幾何学概論 B 演習

黒木玄 2006 年 11 月 7 日 (火) (教師用)

目 次

3 ホモロジー群に関する様々な問題

3.1 鎖複体の準同型が誘導するホモロジー群の準同型

$C_\bullet$, $D_\bullet$ が $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体であるとき, すべての $p \in \mathbb{Z}$ に対して, 準同型 $f_p : C_p \to D_p$ が与えられており, 図式

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1} \\ {\scriptstyle f_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} \\ D_p & \xrightarrow{\partial} & D_{p-1} \end{array}$$

が可換になるとき (すなわち $\partial \circ f_p = f_{p-1} \circ \partial$ が成立するとき), $f_\bullet = \{f_p\}$ は**鎖複体の準同型**もしくは**鎖写像 (chain map)** と呼ばれる.

[30] **(鎖複体の準同型が誘導するホモロジー群の準同型)** 鎖複体のあいだの準同型

$$f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$$

が与えられたとき, $f_p(B_p(C_\bullet)) \subset B_p(D_\bullet)$, $f_p(Z_p(C_\bullet)) \subset Z_p(D_\bullet)$ が成立し, 各 f_p が自然な準同形写像

$$H_p(f_\bullet) : H_p(C_\bullet) \to H_p(D_\bullet)$$

を誘導することを示せ. □

すぐ上の問題の結果は今後自由に使われる. 非常に重要なので必ず解いておくように.

[31] **($H_p(\cdot)$ の函手性)** 鎖複体のあいだの準同型 $f_\bullet, f'_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, $g_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ が与えられたとき, $H_p(\mathrm{id}_{C_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_p(C_\bullet)}$, $H_p(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_p(g_\bullet) \circ H_p(f_\bullet)$, $H_p(f_\bullet + f'_\bullet) = H_p(f_\bullet) + H_p(f'_\bullet)$ が成立することを示せ. □

3.2 鎖ホモトピーの原理

[32] **(鎖ホモトピーの原理)** $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ は $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体の準同形写像であるとする. 任意に $p \in \mathbb{Z}$ を固定する. 加群の準同形写像 $\lambda_p : C_p \to D_{p+1}$, $\lambda_{p-1} : C_{p-1} \to D_p$ で,

$$f_p - g_p = \lambda_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ \lambda_p \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

を満たすものが存在すると仮定する. このとき, $H_p(f_\bullet) = H_p(g_\bullet)$ が成立する. よって, 特に $C_\bullet = D_\bullet$, $f_p = \mathrm{id}_{C_\bullet}$, $g_p = 0$ であるとき, $H_p(C_\bullet) = 0$ が成立する. □

全ての $p \in \mathbb{Z}$ に対して λ_p が与えられていて, この問題の条件を満たしているとき, $\lambda_\bullet$ は $f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間の鎖ホモトピー (chain homotopy) であると言う. $f_\bullet$ と $g_\bullet$ の間の鎖ホモトピーが存在するとき, $f_\bullet$ と $g_\bullet$ は鎖ホモトピック (chain homotopic) であると言う. 鎖ホモトピーは大変重要なアイデアであり, 今後頻繁に使われる.

[33] **(単体のホモロジー群)** 自然に Δ 複体とみなされた n 次元単体 $\Delta^n = |v_0 v_1 \cdots v_n|$ のホモロジー群について,

$$H_0(\Delta^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_p(\Delta^n, \mathbb{Z}) = 0 \quad (p \neq 0)$$

が成立することを示せ. □

ヒント. $C_\bullet$ は Δ^n に対応する鎖複体であるとする. すなわち C_p は Δ^n の p 次元辺単体から生成された自由加群であり, 境界準同型は自然に定義されたものとする. 鎖複体の準同形 $\varepsilon_\bullet : C_\bullet \to C_\bullet$ を $\varepsilon_0(\langle v_i \rangle) = \langle v_0 \rangle$, $\varepsilon_p = 0$ $(p \neq 0)$ という条件よって定義する. さらに, 準同形写像 $\lambda_p : C_p \to C_{p+1}$ を次の条件によって定義する:

$$\lambda_p(\langle v_{i_0} \cdots v_{i_p} \rangle) := \langle v_0 v_{i_0} \cdots v_{i_p} \rangle \qquad (\langle v_{i_0} \cdots v_{i_p} \rangle \in C_p)$$

(v_{i_k} のどれかが v_0 に等しいとき右辺は 0 とみなす.) このとき, $\lambda_\bullet$ は $\mathrm{id}_{C_\bullet}$ と $\varepsilon_\bullet$ の間の鎖ホモトピーを与えることを計算によって示すことができる. 後は上の問題の結果を使えば良い. □

3.3 0 次元ホモロジー群の幾何学的意味

X は Δ 複体であり、その $Y \subset X$ が自然に Δ 複体とみなされるとき, Y は X の Δ **部分複体 (Δ-subcomplex)** であると言う.

[34] **(連結成分)** X は Δ 複体であるとし, X の位相空間としての連結成分の全体を $\{X_a\}_{a\in A}$ と表わす. このとき各連結成分 X_a は X の Δ 部分複体であり,

$$H_p(X) = \bigoplus_{a\in A} H_p(X_a)$$

が成立することを示せ. □

[35] **(0 次のホモロジー群の幾何学的意味)** X は Δ 複体であるとする. このとき, X が位相空間として連結であることと $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ が成立することが同値であることを示せ. さらに, $H_0(X)$ は X の連結成分全体の集合から生成される自由加群に同型になることを示せ. □

3.4 球面のホモロジー群

[36] n 単体 Δ^n の表面 $\partial\Delta^n$ は Δ^n の Δ 部分複体をなす. そのホモロジー群に関して次が成立している:

$$H_p(\partial\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0, n-1), \\ 0 & (p \neq 0, n-1). \end{cases} \quad \square$$

この問題の結果は実は $n-1$ 次元球面のホモロジー群を計算したことになっている.

ヒント 1. 計算の仕方には色々な方法があるが, 最も直接的な方法は n 単体のホモロジー群の計算に登場した鎖ホモトピーをこの場合にも流用することである. □

ヒント 2. 他にも, 鎖複体の短完全列からホモロジー長完全列を使って計算するという方法もある. 長完全列については後の節で説明する. $D_n = \mathbb{Z}$, $D_p = 0$ $(p \neq n)$ によって鎖複体 $D_{\bullet}$ を定義し,

$$0 \to C_{\bullet}(\partial\Delta^n) \to C_{\bullet}(\Delta^n) \to D_{\bullet} \to 0$$

なる短完全列が存在することを確かめ, この短完全列から得られる長完全列を調べると, 簡単に上の問題を解くことができる. □

4 ホモロジー群の長完全列

4.1 ホモロジー群の長完全列

加群の準同型の列 $A \to B \to C$ が**完全 (exact)** であるとは $\mathrm{Im}(A \to B) = \mathrm{Ker}(B \to C)$ が成立することである. 加群の準同型の列 $\cdots \to A_p \to A_{p-1} \to A_{p-2} \to \cdots$ が**完全列 (exact sequence)** であるとはそのすべての部分列 $A_p \to A_{p-1} \to A_{p-2}$ が完全であることである.

特に $0 \to A \to B \to C \to 0$ の形の完全列を**短完全列 (short exact sequence)** と呼ぶ. 加群の準同形写像の列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ が短完全列であることと $A \to B$ が単射であり $B \to C$ が同型 $C \cong B/\mathrm{Im}(A \to B)$ を誘導することは同値である.

$C_\bullet$, $D_\bullet$, $E_\bullet$ は加群 ($\mathbb{Z}$ 加群) の鎖複体であり, $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, $g_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ は鎖複体の準同形であるとする. 全ての p に対して

$$0 \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow 0$$

が短完全列 (short exact sequence) をなすとき,

$$0 \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} D_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} E_\bullet \longrightarrow 0$$

は**鎖複体の短完全列**であると言う. 鎖複体の短完全列は非常に役に立つ.

次の問題は極めて重要である. 一生のうち一度以上は完璧な証明を付けておくことが望ましい!

[**37**] (**ホモロジー長完全列**) 以下の図式は可換図式であり[1], 加群の鎖複体の準同形によって構成されていて, 横向きの 2 つの列は短完全列であると仮定する:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "c_\bullet"] & D_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"] \arrow[d, "d_\bullet"] & E_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "e_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] & D'_\bullet \arrow[r, "g'_\bullet"] & E'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき, 次の可換図式が自然に得られることを示せ:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(C_\bullet) \arrow[r, "H_p(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_p(c_\bullet)"] & H_p(D_\bullet) \arrow[r, "H_p(g_\bullet)"] \arrow[d, "H_p(d_\bullet)"] & H_p(E_\bullet) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "H_p(e_\bullet)"] & H_{p-1}(C_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{p-1}(c_\bullet)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(C'_\bullet) \arrow[r, "H_p(f'_\bullet)"] & H_p(D'_\bullet) \arrow[r, "H_p(g'_\bullet)"] & H_p(E'_\bullet) \arrow[r, "\delta'_p"] & H_{p-1}(C'_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

さらに, この図式の横向きの列は完全列になることを示せ. □

この問題における横向きの長い完全列を**ホモロジー長完全列 (homology long exact sequence)** と呼ぶ. 鎖複体の短完全列から, ホモロジー長完全列が得られるということは, ホモロジー代数において最も基本的なことである. ホモロジー (もしくはコホモロジー) という言葉が出てくる数学的対象を扱うときには, 役に立つ長完全列を生み出す短完全列がないかどうか探し出すことによって, 必要な結果が得られる場合が結構多い. ホモロジー長完全列が大変便利な道具である.

[**38**] $A \to B \to C \to D$ が加群の完全列であるとき, 以下が成立することを示せ:

1. $A \to B$ が 0 であることと, $B \to C$ が単射であることは同値である.

2. $C \to D$ が 0 であることと, $B \to C$ が全射であることは同値である.

3. $A \to B$ と $C \to D$ が共に 0 であることと, $B \to C$ が同型であることは同値である. □

ホモロジー長完全列を得ることができた場合は, まずこの問題の結果をそれに適用したときどのような結論が得られるかを調べてみよ. ホモロジー長完全列の重要な例として, **マイヤー・ヴィートリス (Mayer-Vietoris) の完全列**と**相対ホモロジー群の長完全列**を挙げておこう.

[1] この場合は $d_\bullet \circ f_\bullet = f'_\bullet \circ c_\bullet$ および $e_\bullet \circ g_\bullet = g'_\bullet \circ d_\bullet$ が成立しているということ. 以下も同様.

4.2 Mayer-Vietorisの完全列

鎖複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ に対して, その直和鎖複体 $E_\bullet = C_\bullet \oplus D_\bullet$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
&E_p = C_p \oplus D_p = C_p \times D_p, \\
&\partial(c, d) := (\partial c, \partial d) \qquad (c \in C_p,\, d \in D_p).
\end{aligned}
$$

[39] (Mayer-Vietorisの完全列) X は Δ 複体であるとし, X_1, X_2 はその Δ 部分複体であるとし, $X = X_1 \cup X_2$ が成立しているものとする. このとき次の完全列が存在することを示せ:

$$\cdots \to H_p(X_1 \cap X_2) \to H_p(X_1) \oplus H_p(X_2) \to H_p(X) \to H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \to \cdots.$$

この完全列を **Mayer-Vietoris の完全列**と呼ぶ. □

ヒント. 次の短完全列が存在することを示せ:

$$0 \to C_\bullet(X_1 \cap X_2) \to C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2) \to C_\bullet(X) \to 0.$$

この完全列の作り方は以下の通り. $C_\bullet(X_1 \cap X_2) \subset C_\bullet(X_i) \subset C_\bullet(K)$ であることに注意し, $C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2) \to C_\bullet(X)$ を $(c_1, c_2) \mapsto c_1 + c_2$ で定義し, $C_\bullet(X_1 \cap X_2) \to C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2)$ を $c' \mapsto (c', -c')$ で定義すれば良い. □

参考 4.1 Δ 複体 X を 2 つの Δ 複体 X_1, X_2 の貼り合わせとして構成するとき, X のホモロジー群と X_1, X_2 および貼り合せ部分 $X_1 \cap X_2$ のホモロジー群の間にどのような関係があるかという問題は基本的で重要である. Mayer-Vietoris の完全列はこの問題への一つの解答を与えている. 基本群に対する類似の問題の解答は van Kampen の定理によって与えられる. □

[40] (bouquet, ブーケ, 花束) $n \geq 1$ であるとし, $\mathbb{R}^N$ 内の r 個の $n+1$ 単体 $\sigma_1^{n+1}, \dots, \sigma_r^{n+1}$ が 1 つの頂点 a を共有しており, 互いにそれ以外の共通点を持たないと仮定する. $\sigma_1^{n+1}, \dots, \sigma_r^{n+1}$ の n 次元以下の辺単体全体の和集合を $X_{n,r}$ と書くと, $X_{n,r}$ は自然に Δ 複体をなす. $N = 2$, $n = 1$, $r = 4$ の場合における $X_{n,r}$ を図示せよ. 次が成立することを示せ:

$$H_p(X_{n,r}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0), \\ \mathbb{Z}^r & (p = n), \\ 0 & (p \neq 0, n). \end{cases} \quad \square$$

ヒント. 自力で解けなければ [田村] の p.119 を見よ. Mayer-Vietoris の完全列を使った r に関する帰納法で証明することができる. □

参考 4.2 $\sigma_1^{n+1}, \dots, \sigma_r^{n+1}$ の和集合 Y は自然に Δ 複体とみなされ, $H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(Y) = 0$ $(p \neq 0)$ が成立する. (Y は可縮なのでこのことはホモロジー群のホモトピー不変性を使えばただちに得られる.) これを認めれば, $(Y, X_{n,r})$ に対して相対ホモロジー群の完全列を適用することによって, $X_{n,r}$ のホモロジー群を帰納法に頼らずに計算することができる. □

4.3 Mayer-Vietoris の完全列の使い方

定理 4.3 (Mayer-Vietoris の完全列) X は Δ 複体であるとし, X_1, X_2 はその部分複体であるとし, $X = X_1 \cup X_2$ が成立しているとする. このとき次のような鎖複体の短完全列が自然に得られる:

$$0 \leftarrow C_\bullet(X) \leftarrow C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2) \leftarrow C_\bullet(X_1 \cap X_2) \leftarrow 0.$$

ここで $C_\bullet(X) \leftarrow C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2)$ は (c_1, c_2) を $c_1 + c_2$ に対応させる写像であり, $C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2) \leftarrow C_\bullet(X_1 \cap X_2)$ は c を $(c, -c)$ に対応させる写像である. さらにこの短完全列から次の長完全列が自然に得られる:

$$\cdots \leftarrow H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \leftarrow H_p(X) \leftarrow H_p(X_1) \oplus H_1(X_2) \leftarrow H_p(X_1 \cap X_2) \leftarrow \cdots$$

この完全列を **Mayer-Vietoris の完全列**と呼ぶ. (完全系列と言う場合もある.) □

上の定理の $H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \leftarrow H_p(X)$ を以下では δ_p と書き, **connecting homomorphism** と呼ぶことにする. Connecting homomorphism は "tic tac toe" method によって調子良く構成される.

Mayer-Vietoris の完全列の使い方の概略:

1. まず最初に Mayer-Vietoris の完全列を書き下し, すでにわかっているホモロジー群の構造をそこに書き込む.

2. Mayer-Vietoris の完全列の中の準同型写像たちが具体的にどのように構成されているかに触れずに, その完全性のみから純代数的にどれだけのことが言えるかについて考える.

3. さらに, $H_p(X) \leftarrow H_p(X_1) \oplus H_1(X_2)$ が $([c_1], [c_2])$ を $[c_1 + c_2]$ に対応させる写像であることおよび $H_p(X_1) \oplus H_1(X_2) \leftarrow H_p(X_1 \cap X_2)$ が $[c]$ を $([c], -[c])$ に対応させる写像であることを使えば新たな情報がどれだけ得られるかについて考える.

4. さらにさらに, connecting homomorphism $H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \leftarrow H_p(X)$ の具体的な構成の仕方を使えばどれだけ新たな情報が得られるかについて考える.

以下のホモロジー群は「すでにわかっている」とみなして構わないことにする:

- 一点だけからなる空間 pt のホモロジー群は $H_0 \cong \mathbb{Z}$, $H_p(\mathrm{pt}) \cong 0$ $(p \neq 0)$ となる.

- 可縮な空間 X のホモロジー群は一点だけからなる空間のホモロジー群に同型である. たとえば任意次元の閉単体のホモロジー群は $H_p(\mathrm{pt})$ に同型である.

- Δ 複体 X が連結であるための必要十分条件は $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ が成立することである.

- $H_0(S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(S^1) \cong 0$ $(p \neq 0, 1)$.

もっとたくさんの計算結果をすでに持っていて自由に使いたい人はそうしても構わない.

[41] (以下の問題のヒントでよく使われる結果) 加群の準同型の列

$$\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow M$$

が完全ならば $\mathbb{Z} \leftarrow M$ は 0 写像になる. □

ヒント. $\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2$ を f と書き, $\mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z}$ を g と書き, $\mathbb{Z} \leftarrow M$ を h と書くことにする. $h \neq 0$ と仮定して矛盾を導く.

もしも $h \neq 0$ ならば $\mathbb{Z} \supset \operatorname{Im} h \neq 0$ となる. $\operatorname{Im} h$ は $\mathbb{Z}$ の部分加群なので, 0 でない $a \in \mathbb{Z}$ で $\operatorname{Im} h = \mathbb{Z}a$ を満たすものが存在する ($\mathbb{Z}$ は PID).

$\mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow M$ の完全性より, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} h = \mathbb{Z}a$ である. 準同型定理より $\operatorname{Im} g \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}a$ となる. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}a$ の任意の元は a 倍すると 0 になるが, $\mathbb{Z}^2$ の元で a 倍して 0 になるのは $(0, 0)$ だけである. よって $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}a \cong 0$ でなければいけない. これは $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} h = \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}$ であることを意味している. つまり $g = 0$ となる.

$\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z}$ の完全性より, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g = 0$ である. よって f は単射になる. しかし $\mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{Z}$ への単射準同型は存在しない. (この部分を自力で証明してみよ.)

これで $h \neq 0$ と仮定すると矛盾が導かれることがわかった. よって $h = 0$ である. (以上とは別の証明法もあるので各自工夫してみよ.) □

[42] ([41] の一般化) 加群の準同型の列 $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^{r+s} \to \mathbb{Z}^s$ が完全 (exact) ならば以下が成立することを示せ:

1. $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^{r+s}$ は単射である.
2. $\mathbb{Z}^{r+s} \to \mathbb{Z}^s$ の像は $\mathbb{Z}^s$ に同型になる.
   ($\operatorname{Im}(\mathbb{Z}^{r+s} \to \mathbb{Z}^s) = \mathbb{Z}^s$ となるとは限らない.) □

[43] (∞) 閉 1 単体 $|AB|$ の点 A と B を貼り合わせてできる Δ 複体を X_1 と書き, 閉 1 単体 $|CD|$ の点 C と D を貼り合わせてできる Δ 複体を X_2 と書き, X_1, X_2 の点 $A = B$ と $C = D$ を貼り合わせてできる Δ 複体を X と書くことにする. X, X_1, X_2 に関する Mayer-Vietoris の完全列を用いて X のホモロジー群を計算せよ. □

ヒント. 常に図を描いて説明することを忘れずに. $H_p(X_1) \cong H_p(X_2) \cong H_p(S^1)$ および $H_p(X_1 \cap X_2) = H_p(\mathrm{pt})$ については上に書いたようにすでにわかっているとみなして構わない. さらに K の連結性より $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ も成立している. よって Mayer-Vietoris の完全列から次の完全列が得られる:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_1(X) \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow 0.$$

これが完全列であるということだけから $\mathbb{Z} \leftarrow H_1(X)$ が 0 写像になることを示すことができる (問題 **[41]** を見よ). よってこの完全列は次の二つの完全列に分解される:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0, \quad 0 \leftarrow H_1(K) \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow 0.$$

この後者の完全列より $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^2$ であることがわかる. Mayer-Vietoris の完全列の使い方の概略のステップ 2 まででこの問題は完全に解けてしまう! □

[44] **(ブーケ)** 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して, Y_i は閉 1 単体 $|A_i B_i|$ の両端 A_i, B_i を貼り合わせてできる Δ 複体であるとする. Z_n は $i = 1, \ldots, n$ に対する Y_i の点 $A_i = B_i$ のすべてを一点に貼り合わせてできる Δ 複体であるとする. このとき, $X = Z_n$, $X_1 = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{n-1}$, $X_2 = Y_n$ に関する Mayer-Vietoris の完全列を用い, Z_n のホモロジー群を n に関して帰納的に計算せよ. □

ヒント. 問題 [**43**] はこの問題の $n = 2$ の場合である. この問題でも問題 [**43**] と同様の考え方をすればよい. □

[45] **(日 1)** X_1 は二つの閉 1 単体 $|AB|$ と $|CD|$ を $A \sim C$, $B \sim D$ と貼り合わせてできる Δ 複体であるとし, X_2 は二つの閉 1 単体 $|C'D'|$ と $|EF|$ を $C' \sim E$, $D' \sim F$ と貼り合わせてできる Δ 複体であるとする. X は X_1 の $|CD|$ と X_2 の $|c'd'|$ と自然な線形同相で貼り合わせてできる Δ 複体であるとする. $X = X_1 \cup X_2$ の様子の図を描き, X, X_1, X_2 に関する Mayer-Vietoris の完全列を用いて X のホモロジー群を計算せよ. □

ヒント. $H_p(X_1) \cong H_p(X_2) \cong H_p(S^1)$ であることなどを自由に用いれば, 問題 [**43**] とほとんど同じである. □

[46] **(この結果もよく使われる)** 加群の準同型の列

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}^k \leftarrow M \leftarrow N$$

が完全ならば $M \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathrm{Im}(M \leftarrow N)$ となる. 特に $M \cong \mathbb{Z}^n$ ならば $\mathrm{Im}(M \leftarrow N) \cong \mathbb{Z}^{n-k}$ となる. (ここで $\mathrm{Im}(M \leftarrow N)$ は準同型写像 $M \leftarrow N$ の像を意味している.) □

ヒント. $\mathbb{Z}^k \leftarrow M$ を f と書き, $\mathbb{Z}^k$ の標準的な基を $e_1, \ldots, e_k$ と書く. f は全射になるのである $v_i \in M$ で $e_i = f(v_i)$ となるものが存在する. 準同型 $g : \mathbb{Z}^k \to M$ が $g(e_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ という条件で一意に定まる. g は単射であり, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^k}$ を満たしている.

$M = \mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, f$ を示そう. (これを示せば $\mathrm{Im}\, g \cong \mathbb{Z}^k$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}(M \leftarrow N)$ より第一の主張が示される.)

$v \in M$ に対して $u = v - g(f(v))$ と置くと $f(u) = 0$ である. よって v は $v = g(f(v)) + u$ と $\mathrm{Im}\, g$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の元の和で表わされる.

$v \in \mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Ker}\, f$ と仮定する. $v \in \mathrm{Im}\, g$ より, ある $x \in \mathbb{Z}^k$ で $v = g(x)$ となるものが存在する. $v \in \mathrm{Ker}\, f$ より, $0 = f(v) = f(g(v)) = v$ となる.

以上によって $M = \mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, f \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathrm{Im}(M \leftarrow N)$ が証明された.

第二の主張は有限生成 Abel 群の基本定理を認めれば第一の主張からただちに得られる. (そういう証明が気にいらなければ直接的な証明も考えてみよ.) □

[47] **(日 2)** X_1 は二つの閉 1 単体 $|AB|$ と $|CD|$ を $A \sim C$, $B \sim D$ と貼り合わせてできる Δ 複体であるとし, X_2 は閉 1 単体 $|EF|$ であるとする. X は X_1 と X_2 を $A \sim E$, $B \sim F$ と貼り合わせてできる Δ 複体であるとする. $X = X_1 \cup X_2$ の様子の図を描き, X, X_1, X_2 に関する Mayer-Vietoris の完全列を用いて X のホモロジー群を計算せよ. □

ヒント. この問題の X は問題 [**45**] の X に等しい. 同じ X のホモロジー群を異なる Mayer-Vietoris の完全列を用いて計算せよというのがこの問題の内容である. ここまで順番に問題を解いて来た人はノーヒントで解けるはずである. □

[48] **(2 次元球面)** X_1, X_2 はそれぞれ Δ 複体とみなされた閉 2 単体 $|ABC|$, $|DEF|$ であるとする．X_1, X_2 の辺を次の組み合わせについて自然な線形同相で貼り合わせてできる Δ 複体を X と書くことにする:

$$|AB| \sim |DE|, \quad |BC| \sim |EF|, \quad |CA| \sim |FD|.$$

X, X_1, X_2 に関する Mayer-Vietrois の完全列を用いて X のホモロジー群を計算せよ．□

ヒント． $H_p(X_1) \cong H_p(X_2) \cong H_p(\mathrm{pt})$ および $H_p(X_1 \cap X_2) \cong H_p(S^1)$ および X の連結性 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ を Mayer-Vietroris の完全列に適用すると次の完全列が得られる:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_1(X) \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_2(X) \leftarrow 0.$$

純代数的な議論によって $\mathbb{Z} \leftarrow H_1(X)$ が 0 写像であることがわかる．(問題 **[41]** を見よ)．よって $H_1(X) = 0$, $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$ であることがわかる．この問題も Mayer-Vietoris の完全列の使い方の概略のステップ 2 までで完全に解けてしまう！ □

[49] **(3 次元球面)** X_1, X_2 はそれぞれ Δ 複体とみなされた閉 3 単体 $|ABCD|$, $|EFGH|$ であるとする．X_1, X_2 の辺を次の組み合わせについて自然な線形同相で貼り合わせてできる Δ 複体を X と書くことにする:

$$|BCD| \sim |FGH|, \quad |ACD| \sim |EGH|, \quad |ABD| \sim |EFH|, \quad |ABC| \sim |EFG|.$$

X, X_1, X_2 に関する Mayer-Vietrois の完全列を用いて X のホモロジー群を計算せよ．ただし $H_p(X_1 \cap X_2) \cong H_p(S^2)$ は上の問題の結果によって既知とみなして構わない: $H_0(S^2) \cong H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(S^2) = 0$ $(p \neq 0, 2)$． □

ヒント． $H_p(X_1) \cong H_p(X_2) \cong H_p(\mathrm{pt})$ および $H_p(X_1 \cap X_2) \cong H_p(S^2)$ および X の連結性 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ を Mayer-Vietroris の完全列に適用すると次の完全列が得られる:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^2 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_1(X) \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow H_2(X) \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_3(X) \leftarrow 0.$$

純代数的な議論によって $\mathbb{Z} \leftarrow H_1(X)$ が 0 写像であることがわかる．(問題 **[41]** を見よ)．よって $H_1(X) = H_2(X) = 0$, $H_3(X) \cong \mathbb{Z}$ であることがわかる．この問題も Mayer-Vietoris の完全列の使い方の概略のステップ 2 までで完全に解けてしまう！ □

参考 4.4 上の二つの問題を n 次元に一般化することによって n に関して帰納的に S^n $(n = 1, 2, \ldots)$ のホモロジー群が容易に計算される．その結果は $H_0(S^n) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(S^n) = 0$ $(p \neq 0, n)$.

より本質的な $H_p(S^n)$ の計算の仕方は $n+1$ 次元閉球体 D^{n+1} とその表面と同一視される n 次元球面 S^n に関する相対ホモロジーの完全列から得られる．次の問題を見よ． □

4.4 相対ホモロジー群の長完全列

[50] $D_\bullet$ が鎖複体であり, $p \in \mathbb{Z}$ に対して C_p は D_p の部分加群であり, $\partial C_p \subset C_{p-1}$ が成立していると仮定する．このとき, $C_\bullet$ は $D_\bullet$ の鎖部分複体 (chain subcomplex) であると

言う. $E_p = D_p/C_p$ と置くことによって, 鎖複体 $E.$ が定まることを説明せよ. 以上の状況のもとで, 鎖複体の短完全列

$$0 \to C. \to D. \to E. \to 0$$

が存在することを示せ. □

Δ 複体 X から定まる鎖複体を $C.(X)$ と書くことにする. Δ 複体 X とその部分複体 Y に対して, $C.(X)$ は $C.(Y)$ の鎖部分複体をなす. 上の問題の結果より,

$$C_p(X, Y) = C_p(X)/C_p(Y)$$

によって鎖複体 $C.(X, Y)$ を定義することができる. $C.(X, Y)$ のホモロジー群を $H.(X, Y)$ と書き, (X, Y) の**相対ホモロジー群**と呼ぶ.

[**51**] **(相対ホモロジー群の長完全列)** X, Y, Z は Δ 複体であり, $Z \subset Y \subset X$ が成立しているとする. このとき, 次の完全列が存在する:

$$\cdots \to H_p(Y, Z) \to H_p(X, Z) \to H_p(X, Y) \to H_{p-1}(Y, Z) \to \cdots.$$

特に, $Z = \emptyset$ の場合を考えることによって, 次の完全列が存在することもわかる:

$$\cdots \to H_p(Y) \to H_p(X) \to H_p(X, Y) \to H_{p-1}(Y) \to \cdots. \quad \square$$

ヒント. 次の短完全列の存在を示せ:

$$0 \to C.(Y, Z) \to C.(X, Z) \to C.(X, Y) \to 0. \quad \square$$

[**52**] n 単体 Δ^n に対して,

$$H_p(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = n), \\ 0 & (p \neq n) \end{cases}$$

が成立する. これを利用して, $n \geq 2$ のとき n 単体 Δ^n に対して,

$$H_p(\partial\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0, n-1), \\ 0 & (p \neq 0, n-1) \end{cases}$$

が成立することを示せ. □

[**53**] $\Delta^n_{\leq n-2}$ は n 単体 Δ^n の $n-2$ 次元以下の辺単体全体の和集合のなす Δ 複体であるとする. $n = 3$ の場合に $\Delta^n_{\leq n-2}$ の図を描け. $n \geq 3$ のとき, 次が成立することを示せ:

$$H_p(\Delta^n_{\leq n-2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0), \\ \mathbb{Z}^n & (p = n-2), \\ 0 & (p \neq 0, n-2). \quad \square \end{cases}$$

ヒント. $H_p(\Delta^n, \Delta^n_{\leq n-2}) = 0$ $(p \neq n-1, n)$, $H_{n-1}(\Delta^n, \Delta^n_{\leq n-2}) \cong \mathbb{Z}^n$, $H_n(\Delta^n, \Delta^n_{\leq n-2}) \cong \mathbb{Z}$. □

[54] (**n 次元球面**) n は 2 以上の整数であると仮定する. Y は $n+1$ 次元閉単体 $\sigma = \Delta^{n+1}$ であるとし, $X = Y_{\leq n}$ はその n 次元切片 (Δ^{n+1} の表面) であるとする. このとき $C_p(Y,X) = C_p(Y)/C_p(X)$ と置くことによって自然に鎖複体 $C_{\bullet}(Y,X)$ と鎖複体の短完全列が得られる:

$$0 \leftarrow C_{\bullet}(Y,X) \leftarrow C_{\bullet}(Y) \leftarrow C_{\bullet}(X) \leftarrow 0$$

が得られる. この短完全列に対応するホモロジー長完全列を利用して X のホモロジー群を計算せよ. □

ヒント. $C_{n+1}(Y,X) \cong \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle$ であり, それ以外の $C_p(Y,X)$ は 0 になる. よって鎖複体 $C_{\bullet}(Y,X)$ のホモロジー群を $H_p(Y,X)$ と書くと, $H_{n+1}(Y,X) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(Y,X) = 0$ ($p \neq n+1$). Y は $n+1$ 次元閉単体なので $H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$, $H_p(Y) \cong 0$ ($p \neq 0$). さらに X の連結性より $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ である. したがってホモロジー長完全列より, 次の完全列が得られる:

$$0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow H_1(X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \leftarrow H_{n-1}(X) \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow H_n(X) \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0.$$

よって $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$ かつ $H_p(X) = 0$ ($p = 1, \ldots, n-1$). □

5 有限生成加群の基本定理と Euler 数

5.1 有限生成 Abel 群の基本定理

以下 Abel 群の群の演算を加法で表わすことにし, Abel 群を $\mathbb{Z}$ 加群とみなして扱うことにする. 有限生成 Abel 群と有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群は同じものである.

正の有理整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{>0}$ と書き, 非負の有理整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書くことにする. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は集合として $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ と同一視でき, $a, b = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して群の演算の結果としての $a + b \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は 整数としての a と b の和を m で割った余りとして定義される. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は 1 から生成される位数 m の巡回群になる.

[55] (**有限次元ベクトル空間の基本定理**) K は体であるとし, V は有限個のベクトルで張られる K 上のベクトル空間であるとする. このとき V に対して $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で

$$V \cong K^{m_0} \qquad (K \text{ 上のベクトル空間として同型})$$

を満たすものが唯一存在する. m_0 を V の次元 (dimension) と呼ぶ. □

[56] (**一般の可換環上の有限生成自由加群の階数**) R は任意の可換環であるとし, M は R 上の有限生成自由 R 加群であるとする. M の部分集合 B で $M \cong \bigoplus_{b \in B} Rb$ を満たすものを M の基と呼ぶ. M の基の元の個数は, 常に有限であり, 基の取り方によらないことを示せ. M の基の元の個数を自由加群 M の**階数 (rank)** と呼ぶ. □

ヒント. 極大イデアルの存在定理を用いて, 体上のベクトル空間の理論に帰着する. □

以上の問題は体上の有限次元ベクトル空間や一般の可換環上の有限生成自由加群の同型類が非負の整数 (次元もしくは階数) でパラメトライズされることを意味している. 問題

は自由加群でない場合の分類である．一般の可換環上の有限生成加群の同型類の分類はおそろしく複雑な問題だが, 有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の同型類の分類はそう難しくない.

ここで行列の基本変形について復習しておこう．R は任意の環 (結合的で 1 を持つが可換とは限らない, もちろん可換でもよい) であるとし, R の元を成分とする行列を考える. 以下のような行列の変形を行列の (R 上の) 左基本変形と呼ぶ:

- 任意の行に $R^\times$ の元を左からかける.
- 任意の行を他の行と交換する.
- 任意の行に R の元を左からかけたものを他の行に加える.

以下のような行列の変形を行列の (R 上の) 右基本変形と呼ぶ:

- 任意の列に $R^\times$ の元を右からかける.
- 任意の列を他の列と交換する.
- 任意の列に R の元を右からかけたものを他の列に加える.

行列の左基本変形と右基本変形を合わせて行列の基本変形と呼ぶ.

[57] **(整数を成分に持つ行列の単因子)** $\mathbb{Z}$ の元を成分とする任意の行列は行列の基本変形を有限回繰り返すことによって, 次の形の行列に変形可能である:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \text{ここで各 } d_i \text{ は正の整数であり } d_1|d_2|\cdots|d_r.$$

しかも, r および d_i はもとの行列から一意的に決まる．$d_1,\dots,d_r$ をもとの行列の単因子と呼ぶ．□

[58] **(有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群の部分加群)** M は有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるとし, N はその部分加群であるとする．このとき M のある自由 $\mathbb{Z}$ 基底 $v_1,\dots,v_n$ と正の整数 $d_1,\dots,d_r$ で

$$N = \mathbb{Z}d_1v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_rv_r, \qquad d_1|d_2|\cdots|d_r$$

を満たすものが一意に存在する．特に N もまた有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．□

ヒント. この問題を解くためにすぐ上の単因子に関する結果を用いて良い．□

定理 5.1 (有限生成 Abel 群の基本定理 1) 任意の有限生成 Abel 群 M に対して, 0 以上の整数 r と 2 以上のある整数たち $d_1, d_2, \dots, d_s$ で群の同型

$$M \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^r, \quad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$$

を満たしているものが一意に存在する．□

ヒント. この問題を解くためにすぐ上の有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群の部分加群に関する結果を用いてよい. □

定理 5.2 (有限生成 Abel 群の基本定理 2) 任意の有限 Abel 群 M に対して, 0 以上の整数 r と 素数の正の整数べき $p_1^{f_1}, p_2^{f_2}, \dots, p_N^{f_N}$ で群の同型

$$M \cong (\mathbb{Z}/p_1^{f_1}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p_2^{f_2}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_N^{f_N}\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^r$$

を満たしているものが $p_j^{f_j}$ たちを並べる順序の違いを除いて一意に存在する. □

ヒント. この問題を解くためにすぐ上の有限生成 Abel 群の基本定理 1 の結果を用いてよい. Chinese Remainder Theorem を使え. □

有限生成 Abel 群の基本定理は一度証明ができたならば他の問題で自由に用いて良い.

(有限) 単体複体の $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群を扱うためには有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の計算ができなければいけない. 整数を成分に持つ行列の単因子と有限生成 Abel 群の基本定理を証明するテクニックはそのまま具体的な計算に適用可能である. その意味で上の結果の証明を復習し, そこに登場したアイデアを具体的な計算の場面に適用しようとすることは非常に重要である.

注意 5.3 (有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の計算とは?) 体 K 上の有限次元ベクトル空間の同型類は次元だけで決まるので様々なやり方で構成される有限次元ベクトル空間の構造を知るためにまず次元が幾つであるかを数えることが出発点になる.

それと同様に様々なやり方で構成される有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の構造を知るためにはまずその加群がどの同型類に属するかを知ることが出発点になる. ホモロジー群の計算結果を

$$H_p(X,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p=0), \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (p=1), \\ 0 & (p\neq 0,1) \end{cases}$$

のように書くことがよくある (実はこれは X が Klein の壷の場合). これは各ホモロジー群 $H_p(X,\mathbb{Z})$ がどの同型類に属すかがわかるように結果を書いているのである. 目的に応じてどの同型類に属すかだけではなく, その生成元が具体的にどのようなサイクルで代表されるかに関する情報が要求される場合もある. この演習では「$\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群を計算せよ」という問題は, 特別に断らない限り, 「ホモロジー群がどの同型類に属すかを述べよ」を意味するものとする.

技術的には特に商加群の計算をどのようにやらばよいかが問題になる. そのための助けになるのが行列の基本変形と単因子の計算である. 実は単因子には $d_1|d_2|\cdots|d_r$ というきつい条件が付いているが実際の計算では必ずしのその条件を満たす d_i を計算できなくても構わない. 次の弱い結果で十分である.

$\mathbb{Z}$ の元を成分とする任意の行列は行列の基本変形を有限回繰り返すことによって, 次の形の行列に変形可能である:

$$\begin{bmatrix} n_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & n_s & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \text{ここで各 } n_1,\dots,n_s \text{ は正の整数.}$$

n_i たちの計算の仕方がわかれば有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群をその部分加群で割る計算をどのようにやったらよいかがわかる. □

5.2　一変数多項式環上の有限生成加群の基本定理

この subsection の内容は「おまけ」である.「おまけ」に興味がない人は無視して構わない. (しかし有限生成 Abel 群の理論と Jordan 標準形の理論の類似という数学的に重要な事実を理解するためには重要である.)

有限生成 Abel 群の基本定理は単項イデアル整域 (pricipal ideal domain, PID) 上の有限生成加群に関する結果に一般化される. よく使われるのは, 単項イデアル整域として一変数多項式環を考える場合である. 一変数多項式環上の加群の構造論を用いれば, 行列の Jordan 標準形の存在を簡単に示せる. 以下, このことを問題に出そう. 一般に, 環上の加群の構造論 (環の表現論) を具体的な場合に翻訳することによって面白い結果が色々得られるのである. $\mathbb{Z}$ 上のみならず, 一変数多項式環上の有限生成加群の構造論は重要なので問題に出しておく.

[59] **(一変数多項式環上の有限生成加群の基本定理)** k は任意の体であるとし, k 係数の 1 変数多項式環を $R = k[T]$ と表わす. 順次以下を示せ.

(1) R の元を成分とする任意の行列は, 行列の基本変形を有限回繰り返すことによって, 次の形の行列に変形可能である:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \text{ここで 各 } d_i \text{ は monic な多項式であり } d_1|d_2|\cdots.$$

しかも, r および d_i はもとの行列から一意的に決まる.

(2) 任意の有限生成 R 加群 M に対して, monic な $d_1, \ldots, d_r \in R$ および $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組で

$$M \cong R^l \oplus R/d_1R \oplus \cdots \oplus R/d_rR \quad (R \text{ 加群としての同型}), \qquad d_1|d_2|\cdots$$

を満たすものが唯一存在する.

(3) k は代数閉体であると仮定する. 集合 Q を次のように定義する:

$$\{\, (T-\alpha)^n \mid \alpha \in k,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\}$$

任意の有限生成 R 加群 M に対して, $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $(m_q)_{q \in Q} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^Q$ (有限個を除いて $m_q = 0$) の組で

$$M \cong R^{m_0} \oplus \bigoplus_{q \in Q} (R/qR)^{m_q} \qquad (R \text{ 加群として同型})$$

を満たすものが唯一存在する. □

ヒント. たとえば, [堀田] の第 3 話と第 4 話を見よ. ([堀田] は色々面白いことが書いてありお買い得である.) □

[60] (Jordan 標準形) k は代数閉体であると仮定する. 上の問題と同様に $R = k[T]$ と書くことにする. 上の問題の結果を用いて以下を示せ:

(1) $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\alpha \in k$ に対して $M = R/(T-\alpha)^n R$ と置く. M の k 上の基底として, $1, T-\alpha, \ldots, (T-\alpha)^{n-1}$ が取れる. この基底を用いて, T の M への作用が定める M から M への k 線型写像を行列表示すると次の形になる:

$$J_{\alpha,n} = \begin{bmatrix} \alpha & & & 0 \\ 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad (n \times n \text{ 行列}).$$

(2) k 係数の任意の正方行列は有限回の基本変形によって次の形に変形できる:

$$\begin{bmatrix} J_{\alpha_1,n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\alpha_N,n_N} \end{bmatrix}.$$

しかも, 列 $(\alpha_1, n_1), \ldots, (\alpha_N, n_N)$ はもとの行列から順序の交換を除いて一意に決まる. 上の変形結果をもとの行列の Jordan 標準形と呼ぶ. □

(2) のヒント. A は k 係数の N 次正方行列であるとする. $M := k^n$ に $R := k[T]$ を

$$f(T)v = f(A)v \qquad (f \in R,\ v \in M)$$

と作用させることによって, M は有限生成 R 加群であるとみなせる. $M = k^n$ の $R = k[T]$ 加群としての構造論を行列 A の言葉に焼き直すことによって, A の Jordan 標準形の理論が導かれるのである. □

5.3 Euler 数

有限集合 X の元の個数を $\sharp X$ と書くことにする.

[61] X は有限集合であり, $X_0, X_1, \ldots, X_n$ はその部分集合であり, $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ が成立していると仮定する. このとき, 次の等式が成立すること直接証明せよ:

$$\sharp X = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \sum_{0 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_p \le n} \sharp (X_{i_0} \cap X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}). \quad \square$$

[62] (Euler 数と Betti 数の定義) F は任意の体であるとし, $C_{\bullet}$ は F 上のベクトル空間と線型写像からなる鎖複体であるとする. $H_p(C_{\bullet}) \neq 0$ を満たす p が有限個しかないとき, $C_{\bullet}$ の **Euler 数** $\chi(C_{\bullet})$ を次の式によって定義する:

$$\chi(C_{\bullet}) := \sum_p (-1)^p \dim_F H_p(C_{\bullet}).$$

各 $b_p(C_\bullet) := \dim_F H_p(C_\bullet)$ を $C_\bullet$ の p 次元 **Betti 数**と呼ぶ. $C_\bullet$ は F 上の有限次元ベクトル空間からなる有限鎖複体[2]であるとき, 次の公式が成立することを示せ:

$$\chi(C_\bullet) = \sum_p (-1)^p \dim_F C_p. \quad \square$$

[63] (鎖複体の準同型の trace) F は任意の体であるとし, $C_\bullet$ は F 上のベクトル空間と線型写像からなる鎖複体であるとし, $f_\bullet$ は $C_\bullet$ からそれ自身への鎖複体の準同型であるとする. $C_\bullet$ は F 上の有限次元ベクトル空間からなる有限鎖複体であるとする. このとき次の公式が成立することを示せ:

$$\sum_p (-1)^p \operatorname{tr}\bigl(H_p(f_\bullet) : H_p(C_\bullet) \to H_p(C_\bullet)\bigr) = \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}\bigl(f_p : C_p \to C_p\bigr).$$

この左辺は **Lefschetz 数**と呼ばれることがある. $\square$

参考 5.4 上の問題の trace の公式は幾何的に重要な応用を持つ. 余裕がある人は Lefschetz の不動点定理もしくは Lefschetz の不動点公式について調べてみよ. $\square$

[64] X は集合であり, $\{X_i\}_{i\in I}$ はその部分集合の族であり, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ が成立していると仮定する. 添字集合 I 上の全順序 $<$ が与えられていると仮定する. $p \geq 0$ に対して集合 K_p を次のように定義する:

$$K_p := \{\, (i_0, i_1, \dots, i_p; x) \mid i_k \in I,\ i_0 < i_1 < \cdots < i_p,\ x \in X_{i_0} \cap X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p} \,\}.$$

F は任意の体であるとし, K_p を基底として持つ F 上のベクトル空間を C_p と表わす. ($p < 0$ に対しては $C_p = 0$ と置く.) $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ を次の条件によって定義する:

$$\partial_p(i_0, \dots, i_p; x) := \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_p; x).$$

ここで, $1 \leq i_0 < \cdots < i_p \leq n$, $x \in X_{i_0} \cap X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}$ であり, $\widehat{i_k}$ は i_k を取り去るという意味である. これによって鎖複体 $C_\bullet$ が定義され,

$$H_0(C_\bullet) \cong (X \text{ を基底として持つ } F \text{ 上のベクトル空間}), \qquad H_p(C_\bullet) = 0 \quad (p \neq 0)$$

が成立することを示せ. この結果と問題 **[62]** の結果を用いて, 問題 **[61]** の結果を導け. $\square$

参考 5.5 この問題は離散位相の入った X の被覆 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対する Čeck のホモロジー群を計算する問題になっている. Čeck のホモロジー群は任意の位相空間に対して定義される. しかしここではその説明をする余裕はない. $\square$

[65] (Betti 数と Euler 数) 有限生成加群の基本定理を認めた上で以下を示せ:

1. M が有限生成自由加群であり, N はその部分加群であるとする. このとき, N も有限生成自由加群であり, $\operatorname{rank}(M/N) = \operatorname{rank} M - \operatorname{rank} N$ が成立する[3].

[2] 有限個の p のみに対して $C_p \neq 0$ であるような鎖複体 $C_\bullet$ を有限鎖複体と呼ぶ.
[3] 有限生成加群 M の階数 (rank) を $\operatorname{rank} M$ と書いた.

2. X が (有限) Δ 複体であるとき, その p 次元 Betti 数 $b_p(X)$ および Euler 数 $\chi(X)$ を次のように定義する:

$$b_p(X) := \operatorname{rank} H_p(X), \qquad \chi(X) := \sum_p (-1)^p b_p(X).$$

このとき, 次が成立する:

$$b_p \le \operatorname{rank} C_p(X) \qquad \chi(K) = \sum_p (-1)^p \operatorname{rank} C_p(X). \quad \square$$

参考 5.6 ホモロジー群は Δ 複体の位相不変量 (実はもっと強くホモトピー不変量) なので, Betti 数と Euler 数も位相不変量である. □

[**66**] $0 \to C_\bullet \to D_\bullet \to E_\bullet \to 0$ は有限生成自由加群の有限鎖複体からなる短完全列であるとする. このとき,

$$\chi(D_\bullet) = \chi(C_\bullet) + \chi(E_\bullet)$$

が成立することを示せ. □

[**67**] $0 \to C_{0,\bullet} \to C_{1,\bullet} \to \cdots \to C_{r,\bullet} \to 0$ は有限生成自由加群の有限鎖複体からなる完全列であるとする. このとき,

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \chi(C_{i,\bullet}) = 0$$

が成立することを示せ. □

参考文献

[堀田] 堀田良之: 加群十話 — 代数学入門 —, すうがくぶっくす 3, 朝倉書店 1988

[ST] I. M. シンガー & J. A. ソープ: トポロジーと幾何学入門, 培風館 (I. M. Singer and J. A. Thorpe: Lecture notes on elementary topology and geometry, 1967 の邦訳)

[田村] 田村一郎: トポロジー, 岩波全書 276, 岩波書店 1972