複素函数論の復習

黒木 玄 (東北大学理学研究科)

1996年6月28日(金)版

目次

1	一致の定理	2
2	実2変数函数の線積分	3
3	正則函数	4
4	解析函数の孤立特異点	7
5	最大値の原理	10
6	留数	11
7	正則函数の巾級数展開の収束半径	13
8	定積分の計算	13
9	Euler-Riemann のゼータ函数の定義とその簡単な性質	17
10	Bernoulli 数と Bernoulli 多項式	18
11	複素函数の部分分数展開と無限乗積展開	19
12	ガンマ函数	21
13	Euler-Riemann のゼータ函数の解析接続	23
14	楕円テータ函数	25
15	Euler-Riemann のゼータ函数の函数等式	27

楕円函数の解析的な取り扱いには複素函数論が道具として使われる．この節では後で必要になりそうな複素函数に関する初等的なことに関して復習しよう．

是非とも解いてもらいたい問題には * の印を付けておいた．

1 一致の定理

同じ領域で定義された 2 つの解析函数が等しいことを示すためには, 考えている領域のほんの一部で 2 つの函数が等しいことを示せば良いというのが一致の定理の内容である. 解析函数に関する一致の定理はほとんど無意識のうちに使えるようになってもらいたい.

[**1**] $r > 0$ であり, 巾級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ は $|z| < r$ で絶対収束していると仮定し, この巾級数の定める函数を f と表わす. 0 に収束する点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ で,

$$0 < |z_n| < r, \qquad f(z_n) = 0 \qquad \text{for all } n = 0, 1, 2, \ldots$$

をみたすものが存在すると仮定する. このとき, すべての a_n は 0 になる. □

[**2**] **(一致の定理)** Ω は $\mathbb{C}$ の連結開集合であり, f は Ω 上の解析函数であるとする. ある点 $a \in \Omega$ に収束する Ω 内の点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ で,

$$0 < |z_n - a| < r, \qquad f(z_n) = 0 \qquad \text{for all } n = 0, 1, 2, \ldots$$

をみたすものが存在すると仮定する. このとき, f は Ω 上で恒等的に 0 である. □

$\mathbb{R}$ の開集合 U 上の複素数値函数 f が実解析的であるとは, 任意の $a \in U$ に対して, 十分小さな $r > 0$ を取ると, $|x - a| < r$ において絶対収束する中心 a の (複素係数の) 巾級数で $\{\, x \in U \mid |x - a| < r \,\}$ 上 f と一致するものが存在することである. 一致の定理は実解析函数に対しても全く同様に成立する. 一致の定理が成立するためには, 局所的に絶対収束する巾級数に等しいという条件のみが本質的であり, 複素数を用いたことは本質的ではない.

[**3**] $\mathbb{R}$ 上の多項式函数 f は, $\mathbb{C}$ 上の解析函数に一意的に拡張されることを示せ. (ヒント: 一意性の証明は一致の定理よりすぐ出る.) □

[**4**] $\mathbb{R}$ 上の函数 $\sin x$ は, $\mathbb{C}$ 上の解析函数に一意的に拡張されることを示せ. □

e^x, $\cos x$ についても同様である. $\mathbb{R}$ 上の函数の $\mathbb{C}$ 上の函数に拡張は無限に違ったやり方が考えられるのだが, $\mathbb{R}$ 上の多項式函数, 指数函数, 三角函数は解析的という条件のもとで, 複素平面全体に一意的に拡張されるのである.

[**5**] 以下の事実が既知であると仮定する:

1. 三角函数は全複素平面に解析的に拡張可能である. (それらを $\cos z$, $\sin z$ のように書くことにする.)

2. すべての実数 x に対して $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

これらと一致の定理を用いて, すべての**複素数** z に対して $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ が成立することを示せ. □

より一般に次が成立する.

[**6**] U は $\mathbb{C}$ の連結開集合であり, $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ であると仮定する. f, g は U 上の解析函数であり, $R(X, Y)$ は X, Y に関する多項式函数であるとする. 任意の $x \in U \cap \mathbb{R}$ に対して, $R(f(x), g(x)) = 0$ が成立していると仮定する. このとき, 任意の $z \in U$ に対して, $R(f(z), g(z)) = 0$ が成立する. □

2 実2変数函数の線積分

前年度後期の幾何の演習でも全く同じ問題を出したような気がするが, ここに採録しておく. 線積分が後で重要な役目を果たすので, 何をやっているかよく理解しておいて欲しい.

[7] Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域であり, 写像 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は連続であるとし, $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ と書くことにする. 写像 $z : [a,b] \to \Omega$ は C^1 写像であるとし, $z(t) = (x(t), y(t))$ と書くことにする. 実数 M, L を次のように定める:

$$M = \sup_{t\in[a,b]} ||f(z(t))||, \qquad L = \int_a^b \left|\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|\right| dt$$

すなわち, M は f の $z(t)$ の描く軌跡上での最大値であり, L は $z(t)$ の描く軌跡の長さである. このとき, 次の不等式が成立する:

$$\left|\int_a^b \left(u(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + v(x(t),y(t)))\frac{dy(t)}{dt}\right) dt\right| \leq \int_a^b ||f(z(t))|| \left|\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|\right| dt \leq ML. \quad \square$$

[8] **(正方形領域に対する Green の公式)** $K = [0,1] \times [0,1]$ と置き, K の開近傍 Ω を任意に取る. u, v は Ω 上の C^1 函数であるとする. 写像 $z : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する:

$$z(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{if } t \in [0,1], \\ (1,t-1) & \text{if } t \in [1,2], \\ (3-t,1) & \text{if } t \in [2,3], \\ (0,4-t) & \text{if } t \in [3,4]. \end{cases}$$

$z(t) = (x(t), y(t))$ と書くことにする. $z(t)$ は K の境界を正の向きにまわる曲線である. このとき, 次が成立する:

$$\int_0^4 \left(u(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + v(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\right) dt = \int_K \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy,$$
$$\int_0^4 \left(u(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} - v(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}\right) dt = \int_K \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad \square$$

この公式を Green の公式と呼ぶ. 以下のように省略した方が見易い:

$$\int_{\partial K} u\,dx + v\,dy = \int_K (v_x - u_y)\,dx\,dy, \qquad \int_{\partial K} u\,dy - v\,dx = \int_K (u_x + v_y)\,dx\,dy.$$

[9] 記号 dx, dy を基底にもつベクトル空間を $V_1 = \mathbb{R}\,dx + \mathbb{R}\,dy$ と書く. $\mathbb{R}^2$ の開部分集合 Ω 上の実数値 C^1 函数 u に対して, Ω 上の V_1 に値をもつ函数が $(x,y) \mapsto du(x,y) = u_x(x,y)\,dx + u_y(x,y)\,dy$ によって定義される. 記号 $dx \wedge dy$ を基底にもつベクトル空間を $V_2 = \mathbb{R}\,dx \wedge dy$ と書く. $V_1 \times V_1$ から V_2 への双線型写像 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ を次によって定める:

$$(dx,dx) \mapsto 0, \quad (dx,dy) \mapsto dx \wedge dy, \quad (dy,dx) \mapsto -dx \wedge dy, \quad (dy,dy) \mapsto 0.$$

このとき, Ω 上の C^1 実数値函数 u, v に対して, 次が成立する:

$$du \wedge dx + dv \wedge dy = (v_x - u_y)dx \wedge dy, \qquad du \wedge dy - dv \wedge dx = (u_x + v_y)dx \wedge dy. \quad \square$$

これは, 微分形式の理論のほんの一部を取り出すことによって作られた問題である. 例えば, $\omega = u\,dx + v\,dy$ 等と置くと, $d\omega = du \wedge dx + dv \wedge dy$ 等が成立し, Green の定理を次のように書くことができる:

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega.$$

この公式は n 次元多様体でも全く同様な形で成立する (Stokes の定理)[1].

3 正則函数

この節の目的は複素正則函数に関する基本的な結果をまとめることである. よって, 後の節において, この節の問題の結果は大抵の場合自由に用いて良い. 細いことは演習の時間に支持する.

$\mathbb{C}$ の複素座標を z と書き, 実座標 (x, y) を $z = x + iy$ によって入れる.

[10] 記号 dx, dy を基底にもつ複素ベクトル空間を $V = \mathbb{C}dx + \mathbb{C}dy$ と書き, $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 上の微分可能函数 f に対して, V に値をもつ次の函数を考える:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

これを f の外微分と呼ぶ. $dz, d\bar{z} \in V$ を $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$ と定める. 等式

$$df = A\,dz + B\,d\bar{z}$$

によって, Ω 上の函数 A, B を定義すると次が成立する:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right). \quad \square$$

そこで, 作用素 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, を次のように定義する:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ の定義はこの天下り的な公式を暗記するより, 上の問題の定式化の形で憶えた方が楽である. また, 微分形式の計算は非常に便利なので, 早目に修得するように努力した方が良い. df の定義を真似て ∂f, $\bar{\partial} f$ を次のように定義する:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

[11] $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 上の C^1 函数 f に対して以下の条件が互いに同値であることを証明せよ:

1. 任意の $z \in \Omega$ に対して次の極限が存在する:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

[1]微分形式 ω と積分領域 K, 外微分 $d\omega$ と境界 ∂K の双対性に注意せよ. Stokes の定理はトポロジーにおけるコホモロジーとホモロジーの双対性に関係しているのである.

2. Ω 上で, $\bar{\partial} f = 0$.
3. 実数値函数 u, v によって, f を $f = u + iv$ と表示すると Ω 上で次が成立する:
$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$
4. 実数値函数 u, v によって, f を $f = u - iv$ と表示すると Ω 上で次が成立する:
$$v_x - u_y = 0, \qquad u_x + v_y = 0.$$

そして, これらの条件のどれかが成立すれば, (1) の極限は $\frac{\partial}{\partial f} z(z)$ に一致する. □

この問題の条件をみたす函数 f を Ω 上の正則函数 (holomorphic function on Ω) と呼ぶ. 正則函数を特徴付けている微分方程式 (2) または (3) を Cauchy-Riemann の方程式と呼ぶ. (4) と Green の公式の関係に注意せよ.

上の問題において f は C^1 函数であることを仮定した. しかし, C^1 性を仮定せずに正則函数を定義する流儀もある. (もちろん, C^1 性を仮定する定義と結果的には同値になる.) 例えば, [高木] の第 5 章[2] はそのような流儀で書かれている. その流儀の方が数学的な美しさにおいて勝るのであるが, 実用的に C^1 性を仮定しても不都合が生じることはない.

[12] Ω は $\mathbb{C}$ の開部分集合であるとし, f は Ω 上の正則函数であるとし, f は Ω のどの点でも 0 にならないと仮定する. このとき, $g = 1/f$ は Ω 上の正則函数を定める. □

[13] Ω は $\mathbb{C}$ の連結開部分集合であり, f は Ω 上の正則函数であるとする. このとき, f が定数函数であるための必要十分条件は, Ω のすべての点で $df/dz = 0$ が成立していることである. □

[14] Ω は $\mathbb{C}$ の連結開部分集合であり, f は Ω 上の正則函数であるとする. このとき, f が定数函数であるための必要十分条件は, $|f|$ が定数函数であることである. □

[15] Ω は $\mathbb{C}$ の連結開部分集合であり, f は Ω 上の定数ではない正則函数であるとする. $\Omega^* = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in \Omega \,\}$ と置く. このとき, $g(z) = f(\bar{z})$ と置くと, g は Ω^* 上の函数であるが, 正則函数にはならないことを示せ. □

[16] 非負の整数 n に対して $f_n(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ と置き, 負の整数 n に対して $f_n(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\})$ と置く. f_n がその定義域上の正則函数であることを定義に基き直接証明せよ. □

[17] 任意の複素解析函数は正則函数であることを示せ. □

[18] $f(z) = |z|^2$ $(z \in \mathbb{C})$ と置く. f は $\mathbb{C}$ 上の実解析函数であるが, 正則函数ではないことを示せ. □

---

[2][高木] の第 5 章はたったの 67 頁しかない. しかし, 初等函数とガンマ函数の理論を含んでおり内容的には豊かである. しかも, その解説は簡潔で美しい.

以下, K は滑らかに三角形分割可能であるような $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合であるとする. K に対する Green の定理を以下の問題の解答において自由に用いて良い. Ω は K の開近傍であるとし, K の内部を U と表わす. (面倒なら, $K = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in [0,1] \,\}$ と仮定して問題を解いても良い. この場合, $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1) \,\}$ である.)

[19] **(Cauchy の積分定理)** f が Ω 上の C^1 函数であるとき, 次が成立する:

$$\int_{\partial U} f\,dz = \int_U \bar\partial f \wedge dz.$$

特に, f の U への制限が正則函数ならば次が成立する:

$$\int_{\partial U} f\,dz = 0.$$

正則函数に関するこの結果は, Cauchy の積分定理と呼ばれている. □

ヒント: Green の公式を使う. $dz \wedge dz = 0$ より, $d(f\,dz) = df \wedge dz = \bar\partial f \wedge dz$. が成立する[3].

[20] **(正則函数の不定積分)** Ω は $\mathbb{C}$ の中の開円板であるとし, f は Ω 上の正則函数であるとする. 固定された点 $a \in \Omega$ から任意の点 $z \in \Omega$ への滑らかな道 γ を取り, 積分

$$F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

を考える. このとき, $F(z)$ は積分経路 γ の取り方によらず a, z のみによって決まり, さらに, $F'(z) = f(z)$ が成立している.

[21] **(Cauchy の積分公式)** f が Ω 上の C^1 函数であるとき, 次が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_U \frac{\bar\partial f(\zeta) \wedge d\zeta}{\zeta - z}\right) \qquad \text{for} \quad z \in U$$

特に, f の U への制限が正則函数ならば次が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \qquad \text{for} \quad z \in U.$$

この公式は Cauchy の積分公式 (もしくは積分表示) と呼ばれている. □

ヒント: まず, z を中心とする十分小さな半径 $\varepsilon > 0$ を持つ開円板 $U_\varepsilon(z)$ を取り, $K - U_\varepsilon(z)$ に対する Green の公式を考え, $\varepsilon \to 0$ の極限を考える.

[22] **(Cauchy の係数評価式)** $R > 0$ に対して, $D_R = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \,\}$ と置く. f は D_R 上の正則函数であるとする. D_R 上で $|f| \le M$ が成立していると仮定する. このとき, $0 < r < R$ ならば,

$$\sup_{z \in D_r} \left| \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} f(z) \right| \le \frac{Mr}{(R-r)^{n+1}}. \quad \square$$

[3] ここで微分形式の記号を用いているが, 解答において微分形式の概念を用いることを強制するつもりはない. しかし, 微分形式の概念を用いた方が証明はもちろん簡単になる.

[23] 任意の正則函数は複素解析函数であることを示せ. □

[24] $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数だが実解析的でない函数を構成せよ. □

ヒント: $\mathbb{R}$ 上の空でないコンパクトな台をもつ C^∞ 函数を構成せよ.

[25] f は Ω 上の正則函数であると仮定する. このとき, 任意の $z \in U$ に対して,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad \square$$

[26] (Morera の定理) Cauchy の積分定理の逆が成立することを示せ. □

[27] f は U の境界 ∂U 上の任意の連続函数であるとし,

$$u(z) = \int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad \text{for} \quad z \in U$$

と置く. このとき, u は U 上の正則函数である. しかも, u は $K = \overline{U}$ 上に連続函数として一意的に拡張され, その境界上の値は f と一致する. □

この結果は, 次の境界値問題の解法を与えている:

$$\bar{\partial}u = 0 \quad \text{on } U, \qquad u|_{\partial U} = f.$$

[28] 正則函数列が一様収束するとき, その収束先もまた正則函数になることを示せ. □

実解析函数に対してはこのような簡明な結果は得られない. (次の問題を見よ.)

[29] $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ と置く. $\mathbb{R}$ 上の多項式函数の列で $[-1, 1]$ 上 f に一様収束するものを構成せよ. □

実は, $\mathbb{R}$ 内の任意の閉区間上の連続函数は多項式函数で一様近似されることが知られている (Weierstrass の近似定理). もちろん, この結果を認めれば上の問題の解答は trivial になってしまう. これでは演習にならないので, 直接に具体的な多項式函数の列を見付けて欲しい[4].

4 解析函数の孤立特異点

この節の問題は Laurent 展開, 除去可能特異点, 極 (pole), 真性特異点, 有理型函数などの言葉の復習のために挿入した. これらの言葉は後で自由に使われるであろう.

$a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R$ とし, 円環領域 A を

$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R \,\}$$

と定める. $r < \rho < R$ なる ρ に対する A 内の曲線 $\rho e^{it} + a$ $(0 \le t \le 2\pi)$ を γ と書く.

[4]実は逆にそのような函数は Stone-Weierstrass の近似定理の一般の場合を証明するために役に立つ. (例えば, [Lang] の第 3 章を見よ.)

[30] (Laurent 展開) A 上の正則函数 f に対して,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}$$

と置く. このとき, 任意の $z \in A$ に対して,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$

が成立する. 右辺の Laurent 級数は A において広義一様絶対収束している. さらに, すべての $n<0$ に対して $c_n = 0$ であるならば, この Laurent 級数 (実際には巾級数になる) は $|z-a|<R$ において収束する. □

[31] 次の級数は A において一様絶対収束していると仮定する:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n.$$

このとき, f は A 上の正則函数を定める. さらに, 次が成立している:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = c_n \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

特に,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = c_{-1}.$$

である. つまり, a にまわりを正の向きに一周する経路によって f を積分すると $(z-a)^{-1}$ の係数が得られるのである. この結果の証明自体は非常に簡単なのであるが, Cauchy の積分定理と合わせて用いることによって, 定積分の計算に対して極めて強力な方法を与える.

以下, $r=0$ の場合を考える. $R>0$ とし,

$$D = \{\, z\in\mathbb{C} \mid |z-a|<R \,\}, \qquad D^* = \{\, z \in D \mid z \neq a, \},$$

と置き, f は D^* における正則函数であるとする. このとき, a を f の孤立特異点と呼ぶ. f が D 上の正則函数に拡張可能なとき, a は除去可能特異点であると言う. f の a を中心とする Laurent 展開が

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{(z-a)^{n-2}} + \cdots, \qquad (n>0, \quad c_{-n}\neq 0)$$

の形になるとき, a は f の n 位の極 (pole) であると言う. これに対し, Laurent 展開の中に (0 ではない) 負巾の項が無限個出てくるとき, a は f の真性特異点であると言う.

[32] $f(z) = \exp(1/z)$ $(z \in \mathbb{C}-\{0\})$ と置く. $f(z)$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求めよ. $z=0$ は f の真性特異点である. f は $\mathbb{C}-\{0\}$ において決して 0 にならない. しかし, 任意の $\varepsilon>0$ と任意の $c\in\mathbb{C}-\{0\}$ に対して, ある $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ が存在して, $|z|<\varepsilon$ かつ $f(z)=c$ をみたす. □

[33] $f(z) = \sin(1/z)$ $(z \in \mathbb{C}-\{0\})$ と置く. $f(z)$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求めよ. $z=0$ は f の真性特異点である. このとき, 任意の $\varepsilon>0$ と任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して, ある $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ が存在して, $|z|<\varepsilon$ かつ $f(z)=c$ をみたす. □

これで次のことがわかった．$\exp(1/z)$ の取り得る値としては例外値 0 が存在するが，$\sin(1/z)$ に対してそのような例外値は存在しない．

[34] g は D 上の正則函数であり，a は g の k 位の零点であるとする．このとき，a は $f = 1/g$ の k 位の極である．□

[35] a が f の $k > 0$ 位の極ならば，$z \to a$ のとき $|f| \to \infty$ となる．□

[36] (Weierstrass の定理) a は f の真性特異点であると仮定する．このとき，a に収束する点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ で $|f(z_n)| \to \infty$ をみたすものが存在する．また，任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して，a に収束する点列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ で $f(z_n) \to c$ をみたすものも存在する．□

[37] f が D^* 上有界なとき，a は f の除去可能特異点である．□

今度は $a = \infty$ (無限遠点) の場合について考えよう．$R > 0$ とし，f は $\{|z| > R\}$ 上の正則函数であるとする．このとき，f は変数変換 $z = 1/w$ によって $\{0 < |w| < 1/R\}$ 上の正則函数であるとみなせる．すなわち，$g(w) = f(1/w)$ と置くと，g は $\{0 < |w| < 1/R\}$ 上の正則函数である．点 0 が g の除去可能特異点，k 位の零点，k 位の極，真性特異点であるとき，それぞれの場合に応じて，∞ は f の除去可能特異点，k 位の零点，k 位の極，真性特異点であると言う[5]．

[38] (Liouville の定理) $\mathbb{C}$ 上の有界な正則函数は定数函数に限る．□

[39] (代数学の基本定理) 1 次以上の任意の複素係数多項式 f に対して，$f(a) = 0$ をみたすある複素数 a が存在する．したがって，f が n 次のとき，f は $f(z) = c\,(z - a_1) \cdots (z - a_n)$ $(c, a_k \in \mathbb{C},\ c \neq 0)$ と表わされる．□

ヒント: 結論を否定し，$1/f$ に Liouville の定理を適用すると矛盾が出る．

[40] f は $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_N\}$ 上の正則函数であり，各々の $a_1, \dots, a_N, \infty$ は f の真性特異点ではないと仮定する．このとき，$f(z)$ は z の有理函数になる．(すなわち，多項式の分数の形で表わされる．)

真性特異点を持たない函数を有理型函数 (meromorphic function) と呼ぶ．すぐ上の結果は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の有理型函数は有理函数 (rational function) に限ることを主張している．このことは，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ がコンパクトであることに深く関係している[6]．

f が $1\mathbb{C}$ 内の開集合 Ω 上の有理型函数であるとは，f が Ω からある離散部分集合を除いた所で定義された正則函数であって，除いた離散部分集合の任意の点が f の極もしくは除去可能特異点になっていることである．

---

[5] 複素平面に無限遠点を付け加えた $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 面としてとらえることによって，∞ も特別な点ではなく他の点と同様に考えることができる．

[6] これは，GAGA の原理の最も簡単な場合である．

5 最大値の原理

同じ領域で定義された 2 つの正則函数 (もしくは有理型函数) が定数倍を除いて等しいことを示すためには, その比が定数函数になることを示せば良い. これはあたり前のことであるが応用上重要な考え方である. 次のような方法を用いることがある:

(1) まず, 2 つの有理型函数の比が正則函数に延びることを示す. (局所的に Laurent 展開して比を取り, 負巾の項が出てこないことを示せば良い.)

(2) 次に, 最大値の原理を用いて, その正則函数が実は定数であることを示す.

[**41**] **(最大絶対値の原理)** Ω は $\mathbb{C}$ の連結開部分集合であるとし, f は Ω 上の正則函数であるとする. このとき, $|f|$ が Ω において最大値をとるならば, f は定数函数である. □

[**42**] $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ をみたす $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ を任意に与える. f は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり,

$$f(z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2) = f(z) \qquad \text{for} \quad z \in \mathbb{C},\ \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

をみたしていると仮定する. このとき, f は定数函数である. □

この問題の性質を持つ $\mathbb{C}$ 上の有理型函数を楕円函数と呼ぶ[7]. よって, 問題の結果はいたるところ正則な楕円函数は定数函数に限ることを表わしている. 一般にコンパクト Riemann 面上の大域的に定義された正則函数は定数函数に限る.

Schwarz の定理

[**43**] **(Schwarz の定理)** 開円板 $D = \{|z| < R\}$ 上の正則函数 f は $f(0) = 0$ および $|f(z)| \le M$ $(z \in D)$ をみたしていると仮定する. このとき, 任意の $z \in D$ に対して, 次の不等式が成立している:

$$|f(z)| \le \frac{M}{R}|z|.$$

さらに, ある一点 $z_0 \in D - \{0\}$ おいて等号が成立していれば, ある実数 θ が存在して, f は次のように表わされる:

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\theta} z \qquad \text{for} \quad z \in D. \quad \square$$

[**44**] **(Vitali の定理)** Ω は $\mathbb{C}$ の連結開集合であり, $(f_n)_{n=1}^\infty$ は Ω 上の正則函数の列であるとし, 次を仮定する:

1. $(f_n)_{n=1}^\infty$ は一様有界である. すなわち, ある定数 $M > 0$ で次をみたすものが存在する:

$$|f_n(z)| \le M \qquad \text{for} \quad z \in \Omega,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2. Ω の内部に集積点を持つ Ω の部分集合 E が存在して, 各々の $\zeta \in E$ に対して数列 $(f_n(\zeta))_{n=1}^\infty$ が収束している.

[7] この定義の仕方は天下りに過ぎると感じる方は多いと思われる. 講義の方では, 歴史的な背景にも触れ, 楕円函数のより自然な導入を目指すはずである.

このとき, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は Ω において, 広義一様収束する.

ヒント: (1) $\Omega' = \{ z \in \Omega \mid z$ のある近傍で函数列 (f_n) は一様収束する $\}$ と置く. $\Omega = \Omega'$ を示したいのだが, Ω の連結性より, Ω' が Ω の中で開かつ閉であり空でないことを示せばよい. 開であることは明らかなので, 閉でありかつ空でないことを示すことが問題になるが, Ω' の集積点 a を中心とする十分小さな円板上で (f_n) が一様収束することを示せば十分である (一致の定理の証明で使った論法). (2) $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n}(z-a)^k$ と Taylor 展開する. k に関する帰納法によって, すべての k に対して $(c_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示す. まず, $f_n - c_{0,n}$ に対して Schwarz の定理を適用すると, 数列 $(c_{0,n})_{n=1}^{\infty}$ が収束していることが確かめられる. ($\mathbb{C}$ の完備性を使う.) $f_{1,n}(z) = (f_n - c_{0,n})/(z-a)$ と置くと, $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ にも同様の議論を適用できることがわかる. 以下これを繰り返えせばよい. (3) $(c_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ の収束先を c_k と書く. $c_{k,n}$ に対する Cauchy の係数評価式より c_k の評価が得られる. それを使うと, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ が a の近傍で収束することがわかる. (4) 最後に, a の近傍で (f_n) が f に一様収束することを示す.

6 留数

f が領域 $0 < |z-a| < r$ における正則函数であるとき, f は

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n \qquad \text{if} \quad 0 < |z-a| < r.$$

と Laurent 展開される. このとき, $(z-a)^{-1}$ の係数 c_{-1} を 微分形式[8] $\omega = f(z)\,dz$ の $z=a$ における留数 (residue) と呼び,

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)\,dz = c_{-1}$$

と表わす. さらに, $f \neq 0$ かつ $z=a$ が f の真性特異点ではないとき, c_n が 0 にならないような最小の n を函数 f の $z=a$ における (零の) 位数と呼び $\operatorname{ord}_a f$ と表わす. (a が f の極のとき, $\operatorname{ord}_a f$ は負の整数になる.)

[45] **(留数の計算の仕方)** f が $0 < |z-a| < r$ における正則函数であり, $z=a$ は f の n 位の極であるとする. このとき, 次が成立する:

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)\,dz \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z) \right).$$

特に, $n=1$ のとき,

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)\,dz \quad = \quad \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \quad \square$$

この結果は実際に留数を計算するときに有用である.

以下, K は滑らかに三角形分割可能であるような $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合であるとする. 以下の問題の解答において, K に対する Cauchy の積分公式を自由に用いて良い. Ω は K の任意の開近傍であるとし, K の内部を U と表わす.

[8] 函数 $f(z)$ の「留数」は座標不変な概念ではないが, 微分形式の留数は座標不変な概念である.

[46] S は U の有限部分集合であるとし, f は $\Omega - S$ 上の正則函数であるとする. このとき, 次が成立する:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(z)\,dz \quad = \quad \sum_{a\in S}\operatorname{Res}_{z=a} f(z)\,dz. \quad \square$$

この公式は簡単だが極めて有用である.

[47] f は Ω 上の有理型函数であるとし, Ω の各連結成分の上で恒等的には 0 でないとし, ∂U 上に極と零点を持たないと仮定する. このとき, 次が成立する:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} \quad = \quad \sum_{a\in U}\operatorname{ord}_a f. \quad \square$$

このように, 領域内の零点の位数 (極はマイナスで数える) の和も周回積分によって与えられるのである.

[48] f は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, 無限遠点は f の高々極であると仮定する. (すなわち, 無限遠点は f の真性特異点ではないと仮定する.) このとき, 以下が成立することを示せ:

(1) f の零点および極の個数は高々有限個である.

(2) f の $\mathbb{C}$ 内の極における留数と無限遠点における留数を全て足し合わせると 0 になる.

(3) f の $\mathbb{C}$ 内の零点および極における (零の) 位数と無限遠点における (零の) 位数を全て足し合わせると 0 になる. $\square$

[49] (偏角の原理) f は Ω 上の有理型函数であるとし, Ω の各連結成分の上で恒等的には 0 でないとし, ∂U 上に極と零点を持たないと仮定する. このとき, 次が成立する:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U} d\arg f \quad = \quad N - P.$$

ここで, N は f の U における零点の個数であり, P は U における極の個数である. ただし, 零点と極の個数は重複度を込めて数えるものとする. $\square$

ヒント: $df/f = d\log f = d\log|f| + i\,d\arg f$.

[50] (Rouché の定理) f と g は Ω 上の正則函数であり, ∂U 上で $|g| < |f|$ が成立していると仮定する. このとき, $f+g$ と f は U において同数の零点を持つ. ただし, 零点の個数は重複度を込めて数えるものとする. $\square$

[51] Rouché の定理を用いて, 代数学の基本定理を証明せよ. $\square$

これ以後しばらく複素函数論の復習を続け, 楕円函数論そのものの演習には入らない. しかし, 三角函数の無限部分分数展開や無限乗積展開など, 後で楕円函数においても扱われるであろう進んだ項目および楕円テータ函数と Euler-Riemann のゼータ函数を扱う. (楕円テータ函数を扱うあたりから楕円函数論そのものの演習に入ったとみなせると思う.) 特に解いてもらいたいのはゼータ函数とテータ函数に関係した問題であり, * の印を付けておいた. * の印の付いた問題を全て解けば, Euler-Riemann のゼータ函数の基本性質の証明が得られるであろう.

[52] **(留数の座標不変性)** f は $a \in \mathbb{C}$ の近傍から a を除いたところで定義された複素解析函数であるとし, ϕ は a の近傍で定義された解析函数で $\phi'(a) \neq 0$ を満たしているものとする. このとき,

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)\,dz = \operatorname{Res}_{w=\phi(a)} f(\phi(w))\,d\phi(w).$$

が成立することを示せ. ここで, $d\phi(w) = \frac{d}{d\phi(w)} w\,dw$ である. □

7 正則函数の巾級数展開の収束半径

[53] f は $a \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $R > 0$ の開円板 D 上の正則函数であるとする. このとき, f の a を中心とする巾級数展開は D 上で絶対収束する. 特に, その収束半径は R 以上である. □

[54] S は $\mathbb{C}$ の空でない離散部分集合であるとする. f は $\mathbb{C} - S$ 上の正則函数であり, S は f の除去可能特異点を含まないと仮定する. このとき, $a \in \mathbb{C} - S$ を中心とする f の巾級数展開の収束半径は, a から S への距離に等しい. (a から S への距離とは a に最も近い S の点と a の間の距離のことである.) □

[55] N は正の整数とし, $f(z) = (1-z)^{-N}$ と置く. f の 0 における巾級数展開を求め, その収束半径が 1 であることを証明せよ. □

8 定積分の計算

[56] e^{iz}/z に対する Cauchy の積分定理を利用して, 次の公式を証明せよ:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

[57] $f(x) = \sin x / x$ は $(0, \infty)$ 上で (Lebesgue の意味で) 積分可能ではないことを示せ. □

この例は, 広義積分可能であるが, Lebesgue 積分可能でない函数の典型的な例である[9].

[58] **(Fresnel の積分)** まず,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ. この結果および e^{-z^2} に対する Cauchy の積分定理を利用し, 次の公式を証明せよ:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x^2)\,dx \quad = \quad \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x^2)\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \square$$

---

[9] 絶対収束しないが条件収束する級数に関しては Abel の変形法が重要である. [高木] の p.153 を見よ. Abel の変形法は, 積分の場合にも容易に一般化される. 級数に対する Abel の変形法を積分に焼き直したものは部分積分になる. 不等式の評価において部分積分を使うことは常套手段である.

[59] $r \geq 0$ に対して,

$$\int_0^\pi \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\,d\theta \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \leq r \leq 1, \\ 2\pi \log r & \text{if} \quad r > 1 \end{cases}$$

が成立することを示せ. □

ヒント: $0 \leq r < 1$ の場合は, 原点を中心とした半径 r の円と $\log(1-z)/z$ に対する Cauchy の積分定理を考えよ. $r > 1$ の場合は $r < 1$ の場合に帰着される.

[60] まず,

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{dz}{1+z^2} \quad = \quad \frac{1}{2i}$$

を示せ. この結果を用いて, 次の公式を証明せよ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad = \quad \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

[61] まず,

$$\mathrm{Res}_{z=ai} \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+a^2} \quad = \quad \frac{e^{-a}}{2ai}$$

を示せ. この結果を利用して, $a > 0$ に対する次の公式を証明せよ:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx \quad = \quad \frac{\pi e^{-a}}{2a}. \quad \square$$

[62] $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad = \quad \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad = \quad \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}. \quad \square$$

[63] $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta\,d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\pi a^n}{1-a^2} & \text{if} \quad |a| < 1, \\ \dfrac{\pi}{a^n(a^2-1)} & \text{if} \quad |a| > 1. \quad \square \end{cases}$$

ヒント: $|a| < 1$ の場合は, $|t| < 1$ とし, 単位円 γ に関する積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(tz-1)(z-a)(az-1)}$$

を計算し, t に関する巾級数展開の係数を見る. $|a| > 1$ の場合は $|a| < 1$ の場合に帰着する.

[64] $\Gamma(R)$ は次によって定められる半径 $R > 0$ の半円であるとする:

$$\Gamma(R) := \{\, Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi \,\}.$$

この曲線の向きを 1 から -1 への左回りと定める. $M>0$, $k>1$ とし, $F(z)$ は絶対値が十分に大きな複素数 z の連続函数であるとする. $F(z)$ は次の不等式を満たしていると仮定する:

$$|F(z)| \le M/|z|^k \qquad (|z| \text{ は十分大きいとする}).$$

このとき, 次が成立することを示せ:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma(R)} F(z)\,dz = 0. \quad \square$$

[65] $P(z)$ は z の多項式函数であるとし, その次数は d, 最高次の項の係数は $a\neq 0$ であるとする. このとき, 次の不等式が成立する:

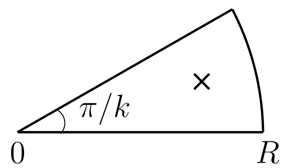
$$|P(z)| \ge |a||z|^d/2 \qquad (|z| \text{ は十分大きいとする}). \quad \square$$

以上の二つの結果は以前の定積分の計算にも以下の計算にも利用できる.

[66] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$ $\square$

[67] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$ $\square$

[68] 正の整数 k に対して, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2k}+1} = \frac{\pi}{2k\sin\dfrac{\pi}{2k}}.$ $\square$ ヒント:



[69] $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$ $\square$

$F(X,Y)$ が X, Y の有理式であるとき, $\displaystyle\int_a^b F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ の型の定積分の計算は, $z=e^{i\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ と置くことによって, z の有理式の複素線積分の計算に帰着できる.

[70] $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = \pi.$ $\square$

[71] a, b はともに実数で $a>|b|$ を満たしているとする. このとき,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}. \quad \square$$

この公式の両辺を a で偏微分することによって, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^n}$ に関する公式が得られることに注意せよ.

[72] $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}.$ $\square$

[73] $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{5-3\cos\theta}=\frac{\pi}{6}$. □

[74] $F(X,Y)$ は有理数係数の有理式であるとする. (すなわち, $F(X,Y)\in\mathbb{Q}(X,Y)$.) 任意の $(x,y)\in\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\,\}$ に対して, $F(x,y)\neq 0$ であると仮定する. このとき, ある有理数 A が存在して,

$$\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=A\pi. \quad \square$$

説明の補足: 複素数 α が代数的数 (algebraic number) であるとは, ある 0 でない有理数係数の多項式 $f(T)\in\mathbb{Q}(T)$ が存在して, α が f の根になっている (*i.e.* $f(\alpha)=0$) ことである. (係数の分母をはらうことによって, $f(T)$ として有理整数係数の多項式がとれる.) 例えば, $\sqrt{2}$ や $\sqrt{-3}$ などは代数的数である. 代数的数の全体は体をなすことが知られている[10]. 代数的数でない複素数を超越数 (transcendental number) と呼ぶ. 円周率 π は超越数であることが知られている[11].

参考: 函数 $f(z)$ (一般には多価) が代数函数 (algebraic function) であるとは, z の有理函数係数の w の多項式函数 $G(z,w)\in\mathbb{C}(z)[w]$ が存在して $G(z,f(z))=0$ が成立することである. (分母をはらうことによって $G(z,w)$ として z, w の多項式がとれる.) 例えば, $\sqrt{z^3+z+1}$ は z の代数函数である. 代数函数でないような函数を超越函数 (transcendental function) と呼ぶ. 例えば, e^z は超越函数である. 以上の定義からわかるように, 代数函数と超越函数の定義は代数的数と超越数の定義に酷似している. 代数的数と超越数の定義における有理数体 $\mathbb{Q}$ を有理函数体 $\mathbb{C}(z)$ に置き換えることによって, 代数函数と超越函数が定義されるのだと考えることができる. ちなみに, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の函数における類似物は多項式環 $\mathbb{C}[z]$ である. 数と函数の類似をたどることは, 数と函数の双方を理解する上で大きな助けになることが知られている. 代数函数は抽象的にはコンパクト Riemann 面上の有理型函数であるとみなせるので, 代数函数の理論は幾何学的には Riemann 面の理論として定式化される. その意味で楕円函数は有理函数ではない代数函数で最も簡単なものである. Riemann 面に関する簡単なことは後の節で扱うことになるであろう. 代数函数の理論に関する詳しい理論展開を知りたい人は名著 [岩澤] を読むのが良い. コンパクト Riemann 面に関する教科書としては [Gun] が読み易いと思う[12].

[75] $0<p<1$ のとき, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^p}{x+1}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$. □

[76] $-1<a<1$ のとき, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx=\frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)}$. □

[77] $a>0$, $t>0$ に対して, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{tz}}{\sqrt{z+1}}\,dz=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$. □

[10] 証明はそれほど難しくない. 体の Galois 理論の授業において証明されるであろう. 暇があれば直接の証明を試みてみよ. (ヒント: 線型代数.)

[11] 円周率が超越数であることの証明は難しい.

[12] この本には層のコホモロジー論の良い入門が書いてある. コホモロジー論の類の道具は実際に使ってみなければ, そのありがたみがわからないところがある. コンパクト Riemann 面はその応用先として最も簡単なものであり, 層のコホモロジーとはどういうものかを知るためには非常に良い題材であると思う.

ヒント: 以下の図の積分経路を用いると良い. なお [**77**] の計算において次の公式を用いて良い:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tu}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad (t>0, \quad u=x^2 \text{ と変数変換}).$$

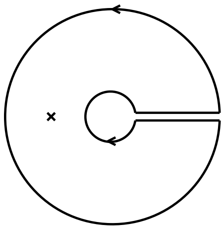


図 8.1: [**75**] のヒント

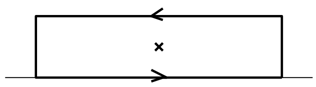


図 8.2: [**76**] のヒント

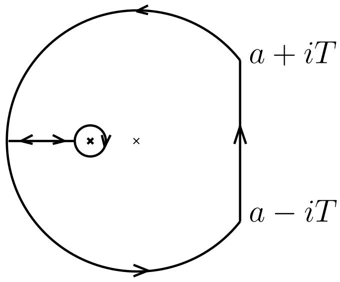


図 8.3: [**77**] のヒント

9 Euler-Riemann のゼータ函数の定義とその簡単な性質

[**78**] 任意の実数 $a>1$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ は $\operatorname{Re} s \geq a$ で一様絶対収束することを示せ[13]. □

そこで, $\{\, s\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1 \,\}$ 上の函数 $\zeta(s)$ を次によって定義する:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \qquad \text{if} \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

これを Euler-Riemann のゼータ函数と呼ぶ. (今のところ $\zeta(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ における函数として定義されたが, 実は複素平面全体の上の有理型函数に解析接続される. その極は $s=1$ のみでその位数も留数も 1 である.) 一般に, $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ の形の級数を Dirichlet 級数と呼ぶ.

[**79**] **(Euler 積)** $\operatorname{Re} s > 1$ において次の等式が成立していることを示せ:

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}.$$

右辺の素数全体にわたる無限積を Euler 積と呼ぶ. さらに, この結果を用いて, $\operatorname{Re} s > 1$ において, $\zeta(s) \neq 0$ となることを示せ. このことは Dirichlet 級数によるゼータ函数の定義からは想像もできないことであろう. □

[**80**] 級数 $\zeta(1) = \sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ が無限大に発散することを示せ. さらに, 級数 $\displaystyle\sum_{p:\text{素数}} p^{-1}$ が無限大に発散することを示せ. □

[13] 正の実数 t と複素数 z に対して, $t^z = e^{z\log t}$ と定義する. $\operatorname{Re} s$ は複素数 s の実部を表わす.

素数が無限個あることは容易に証明されるのだが, この結果は, それよりも明らかに良い結果である. なぜなら, 単に無限個あるというだけでは, 素数分の 1 の和が無限大に発散することは出てこないからである.

ゼータ函数と素数の全体の間には Euler 積以外にも色々な関係が存在している. それらを追及することによって, 単に素数が無限個存在するだけではなく, 自然数全体の中に素数がどのような密度で分布しているかまで知ることができるのである. 例えば, 素数の分布に関係した未解決問題として名高い Riemann 予想と呼ばれる大変深い予想がある. それは次のような予想である.

予想 9.1 (Riemann) $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$ かつ $\zeta(s) = 0$ ならば $\operatorname{Re} s = 1/2$ であろう.

これだけ述べてもこの予想の面白さも難しさもわからないと思うが, ひとまず, 数論や幾何学において色々なゼータ函数が定義されていて広くて深い数学に発展していることを注意しておく.

[**81**] Riemann 予想を証明もしくは反証せよ. □

もちろん, これは冗談であるが, もしもこの問題が解けた場合は, この演習の単位が直ちにもらえることは言うまでもない.

10 Bernoulli 数と Bernoulli 多項式

[**82**] **(Bernoulli 数)** 数列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の式によって定義する:

$$\frac{z}{e^z - 1} \quad = \quad 1 - \frac{z}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n z^{2n}}{(2n)!}.$$

1. 実際に左辺が右辺の形に展開されることを示せ.

2. B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 を計算せよ.

3. 次が成立することを示せ:

$$\binom{2n+1}{2} B_1 - \binom{2n+1}{4} B_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{2n} B_n = n - \frac{1}{2}.$$

4. B_n が有理数になることを証明せよ. □

この問題において定義された数 B_n は Bernoulli 数と呼ばれている.

[**83**] $z \cot z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \pi)$. □

[**84**] $\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n z^{2n-1}}{(2n)!} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$. □

[85] (Bernoulli 多項式) 多項式 $B_n(x)$ を次の式によって定義する:

$$\varphi(x,z) \quad = \quad \frac{ze^{xz}}{e^z-1} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

$B_n(x)$ は Bernoulli 多項式と呼ばれている.

1. $B_n(x) = x^n - \dfrac{n}{2}x^{n-1} - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{[n/2]} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu} B_\nu x^{n-2\nu}$. ここで, $[n/2]$ は $n/2$ 以下の最大の整数を表わす.

2. $\varphi(x+1,z) = \varphi(x,z) + ze^{xz}$ を用いて, $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ を示せ.

3. $S_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + k^n$ と置く. このとき, 次が成立する:

$$\begin{aligned} S_n(k) &= \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(k) - B_{n+1}(0)\right) + k^n \\ &= \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{k^n}{2} - \sum_{\nu=1}^{[(n+1)/2]} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} k^{n-(2\nu-1)}. \end{aligned}$$

   このように, $S_n(k)$ は k の Bernoulli 数を用いて表わされる k の多項式になるのである. □

11 複素函数の部分分数展開と無限乗積展開

以下の問題は主に [高木] などを参考にして作った.

[86] (無限乗積の絶対収束) $(u_n)_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する複素数列であるとし, 次の無限積を考える:

$$(*) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+u_n)$$

このとき, 以下が成立する:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ が収束するとき, 無限積 $(*)$ も収束する. (したがって, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ も収束する.) このとき, 無限積 $(*)$ は絶対収束すると言う. 以下, $(*)$ の絶対収束性を仮定する.

2. このとき, 無限積 $(*)$ の収束先は積の順序によらない.

3. さらに, 全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $1 + u_n \neq 0$ であるとき, 無限積 $(*)$ の収束先は決して 0 にはならない.

[87] $|z| < 1$ のとき, $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = \frac{1}{1-z}$. □

[88] (有理型函数の部分分数展開) f は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, (簡単のため) その全ての極 $a_1, a_2, \dots$ $(0 < |a_1| \le |a_2| \le \cdots)$ は 1 位であるとし, $A_n := \mathrm{Res}_{z=a_n} f(z)\,dz$ と置く. 以下を満たす閉曲線の列 $C_1, C_2, \dots$ が存在すると仮定する:

(a) C_n は f の極を通らず, C_n はその内側に $a_1, \dots, a_n$ を含み, 他の極を含まない.

(b) C_n の原点からの最短距離を R_n, C_n の長さを L_n と書くと, $n \to \infty$ のとき $R_n \to \infty$ であり, $L_n = O(R_n)$.

(c) 非負の整数 p が存在して, $n \to \infty$ のとき $\sup |f(C_n)| = o({R_n}^{p+1})$.

このとき, 次が成立する:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)\, z^k}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{{a_n}^{k+1}} \right). \quad \square$$

ヒント: 次の積分が $N \to \infty$ のとき 0 に収束することを示せば良い:

$$I_N := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} = \frac{f(z)}{z^{p+1}} - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)\, z^{k-p-1}}{k!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{{a_n}^{p+1}(a_n - z)}.$$

[89] (正則函数の無限乗積展開) g は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であるとし, (簡単のため) その全ての零点 $a_1, a_2, \dots$ $(0 < |a_1| \le |a_2| \le \cdots)$ は 1 位であるとする. このとき, $f := g'/g$ と置くと, f は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, その極の全体は $a_1, a_2, \dots$ に一致し, 全ての極は 1 位であり, 全ての留数は 1 である. さらに, f は問題 [**88**] の (a),(b),(c) を満たしていて, かつ $p = 0$ であると仮定する. このとき, 次が成立する:

$$g(z) = g(0) \exp\left(z \frac{g'(0)}{g(0)} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp\left(\frac{z}{a_n} \right) \right\}. \quad \square$$

ヒント: f の極を通らないように 0 から z までの積分路 Γ を取ると,

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^z d \log g(\zeta) = \log g(z) - \log g(0).$$

[90] $\cot z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad \square$

[91] $\sin z = z \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right). \quad \square$

ヒント: すぐ上の問題の $\cot z$ に関する結果に $\dfrac{d}{dz} \log \dfrac{\sin z}{z} = \cot z - \dfrac{1}{z}$ を適用すれば良い. 直接問題 [**89**] を用いてもよい.

[92] $\cos z = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n - 1/2)^2\pi^2} \right). \quad \square$

[93] $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad \square$

[**94**] 上の結果を利用して, $1/\cos z$ と $\tan z$ の部分分数展開を求めよ. □

[**95**] $\operatorname{cosec}^2 z = \dfrac{1}{\sin^2 z} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$. □

[**96**] $\dfrac{1}{e^z-1} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + 2z\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ □

[**97**] Euler-Riemann のゼータ函数を $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $(\operatorname{Re} s > 1)$ と書く. このとき, 次が成立する:

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n} \qquad (|z| < \pi).$$

この結果と問題 [**83**] の結果を比べると次の公式を得る:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}B_n}{(2n)!}\pi^{2n} \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

ここで, B_n は Bernoulli 数を表わす. □

このことより, 特に, Euler-Riemann のゼータ函数の正の偶数 $2n$ における特殊値は π^{2n} の有理数倍であることがわかった. 例えば,

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

[**98**] $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2k}} = 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \cdots = \frac{(2^{2k-1}-1)B_k}{(2k)!}\pi^{2k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$ □

[**99**] $l = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 無限和 $\sigma_l := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^l}$ を考える. ($l = 1$ のとき, この無限和は絶対収束しないが条件収束する.) このとき, $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, σ_{2k+1} は π^{2k+1} の有理数倍になる.

ヒント: $1/\cos z$ の原点での Taylor 展開を二通りに考える.

12 ガンマ函数

ガンマ函数は基本的でかつ大変重要な特殊函数である. この節の目的はガンマ函数の基本的性質に証明を付けることである.

複素数 s と正の実軸 $\{x > 0\}$ 上の可測函数 f に対して,

$$\mathcal{M} f(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, x^s \frac{dx}{x}$$

と置き, これを $f(x)$ のメリン変換 (Mellin transform) と呼ぶ. (左辺は右辺の積分が収束するような s に対して定義されているものとする.) なお, ここで, $x^s = e^{s\log x}$ であり, $\log x$ は主値を表わす.

[100] (メリン変換とフーリエ変換の関係) $s = it$, $x = e^y$, $g(y) = f(e^y)$ と置くと,

$$\mathcal{M} f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ity}\, dy.$$

すなわち, f のメリン変換は g の逆フーリエ変換に等しい. □

[101] (ガンマ函数の定義) $f(x) = e^{-x}$ に対して,

$$\Gamma(s) := \mathcal{M} f(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

と置くと, $\Gamma(s)$ は $\operatorname{Re} s > 0$ における正則函数である. これをガンマ函数と呼ぶ. □

[102] (函数等式と解析接続) $\operatorname{Re} s > 0$ のとき, 次の等式が成立することを示せ:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

この函数等式を用いて, $\Gamma(s)$ が複素平面上の有理型函数に解析接続されることを示せ. 以下, 解析接続によって得られる有理型函数をも $\Gamma(s)$ と表わす. $\Gamma(s)$ の極は全て 1 位であり, 極全体の集合は $\{0, -1, -2, \dots\}$ に等しく, 留数に関して次が成立している:

$$\operatorname{Res}_{s=-k} \Gamma(s)\, ds = \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad \square$$

ヒント: 前半は $\frac{d}{d}xx^s = sx^{s-1}$ と部分積分によって証明される. 後半は $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{s(s+1)\cdots(s+k)}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ を使う.
函数等式と $\Gamma(1) = 1$ より, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $\Gamma(n+1) = n!$ となることを帰納法によって簡単に示すことができる. ガンマ函数は n の階乗を複素函数に拡張したものだとみなせる.

[103] (対数凸性) $s > 0$ において, $\Gamma(s) > 0$ であり, $\log \Gamma(s)$ は下に凸な函数である. □

ヒント: $s > 0$ において, $\frac{d^2}{ds^2} \log \Gamma(s) = \frac{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0$ が成立することを示せば良い. そのためには任意の u に対して, $u^2\Gamma + 2u\Gamma' + \Gamma'' \geq 0$ となることを示せば良い. なぜなら, そのとき, 左辺の u に関する 2 次式の判別式 $\Gamma'^2 - \Gamma\Gamma'$ が 0 以下になるからである.
　ガンマ函数は函数等式と対数凸性によって, 定数倍を除いて一意に特徴付けられる. 実は次が成立する.

[104] (Gauss の公式) 正の実数 $s > 0$ の連続函数 $f(s)$ が以下の性質を満たしていると仮定する:

1. $f(s+1) = sf(s) \quad (s > 0)$.
2. $f(1) = 1$.
3. $s > 0$ において $f(s) > 0$ であり, $\log f(s)$ は下に凸な函数である.

このとき, 次が成立する:

$$f(s) = \Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \qquad \text{for} \quad s > 0.$$

この最後の式を Gauss の公式と呼ぶ. □

この結果を利用すると次の公式を証明することができる.

[105] **(Weierstrass の公式)** C は次によって定義される Euler の定数であるとする:

$$C := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

このとき, 任意の複素数 s に対して,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!\,n^s} = e^{Cs}s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}$$

が成立する. このとき, 右側の無限乗積は s に関して広義一様絶対収束する. よって, $1/\Gamma(s)$ は複素平面上の正則函数を定める. この最後の式の無限積を Weierstrass の公式と呼ぶ. □

ヒント: 例えば [高木] の第 68 節 p.250 を見よ.

[106] **(sin との関係)** $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$.　特に, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. □

ヒント: $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$ と Weierstrass の公式と sin の無限乗積展開の公式を使えば簡単に証明できる.

[107] **(ベータ函数との関係)** $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$ なる複素数 p, q に対して,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

と置く. 右辺の積分は絶対収束する. このとき, 次の公式が成立する:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad \square$$

13 Euler-Riemann のゼータ函数の解析接続

$\mathrm{Re}\, s > 1$ において, (Euler-Riemann の) ゼータ函数は次の式によって定義されたのであった:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

この式は, $\mathrm{Re}\, s > 1$ における正則函数を定義する. 以下では, ゼータ函数を複素平面全体に解析接続するという問題について考える.

[108] $f(x) = e^{-\alpha x}$ と置くと, $\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき,

$$\mathcal{M} f(s) = \Gamma(s)\alpha^{-s}. \quad \square$$

[109] $g(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ と置くと, $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき,

$$\mathcal{M} g(s) = \Gamma(s)\zeta(s). \quad \square$$

ヒント: $x > 0$ のとき, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

[110] **(積分表示式 1)** C は図 13.1 のような曲線であるとする. $\log(-z)$ は $|\arg(-z)| < \pi$ なる分岐によって定められた $\mathbb{C} - \{\, z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0 \,\}$ 上の函数を表わすものとし, $(-z)^{s-1} = \exp\{(s-1)\log(-z)\}$ と置く. このとき,

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}\,dz}{e^z - 1}. \quad \square$$

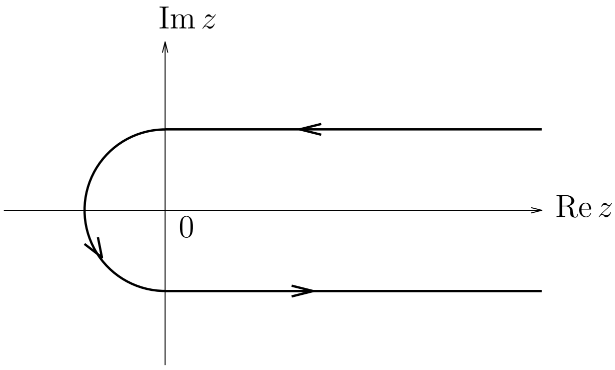


図 13.1: 曲線 C

ヒント: $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ と置くと,

$$\int_C g(z)(-z)^{s-1}\,dz = (e^{\pi i(s-1)} - e^{-\pi i(s-1)})\,\mathcal{M}\,g(s) = -2i\sin(\pi s)\,\mathcal{M}\,g(s).$$

この式を整理すれば目的の式が得られる.

[111] 以上の記号のもとで, 積分 $\displaystyle\int_C g(z)(-z)^{s-1}\,dz$ は s の函数として複素平面全体で正則である. このことを用いて, $\zeta(s)$ が複素平面上の有理型函数に解析接続されることを示せ. 以下, 解析接続によって得られる有理型函数をも $\zeta(s)$ と表わす. $\zeta(s)$ の極は $s = 1$ のみであり, その位数は 1 であり, 留数は 1 に等しい. $\square$

[112] 上の方法を使うと, 函数等式を使わなくても (cf. [**102**]), ガンマ函数の複素平面全体への解析接続を証明できそうである. 実際にそれを遂行せよ. $\square$

上の結果から副産物としてゼータ函数の特殊値に関する結果が得られる.

[113] Bernoulli 数を B_n と書く. このとき,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(1-2n) = -\frac{B_n}{2n}, \qquad \zeta(-2n) = 0 \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

特に, $\zeta(s)$ の 0 以下の整数における値は 0 以下の有理数である. $\square$

ヒント: Bernoulli 数の定義を少し変形すると,

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_n z^{2n-1}}{(2n)!}.$$

この式を [**110**] によって得られたゼータ函数の積分表示式に代入せよ. s が 0 以下の整数のときその積分は 0 のまわりの周回積分に一致し, 留数計算に帰着する.

さて, 問題 [**113**] の結果と問題 [**97**] において三角函数の無限乗積展開を使う方法によって計算した正の偶数におけるゼータ函数の値を比べてみよう. すると次の等式が得られることがわかる:

$$\zeta(1-2n)=2^{1-2n}\pi^{-2n}(2n-1)!\,\zeta(2n)\qquad\text{for}\quad n=1,2,3,\dots.$$

複素函数論が存在しなかったにもかかわらず, Euler がすでにこの結論を得ていた. この結果は, より一般的に, $\zeta(1-s)$ と $\zeta(s)$ の間に関係式 (函数等式) が存在することを強く示唆している. 実際, そのような等式は存在し, それを初めて証明したのは Riemann である. ゼータ函数の函数等式を証明するためにはテータ函数の函数等式が必要になる.

14　楕円テータ函数

この節では, 函数 $\exp(2\pi i z)$ が何度も出てくるので, 記号の簡単のために,

$$\mathbf{e}(z):=\exp(2\pi i z)\qquad\text{for}\quad z\in\mathbb{C}$$

と置く. $H:=\{\,\tau\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}\tau>0\,\}$ (上半平面) と置く.

[**114**] **(定義)** $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times H$ に対して,

$$\vartheta(z,\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right)$$

と置く. 右辺は $H\times\mathbb{C}$ 上で広義一様絶対収束するので, $\vartheta(z,\tau)$ は $H\times\mathbb{C}$ 上の正則函数である. $\vartheta(z,\tau)$ を (楕円) テータ函数と呼ぶ. □

テータ函数の入門には [Mumford] が良い[14].

[**115**] **(準周期性)** $\vartheta(z+a\tau+b,\tau)=\mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}a^2\tau-az\right)\vartheta(z,\tau)\quad\text{for } a,b\in\mathbb{Z}.$ □

[**116**] f は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり, 条件 $f(z+1)=f(z)$ を満たしていると仮定する. このとき, 次を満たすような $(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が唯一存在する:

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\,\mathbf{e}(nz)\qquad\text{for}\quad z\in\mathbb{C}.$$

このとき, 右辺の級数は広義一様絶対収束する. □

[14] ただし, その p.36 の Table V の最後の式は, $\vartheta_{11}('')=-i('')\vartheta_{11}('')$ が正しい. 右辺の i が抜けているの注意しなければいけない.

ヒント: $f(z+1)=f(z)$ より, $w\neq 0$ に対して $f(\frac{\log w}{2\pi i})$ の値は $\log w$ の分岐の取り方よらずに定まる. その値を $g(w)$ と置くと, g は $\mathbb{C}-\{0\}$ 上の正則函数であり, $g(\mathbf{e}(z))=f(z)$ を満たしている. g の Laurent 展開に関する結果を f の方に翻訳すると求める結果が得られる.

[117] **(準周期性による特徴付け)** $\tau\in H$ を任意に固定する. f は $\mathbb{C}$ 上の正則函数であり, 次を満たしていると仮定する:

$$f(z+a\tau+b)=\mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}a^2\tau-az\right)f(z)\qquad\text{for}\quad a,b\in\mathbb{Z}$$

このとき, z によらないある定数 $c\in\mathbb{C}$ が存在して, $f(z)=c\vartheta(z,\tau)$. □

ヒント: 問題 **[116]** の結果を f に適用する. さらに, $f(z+\tau)=\mathbf{e}(-\tau/2-z)f(z)$ を用いると, a_n の間の関係式が得られる. それを整理すれば目的の結果が得られる ($c=a_0$).

[118] **(熱方程式)** $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ に対して, $p(t,x):=\theta(x,it)$ と置くと, $p(t,x)$ は正の実数値函数であり, 次の方程式を満たす:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial}tp(t,x)=\frac{1}{2(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial^2}x^2p(t,x),\qquad p(t,x+1)=p(t,x).\quad\square$$

すなわち, テータ函数は円周上の熱方程式を満たしているのである. (前者の偏微分方程式が熱方程式であり, 後者の周期性が「円周上の」という条件を数学的に表現している[15].) さらに, $t\searrow 0$ のとき, $p(t,x)$ は円周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の ($0+\mathbb{Z}$ に台を持つ) デルタ超函数に収束することが知られている (超函数の収束の定義を知っていればその証明は簡単). $p(t,x)$ は円周上の熱方程式の基本解である. 物理的には, 時刻 0 に円周の一点を瞬間的に熱したとき, 時刻 t における温度の分布函数は $x\mapsto p(t,x)$ によって与えられるのである.

以下で必要になるフーリエ解析の結果をまとめておこう. g は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数であり, 周期条件 $g(x+1)=g(x)$ を満たしていると仮定する. g のフーリエ係数 g_k を次のように定義する:

$$g_n:=\int_0^1 g(x)\,\mathbf{e}(nx)\,dx\qquad\text{for}\quad n\in\mathbb{Z}.$$

このとき, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して,

$$g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\,\mathbf{e}(nx)$$

が成立する. ここで, 右辺の級数 (フーリエ級数) は $\mathbb{R}$ 上一様絶対収束する. この結果は以下において自由に用いて良い.

$\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数全体の空間を $C^\infty(\mathbb{R})$ と書くことにする. Schwartz の急減少函数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を次のように定義する:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}):=\{\,f\in C^\infty(\mathbb{R})\mid\lim_{|x|\to\infty}|x|^m f^{(n)}(x)=0\ \text{ for } m,n=0,1,2,\dots\}.$$

[15]直線 $\mathbb{R}$ から円周への写像を $x\mapsto(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$ によって与える. このとき, x と y が円周上の同一の点を与えるための必要十分条件は x と y の差が整数になることである. $\mathbb{R}$ 上の函数 f が周期性 $f(x+1)=f(x)$ を満たしているとき, $f(x)$ の値は x に対応する円周上の点だけから決まる. よって, f から自然に円周上の函数が得られるのである. 気持ちの上では, 周期函数 f そのものを円周上の函数であると思ってよろしい.

ここで, $f^{(n)}$ は f の n 階の導函数を表わす. $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f に対して, そのフーリエ変換 $\hat{f}$ を次のように定義する:

$$\hat{f}(p) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathbf{e}(-px)\,dx \qquad \text{for} \quad p \in \mathbb{R}.$$

以下では使わないことだが, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 逆変換の公式

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)\ \mathbf{e}(px)\,dp$$

が成立することを注意しておく.

[119] (Poisson の和公式) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad \square$$

ヒント: より一般に次が成立する:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

この式において $x=0$ と置けば Poisson の和公式が得られる. 級数 $g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)$ は収束し, $\mathbb{R}$ 上の周期 1 の C^∞ 函数を定める. よって, $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\,\mathbf{e}(nx)$ と Fourier 展開できる. ところが,

$$\begin{aligned} g_n &= \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)\ \mathbf{e}(-nx)\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m)\ \mathbf{e}(-nx)\,dx \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y)\ \mathbf{e}(-ny)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\ \mathbf{e}(-ny)\,dy = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

以下において, $\sqrt{w}$ は $\mathbb{C} - \{\, w \in \mathbb{R} \mid w \le 0 \,\}$ 上の $|\arg(\sqrt{w})| < \pi$ なる分岐を選んでいるものとする.

[120] (テータ函数の函数等式) $\vartheta(z/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\ \mathbf{e}(\frac{1}{2}z^2/\tau)\,\vartheta(z,\tau) \quad$ for $\tau \in H$, $z \in \mathbb{C}$.

ヒント: $\tau \in H$, $z \in \mathbb{C}$ を任意に固定し, $f(x) := \mathbf{e}(\frac{1}{2}x^2\tau + xz)$ と置くと, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である. よって, f に Poisson の和公式を適用できる.

15 Euler-Riemann のゼータ函数の函数等式

記号の簡単のため, $x > 0$ に対して, $\theta(x) := (\vartheta(0, ix) - 1)/2$ と置く. すなわち,

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x) \qquad \text{for} \quad x > 0.$$

[121] $\theta(x)$ は $x > 0$ における正値函数であり, 以下を満たす:

(1) $1 + 2\theta(1/x) = x^{1/2}(1 + 2\theta(x)) \quad$ for $x > 0$.

(2) $\theta(x) \le 2\,e^{-\pi x} \quad$ if $x \ge 1$.

(3) $\theta(x) \le 2\,x^{-1/2}$ if $0 < x \le 1$. □

ヒント: (1) は $\vartheta(z,\tau)$ の函数等式からただちに得られる. (1) と (2) から (3) を導くことも簡単である. したがって, (2) だけが問題になるが, $n^2 \ge 2n - 1$ を使うと, $x > 0$ に対して次が成立することがわかる:

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(2n-1)x} = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}.$$

ゼータ函数の函数等式を扱うためには, 完備化されたゼータ函数 $\hat{\zeta}(s)$ を次のように定義しておいた方が良い:

$$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

ゼータ函数の函数等式は, $\zeta(s)$ そのものよりも, むしろ $\hat{\zeta}(s)$ に関する結果として証明される.

[122] (テータ函数とゼータ函数の関係) $\operatorname{Re} s > 2$ のとき,

$$\hat{\zeta}(s) = \mathcal{M}\,\theta(s/2) = \int_0^{\infty} \theta(x) x^{s/2}\,\frac{dx}{x}. \quad \square$$

ヒント: **[108]** の結果を用いて形式的に計算すれば望みの結果が得られることはすぐにわかる. よって, その形式的な計算が厳密に成立していることを示せば良い.

[123] (積分表示式 2) 任意の $s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ に対して,

$$\hat{\zeta}(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^{\infty} \theta(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2})\,\frac{dx}{x}. \quad \square$$

ヒント: **[121]** の (2),(3) より, 右辺の積分は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して収束し, 複素平面上の正則函数を与えることがわかる. よって, 解析函数の一致の定理より $\operatorname{Re} s > 2$ の範囲で **[122]** の結果を求める形に変形できれば良い. そのためには, まず, メリン変換における積分を $0 < x \le 1$ の範囲と $1 \le x$ の範囲の積分に分割する. 前者の方の積分変数を $1/x$ に変換し, **[121]** の (1) を用いる. すると求める結果が得られる. 具体的には以下のように計算する. $\operatorname{Re} s > 2$ のとき,

$$\begin{aligned}
\hat{\zeta}(s) = \mathcal{M}\,\theta(s/2) &= \int_0^1 \theta(x) x^{s/2}\,\frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} \theta(x) x^{s/2}\,\frac{dx}{x} \\
&= \int_1^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} x^{-s/2} + \frac{1}{2} x^{(1-s)/2} + \theta(x) x^{(1-s)/2} + \theta(x) x^{s/2} \right\} \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

この最後の式を整理すれば, 求める結果が得られる.

上の問題によって得られたゼータ函数の積分表示式は s と $1 - s$ の交換に対して不変な形をしている. よって, 次の定理が得られた:

定理 15.1 (ゼータ函数の函数等式) ゼータ函数は次の函数等式を満たす:

$$\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s). \quad \square$$

テータ函数の函数等式から, メリン変換を通じて, ゼータ函数の函数等式が得られたのである. Euler 積と函数等式はゼータ函数の最も基本形な性質である. Euler-Riemann のゼータ函数以外にも, 今世紀の数学の発展の過程において, 非常にたくさんのゼータ函数が定義された. それらに関する非常に良いまとめが, [数学辞典] にあるので興味のある人は見て欲しい.

参考文献

[Gun] R. C. Gunning: Lectures on Riemann surfaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966

[今井] 今井 功: 流体力学と複素解析, 日本評論社

[岩澤] 岩澤 健吉: 代数函数論 増補版, 岩波書店

[Lang] Serge Lang: Real analysis, 1969, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (邦訳: 現代の解析学, 1981, 共立出版)

[Mumford] David Mumford: Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics Vol. 28, 1993, Birkhäuser

[数学辞典] 岩波 数学辞典 第 3 版, 日本数学会編集, 岩波書店 1985

[高木] 高木 貞治: 解析概論, 改定第三版, 岩波書店

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis, Cambridge University Press, Fourth Edition, 1927, Reprinted 1992