幾何学序論 B 演習

黒木玄 2005 年 11 月 29 日 (火) (教師用)

目 次

先週渡したプリントの訂正

[65] の $\partial t a_{m,n}$ は正しくは $\delta_{m,n}$ である. 最後のヒントの $\int_0^\infty$ は正しくは $\int_0^{2\pi}$ である.

問題 [26] の略解

略解. 弧長パラメータを s と書き, t の函数 f を s の函数ともみなし, s による微分を f' と書くことにする. 弧長パラメータの定義より $f' = \dot{f}/|\dot{q}|$ である.

方針: $e_1, q'', \kappa, e_2, e_3$ を順次 $\dot{q}, \ddot{q}$ で表わし, $\tau = e_3 \cdot e_2'$ を計算する. そのとき $\dot{q}, \ddot{q}$ が e_3 と直交することを用いて計算を簡略化する.

まず最初に $e_1 = q'$, $d|\dot{q}|/dt$, $e_1' = q''$ を $\dot{q}, \ddot{q}$ で表わそう:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= q' = \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}, \\
\frac{d|\dot{q}|}{dt} &= \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{q}\cdot\dot{q}} = \frac{2\dot{q}\cdot\ddot{q}}{2\sqrt{\dot{q}\cdot\dot{q}}} = \frac{\dot{q}\cdot\ddot{q}}{|\dot{q}|}, \\
e_1' &= q'' = \frac{1}{|\dot{q}|}\frac{d}{dt}\frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} = \frac{\ddot{q}}{|\dot{q}|^2} - \frac{(\dot{q}\cdot\ddot{q})\dot{q}}{|\dot{q}|^4} = \frac{|\dot{q}|^2\ddot{q} - (\dot{q}\cdot\ddot{q})\dot{q}}{|\dot{q}|^4}.
\end{aligned}
$$

よって $\kappa^2 = |q''|^2$ は次の形になる:

$$
\kappa^2 = |q''|^2 = \frac{|\dot{q}|^4|\ddot{q}|^2 - 2|\dot{q}|^2(\dot{q}\cdot\ddot{q})^2 + |\dot{q}|^2(\dot{q}\cdot\ddot{q})^2}{|\dot{q}|^8} = \frac{|\dot{q}|^2|\ddot{q}|^2 - (\dot{q}\cdot\ddot{q})^2}{|\dot{q}|^6} = \frac{|\dot{q}\times\ddot{q}|^2}{|\dot{q}|^6}.
$$

ここで公式 $|a\times b|^2 = |a|^2|b|^2\sin^2\theta = |a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2$ ($a, b \in \mathbb{R}^3$, θ は a と b のあいだの角度) を使った. よって

$$
\kappa = |q''| = \frac{|\dot{q}\times\ddot{q}|}{|\dot{q}|^3}, \qquad e_2 = \frac{q''}{|q''|} = \frac{\ddot{q}}{\kappa|\dot{q}|^2} - \frac{(\dot{q}\cdot\ddot{q})\dot{q}}{\kappa|\dot{q}|^4}, \qquad e_3 = e_1\times e_2 = \frac{\dot{q}\times\ddot{q}}{\kappa|\dot{q}|^3}.
$$

最後に $\tau = e_3\cdot e_2'$ を求めよう:

$$
\tau = e_3\cdot e_2' = \frac{1}{|\dot{q}|}e_3\cdot\dot{e}_2 = \frac{1}{|\dot{q}|}\frac{\dot{q}\times\ddot{q}}{\kappa|\dot{q}|^3}\cdot\frac{\dddot{q}}{\kappa|\dot{q}|^2} = \frac{(\dot{q}\times\ddot{q})\cdot\dddot{q}}{|\dot{q}\times\ddot{q}|^2} = \frac{\det[\dot{q},\ddot{q},\dddot{q}]}{|\dot{q}\times\ddot{q}|^2}.
$$

ここで 3 番目の等号で $\dot{q}, \ddot{q}$ と e_3 が直交することを使い, 最後の等号でベクトル解析の公式 $(a\times b)\cdot c = \det[a,b,c]$ ($a, b, c \in \mathbb{R}^3$) を使った. □