幾何学概論 I 演習

黒木 玄 (東北大学理学部数学教室)

1995 年 10 月 9 日 (月)

前回に配ったプリントの訂正: 重要だと思われるもののみについて訂正を行なう．この演習で配ったプリントの最新版 (訂正を加えたもの) の日本語 $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX ファイルを

`ftp://tsuru.math.tohoku.ac.jp/pub/math/kuroki/exercise/curve_and_surface/`

に置いてあるので欲しい人は自由に持って行っても構わない.

問題 [**1**]**:** 「開区間 V と写像 $\tau : V \to U$ の組 (V, τ)」→「開区間 V と C^∞ 写像 $\tau : V \to U$ の組 (V, τ)」 (「C^∞」の追加).

問題 [**9**]**:** (3) の中の「c」→「b」.

問題 [**10**]**:** 次のように変更する:

[**10**] この問題中においてベクトルは縦ベクトルであるとみなす．U は $\mathbb{R}$ 内の開区間であるとし, $q : U \to \mathbb{R}^3$ は U 上で $|\dot{q}| = 1$ および $|\ddot{q}| > 0$ をみたす任意の C^∞ 写像であるとする．さらに,

$$e_1(t) = \dot{q}(t), \qquad e_2(t) = \frac{\ddot{q}(t)}{|\ddot{q}(t)|}, \qquad e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$$

と置き, 3×3 行列値函数 $E(t)$ を $E(t) = (e_1(t)\ e_2(t)\ e_3(t))$ によって定める．このとき, $E(t)$ は直交行列でかつ $\det E(t) = 1$ が成立している． □

問題 [**14**]**:** 次のように変更する:

[**14**] **(曲線論の基本定理)*** 常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性に関する結果を認めた上で以下を示せ．U は $\mathbb{R}$ 内の開区間であるとし, $\kappa(t)$, $\tau(t)$ は U 上の C^∞ 函数であり, U 上で $\kappa(t) > 0$ が成立していると仮定する．$t_0 \in U$, $q_0 \in \mathbb{R}^3$ および 3×3 の直交行列 E_0 で $\det E_0 = 1$ をみたすものを任意に与える．このとき, C^∞ 写像 $q : U \to \mathbb{R}^3$ で以下を満足するものが唯一存在する:

1. U 上 $|\dot{q}(t)| = 1$ が成立している.
2. $q(t)$ の曲率と捩率はそれぞれ $\kappa(t)$ および $\tau(t)$ に等しい.
3. $q(t_0) = q_0$.
4. 問題 [**10**], [**11**] の記号のもとで, $E(t_0) = E_0$. □

参考文献: 「佐武一朗」 → 「佐武一郎」. 「改定」 → 「改訂」.

1 曲線論 (つづき)

[**16**] U は 0 を含む $\mathbb{R}$ 内の開区間であるとし, $q : U \to \mathbb{R}^3$ は U 上で $|\dot{q}| = 1$ および $\ddot{q} \neq 0$ を満たす C^∞ 写像であるとする. このとき, 問題 [**10**], [**11**] の記号のもとで, $q(t)$ の $t = 0$ における Taylor 展開は次のような形になる:

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) + te_1(0) + \frac{t^2}{2}\kappa(0)e_2(0) \\ &\quad + \frac{t^3}{3!}(-\kappa(0)^2 e_1(0) + \dot{\kappa}(0)e_2(0) + \kappa(0)\tau(0)e_3(0)) + o(t^3). \quad \square \end{aligned}$$

[**17**] 空間曲線 $q(t)$ (t は弧長パラメーターとは限らない) に対して, 曲率 $\kappa(t)$, 捩率 $\tau(t)$ は次のような表示を持つ:

$$\kappa = \frac{|\dot{q} \times \ddot{q}|}{|\dot{q}|^2}, \qquad \tau = \frac{\det\begin{bmatrix} \dot{q} & \ddot{q} & \dddot{q} \end{bmatrix}}{|\dot{q} \times \ddot{q}|^2}. \quad \square$$

[**18**]* Frenet-Serret の公式および曲線論の基本定理を 3 次元空間内の曲線に関する問題としてすでに提出してある. それらの結果の 2 次元平面内の曲線に対する類似の命題を定式化し, その証明の筋道を説明せよ. $\square$

この問題を見た人は次のような疑問を持つであろう. 「以上によって, Frenet-Serret の公式および曲線論の基本定理が平面曲線および空間曲線に対して定式化できることがわかった. この結果は 4 次元以上の高次元空間内の曲線に関する結果に拡張できるのではなかろうか?」もちろん, この疑問に対する答は Yes である. 以下の問題を解いてゆくことによって, そのことが理解できるであろう.

今まで通り, $\mathbb{R}^n$ は縦ベクトルの空間であるとみなし, そこには通常の Euclid 内積 $\cdot$ が定義されているとする. また, それの定めるノルムを $|\ |$ と表わす.

[**19**] **(Schmidt の正規直交化法)** n 個のベクトル $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ は互いに一次独立であるとし, $i = 1, \dots, n$ に対して $v_i, e_i \mathbb{R}^n$ を帰納的に,

$$v_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \cdot x_k) e_i, \qquad e_k := v_k / |v_k| \qquad \text{for } k = 1, \dots, n$$

と定める. (特に, $v_1 = x_1$, $e_1 = x_1/|x_1|$.) さらに, $n \times n$ 行列 X, K を $X := \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$, $K := \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$ と定める. このとき, 以下が成立する:

1. $e_1, \dots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である. すなわち, 行列 K は直交行列である.

2. $n \times n$ 行列 P を条件 $X = KP$ によって定めると, P は次のような形の上三角行列になる:

$$P = \begin{bmatrix} |v_1| & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & |v_n| \end{bmatrix}. \quad \square$$

直交群 $O(n)$ と特殊直交群 $SO(n)$ を

$$
\begin{aligned}
&M(n,F) = \{\, X \mid X \text{ は } F \text{ を係数とする } n \text{ 次正方行列である.} \},\\
&O(n) = \{\, X \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tXX = 1 \,\},\\
&SO(n) = \{\, X \in O(n) \mid \det X = 1 \,\}
\end{aligned}
$$

と定義したことを思い出そう. ここで, F は任意の体を表わす, (例えば, $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.) 以下では, さらに,

$$
\begin{aligned}
&GL(n,F) = \{\, X \in M(n,F) \mid X \text{ は逆行列を持つ.} \},\\
&GL^+(n,\mathbb{R}) := \{\, X \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det X > 0. \},\\
&SL(n,F) = \{\, X \in M(n,F) \mid \det X = 1 \,\},\\
&N(n,F) = \left\{ X \in M(n,F) \;\middle|\; X = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}. \right\},\\
&A(n) = \left\{ X = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \in GL(n,\mathbb{R}) \;\middle|\; a_1, \dots, a_n > 0. \right\}.
\end{aligned}
$$

という記号も用いる. $GL(n,F)$, $GL^+(n,\mathbb{R})$, $SL(n,F)$, $N(n,F)$, $A(n)$ は行列の積に関して群をなす. $GL(n,F)$, $SL(n,F)$ はそれぞれ **一般線型群** (general linear group), **特殊線型群** (special linear group) と呼ばれている.

[20] **(岩沢分解 1)*** 任意の $X \in GL(n,\mathbb{R})$ を次の形で一意的に表示できることを示せ:

$$X = KAN, \qquad \text{where} \quad K \in O(n), \quad A \in A(n), \quad N \in N(n,\mathbb{R}).$$

よって, 行列の積の定める自然な写像

$$O(n) \times A(n) \times N(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$$

は全単射である. (この結果を $GL(n,\mathbb{R})$ の岩沢分解と呼ぶ.) □

ヒント: 表示の存在は Schmidt の正規直交化法の言い換えに過ぎないので, 表示の一意性を示すことのみが問題になる.

岩沢分解を使うと $GL(n,\mathbb{R})$ のトポロジーに関する問題を $O(n)$ の問題に帰着できる.

[21] **(岩沢分解 2)*** 行列の積の定める写像 $O(n) \times A(n) \times N(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ は同相写像であり, $A(n) \times N(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ に同相である. □

[22]* 直交群 $O(n)$ が $GL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群であることを示せ. (すなわち, $O(n)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ のコンパクト部分群であり, $O(n)$ を真に含むような $GL(n,\mathbb{R})$ のコンパクト部分群が存在しないことを示せ.) □

[23] (岩沢分解 3) $SA(n) := SL(n,\mathbb{R}) \cap A(n)$ と置く．このとき, 行列の積の定める写像

$$
\begin{aligned}
SO(n) \times SA(n) \times N(n,\mathbb{R}) &\to SL(n,\mathbb{R}),\\
SO(n) \times A(n) \times N(n,\mathbb{R}) &\to GL^+(n,\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

は共に同相写像であることを示せ． □

[24] $SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ が成立することを示せ．特に, $SO(2)$ は円 S^1 に同相であり, コンパクトかつ弧状連結である．このことより, $O(2)$ は 2 つの S^1 の非連結和に同相であることもわかる． □

[25] $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, 行列 $A(\theta)$, $B(\theta)$ を次のように定義する:

$$
A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.
$$

このとき, 以下が成立することを示せ:

1. $A(\theta), B(\theta) \in SO(3)$.
2. 任意の $X \in SO(3)$ に対して, ある $\phi, \theta, \psi \in \mathbb{R}$ が存在して, $0 \le \phi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \psi < 2\pi$, および $X = A(\phi)B(\theta)A(\psi)$ が成立する．(このとき, (ϕ, θ, ψ) は X の Euler 角であると言う.)
3. (ϕ, θ, ψ), (ϕ', θ', ψ') は X の Euler 角であるとする．$\theta \ne 0, \pi$ ならば, $(\phi, \theta, \psi) = (\phi', \theta', \psi')$ となり, Euler 角の一意性が成立する．しかし, $\theta = 0, \pi$ のとき, Euler 角の一意性は成立しない.
4. $SO(3)$ はコンパクトかつ弧状連結である． □

ヒント: $A(\theta)$, $B(\theta)$ はそれぞれ z 軸および y 軸のまわりの回転を表わす行列である．(自力で解けない場合は例えば [山内・杉浦] の p.45 を見よ.)
参考: $SO(3)$ は実 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ に同相である．この手のことについては, [横田] に詳しい解説がある．(例えば, p.131 を見よ.)

[26]* $SO(n)$ が弧状連結であることを証明せよ． □

ヒント: [佐武] の p.178 では直交行列の標準形に関する結果を用いて証明している．他にも Euler 角の考え方を使って n に関する帰納法によって証明することもできる．その方針は以下の通り．$e_n = {}^t(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (第 n 成分のみが 1 で他は 0) と置く．回転行列の合成 A によってベクトル Xe_n を e_n に移すことができる．このとき, $AX \in SO(n)$ かつ行列 AX は $\begin{bmatrix} X' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(X' \in SO(n-1))$ の形になる．これによって, $SO(n)$ の弧状連結性は $SO(n-1)$ の弧状連結性に帰着できることがわかる.

[27] $GL^+(n,\mathbb{R})$ が弧状連結であることを示せ. さらに, $GL(n,\mathbb{R})$ がちょうど 2 つの弧状連結成分に分かれることを示せ. □

ヒント: 岩沢分解と $SO(n)$ の弧状連結性より, $GL^+(n,\mathbb{R})$ が弧状連結であることがわかる. $GL(n,\mathbb{R})$ の中の行列式が正の行列と行列式が負の行列は連続な曲線で結ぶことができない. なぜなら, もしもあるとしたら, 中間値の定理より, その曲線上のどこかで行列式が 0 になってしまい $GL(n,\mathbb{R})$ をはみ出してしまう.

[28] $\mathbb{R}^n$ の基底を与えるようなベクトルの組 $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^n)^n$ の全体の集合を Ω と表わすことにする. $(x_1,\dots,x_n)\in(R^n)^n$ と行列 $X=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$ を同一視することによって, $(\mathbb{R}^n)^n=M(n,\mathbb{R})$ とみなす. このとき, $\Omega=GL(n,\mathbb{R})$ である. これより, Ω はちょうど 2 つの弧状連結成分に分かれていることが示される. □

解説: つまり, $\mathbb{R}^n$ の基底全体は, 2 つの世界に分かれているのである. (大事なことは, 基底のベクトルを並べる順番が違うものは互いに異なると考えることである.) その片方の属す基底を右手系と呼び, もう片方に属す基底を左手系と呼ぶことがある. 数学的には 2 つの弧状連結成分のどちらを右手系と呼んでも良いのだが, 特別にどちらか片方を右手系であると指定するとき, 我々は $\mathbb{R}^n$ に**向き** (orientation) を指定したと言う. 向きの概念は幾何的に重要なだけでなく物理学的にも重要である. なお, 面白いことに我々の住む実世界は右手系と左手系が対称でないことが知られている. このような話に興味がある人は [Gardner] を見よ.

長々と脱線してしまったが, この辺で曲線論に戻ることにしよう. Schmidt の正規直交化法に関連した問題を出したのは, 以下の問題を解くためにそれが重要だからである.

[29] **(一般次元における Frenet-Serret の公式)*** U は $\mathbb{R}$ 内の開区間であり, $q:U\to\mathbb{R}^n$ は C^∞ 写像であるとし, 任意の $t\in U$ に対して $|\dot{q}(t)|=1$ および次が成立していると仮定する:

$$W(t):=\det\begin{bmatrix}\dot{q}(t) & \ddot{q}(t) & \cdots & q^{(n)}(t)\end{bmatrix}\neq 0.$$

(この行列式は一般に $q(t)$ の **Wronski 行列式** (Wronskian) と呼ばれている.) $\dot{q}(t),\ddot{q}(t),\dots,q^{(n)}(t)$ に対して, Schmidt の正規直交化法を適用することによって得られるベクトルを $e_1(t),\dots,e_n(t)$ と表わす. このとき, 以下が成立することを示せ:

1. 各 $e_i(t)$ は t に関して C^∞ 級であり, 任意の $t\in U$ において $e_1(t),\dots,e_n(t)$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす.

2. 導函数 $\dot{e}_i(t)$ は次のような表示を持つ:

$$\dot{e}_i(t)=-\kappa_{i-1}(t)e_{i-1}(t)+\kappa_{i+1}(t)e_i(t)\qquad\text{for}\quad i=1,\dots,n.$$

ここで, $e_0(t)=e_{n+1}(t)=0$ であり, $\kappa_1(t),\dots,\kappa_n(t)$ は $t\in U$ の正値 C^∞ 函数である. □

[30]* 上の問題において, 「$W(t)\neq 0$」という条件を, 「$\dot{q}(t),\ddot{q}(t),\dots,q^{(n-1)}(t)$ が一次独立である」という条件に弱めた形で再定式化し, それを証明せよ. □

注意: 実際, $n=3$ の結果が問題 [**10**], [**11**] の結果を含むようにするためには, このように仮定の条件を弱めて定式化する必要がある. (この辺はそれほど数学的に重要なことだと思われないが, 細い再定式化の訓練になると思い, 演習問題として提出したのである.)

[**31**]* 一般の次元における曲線論の基本定理を定式化し, それを証明せよ. □

ここで, 少々, 線型常微分方程式について問題を補足しておこう. 曲線論の基本定理の証明のためには, 次の形の方程式の解の存在と一意性が本質的なのであった:

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), \qquad u(0) = u_0.$$

ここで, $u(t)$ はベクトル値函数であり, $A(t)$ は行列値函数であり, u_0 は初期値ベクトルである.

もしも, $A(t)$ が定数行列 A に等しいならば, 問題 [**13**] の行列の指数函数を用いて, 解を

$$u(t) = \exp(At)u_0$$

と表わすことができる. 次の問題は $A(t)$ が定数でない場合の結果を与える.

[**32**]* U は $\mathbb{R}$ 内の開区間であるとし, $A : U \to M(n, \mathbb{C})$ は連続函数であるとする. このとき, $t_0, t \in U$ $(t_0 \leq t)$ に対して, 級数

$$F(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} ds_k \int_{t_0}^{s_k} ds_{k-1} \cdots \int_{t_0}^{s_2} ds_1 \, [A(s_k)A(s_{k-1}) \cdots A(s_1)]$$

を考える. ($k=0$ に対応する項は 1 であるとする.) 右辺の級数は絶対収束し, U 上の行列値 C^1 級函数を与え, 次を満たしていることを示せ:

$$\frac{d}{dt}F(t) = A(t)F(t). \quad \square$$

助言: この手の問題に出会ったら, ます収束性などの細かいことを調べる前に, 形式的に導函数を計算して見よ. 正しそうな式であることが納得できる前に厳密性にこだわるのは止めた方が良い.

[**33**] 上の問題の続き. $s_1, \ldots, s_k \in U$ に対して, $\{1, \ldots, k\}$ の置換 σ で $s_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq s_{\sigma(k)}$ を満たすものを取り,

$$T[A(s_k)A(s_{k-1}) \ldots A(s_1)] = A(s_{\sigma(k)})A(s_{\sigma(k-1)}) \cdots A(s_{\sigma(1)})$$

と置く. これを $A(s_1), \ldots, A(s_k)$ の time ordering product と呼ぶ. この記号のもとで, 次が成立することを示せ:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{t} ds_k \int_{t_0}^{t} ds_{k-1} \cdots \int_{t_0}^{t} ds_1 \, T[A(s_k)A(s_{k-1}) \cdots A(s_1)].$$

さらに, 形式的に無限和および積分と time ordering product を交換することによって次の式が得られることを説明せよ:

$$F(t) = T\left[\exp \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right]. \quad \square$$

ヒント: この問題は形式的な計算だけでできるので簡単である.
参考: この問題の結果は物理学者などには良く知られているようである. (例えば, [Polyakov] の第 7 章などを見よ.)

[34]* Picard の逐次近似法から問題 **[32]** の結果が導かれることを説明せよ. □

[35]* 問題 **[32]** における $F(t)$ をさらに t だけでなく t と t_0 の函数とみなしたものを $F(t,t_0)$ と表わす. このとき, $F(t,t_0)$ は (t,t_0) の函数として C^1 級であり, 次を満たしていることを示せ:

$$\frac{\partial}{\partial} t_1 F(t_1,t_0) = A(t_1)F(t_1,t_0), \qquad \frac{\partial}{\partial} t_0 F(t_1,t_0) = -F(t_1,t_0)A(t_0). \quad \square$$

参考文献

[Gardner] Martin Gardner: 自然界における左と右, 紀伊国屋書店

[Polyakov] A. M. Polyakov: Gauge fields and strings, harwood academic publishers, Contemporary concepts in physics, Volume 3, 1987

[佐武] 佐武 一郎: 線型代数学, 裳華房

[山内・杉浦] 山内恭彦, 杉浦光雄: 連続群論入門, 培風館, 新数学シリーズ 18

[横田] 横田一郎: 群と位相, 裳華房, 基礎数学選書 5