幾何学序論 B 演習

黒木玄 2005 年 11 月 22 日 (火) (教師用)

目 次

4 講義における等周不等式の証明への補足

4.1 Green の公式と面積

[59] (Green の公式) 長方形 $K = [a,b]\times[c,d]$ 上の C^1 函数 f,g に関する Green の公式

$$\int_{\partial K}(f\,dx + g\,dy) = \int_K (g_x - f_y)\,dx\,dy$$

を証明せよ. ここで左辺の ∂K は K の境界を左回りに回る経路である. □

ヒント. 左辺の意味がよくわからない人は左辺を次に等しいことを認め, そこから出発して構わない:

$$\int_{\partial K}(f\,dx + g\,dy) = \int_a^b f(x,c)\,dx + \int_c^d g(b,y)\,dy + \int_b^a f(x,d)\,dx + \int_d^c g(a,y)\,dy.$$

この積分で (x,y) がどのように動くかを図に描いてみよ. □

参考 4.1 (微分形式) $\omega = f\,dx + g\,dy$ と置くと

$$\begin{aligned} d\omega &= df\wedge dx + dg\wedge dy = (f_x\,dx + f_y\,dy)\wedge dx + (g_x\,dx + g_y\,dy)\wedge dy \\ &= -f_y\,dx\wedge dy + g_x\,dx\wedge dy = (g_x - f_y)\,dx\wedge dy. \end{aligned}$$

ここで計算規則 $dx\wedge dx = dy\wedge dy = 0$, $dy\wedge dx = -dx\wedge dy$ を用いた. よって Green の公式は次のように書き直される:

$$\int_{\partial K}\omega = \int_K d\omega.$$

この形の公式は n 次元でも成立している (Stokes の定理). 微分形式の言葉を使うと Gauss-Green-Stokes の定理は極めて美しい形で書き下すことができる[1]. □

[1]被積分函数の理論だけを取り出した「微分形式とその外微分」の理論と積分領域の理論だけを取り出した「chain とその境界」の理論は別々に展開でき, 前者は de Rham cohomology の理論と呼ばれており, 後者は homology の理論と呼ばれている. それらは「積分」によって双対の関係になっている.

[60] **(面積)** $\mathbb{R}^2$ における区分的に滑らかな境界を持つ一般の領域 K に関する Green の公式を用いて次を示せ:

$$(K \text{ の面積}) = \frac{1}{2}\int_{\partial K}(x\,dy - y\,dx) = \int_{\partial K} x\,dy = -\int_{\partial K} y\,dx.$$

特に K が区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた領域であり, 境界 ∂K が左回りに $(x(t), y(t))$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ でパラメーター付けられているならば

$$(K \text{ の面積}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy' - yx')\,dt = \int_{t_0}^{t_1} xy'\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} yx'\,dt. \quad \square$$

ヒント. Green の公式を $(f, g) = (-y/2, x/2), (0, x), (-y, 0)$ の場合に適用してみよ. $\square$

以下はおまけの問題である.

せっかくなので, 複素函数論の問題も出しておく. $\mathbb{C}$ の複素座標を z と書き, 実座標 (x, y) を $z = x + iy$ によって入れる.

[61] 記号 dx, dy を基底にもつ複素ベクトル空間を $V = \mathbb{C}dx + \mathbb{C}dy$ と書き, $\mathbb{C}$ の開集合 U 上の微分可能函数 f に対して, V に値をもつ次の函数を考える:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

これを f の外微分と呼ぶ. このとき $dz, d\bar{z} \in V$ は df の定義より $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$ となる. 等式

$$df = A\,dz + B\,d\bar{z}$$

によって, U 上の函数 A, B を定義すると次が成立する:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right). \quad \square$$

そこで, 作用素 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, を次のように定義する:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ の定義はこの天下り的な公式を暗記するより, 上の問題の定式化の形で憶えた方が楽である. また, 微分形式の計算は非常に便利なので, 早目に修得するように努力した方が良い. df の定義を真似て ∂f, $\overline{\partial} f$ を次のように定義する:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \qquad \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

[62] $\mathbb{C}$ の開集合 U 上の C^1 函数 f に対して以下の条件が互いに同値であることを証明せよ:

(1) 任意の $z \in U$ に対して次の極限が存在する:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

(2) U 上で, $\overline{\partial} f = 0$.

(3) 実数値函数 u, v によって, f を $f = u + iv$ と表示すると U 上で次が成立する:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

そして, これらの条件のどれかが成立すれば (1) の極限は $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ に一致する. □

この問題の条件をみたす函数 f を U 上の正則函数 (holomorphic function on U) と呼ぶ. 正則函数を特徴付けている微分方程式 (2) または (3) を Cauchy-Riemann の方程式と呼ぶ.

[63] **(矩形型領域における Cauchy の積分定理)** 実数 $a < b$, $c < d$ に対する矩形型領域 $U = \{\, x + iy \mid a < x < b, c < y < d \,\}$ を考える. f が $\overline{U}$ の近傍における C^1 函数であるとき, 次が成立する:

$$\int_{\partial U} f\,dz = \int_U \overline{\partial} f \wedge dz.$$

特に, f の U への制限が正則函数ならば次が成立する:

$$\int_{\partial U} f\,dz = 0.$$

正則函数に関するこの結果は, Cauchy の積分定理と呼ばれている. □

ヒント: Green の公式. $dz \wedge dz = 0$ より, $d(f\,dz) = df \wedge dz = \overline{\partial} f \wedge dz$. が成立する[2]. □

[64] **(Cauchy の積分公式)** 実数 $a < b$, $c < d$ に対する矩形型領域 $U = \{\, x + iy \mid a < x < b, c < y < d \,\}$ を考える. f が $\overline{U}$ の近傍上の C^1 函数であるとき, 次が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_U \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \wedge d\zeta}{\zeta - z}\right) \qquad \text{for} \quad z \in U$$

特に, f の U への制限が正則函数ならば次が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \qquad \text{for} \quad z \in U.$$

この公式は Cauchy の積分公式 (もしくは積分表示) と呼ばれている. □

ヒント: まず, z を中心とする十分小さな半径 $\varepsilon > 0$ を持つ開円板 $U_\varepsilon(z)$ を取り, $U - U_\varepsilon(z)$ に対する Green の公式を考え, $\varepsilon \to 0$ の極限を考える. □

[2] ここで微分形式の記号を用いているが, 解答において微分形式の概念を用いることを強制するつもりはない. しかし, 微分形式の概念を用いた方が証明はもちろん簡単になる.

4.2 Fourier 級数展開と Wirtinger の不等式

Fourier 級数の理論によって周期 2π を持つ任意の実数値 C^∞ 函数 $f(t)$ は一様絶対収束する次の形の級数で一意的に表わされることが知られている:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

この表示を $f(t)$ の **Fourier (級数) 展開**と呼ぶ. $f(t)$ が C^∞ 級であるという仮定から, a_n, b_n は $n \to \infty$ で急激に 0 に近づき, 級数 $(*)$ は項別微分可能であることも導かれる. ここでは以上の結果を認めて使うことにする.

[**65**] $(*)$ から次を導け:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots). \quad \square \end{aligned}$$

ヒント. $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して次の公式が成立している:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\,dt = \delta_{m,n}, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt = \delta_{m,n}, \\ &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos mt \sin nt\,dt = 0. \end{aligned}$$

これらの公式と一様絶対収束と定積分の順序の交換を使う. $\square$

[**66**] $f(t)$ が C^∞ 級であるという仮定から, 任意の $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $n^k a_n$, $n^k b_n$ が $n \to \infty$ で 0 に収束することを導け. $\square$

ヒント. ひとつ上の問題の a_n, b_n の公式を f の k 階の導函数 $f^{(k)}$ に適用し, 部分積分してみよ. もしくは f の Fourier 展開を項別微分してみよ. $f^{(k)}$ の Fourier 展開も一様絶対収束することを認めて使って良い. $\square$

[**67**] **(Wirtinger の不等式)** $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ と仮定し, $(*)$ から次の不等式を導け:

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt \leqq \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,dt.$$

さらに等号が成立するための必要十分条件は

$$f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

と同値であることも示せ. $\square$

ヒント. $(*)$ のもとで $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ は

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

と同値である．このとき

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt).$$

問題 [**65**] のヒントの公式を用いて次を示せ:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

この公式から Wirtinger の不等式およびその等号成立条件がただちに導かれる． □