# 線形代数学演習

黒木玄 2005 年 6 月 13 日 (教師用)

## 目 次



## 10 直和と補空間

有限次元とは限らないベクトル空間の基底の存在を用いて補空間の存在を証明しよう.

**[111] (直和, 5 点)** $K$ 上のベクトル空間 $V$ とその部分空間 $V_1, \dots, V_N$ に関して以下の 2 条件は互いに同値である:

(a) 任意の $v \in V$ は $v = v_1 + \cdots + v_N$, $v_i \in V_i$ と一意に表わされる.

(b) 任意の $v \in V$ は $v = v_1 + \cdots + v_N$, $v_i \in V_i$ と表わされ, 任意の $v_i \in V_i$ $(i = 1, \dots, N)$ に対して $v_1 + \cdots + v_N = 0$ ならば $v_i = 0$ $(i = 1, \dots, N)$ である.

この同値な条件のどちらかが成立するとき, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$ と書き, $V$ は $V_1, \dots, V_N$ の**直和 (direct sum)** であると言う. さらに各 $V_i$ が有限次元でかつ $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$ ならば

$$\dim V = \dim V_1 + \cdots + \dim V_N$$

が成立する. □

**[112] (補空間の存在, 10 点)** 体 $K$ 上のベクトル空間 $U$ とその部分空間 $V$ に対して, $V$ の基底を $U$ の基底に拡張できることを用いて, $U$ の部分空間 $W$ で $U = V \oplus W$ を満たすものが存在することを示せ. そのような $W$ を $U$ における $V$ の **(線形) 補空間 (linear complement)** と呼ぶ. □

**ヒント.** $V$ の基底 $\{v_i\}_{i\in I}$ を $U$ の基底 $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$ に拡張して, $W$ を $\{w_j\}_{j\in J}$ で張られる $U$ の部分空間とすると $U = V \oplus W$ である. □

## 11 線形写像の行列表示

$K$ は体であるとし, $U$, $V$ は $K$ 上の有限次元ベクトル空間であるとし, $f : U \to V$ は $K$ 上の任意の線形写像であるとする. 線形写像 $f$ 自身は極めて抽象的な数学的対象であるが, $U$ と $V$ に基底を定めることによって, $f$ を具体的に行列で表現することができる.

$u_1,\dots,u_n$ は $U$ の基底であり, $v_1,\dots,v_m$ は $V$ の基底であるとする. このとき, 任意の $u\in U$, $v\in V$ は次のように一意に表わされる:

$$u=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j=\sum_{j=1}^{n}u_j\alpha_j=[u_1,\dots,u_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\qquad(\alpha_j\in K),$$

$$v=\sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i=\sum_{i=1}^{m}v_i\beta_i=[v_1,\dots,v_m]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}\qquad(\beta_i\in K).$$

これによって $u\in U$ と $\alpha={}^t[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\in K^n$ が一対一に対応し, $v\in V$ と $\beta={}^t[\beta_1,\dots,\beta_m]\in K^m$ が一対一に対応する. この対応を用いて, 線形写像 $f:U\to V$ と行列 $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(K)$ の一対一対応を構成可能であることを説明しよう.

まず, 各 $f(u_j)\in V$ は

$$f(u_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i=\sum_{i=1}^{m}v_i a_{ij}=[v_1,\dots,v_m]\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}\qquad(a_{ij}\in K)$$

と一意に表わされるので,

$$[f(u_1),\dots,f(u_n)]=[v_1,\dots,v_m]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

よって

$$\begin{aligned}f(u)&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f(u_j)=\sum_{j=1}^{n}f(u_j)\alpha_j\\ &=[f(u_1),\dots,f(u_n)]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=[v_1,\dots,v_m]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

以上の記号のもとで線形写像 $f$ は

$$[u_1,\dots,u_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in U \text{ を } [v_1,\dots,v_m]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in V \text{ に}$$

対応させる写像に等しい. 以上のようにして線形写像 $f$ に対応する行列 $A=[a_{ij}]$ が得られる. 逆に行列 $A=[a_{ij}]$ が与えられれば上の対応によって線形写像 $f:U\to V$ が得られることもわかる. 行列 $A=[a_{ij}]$ を線形写像 $f$ の基底 $u_j$, $v_i$ に関する**行列表示**と呼ぶことにする.

**要約 11.1 (線形写像の行列表示)** $U$ の基底 $u_1,\dots,u_n$ と $V$ の基底 $v_1,\dots,v_m$ に関する線形写像 $f:U\to V$ の行列表示 $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(K)$ は次の条件によって一意に決定さ

れる[1]:

$$[f(u_1), \dots, f(u_n)] = [v_1, \dots, v_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

この条件は次と同値である:

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij} \qquad (j = 1, \dots, n). \quad \square$$

**[113] (5 点)** $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$ とし, 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

の積の定める $U$ から $V$ への線形写像を $f$ と書くことにする (すなわち $f(u) = Au$ $(u \in U = \mathbb{R}^3)$). $u_1, u_2, u_3 \in U$ と $v_1, v_2 \in V$ を次のように定める:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

このとき, $u_1, u_2, u_3$ は $U$ の基底であり, $v_1, v_2$ は $V$ の基底であり, それらに関する $f$ の行列表示を $B$ とすると, $B$ は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と簡単な形になることを示せ. $\square$

**ヒント.** $[f(u_1), f(u_2), f(u_3)] = [v_1, v_2]B$ を示せ. $[f(u_1), f(u_2), f(u_3)] = [Au_1, Au_2, Au_3] = A[u_1, u_2, u_3]$ なので $A[u_1, u_2, u_3] = [v_1, v_2]B$ が成立することを直接的な計算で示せばよい. というわけでこの問題は非常に簡単な問題である. $\square$

**注意 11.2 (標準的な基底以外のより適切な基底を見付けることの重要性)** 上の問題のように行列 $A$ 自身は複雑な形をしていても, 標準的な基底とは別の基底に関して行列表示し直すと簡単な形になることがよくある. 与えられた線形写像の本質を見極めるためには適切な基底を見付けて行列表示してみることが役に立つ.

実は行列の基本変形や (後で習うことになっている) 行列の対角化や Jordan 標準形の理論はどれも「行列もしくは線形写像の本質を見極めるために役に立つ基底の見付け方に関する理論」とみなせる. $\square$

**[114] (5 点)** $K$ は体であるとし, $m \times n$ 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ を任意に取る. $K^l$ の標準的基底を $e_1^{(l)}, \dots, e_l^{(l)}$ と書くことにする. すなわち $e_i^{(l)} \in K^l$ は第 $i$ 成分のみが $1$ で他の成分は $0$ であるとする. 基底 $e_j^{(n)}$, $e_i^{(m)}$ に関する $A$ の定める線形写像 $A : K^n \to K^m$ の行列表示は $A$ 自身に等しい. $\square$

[1]定義域の基底を横に並べたものに $f$ を左から作用させて, 右側にポコッと出て来る行列 $A = [a_{ij}]$ を計算すれば線形写像 $f$ の行列表示が得られる.

**ヒント.** $[Ae_1^{(n)}, \dots, Ae_n^{(n)}] = [e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}]A$ を示せばよいがほとんど自明である. □

**[115] (基底の変換, 5 点)** $K$ は体であるとし, $U$, $V$ は $K$ 上の有限次元ベクトル空間であり, $u_1, \dots, u_n$ は $U$ の基底であり, $v_1, \dots, v_m$ は $V$ の基底であるとする. $f : U \to V$ は線形写像であり, $A \in M_{m,n}(K)$ は基底 $u_j$, $v_i$ に関する $f$ の行列表示であるとする. $u'_1, \dots, u'_n$ と $v'_1, \dots, v'_m$ はそれぞれ $U$, $V$ の別の基底であるとする. 以下を示せ.

1. ある可逆な行列 $Q \in GL_n(K)$, $P \in GL_m(K)$ で[2]

$$[u'_1, \dots, u'_n] = [u_1, \dots, u_n]Q, \qquad [v'_1, \dots, v'_m] = [v_1, \dots, v_m]P$$

をみたすものが一意に存在する.

2. 基底 $u'_j$, $v'_i$ に関する $f$ の行列表示は $P^{-1}AQ$ になる. □

**ヒント.** 2. $[f(u'_1), \dots, f(u'_n)] = [v'_1, \dots, v'_m]P^{-1}AQ$ を 1 を用いて示せばよい. □

**[116] (5 点)** $K$ は体であるとし, $u_1, \dots, u_n \in K^n$ は $K^n$ の基底であり, $v_1, \dots, v_m \in K^m$ は $K^m$ の基底であるとし, $Q = [u_1, \dots, u_n] \in M_n(K)$, $P = [v_1, \dots, v_m] \in M_m(K)$ とおく. このとき, $m \times n$ 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ の定める線形写像 $A : K^n \to K^m$ の基底 $u_j$, $v_i$ に関する行列表示は $P^{-1}AQ$ になる. □

**ヒント.** 問題 **[114]**, **[115]** からただちに得られる. もしくは $[Au_1, \dots, Au_n] = AQ = PP^{-1}AQ = [v_1, \dots, v_m]P^{-1}AQ$. □

**[117] (5 点)** $V = \mathbb{R}^2$ とし, 行列

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

が定める $V$ からそれ自身への線形写像を $f$ と書くことにする. $v_1, v_2 \in V$ を

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と定めると, $v_1, v_2$ は $V$ の基底である ($v_1$, $v_2$ を平面上の図示せよ). 基底 $v_i$ に関する $f$ の行列表示を求めよ. □

**ヒント.** $[f(v_1), f(v_2)] = [v_1, v_2]B$ を満たす行列 $B \in M_2(\mathbb{R})$ が答である. □

**略解.** $Av_1 = v_1$, $Av_2 = 2v_2$ なので $B = \mathrm{diag}(1, 2)$. □

**[118] (10 点)** 問題 **[117]** の結果を用いて, 次の常微分方程式の初期値問題を解け:

$$\frac{d}{dt}u = Au, \qquad u(0) = u_0.$$

ここで $u$ は $t \in \mathbb{R}$ の $V = \mathbb{R}^2$ に値を持つ函数であり, $u_0 = e_2 = {}^t[0, 1]$. □

[2] $GL_n(K)$ は $K$ の元を成分に持つ可逆な $n \times n$ 行列全体の集合である. $GL_n(K)$ は群をなし, 一般線形群と呼ばれる.

**ヒント．** まず今まで渡したプリントの「行列の指数函数」に関する説明を読め．$P = [v_1, v_2]$ と置くと $A = PBP^{-1}$ であるから，

$$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}.$$

実は $B$ は対角行列になるので $e^{tB}$ は容易に計算される．その結果を用いて $u(t) = e^{tA}u_0$ を整理したものが答になる．□

**略解．** $e^{tB} = \mathrm{diag}(e^t, e^{2t})$ であり，$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\,{}^tP$ なので

$$e^{tA} = Pe^{tA}P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^t + 4e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & 4e^t + e^{2t} \end{bmatrix}.$$

よって $u(t) = e^{tA}u_0 = e^{tA}e_2 = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 2e^t - 2e^{2t} \\ 4e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$. □

**[119] (一次変換の対角化, 10 点)** $V$ は体 $K$ 上のベクトル空間であり，$f$ は $V$ の一次変換 (すなわち $V$ からそれ自身への線形写像) であるとする．もしも $V$ の基底 $v_1, \dots, v_n$ が $f(v_i) = \alpha_i v_i$ $(\alpha_i \in K)$ を満たしているならば，基底 $v_i$ に関する $f$ の行列表示は対角行列 $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ になる．□

**ヒント．** $[f(v_1), \dots, f(v_n)] = [v_1, \dots, v_n]D$ を示せばよいので簡単である．□

**[120] (巡回行列とその行列式, 20 点)** $n \times n$ 行列 $\Lambda$ を次のように定める:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix} = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n,1} \in M_n(\mathbb{C}).$$

ここで $E_{ij}$ は行列単位 (第 $(i,j)$ 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 であるような行列) である．$\zeta = e^{2\pi i/n}$ (1 の原始 $n$ 乗根) とおき，

$$v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \zeta^{2k} \\ \vdots \\ \zeta^{(n-1)k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

とおく．このとき以下が成立する:

1. $\Lambda^k \neq E$ $(k = 1, \dots, n-1)$, $\Lambda^n = E$.

2. $\Lambda v_k = \zeta^k v_k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である．

4. 基底 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ に関する $\Lambda$ の定める $\mathbb{C}^n$ の一次変換の行列表示は対角行列 $D = \operatorname{diag}(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1})$ になる.

5. $P = [v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}] \in M_n(\mathbb{C})$ とおくと, $P$ は可逆であり, $\Lambda = PDP^{-1}$.

6. $X = x_0 E + x_1 \Lambda + x_2 \Lambda^2 + \cdots + x_{n-1}\Lambda^{n-1}$ とおくと,

$$\det X = \prod_{k=0}^{n-1} (x_0 + x_1\zeta^k + x_2\zeta^{2k} + \cdots + x_{n-1}\zeta^{(n-1)k}). \quad \square$$

**ヒント.** 3. $|P| \neq 0$ を Vandermonde の行列式の公式を用いて示せばよい.
4. $[\Lambda v_0, \Lambda v_1, \ldots, \Lambda v_{n-1}] = [v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}]D$ を示せばよい.
6. $X = P(x_0E + x_1D + x_2D^2 + \cdots + x_{n-1}D^{n-1})P^{-1} = P\operatorname{diag}(x_0 + x_1\zeta^k + x_2\zeta^{2k} + \cdots + x_{n-1}\zeta^{(n-1)k})_{k=0}^{n-1}P^{-1}$. $\square$

**[121] (複素数の実行列表示, 5 点)** 複素数体 $\mathbb{C}$ は自然に実数体 $\mathbb{R}$ 上の 2 次元のベクトル空間とみなせ[3], $1, i$ は $\mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底である. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して, 写像 $\hat{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$\hat{z}(w) := zw \qquad (w \in \mathbb{C})$$

と定めると, $\hat{z}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形写像である. 基底 $1, i$ に関する $\hat{z}$ の行列表示を $A(z) \in M_2(\mathbb{R})$ と書くと,

$$A(z) = A(x+iy) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}. \quad \square$$

**ヒント.** $[z1, zi] = [1, i]A(z)$ を示せばよいだけなので非常に簡単である. $\square$

**[122] (5 点)** 複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して実 2 次正方行列 $A(z) = A(x+iy)$ を次のように定める:

$$A(z) = A(x+iy) := \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

このとき $z, w \in \mathbb{C}$ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned} &A(z+w) = A(z) + A(w), \qquad A(zw) = A(z)A(w), \qquad A(1) = 1; \\ &\det A(z) = |z|^2, \qquad \operatorname{tr} A(z) = 2\operatorname{Re} z, \qquad e^{A(z)} = A(e^z). \quad \square \end{aligned}$$

**[123] (ベクトル積の定義, 15 点)** $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $u = {}^t[u_1, u_2, u_3]$, $v = {}^t[v_1, v_2, v_3]$ の**ベクトル積 (vector product)** $u \times v$ を次のように定義する:

$$u \times v := {}^t[u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1].$$

このとき以下が成立する:

1. 第 $i$ 成分だけが 1 で他の成分が 0 であるような 3 次元縦ベクトルを $e_i$ と書くと,

$$\begin{aligned} &e_i \times e_j = e_k, \quad e_j \times e_i = -e_k \qquad \bigl((i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\bigr), \\ &e_i \times e_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

[3]「複素平面」という言葉は複素数全体の集合が実数体上 2 次元のベクトル空間をなすことを含意している.

2. ベクトル $u = {}^t[u_1, u_2, u_3]$ に対して行列 $X(u)$ を次のように定める:

$$X(u) = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_3 \\ -u_1 & 0 & u_2 \\ -u_3 & -u_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

さらに行列 $A$, $B$ の**交換子 (commutator)** $[A, B]$ を次のように定義する:

$$[A, B] = AB - BA.$$

このとき $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$[X(u), X(v)] = X(u \times v).$$

3. ベクトル $u = {}^t[u_1, u_2, u_3]$ に対して行列 $Y(u)$ を次のように定める:

$$Y(u) = -\frac{i}{2}(u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3).$$

ここで $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ は次のように定義される **Pauli 行列**と呼ばれる行列である:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

このとき $u, v \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$[Y(u), Y(v)] = Y(u \times v).$$

4. $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ に対して以下が成立している[4]:

$$v \times u = -u \times v, \qquad (u \times v) \times w = u \times (v \times w) - v \times (u \times w).$$

5. ベクトル積は行列式を用いて形式的に次のように表わされる:

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

この等式は「右辺の形式的な行列式の第 3 列に関する形式的な余因子展開が左辺に等しい」と読む. □

**参考 11.3** 上の問題の 2 と 3 はもちろん偶然ではない. 実はベクトル積は 3 次元 Euclid 空間の (無限小) 回転を表現しているのである. 実は上の問題は 3 次元 Euclid 空間の回転の表現の仕方には様々な方法があることを示していることになっている.

力学の教科書で回転運動の章を見るとベクトル積が登場する. それは回転運動を数学的に表現するためである. また量子物理の教科書を読むと Pauli 行列がよく登場する. それは我々が住んでいる物理的な 3 次元空間の回転対称性を表現するためである.

[4] ヒント: $n$ 次正方行列 $A, B, C$ に対して $[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]$ が成立している. これを交換子の **Jacobi 律**と呼ぶ.

実は上の問題の 3 は **Hamilton の四元数体 (quaternion)** と関係している. 四元数体とは複素数をさらに拡張した非可換体であり, 実数体に $i, j, k$ で

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

を満たすものを付け加えることによって構成される. $I = -i\sigma_1, J = -i\sigma, K = -i\sigma_3$ は $i, j, k$ の満たすべき公式と同じ公式を満たしている. したがって, 複素数が実 2 次正方行列で表現できたように (問題 [**122**] を見よ), 四元数は複素 2 次正方行列で表現できる. □

[**124**] **(ベクトル積と平行四辺形の面積, 15 点)** 上の問題の続き. $\mathbb{R}^3$ 内で原点 0 と $u$ を結ぶ線分, $u$ と $u+v$ を結ぶ線分, $u+v$ と $v$ を結ぶ線分 $v$ と 0 を結ぶ線分で囲まれた平行四辺形を考える. このとき $u \times v$ はその平行四辺形に垂直になり, $u \times v$ の長さはその平行四辺形の面積に等しくなる. □

**ヒント.** $u \times v$ と $u$, $v$ の内積が 0 になることが問題 [**123**] におけるベクトル積の定義もしくは 5 の表示から導かれる. 平行四辺形の面積との関係については平行四辺形の面積が $||u||\,||v|| \sin\theta$ であることを使え. ここで $\theta$ は $u$ と $v$ のあいだの角度である. □

[**125**] **(Hamilton の四元数の行列表示, 10 点)** $1, i, j, k$ を基底に持つ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$\mathbb{H} = \{\, a1 + bi + cj + dj \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\,\}$$

に積を次の規則で定める:

$$\begin{aligned} &1^2 = 1, \quad 1i = i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k, \\ &i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -ki = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned}$$

このとき $\mathbb{H}$ の元を **Hamilton の四元数 (quaternion)** と呼ぶ. $a, b \in \mathbb{R}$ のとき四元数 $a1 + bi \in \mathbb{H}$ と複素数 $a + bi \in \mathbb{C}$ を同一視することにする. $q = a1 + bi + cj + dj \in \mathbb{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ と置く. 写像 $\hat{q} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\hat{q}(r) = qr \qquad (r \in \mathbb{H})$$

と定めると, $\hat{q}$ は $\mathbb{R}$ 上の一次変換である. このとき以下が成立する.

1. $\mathbb{R}$ 上の基底 $1, i, j, k$ に関する $\hat{q}$ の行列表示を $A(q)$ と書くと,

$$A(q) = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

2. $z = a + bi$, $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とすると, $q = z1 + wj$ であるから, $\mathbb{H}$ は $1, j$ を基底に持つ $\mathbb{C}$ 上の 2 次元のベクトル空間とみなされる. $\mathbb{C}$ 上の基底 $1, j$ に関する $\hat{q}$ の行列表示を $B(q)$ と書くと,

$$B(q) = \begin{bmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}.$$

ここで $\bar{z}, \bar{w}$ はそれぞれ $z, w$ の複素共役である. □

**ヒント.** 1. $[q1, qi, qj, qk] = [1, i, j, k]A(q)$ を示せばよい. 2. $[q1, qj] = [1, j]B(q)$ を示せばよい. $zj = j\bar{z}$ を用いよ. □

**参考 11.4** 問題 [**123**] で定義された Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と四元数の複素 $2\times 2$ 行列表現 $B(q)$ のあいだには $B(i) = i\sigma_3$, $B(j) = -i\sigma_2$, $B(k) = -i\sigma_1$ という関係がある. したがって, $\pm i$ 倍と順序の違いを除けば Pauli 行列と四元数 $i, j, k$ の複素 $2\times 2$ 行列表示は本質的に一致する. □

[**126**] **(15 点)** 問題 [**95**] の記号をそのまま用いる. $v_i = x^i$ と置く. 任意に $\lambda \in \mathbb{C}$ を取り, $\mathbb{C}[x]$ の一次変換 $e, f, h$ を

$$e = \partial, \quad h = -2x\partial + \lambda, \quad f = -x^2\partial + \lambda x$$

と定める. このとき以下が成立している:

1. $hv_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad ev_i = iv_{i-1}, \quad fv_i = (\lambda - i)v_{i+1}.$
2. 特に $\quad hv_0 = \lambda v_0, \quad ev_0 = 0.$
3. $[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$

ここで $[A, B] = AB - BA$ (交換子) である. □

**ヒント.** たとえば

$$fv_4 = (-x^2\partial + \lambda x)(x^4) = -x^2(x^4)' + \lambda x \cdot x^4 = -4x^5 + \lambda x^5 = (\lambda - 4)x^5 = (\lambda - 4)v_5.$$

3 の計算は交換子に関する一般的な公式

$$\begin{aligned} &[A, A] = 0, \quad [B, A] = -[A, B], \\ &[AB, C] = [A, C]B + A[B, C], \quad [A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \end{aligned}$$

と $[\partial, x^i] = ix^{i-1}$ を用いて実行せよ. たとえば

$$[\partial, -x^2\partial] = -[\partial, x^2]\partial - x^2[\partial, \partial] = -2x\partial - x^2 0 = -2x\partial. \quad \square$$

**参考 11.5 ($\mathrm{sl}_2$-triplet)** $2\times 2$ 行列 $E, F, H$ を

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と定めると

$$[H, E] = 2e, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

が成立している. $E, F, H$ を $\mathrm{sl}_2$-triplet ($\mathrm{sl}_2$ の三つ組) と呼ぶ. 上の問題 [**126**] の $e, f, h$ は多項式係数の微分作用素による $\mathrm{sl}_2$-triplet の表現になっている.

Lie 代数 $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現論は 3 次元空間の回転を司る Lie 群 $SU(2)$ の表現論と同値である. Lie 群および Lie 代数の表現論に関する入門的な解説は山内・杉浦 [YmS] にある. □

**[127] (15 点)** 問題 **[126]** の続き. $\lambda = \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する. 以下を示せ:

1. $\ell$ 次以下の一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分集合を $V_\ell$ と書くことにする:

$$V_\ell = \{\, a_0 + a_1 x + x_2 x^2 + \cdots + a_\ell x^\ell \mid a_0, a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{C} \,\}.$$

このとき $V_\ell$ は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間であり,

$$v_0 = 1, \quad v_1 = x, \quad v_2 = x^2, \quad \dots, \quad v_\ell = x^\ell$$

は $V_\ell$ の基底をなす.

2. $e, f, h$ の $\mathbb{C}[x]$ への作用は $V_\ell$ を保つ. すなわち, 任意の $v \in V_\ell$ に対して $ev, fv, hv \in V_\ell$.

3. $e, f, h$ の定める $V_\ell$ の一次変換の基底 $v_i$ に関する行列表示をそれぞれ $E_\ell, F_\ell, H_\ell$ と書くと,

$$E_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ell \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_\ell = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ \ell & 0 & & & \\ & \ell-1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_\ell = \begin{bmatrix} \ell & & & & 0 \\ & \ell-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\ell+2 & \\ 0 & & & & -\ell \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\ell, \ell-2, \ell-4, \dots, -\ell+4, -\ell+2, -\ell).$$

たとえば $\ell = 3$ のとき

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad F_\ell = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 3 & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

**注意 11.6** 特に $\ell = 1$ のとき $E_1 = E$, $F_1 = F$, $H_1 = H$ である. □

**参考 11.7** 実は Lie 代数 $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ の (したがってコンパクト Lie 群 $SU(2)$ の) 有限次元既約表現の同型類の全体は表現 $V_\ell$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) で代表される[5]. この事実は 3 次元空間の回転を量子論的に実現する方法が非負の整数 $\ell$ で分類されることを意味している.

$H_\ell$ の固有値 $\ell, \ell-2, \dots, -\ell+2, -\ell$ は表現 $V_\ell$ のウェイト (weight) と呼ばれており, その最高値の $\ell$ は表現 $V_\ell$ の最高ウェイト (highest weight) と呼ばれている.

[5] しかも $e, f, h$ が微分作用素で表わされたのも偶然ではない. 半単純 Lie 代数 (もしくは半単純 Lie 群) の表現に関する幾何学的な理論 (Borel-Weil-Bott 理論) が存在し, それを用いれば半単純 Lie 代数の有限次元表現の微分作用素による表示が自然に得られる. この辺の問題は Lie 代数および Lie 群の表現論 (representation theory) という大きな理論の一部分を切り取ることによって作成された.

物理学では $\mathrm{sl}_2$ の三つ組 $E, F, H$ の代わりに $\sigma_z = \frac{1}{2}H$, $\sigma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}E$, $\sigma_- = \frac{1}{\sqrt{2}}F$ の三つ組を用いることが多い. それらは次の交換関係を満たしている:

$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm\sigma_\pm, \qquad [\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z.$$

だから, $H$ の作用 $H_\ell$ の固有値のウェイトではなく, $\sigma_z$ の作用 $\frac{1}{2}H_\ell$ の固有値を用いることが多い. $j = \ell/2$ の方を用を表現 $V_\ell$ のスピンと呼ぶ[6].

以上のコメントに関する詳しい解説については山内・杉浦 [YmS] を参照せよ. □

**[128]** **(15 点)** 正の整数 $n \in \mathbb{Z} > 0$ と複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $(t-\alpha)^k \neq 0$ $(k = 1, \dots, n-1)$, $(t-\alpha)^n = 0$ を満たす文字 $t$ を用意し[7], $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ を基底に持つ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V$ を次のように定める:

$$V := \{\, \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_{n-1}t^{n-1} \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C} \,\}.$$

写像 $f : V \to V$ を $f(v) = tv$ $(v \in V)$ と定めると, $f$ は $V$ の $\mathbb{C}$ 上の一次変換 ($V$ からそれ自身への線形写像) である. 以下が成立することを示せ:

1. 基底 $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ に関する $f$ の行列表示を $A$ と書くと,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & & & -a_{n-2} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & & & 1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

ここで $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ は $(\lambda - \alpha)^n$ の展開

$$(\lambda-\alpha)^n = \lambda^n + a_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-2}$$

によって定められたものである. 二項定理より,

$$a_{i-1} = \binom{n}{i}(-\alpha)^i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

よって $a_0 = -n\alpha$, $a_1 = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$, $\dots$, $a_{n-2} = n(-\alpha)^{n-1}$, $a_{n-1} = (-\alpha)^n$.

2. $V$ の $\mathbb{C}$ 上の基底として $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \dots, (t-\alpha)^{n-1}$ も取れる.

3. 基底 $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \dots, (t-\alpha)^{n-1}$ に関する $f$ の行列表示を $B$ と書くと,

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad (n \times n \text{ 行列}). \quad \square$$

[6] 電子や陽子のスピンは 1/2 である.

[7] 厳密にはそのような文字 $t$ は多項式環 $\mathbb{C}[\lambda]$ の剰余環 $\mathbb{C}[\lambda]/((\lambda-\alpha)^n)$ の $\lambda$ で代表される元として構成される ($t = \lambda \bmod (\lambda-\alpha)^n$). 剰余環 $\mathbb{C}[\lambda]/((\lambda-\alpha)^n)$ の構成に関しては問題 **[138]**, **[139]** を参照せよ.

**ヒンと.** 1. $(t-\alpha)^n = 0$ を用いて, $[t1, tt, tt^2, \dots, tt^{n-1}] = [1, t, t^2, \dots, t^{n-1}]A$ を示せばよい.

2. $k = 0, 1, \dots, n-1$ とする. $(t-\alpha)^k$ を展開することによって, $(t-\alpha)^k$ は $1, t, \dots, t^k$ の一次結合で書けることがわかる. 逆に $t^k = ((t-\alpha)+\alpha)^k$ を展開することによって, $t^k$ は $1, t-\alpha, \dots, (t-\alpha)^k$ の一次結合で書けることがわかる. このことより, $1, t-\alpha, \dots, (t-\alpha)^{n-1}$ も $V$ の基底であることがわかる.

3. $[t1, t(t-\alpha), t(t-\alpha)^2, \dots, t(t-\alpha)^{n-1}] = [1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \dots, (t-\alpha)^{n-1}]B$ を示せばよい. そのとき $t(t-\alpha)^k = (\alpha + (t-\alpha))(t-\alpha)^k = \alpha(t-\alpha)^k + (t-\alpha)^{k+1}$ と $(t-\alpha)^n = 0$ を用いよ. □

**注意 11.8 (Jordan 標準形の理論との関係)** ${}^tA$ は参考 11.9 のコンパニオン行列の形をしている. ${}^tB$ は問題 [**63**] の Jordan ブロックの形をしている. 実は上の問題 [**128**] は単因子論を経由する Jordan 標準形の存在証明の一部になっている.

その方針での Jordan 標準形の理論の解説に関しては堀田 [H2] がおすすめである. □

**参考 11.9 (コンパニオン行列)** 次の形の $n$ 次正方行列のを **コンパニオン行列 (同伴行列, companion matrix)** と呼ぶ:

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ \text{\Large 0} & & & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

コンパニオン行列 $C = C(a_0, \dots, a_{n-1})$ の特性多項式[8]は

$$p_C(\lambda) = \det(\lambda E - C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \lambda^n + a_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}$$

となる.

コンパニオン行列の最小多項式は特性多項式に等しく, しかもその固有値 $\alpha$ に属する Jordan 細胞は唯一になることが知られている[9]. □

# 12　商ベクトル空間

$K$ は体であるとし, $V$ は $K$ 上の任意のベクトル空間であるとし, $W$ は $V$ の部分空間であるとする. 任意の $v \in V$ に対して

$$v + W = \{\, v + w \mid w \in W \,\}$$

とおき, 集合の集合 $V/W$ を次のように定める:

$$V/W = \{\, v + W \mid v \in V \,\}.$$

---

[8] 一般に $n$ 次正方行列 $A$ の**特性多項式 (characteristic polynomial)** $p_A(\lambda)$ は $p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ と定義される. ここで $E$ は $n$ 次の単位行列である.

[9]「最小多項式」や「Jordan 細胞」などの用語の意味は後で **Jordan 標準形 (Jordan normal form, Jordan canonical form)** の理論を習うときに教わることになるだろう. もちろん各自が自由に自習して構わない. 数学の得意な人の特徴は学校の授業の先の勉強を勝手にやってしまうことである.

**[129] (5 点)** $v, v' \in V$ に対して, $v + W = v' + W$ と $v' - v \in W$ は同値である. □

**ヒント.** $v + W = v' + W$ ならば $v' \in v' + W$ に対してある $w \in W$ で $v' = v + w$ をみたすものが存在する. そのとき $v' - v = w \in W$ である. 逆に $v' - v \in W$ ならば任意の $w \in W$ に対して $v' + w = v + (v' - v) + w \in v + W$ である. よって $v' + W \subset v + W$ である. 逆向きの包含関係も同様にして示されるので $v + W = v' + W$ である. □

**[130] (5 点)** 写像 $+ : (V/W) \times (V/W) \to (V/W)$ と $\cdot : K \times (V/W) \to (V/W)$ を

$$(u + W) + (v + W) = (u + v) + W, \quad \alpha(u + W) = (\alpha u) + W \qquad (u, v \in V,\ \alpha \in K)$$

と定義することができることを示せ. □

**ヒント.** これは well-definedness (うまく定義されること) を示す問題である. 写像がうまく定義されることを示すためには同じものが同じものに移ることを示さなければいけない. そのためには $u + W = u' + W$, $v + W = v' + W$, $u, u', v, v' \in V$, $\alpha \in K$ のとき,

$$(u + v) + W = (u' + v') + W, \qquad (\alpha u) + W = (\alpha u') + W$$

となることを示せばよい. □

**[131] (5 点)** 上の問題で定義された演算 $+, \cdot$ に関して $V/W$ は $K$ 上のベクトル空間をなすことを示せ. □

**ヒント.** 写像 $- : V/W \to V/W$ を $-(u + W) = (-u) + W$ $(u \in V)$ と定義することができる. さらに, $0_{V/W} = 0 + W = W$ とおき, ベクトル空間の公理を機械的にチェックすればよい. □

**定義 12.1 (商ベクトル空間)** 以上のようにして構成された $V/W$ を $V$ を $W$ で割ってできる $V$ の**商ベクトル空間 (quotient vector space)** もしくは**商空間 (quotient space)** と呼ぶ. □

**参考 12.2 (商ベクトル空間の元の記号について)** $V/W$ の元 $v + W$ は

$$v + W = v \bmod W = [v] = \bar{v}$$

のように書かれることも多い. $v \bmod W$ は「ベクトル $v$ の $W$ の元による平行移動方向の成分を無視したもの」という意味を持ち, $[v]$ や $\bar{v}$ は $v$ で代表される**同値類 (equivalence class)** によく使われる記号である. □

**参考 12.3** 以上の商ベクトル空間の構成はそのまま一般の環 $R$ 上の加群の商加群の構成に一般化される. □

**参考 12.4 ($M/N$ という記号法について)** 代数学において加群 (ベクトル空間も加群の一種であることに注意) $M$ とその部分加群 $N$ に対して, $M/N$ は分子の加群 $M$ の中で分母の部分加群 $N$ をゼロにつぶしてできる商加群を意味している. □

**注意 12.5** 商ベクトル空間は集合の集合として定義されたが, $V/W$ **が集合の集合であることにこだわりすぎると商ベクトル空間の正しい理解に失敗する**. 商ベクトル空間 $V/W$ の元は通常のベクトルだと考えた方がよい.

それでは $V/W$ の元はどのようなベクトルだと考えればよいのだろうか. 問題 **[129]** によれば, $v, v' \in V$ に対応する商ベクトル空間 $V/W$ の元 $v+W$, $v'+W$ が互いに等しくなるための必要十分条件は $v'-v \in W$ すなわち $v' \in v+W$ である. よって $V$ の中の $v$ を通り $W$ に平行な部分集合 $v+W$ 上のすべてのベクトルが商ベクトル空間 $V/W$ の一点に対応している. つまり, 直観的に $V/W$ は $V$ を $W$ 方向につぶして[10]できるベクトル空間とみなせる. この点に関しては問題 **[132]**, **[133]** を参考にせよ. □

**[132] (10 点)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $Z$ を $Z = \{\,(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\,\}$ と定める. このとき, $\mathbb{R}^3/Z$ は $\mathbb{R}$ 上の 2 次元のベクトル空間になる. □

**ヒント.** $e_1 + Z$, $e_2 + Z$ が $\mathbb{R}^3/Z$ の基底をなすことを示せ. □

**注意 12.6** $\mathbb{R}^3/Z$ は直観的に 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ を $z$ 軸方向に潰してできる 2 次元空間だとみなせる. すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の $z$ 軸 $Z$ に平行な直線を一点に潰してできる 2 次元空間が $\mathbb{R}^3/Z$ である. □

**[133] (10 点)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W$ を $W = \{\,(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\,\}$ と定める. このとき, $\mathbb{R}^3/W$ は $\mathbb{R}$ 上の 1 次元のベクトル空間になる. □

**ヒント.** $e_3 + W$ が $\mathbb{R}^3/W$ の基底をなすことを示せ. □

**注意 12.7** $\mathbb{R}^3/W$ は直観的に 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ を $xy$ 平面方向に潰してできる 1 次元空間だとみなせる. すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の $xy$ 平面 $W$ に平行な平面を一点に潰してできる 1 次元空間が $\mathbb{R}^3/W$ である. □

**[134] (自然な射影, 5 点)** 写像 $p : V \to V/W$ を

$$p(v) = v + W \qquad (v \in V)$$

と定めると, $p$ は $K$ 上の線形写像でかつ全射である. $p$ は $V$ から商空間 $V/W$ への**自然な射影 (canonical projection)** もしくは**自然な写像 (canonical mapping)** と呼ばれる. □

**[135] (準同型定理, 20 点)** $U$, $V$ は体 $K$ 上のベクトル空間であり, $f : U \to V$ は線形写像であるとする. $f$ の**核 (kernel)** $\operatorname{Ker} f$ と**像 (image)** $\operatorname{Im} f$ を

$$\operatorname{Ker} f = \{\,u \in U \mid f(u) = 0\,\}, \qquad \operatorname{Im} f = \{\,f(u) \mid u \in U\,\}$$

と定めると, $\operatorname{Ker} f$ は $U$ の部分空間であり, $\operatorname{Im} f$ は $V$ の部分空間である. 写像 $\phi : U/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ を

$$\phi(u + \operatorname{Ker} f) = f(u) \qquad (u \in U)$$

と定義することができ (すなわち $u, u' \in U$ に対して $u + \operatorname{Ker} f = u' + \operatorname{Ker} f$ ならば $f(u) = f(u')$), $\phi$ は $K$ 上のベクトル空間の同型写像になる. □

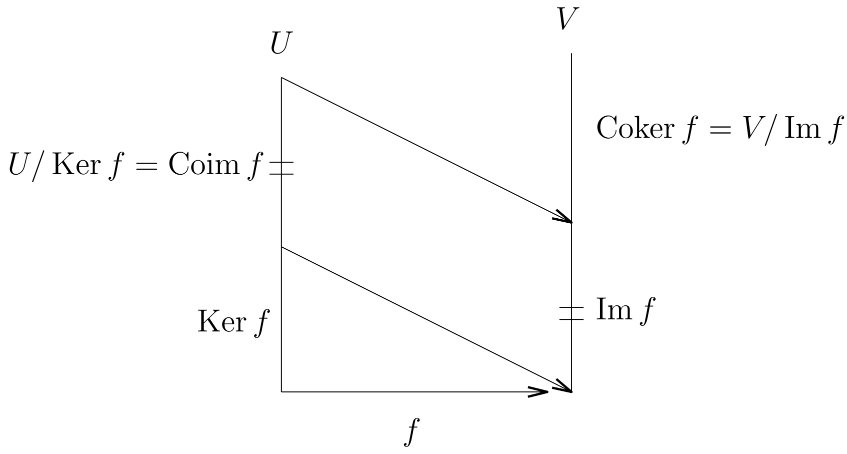


図 12.1: 準同型定理

**ヒント.** 記号の簡単のため $\overline{u} = u + \mathrm{Ker}\, f$ $(u \in U)$ とおく.

$\phi$ の well-definedness: $u, u' \in U$, $\overline{u} = \overline{u'}$ と仮定する. そのとき $u - u' \in \mathrm{Ker}\, f$ である. よって $f(u) - f(u') = f(u - u') = 0$ すなわち $f(u) = f(u')$ である.

$\phi$ の線形性: $u, u' \in U$, $\alpha \in K$ に対して, $\phi(\overline{u} + \overline{u'}) = \phi(\overline{u + u'}) = f(u + u') = f(u) + f(u') = \phi(\overline{u}) + \phi(\overline{u'})$, $\phi(\alpha\overline{u}) = \phi(\overline{\alpha u}) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha\phi(\overline{u})$.

$\phi$ の単射性: $u \in U$, $\phi(\overline{u}) = 0$ と仮定する. $0 = \phi(\overline{u}) = f(u)$ より $u \in \mathrm{Ker}\, f$ である. よって $\overline{u} = 0$.

$\phi$ の全射性: $\mathrm{Im}\, \phi = \{\, \phi(\overline{u}) \mid u \in U \,\} = \mathrm{Im}\, f$. □

**参考 12.8** $f : U \to V$ の**余核 (cokernel)** $\mathrm{Coker}\, f$ と**余像 (coimage)** $\mathrm{Coim}\, f$ が

$$\mathrm{Coker}\, f = V/\mathrm{Im}\, f, \qquad \mathrm{Coim} = U/\mathrm{Ker}\, f$$

と定義される. 準同型定理は余像と像が自然に同型になることを意味している. このことをよく図 12.1 のように描く. □

**参考 12.9** 準同型定理は一般の環 $R$ 上の加群にそのまま一般化される. 証明の仕方はベクトル空間の場合とまったく同じである. □

**[136] (10 点)** $U$ は体 $K$ 上のベクトル空間であり, $V$ はその部分空間であるとし, $W$ は $U$ における $V$ の補空間であるとする. このとき自然な射影 $p : U \twoheadrightarrow U/V$ の $W$ への制限 $p|_W : W \to U/V$ は同型写像になる. よって $(W \oplus V)/V \cong W$ という自然な同型を得る. □

**ヒント.** $p|_W$ が単射であることと全射であることを補空間の定義に戻って地道に証明せよ. もしくは写像 $q : U/V \to W$ を $q((w + v) \bmod V) = w$ $(w \in W,\ v \in V)$ と定めることができ (well-definedness のチェックが必要), $q$ が $p|_W$ の逆写像になることを示せ. □

**[137] (image と kernel の次元の関係, 10 点)** $U, V$ は体 $K$ 上のベクトル空間であり, $U$ は有限次元であると仮定する. このとき任意の線形写像 $f : U \to V$ に対して $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim_K U$. □

---

[10]「つぶす」という言葉を用いると, 紙屑などを「グシャッ」と潰す様子を想像する人が結構いるようである. しかし, 商ベクトル空間 $V/W$ を作るために $V$ を $W$ 方向につぶす場合には「グシャッ」ではなく「スーッ」と滑らかに潰れる様子を想像しなければいけない.

**[138] (15 点)** 体 $K$ 上の一変数多項式環 $K[\lambda]$ を考え, 任意にゼロでない多項式 $f \in K[\lambda]$ を取る. このとき, $K[\lambda]$ の部分集合 $(f)$ を

$$(f) = K[\lambda]f = \{\, af \mid a \in K[\lambda] \,\}$$

と定める[11]. 以下を示せ.

1. $(f)$ は $K[\lambda]$ の $K[\lambda]$ 部分加群である. すなわち任意の $g, h \in (f)$ と $a \in K[\lambda]$ に対して $g + h \in (f)$ かつ $af \in (f)$ である. 特に $(f)$ は $K[\lambda]$ の $K$ 上のベクトル部分空間である.

2. $R = K[\lambda]/(f)$ (商ベクトル空間) とおき, $a \in K[\lambda]$ に対する $a + (f) \in R$ を $a \bmod f$ と書くことにする. このとき, 積 $\cdot : R \times R \to R$ を

$$(a \bmod f) \cdot (b \bmod f) = ab \bmod f \qquad (a, b \in K[\lambda])$$

と定めることができる (すなわち $a, b, c, d \in K[\lambda]$ に対して $a \bmod f = c \bmod f$, $b \bmod f = d \bmod f$ ならば $ab \bmod f = cd \bmod f$ が成立する).

3. これによって $R$ は可換環をなす[12]. □

**ヒント.** 1. $a, b, c \in K[\lambda]$ に対して $af + bf = (a+b)f \in (f)$ であり, $a(bf) = (ab)f \in (f)$. 2. $a \bmod f = c \bmod f$ と $a - c \in (f)$ は同値であり, $b \bmod f = d \bmod f$ と $b - d \in (f)$ は同値であるから, $ab - cd = ab - ad + ad - cd = a(b-d) + d(a-c) \in (f)$. 3. $1_R = 1 \bmod f$ と置き, 可換環の公理を機械的にチェックすればよい. □

**参考 12.10** $R = K[\lambda]/(f)$ は $K[\lambda]$ の中で $f$ をゼロとみなすことによって得られる可換環である. $f$ がゼロとみなされるならば任意の $a \in K[\lambda]$ に対する $af$ もゼロとみなされなければいけない. $(f)$ はそのような $af$ 全体のなす集合である.

本当は上の問題は可換環とイデアルと剰余環の理論としてより一般的にやるべき事柄である. □

**[139] (10 点)** 上の問題 [138] のつづき. $f$ の次数が $n$ ならば $\dim_K R = \dim_K(K[\lambda]/(f)) = n$ であることを証明せよ. □

**ヒント 1.** $t = \lambda \bmod f$ と置くと, $t^i = \lambda^i \bmod f$ である. $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ が $R$ の $K$ 上の基底になることを示せばよい.

任意の $g \in K[\lambda]$ は $g$ を $f$ で割ることによって $g = qf + r$, $q, r \in K[\lambda]$, $\deg r < n$ と一意に表わされる[13] (商が $q$ で余りが $r$). そのとき $g \bmod f = r \bmod f$ であり, $r$ は次数が $n$ 未満なので $1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}$ の一次結合で表わされるので, $g \bmod f$ は $1, t, \dots, t^{n-1}$ の一次結合で表わされる.

もしも $g \in K[\lambda]$, $\deg g < n$ かつ $g \bmod f = 0_R = (f)$ ならば $g = af$, $a \in K[\lambda]$ と表わされる. $\deg g < n$ より $a = 0$ でなければいけないので $g = 0$ となる. これより $1, t, \dots, t^{n-1}$ の一次独立性が出る. □

---

[11] $(f)$ は $f$ から生成される $K[\lambda]$ の**単項イデアル (principal ideal)** と呼ばれる.

[12] $R = K[\lambda]/(f)$ は $K[\lambda]$ をイデアル $(f)$ で割ってできる**剰余環 (residue ring, residue-class ring)** と呼ばれる.

[13] $\deg r$ は $r$ の次数である. $r = 0$ のとき $\deg r = -\infty$ と考える.

**ヒント 2.** 次数が $n$ 未満の $\lambda$ の多項式全体のなす $n$ 次元のベクトル空間を $V$ と書き, 線形写像 $\phi : V \to R$ を $\phi(v) = v \bmod f$ $(v \in V)$ と定義する. $\phi$ が同型写像であることを示せば $R$ の次元も $n$ であることがわかる.

任意の $g \in K[\lambda]$ は $g$ を $f$ で割ることによって $g = qf + r$, $q, r \in K[\lambda]$, $\deg r < n$ と一意に表わされるので, $g \bmod f = r \bmod f = \phi(r)$ である. よって $\phi$ は全射である.

もしも $g \in V$ かつ $\phi(g) = g \bmod f = 0_R = (f)$ ならば $g = af$, $a \in K[\lambda]$ と表わされる. $\deg g < n$ より $a = 0$ でなければいけないので $g = 0$ となる. よって $\phi$ は単射である. □

# 13 双対空間

[140] **(双対空間の定義, 5 点)** 体 $K$ 上のベクトル空間 $V$ に対して $V$ から $K$ への線形写像全体のなす集合 $V^*$ は自然に体 $K$ 上のベクトル空間をなすことを示せ. $V^*$ は $V$ の**双対ベクトル空間 (dual vector space)** もしくは**双対空間 (dual space)** と呼ばれる. $f \in V^*$ と $v \in V$ に対して $f(v)$ を $\langle f, v \rangle$ と表わすことがある. □

**ヒント.** 問題 [91] の特別な場合. $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$. □

[141] **(横ベクトルの空間と縦ベクトルの空間の双対性, 5 点)** $K$ は体であるとする. $K$ の元を成分に持つ $n$ 次元縦ベクトル全体のなすベクトル空間を $K^n$ と書き, $n$ 次元横ベクトル全体のなすベクトル空間を仮に ${}^t(K^n)$ と書くことにする. 写像 $\iota : {}^t(K^n) \to (K^n)^*$ を横ベクトルと縦ベクトルの積によって

$$\left\langle \iota([x_1, \dots, x_n]), \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle := [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad (x_i, y_i \in K)$$

と定義する. このとき $\iota$ は同型写像になることを示せ. $\iota$ を通して横ベクトルの空間 ${}^t(K^n)$ と縦ベクトルの空間 $K^n$ の双対空間 $(K^n)^*$ は自然に同一視される. □

**参考 13.1 (ブラとケット)** 量子力学には, ブラベクトル (bra vector) $\langle v^*|$ やケットベクトル (ket vector) $|v\rangle$ のような記号が登場し[14], ブラ $\langle v^*|$ とケット $|v\rangle$ のあいだには $\langle v^*|v\rangle \in \mathbb{C}$ と書かれる内積が定義されている.

実はブラベクトル全体のなすベクトル空間はケットベクトル全体のなすベクトル空間の双対空間と同一視できる. 直観的にブラベクトルは横ベクトルのようなものであり, ケットベクトルは縦ベクトルのようなものだと考えればよい. 横ベクトルと縦ベクトルのあいだには上の問題のように自然に内積が定義される. □

[142] **(基底の定める座標, 5 点)** $V$ は体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間であり, $v_1, \dots, v_n$ は $V$ の基底であるとする. 任意の $v \in V$ は $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ $(\alpha_i \in K)$ と一意に表わされる. よって $v$ に対して $\alpha_i$ を対応させる写像 $x_i$ が定まる. $x_i \in V^*$ であることを示せ. ($x_i$ を基底 $v_i$ の定める $V$ 上の座標と呼ぶことにする.) □

---

[14] Dirac [D] などの量子力学の教科書を参照せよ.

**[143] (双対基底, 10 点)** $V$ は体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間であるとする. $V$ の基底 $v_1, \dots, v_n$ に対して, $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ を

$$\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, n)$$

という条件によって一意に定めることができる. このとき $v_1^*, \dots, v_n^*$ は双対空間 $V^*$ の基底になる. 特に $\dim V^* = \dim V$ である. $v_1^*, \dots, v_n^*$ を $v_1, \dots, v_n$ の**双対基底 (dual basis)** と呼ぶ. □

**ヒント.** 任意の $f \in V^*$ に対して, $g = \sum_{j=i}^n \langle f, v_i \rangle v_i^* \in V^*$ と置くと, $\langle g, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle$ $(j = 1, \dots, n)$ であるから, $f = g$ であることがわかる. よって $V^*$ は $v_1^*, \dots, v_n^*$ で張られる. $v^* := \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^* = 0$, $\alpha_i \in K$ と仮定する. このとき $0 = \langle v^*, v_j \rangle = \alpha_j$ $(j = 1, \dots, n)$ である. よって $v_1^*, \dots, v_n^*$ は一次独立である. □

**注意 13.2** 問題 **[142]** の $x_i$ と問題 **[143]** の $v_i^*$ は等しい. □

**[144] (1 の分解, 10 点)** $V$ は体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間であるとする. $V$ の基底 $v_1, \dots, v_n$ とその双対基底 $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ を任意に取る. $V$ の一次変換 $\sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ を次のように定める:

$$\left( \sum_{i=1}^n v_i v_i^* \right)(v) = \sum_{i=1}^n v_i \langle v_i^*, v \rangle \qquad (v \in V).$$

この $\sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ は $V$ の恒等写像 $\mathrm{id}_V$ に等しい. $\mathrm{id}_V = \sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ を **1 の分割**と呼ぶ. □

**ヒント.** $v \in V$ を $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in K$ と表わし, $\sum_{i=1}^n v_i \langle v_i^*, v \rangle$ を計算してみよ. □

**注意 13.3** $V = K^n$, $v_i = e_i$ ならば $v_i^* = {}^t e_i$ である. $\sum_{i=1}^n e_i {}^t e_i$ が単位行列になることは容易に示される. 上の問題の結果はこれの一般化である. □

**参考 13.4** 量子力学では[15], 1 の分割をブラとケットの記号を用いて $1 = \sum_i |i\rangle\langle i|$ のように書くことが多い. $|i\rangle$ はケットベクトル全体の空間の基底であり, $\langle i|$ はその双対基底である. □

**[145] (双対の双対, 10 点)** $V$ は体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間であるとする. このとき, 写像 $\iota : V \to (V^*)^*$ を

$$\langle \iota(v), f \rangle = \iota(v)(f) := \langle f, v \rangle = f(v) \qquad (v \in V,\ f \in V^*)$$

と定めると, $\iota$ は同型写像である. $\iota : V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*$ を通して, $(V^*)^*$ は $V$ と自然に同一視される. □

**[146] (転置写像, 10 点)** $f : U \to V$ は体 $K$ 上のベクトル空間のあいだの線形写像であるとする. このとき線形写像 ${}^t f : V^* \to U^*$ を

$$\langle {}^t f(v^*), u \rangle = \langle v^*, f(u) \rangle \qquad (v^* \in V^*,\ u \in U)$$

と定義できることを示せ. ${}^t f$ を $f$ の**転置写像**と呼ぶことにする. □

[15] Dirac [D] などを見よ.

**[147] (行列の転置との関係, 10 点)** $K$ は体であるとし, $K$ の元を成分に持つ $n$ 次元縦ベクトル全体の空間を $K^n$ と表わし, 写像 $\iota : K^n \to (K^n)^*$ を

$$\langle \iota(x), y\rangle = \iota(x)(y) := {}^t x y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad (x = [x_i], y = [y_i] \in K^n)$$

と定めると, $\iota$ は同型写像である. $\iota$ を用いて $(K^n)^*$ と $K^n$ 自身を同一視することにする. そのとき, 任意に $A \in M_{m,n}(K)$ を取ると, $A$ の定める $K^n$ から $K^m$ への線形写像の転置写像が ${}^tA$ の定める $K^m$ から $K^n$ への線形写像になることを示せ. □

**ヒント.** $x, y \in K^n$ を任意に取る. $\langle \iota({}^tAx), y\rangle = \langle \iota(x), Ay\rangle$ を示せばよい. □

**[148] (商空間と部分空間の双対, 20 点)** $U$ は体 $K$ 上のベクトル空間であり, $V$ はその部分空間であるとし,

$$V^\perp = \{\, u^* \in U^* \mid \langle u^*, v\rangle = 0 \ (v \in V)\,\}$$

とおく[16]. $V$ から $U$ への包含写像を $i$ と書き[17], $U$ から $U/V$ への自然な射影を $p$ と書くことにする:

$$V \xrightarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ p\ } U/V.$$

双対空間の移ると次のような転置写像の列ができる:

$$V^* \xleftarrow{\ {}^ti\ } U^* \xleftarrow{\ {}^tp\ } (U/V)^*.$$

以下を示せ:

1. ${}^tp : (U/V)^* \to U^*$ は単射である.
2. $\operatorname{Ker} {}^ti = V^\perp$.
3. $\operatorname{Ker} {}^ti = \operatorname{Im} {}^tp$ である.
4. ${}^tp$ は自然な同型 $(U/V)^* \xrightarrow{\sim} V^\perp$, $x^* \mapsto {}^tp(x^*)$ を誘導する.
5. ${}^ti : U^* \to V^*$ は全射である.
6. ${}^ti$ は自然な同型 $U^*/V^\perp \xrightarrow{\sim} V^*$, $u^* \bmod V^\perp \mapsto {}^ti(u^*)$ を誘導する. □

**ヒント.** 1. 任意の $u \in U$, $x^* \in (U/V)^*$ に対して, $\langle {}^tp(x^*), u\rangle = \langle x^*, u \bmod V\rangle$ であるから, ${}^tp(x^*) = 0$ ならば $x^* = 0$ である. よって $\operatorname{Ker} {}^tp = 0$ である. これで ${}^tp$ は単射であることが示された.

2. 任意の $u^* \in U$, $v \in V$ に対して, $\langle {}^ti(u^*), v\rangle = \langle u^*, v\rangle$ であるから, ${}^ti(u^*) = 0$ と $\langle u^*, v\rangle = 0$ $(v \in V)$ は同値である. これで $\operatorname{Ker} {}^ti = V^\perp$ が示された.

3. 任意の $x^* \in (U/V)^*$, $v \in V$ に対して, $\langle {}^ti({}^tp(x^*)), v\rangle = \langle {}^tp(x^*), i(v)\rangle = \langle {}^tp(x^*), v\rangle = \langle x^*, p(v)\rangle = \langle x^*, 0\rangle = 0$ であるから, $\operatorname{Im} {}^tp \subset \operatorname{Ker} {}^ti$ である. 任意の $u^* \in \operatorname{Ker} {}^ti$, $v \in V$ に対して, $0 = \langle {}^ti(u^*), v\rangle = \langle u^*, v\rangle$ であるから, $x^* \in (U/V)^*$ を $\langle x^*, u \bmod V\rangle = \langle u^*, u\rangle$ $(u \in U)$ と定めることができる. そのとき ${}^tp(x^*) = u^*$ であるから, $\operatorname{Ker} {}^ti \subset \operatorname{Im} {}^tp$ である.

---

[16] $V^\perp$ は $V$ の $U^*$ における**直交補空間 (orthogonal complement)** と呼ばれる. この用語法は計量ベクトル空間における直交補空間の概念を双対空間の場合に一般化したものである.

[17] $i$ は $v \in V$ を $v \in U$ に対応させる写像である.

4. ${}^t p : (U/V)^* \to U^*$ は単射であるから, 同型 $(U/V)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,{}^t p = \mathrm{Ker}\,{}^t i = V^\perp$ を誘導する.

5. $V$ の $U$ における補空間 $W$ が存在する (問題 [**112**] の結果). $v^* \in V^*$ に対して $u^* \in U^*$ を $\langle u^*, v+w \rangle = \langle v^*, v \rangle$ $(v \in V,\ w \in W)$ と定めると, ${}^t i(u^*) = v^*$ である. よって ${}^t i$ は全射である.

6. 準同型定理を ${}^t i$ に適用すると, 2, 5 より同型 $U^*/V^\perp \xrightarrow{\sim} V^*$, $u^* \bmod V^\perp \mapsto {}^t i(u^*)$ が得られる. □

## 参考文献

[D] ディラック, P. A. M., 量子力学, 朝永振一郎他訳, 岩波書店, 1968 (原書 1958)

[H2] 堀田良之, 加群十話——加群入門——, すうがくぶっくす 3, 朝倉書店, 1988

[YmS] 山内恭彦, 杉浦光夫, 連続群論入門, 新数学シリーズ 18, 培風館, 1960