幾何学概論 I 演習

黒木 玄　(東北大学理学研究科)

1995 年 10 月 23 日 (月)

演習問題の追加ついて: すでに, 演習の時間に話したことだが, 講義中に出された問題や試験で出された問題の解答を演習の時間に発表することも正式に認める.

前回に配ったプリントの訂正: 前回のプリントに対して, 以下の訂正と追加を行なう.

- 問題 [**19**] における $P =$ の式の中の $|u_i|$ は全て正しくは $|v_i|$ でなければいけない.
- 問題 [**21**] のヒント: 行列の積は通常の数の積と和の繰り返しで定義されるので, 行列の積で定義された写像の連続性は簡単に示せる. 逆写像は Schmidt の正規直交化法で構成されるので, 逆写像の連続性を示すためには Schmidt の正規直交化法によって得られる写像が連続であることを確かめれば良い.
- 問題 [**32**] の下に以下を挿入せよ:

  参考: この問題の結果は物理学者などには良く知られているようである.
  (例えば, [Polyakov] の第 7 章などを見よ.)

- 問題 [**35**] の式を次のように修正する (“−” が抜けていた):

$$\frac{\partial}{\partial t_1}F(t_1,t_0) = A(t_1)F(t_1,t_0), \qquad \frac{\partial}{\partial t_0}F(t_1,t_0) = -F(t_1,t_0)A(t_0).$$

2　Green の公式

すでに多変数の微分積分学の講義などで知っていることだと思うが, Green の公式について復習しよう. Green の公式は大変基本的なので頻繁に使われる.

[**36**] **(正方形領域に対する Green の公式)** $K = [0,1]\times[0,1]$ と置き, Ω は K の任意の開近傍であるとする. u, v は Ω 上の C^1 函数であるとする. 写像 $q : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する:

$$q(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{if } t \in [0,1], \\ (1,t-1) & \text{if } t \in [1,2], \\ (3-t,1) & \text{if } t \in [2,3], \\ (0,4-t) & \text{if } t \in [3,4]. \end{cases}$$

$q(t)=(x(t),y(t))$ と書くことにする. $q(t)$ は K の境界を正の向きにまわる曲線である. このとき, 次が成立する:

$$\int_0^4\left(u(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+v(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\right)dt=\int_K\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy,$$
$$\int_0^4\left(u(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}-v(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}\right)dt=\int_K\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad \square$$

この公式を Green の公式と呼ぶ. 以下のように省略した方が見易い:

$$\int_{\partial K}u\,dx+v\,dy=\int_K(v_x-u_y)\,dx\,dy, \qquad \int_{\partial K}u\,dy-v\,dx=\int_K(u_x+v_y)\,dx\,dy.$$

もちろん, Green の公式は問題 [**36**] よりもずっと一般の状況でも成立する. 領域 K の形や函数 u, v に関する条件もずっと弱めることができる.

[**37**] **(三角形に対する Green の公式)** 問題 [**36**] における正方形型閉域 K を次の三角形型閉域に置き換えた場合の結果を定式化し, それを証明せよ:

$$K:=\{\,(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}. \quad \square$$

[**38**] **(一般の場合の Green の公式)*** 問題 [**36**] もしくは問題 [**37**] の結果を認めた上で, (十分に滑らかに) 三角形分割可能な閉領域に対する Green の公式の証明の概略について述べよ. $\square$

[**39**] 記号 dx, dy を基底にもつベクトル空間を V_1 と書くことにする. $\mathbb{R}^2$ の開部分集合 Ω 上の C^1 函数 f に対して, Ω 上の V_1 値函数 df を $df(x,y)=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$ と定義する. 記号 $dx\wedge dy$ を基底にもつベクトル空間を V_2 と書くことにする. $V_1\times V_1$ から V_2 への双線型写像 $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta$ を次のように定める:

$$(dx,dx)\mapsto 0, \quad (dx,dy)\mapsto dx\wedge dy, \quad (dy,dx)\mapsto -dx\wedge dy, \quad (dy,dy)\mapsto 0.$$

双線型写像としての $\wedge$ を外積と呼ぶ. u, v は Ω 上の函数であるとし, Ω 上の V_1 値函数 ω を $\omega=u\,dx+v\,dy$ と定める. このような ω を Ω 上の 1-form と呼ぶ. 函数 f に対する df は 1-form である. u, v が C^1 級であるとき, ω の外微分 $d\omega$ を次のように定める:

$$d\omega:=du\wedge dx+dv\wedge dy.$$

Ω 上の V_2 値函数のことを Ω 上の 2-form と呼ぶ. 1-form ω の外微分 $d\omega$ は 2-form である. このとき, 次の公式が成立することを示せ:

$$d(u\,dx+v\,dy)=(v_x-u_y)dx\wedge dy, \qquad d(u\,dy-v\,dx)=(u_x+v_y)dx\wedge dy.$$

さらに, 以上の記号を用いると, Green の公式は次のように表現されることを説明せよ:

$$\int_{\partial K}\omega=\int_K d\omega. \quad \square$$

ヒント: この問題は Green の公式の形式的な変形に過ぎないので, 非常に簡単である.
参考: これは, 微分形式の理論の一部をほんの少しだけ切り出すことによって作られた問題である. Green の公式を

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega.$$

のように表現できることを示せというのが上の問題の内容だが, この形の公式は平面だけではなく任意の n 次元多様体上でも全く同様な形で成立する (Stokes の定理). 微分形式 ω と積分領域 K, 外微分 $d\omega$ と境界 ∂K の**双対性**に注意せよ. Stokes の定理はトポロジーにおけるコホモロジーとホモロジーの双対性に関係している.
参考: Gauss-Green-Stokes の定理は流体力学的もしくは電磁気学的直観を使うと理解し易い. ベクトル解析や物理学の教科書なども見て直観を養うことが望ましい. それらの本にはおそらく grad, rot, div などに関する複雑な公式が書いてあるはずだが, それらの公式は微分形式を使えば奇麗に整理される.

複素函数論の演習に属することだが, Green の公式の応用として当然知っているべきことと思われるので, 以下の問題を出しておく.

偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

と定義する.

[40] **(Cauchy-Riemann の方程式)** Ω は $\mathbb{C}$ の開部分集合であるとし, f は Ω 上の複素数値 C^1 函数であるとする. 複素数 $z \in \Omega$ を実数 x, y によって $z = x + iy$ と表わし, f を実数値函数 u, v によって $f = u + iv$ と表わしておく. このとき, 以下が成立することを示せ:

1. $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z}.$
2. $f(z+h) - f(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} h + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h} + o(h).$
3. 任意の $z \in \Omega$ に対して, 以下の 3 つの条件は互いに同値である:
   (a) 極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ が存在する (複素微分可能性).
   (b) 点 z において, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$
   (c) 点 z において, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

複素微分可能性と同値な偏微分方程式を **Cauchy-Riemann の方程式**と呼び, Cauchy-Riemann の方程式をみたす複素函数 f を **正則函数** (holomorphic function) と呼ぶ. □

複素数値 1-form $f(z)\, dz + g(z)\, d\bar{z}$ の曲線 $C = \{\, z(t) \mid a \le t \le b \,\}$ に関する線積分を次のように定義する:

$$\int_C (f(z)\, dz + g(z)\, d\bar{z}) := \int_a^b \left(f(z(t))\frac{dz(t)}{dt} + g(z(t))\frac{d\overline{z(t)}}{dt} \right) dt.$$

[41] (Cauchy の積分定理) Ω は $\mathbb{C}$ の開部分集合であるとし, f は Ω 上の正則函数であるとする. U は区分的に滑らかな境界を持つ Ω の相対コンパクト開部分集合であるとする. このとき,

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = 0. \quad \square$$

ヒント: 複素数値函数に対する Green の公式を自由に用いて良い. Cauchy の積分定理は Green の公式を形式的に用いるだけでただちに証明される. そのとき, 次の式を使うと計算が極めて易しくなる:

$$d(f\,dz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz.$$

ここで, $dz \wedge dz = 0$ を使った.
参考: Gauss-Green-Stokes の定理の理解には流体力学的な直観の使用が有効であるのであった. Green の公式の応用として簡単に示される Cauchy の積分定理においてもそれは同様である. 複素正則函数は「渦無し湧き出し無し」の 2 次元理想流体の流れを表現しているとみなせるのである. 「渦無し湧き出し無し」という条件を微分形で表現したものが Cauchy-Riemann の方程式であり, 積分形で表現したものが Cauchy の積分定理である. この立場で書かれた面白い本として [今井] があるので参照されたい. 別の解釈として, 正則函数の理論を 2 次元静電場の理論とみなすこともできるが, そのとき電荷を持つ粒子は極によって表現される.

Green の公式の応用として, Cauchy の積分定理が示されたのだが, その簡単な応用として以下の問題を挙げておこう.

[42] $a > 0$ のとき, 任意の $b \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}b^2}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{\frac{1}{2a}b^2}. \quad \square$$

ヒント: もしも, $y = x - b$ と積分変数の変換が許されるなら, この問題の前半の等式の証明は簡単である. しかし, b は複素数なので y も複素数になってしまい, 単純にはうまく行かない. そこを何とかするためには, $R > 0$ に対する $-R \leq x \leq R$ における 2 つの積分の差を Cauchy の積分定理を使って評価すれば良い. (実は, 積分を b の解析函数と見て一致の定理を用いても証明できる.) 後半の等式の証明については [高木] の p.344 などを見よ.
参考: ちなみに, この問題の結果は, 解析函数の一致の定理によって, $a \in \mathbb{C}$ でかつ $\mathrm{Re}(a) > 0$ (a の実部が正) の場合に拡張される. さらに, 以下の問題のように 1 次元から n 次元の場合に上の公式は一般化される.

[43]* A は実 n 次正方行列であり, その固有値は全て正であると仮定する. $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ を縦に並べてできる縦ベクトルを $x \in \mathbb{R}^n$ と表わすことにする. このとき, 任意の複素縦ベクトル $b \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t x A x + {}^t b x\right)\,dx_1 \cdots dx_n = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}}\,\exp\left(\frac{1}{2}\,{}^t b A^{-1} b\right). \quad \square$$

ヒント: 任意の実対称行列は $SO(n)$ の元によって対角化可能である.
参考: 左辺に A の行列式と逆行列が出現したことが印象的である. この公式は理論物理学でよく使われる. 場の量子論などにおける Feynman diagram の手法も (経路積分の立場では) この問題の結果がもとになるのである. 上の公式の両辺を b について Taylor 展開し, 両辺の同次の項を比べると, $\exp\left(-\frac{1}{2}{}^t xAx\right)$ に x の多項式函数をかけたものに関する積分公式が得られる. その公式をある種の diagram を使って組合せ論的に表示するというのが Feynman diagram の方法の内容である. ただし, 場の量子論の場合は無限次元の場合を扱うので, 数学的には満足できる形で合理化されているとは言えない.

以下においては, 問題を解くために Green の公式を自由に用いて良い.

3 等周問題

この節の目標は等周不等式の証明の概略を演習問題の羅列によって説明することである. 等周問題の Fourier 級数を用いた Hurwitz による取り扱いについては, [溝畑] の pp.202–204 に簡潔な解説がある. また, 最近の成果に触れるためには, 『数理科学』(1995 年 8 月号) における記事 [浦川] およびその文献表が役に立つであろう.

以下においては, [浦川] の方針にしたがう. 講義においてはより初等的な Fourier 級数を使わない self-contained な証明がなされたようだが, 以下で説明する証明の方針も面白いので知っておくことに意義はあると思われる.

等周問題: 平面上にいて, 与えられた長さ L を持つ単一曲線で囲まれた領域のうちで面積が最大になるものは何か?

もちろん, 答は円なのであるが問題はその証明である.

なお, ここで, **単一曲線** (simple closed curve) とは平面内の S^1 と同相な曲線のことである. (**Jordan 曲線**と呼ぶこともある.) この演習においては, Jordan 曲線定理は自由に認めて使っても良いことにする. また, 曲線も「長さを持つ曲線」まで一般化せず, 主に区分的に滑らかな曲線を扱う. (ここで言っていることの意味がわからない人は, [数学辞典] などで「Jordan 曲線」や「曲線の長さ」などに関係する項目を見て欲しい.)

D は閉円板に同相な平面 $\mathbb{R}^2$ 内の有界閉集合であり, D は滑らかな S^1 に同相な境界 $C = \partial D$ を持つものと仮定する. 閉曲線 C は $q(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [a, b]$, $q(a) = q(b)$) によってパラメトライズされているものとし, t が増加するとき $q(t)$ は D の周りを正の向き (時計と反対回り) に動くものとする. (図を描け.) C 上の函数 (正確には 1-form) の積分は $q(t)$ を通して定義されているものとする.

閉領域 D の面積を $\mathrm{Area}(D)$ と書き, 曲線 C の長さを $\mathrm{Length}(C)$ と書くことにする. それらは以下のように表わされる:

$$\mathrm{Area}(D) = \int_D dx\,dy, \qquad \mathrm{Length}(C) = \int_C |dq| = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

以下の目標は次の定理を証明することである.

定理 (等周不等式) 以上の記号のもとで, 次の不等式が成立する:

$$\mathrm{Length}(C)^2 \geq 4\pi\,\mathrm{Area}(D)$$

さらに, この不等式において等号が成立するための必要十分条件は, 曲線 C が円であることである. □

[**44**] 以下の等式が成立することを示せ:

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D) &= \int_C x\,dy = \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt \\ &= -\int_C y\,dx = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt. \quad \square\end{aligned}$$

[**45**] $L = \mathrm{Length}(C)$, $A = \mathrm{Area}(D)$ と置く. パラメーター t を

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = 2\pi/L$$

を満たすように取れて, しかも, それが動く範囲を区間 $[0, 2\pi]$ (すなわち, $a = 0$, $b = 2\pi$) にできることを示せ. そのとき, t は弧長パラメーターとどのような関係にあるか? このパラメーター付けのもとで, 任意の実数 a に対して, 次の等式が成立することを示せ:

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A = \int_0^{2\pi} (\dot{y}(t) - (x(t) - a))^2\,dt + \int_0^{2\pi} \left(\dot{x}(t)^2 - (x(t) - a)^2\right)\,dt. \quad \square$$

ヒント: $x(t)$ の代わりに $x(t) - a$ を考え, 問題 [**44**] の結果と次の明らかな等式の差を考えれば良い:

$$\int_0^{2\pi} (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)\,dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

注意: この問題によって, 等周不等式は次の定理に帰着できることがわかる.

定理 (Wirtinger の不等式) $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の周期 2π を持つ実数値 C^1 函数であり,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

を満たしていると仮定する. このとき, 次の不等式が成立する:

$$\int_0^{2\pi} \dot{f}(t)^2\,dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt.$$

さらに, この不等式において等号が成立するための必要十分条件は, $f(t)$ が $f(t) = c\cos t + d\sin t$ $(c, d \in \mathbb{R})$ と表わされることである. □

参考: この不等式は, 「$f(t)$ の平均が 0 のとき, $|f(t)|$ が大きくなるためには, その変化の激しさを表わす $|\dot{f}(t)|$ が大きくなればいけない」という直観の数学的表現の一つである. 大事な点は, 等式が成立することがあるという意味で, Wirtinger の不等式は最良の結果を与えているという点である.

[**46**] Wirtinger の不等式から不等式 $\mathrm{Length}(L)^2 \geq 4\pi\,\mathrm{Area}(D)$ を導け. □

ヒント: 問題 [**45**] の結果を用いる. $f(t) = x(t) - a$ と置き, a の値を条件 $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ が成立するように取る.

これで, 等周不等式の定理の前半の結果が Wirtinger の不等式から導かれたことになる. 後半の等号が成立するための条件に関する主張も次のようにして導くことができる.

[47] 区間 $[0, 2\pi]$ 上の実数値 C^1 函数 $x(t)$, $y(t)$ が

$$x(t) = a + c\cos t + d\sin t, \quad \dot{y}(t) = x(t) - a, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = b, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

をみたしているとき, 曲線 $(x(t), y(t))$ $(0 \le t \le 2\pi)$ は中心 (a, b), 半径 $r = \sqrt{c^2 + d^2}$ の円を描くことを示せ. □

参考: 等周不等式が Wirtinger の不等式のような解析学における sharp な不等式と密接な関係があるという事実は重要である. 他の不等式 (Sobolev の不等式など) との関係については [浦川] を参照せよ.

4 Fourier 級数

前節によって, Wirtinger の不等式から等周不等式が導かれることがわかった. よって, 等周不等式の証明を完成するためには Wirtinger の不等式を証明すれば良い. そのためには周期函数の Fourier 級数展開に関する準備が必要である. しかし, これは幾何の演習であるので, Fourier 解析に関する準備を厳密に行なうことは避け, おおらかにかつ形式的に議論を進める. Fourier 解析に関する厳密な議論は解析の講義における Hilbert 空間論および Lebesgue 積分論の応用において行なわれるであろう.

[48] **(Wirtinger の不等式の証明の方針)** 以下に現われる無限和はすべて収束し, 極限の交換が全て形式的に許されるという**おおらか**仮定のもとで以下を示せ. $\mathbb{R}$ 上の函数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k\cos(kt) + d_k\sin(kt)), \qquad c_k, d_k \in \mathbb{R}$$

と表わされていると仮定する. このとき, $f(t)$ は Fourier 級数展開されているていると言う. このとき, 以下が成立する:

1. $c_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,f(t)\,dt, \qquad d_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(kt)\,f(t)\,dt.$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = \pi\left(\frac{{c_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}({c_k}^2 + {d_k}^2)\right) \qquad$ (Parseval の等式).

3. $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ を仮定する. このとき, $c_0 = 0$ であり, 次の不等式が成立する:

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2 dt \ge \int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt.$$

しかも, 等号が成立するための必要十分条件は, 2 以上の全ての k に対して $c_k = d_k = 0$ が成立することである. □

この形式的な問題によって, Wirtinger の不等式を厳密に証明するためには, 以下の問題を解けば良さそうなことがわかる.

問題. 上の問題の記号のもとで, Fourier 級数は収束するとすれば周期 2π を持つ周期函数になる. 逆に任意の周期函数は Fourier 級数展開可能であるか? もしもそれが駄目なら, どのような周期函数が Fourier 級数展開可能であるか? 適当な条件のもとで Parseval の等式を証明せよ.

実際, Fourier 級数展開の理論をやると, これらの問題が十分満足な形で肯定的に解決されるのである.

$\cos(kt)$, $\sin(kt)$ に関する Fourier 級数論を直接展開するよりも, 函数を複素数値函数まで拡張し $\exp(ikt)$ $(k \in \mathbb{Z})$ に関する Fourier 級数論を展開する方が, 計算的にはずっと易しくなる.

[**49**] $\exp(ikt)$ $(k \in \mathbb{Z})$ に対して, 問題 [**48**] と類似の問題を定式化し, 問題 [**48**] と同様に収束や極限の交換などに関する**おおらかな**仮定のもとで, その問題を解け. □

参考文献

[今井] 今井 功: 流体力学と複素解析, 日本評論社

[溝畑] 溝畑 茂: ルベーグ積分, 岩波全書 265, 岩波書店

[Polyakov] A. M. Polyakov: Gauge fields and strings, harwood academic publishers, Contemporary concepts in physics, Volume 3, 1987

[数学辞典] 岩波数学辞典, 第三版, 岩波書店

[高木] 高木 貞治: 解析概論, 改訂第三版, 岩波書店

[浦川] 浦川 肇: 等周不等式, 数理科学 1995-8, 特集/現代の不等式, 20–24