb{C}$ の座標系から得られる $\phi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{C}$ 上の座標系を $z_\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$ と書くことにする. X 上の C^∞ 函数とは, X 上の函数 f であって, X 上の任意の正則座標近傍 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ に対して, $f_\lambda := f \circ \phi_\lambda^{-1}$ が $\phi(U_\lambda)$ 上の C^∞ 函数になるもののことである. X 上の C^∞ 函数のことを可微分 0 形式と呼ぶことがある. X 上の任意の正則座標近傍 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ に対して $\phi_\lambda(U_\lambda)$ 上の可微分 1 形式 $g_\lambda = a_\lambda\,dx_\lambda + b_\lambda\,dy_\lambda$ が与えられていて, 任意の他の正則座標近傍 (U_μ, ϕ_μ) に対して, $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上で次の等式が成立しているとき g は X 上の可微分 1 形式であると言う:

$$
\left(a_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} + b_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\mu}\right) dx_\mu + \left(a_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\mu} + b_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial y_\mu}\right) dy_\mu = a_\mu\,dx_\mu + b_\mu\,dy_\mu.
$$

ここで, 正確には左辺の $a_\lambda, b_\lambda, x_\lambda, y_\lambda$ は $\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$ との合成によって $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上の函数とみなしたものである. この等式の左辺は形式的には $a_\lambda\, dx_\lambda + b_\lambda\, dy_\lambda$ に一致することに注意せよ. これに注意すれば, 上の等式を憶え易く次のように書くことができる:

$$a_\lambda\, dx_\lambda + b_\lambda\, dy_\lambda = a_\mu\, dx_\mu + b_\mu\, dy_\mu \qquad \text{on } U_\lambda \cap U_\mu.$$

なお, 実際に可微分 1 形式を得るためには全ての座標近傍に対して g_λ を与える必要はない. X を覆うような座標近傍の族に含まれるような座標近傍に対してのみ g_λ が与えられていれば十分である. 残りの座標近傍に対しては上の等式によって g_μ を定めてやれば良いからである[14]. 可微分 2 形式の定義も同様である. X 上の任意の正則座標近傍 (U_λ, ϕ) に対して $\phi(U_\lambda)$ 上の可微分 2 形式 $g_\lambda = c_\lambda\, dx_\lambda \wedge dy_\lambda$ が与えられていて, 任意の他の正則座標近傍 (U_μ, ϕ_μ) に対して, $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上で次の等式が成立しているとき g は X 上の可微分 2 形式であると言う:

$$c_\lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} & \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\mu} \\ \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\mu} & \frac{\partial y_\lambda}{\partial y_\mu} \end{vmatrix} dx_\mu \wedge dx_\mu = c_\mu\, dx_\mu \wedge dy_\mu.$$

ここで, 正確には左辺の c_λ, etc は $\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}$ との合成によって $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上の函数とみなしたものである. この等式の左辺は形式的には $c_\lambda\, dx_\lambda \wedge dy_\lambda$ に一致することに注意せよ. これに注意すれば, 上の等式を憶え易く次のように書くことができる:

$$c_\lambda\, dx_\lambda \wedge dy_\lambda = c_\mu\, dx_\mu \wedge dy_\mu \qquad \text{on } U_\lambda \cap U_\mu.$$

なお, 実際に可微分 2 形式を得るためには全ての座標近傍に対して g_λ を与える必要はない. X を覆うような座標近傍の族に含まれるような座標近傍に対してのみ g_λ が与えられていれば十分である. 残りの座標近傍に対しては上の等式によって g_μ を定めれやれば良いからである. Riemann 面上の正則 1 形式と有理型 1 形式も全く同じ流儀で定義される. (詳しいことは省略する.) X の開集合もまた Riemann 面であるとみなせるので, 以上によって Riemann 面の開集合上の微分形式も定義されたことになる.

各正則座標近傍上で外積と外微分を考えることによって, Riemann 面上の微分形式の外積と外微分が定義される. Riemann 面 X 上の可微分 p 形式全体の空間を $A^p(X)$ と書くと, 外微分 $d : A^p(X) \to A^{p+1}(X)$ によって余鎖複体 $A^\bullet(X)$ ができる. これを X の de Rham 複体と呼び, そのコホモロジー群を $H^p_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C})$ と書き, X の de Rham コホモロジー群と呼ぶ.

参考: X がジーナス g のコンパクト Riemann 面であるとき, X の de Rham コホモロジー群は次のようになる:

$$H^0_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) \simeq H^2_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}, \quad H^1_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2g}, \quad H^p_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{C}) = 0 \quad (p \neq 0, 1, 2).$$

さらに, X のホモロジー群は次のようになる.

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq H_2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_p(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad (p \neq 0, 1, 2).$$

[14] この定義の仕方は素朴であるが間に合わせ的なものである. 微分形式の定義の仕方は他にも色々な流儀がある. 微分幾何の範疇では, まず余接束 (cotangent bundle) を定義し, その外積の切断 (section) として微分形式を定義することが多い. 代数幾何の範疇では, まず 1 形式の層 (sheaf) をある種の普遍性によって定義し, その外積として p 形式の層を定義することが多い.

X 上の可微分 1 形式 g に対して, その複素共役 $\bar{g}$ を定義しよう. g は

$$g = a\,dz + b\,d\bar{z} \qquad (dz = dx + i\,dy,\ \ d\bar{z} = dx - i\,dy)$$

と書けるので, $\bar{g}$ を

$$\bar{g} = \bar{a}\,d\bar{z} + \bar{b}\,dz$$

と定義する. この式が正則座標 z の取り方によらないことを示せば, この式によって Riemann 面上の可微分 1 形式の複素共役が定義できることがわかる. 他の正則座標を w と書き, $z' = \partial z/\partial w$ と置くと, $\partial\bar{z}/\partial\overline{w} = \overline{z'}$ が成立するので,

$$g = az'\,dw + b\overline{z'}\,d\overline{w}$$

が成立し, 一方, 上の $\bar{g}$ の定義より,

$$\bar{g} = \bar{a}\,d\bar{z} + \bar{b}\,dz = \bar{a}\overline{z'}\,d\overline{w} + \bar{b}z'\,dw = \overline{az'}\,d\overline{w} + \overline{b\overline{z'}}\,dw.$$

よって, z を使って $\bar{g}$ を定義しても w を使って $\bar{g}$ を定義してもそれらは同じものになる.

7.5 正則 1 形式の例

[80] $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置く. $\mathbb{C}$ の座標を u と書くと, du は $\mathbb{C}$ 上の正則 1 形式であり, $\mathbb{C}/\Omega$ 上の正則 1 形式を誘導することを説明せよ. □

次の問題は正則 1 形式の重要な例を与える. 次の問題の $n = 3, 4$ の場合がちょうど楕円積分および楕円曲線の場合に相当している. 一般論の建設の動機になったと思われる例なので, 次の問題を理解しておくことは大変重要である.

[81] $n \geq 1$ 次の複素係数多項式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ は重根を持たないと仮定する. このとき,

$$X' = \{\, (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x) \,\}$$

は自然に Riemann 面とみなせる. さらに,

$$\frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}}$$

は自然に X' 上の正則 1 形式とみなせる. しかも, dx/y は X' 上で零点を持たない. □

ヒント: $f(x)$ の n 個の根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ と書くことにする. $F(x, y) = f(x) - y^2$ と置くと

$$dF(x, y) = f'(x)\,dx - 2y\,dy.$$

(dF が $X' = \{F = 0\}$ 上で 0 にならないことが重要である.) $f(x)$ は重根を持たないと仮定したので $f'(\lambda_i) \neq 0$ であるから $(\lambda_i, 0) \in X'$ の近傍では y を正則座標として採用し, 他の X' の点 (x_0, y_0) に対しては $-2y_0 \neq 0$ であるから x を正則座標として採用することにする. これによって X' に Riemann 面の構造が入ることは容易に確かめられる. 次に dx/y を X' 上の正則 1 形式とみなす方法について説明する. X' 上で $F(x, y) = 0$ であるから, F を X に沿って全微分すると 0 になる. よって, 上の式より, X' 上で $2y\,dy = f'\,dx$.

X' 上の点 $(\lambda_i, 0)$ の近傍では y を正則座標として採用したので, y のみの式で dx/y を表示しよう. $(\lambda_i, 0)$ の近傍においては x は y の正則函数になる. それを $x = x(y)$ と書くことにしよう. $dx = 2y\,dy/f'(x(y))$ であるから,

$$\frac{dx}{y} = \frac{2y\,dy}{f'(x(y))y} = \frac{2\,dy}{f'} \qquad \text{near } (\lambda_i, 0).$$

$(\lambda_i, 0)$ の近傍では $f' \neq 0$ であるから, これは $y = 0$ の近傍における正則 1 形式である. (x_0, y_0) は $(\lambda_i, 0)$ 以外の X' 上の点であるとする. (x_0, y_0) の近傍では x を正則座標として採用したので, dx/y を x のみを使って表示しよう:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad \text{near } (x_0, y_0).$$

ここで, $\sqrt{f(x)}$ の分岐は x_0 において値 y_0 を取るものを選んだ. $\sqrt{f(x)}$ は x_0 の近傍で 0 にならない正則函数であるから, これは $x = x_0$ の近傍における正則 1 形式である. 以上によって, dx/y は X' 上の正則 1 形式を定めることがわかった. dx/y が零点を持たないことは以上によって得られた式を見れば明らかである.

参考: 実は上のように考えると "無限遠" での処理が少々面倒になる. 無限遠点における様子を素朴に処理するためには, "cut" による処方箋の方を使う方が簡単である. 以下, その方法を説明しよう. $f(x)$ の n 個の根を λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ と書く. n が偶数ならば $n = 2g + 2$ によって g を定め, n が奇数ならば $n = 2g + 1$ によって g を定め, $\lambda_{2g+2} = \infty$ と置く. λ_{2k-1} と λ_{2k} を結ぶ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 内の線分を I_k と書く. λ_i を適当に並べ換えることにより $I_1, \ldots, I_{g+1}$ は互いに交わないようにできる. $I_1, \ldots, I_{g+1}$ に cut を入れた $\mathbb{P}^1$ のコピーを 2 つ (X_1, X_2 と書く) 用意し, それらを貼り合わせる. ただし, cut を経由して点が移動するとき, 自然に他方の面に移るように貼り合わせる. こうやってできた位相空間を X と書くことにする. X は位相的にはジーナス g の閉じた閉曲面と同相である. X に複素構造を入れよう. λ_i に対応する X 上の点を P_i と書くことにする. P_i 以外の点 $P \in X$ の近傍は自然に $\mathbb{C}$ の開集合とみなせるので自然に正則座標が入る. これによって, $X - \{P_1, \ldots, P_{2g+2}\}$ は自然に Riemann 面とみなせる. 問題は P_i の近傍にも正則座標を導入して X 全体に複素構造を入れることである. まず, $\lambda_i \neq \infty$ の場合を考える. $\mathbb{C}$ の原点を含む開円板 U を考える. 写像 $f_i : U \to X$ を

$$f_i(w) := \begin{cases} (w^2 + \lambda_i \text{ に対応する } X_1 \text{ の点}) & (\arg w \in [0, \pi]) \\ (w^2 + \lambda_i \text{ に対応する } X_2 \text{ の点}) & (\arg w \in [\pi, 2\pi]) \end{cases}$$

と定義すると, $f(U)$ は P_i の開近傍であり, f_i は U から $f(U)$ への同相写像である. そこで, f_i の逆写像を P_i の近傍における正則座標と考えることにする. f_i の逆写像は $(z - \lambda_i)^{1/2}$ を一価函数とみなしたものである. n が奇数であり $\lambda_{2g} = \infty$ の場合は ∞ の近傍における座標として $u = z^{-1}$ を考え, $u^{1/2}$ を一価函数とみなしたものを正則座標と考えれば良い. これによって, X はジーナス g のコンパクト Riemann 面であるとみなせる. さて, dx/y は $x = \infty$ の近くでどのように振る舞っているのであろうか? それを調べるためには $x = 1/u$ と置き, $u = 0$ の近傍における様子を調べれば良い. $dx = -u^{-2}\,du$ であるから,

$$\frac{dx}{y} = -\sqrt{\frac{u^{n-4}}{a_0u^n + \cdots + a_{n-1}u + a_n}}\,du.$$

$a_n \neq 0$ であることより次が成立していることがわかる:

- n が偶数のとき: dx/y は $u=0$ を中心とする微少な円周上の回転に関する多価性を持たない. $u=0$ に対応する X 上の点は 2 点存在する. dx/y はその 2 点の近傍の有理型に解析接続されるが, それらは平方根の多価性により u に関する有理型 1 形式として互いに異なる.

- n が奇数のとき: dx/y は $u=0$ を中心とする微少な円周上の回転に関して -1 倍の多価性を持つ. $u=0$ に対応する X 上の点は 1 点だけである. dx/y はその 1 点の近傍まで有理型に解析接続される.

また式から明らかなように, $n\geq 4$ のとき dx/y は $u=0$ の近傍でも正則であり, $n=4$ ならば $u=0$ においても 0 にならない. $n=3$ の場合は見掛け上 $u=0$ は dx/y の特異点であるように見える. しかし, それは n が奇数の場合は $u=0$ に対応する X 上の点の近傍の正則座標として u ではなく $u^{1/2}$ を取らなければいけないことを忘れているためである. そこで $u=v^2$ と置くと, 上の式は次のように変形される:

$$\frac{dx}{y}=-2\sqrt{\frac{v^{2(n-3)}}{a_0v^{2n}+\cdots+a_{n-1}v^2+a_n}}\,dv.$$

この式より, $n\geq 3$ のとき, dx/y は無限遠でも正則であることがわかる. さらに, $n=3$ のとき, dx/y は $v=0$ でも 0 にならないこともわかる. 以上をまとめると, $n=3,4$ のとき dx/y はジーナス 1 の Riemann 面 X 上の零点を持たない正則 1 形式を定めることがわかった. (ジーナス 1 の Riemann 面は一般に楕円曲線と呼ばれる.) $n\geq 5$ の場合は, dx/y の定めるジーナス $g\geq 2$ の Riemann 面上の正則 1 形式は無限遠点を除いて零点を持たず, n が偶数のとき $n=2g+2$ であるから 2 つの無限遠点における零点の位数は各々 $g-1$ であり, n が奇数のとき $n=2g+1$ であるから唯一の無限遠点における零点の位数は $2g-2$ である. ($y^2=f(x)$ で定義される Riemann 面は超楕円曲線 (hyperelliptic curve) と呼ばれている. 超楕円曲線のジーナスはいくらでも高くなりうる.)

参考: Riemann 面に関する一般論より, ジーナス $g\geq 1$ のコンパクト Riemann 面上の大域的に定義された 0 でない正則 1 形式は重複を込めて $2g-2$ 個の零点を持つことが知られている. 特に $g=1$ すなわち楕円曲線の場合は大域的に定義された 0 でない正則 1 形式は零点を持たない. $g=0$ すなわち $\mathbb{P}^1$ の場合は有理型 1 形式は重複を込めて最低でも 2 つの極を持つ.

問題 [**81**] のヒントおよび参考において, 重根を持たない $n\geq 1$ 次の複素係数多項式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ に対して,

$$X'=\{\,(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid y^2=f(x)\,\}$$

は自然に Riemann 面であるとみなせ, さらに,

$$\frac{dx}{y}=\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dx}{\sqrt{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}}$$

は X' 上の零点を持たない正則 1 形式を定めることを説明した. X' に無限遠点を付け加えることによって, コンパクト Riemann 面 X を構成することができる. (カットによる構成の仕方を見よ.) n が偶数であるか奇数であるかにしたがって, X' に付け加えるべき

無限遠点の個数は 2 個または 1 個になり, X のジーナス g はそれぞれ $(n-2)/2$ または $(n-1)/2$ になる.

dx/y は X 上の正則 1 形式に一意的に拡張されるのであった. 一般にジーナス g のコンパクト Riemann 面上大域的に正則な正則 1 形式の全体のなす空間の次元は g になることが知られている. $g \geq 1$ のとき, dx/y は X 上の正則 1 形式の 1 つを与えているのだが, 残りの $g-1$ 個の一次独立な正則 1 形式をどのように構成すればよいのであろうか? その解答を次の問題として提出しておこう.

[82] $n \geq 3$ すなわち $g \geq 1$ であると仮定する. このとき,

$$\frac{x^j\,dx}{y} = \frac{x^j\,dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{x^j\,dx}{\sqrt{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}}, \qquad j = 0, 1, \dots, g-1$$

は X 上大域的に正則な正則 1 形式であり, 互いに一次独立である. □

ヒント: 無限遠においても正則であることを示せば十分である. $x = 1/u = 1/v^2$ と置くと,

$$\frac{x^j\,dx}{y} = -\sqrt{\frac{u^{n-2j-4}}{a_0 u^n + \cdots + a_{n-1} u + a_n}}\,du = -2\sqrt{\frac{v^{2(n-2j-3)}}{a_0 v^{2n} + \cdots + a_{n-1} v^2 + a_n}}\,dv.$$

n が偶数のとき, $n = 2g+2$ であり, X の無限遠点における正則局所座標として u を採用できるので, $n-2j-4 = 2(g-1-j) \geq 0$ のとき, $x^j\,dx/y$ は無限遠点においても正則でもある. n が奇数のとき, $n = 2g+1$ であり, X の無限遠点における正則局所座標して v を採用できるので, $n-2j-3 = 2(g-1-j) \geq 0$ のとき, $x^j\,dx/y$ は無限遠点においても正則である.

7.6 Riemann 面上の微分形式の積分

さて, 次に Riemann 面 X 上の p 形式の積分を定義しよう. X 上の可微分 p 形式とは各座標近傍上の可微分 p 形式の族であり, dx や dy や dz という記号に関して自然な座標変換則を満たすものとして定義したのであった. その座標変換則は積分の定義とコンパチブルになっていることも説明した. よって, p 形式の積分は各座標近傍上に分けて定義し, それらを貼り合わせることによって定義すれば良いことがわかる. 異なる座標近傍上で自然に積分を定義すれば, その値は座標近傍の取り方によらないので, 貼り合わせはうまく行くと考えられるからである. 例えば, X 上の正則微分形式 h と区分的に滑らかな曲線 $\gamma : [a,b] \to X$ に対して, 積分 $\int_\gamma g$ を定義する方法を説明しよう. 区間 $[a,b]$ を $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ と分割して, 各 $[a_{k-1}, a_k]$ が X 上の 1 つの座標近傍 (U_k, ϕ_k) に含まれるようにできる. $\phi_k(U_k)$ 上の座標を z_k と書き, $z_k(t) = \phi_k(\gamma(t))$ $(t \in [a_{k-1}, a_k])$ と置く. $\phi(U_k)$ 上で h は $h_k(z_k)\,dz_k$ に等しいものとする. γ に沿った h の積分は以下のように定義される:

$$\int_\gamma h := \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} h_k(z_k(t)) \frac{dz_k(t)}{dt}\,dt.$$

この積分の値は区間の分割と正則座標近傍の取り方によらない.

初心者の人は複雑なことをしているように見えて難しく感じるかもしれないが, 微分形式は積分の変数変換の規則を $\int$ 抜きで定式化したものに過ぎないので, その積分の定義が座標の取り方によらないということは当然のことであると理解して欲しい.

さて, 2 次元における微分積分学の基本定理は Green の公式であった. Green の公式は Riemann 面上でも全く同様な形で成立することが証明できる[15].

Green の公式: Riemann 面 X 上の可微分 1 形式 g と X 内の境界が区分的に滑らかな相対コンパクト領域 K に対して,

$$\int_{\partial K} g = \int_K dg$$

が成立する. ここで, K の境界 ∂K は K を左手に見ながら進む方向に向き付けられているとする.

Green の公式の特別な場合として Cauchy の積分定理が得られるのであった.

Cauchy の積分定理: Riemann 面 X 上の正則 1 形式 θ と X 内の始点と終点が等しい 2 つの曲線 a, b に対して, a を b に始点を終点を固定したまま連続的に変形できるならば,

$$\int_a \theta = \int_b \theta$$

が成立する. すなわち, 正則 1 形式の線積分は積分経路のホモトピー類 (始点と終点は固定) のみによる.

注意: 上の条件のもとで等式 $\int_a \bar{\theta} = \overline{\int_a \theta}$. が成立する.

複素平面の領域上の函数論の場合と同様に, Riemann 面上の有理型 1 形式に対しても, 零点, 極, 留数などの概念が定義される. 正則 1 形式の正則座標近傍上での零点もしくは極の位数および留数が正則座標変換によって変化しないことを確かめれば良い.

以上の結果の応用として以下を示せ. 以下の問題の解答は全て閉曲面のトポロジーに関する結果と微分形式の積分論を組合せてある種の公式を導くというパターンになっていることに注目せよ.

[83] (留数定理) コンパクト Riemann 面上の有理型 1 形式の全ての極にわたる留数の和は 0 に等しい. □

ヒント: コンパクト Riemann 面 X のジーナスが g ならば X は $4g$ 角形の辺を貼り合わせてできる面と同相である. X 上の有理型 1 形式 θ を $4g$ 角形に引き戻して考える. すると, θ の留数の和は $4g$ 角形の周囲に沿った線積分を $2\pi i$ で割ったものに等しくなる. ところが, その積分経路を X 上で観察すると, $2g$ 個の閉曲線を各々2 度づつしかも互いに逆向きに通ることがわかる. そのような経路に沿った積分は 0 でなければいけない.

[15] 各座標近傍上の Green の公式を X 全体に拡張する方法には少なくとも 2 通りの方法がある. 1 つは X を細かく三角形分割し, 各三角形が 1 つの座標近傍に入るようにし, 各三角形ごとに考えるという方法である. もう 1 つは 1 の分割を使い, 微分形式を台が 1 つの座標近傍に入るような微分形式の局所有限和に分解するという手法である. このようなことは, 多様体論の講義で説明されると思うので, ここでは詳しいことは省略する.

[84] **(楕円曲線の周期積分の $\mathbb{R}$ 上の一次独立性)** X はジーナス 1 のコンパクト Riemann 面であるとし, ϕ は X 上の 0 でない正則 1 形式であるとする. X はトーラスに同相なので, X は四角形の対辺を貼り合わせることによって作ることができる. もとの四角形の 4 辺の X における像は 2 つの閉じた曲線になる. その 2 つの閉曲線に任意に向きを付けたものを α, β と書くことにする[16]. $\xi, \omega \in \mathbb{C}$ を次の積分によって定義する:

$$\xi := \int_\alpha \phi, \qquad \omega := \int_\beta \phi.$$

このとき, ξ と ω は $\mathbb{R}$ 上一次独立である. □

ヒント: 四角形を K と書き, 全ての話を K に引き戻して考える. K の周囲をまわる曲線を K の辺を左まわりに a, b, c, d と書くとき, α, β はそれぞれ a, b の X における像であると仮定して良い. (必要なら α と β を置き換えたり, β を $-\beta$ で置き換えたりすれば良い.) 座標近傍上で $\phi = g\,dz$ と書けているとき, その座標近傍上で,

$$\bar\phi \wedge \phi = 2i|g|^2 dx \wedge dy.$$

よって,

$$0 < \frac{1}{2i}\int_X \bar\phi \wedge \phi = \frac{1}{2i}\int_K \bar\phi \wedge \phi.$$

これを Green の公式を使って書き変えることを考える. K の内側の点 P_0 を任意に取り, P_0 から P への経路に関する積分の値

$$f(P) = \int_{P_0}^P \phi$$

は K の単連結性より経路の取り方によらない. f は正則函数であり, $df = \phi$ を満たしているので,

$$d(\bar f\,\phi) = \bar\phi \wedge \phi$$

が成立する. 四角形の辺 a と辺 c の上の互いに貼り合わさる点をそれぞれ P, Q と書くと $f(Q) = f(P) + \int_b \phi = f(P) + \omega$ が成立している. 四角形の辺 b と辺 d の上の互いに貼り合わさる点をそれぞれ P, Q と書くと $f(Q) = f(P) - \int_a \phi = f(P) - \xi$ が成立している. よって,

$$\begin{aligned}\int_K \bar\phi \wedge \phi &= \int_{\partial K} \bar f\,\phi = \int_a \bar f\,\phi + \int_b \bar f\,\phi - \int_a (\bar f + \overline{\omega})\phi - \int_b (\bar f - \bar\xi)\phi \\ &= \int_b \bar\xi \phi - \int_a \overline{\omega}\phi = \bar\xi \int_\beta \phi - \overline{\omega}\int_\alpha \phi = \bar\xi\omega - \xi\overline{\omega} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar\xi\omega).\end{aligned}$$

以上の結果をまとめると

$$\mathrm{Im}(\bar\xi\omega) > 0$$

であることがわかる[17]. このことより, ξ と ω は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることがわかる. (例えば, もしも ξ が ω の実数倍ならば $\bar\xi\omega$ は $|\omega|^2$ の実数倍になるので, $\mathrm{Im}(\bar\xi\omega) = 0$ となってしまう.)

[16] α, β は X の 1 次のホモロジー群 $H_1(X, \mathbb{Z})$ を生成する.

[17] この不等式より, ϕ を定数倍して $\xi = 1$ となるようにすると $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ が成立することがわかる. このとき, ω は τ と書かれることが多い.

[85] (Riemann の等式と不等式) X はジーナス $g \geq 1$ のコンパクト Riemann 面であり, ϕ と ϕ' は X 上の正則 1 形式であるとする. $4g$ 角形の周囲の辺を左まわりに順に (向きも込めて)

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_g, b_g, c_g, d_g$$

と書くとき, a_k, b_k をそれぞれ c_k, d_k と逆向きに貼り合わせてできる閉曲面と X は同相である. a_k, b_k の像をそれぞれ α_k, β_k と書き, $\xi_k, \omega_k, \xi'_k, \omega'_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \dots, g)$ を次のように定める:

$$\xi_k := \int_{\alpha_k} \phi, \qquad \omega_k := \int_{\beta_k} \phi, \qquad \xi'_k := \int_{\alpha_k} \phi', \qquad \omega'_k := \int_{\beta_k} \phi'.$$

このとき, 以下が成立する:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{g} (\xi_k \omega'_k - \omega_k \xi'_k) = 0 \quad$ (Riemann の等式).

2. ϕ が 0 でないならば $\quad \displaystyle\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{g} \bar{\xi}_k \omega_k\right) > 0 \quad$ (Riemann の不等式). □

ヒント: $4g$ 角形を K と書き, K の内側の点 P_0 を任意に取り,

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} \phi \qquad (P \in K)$$

によって函数 f を定義する. このとき, 1 つ前の問題のヒントと同様の方法で計算すると,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_K \phi \wedge \phi' = \int_{\partial K} f\phi' = \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} f\phi' + \int_{b_k} f\phi' - \int_{a_k} (f + \omega_k)\phi' - \int_{b_k} (f - \xi_k)\phi' \right) \\
&= \sum_{k=1}^{g} \left(\xi_k \int_{\beta_k} \phi' - \omega_k \int_{\alpha_k} \phi' \right) = \sum_{k=1}^{g} (\xi_k \omega'_k - \omega_k \xi'_k).
\end{aligned}$$

これで (1) が証明された. 同様の計算を $\bar{\phi} \wedge \phi$ に対して実行すれば (2) の証明が得られる:

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{2i} \int_K \bar{\phi} \wedge \phi = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{f}\phi = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} \bar{f}\phi + \int_{b_k} \bar{f}\phi - \int_{a_k} (\bar{f} + \overline{\omega}_k)\phi - \int_{b_k} (\bar{f} - \bar{\xi}_k)\phi \right) \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{g} \left(\bar{\xi}_k \int_{\beta_k} \phi - \overline{\omega}_k \int_{\alpha_k} \phi \right) = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{g} (\bar{\xi}_k \omega_k - \overline{\omega}_k \xi_k) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{g} \bar{\xi}_k \omega_k \right).
\end{aligned}$$

8 楕円函数の間の代数関係

$\mathbb{C}$ 上の 2 つの有理型函数 f, g の間に代数関係 (algebraic relation) が存在するとは, ある 0 でない複素係数の多項式 $F(X, Y)$ で $F(f, g) = 0$ を満たすものが存在することであると定義する.

[86] 代数関係が存在するという条件は有理型函数全体の空間に同値関係を定める. □

ヒント: 推移律を示すためには「消去法」が必要である[18]. そのためには次の問題における Sylvester の行列式を用いるのが簡単である. 有理型函数 f, g, h の間に代数関係 $F(f,g)=0$, $G(g,h)=0$ が存在すると仮定する. $\mathbb{C}$, f, h から生成される有理型函数体の部分体を K と書くと, $F(f,X)$, $G(X,h)$ は K 係数の多項式とみなせる. この 2 つの多項式は g という共通の根を持つので, F, G に対する Sylvester の行列式は 0 になり, それは f と h の代数関係を与えることがわかる.

[87] (Sylvester の行列式) 次の $m+n$ 次の行列式で定義される文字 $A_0,\dots,A_m,B_0,\dots,B_n$ の有理整数係数の多項式 $S(A,B)$ を Sylvester の行列式と呼ぶ:

$$S(A,B) := \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_m & & & \text{\huge 0} \\ & A_0 & A_1 & \cdots & A_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & A_0 & A_1 & \cdots & A_m \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n & & & \text{\huge 0} \\ & B_0 & B_1 & \cdots & B_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & B_0 & B_1 & \cdots & B_n \end{vmatrix}.$$

ここで, $A=(A_0,\dots,A_m)$, $B=(B_0,\dots,B_n)$. k は任意の代数閉体であるとし[19], $a_i, b_j \in k$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ に対して, 多項式 f, g を次のように定める:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \quad g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n.$$

$S(A,B)$ における A, B に $a=(a_0,\dots,a_m)$, $b=(b_0,\dots,b_n)$ を代入して得られる k の元を $S(a,b)$ と書くことにする. このとき, f と g が共通根を持つことと $S(a,b)=0$ が成立することは同値である. □

ヒント: 例えば [佐武] の p.70 を見よ. まず, k は任意の体であるとし, ある $\alpha \in k$ が存在して $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$ が成立するならば $S(a,b)=0$ となることを示そう[20]. $m+n$ 個の不定元 $x_0,\dots,x_{m+n-1}$ に関する次の連立一次方程式を考える:

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_m &= 0, \\ a_0x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_mx_{m+1} &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ a_0x_{n-1} + a_1x_n + \cdots + a_nx_{m+n-1} &= 0, \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n &= 0, \\ b_0x_1 + b_1x_2 + \cdots + b_nx_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ b_0x_{m-1} + b_1x_m + \cdots + b_nx_{m+n-1} &= 0. \end{aligned}$$

[18] 消去法の一般論については [vdW] の II を見よ.

[19] 体論の一般論より, 任意の体は代数閉体に埋め込めることが知られている. したがって, この仮定は本質的なものではない.

[20] 問題 **[86]** を解くためにはこれを示せば十分である. よって, 問題 **[86]** を解くためには k を含む代数閉体が存在するという結果を使う必要はない.

$\alpha \in k$ に関して $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$ が成立しているとき, この連立一次方程式は

$$x_0=\alpha^{m+n-1},\ x_1=\alpha^{m+n-2},\ \ldots,\ x_{m+n-2}=\alpha,\ x_{m+n-1}=1$$

を解に持つ. よって, 行列式 $S(a,b)$ は 0 にならなければいけない. 次に k が代数閉体であると仮定し, $S(a,b)=0$ が成立することと f と g が共通の根を持つことは同値であることを示そう. k は代数閉体であると仮定すると, ある $\alpha_i,\beta_j \in k$ が存在して,

$$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i), \qquad g(x)=b_0\prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j)$$

が成立する. もしも, 次の公式が示されたならば, $S(a,b)=0$ と f と g が共通の根を持つことは同値であることがわかる:

$$(*) \qquad S(a,b)=a_0^n b_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j).$$

よって, 以下この公式を示すことを目標とする. 任意の文字 c に対して,

$$S(cA,B)=c^nS(A,B), \qquad S(A,cB)=c^mS(A,B).$$

が成立する. よって,

$$S(a,b)=a_0^nb_0^mS(a/a_0,b/b_0)$$

であるから, $a_0=b_0=1$ の場合に $(*)$ を示せば良いので, 以下これを仮定する. $(*)$ を証明するためには, α_i, β_j を不定元 s_i, t_i で置き換えて $(*)$ を証明すれば良い. このとき, 解と係数の関係より,

$$a_i=(-1)^i\sum_{1\le l_1<\cdots<l_i\le m}s_{l_1}\ldots s_{l_i}, \qquad b_j=(-1)^j\sum_{1\le l_1<\cdots<l_j\le n}t_{l_1}\ldots t_{l_j}.$$

このような置き換えを $S(a,b)$ にほどこすことによって得られる s_i, t_j の多項式を $R(s,t)$ と書くことにする. $S(a,b)$ は f と g が共通根を持つとき 0 になることを上で示したので, i, j を任意に選び s_i に t_j を代入すると $R(s,t)$ は 0 になる. よって, $R(s,t)$ は

$$\phi(s,t):=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}(s_i-t_j)$$

で割り切れる. 一方, 行列式の定義より, $i=0,\ldots,m$ 以外の i に対して $a_i=0$ と置き, $j=0,\ldots,n$ 以外の j に対して $b_j=0$ と置くと, $S(a,b)$ は以下の形の項の和で表わせる:

$$(**) \qquad \pm a_{i_1-1}a_{i_2-2}\cdots a_{i_n-n}b_{i_{n+1}-1}b_{i_{n+2}-2}\cdots b_{i_{n+m}-m}.$$

ここで, $(i_1,i_2,\ldots,i_{m+n})$ は $(1,2,\ldots,m+n)$ の任意の置換であり, $\pm$ はその置換の符号である. よって, その和における 0 でない項の s_i, t_j の多項式に関する次数は a_i, b_j の次数がそれぞれ i, j であることより,

$$\sum_{l=1}^{n}(i_l-l)+\sum_{l=1}^{m}(i_{n+l}-l)=\sum_{l=1}^{m+n}i_l-\sum_{l=1}^{n}l-\sum_{l=1}^{m}-l=\tfrac{(m+n)(m+n+1)}{2}-\tfrac{n(n+1)}{2}-\tfrac{m(m+1)}{2}=mn.$$

一方, $\phi(s,t)$ の多項式としての次数も mn なので, $R(s,t)$ は $\phi(s,t)$ の定数倍でなければいけない. その定数を決定するために特殊な項の係数を比べよう. $(**)$ が 0 でなくてしかも b_n^m で割り切れるのは $(i_1,\dots,i_{m+n})=(1,\dots,m+n)$ の場合に限る. このとき, $(**)$ の $\pm$ は $+$ の方になる. よって, $R(s,t)$ における $b_n^m=(-1)^{mn}t_1^m\cdots t_n^m$ の係数は 1 である. 一方, $\phi(s,t)$ における $(-1)^{mn}t_1^m\cdots t_n^m$ の係数も同じく 1 であることは容易にわかる. 以上によって, $R(s,t)=\phi(s,t)$ であることが示されたことになる.

参考: Vandermonde の行列式に関する公式の証明 (例えば [佐武] の p.53) と上のヒントにおける論法を比べてみよ. どちらも, 行列式の零点, 行列式の多項式としての次数, 特別な項の係数の 3 つを調べることによって解答を得ている. 任意の楕円函数が σ 函数で書けるという結果の証明も似たような原理に基いている. 等式を証明するとき (特に "因数分解" をするとき) このような論法は標準的である.

[88] **(2 つの楕円函数の間の代数関係の存在)** 同じ周期格子に関する 2 つの楕円函数の間には常に代数関係が存在する. □

ヒント: 任意の楕円函数と $\wp$ が代数関係を持つことを示し, 問題 [**86**] の結果を適用せよ.

参考: 拡大体の超越次数 (transcendental degree) の概念を使うことが許されるなら上の問題の結果の証明は簡単である. 周期格子 Ω に対する楕円函数体 K は $\mathbb{C}$, $\wp$, $\wp'$ から生成され, $\wp$ は $\mathbb{C}$ 上超越的であり, $\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$ であるから, K の $\mathbb{C}$ 上の超越次数は 1 である. (より一般に K がコンパクト Riemann 面 X の代数函数体 (X 上の有理型函数全体のなす体) であるとき, K の $\mathbb{C}$ 上の超越次数は 1 になる. 超越次数が 1 であることは X の $\mathbb{C}$ 上の次元が 1 であることに対応している[21].) よって, K と $\mathbb{C}$ の中間体の超越次数は 1 以下である. 特に, 任意の $f,g\in K$ から生成される $\mathbb{C}$ と K の中間体 $\mathbb{C}(f,g)$ の $\mathbb{C}$ 上の超越次数は 1 以下である. よって, f と g の間には代数関係が存在しなければいけない. (なぜなら, もしも代数関係が存在しないならば $\mathbb{C}(f,g)$ は $\mathbb{C}$ 上の 2 変数の有理函数体と同型になるので, $\mathbb{C}(f,g)$ の超越次数は 2 になってしまう.) 拡大体の超越次数の理論はベクトル空間の次元の理論に似ている. 超越次数についての解説については任意の代数学の教科書を見よ.

[89] **(楕円函数が微分方程式を満たすこと)** 任意の楕円函数 f に対して, ある 0 でない複素係数多項式 $F(X,Y)$ が存在して, $F(f,f')=0$ が成立する. □

ヒント: f が楕円函数なら f' もそうである. よって, f と f' の間には代数関係が存在する.

[90] **(楕円函数の代数的加法性)** 任意の楕円函数 f に対して, ある 0 でない複素係数多項式 $F(X,Y,Z)$ が存在して, u, v の有理型函数として $F(f(u+v),f(u),f(v))=0$ が成立する. □

[21] 拡大体の超越次数は独立なパラメーターが何個あるかを測る量である. 体 K が別の体 k の拡大体になっているとき, K の k 上の超越基とは K の代数的に独立な部分集合 S であって K が $k(S)$ 上代数拡大になるようなもののことである. 超越基の元の個数 (無限の場合は基数) を K の k 上の超越次数と呼ぶ. 例えば, 超越基が $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ であるとき, $k(S)=k(s_1,\dots,s_n)$ は k 上の n 変数の有理式体になり, K の任意の元は $k(s_1,\dots,s_n)$ 係数の多項式の根になっているのである. $s_1,\dots,s_n$ は k 上独立な n 個のパラメーターであると考えられる. 直観的には拡大体の超越次数が (代数) 多様体の次元と関係するのは当然であろう. (多様体の次元の定義にもなりうる.)

ヒント: 消去法を用いた証明は [HC] の p.31 や [竹内] の p.153 にある. ここではあえて体の超越次数をの概念用いた証明を与えよう. $\mathbb{C}$ 上 $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$ から生成される 2 変数の有理型函数全体のなす体を L と書くことにする. L は $\wp(u), \wp(v)$ を $\mathbb{C}$ 上の超越基として持つので L の $\mathbb{C}$ 上の超越次数は 2 である. $f(u), f(v) \in L$ は互いに代数的に独立である. よって, $f(u+v) \in L$ を示すことができれば, $f(u), f(v), f(u+v)$ は $\mathbb{C}$ 上代数的に独立ではないことがわかる. $\wp$ の加法公式より $\wp(u+v) \in L$ である. 加法公式を u で偏微分し $\wp''$ を $\wp$ と $\wp'$ の式で置き直すことにより, $\wp'(u+v) \in L$ であることもわかる. さらに, 複素係数の有理式 $F(X,Y)$ が存在して $f = F(\wp, \wp')$ が成立する. よって, $f(u+v) = F(\wp(u+v), \wp'(u+v)) \in L$ である.

9 Weierstrass の楕円函数達に関する雑多な問題

この節の問題は [WW] の第 XX 章のから取って来たものである. 例によって, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立と仮定し, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置く.

9.1 雑多な問題

[91] $f(t) = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4$ $(a_0 \neq 0)$ と置く. 不定積分 $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$ を $\wp$ 函数で表示する方法を説明せよ. □

ヒント: [WW] 20.6 (pp.452), [HC] 第 6 章 §2. 積分変数を $\tau = (t - x_0)^{-1}$ と変換すると $d\tau/\sqrt{\tau \text{ の 3 次式}}$ の積分に帰着できることがわかる.

[92] $\wp(u)$ 函数の定義と類似の方法で $\operatorname{cosec}^2 u = 1/\sin^2 u$ を定義し, それを出発点にし三角函数論を展開せよ. □

ヒント: $\operatorname{cosec}^2 u = 1/\sin^2 u$ は次のような無限部分分数展開を持つのであった:

$$\operatorname{cosec}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

(特に, $\wp(u)$ の定義式において $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 \to +i\infty$ とすると, $\wp(u)$ は $\operatorname{cosec}^2 u - 1/3$ に収束することがわかる[22].) 話を逆転させ, $\omega \in \mathbb{C}^\times$ に対して, 有理型函数 $p(u)$ を

$$p(u) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u - m\omega)^2}$$

と定義し (もちろんこれは $\frac{\omega^2}{\pi^2} \operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{\omega} u)$ に一致する.) この函数の性質を $\wp$ 函数の場合と同様の手法を用いて調べてみよ. 詳しい計算は [WW] の 20.222 (p.438) に書いてある.

[22] $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 \to +i\infty$ とすると,

$$\wp(u) \to \frac{1}{u^2} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(u - m\pi)^2} - \frac{1}{(m\pi)^2} \right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u - m\pi)^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \operatorname{cosec}^2 u - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

[93] Weierstrass の $\wp$ 函数を u と $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ の函数とみなしたものを $\wp(u;\Omega)$ と書き, u, g_2, g_3 の函数とみたものを $\wp(u; g_2, g_3)$ と書くと, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して次が成立する:

$$\wp(\lambda u; \lambda\Omega) = \lambda^{-2}\wp(u;\Omega), \qquad \wp(\lambda u; \lambda^{-4}g_2, \lambda^{-6}g_3) = \lambda^{-2}\wp(u; g_2, g_3). \quad \square$$

ヒント: [WW] 20.222 Example 2 (p.439). 前者の式を $\wp$ の定義から直接示せ. $\wp$ の原点の Laurent 展開を調べることによって, g_2, g_3 は次のように表わされることを示せ:

$$g_2 = 60 \sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

(実は問題 **[32]**, **[36]** ですでに示されている.)

[94] $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ であり, 判別式 (discriminant) $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ は正であると仮定する. このとき, $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ の 3 つの根 e_1, e_2, e_3 は互いに異なる実数になる. $e_1 > e_2 > e_3$ であると仮定すると, $x > e_1$ において $f(x) > 0$ であり, $x < e_3$ において $f(x) < 0$ である. いつものように正の実数の平方根は正の実数になるものと約束し,

$$\omega_1 = 2\int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \qquad \omega_3 = -2i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-f(x)}}$$

と置く. ω_2 を $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ という条件によって定め, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ に対する $\wp$ 函数を考える. このとき, $\wp(u)$ は実軸上実数値であり, 次が成立する:

$$\wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right) = e_k \qquad (k = 1, 2, 3). \quad \square$$

ヒント: [WW] 20.32 Example 1 (p.444). $\wp(u)$ 函数は

$$u = \int_{\wp(u)}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

によって定義されているとみなせる. Riemann 面上での様子を描いてみよ.

ω_1, ω_2 が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとき, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ によって ω_3 を定義することにする.

[95] $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ に対する $\wp$ 函数に関して次が成立している:

$$\wp'(u)\wp'(u + \omega_1/2)\wp'(u + \omega_2/2)\wp'(u + \omega_3/2) = \Delta.$$

ここで, 右辺の Δ は $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ の判別式 $g_2^3 - 27g_3^2$ である. $\square$

ヒント: [WW] 20.33 Example 3 (p.444).

$i = 1, 2, 3$ に対して, $\sigma_i(u)$ を次のように定義する[23]:

$$\sigma_i(u) = e^{-\frac{\eta_i}{2}u} \frac{\sigma(u + \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)}.$$

ここで, $\eta_i = \zeta(u + \omega_i) - \zeta(u) = \text{const.}$ である. さらに, $\sigma_0(u) = \sigma(u)$ と置く. 以前と同様に $e_i = \wp(\omega_i/2)$ と置く.

[23] Jacobi の ϑ 函数 ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 はそれぞれ σ_3, σ_0, σ_1, σ_2 に密接に関係する. 番号が巡回的にずれている点には注意しなければいけない.

[96] $m_1, m_2 \in \Omega$ に対して,

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \qquad \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

と置くと次が成立する:

$$\sigma_i(u+\omega) = (-1)^{(1+\epsilon_1)m_1+(1+\epsilon_2)m_2+m_1m_2} e^{\eta\left(u+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma_i(u) \qquad (i=0,1,2,3).$$

ただし, $i=0,1,2,3$ のそれぞれの場合に応じて, $(\epsilon_1,\epsilon_2) = (0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ であるものとする. □

ヒント: $\sigma(u)$ の準周期性に関する公式と Legendre の関係式 $\eta_1\omega_2 - \omega_1\eta_2 = 2\pi i$ を使う.

[97] σ_i と $\wp$, e_i の間には次の関係式が成立している:

$$\wp(u) - e_i = \frac{\sigma_i(u)^2}{\sigma_0(u)^2}. \quad \square$$

ヒント: [WW] 20.53 Example 4 (p.451). $\wp(u)-\wp(v)$ を σ 函数で表示する式 (問題 **[56]** の (2)) を利用せよ. (詳しい証明は [HC] の第 2 章 §4 に書いてある.)

[98] ϕ に関する線型常微分方程式

$$(*) \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2} + 3\wp(u)\right)\phi = -\frac{3}{2}b\,\phi$$

を考える. 方程式 $(*)$ は次の形の解を持つ:

$$f(u) = \frac{d}{du}\left[\frac{\sigma(u+c)}{\sigma(u)\sigma(c)}\exp\left\{\frac{u\wp'(c)}{b-2\wp(c)} - u\zeta(c)\right\}\right].$$

ただし, c は次の方程式を満たす定数である:

$$(b^2-3g_2)\wp(c) = 3(b^3+g_3).$$

さらに, 方程式 $(*)$ は次の形の解も持つ:

$$g(u) = e^{-u(\zeta(a_1)+\zeta(a_2))}\frac{\sigma(u+a_1)\sigma(u+a_2)}{\sigma(u)^2}.$$

ただし,

$$\wp(a_1)+\wp(a_2) = b, \qquad \wp'(a_1)+\wp'(a_2) = 0$$

であり, a_1+a_2 と a_1-a_2 は周期格子に含まれない. □

ヒント: これは [WW] の第 XX 章の Miscellaneous Examples の 29 番である. 定義より σ, ζ, $\wp$ の間には $\sigma' = \zeta\sigma$, $\zeta' = -\wp$ という関係式が存在する.

9.2　三項方程式

函数 $f(u)$ が三項方程式 (three term equation) もしくは三項等式 (three term identity) を満たしているとは, 次の式が任意の a,b,c,d に対して次の等式が成立していることである[24]:

$$
\begin{aligned}
f(a+b)f(a-b)f(c+d)f(c-d) + f(a+c)f(a-c)f(d+b)f(d-b)& \\
+ f(a+d)f(a-d)f(b+c)f(b-c) = 0.&
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

例えば, $f(u)=u$ は三項方程式を満たしている. 実際, $f(u)=u$ に関する三項等式は, 公式

$$(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

を使えば, 次の公式に帰着される:

$$(A-B)(C-D)+(A-C)(D-B)+(A-D)(B-C)=0 \tag{$\sharp$}$$

さらに, $f(u)=\sin u$ も三項方程式を満たしていることが簡単に確かめられる. なぜなら, $s(u)=\sin u$, $c(u)=\cos u$ 等と置くと,

$$
\begin{aligned}
s(u+v)s(u-v) &= (s(u)c(v)+c(u)s(v))(s(u)c(v)-c(u)s(v)) = s(u)^2c(v)^2 - c(u)^2s(v)^2 \\
&= s(u)^2(1-s(v)^2) - (1-s(u)^2)s(v)^2 = s(u)^2 - s(v)^2.
\end{aligned}
$$

これは公式 $(u+v)(u-v)=u^2-v^2$ の三角函数類似である[25]. よって, $f(u)=u$ の場合と同様に, $f(u)=\sin u$ に関する三角等式は公式 ($\sharp$) に帰着される.

注意: $f(u)$ が三項方程式を満たすとき, $ce^{\alpha u^2}f(\lambda u)$ $(c,\alpha,\lambda\in\mathbb{C})$ も三項方程式を満足する. このことは, $(a+b)^2+(a-b)^2+(c+d)^2+(c-d)^2 = 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$ を使えば容易に確かめられる.

さて, 次に Weierstrass の σ 函数も三項方程式を満たしていることを証明しよう. ([WW] 20.53 (pp.450–452) または [竹内] 第三章 29 節 (pp.141–144) の記述も参考になるであろう.) まず, 問題 [**56**] (2) の証明の説明から話を始める. 問題 [**56**] (2) は次の公式を証明せよという問題であった:

$$\wp(u)-\wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}. \tag{!}$$

この公式は以下のようにして証明される. $v\notin\frac{1}{2}\Omega$ を任意に固定し $f(u)=\wp(u)-\wp(v)$ と置く. このとき, $f(u)$ の零点と極の重複度を込めた代表系は次のようになる:

$$\text{零点:}\quad -v, v; \qquad \text{極:}\quad 0, 0.$$

よって, 問題 [**55**] の結果より, ある定数 $C\in\mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\wp(u)-\wp(v) = f(u) = C\,\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2}.$$

[24] 2 次元可解格子模型で重要な face 型の Yang-Baxter 方程式の解の構成において三項方程式は基本的である. 可解格子模型や量子可積分系の現代的な研究において, 古典楕円函数論における多くの公式は新たな光を当てられその重要性が再認識されつつある.

[25] この部分節の内容は, 有理函数に関して成立する公式を三角函数, 楕円函数の場合に拡張せよという問題の一部になっている.

定数 C の値を決定しよう. この式の両辺に u^2 を掛けて $u \to 0$ とすると, $\wp(u) = 1/u^2 + O(u^2)$, $\sigma(u) = u + O(u^5)$, $\sigma(-v) = \sigma(v)$ であるから,

$$1 = C\sigma(-v)\sigma(v) = -C\sigma(v)^2.$$

よって, $C = -1/\sigma(v)^2$ であることがわかった.

[99] 以上の結果を用いて, σ 函数が三項方程式を満たすことを証明せよ. □

ヒント: 公式 (!) より,

$$\sigma(a+b)\sigma(a-b)\sigma(c+d)\sigma(c-d) = (\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d))^2(\wp(a)-\wp(b))(\wp(c)-\wp(d))$$

が成立する. よって, σ 函数の三項等式の証明もやはり等式 ($\sharp$) に帰着される.

参考: Jacobi のテータ函数 ϑ_1 は次のように定義される:

$$\vartheta_1(u) = \vartheta_1(u|\tau) = i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}\left(\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})^2\tau + (n+\tfrac{1}{2})(z+\tfrac{1}{2})\right).$$

ここで, $\mathrm{e}(u) = e^{2\pi i u}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $q = e^{2\pi i\tau}$, $x = e^{2\pi i u}$ である. 以下この段落では $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$ であると仮定する. このとき, 次が成立することが知られている[26]:

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1}{2}u^2}\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_1'(0)}.$$

(ここで, $\eta_1 = \zeta(u+1) - \zeta(u) = \text{const.}$) よって, $\vartheta_1(u)$ も三項方程式を満たしている.

実は三項方程式を満たす $\mathbb{C}$ 上の正則函数は本質的に上で述べた場合で尽きていることが知られている. 証明の概略が [WW] の第 XX 章 p.461 の例 38 のヒントにある[27]ので紹介しよう.

f は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり, 次の三項方程式を満たしていると仮定する:

$$\begin{aligned} f(a+b)f(a-b)f(c+d)f(c-d) + f(a+c)f(a-c)f(d+b)f(d-b) \\ + f(a+d)f(a-d)f(b+c)f(b-c) = 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

f が恒等的に 0 ならば三項方程式を満たしていることは明らかであるので, 以下においては f は恒等的には 0 でないと仮定する.

$a = b = c = d = 0$ と置くと, ($*$) は $3f(0)^4 = 0$ と変形される. よって, $f(0) = 0$ である. $d = c$ と置くと, $f(0) = 0$ より, ($*$) は

$$f(a+c)f(a-c)f(c+b)f(c-b) + f(a+c)f(a-c)f(b+c)f(b-c) = 0$$

となる. f は恒等的には 0 でないと仮定したので, 共通した因子で割ることにより,

$$f(b-c) + f(c-b) = 0$$

を得る. よって, f は奇函数である.

[26]例えば, [HC] の p.51, [竹内] の p.174 を見よ.
[27][WW] では Hermite の *Fonctions elliptique*, I, p. 187 を引用している.

$F = (\log f)' = f'/f$ と置く[28]. $(*)$ の両辺を c で偏微分し $d = c$ と置き, さらに両辺を $f(a+b)f(a-c)f(b+c)f(b-c)$ で割ることによって, 次の式を得る:

$$\frac{f(a+b)f(a-b)f(2c)f'(0)}{f(a+b)f(a-c)f(b+c)f(b-c)} = F(a+c) - F(a-c) - F(b+c) + F(b-c).$$

さらに, この等式の両辺を c で偏微分し $c = 0$ と置き, 両辺を 2 で割ると,

$$\frac{f(a+b)f(a-b)f'(0)^2}{f(a)^2 f(b)^2} = F'(a) - F'(b). \tag{1}$$

(注意: 三項方程式のみから f が (!) と類似の等式を満たすことが示された. 逆に, この等式および次に示す $f'(0) \neq 0$ から f に対する三項方程式が復元できることが, σ 函数の場合と同様にして示される.)

$f'(0) \neq 0$ を示そう. もしも, $f'(0) = 0$ ならばすぐ上の等式より, $F' = (\log f)''$ は定数函数になる. よって, f は $f(u) = e^{Au^2+Bu+C}$ と表わされる. これは $f(0) = 0$ と矛盾する.

$\Phi = -F' = -(\log f)'' = -(ff'' - f'^2)/f^2$ と置く[29]. Φ の満たす微分方程式を求めよう.

まず, Φ'' が Φ の 2 次式に等しいことを示す. $f = f(a)$, $f' = f'(a)$, $f'' = f''(a)$, etc と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
f(a+b)f(a-b) &= f^2 + (ff'' - f'^2)b^2 + \frac{1}{12}(ff^{(4)} - 4f'f''' + 3f''^2)b^4 + O(b^6), \\
\Phi(a)^2 &= \frac{1}{f^4}(f^2 f''^2 - 2ff'^2 f'' + f'^4), \\
-\Phi'(a) &= \frac{1}{f^3}(f^2 f''' - 3ff'f'' + 2f'^3), \\
-\Phi''(a) &= \frac{1}{f^4}(f^3 f^{(4)} - 3f^2 f''^2 - 4f^2 f'f''' + 12ff'^2 f'' - 6f'^4)
\end{aligned}$$

であるから,

$$6\Phi(a)^2 - \Phi''(a) = \frac{1}{f^2}\,(ff^{(4)} + 3f''^2 - 4f'f''').$$

よって, ((1) の左辺) $\times\, 12f(b)^2$ の b に関する展開の b^4 の係数は,

$$f'(0)^2(6\Phi(a)^2 - \Phi''(a))$$

に等しいことがわかる. 一方,

$$((1)\text{ の左辺}) \times 12f(b)^2 = -12f(b)^2(\Phi(a) - \Phi(b))$$

であるから, ((1) の左辺) $\times\, 12f(b)^2$ の b に関する展開の係数は $\Phi(a)$ の 1 次式になる. 以上によって, ある定数 A, B が存在して,

$$\Phi'' = 6\Phi^2 + 12A\Phi + B. \tag{2}$$

が成立することがわかる.

等式 (2) の両辺に $2\Phi'$ を掛けて, 不定積分することによって, 次の等式を得る:

$$(\Phi')^2 = 4\Phi^3 + 12A\Phi^2 + 2B\Phi + C. \tag{3}$$

[28]例えば, $f(u) = u, \sin u, \sigma(u)$ のそれぞれに対して, $F(u) = 1/u, \cot u, \zeta(u)$.
[29]例えば, $f(u) = u, \sin u, \sigma(u)$ のそれぞれに対して, $\Phi(u) = 1/u^2, \operatorname{cosec}^2 u, \wp(u)$.

ここで, C は積分定数である. よって, $\Phi(u)=\phi(u)-A$ と置くことによって, 次の形の微分方程式を得る:

$$\phi'^2 = 4\phi^3 - g_2\phi - g_3. \tag{4}$$

ここで, g_2, g_3 は定数である. $G(x)=4x^3-g_2x-g_3$ と置く.

$G(x)$ が重根を持たない: このとき (4) より, ある定数 α が存在して, $\phi(u)=\wp(u+\alpha)$ である. ここで, $\wp$ は g_2, g_3 に対する $\wp$ 函数である. このとき, $(\log f(u))''=-\Phi(u)=-\phi(u)+A=-\wp(u+\alpha)+A$ であるから, $f(u)=e^{\frac{1}{2}Au^2+Ku+L}\sigma(u+\alpha)$. しかし, f, σ は奇函数であるから $K=0$, $\alpha=0$. よって,

$$f(u)=e^{\frac{1}{2}Au^2+L}\sigma(u).$$

$G(x)$ は 2 重根を持つとき: このとき, 定数 A' を適切に定め, $\Phi(u)=\psi(u)-A'$ と置くと, 微分方程式 (3) より, 次の形の微分方程式を得る:

$$\psi'^2 = 4\psi^2(\psi-\lambda^2) \qquad (\lambda\neq 0).$$

この微分方程式を解くことによって, $\psi(u)=\lambda^2\operatorname{cosec}^2(\lambda(u-\alpha))$ を得る. このとき, f は $f(u)=e^{\frac{1}{2}A'u^2+Ku+L}\sin(\lambda(u-\alpha))$ という形になる. しかし, f, $\sin$ は奇函数であるから $K=0$, $\alpha=0$. よって,

$$f(u)=e^{\frac{1}{2}A'u^2+L}\sin(\lambda u).$$

$G(x)$ が 3 重根を持つとき: $G(x)=4x^3$ であるから, $\phi'=2\phi^{3/2}$ である. よって, $\phi(u)=(u-\alpha)^{-2}$. このとき, $f(u)=e^{\frac{1}{2}Au^2+Ku+L}(u-\alpha)$. しかし, f は奇函数であるから $K=0$, $\alpha=0$. よって,

$$f(u)=e^{\frac{1}{2}Au^2+L}u.$$

以上の結果をまとめると, 次の定理が証明されたことになる.

定理 9.1 三項方程式 $(*)$ の $\mathbb{C}$ 上の正則函数による解は以下の形のものに限られる:

$$ce^{\alpha u^2}f(\lambda u) \qquad (\text{ここで}, c,\alpha,\lambda\in\mathbb{C} \text{ かつ } f(u)=u,\sin u,\sigma(u)). \quad \square$$

[100] 三項方程式の正則函数解の分類に関する以上の説明の細部を埋めよ. □

参考: $\sigma(u)$ したがって $\vartheta_1(u)$ が三項方程式を満たすという結果, 任意のコンパクト Riemann 面に対する Fay の trisecant formula に一般化される. Fay の trisecant formula は [Fay] の p.34 における公式 (45) として得られた. 等式 (45) はより一般のテータ函数の n 次の行列式に関する公式 ([Fay] Corollary 2.19) の $n=2$ の特殊な場合として得られる. Fay の trisecant formula は [Mumford2] でも紹介されている. さらに, Fay の得た一般の公式の楕円テータ函数版は [Has] Appendix A においてさらに一般化されていることを注意しておく. [Has] で得られた公式がよりジーナスの高いコンパクト Riemann 面に対して一般化可能かどうかはまだ知られていない[30]. Fay の公式も [Has] の公式も, 可積分系の理論において重要な役目を果たしていることは強調されるべきことである.

[30] 少なくとも筆者は知らない (1996 年 7 月 2 日). [Has] の公式は Fay の公式の “楕円 q 類似” とでも呼ぶべきものである. 今のところ “q 類似” の理論はジーナス 1 以下のコンパクト Riemann 面のみで展開され, ジーナスが高い場合についてそれが可能であるという証拠はまだ無い (と思う).

9.3 ℘ 函数の加法公式の一般化

[101] 次の公式を示し, それから ℘ 函数の加法公式を導け:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-v)\sigma(v-w)\sigma(w-u)}{\sigma(u)^3\sigma(v)^3\sigma(w)^3}. \quad \square$$

ヒント: これは [WW] の第 XX 章の Miscellaneous Examples の 20 番である. 求める公式を認めれば, ℘ 函数の加法公式 ($u+v+w=0$ のとき示したい公式の左辺の行列式が 0 になること) は $\sigma(0)=0$ より明らかである. 公式を証明しよう. 問題 **[56]** (2) の結果を次のように表現することもできる:

$$\phi(u,v) := \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) \\ 1 & \wp(v) \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}.$$

以下, これが 0 にならないような u, v を固定し, 示したい公式の左辺を w のみの函数とみなし, その -1 倍を $f(w)$ と書くことにする. u, v に対する仮定より, $f(w)$ は $w=0$ に 3 位の極を持つ 3 位の楕円函数であり, $w=u$, $w=v$ に零点を持つことがすぐにわかる. 周期平行四辺形に含まれる楕円函数の極の位置の和と零点の位置の和の差は周期格子に含まれるので, $f(w)$ は $w=-u-v$ にも零点を持つことがわかる. よって, 楕円函数の σ 函数による表示に関する結果より, ある定数 $C \neq 0$ が存在して,

$$f(w) = C\frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-w)\sigma(v-w)}{\sigma(w)^3}.$$

この両辺の $w=0$ における Laurent 展開における $1/w^3$ の係数を比べることより,

$$\phi(u,v) = C\sigma(u+v)\sigma(u)\sigma(v)$$

であることがわかる. よって,

$$C = -\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u)^3\sigma(v)^3}.$$

以上の結果をまとめると, 次が成立することがわかる:

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-v)\sigma(v-w)\sigma(u-w)}{\sigma(u)^3\sigma(v)^3\sigma(w)^3}.$$

これは, $\sigma(u)$ が奇函数であることより示したい公式と同値である.

[102] ℘ 函数の導函数と 1 からなるサイズ $n+1$ の行列式に関して次が成立することを証明せよ:

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots n!}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix} = \frac{\sigma(u_0+\cdots+u_n)\displaystyle\prod_{0\le\lambda<\mu\le n}\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}\sigma(u_\nu)^n}. \quad \square$$

ヒント: これは [WW] の第 XX 章の Miscellaneous Examples の 21 番である. 上の問題の公式の証明は $n=1$ の場合から $n=2$ の場合を導くという論法を使っている. それと同様のやり方で帰納法を使えば, この問題の公式を証明することができる. [Fay] の p.36 では, ジーナス 1 以上のコンパクト Riemann 面に対して成立する一般的な公式の特別な場合として, この問題の公式を紹介している.

10 楕円曲線の Abel 群構造について

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置く. 格子 Ω に対する Weierstrass の $\wp$ 函数を考える. $\wp$ 函数は次の加法公式を満たしているのであった:

$$\begin{vmatrix} \wp(u_1) & \wp'(u_1) & 1 \\ \wp(u_2) & \wp'(u_2) & 1 \\ \wp(u_3) & \wp'(u_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{if } u_1+u_2+u_3 \in \Omega.$$

この加法公式の幾何的な意味を説明しよう.

[103] 平面上の 3 点 (x_k, y_k) $(k=1,2,3)$ が同一の直線上に乗っているための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立することである. □

このことより, $u_1+u_2+u_3 \in \Omega$ でかつ $u_k \notin \Omega$ $(k=1,2,3)$ のとき, 3 点 $(\wp(u_k), \wp'(u_k))$ $(k=1,2,3)$ は同一直線上に乗っていることになる.

複素射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を簡単のために, 以下では $\mathbb{P}^2$ と書くことにする. $\mathbb{P}^2$ 内の直線とは $\mathbb{C}^3$ 内の原点を通る平面の $\mathbb{P}^2$ への射影の像のことである. すなわち, $(A,B,C) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ に対する

$$\{\,(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^3 \mid AX+BY+CZ=0\,\}$$

を $\mathbb{P}^2$ 内の直線と呼ぶ.

[104] 射影平面内の 3 点 $P_k = (X_k : Y_k : Z_k) \in \mathbb{P}^2$ が同一直線上に乗っているための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

が成立することである. □

$g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ であるとし, $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ と置く. $f(x)$ は重根を持たないと仮定する. このとき, 複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の曲線 E を

$$E := \{\,(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^3 \mid Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3\,\}$$

と定義すると, E には自然にコンパクト Riemann 面の構造が入るのであった. E と無限遠直線 $Z=0$ は唯一の点 $\infty=(0:1:0)$ で (3 重に) 交わるのであった.

E に対して $\mathbb{R}$ 上一次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ が存在して, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ に関する $\wp$ 函数によって, 正則写像

$$f: \mathbb{C} \to E, \qquad u \mapsto (\wp(u), \wp'(u), 1)$$

が定まり ($u \in \Omega$ に対しては $f(u) = \infty$), 双正則写像 $\mathbb{C}/\Omega \xrightarrow{\sim} E$ を誘導するのであった. $\mathbb{C}/\Omega$ は Abel 群なので, この双正則写像を通じて, E に Abel 群の構造が定義される. その Abel 群構造に関して $\infty \in E$ は E の単位元である. そこで, 以下 ∞ を E の単位元とみなすときには O と書くことにする.

$\wp$ 函数の加法公式をより詳しく調べることにより, E の Abel 群の構造に関して次が成立することが確かめられる:

> 任意の $P_1, P_2, P_3 \in E$ に対して, $P_1 + P_2 + P_3 = O$ であるための必要十分条件は 3 点 P_1, P_2, P_3 が射影平面内で同一直線上にあることである.

この命題は $\wp$ 函数を含んでない. 実は $\wp$ 函数を用いずに, この命題を E の Abel 群構造の定義として採用することができる.

[105] $\mathbb{P}^2$ 内の任意の直線と E は重複を込めて 3 点で交わる. $P, Q \in E$ に対して, $P \neq Q$ ならば P, Q の 2 点を通る唯一の直線を $L_{P,Q}$ と書き, $P = Q$ ならば点 P で E と接する唯一の直線を $L_{P,Q}$ と書くことにする. $L_{P,Q}$ と E が交わる 3 点を P, Q, R と書き, さらに直線 $L_{O,R}$ と E が交わる 3 点を O, R, S と書くことにする. 以上によって, 写像 $E \times E \to E$, $(P, Q) \mapsto S$ が定義された. $P + Q = S$ と置くことによって, E に Abel 群の構造が入ることを示せ. $\square$

ヒント: 定義の仕方より, $P + Q = Q + P$, $P + O = P$ が成立することはすぐにわかる. $L_{O,O}$ と E が交わる 3 点を O, O, N と書き, $L_{P,N}$ と E の交わる 3 点を P, N, P' と書くことにすると, $P + P' = O$ が成立することが, $+$ の定義よりすぐに確かめられる. よって, 問題になるのは結合法則の証明だけである. 直接の計算的な証明を試みてみよ. (2 点の座標から残りの 1 点の座標を計算し, その式を利用して結合法則を証明することを試みてみよ.)

参考: 結合法則は以下のようにして示すこともできる. 直線 L に対して, その定義線型方程式を $\phi_L = \phi_L(X, Y, Z) = A_L X + B_L Y + C_L Z = 0$ と書き, $P, Q \in E$ に対して $\phi_{P,Q} := \phi_{L_{P,Q}}$ と置く. $\phi_{P,Q}/\phi(O, P+Q)$ の E 上への制限 $f_{P,Q}$ は E 上の有理型函数を定める. $f_{P,Q}$ は P, Q に零点を持ち, $O, P+Q$ に極を持ち, 他では正則である. よって, $g_{P,Q,R} = f_{P,Q} f_{P+Q,R}$ は点 P, Q, R に零点を持ち, O, O, $(P+Q)+R$ に極を持つ. 一方, $h_{P,Q,R} = f_{P,Q+R} f_{Q,R}$ は P, Q, R に零点を持ち, O, O, $P+(Q+R)$ に極を持つ. よって, もしも, $(P+Q)+R \neq P+(Q+R)$ ならば $k_{P,Q,R} = g_{P,Q,R}/h_{P,Q,R}$ は $(P+Q)+R$ に 1 位の極を持ち, 他では正則である. E 上には零点を持たない大域的な正則 1 形式 "dx/y" が存在する. よって $k_{P,Q,R}\,dx/y$ に留数定理を適用することによって, $k_{P,Q,R}$ の 1 位の極 $(P+Q)+R$ における留数が 0 であるという変な結論が得られる. よって, $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ でなければいけない.

11 楕円函数の加法公式の証明の仕方に関するメモ

[WW] 20.312 (p.442) に Weierstrass の $\wp$ 函数の加法公式の Abel の方法による証明の概略が書いてある. それは, 楕円曲線の Weierstrass の標準形

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

と直線 $y = mx + n$ の交点を $(x_i, y_i) = (\wp(u_i), \wp'(u_i))$ $(i = 1, 2, 3)$ と書くとき, 直線を微少に動かしても $u_1 + u_2 + u_3$ が変化しないということを直接的な計算で示すというものである. $\wp(u)$ の定義より, $dx/y = du$ であるから,

$$(*) \qquad \frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} = 0$$

を代数的な計算で示せば良いのである. これによって, $\wp$ の次の形での加法公式が証明される: $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ のとき, $x_i = \wp(u_i)$, $y_i = \wp'(u_i)$ と置くと,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(直線との交わりを利用しているので行列式 $= 0$ の形で書ける.) なお, 公式 $(*)$ は以下を認めれば自明な式になる:

- 楕円曲線の Abel 群構造は Weierstrass の標準形において直線との交点を用いて表現できる.
- dx/y が楕円曲線の Abel 群構造に関して平行移動不変であるということを認めれば自明な式になる.

次に, [WW] 22.2 Example 5 の Hint (p.497) を見ると, Abel の方法で sn の加法公式を求めるやり方の概略が説明してある. それは, 楕円曲線

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

と放物線 $y = 1 + mx + nx^2$ の交点の全体を $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_i, y_i) = (\operatorname{sn} u_i, \operatorname{sn}' u_i) = (\operatorname{sn} u_i, \operatorname{cn} u_i \operatorname{dn} u_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ と書くとき, 放物線を微少に動かしても $u_1 + u_2 + u_3$ が変化しないということを示すというものである. 計算の仕方は $\wp$ の場合と同様でである.

しかし, $y = 1 + mx + nx^2$ との交点を考えると楕円曲線の Abel 群構造がつかまるのはなぜかという疑問は残る. 一方, $\wp$ の加法公式の証明の方で直線との交わりを考えれば楕円曲線の Abel 群構造がつかまるということの理由は, 楕円曲線の群構造の定義 (Picard 群と同一視するという方法による定義) を見ればよくわかる.

そこで, さらに [WW] を読み進めると, 第 22 章の Misc. Examples の 21 (p.530) に必要な式が書いてあることに気付く. それは,

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad k^2 x^2 + z^2 = 1$$

なる連立方程式で定義される楕円曲線と超平面 $lx+my+nz=1$ の交点を調べることによって次の加法公式を証明するというものである: $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ のとき, $x_i=\operatorname{sn} u_i$, $y_i=\operatorname{cn} u_i$, $z_i=\operatorname{dn} u_i$ と置くと,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

これも, $\wp$ の場合と同様に, 楕円曲線の超平面切断を利用しているので代数幾何的な由来ははっきりしていると考えられる.

この場合の (x,y,z) を (x,yz) に射影すれば, 上の 22.2 Example 5 が再現される. 実際, $y^2=1-x^2$, $z^2=1-k^2x^2$ より, $X=x$, $Y=yz$ と置くと,

$$Y^2=(1-X^2)(1-k^2X^2).$$

また, 連立方程式 $lx+my+nz=1$, $x^2+y^2=1$, $k^2x^2+z^2=1$ の解の $(x,y,z)\mapsto(X,Y)=(x,yz)$ による像は曲線

$$(1-lX)^2=(my+nz)^2=m^2(1-X^2)+n^2(1-k^2X^2)+2mnY,$$

すなわち, 放物線

$$2mnY=(l^2+m^2+k^2n^2)X^2-2lX+1-m^2-n^2$$

の上に乗っていることもすぐにわかる. これは, $m+n=\pm1$ のとき, [WW] 22.2 Example 5 で使った放物線を与える.

12　2 重周期性の条件の一般化

楕円函数は天下り的には $\mathbb{C}$ 上の 2 重周期有理型函数として定義された. ここでは, その 2 重周期性の条件を 2 通りに一般化し, その条件を満たす函数の空間を調べる. (Jacobi の楕円函数 sn, cn, dn とテータ函数はそれぞれ 2 通りの一般化の特殊な例になっている.) 以前と同様に, ω_1,ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ と置く.

12.1　第 2 種楕円函数 (flat line bundle)

まず, 第 1 の一般化について説明しよう. Ω から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像全体のなす Abel 群を $\Omega^*=\operatorname{Hom}(\Omega,\mathbb{C}^\times)$ と書くことにする. 絶対値が 1 の複素数全体のなす Abel 群を

$$U(1)=\{\,z\in\mathbb{C}^\times \mid |z|=1\,\}$$

と書き, Ω から $U(1)$ への準同型写像全体のなす Ω^* の部分群を $\widehat{\Omega}=\operatorname{Hom}(\Omega,U(1))$ と書くことにする. 複素数 $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して, $\chi_\alpha\in\Omega^*$ を次のように定義する:

$$\chi_\alpha(\omega)=e^{\alpha\omega}\qquad(\omega\in\Omega).$$

χ_0 は Ω^* の単位元なので 1 と書くことがある. Ω^* の部分群 Ω_0^* を次のように定める:

$$\Omega_0^* := \{\, \chi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C} \,\}.$$

$\rho, \rho' \in \Omega^*$ が $\rho' \in \rho\Omega_0^*$ を満たすとき ρ と ρ' は同値であると言うことにする.

[106] 任意の $\rho \in \Omega^* = \mathrm{Hom}(\Omega, \mathbb{C}^\times)$ に対して, ρ と同値な $\rho' \in \widehat{\Omega} = \mathrm{Hom}(\Omega, U(1))$ が唯一存在する. よって, $\Omega^*/\Omega_0^* \simeq \widehat{\Omega}$ (群の同型) が成立している. □

$\rho \in \Omega^*$ に対して, 以下の条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f の全体の空間を K_ρ と書くことにする:

$$f(u+\omega) = \rho(\omega) f(u) \qquad (\omega \in \Omega).$$

K_ρ に含まれる函数を ρ に付随する**第 2 種楕円函数** (elliptic function of the second kind) と呼ぶこともある. (通常の楕円函数は**第 1 種楕円函数** (elliptic function of the first kind) と呼ばれる.) $\mathbb{C}$ 上の正則函数全体の空間を $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ と書くことにする. $K_1 = K_{\chi_0}$ は周期格子 Ω に対する楕円函数体に一致する. よって, K_ρ 内の有理型函数は楕円函数の一般化であると言える. 極を持たない楕円函数は定数函数に限るので, $K_1 \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ が成立している.

[107] 任意の $\rho \in \Omega^*$ に対して,

1. ρ が 1 に同値ならば, ある $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ が存在して $K_\rho \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\rceil^{\alpha\sqcap}$.
2. ρ が 1 に同値でないならば $K_\rho \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \{/\}$. □

ヒント: $e^{\alpha u} K_\rho = K_{\chi_\alpha \rho}$ が成立する. よって, $\rho, \rho'\Omega^*$ が同値ならば, ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して $e^{\alpha u}$ を掛け算する写像は K_ρ と $K_{\rho'}$ の間の同型写像を定める. 一方, これとは別に, $\rho \in \widehat{\Omega}$ であるとき, $\rho = 1$ ならば $K_\rho \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ であり, $\rho \neq 1$ ならば $K_\rho \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}) = \{/\}$ であることを示すことができる. 任意の Ω^* の元は唯一の $\widehat{\Omega}$ の元に同値になるので, 問題の結果が導かれる.

参考: 上の問題は極を持たないような K_ρ 内の函数がどれだけあるかに関する完全な解答を与えている. 実は極をある程度許したときにどれだけの函数が存在するかに関しても完全な解答を与えることができるが, それは後で説明することにする.

参考: Ω は自然に $E = \mathbb{C}/\Omega$ の基本群と同一視可能である. ($\mathbb{C}$ は E の普遍被覆 (universal covering) であるので, これは, 普遍被覆の被覆変換群が基本群に同型になるという一般的な定理の特別な例になっている[31].) 今の場合は E の基本群は Abel 群になるので Ω は E の 1 次元ホモロジー群 $H_1(E, \mathbb{Z})$ とも同一視可能である. $H_1(E, \mathbb{Z})$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像を E 上の階数 1 の局所系 (local system of rank 1) と呼ぶ. すなわち, Ω^* は E 上の階数の局所系全体のなす Abel 群である. 階数 1 の局所系と flat line bundle (connection の与えられた holomorohic line bundle と言っても同じ) の同型類は自然に一対一に対応する. この対応によって Ω_0^* の元は trivial line bundle に connection を入れたものに対応し

[31]私が見たところ, 今の 3 年生は基本群や普遍被覆に全く疎いようである. 基本群と普遍被覆という考え方は多くの数学で非常に重要になる考え方であるので, 色々な数学を理解したいという希望を持つものは, できるだけ詳しく復習しておくことが望ましい. 楽しく読める本に [久賀 1] があるので参照すると良いであろう.

ている. E 上の line bundle に connection が入るための必要十分条件はその line bundle の degree が 0 であることである. 以上の話を認めると, Ω^*/Ω_0^* は E 上の degree 0 の line bundles の同型類全体のなす Abel 群に同型になる. また, $\Omega^*/\Omega_0^* \simeq \widehat{\Omega}$ は E 上の degree 0 の任意の line bundle に unitary な connection が入ることを意味している. $\rho \in \Omega^*$ に対応する flat line bundle を (L_ρ, ∇_ρ) と書くことにする (L_ρ は degree 0 の line bundle であり, ∇_ρ は connection). このとき, 上の問題の結果は, L_ρ が trivial line bundle ならば $H^0(E, L_\rho) \sim \mathbb{C}$ であり, そうでないならば $H^0(E, L_\rho) = 0$ であることを意味している.

[108] $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ であると仮定し, $\Xi = \{\, s + t\tau \mid 0 \le s, t < 1 \,\}$ と置く. (Ξ は $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ の周期平行四辺形の 1 つである.) $\xi \in \mathbb{C}$ に対して, $\rho_\xi \in \Omega^*$ を次の条件によって定める:

$$\rho_\xi(1) = 1, \qquad \rho_\xi(\tau) = e^{2\pi i \xi}.$$

任意の $\rho \in \Omega^*$ に対して, ρ と ρ_ξ が同値になるような $\xi \in \Xi$ が唯一存在する. □

参考: この問題の結果は $\xi \in \mathbb{C}$ に対して $\rho_\xi \in \Omega^*$ を対応させる写像が $E = \mathbb{C}/\Omega$ から Ω^*/Ω_0 への同型写像を誘導することを意味している. よって, E は E 上の degree 0 の line bundle の同型類全体のなす Abel 群と同型である. 一般に代数多様体 X が与えられたとき, その上の line bundle の同型類の分類と, line bundle L の global section の空間の $H^0(X, L)$ の計算は最初の基本的な問題になる.

以上では「参考」と称して, 言葉の説明抜きで色々書いてしまったが, それらの言葉を知らなくても問題を解くための支障にはならないことを注意しておく.

[109] 周期格子 Ω に対する周期平行四辺形 Ξ を任意に固定し, $\rho \in \Omega^*$ であるとする. $\rho(\omega_k)$ を次のように表わしておく:

$$\rho(\omega_k) = e^{2\pi i \xi_k}, \qquad \xi_k \in \mathbb{C} \qquad (k = 1, 2).$$

恒等的には 0 でない $f \in K_\rho$ に対して以下が成立する:

1. Ξ に含まれる f の零点と極の個数は重複度を含めて数えれば互いに等しい.
2. Ξ に含まれる f の零点の全体を重複を込めて $a_1, \dots, a_r$ と書き, 極の全体を重複を込めて $b_1, \dots, b_r$ と書くとき, 次が成立している:

$$(a_1 + \cdots + a_r) - (b_1 + \cdots + b_r) \equiv \xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2 \mod \Omega.$$

特に, $\omega_1 = 1$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \xi$ であるとき,

$$(a_1 + \cdots + a_r) - (b_1 + \cdots + b_r) \equiv \xi \mod \Omega. \quad □$$

ヒント: $f \in K_\rho$, $f \neq 0$ に対して, $F = (\log f)' = f'/f$ は周期格子 Ω に関する楕円函数である. よって, 楕円函数の場合と同様に $F(u)\,du$ と $uF(u)\,du$ を Ξ の周囲に沿って線積分すれば求める結果が得られる. そのとき, $f(u + \omega_k) = e^{2\pi i \xi_k} f(u)$ より, 次が成立することに注意せよ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{u_0}^{u_0+\omega_k} d\log f(u) \equiv \frac{\log(e^{2\pi i\xi_k} f(u_0)) - \log f(u_0)}{2\pi i} \equiv \xi_k \mod \mathbb{Z}.$$

[110] 周期格子 Ω に対する周期平行四辺形 Ξ を任意に固定し, $\rho \in \Omega^*$ であるとする. $\rho(\omega_k)$ を次のように表わしておく:

$$\rho(\omega_k) = e^{2\pi i \xi_k}, \qquad \xi_k \in \mathbb{C} \qquad (k = 1, 2).$$

$K_\rho \neq \{0\}$ が成立することを認めた上で以下を示せ. $a_j, b_j \in \Xi$ $(j = 1, \dots, r)$ が

$$(a_1 + \cdots + a_r) - (b_1 + \cdots + b_r) \equiv \xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2 \mod \Omega.$$

を満たしているとき, ある $f \in K_\rho$ で Ξ に含まれる零点と極の全体が重複も込めてそれぞれ $a_1, \dots, a_r$ と $b_1, \dots, b_r$ になるものが定数倍の違いを除いて唯一存在する. □

ヒント: 0 でない $f_0 \in K_\rho$ を任意に選んでおき, 周期格子 Ω に関する楕円函数体を K と書くことにすると, $K_\rho = K f_0$ が成立する. このことを利用すると上の問題は楕円函数の場合に帰着されることがわかる.

注意: $K_\rho \neq \{0\}$ は次の部分節 (subsection) で示される.

[111] $\rho \in \Omega^*$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して, $c + \Omega$ の上に高々 n 位の極を持ち, その外では正則な K_ρ に含まれる有理型函数全体の空間を $K_{\rho,c,n}$ と書くことにする. このとき以下が成立する:

(1) ρ が 1 に同値であるとき, $n = 0, 1$ に対して $\dim K_{\rho,c,n} = 1$ であり, $n \geq 2$ に対して $\dim K_{\rho,c,n} = n$ である.

(2) ρ が 1 に同値でないとき, $\dim K_{\rho,c,n} = n$ である. □

ヒント: (1) $\wp$ 函数を使う. (2) 上の問題の結果を使う.

参考: $\rho_k \in \widehat{\Omega}$ $(k = 1, 2, 3)$ と次のように定める (ここだけの記号):

$$(\rho_1(\omega_1), \rho_1(\omega_2)) = (-1, 1), \quad (\rho_2(\omega_1), \rho_1(\omega_2)) = (-1, -1), \quad (\rho_3(\omega_1), \rho_1(\omega_2)) = (1, -1).$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 のそれぞれに対して, 上の問題における ξ_1, ξ_2 は以下のように取れる:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\tfrac{1}{2}, 0), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (0, \tfrac{1}{2}).$$

$\omega'_k := \omega_k/2$ と置く. 上の問題の結果より以下が成立することがわかる:

1. 0 に 1 位の零点を持ち ω'_2 に 1 位の極を持つ $f_1 \in K_{\rho_1}$ が定数倍の違いを除いて唯一存在する.
2. ω'_1 に 1 位の零点を持ち ω'_2 に 1 位の極を持つ $f_2 \in K_{\rho_2}$ が定数倍の違いを除いて唯一存在する.
3. $\omega'_1 + \omega'_2$ に 1 位の零点を持ち ω'_2 に 1 位の極を持つ $f_3 \in K_{\rho_3}$ が定数倍の違いを除いて唯一存在する.

定数倍の不定性は $f'_1(0) = 1$, $f_2(0) = f_3(0) = 1$ という条件を課せば無くなる. このとき, f_1, f_2, f_3 はそれぞれ Jacobi の楕円函数 $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ に一致する. Jacobi の楕円函数については, Jacobi のテータ函数と共に, 後で詳しく説明されるであろう.

12.2　第 3 種楕円函数 (theta function)

上半平面を $\mathfrak{H} = \{\, \tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0 \,\}$ と書くことにする.

少々天下りであるが, $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathfrak{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$ の函数 $\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ を次のように定義する[32]:

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}\left(\tfrac{1}{2}(k+a)^2\tau + (k+a)(z+b)\right).$$

ここで, $\mathrm{e}(u) = \exp(2\pi i u)$ である.

[112] $\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ の定義式の級数は $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathfrak{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$ に関して広義一様絶対収束する. □

ヒント: $\operatorname{Im}\tau > 0$ より, $\operatorname{Re}(i\tau) < 0$ であるから, $\left|\mathrm{e}(\frac{1}{2}k^2\tau)\right| = \exp(\operatorname{Re}(i\tau)\pi k^2)$ は $k \to \infty$ のとき急激に小さくなる.

この問題の結果より, $\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ は $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathfrak{H}$ の正則函数になることがわかる.

以下, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau \in \mathfrak{H}$ であるとし, $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ の場合を考える.

注意: $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとき, 必要なら ω_1 と ω_2 を交換することによって, $\omega_2/\omega_1 \in \mathfrak{H}$ であるとして良い. $\tau := \omega_2/\omega_1$ と置く. $\mathbb{C}$ の座標 u を $z = u/\omega_1$ に変換すると, 座標 z において ω_1, ω_2 は 1, τ に移る. このことに注意すると, 一般の周期格子 Ω に関する問題の多くは 1 と $\tau \in \mathfrak{H}$ から生成される周期格子の場合の問題に帰着できる. 例えば, 一般の場合に $K_\rho \neq \{0\}$ を示すためには, $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ $(\tau \in \mathfrak{H})$ の場合に示せば十分である.

[113] **(テータ函数の準周期性)** $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\vartheta_{a,b}(z + m + n\tau, \tau) = \mathrm{e}\left(ma - n(\tfrac{1}{2}\tau n + z + b)\right)\vartheta_{a,b}(z,\tau).$$

これを ϑ 函数の準周期性 (quasi periodicity) と呼ぶ. 特に,

$$\vartheta_{a,b}(z+1,\tau) = \mathrm{e}(a)\vartheta_{a,b}(z,\tau), \qquad \vartheta_{a,b}(z+\tau,\tau) = \mathrm{e}(-\tfrac{1}{2}\tau - z - b)\vartheta_{a,b}(z,\tau). \quad \square$$

次の問題の結果は前節で認めて使ったものである.

[114] 任意の $\rho \in \Omega^*$ に対して $K_\rho \neq \{0\}$. □

ヒント: ρ はある $\rho' \in \widehat{\Omega}$ に同値であり, そのとき $K_\rho \simeq K_{\rho'}$ であるから, 始めから $\rho \in \widehat{\Omega}$ であると仮定して良い. このとき, $\rho(1)$, $\rho(\tau)$ は次のように表示可能である:

$$\rho(1) = \mathrm{e}(a), \qquad \rho(\tau) = \mathrm{e}(-b), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

$f(z) := \vartheta_{a,b}(z,\tau)/\vartheta_{0,0}(z,\tau)$ と置くと, $f \neq 0$, $f \in K_\rho$ であることが簡単に確かめられる.

[115] $\vartheta_{a,b}(z) = \vartheta_{a,b}(z,\tau)$ は Ω に対する任意の周期平行四辺形の上に唯一の零点を持ち, しかもその零点は 1 位である. □

[32] 例えば [Mumford1] p.10 なども参照せよ.

ヒント: $\Xi = \Xi(z_0) = \{\, z_0 + s + t\tau \mid 0 \le s, t < 1 \,\}$ と置く. ϑ 函数の準周期性より $\partial\Xi$ 上に $\vartheta_{a,b}(z)$ の零点が存在しない場合について示せば十分である. $F(z) = (\log \vartheta_{a,b}(z))'$ と置くと,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Xi} F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Xi} d\log f(z) = (\Xi \text{ に含まれる } f \text{ の零点の位数の総和}).$$

一方, f の準周期性より, $F(z+1) = F(z)$, $F(z+\tau) = F(z) - 2\pi i$ であることがわかる. よって,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Xi} F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+1} (F(z) - F(z+\tau))\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+\tau} (F(z) - F(z+1))\,dz = 1.$$

以上によって, f は Ξ 内に唯一の零点を持ち, しかもその零点の位数は1であることがわかった.

[116] $\vartheta_{a,b}(z) = \vartheta_{a,b}(z,\tau)$ の零点集合は次に等しい:

$$(\tfrac{1}{2} - a)\tau + (\tfrac{1}{2} - b) + \Omega. \quad \square$$

ヒント: 直接の計算により $\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ が奇函数であることが確かめられる. 特に $\vartheta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(0) = 0$ である. 後は次の公式を用いれば良い:

$$\vartheta_{a+a',b+b'}(z) = \mathrm{e}\left(\tfrac{1}{2}a'^2\tau + a'(z+b+b')\right)\vartheta_{a,b}(z + a'\tau + b').$$

参考: $(a,b) = (0,0), (\frac{1}{2},0), (0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ に対する $\vartheta_{a,b}$ は Jacobi のテータ函数と呼ばれている. Jacobi のテータ函数については次の節で詳しく扱う予定である.

[117] $\tau \in \mathfrak{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の準周期性を持つ $\mathbb{C}$ 上の正則函数 f の全体の空間を $L_{a,b}$ と書くことにする:

$$f(z + m + n\tau) = \mathrm{e}\left(ma - n(\tfrac{1}{2}\tau n + z + b)\right) f(z).$$

このとき, $\dim L_{a,b} = 1$ が成立している. $\square$

ヒント1: $f \in L_{a,b}$ に対して, $g(z) = f(z)/\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ と置くと, g は格子 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ に関する1以下の位数を持つ楕円函数である. よって, g は定数函数である.

ヒント2: $f \in L_{0,0}$ に対して,

$$g(z) = \mathrm{e}\left(\tfrac{1}{2}a^2\tau + a(z+b)\right) f(z + a\tau + b).$$

によって, g を定めると $g \in L_{a,b}$ である. このことから, ベクトル空間として $L_{0,0}$ と $L_{a,b}$ は同型であることがわかる. $f \in L_{0,0}$ は $f(z+1) = f(z)$ を満たしているので

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathrm{e}(kz)$$

と Fourier 展開される. さらに, $f(z+\tau) = \mathrm{e}(-\frac{1}{2}\tau - z) f(z)$ を使うと $f(z)$ は $\vartheta_{0,0}(z,\tau)$ の定数倍になることが確かめられる.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であるとし, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置く. 一般に $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f がある定数 $A_i, B_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1,2)$ に対して,

$$f(u + \omega_i) = \mathrm{e}(A_i u + B_i) f(u) \qquad (i = 1,2)$$

を満たしているとき, f は $\mathbb{C}$ 上の**第3種楕円函数** (elliptic function of the third kind) であると言う. 上で定義した $\vartheta_{a,b}(z) = \vartheta_{a,b}(z,\tau)$ は $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$ に対する第3種楕円函数である. Weierstrass の σ 函数も第3種楕円函数である.

13 Jacobi のテータ函数 (まだ書いてない)

この節では Jacobi のテータ函数

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_{\frac12,\frac12}(z) = i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(n-\frac12)^2/2}x^{n-\frac12} = q^{\frac18}\frac{x^{\frac12}-x^{-\frac12}}{i}\varphi\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^n x)(1-q^n x^{-1})\},$$

$$\vartheta_2(z) = \vartheta_{\frac12,0}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n-\frac12)^2/2}x^{n-\frac12} = q^{\frac18}(x^{\frac12}+x^{-\frac12})\varphi\prod_{n=1}^{\infty}\{(1+q^n x)(1+q^n x^{-1})\}$$

$$\vartheta_3(z) = \vartheta_{0,0}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2/2}x^n = \varphi\prod_{n=1}^{\infty}\{(1+q^{\frac{2n-1}{2}}x)(1+q^{\frac{2n-1}{2}}x^{-1})\},$$

$$\vartheta_0(z) = \vartheta_{0,\frac12}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2/2}x^n = \varphi\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{\frac{2n-1}{2}}x)(1-q^{\frac{2n-1}{2}}x^{-1})\},$$

を扱う予定である. ここで, $q = \mathrm{e}(\tau)$, $x = \mathrm{e}(z)$,

$$\varphi = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

と置いた. $\eta = q^{1/24}\varphi$ を Dedekind の η 函数と呼ぶ.

14 Jacobi の楕円函数 (まだ書いてない)

この節では Jacobi の楕円函数

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sigma_0(u)}{\sigma_3(u)} = \omega_2\frac{\vartheta_0(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_0(v)},\quad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(v)},\quad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)\vartheta_0(v)}$$

を扱う予定である. ここで, $\tau \in \mathfrak{H}$, $\omega_2 = \omega_1\tau \neq 0$, $v = u/\omega_1$ である. $k = (\vartheta_2(0)/\vartheta_3(0))^2$ と置くと,

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1, \qquad \operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u = 1, \qquad (\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

が成立している. 特に, $s = \operatorname{sn} u$ は次の微分方程式を満たしている:

$$s'^2 = (1-s^2)(1-k^2 s^2).$$

15 楕円モジュラー函数 (まだ書いてない)

この節では J 函数

$$J(\tau) = \frac{g_2(\tau)^2}{\Delta(\tau)}, \qquad \Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2$$

を扱う予定である.

結局, この楕円函数論の演習において, モジュラー函数 (modular function) およびモジュラー形式 (modular form) の理論があるが, 残念ながら全く触れることができなかった. 楕

円函数は $\mathbb{C}$ 上の 2 つの独立な周期 ω_1, ω_2 を持つ 2 重周期函数として定義されたのであった．楕円函数と言う場合には主に $\mathbb{C}$ 上の函数としての性質に注目したのであった．楕円函数の世界に現われる函数を $\mathbb{C}$ 上の函数と考えるだけではなく, ω_1, ω_2 の函数とみなすことによってモジュラー函数の概念に達することができる．モジュラー函数およびモジュラー形式の理論とその周辺に関する文献として [Lang2] のみを挙げておく．必要な参考文献は [Lang2] の文献表を参照して欲しい．

$\mathbb{R}$ 上一次独立な ω_1, ω_2 に対して, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と置き, $E = \mathbb{C}/\Omega$ と置く．任意のジーナス 1 のコンパクト Riemann 面 (楕円曲線) はある Ω に対する E に双正則同型になることが知られている．しかし, 異なる Ω に対する E が互いに双正則同型になることもありえる．また, 異なる ω_1, ω_2 に対して同一の Ω が得られることもありえる．よって, 楕円曲線 (の双正則同型類) を分類を得るためには, どのような ω_1, ω_2 に対して互いに双正則な E が得られるかを決定すれば良い．互いに双正則な E を与える Ω は $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ の作用 $\Omega \mapsto \alpha\Omega$ によって移り合うことを証明することができる．また, 同じ Ω を与える ω_1, ω_2 の組は $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ の作用 $(\omega_2, \omega_1) \mapsto (a\omega_2 + b\omega_1, c\omega_2 + d\omega_1)$ によって互いに移り合うことがわかる．$\tau = \omega_2/\omega_1$ と置く．必要なら ω_1 と ω_2 を交換して, $\operatorname{Im}\tau > 0$ であると仮定して良い．上半平面 $\mathfrak{H} = \{\, \tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0 \,\}$ を $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ による一次分数変換の作用で割ってできる商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ を考える．以上で述べた結果をまとめると, 楕円曲線の双正則同型類と $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の点は一対一に対応していることがわかる．$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は楕円曲線のモジュライ空間 (moduli space) であると言う．一般にある幾何学的対象の同型類をパラメトライズする空間のことを○○のモジュライ空間を呼ぶのである．

$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ に関するモジュラー函数とは, 上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の有理型函数であって, Γ の作用に関して不変な函数のことである．$PSL(2, \mathbb{Z})$ の色々な部分群を考えたり, 不変性の条件を適切に弛めたりすることによって, 色々なヴァリアントを考えることができる．このようにして得られる函数の理論がモジュラー函数もしくはモジュラー形式の理論である．

以上の大雑把な説明から分かるように, モジュラー形式の理論は楕円曲線の同型類の全てを扱うことになり, 固定された楕円曲線上の楕円函数論よりも一段深い理論であることがわかる．しかも, そこには楕円曲線という代数幾何的対象だけではなく, $GL(2, \mathbb{Z})$ や $PSL(2, \mathbb{Z})$ のような群が登場して来る．. これらは, 連続群 $GL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{R})$ の離散部分群である．この点に注目して, モジュラー形式の理論を $GL(2, \mathbb{R})$ の表現論を用いて構成することもできる．これによって, モジュラー形式の研究は, 楕円曲線のモジュライ空間上の函数論という代数幾何的な見方と, $GL(2, \mathbb{R})$ を用いた表現論的な見方の 2 つの側面を持つのである．

16 数理物理学の問題への応用 (まだ未完成)

[118] **(単振り子)** 長さ l の糸で吊った単振り子の運動方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -a^2 \sin\varphi, \qquad \left(a = \sqrt{l/g}\right)$$

の解は,

$$\sin(\varphi/2) = k \operatorname{sn}(a(t - t_0), k), \qquad (k \geq 0, t_0 \in \mathbb{R})$$

を満たしていることを示せ. □

ヒント: [寺沢] 第 12 章問題 20 (p.564) の解答 (p.695) を見よ.

[119] **(剛体の回転運動)** [寺沢] 第 12 章問題 21 (p.564) を解け. □

[120] **(独楽の回転運動)** [寺沢] 第 12 章問題 22 (p.564) を解け. □

参考: 他にも, Yang-Baxter 方程式[33], Lamé 方程式[34] など多くの話題がある.

17 歴史 — 楕円函数論は 19 世紀数学の花形

楕円函数論は 19 世紀数学の花形である. その歴史については Klein による『19 世紀の数学』([Klein]) を参照されたい. 19 世紀は楕円函数に限らず色々な特殊函数に関する多くの公式を生産している. その一端に触れてみたい人は [WW] を見て欲しい. (以下の解説も主に [Klein] によるものである.)

2 重周期函数としての楕円函数論を独立に発見をしたのは, 次の 3 人であると言われている:

- ガウス (Carl Friedrich Gauss, 1777.4.30–1855.2.23)
- アーベル (Niels Henrik Abel, 1802.8.5–1829.4.6)
- ヤコビ (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804.12.10–1851.2.18)

ガウスはブラウンシュヴァイク (Braunschweig) の貧しい家に生まれたが, その極めて希な数学的才能が注目され, 結果として恵まれた環境のもとで一生を過ごした. ガウスは 19 世紀数学に新しい見地を切り開いた大天才である. その数学的業績はあまりにも多岐にわたるのでここでは簡単に紹介することはできない. 数学の真の天才について知りたい人は, まずガウスについて調べてみるべきである.

アーベルはノルウェーの寒村 Findö の貧しい牧師の子として生まれ, その短い一生を恵まれない境遇で過ごした. 数学もほとんど独学で学び, 貧困と闘いながら数学の研究を続けたが, 無理がたたって肺結核にかかり 26 歳でその短い生涯を終えた. アーベルは数学的問題を抽象化・一般化し, その問題の普遍的・本質的側面を明らかにする能力において極めて優れていた. (この点においては, アーベル以上に短命なガロア (Évariste Galois, 1811.10.25–1832.5.31) においても同様である.)

ヤコビはプロシアのポツダムの裕福な銀行家の家に生まれ, 恵まれた家庭教育のもとで高い教養を身に付けた. ベルリン大学に進んだが, 数学の講義はほとんど聴かず, オイラーの著作に没頭したらしい[35]. ヤコビは非常に攻撃的な性格の持ち主であり, 他人にとって

[33] [Bax], [Bel], [BD], [JKMO] など多数.

[34] [WW] の第 XXIII 章.

[35] 優秀な数学者になるためには講義に真面目に出席することは必要ではないようである. しかし, 数学を理解するためには, 自分の意思で基本的で重要な文献をじっくりと楽しんで読むという作業は必要不可欠である. これは現在でも同様であり, 講義および演習に出席するだけでは数学を理解することは不可能である. 理解したければ, 基本的で重要な文献をじっくり読むことが必要である. しかし, 現在では極めてたくさんの文献が存在するので, 読むべき文献を各人が精選しなければいけない. あらゆるものに手を付けようとすると, 最終的には何も得ることができずに終わってしまう危険性がある. ずっと先の方を睨みながら, 基礎的な事柄を必要に応じて順番に勉強して行くことが重要である.

不愉快なことを平気で言い, 反感を買うことも少なくなかった. しかし, ヤコビはアーベルの研究の価値を早くから認め, 数学研究上の出逢いの直後に死んでしまった自身より少し年上のアーベルを大変尊敬していたのである. 例えば, 一般の代数函数の不定積分に関する「アーベルの定理」はヤコビが命名したものである. ヤコビはその当時知られていたあらゆる数学を研究したが, 厳密な論理展開にはあまり注意を払わなかった. ヤコビは晩年に財産も失い, 研究も進まず, 恵まれない境遇のもとで, 天然痘にかかり 46 歳でその生涯を閉じている.

このように 3 人の一生を簡潔にまとめてみると, 境遇においてはガウスが最も恵まれていて, アーベルが最も悲惨である. しかし, 楕円函数の理論を世界で初めて発表したのはアーベルであった. (ガウスは楕円函数の存在を知っていたが発表しなかった.) アーベルによる楕円函数に関する研究は『クレレ誌』の第 2 巻 (1827 年 9 月 20 日) と第 3 巻 (1828 年 5 月 26 日) に発表された. 『クレレ誌』の正式名称は "Journals für reine und angewandte Mathematik" (『純粋および応用数学に関する雑誌』) である. 『クレレ誌』は 19 世紀ドイツにおける純粋数学の発展において重要な役目を果たした. アーベルの第 1 論文もこの『クレレ誌』の第 1 号に掲載されている. アーベルは恵まれない境遇で一生を過ごしたが, クレレと知り合いになれたことは数少ない好運な出来事の一つであった. (もちろん, クレレにとっても好運なことであった.)

アーベルより 2 歳ほど年下のヤコビが楕円函数に関係した論文を発表し始めるのは 1827 年 9 月からである. 1827 年 11 月には楕円不定積分の逆函数を考察するというアーベルと同様のアイデアを発表している. アーベルが楕円函数論に関する研究を発表し始めたのも 1827 年の後半なので, 翌年の 1828 年は楕円函数論の構築に関する激しい競争の年になる. しかし, アーベルは貧困と研究の無理がたたり肺結核で 1829 年の 4 月 6 日に死んでしまうのである. しかも, ベルリンに招聘するという吉報が届いたのはアーベルの死の数日後であった.

アーベルが優れていた点は問題の一般化・普遍化の能力である. アーベルが他の二人を越えている点は楕円函数を越えて任意の代数函数の積分という一段高い見地に達したことである. その理論は現在においてはコンパクト Riemann 面上の微分形式およびその積分の理論として整備されている. Riemann 面のジーナスが 1 の場合がちょうど楕円函数の理論に対応している. アーベルはジーナス 1 を越えて一般の場合も扱ったのである.

ヤコビは先を見通した卓越した計算力に長けていた. ヤコビはテータ函数 (多変数の場合を含む) を独立に取り上げ, 楕円函数およびテータ函数に関する重要な公式をたくさん計算した. 楕円函数およびテータ函数に関する多くの記号や公式はヤコビに由来するのである[36]. ヤコビが築いた世界は現在においてもその重要性は失われていない. (可解格子模型などの研究を通じて, その重要性はむしろ増したように感じられる.)

アーベルが長生きしていれば, アーベルの長所とヤコビの長所が互いに補完し合って, 研究は滑らかにしかも急速に進歩したと思われるので大変残念なことである.

さて, 楕円函数論の存在を知っていながら発表を控えたガウスであるが, ガウスによる楕円函数の研究が他の二人の研究に全て包含されているわけでもない. ガウスはモジュラー函数 (modular function) の理論を手中にしていた.

モジュラー函数およびモジュラー形式の理論は数論において極めて重要な役目を果た

[36] リーマンがゼータ函数に $\zeta(s)$ の記号を採用したのは, テータ ϑ と似た発音の記号を採用したからであるという説もある. これが本当ならゼータ函数の記号も間接的にヤコビに関係していると考えることができる. (リーマンはゼータ函数が楕円テータ函数のメリン変換によって得られることを発見し, テータ函数に関する函数等式からゼータ函数に関する函数等式を導いた.)

している. 最近のフェルマー予想のワイルスによる解決もその範中に入っていると考えて良い.

この手加減抜きの問題集はまだ未完成であるが, 以上で今学期に渡す楕円函数に関するプリントはお終いとする (予定である).

講義の方では主に Jacobi の楕円函数 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ (特に $\mathrm{sn}\,u$) に関する解説がなされたようだが, 演習の方では主に Weierstrass の楕円函数 $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ を扱うことになってしまった. そのせいで理解し難い点が生じた点については申し訳なく思っている.

Jacobi の楕円函数の現代的な解釈の仕方の一つによると, Jacobi の楕円函数は楕円曲線上の function ではなく, 楕円曲線上の非常に特別な line bundles の sections とみなされる. この見方によると, Jacobi の楕円函数達と相性の良い Jacobi のテータ函数もやはり同じ line bundles の sections とみなされる. つまり, 代数幾何的には同一の対象を調べるために, 色々な表現 (例えば sn 函数やテータ函数) を用いていると考えるのである. Weierstrass の $\wp$ 函数もこれと同様に考えることができるのであるが, $\wp$ の住みかである line bundle は Jacobi の楕円函数達とは全く異なる. (楕円曲線を (E, P_0) (P_0 は原点) と書くとき, $\wp$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\in\mathcal{P}_{\prime})$ の global holomorphic section である. 一方, Jacobi の楕円函数達は $L^{\otimes 2} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を満たす non-trivial line bundle L に対する $L(P)$ (P は X のある点) の定数倍を除いて唯一の non-trivial global holomorphic section である. このような L は同型を除いてちょうど 3 個あり, それぞれが sn, cn, dn の住みかになっているのである.) Jacobi の楕円函数達と Weierstrass の $\wp$ 函数の “臭い” が異なるのは, それらの住みかが違うことが原因であると考えることができるのである.

参考文献

[Bax] R. J. Baxter: Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, 1982

[BD] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd: Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl. **16**, 159–180, 1982

[Bel] A. A. Belavin: Dynamical symmetry of integrable quantum systems, Nucl. Phys. **B180** [FS2], 189–200, 1981

[Fay] J. D. Fay: Theta functions on Riemann surfaces, Lecture Notes in Mathematics **352**, Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1973

[Gun] R. C. Gunning: Lectures on Riemann surfaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966

[Has] K. Hasegawa: Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices, preprint 1995

[HC] A. フルヴィッツ, R. クーラント: 楕円関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 足立恒雄・小松啓一訳

[JKMO] M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, and M. Okado: The $A_n^{(1)}$ face models, Comm. Math. Phys. **119**, 543–565, 1988

[数] エビングハウス他著: 数 (上, 下), シュプリンガー・フェアラーク東京 1991 (Zhalen の邦訳, 訳者 成木勇夫)

[Klein] F. クライン: 19 世紀の数学, 共立出版, 1995 (Felix Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19, Jahrhundert I, Springer, 1926 の邦訳)

[久賀 1] 久賀 道郎: ガロアの夢, 日本評論社

[久賀 2] 久賀 道郎: ドクトル クーガー の数学講座 (1, 2), 日本評論社

[今井] 今井 功: 流体力学と複素解析, 日本評論社

[岩澤] 岩澤 健吉: 代数函数論 増補版, 岩波書店

[Lang1] Serge Lang: Real analysis, 1969, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (邦訳: 現代の解析学, 1981, 共立出版)

[Lang2] Serge Lang: Elliptic functions, second edition, GTM 112, Springer-Verlag, 1987

[大森] 大森 英樹: 幾何学の見方・考え方, 日本評論社

[竹内] 竹内 端三: 楕圓函數論, 岩波全書 74, 岩波書店

[Mumford1] David Mumford: Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics Vol. 28, 1993, Birkhäuser

[Mumford2] David Mumford: Tata Lectures on Theta II, Progress in Mathematics Vol. 43, 1984, Birkhäuser

[佐武] 佐武 一郎: 線型代数学, 数学選書 1, 裳華房

[数学辞典] 岩波 数学辞典 第 3 版, 日本数学会編集, 岩波書店 1985

[高木] 高木 貞治: 解析概論, 改定第三版, 岩波書店

[寺沢] 寺沢 寛一: 自然科学者のための数学概論, 増訂版, 岩波書店

[vdW] B. L. van der Waerden: Moderne Algebra I, II, Springer (東京図書から邦訳『現代代数学』が出ている.)

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis, Cambridge University Press, Fourth Edition, 1927, Reprinted 1992