線形代数学演習—行列の標準形

黒木 玄 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

2004 年 4 月 11 日

目 次

1 論理と集合

問題に誤りがある場合には訂正してから解くこと.

n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 W と $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $v+W$ を次のように定める:

$$v + W := \{\, v + w \mid w \in W \,\}.$$

[**1**] **(10 点)** $u, v \in \mathbb{R}^n$ に対して以下の条件は互いに同値である:

(a) $u + W = v + W$,

(b) $u \in v + W$,

(c) $u - v \in W$. □

[**2**] 以下の文章の否定文を書け:

(例) この演習は面白い. $\longrightarrow$ この演習は面白くない.

(1) A ならば B である. (2 点)

(2) A と B の両方が同時に成立することはないが, どちらか片方は成立している. (2 点)

(3) 三毛猫じゃない猫もいる. (2 点)

(4) 大学のすべての講義は面白い. (2 点)

(5) 三毛猫じゃない猫も結構たくさんいる. (5 点)

(6) 大学のほとんどすべての講義はつまらない. (5 点)

ただし「A ならば B である」の否定を「「A ならば B」が成立しない」とするような解答は不可であるとする. 最後の 2 問についてはどうしてそのような解答になったかをできるだけ詳しく説明すること. □

この演習では集合 A が集合 B の部分集合であることを $A \subset B$ と書き, A が B の部分集合でかつ A と B が等しくないとき $A \subsetneqq B$ と書くことにする.

集合間の写像 $f : X \to Y$ と $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して, A の f による像 $f(A)$ と B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ を次のように定める:

$$f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\} = \{\, y \in Y \mid \text{ある } x \in A \text{ で } y = f(x) \text{ となるものが存在する} \,\},$$
$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}.$$

[3] (5 点) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$. □

参考. $f^{-1}(f(A))$ についてはレポート問題を見よ. □

[4] (5 点) $A, A' \subset X$ に対して $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$. □

参考. $f(A \cap A')$ についてはレポート問題を見よ. □

[5] (5 点) $B, B' \subset Y$ に対して $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ かつ
$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. □

集合 A, B に対して直積集合 $A \times B$ と冪集合 B^A を次のように定義する:

$$A \times B := \{\, (x, y) \mid x \in X,\ y \in Y \,\},$$
$$B^A := \{\, f \mid f \text{ は } A \text{ から } B \text{ への写像である} \,\}.$$

[6] (10 点) 二つの有限集合 A, B に対して次が成立する:

$$(1) \quad |A \times B| = |A| \times |B|, \qquad (2) \quad |B^A| = |B|^{|A|}. \quad □$$

[7] (10 点) 我々は, 条件 $\mathrm{P}(x)$ を満たす x 全体のなす集合のことを次のように書くのであった:

$$\{\, x \mid \mathrm{P}(x) \,\}.$$

この記号法は便利なのであるが, この記号法を無制限に用いると, 矛盾を簡単に導けることが知られている. 例えば, 集合 S を次の様に定義する:

$$S := \{\, x \mid x \notin x \,\}.$$

このとき, $S \in S$ と仮定しても, $S \notin S$ と仮定しても, 矛盾が導かれることを説明せよ. (ヒント: 矛盾とはある条件 Q とその否定 not Q が同時に成立することが示された状態のことである.) □

解説. (1) この paradox を Russel の逆理と呼ぶ. この逆理は今世紀の始め (1902 年頃) に発見された. 逆理 (paradox) とは一見不合理もしくは矛盾しているようで実は正しい説のことである. 1930 年代 (すでに大昔) に, このような矛盾が生じない (ことがほとんど確実であると思われる) 公理的な集合論が整備されている. 通常の公理系において上の S は集合全体の集りに等しくなるので, Russel の逆理は, 集合全体の集り S は集合であると考えてはいけないことを表わしていると思うこともできる.
(2) Russel の逆理の構造は Cantor の対角線論法の構造と密接に関係している.

(3) Russel 型の逆理は $\{\, x \mid \mathrm{P}(x)\,\}$ という記号法を以下のような場合に制限して用いる限り生じない:

$$B = \{x \mid x \in A \text{ and } \mathrm{P}(x)\,\}.$$

ここで, A は任意の集合である. この集合 B は以下の様に略記されるのが普通であり, この略記法はよく使われる:

$$B = \{x \in A \mid \mathrm{P}(x)\,\}.$$

なお, この B は A の部分集合になり, A の任意の部分集合はこの形に表わすことができる. $\square$

[8] (10 点) X, Y は任意の集合とし, $A \subset X$, $B \subset Y$ であるとする. このとき, 以下が成立する:
(1) 自然に $A \times B \subset X \times Y$ とみなせる.
(2) 補集合達を, $A^c = X - A$, $B^c = Y - B$, $(A \times B)^c = (X \times Y) - (A \times B)$ と書くと,

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c). \quad \square$$

解説. 補集合を表わす記号には以下のようなものがある:

$$A^c = X - A = X \setminus A = \{\, x \in X \mid x \notin A\}.$$

記号 $\bar{A}$ は閉包を表わすために使われることが多い. $\square$

この演習で以下の問題を必ずしも解く必然性はないが, ここで解いておけば後でより進んだ代数学を勉強するときに役に立つかもしれない.

写像 $f\colon X \to Y$ と写像 $g\colon Y \to Z$ の合成 $g \circ f\colon X \to Z$ を次によって定める:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (x \in X).$$

[9] (10 点) X と Y は集合であるとし, 写像 $p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ を次の様に定める:

$$p_X(x, y) := x, \qquad p_Y(x, y) := y \qquad ((x, y) \in X \times Y).$$

このとき, 任意の集合 S と写像 $s_X\colon S \to X$, $s_Y\colon S \to Y$ に対して, 次を満たす写像 $s\colon S \to X \times Y$ が唯一存在する:

$$p_X \circ s = s_X, \qquad p_Y \circ s = s_Y. \quad \square$$

[10] (10 点) X と Y は互いに交わらない集合であるとする. このとき, $X \cup Y$ は X, Y の直和 (direct sum, disjoint union) であると言う. 写像 $i_X\colon X \to X \cup Y$, $i_Y\colon Y \to X \cup Y$ を次の様に定める:

$$i_X(x) := x, \qquad i_Y(y) := y \qquad (x \in X,\, y \in Y)$$

このとき, 任意の集合 S と写像 $s_X\colon X \to S$, $s_Y\colon Y \to S$ に対して, 次を満たす写像 $s\colon X \cup Y \to S$ が唯一存在する:

$$s \circ i_X = s_X, \qquad s \circ i_Y = s_Y. \quad \square$$

[11] (10 点) X と Y は集合であるとし, 二つの写像 $f, g\colon X \to Y$ を考える. 集合 K と写像 $i\colon K \to X$ を次のように定める:

$$K := \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}, \qquad i(x) := x \quad (x \in K).$$

このとき, $f \circ i = g \circ i$ が成立する. さらに, 任意の集合 S と任意の写像 $s\colon S \to X$ に対して, $f \circ s = g \circ s$ ならば, 次を満たす写像 $j\colon S \to K$ が唯一存在する: $i \circ j = s$. □

解説. この問題の K は f と g の差核 (difference kernel, equalizer) と呼ばれている. □

[12] (10 点) X, Y, Z は集合であるとし, 写像 $f_X\colon X \to Z$, $f_Y\colon Y \to Z$ を考える. 集合 P と写像 $p_X\colon P \to X$, $p_Y\colon P \to Y$ を次のように定める:

$$P := \{\, (x,y) \in X \times Y \mid f_X(x) = f_Y(y) \,\},$$
$$p_X(x,y) := x, \quad p_Y(x,y) := y \quad ((x,y) \in P).$$

このとき, $f_X \circ p_X = f_Y \circ p_Y$ が成立する. さらに, 任意の集合 S と任意の写像 $s_X\colon S \to X$, $s_Y\colon S \to Y$ に対して, $f_X \circ s_X = f_Y \circ s_Y$ ならば, 次を満たす写像 $s\colon S \to P$ が唯一存在する:

$$p_X \circ s = s_X, \qquad p_Y \circ s = s_Y. \quad □$$

参考. この問題の P は f_X と f_Y のファイバー積 (fiber product) と呼ばれている. □

参考. (1) 以上の 4 つの問題は, 直積・直和・差核・ファイバー積などの 普遍性 (universality) を証明せよという問題である. 数学における多くの自然な定義は universality による特徴付けになっている.
(2) [**10**], [**11**] の双対性に注意せよ. 直積と直和では写像の向きが逆になるだけで同様な命題が成立している. もちろん, 差核やファイバー積の双対概念も存在する. □

[13] (10 点) 写像 $f\colon X \to Y$ に対して, 以下の 2 条件は互いに同値である:

(a) f は単射である.

(b) 任意の集合 A と任意の 2 つの写像 $g, h\colon A \to X$ に対して, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ である. □

[14] (10 点) 写像 $f\colon X \to Y$ に対して, 以下の 2 条件は互いに同値である:

(a) f は全射である.

(b) 任意の集合 B と任意の 2 つの写像 $g, h\colon Y \to B$ に対して, $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ である. □